# FACIT

1.1.1 a. $7956 = 21 \cdot 378 + 18$   b. $7497 = 21 \cdot 357 + 0$
c. 7497 är delbart med 21

1.1.2 a. $3^2 \cdot 5 \cdot 11$   b. $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
c. $3 \cdot 83$

1.1.3 a. 319   b. $-564$

1.1.4 a. $a + 2 \cdot a \cdot b$
b. $2 \cdot a \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b - 2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b = 2a^2b + 2ab^2 - 2a^2 - 2ab$

1.1.5 a. $-2 < 4 < 5 < 11$   b. $d, b, -a, -c$

1.2.1 a. $1/8$   b. $-281/28$   c. $-196/33$
d. $17/20$   e. $251/24$   f. $344/255$

1.2.2 a. $13/12$   b. $-11/420$

1.2.3 a. $1/4$   b. $3/34$   c. $39/22$
d. 24   e. $38/15$   f. $10/57$
g. $273/128$   h. $11011/1536$

1.2.4 a. $-2$   b. $253/340$   c. $-1349/1968$

1.2.5 a. $c > b > d > a$   b. $b > a > c > d$

1.3.1 a. 25   b. 32   c. 81
d. $-64$   e. 1   f. 100
g. 1   h. 1

1.3.2 a. $1/4$   b. $-1/27$   c. 1

1.3.3 a. $2^{-6}$   b. $2^2$   c. $2^{-4}$

1.3.4 a. $4/21$   b. $-72$

1.4.1 a. Ja.
b. Ja, det sanna påståendet "2 är mindre än 3" är en av möjligheterna i "2 är mindre än 3 *eller* 2 lika med 3". Alternativt kan man hänvisa till att motsatsen $2 > 3$ är ett falskt påstående.
c. Nej.

1.4.2 a. $c - a = (c - b) + (b - a) > 0$
b. Exemplet
c. $(b + d) - (a + c) = (d - c) + (b - a) > 0$
d. $b \cdot c - a \cdot c = (b - a) \cdot c > 0$
e. $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c = -(b - a) \cdot c = (b - a) \cdot -c > 0$

1.4.3 T.ex. $3 < 4$ och $2 < 6$ men $(3-2) < (4-6)$ gäller inte.

1.4.4 a. $2,125$
b. $1,166666\ldots$
c. $-0,2142857142857\ldots$

1.4.5 a. $-7/3$ b. $284/333$ c. $31/25$

1.5.1 a. 7 b. 7 c. 0

1.5.2 a. $-2$ och 0 b. $-4.5$ och 10.5 c. $-4$
d. $-1$ och 4 e. Inget tal satisfierar ekvationen

1.5.3 a. $-1 \leq x \leq 3$ b. $-8 < x < 2$ c. $x < -8$ eller $x > 2$
d. $x = -2$ e. $-1 \leq x < 0$ eller $4 < x \leq 5$
f. $x \neq -1$

1.6.1 a. 0.7 b. 300 c. $15\sqrt{2}$
d. $\sqrt{2}/5$ e. $\sqrt{3}$ f. $10-\sqrt{2}$

1.6.2 a. $\pm 5$ b. $\pm\sqrt{5}$ c. $\pm 2/3$
d. $\pm 2\sqrt{6}/3$ e. 0

1.6.3 a. $\sqrt{6}/3$ b. $\sqrt{21}/7$ c. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
d. $\sqrt{11}+3$ e. $-(2+\sqrt{5})$ f. $3-2\sqrt{2}$

1.7.1 a. 3 b. $1/2$ c. 2
d. $1/2$ e. 9 f. $1/9$
g. 5

1.7.2 a. $3^{1/3}$ b. $2^{1/2}$ c. $-2\cdot 3^{1/3}$
d. $3^{1/12}$ e. $2^{1/10}$ f. $5^{1/8}$
g. $2^{2/3}$ h. $2\cdot 3^{1/3}$

1.7.3 a. $3a$ b. $x^{1/4}$ c. $x^{1/15}$
d. $a^{1/2}$ e. $a^{5/12}$ f. $x^{3/4}$

1.8.1 a. $9t-u-9v$ b. $2a+12c+73x$

1.8.2 a. $p+r$ b. $3b+2c$
c. $4a-2c$

1.8.3 a. $20x^2z^8$ b. $-27a^4b^5c^4$
c. $14p^3q^9r^4s^2$

1.8.4 a. $27x^6y^3$ b. $-128a^8b^7c^6$
c. $a^{4p}b^{7p}$

1.8.5 a. $2x^2+3xy-2y^2$ b. $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$
c. $a^5+x^5$ d. $-2x^4+x^3+2x^2-13x+6$

1.8.6 a. $9a^2-24ab+16b^2$ b. $a^6+4a^3b^2+4b^4$
c. $2m^8+32$

1.8.7 a. $36-x^2$ b. $a^4-y^2$
c. $x^{12}-81$

1.8.8 a. $y^3+9y^2x+27yx^2+27x^3$ b. $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$
c. $x^{12}-18x^9+108x^6-216x^3$

1.8.9 a. $(x-a^2)(x+a^2)$ b. $x^2(3x+5)(3x-5)$
c. $(x+9)^2$ d. $x^2y(x-2y)^2$
e. $x(x-1)(x^2+x+1)$ f. $3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$
g. $-x^2(x^2+1)(x+1)(x-1)$ h. $2x^2y(3y^2-2x)(9y^4+6y^2x+4x^2)$

1.8.10 a. $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$
b. $1-7y+21y^2-35y^3+35y^4-21y^5+7y^6-y^7$
c. $32x^5+80x^4a^2+80x^3a^4+40x^2a^6+10xa^8+a^{10}$
d. $x^6y^{12}-18x^5y^{10}z+135x^4y^8z^2-540x^3y^6z^3+1215x^2y^4z^4-1458xy^2z^5+729z^6$

1.8.11 a. $3a^6/8c^2$ b. $8y/9x$
c. $(2a+y)/2a$ d. $3xy+5y-2x$

1.8.12 a. $2/(b-a)$
b. $x^2(1+2x)/(1-2x)$
c. $-1/(x-y)^2$
d. $(b^4+3)/(b^4-3)=(b^4+3)/((b-\sqrt[4]{3})(b+\sqrt[4]{3})(b^2+\sqrt{3}))$
e. $(a^2+ab+b^2)/(a-b)$
f. $(a+1)/a$
g. $(x^2+4)/(x^2+2x+4)$

1.8.13 a. $a^2-ab+b^2$ b. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$
c. Kan inte förkortas d. $-(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

1.8.14 a. $x-y^2$ b. $(x^2+1)(x-1)/(x(x^2-x+1))$
c. $x/y$ d. $1/2$

1.8.15 a. $18/(x(x+3)(x-3))$
b. $(2x^2-7x-2)/(2x(x-4))$
c. $-1/(x(x+1)(x-1))$
d. $(8-2x^2-x^3)/(4(x-2)(x+2)(x^2+2x+4))$

1.8.16 a. $|c+2|$, gäller för alla reella $c$
b. Om $c>0$ är $\frac{c}{|c|}=1$, och om $c<0$ är $\frac{c}{|c|}=-1$.
c. 1, gäller för $c>0$
d. $-c\sqrt{9-c}$, gäller för $c<9$
e. $1/\sqrt{c-2}$, gäller för $c>2$
f. Om $c>0$ är $\frac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=\sqrt{c+2}$. Om $-2\leq c<0$ är $\frac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=-\sqrt{c+2}$.

2.1.1 a. $x = 7$ b. $x = -3/7$ c. Alla tal.
d. Inga lösningar. e. $5/4$ f. $-4/3$

2.1.2 a. $y = 3x - 7$ b. $y = (2x-3)/11$

2.2.1 a. 1 och $-4$
b. $-1$ och 3
c. $-1$ och $3/2$
d. 0 och $-3/7$
e. $3/2$
f. $-(3+\sqrt{29})/10$ och $-(3-\sqrt{29})/10$
g. $-(3+\sqrt{29})/10$ och $-(3-\sqrt{29})/10$

2.2.2 a. $(x+2)^2 - 3$ b. $(2x-9)^2 + 19$
c. $39 - (x+6)^2$

2.2.3 a. $(x-2)(x+3)$
b. $-2(x-1)(x+4)$
c. $(x-1/2-\sqrt{5}/2)(x-1/2+\sqrt{5}/2)$
d. $x^2+x+1$

2.2.4 a. $x^2 + 3x - 10 = 0$ b. $6x^2 - x - 2 = 0$
c. $x^2 - 2x - 4 = 0$

2.3.1 a. 1 och $-4$ b. $6+3\sqrt{3}$ och $6-3\sqrt{3}$
c. Inga reella lösningar

2.3.2 a. $(1+\sqrt{5})/2$ och $(1-\sqrt{5})/2$ b. Inga reella lösningar

2.3.3 a. 9 b. 2
c. Ingen rot d. 2
e. 4 f. 12
g. 3 h. $(5-\sqrt{13})/6$
i. 6

2.3.4 a. 2, $-2$, $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$ b. 5, $-5$, 7 och $-7$
c. 2 och $-2$ d. $\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$
e. $\sqrt{6}/2$ och $-\sqrt{6}/2$

2.3.5 a. 9 b. $19 - 6\sqrt{10}$
c. 1 och 4

2.4.1 a. $x = 3{,}5,\ y = 1$
b. $x = 4,\ y = 1$
c. $x = -2,\ y = 2$
d. saknar lösning
e. oändligt många lösningar av formen: $x = t,\ y = 3 - 5t$ för alla reella $t$
f. $s = 3,\ t = 1$
g. $x = 2,\ y = 3$
h. $x = 3,\ y = 5,\ z = 2$
i. $x = 10,\ y = -0{,}04,\ z = 0{,}06$
j. $a = -1,\ b = 1,\ c = 2$
k. $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$

2.4.2 Han var 48 år.

2.5.1 a. $(x-1)/(x+4)$ b. $(x+2)/(x^2+2x-3)$

2.5.2 a. $\left\{0, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ b. $\{-2,1,3\}$
c. $\left\{-2, \frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$ d. $\{2\}$

2.5.3 a. 1 är en trippelrot b. 1 (enkelrot)
c. 1 och $-1$ är trippelrötter

2.5.4 a. $(x+2)(x-1)(x-3)$ b. $(x+2)\left(x+\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$
c. $(x-2)(-3+x-x^2)$

3.1.1 a. $180°,\ \pi$ b. $45°,\ \pi/4$ c. $120°,\ 2\pi/3$
d. $60°,\ \pi/3$ e. $270°,\ 3\pi/2$ f. $420°,\ 7\pi/3$

3.1.2 a. $\pi/2$ b. $\pi/6$ c. $\pi/4$
d. $3\pi/2$ e. $\pi/10$ f. $5\pi/6$
g. $11\pi/18$

3.1.3 a. $540°$ b. $90°$ c. $135°$
d. $75°$

3.1.4 a. $2\pi/3$ b. $25\pi/6$ c. $20\pi/9$

3.1.5 a. $120°$ b. $108°$ c. $(1-\frac{2}{n})\cdot 180°$

3.1.6 a. $\sqrt{39}/2$ l.e. b. $5\sqrt{39}/4$ a.e. c. $5\sqrt{39}/8$ l.e.

3.1.7 2 längdenheter, dvs. $M$ är mittpunkten på sidan $AB$

3.2.1 a. 6 b. $\sqrt{13}$
c. 5 d. 10
e. $\sqrt{13}$

3.2.2 a. $(0,-2)$ b. $(0,9/2)$

3.2.3 a. $(1+\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ eller $(1-\sqrt{3},2\sqrt{3})$
b. $\big((1+3\sqrt{3})/2,(3-3\sqrt{3})/2\big)$ eller $\big((1-3\sqrt{3})/2,(3+3\sqrt{3})/2\big)$

3.2.4 a. $3y=2x$ b. $2x+3y=7$
c. $y=3$ d. $x+2=0$

3.2.5 a. $2x-y-1=0$ b. $3x+2y=0$
c. $y=0$ d. $x+4y-2=0$
e. $21x+45y-19=0$ f. $7x+2=0$

3.2.6 a. $(-3,4)$
b. $(-6/7,4/7)$
c. saknar skärningspunkt (parallella linjer)
d. sammanfallande linjer

3.2.7 Bevis

3.2.8 a. $2x-y-4=0$ b. $3x+y-3=0$
c. $x=0$

3.2.9 a. $5x-2y=0$ b. $3x+y+2=0$
c. $9x-5y-3=0$ d. $4x+y=0$

3.2.10 a. $x^2+y^2=81$ b. $(x-2)^2+(y+3)^2=49$
c. $(x+6)^2+y^2=25/4$

3.2.11 a. $x^2+2x+y^2-6y=0$ b. $x^2+2x+y^2-6y+2=0$
c. $x^2+2x+y^2-6y=63$

3.2.12 Cirkeln med medelpunkt och radie
a. origo, $R=\sqrt{3}$ b. $(0,2)$, $R=3$
c. $(1,-3/4)$, $R=5/4$ d. $(-2,1/2)$, $R=1/2$
e. $(1/2,-2/3)$, $R=4/3$

3.2.13 a. $(1,3)$ och $(0,-2)$ b. $(0,-2)$, tangering
c. ingen skärningspunkt

3.2.14 a. $x^2+y^2+4x+4y=2$ b. punkterna ligger i rät linje
c. $x^2+y^2-3y-19=0$

3.3.1 a. $1/2$ b. $1/2$ c. $1/4$
d. $2-\sqrt{3}$

3.3.2 a. $a=3/2$, $b=3\cdot\sqrt{3}/2$
b. $A=B=45°$,
c. $a=\sqrt{5/3}$, $c=\sqrt{20/3}$
d. $a=5/2$, $b=5\cdot\sqrt{3}/2$,
e. $a=12/5$, $b=9/5$

3.3.3 a. $\cos v = 4/5,\ \tan v = 3/4$
b. $\cos v = \sqrt{5}/3,\ \tan v = 2/\sqrt{5}$
c. $\sin v = 2\sqrt{2}/3,\ \tan v = 2\sqrt{2}$
d. $\sin v = \sqrt{21}/5,\ \tan v = \sqrt{21}/2$
e. $\sin v = 1/\sqrt{5},\ \cos v = 2/\sqrt{5}$
f. $\sin v = 24/25,\ \cos v = 7/25$
g. $\sin v = 10/\sqrt{149},\ \cos v = 7/\sqrt{149}$

3.3.4 a. tredje b. andra c. andra
d. fjärde e. andra f. andra
g. första

3.3.5 a. $-1$ b. $-1$ c. $\sqrt{3}/2$
d. $\sqrt{3}/2$ e. $0$ f. $1$

3.3.6 Bevis

3.3.7 a. $2\sqrt{2}/3$
b. $\sqrt{21}/5$
c. $\sqrt{5}/3$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{5}/3$ (andra kvadranten)

3.3.8 a. $0,8$
b. $\sqrt{21}/5$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{21}/5$ (fjärde kvadranten)

3.3.9 a. $-1/\sqrt{15}$
b. $-\sqrt{91}/3$
c. $1/\sqrt{3}$ (tredje kvadranten) eller $-1/\sqrt{3}$ (fjärde kvadranten)
d. $\sqrt{77}/2$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{77}/2$ (fjärde kvadranten)

3.3.10 a. $\sin v = -2/\sqrt{5},\ \cos v = -1/\sqrt{5}$
b. $\sin v = 1/\sqrt{10},\ \cos v = -3/\sqrt{10}$
c. $\begin{cases} \sin v = 5/\sqrt{26},\ \cos v = -1/\sqrt{26} & \text{(andra kvadranten) eller} \\ \sin v = -5/\sqrt{26},\ \cos v = 1/\sqrt{26} & \text{(fjärde kvadranten)} \end{cases}$
d. $\begin{cases} \sin v = 1/\sqrt{5},\ \cos v = -2/\sqrt{5} & \text{(andra kvadranten) eller} \\ \sin v = -1/\sqrt{5},\ \cos v = 2/\sqrt{5} & \text{(fjärde kvadranten)} \end{cases}$

3.3.11 a. $-1/2$ b. $\sqrt{3}/2$ c. $-\sqrt{3}/2$
d. $-1$ e. $1/\sqrt{2}$ f. $-1/2$
g. $-1/2$ h. $1/\sqrt{3}$ i. $-1/\sqrt{2}$
j. $-\sqrt{3}$

3.3.12 a. $c = 2$, $B = 30$ och $C = 90$
b. $A = 30^\circ$, $B = 30^\circ$, $b = 1$
c. $c = \sqrt{3}$, $A = 90^\circ$ och $B = 60^\circ$
d. $a = 1$, $B = 45^\circ$ och $C = 90^\circ$

3.3.13 a. $4$
b. $4\sqrt{3}$

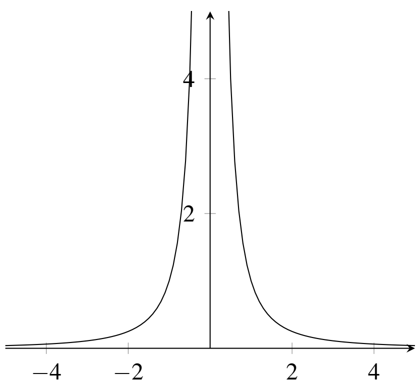
3.3.14 a. $35\sqrt{3}/4$ b. $6$ c. $9/4$

4.1.1 a. Den är injektiv för den är en linje med riktningkoefficient $p/1000$ och alltså strängt växande.
b. Den är injektiv om och endast om alla Lisas vattenmeloner har olika vikt. Troligen är den det (om inte Lisa har väldigt många vattenmeloner i sitt fruktstånd) men vi vet inte säkert.
c. Vi har att $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ och $g \circ f(x)$ är melonen $x$ pris i kronor, om exempelvis $v$ är en melon som väger exakt 1 kilo så är $g \circ f(v) = g(f(v)) = g(1000) = \frac{p \cdot 1000}{1000} = p$.
d. Det hänger på om $f$ är injektiv, dvs. om alla melonerna har olika vikt. Om så är fallet så är också $g \circ f$ injektiv, annars inte.
e. Den är inte definierad, eftersom $g$ ger rationella tal som inte går att stoppa in i $f$ som vill ha vattenmeloner.

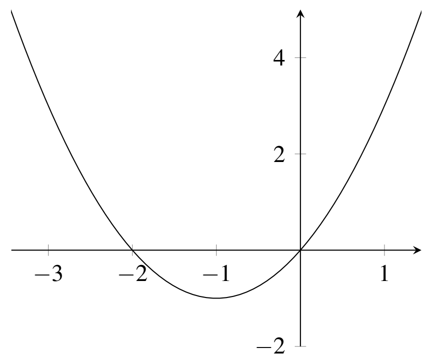
4.1.2 a. Strängt växande och därmed injektiv, udda samt har sig själv som invers. Värdemängd: $\mathbb{R}$.
b. Varken växande eller avtagande, ej injektiv men jämn ty $b(-x) = 1/(-x)^2 = 1/x^2 = b(x)$ och saknar därför invers. Värdemängd: $\mathbb{R}_+$. Se figur 65.
c. Varken växande eller avtagande, ej injektiv ty t ex $c(-2) = c(0) = 0$ så saknar invers, ej udda eller jämn (t ex $c(-2) = 0$ och $c(2) = 8$. Värdemängd: $[-1, \infty)$. Se figur 66.
d. Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då bara definierad för icke-negativa tal. Inversen ges av $d^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ med $d^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$. Värdemängd: $[1, \infty)$. Se figur 67.
e. Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då t ex $e(-1) = 0$ och $e(1) = 2$. Inversen ges av $e^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $e^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Värdemängd: $\mathbb{R}$. Se figur 68.

4.1.3 $f \circ f(x) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$
$f \circ g(x) = 1/(1+x^2)^2 - 1 = -x^2(2+x^2)/(1+x^2)^2$
$g \circ f(x) = 1/(1+(x^2-1)^2) = 1/(2-2x^2+x^4)$
$g \circ g(x) = (1+x^2)^2/((1+x^2)^2+1) = (1+2x^2+x^4)/(2+2x^2+x^4)$

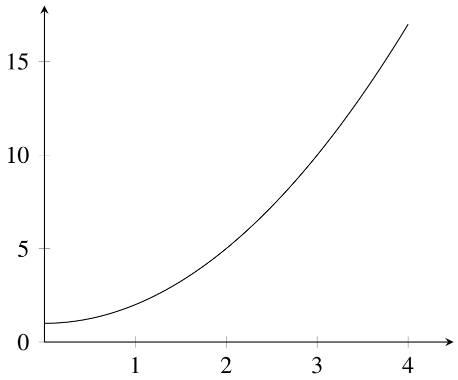
4.1.4 Funktionen är bijektiv och därmed inverterbar. Inversen är $f^{-1}(y) = \frac{x+3}{4}$



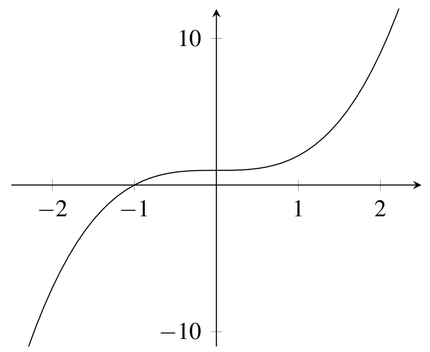

Figur 65: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2a




Figur 66: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2b



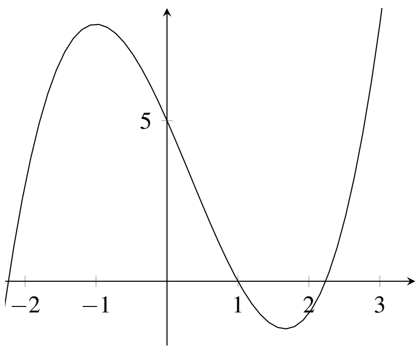

Figur 67: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2c



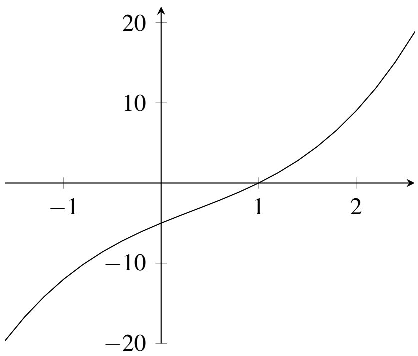

Figur 68: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2d

4.2.1 a. $p(x) = x^2+2x-7 = (x+1)^2-8$ ger rötterna $-1\pm\sqrt{8} = -1\pm 2\sqrt{2}$, minimum $p(-1) = -8$ så värdemängden är $[-8,\infty)$.
b. $p(x) = x^2-3x+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$ ger att det saknas (reella) rötter, minimum $p(\frac{3}{2}) = \frac{15}{4}$ så värdemängden är $[\frac{15}{4},\infty)$.
c. $p(x) = 5-4x-x^2 = -(x+2)^2+9$ ger rötterna $-5$ och 1, maximum $p(-2) = 9$ så värdemängden är $(-\infty,9]$.

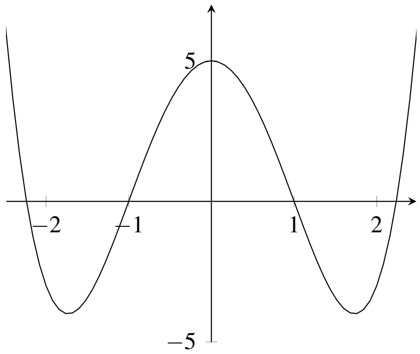
4.2.2 a. Nollställen i $\{-\sqrt{5},1,\sqrt{5}\}$. Funktionen går mot $-\infty$ respektive $\infty$ då $x$ går mot $-\infty$ respektive $\infty$ (se figur 69).
b. Nollställe i 1. Funktionen går mot $-\infty$ respektive $\infty$ då $x$ går mot $-\infty$ respektive $\infty$ (se figur 70).
c. Nollställe i $\{-\sqrt{5},-1,1,\sqrt{5}\}$. Funktionen går mot $\infty$ då $x$ går mot $-\infty$ eller $\infty$ (se figur 71).




Figur 69: Grafen till funktionen i uppgift 4.2.2a

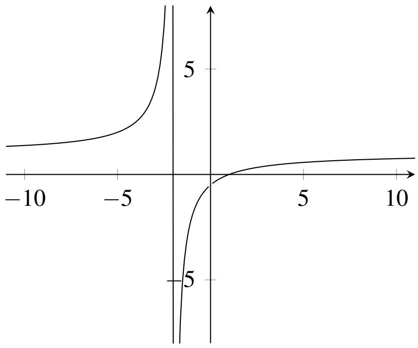



Figur 70: Grafen till funktionen i uppgift 4.2.2b

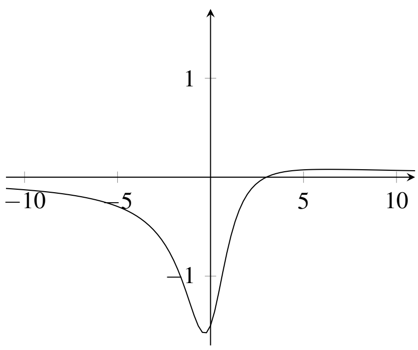



Figur 71: Grafen till funktionen i uppgift 4.2.2c

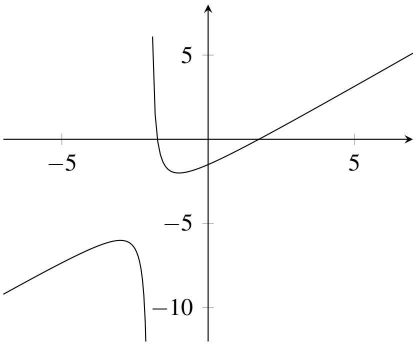
4.3.1 a. Nollställe i 1 och funktionen är definierad för alla tal utom $-2$ (se figur 72).
b. Nollställe i 3 och funktionen är definierad för alla tal) (se figur 73).
c. Nollställen i $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ och funktionen är definierad för alla tal utom $-2$) (se figur 74).
d. (Reella) nollställen saknas och funktionen är definierad för alla tal utom $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$) (se figur 75).



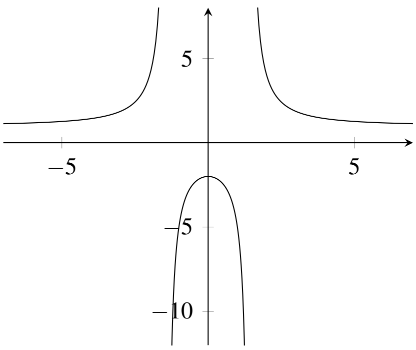

Figur 72: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1a




Figur 73: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1b




Figur 74: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1c




Figur 75: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1d

4.4.1 a. Grafen är ritad i figur 76,

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{om } x \geq -2, \\ -(x+2) & \text{om } x < -2. \end{cases}$$

b. Grafen är ritad i figur 77,

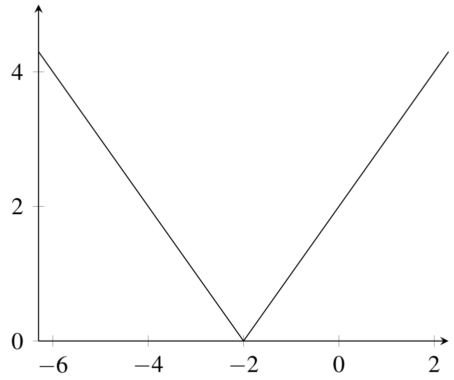
$$|5x-2| = \begin{cases} 5x-2 & \text{om } x \geq \frac{2}{5}, \\ -(5x-2) & \text{om } x < \frac{2}{5}. \end{cases}$$

c. Grafen är ritad i figur 78,

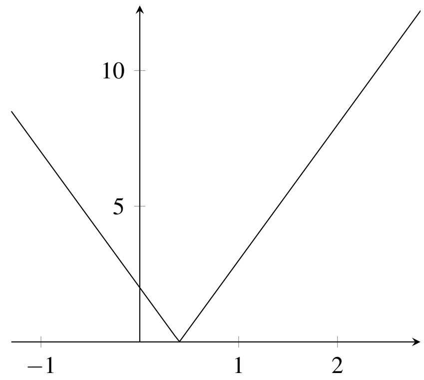
$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{om } x \leq -2 \text{ och } x \geq 2, \\ -(x^2-4) & \text{om } -2 < x < 2. \end{cases}$$

d. Grafen är ritad i figur 79,

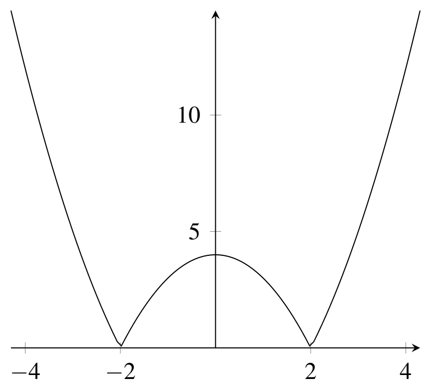
$$|2x-2|+|2x+1| = \begin{cases} (2x-2)+(2x+1) = 4x-1 & \text{om } x \geq 1, \\ -(2x-2)+(2x+1) = 3 & \text{om } -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ -(2x-2)-(2x+1) = -4x+1 & \text{om } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



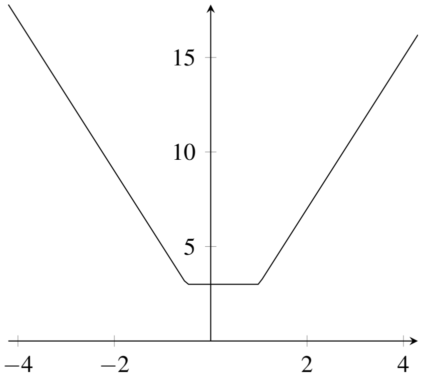

Figur 76: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1a




Figur 77: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1b




Figur 78: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1c




Figur 79: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1d

4.5.1 $f_1(x) = x^{-1/5}$: glesa prickar. Invers $f_1^{-1} = f_3$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_2(x) = x^5$: streckad. Invers $f_2^{-1} = f_4$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$
$f_3(x) = x^{-5}$: täta prickar. Invers $f_3^{-1} = f_1$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_4(x) = x^{1/5}$: heldragen. Invers $f_4^{-1} = f_2$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$

4.6.1 Det är bara bara a) och e) som stämmer.

4.6.2 a. 3 | b. $-2$ | c. 4
d. 0.7 | e. $\frac{1}{4}$ | f. 2

4.6.3 a. 2 | b. $\frac{1}{2}$ | c. $-1$
d. $-2$ | e. 7 | f. $\frac{1}{3}$

4.6.4 a. $x = 1$ | b. $x = 10$ | c. $x = e^2$
d. $x = 0.0001$ | e. $x = 10\sqrt{10}$

4.6.5 a. 2 | b. 0 | c. $\ln 2$

4.7.1 a. udda | b. jämn | c. jämn
d. jämn | e. udda | f. inget

4.7.2 a. $c$ | b. $-c$ | c. $c$
d. $\sqrt{1-c^2}$ | e. $c/\sqrt{1-c^2}$ | f. $c/\sqrt{1-c^2}$

4.7.3 a. $\pi/2$ | b. 0 | c. $\pi/4$
d. $\pi/6$ | e. $\pi/3$ | f. $-\pi/6$

# Facit

5.1.1 a. $2+5i$ b. $7-11i$
c. $-7-24i$ d. $1/2-1/2\,i$
e. $1/17+4/17\,i$ f. $-1/17+13/17\,i$
g. $61/170+23/170\,i$

5.1.2 a. $3\left(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})\right)$ b. $\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$
c. $5\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ d. $2\left(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)$
e. $2\left(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})\right)$

5.1.3 a. $-i$
b. $-4$
c. $1+\sqrt{3}i$

5.1.4 a. 16
b. $2^{10}\left(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=-2^9-2^9\sqrt{3}i$
c. $-4+4i$

5.2.1 a. $x_1=-1+i,\ x_2=-1-i$
b. $x_1=(-3+i\sqrt{11})/10,\ x_2=(-3-i\sqrt{11})/10$
c. $x_1=(3+i\sqrt{3})/6,\ x_2=(3-i\sqrt{3})/6$

5.2.2 a. $x_1=1+i,\ x_2=1-i,\ x_3=-1$
b. $x_1=1+i,\ x_2=1-i,\ x_3=(-1+i\sqrt{3})/2,\ x_4=(-1-i\sqrt{3})/2$

5.2.3 $x^4-8x^3+32x^2-80x+100$

5.2.4 a. $v=\pm\pi/3+n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
b. $v=\pi/12+n\cdot\pi,\ v=5\pi/12+n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
c. $v=\pi/2+n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
d. Saknar (reell) lösning
e. $v=1/3+\pi/2+n\cdot 2\pi/3,\ n\in\mathbb{Z}$

5.2.5 a. $v=\pi/6+n\cdot 2\pi/3,\ n\in\mathbb{Z}$
b. $v=n\cdot\pi,\ v=\pi/4+n\cdot\pi/2,\ n\in\mathbb{Z}$
c. $v=n\cdot\pi/2,\ n\in\mathbb{Z}$

5.2.6 a. $v=\pi/4+n\cdot\pi/2,\ n\in\mathbb{Z}$
b. $v=\pi/6+n\cdot 2\pi,\ v=5\pi/6+n\cdot 2\pi,\ v=\arcsin(1/3)+n\cdot 2\pi,$
$v=\pi-\arcsin(1/3),\ n\in\mathbb{Z}$
c. $v=\pi+n\cdot 2\pi,\ v=\pm\pi/3+n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
d. $v=n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
e. Saknar (reell) lösning

5.2.7 a. $x=6$ b. $x=3/2$ c. Saknar reell lösning
d. $x=0$ e. $x=3$

5.2.8 a. $x=0$ b. $x_1=0,\ x_2=1$ c. $x=-1$

5.2.9 a. $x = e^3$ b. $x = 1 + 4\sqrt{2}$ c. $x = 8$
d. $x = 3$ e. $x = \left(3 - \sqrt{5}\right)/2$

5.2.10 a. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$
b. $x_1 = 21/2$, $x_2 = -9/2$
c. $x = -4$

5.2.11 a. $x_1 = 5/2$, $x_2 = -3/2$
b. Alla $x$ där $-1 \leq x \leq 2$
c. $x = \log_2 3 \approx 1.585$
d. $x = 1/\sqrt{2}$

5.3.1 a. $[-1/2, 1]$
b. $((-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2)$
c. gäller ej för något $x$
d. alla reella $x \neq 1$
e. alla reella $x$ sådana att $x \in (0,1)$ eller $x \in (2,\infty)$
f. alla reella $x$ sådana att $x \in (-\infty, -1/2)$ eller $x \in (1/3, 3)$
g. alla reella $x$ sådana att $x \in [-2, 2)$ eller $x \in [3, \infty)$
h. $(-1, 2]$
i. $(\sqrt{2}, 2)$.

5.3.2 a. exempelvis $x^2 - x - 6 < 0$ b. exempelvis $x^2 - 7x + 10 \leq 0$
c. exempelvis $x^2 - 3x - 10 > 0$ d. exempelvis $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

5.3.3 a. exempelvis $x^2 - x - 6 < 0$ b. exempelvis $(x+2)/(x-3) \leq 0$
c. exempelvis $(x-3)/(x+2) \leq 0$ d. exempelvis $x^2 - 7x + 10 \leq 0$
e. exempelvis $(x+2)/(x-5) \geq 0$ f. exempelvis $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

5.3.4 a. alla punkter under den räta linjen med ekvation $x - 3y = 0$
b. alla punkter på eller under den räta linjen med ekvation $2x + 3y = 4$
c. alla punkter utanför cirkelskivan med medelpunkt i origo och radie $2\sqrt{2}$ (den avgränsande cirkeln ingår heller inte)
d. alla punkter i cirkelringen mellan cirklarna med medelpunkt i origo och radier 1 och $\sqrt{5}$, samt punkterna på cirkeln med medelpunkt i origo och radie 1.

5.3.5 Likhet uppnås om och endast om $t = 1$.

5.3.6 I båda fallen den andre bilisten. Likhet uppnås om och endast om $a = b$.

5.3.7 a. 2
b. 4

6.1.1 a. 1 b. Saknas c. 0 d. 4
e. Saknas f. 3 g. Saknas h. $\pi/2$
i. $-\pi/2$

6.1.2 Om $a$ är ett heltal så är $f(x) = a - 1$ om $x$ är aningen mindre än $a$ och $f(x) = a$ om $x$ är aningen större än $a$. I varje omgivning kring $a$ finns det alltså olika $x$ som ger både $a - 1$ och $a$ och därmed finns det inget gränsvärde.
Om $a$ inte är ett heltal så finns det en omgivning till $a$ som inte innehåller något heltal. Då kommer $f(x) = f(a)$ för alla $x$ i den omgivningen, ty funktionen växlar bara värde när man kommer till ett heltal. Alltså existerar gränsvärdet och är lika med $f(a)$.

6.2.1 a. $1/3$ b. $3/5$ c. $1/5$
d. $11/7$ e. $-17/7$

6.2.2 a. $2/3$ b. $-3$ c. $0$
d. $-2/7$ e. $-15/4$ f. Saknas

6.3.1 a. $x = 2$ och $y = 0$
b. $x = -2$ och $y = 1$
c. $x = -2$, $x = 2$ och $y = 0$
d. $x = -3$, $x = 2$ och $y = 0$
e. $x = -2$, $x = 1$ och $y = 1$
f. $y = 2$
g. $x = -2$ och $y = x - 2$
h. $x = 2$ och $y = -(2x + 5)/4$

6.3.2 Tips: Utför polynomdivision för att skriva om $f(x)$ som $p(x) + r(x)/n(x)$ där $r(x)$ har lägre grad än $n(x)$.

6.4.1 $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ och $[1, 2]$.

6.4.2 $[\pi/2, 3\pi/4]$

6.4.3 a. $c = 3$
b. Omöjligt, varje värde gör $f$ diskontinuerlig i punkten 0.

6.4.4 a. Ja, kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden.
b. Nej, diskontinuerlig i punkten 0.
c. Ja, kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden.

7.3.1 a. $15x^2 - 6$
b. $2x - 2/x^3$
c. $2e^x + 3\sin x$
d. $\sin x + x\cos x$
e. $2(3x^2\cos x - x^3\sin x)$
f. $3e^x(2x+1)/2\sqrt{x}$
g. $\sin x/\cos^2 x$
h. $-(2x^2+5)/(x\cdot(x^2+5\ln x)^2)$
i. $-1/(\sin x+\cos x)^2$
j. $(\sin x - x\cos x)/\sin^2 x$
k. $3/(x+2)^2$
l. $(2x-9x^2-x^4)/(x^3+1)^2$
m. $e^x(x\cdot\ln|x|-1)/(2x(\ln|x|)^2)$
n. $(x-1)/(2x\sqrt{x})$
o. $(-3x^4+4x^3+3x^2+6x-4)/(x^3+2x+1)^2$
p. $2^x(2x+x^2\cdot\ln 2)$
q. $3^x(x\cdot\ln 3-3)/x^4$
r. $x^3\cdot e^x(4\sin x+x\sin x+x\cos x)$
s. $((2+\ln x)(x^2+1)-4x^2\cdot\ln x)/(2\sqrt{x}(x^2+1)^2)$

7.3.2 a. $f'(\pi/4)=2$
b. $f'(1)=e$
c. $f'(-2)=-1/2$
d. $f'(4)=2+16(\ln 2)^2$.

7.3.3 a. $(e^{g(x)})' = e^{g(x)}\cdot g'(x)$
b. $(\sin(g(x)))' = \cos(g(x))\cdot g'(x)$
c. $(\cos(g(x)))' = -\sin(g(x))\cdot g'(x)$
d. $(\tan(g(x)))' = g'(x)/(\cos(g(x)))^2$
e. $\left((g(x))^n\right)' = n(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)$
f. $(1/g(x))' = -g'(x)/(g(x))^2$.

7.3.4 a. $4e^{4x}-2e^{1-2x}$
b. $3\cos(3x+1)$
c. $-2x\cdot\sin(x^2)$
d. $-2\sin x\cdot\cos x\ (=-\sin 2x)$
e. $5e^x\cdot\cos(5e^x)$
f. $21/\big(2\sqrt{21x-1}\big)$
g. $6x^3/\sqrt{3x^4+7}$
h. $2(2x+5)(x^2+5x)$
i. $-12x^3(1-x^4)^2$
j. $7/(7x+3)-1/(1-x)$
k. $(10x+3)/(5x^2+3x-4)$
l. $\Big((4x\sqrt{x}+1)/(2\sqrt{x})\Big)\cdot e^{x^2+\sqrt{x}}$
m. $1/\big(x\cdot\cos^2(\ln|x|)\big)$
n. $-1/\big(2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}\big)$
o. $-\tan x$
p. $1/(\sin x\cdot\cos x)$
q. $2/(x^2-1)$
r. $6/(1-9x^2)$
s. $(3+2x-2x^2)/((2x-1)(x^2+x+1))$
t. $(7+8x-8x^2-70x^3-15x^4)/((3x^2+7x+1)(5x^3-x^2+1))$

7.3.5 a. $-3/5$
b. $-3\pi$
c. $9$
d. $2$
e. $-1,1$
f. $7/2$

7.3.6 a. $2e^{x^2}\cdot\big(x\ln(2x+7)+1/(2x+7)\big)$
b. $\big(\cos x^3-6x^3\cdot\sin x^3\big)/(2\sqrt{x})$
c. $-\big(\cos(2-x)\cdot\cos 5x+5\sin(2-x)\cdot\sin 5x\big)$
d. $e^{2x}\big(2(x^3+1)-\frac{3}{2}x^2\big)/\big(x^3+1\big)^{3/2}$

7.3.7 a. $29/4$
b. $-2$
c. $-(28+9\ln 2)/4$

7.3.8 a. $-6\sin 3x\cdot\cos 3x\ (=-3\sin 6x)$
b. $2x\cdot\cos(x^2)\cdot e^{\sin x^2}$
c. $2x\cdot e^{x^2}\cdot\cos(e^{x^2})$
d. $2\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin^2 x}$
e. $-2x/\big(\sin(1-x^2)\cos(1-x^2)\big)$
f. $-6xe^{3\sqrt{1-2x^2}}/\sqrt{1-2x^2}$
g. $\Big(2\sqrt{x}(e^{-\sqrt{x}}+1)\Big)^{-1}$

7.3.9 a. tangent: $12x-y=16$, normal: $x+12y=98$
b. $x-3y=3-3\ln 3$, resp. $3x+y=9+\ln 3$
c. $y=1$, resp. $x=0$
d. $2x+y=8$, resp. $x-2y=4$
e. $x+y=0$, resp. $x-y=2\pi$
f. $x-5y-3=0$, resp. $5x+y+11=0$
g. $x+y+1=0$, resp. $x-y+1=0$
h. $19e\cdot x-4y=11e$, resp. $4x+19e\cdot y=4+38e^2$
i. $47x+2y+141-2\ln 2=0$, resp. $2x-47y+6+47\ln 2=0$.

7.5.1 $f''(2) = -(4+\sqrt{2})/16$.

7.5.2 a. $6x + 12/x^5$
b. $-2e^x \sin x$
c. $-(\ln x)/(4x\sqrt{x})$
d. $(2\sin x - x^2 \sin x - 2x\cos x)/x^3$.

7.5.3 a. $k = -5$
b. $k = -1$ eller $k = 2$
c. $k = -3, -2$ eller 1

7.5.4 a. $a = -1, b = \pm\sqrt{2}$
b. $a = -1, b = 0$ eller $a = 1, b = \pm 2$

7.5.5 a. minsta värde: $f(-2) = 1$ (även ett lokalt minimum); inget lokalt maximum
b. största värde: $f(2/3) = 10/3$ (även ett lokalt maximum); inget lokalt minimum
c. lokalt minimum: $f(-1) = 0$, lokalt maximum: $f(1) = 4$, inget minst eller störst värde
d. minsta värde: $f(-1) = -4$ (även ett lokalt minimum); inget lokalt maximum
e. största värde: $f(-1/2) = 19/8$ (även ett lokalt maximum), lokalt minimum: $f(1/2) = -13/8$, lokalt maximum: $f(1) = -1$
f. minsta värde: $f(-1/2) = 0$ (även ett lokalt minimum), lokalt maximum: $f(1) = 3$
g. största värde: $f(4) = 12$ (även ett lokalt maximum), minsta värde: $f(-2) = f(2) = 0$ (även ett lokalt minimum), lokalt maximum: $f(-3) = 5$ och $f(0) = 4$
h. minsta värde: $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$ (även ett lokalt minimum)
i. minsta värde: $f(1+\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 2$ (även ett lokalt minimum)
j. lokala maxima: $f(\pi/4 + n\cdot 2\pi) = e^{\pi/4+n\cdot 2\pi}/\sqrt{2}$, lokala minima: $f(5\pi/4 + n\cdot 2\pi) = -e^{5\pi/4+n\cdot 2\pi}/\sqrt{2}$
k. lokalt minimum: $f(0) = 1$, lokalt maximum: $f(1) = \sqrt{3/e}$
l. lokala minima: $f(1) = 0$ och $f(2) = 0$

7.6.1 a. $-2\cos x + \sin x + C$
b. $2\sqrt{x} + C$
c. $\ln|x| + e^x + C$
d. $10^x/\ln 10 + C$

7.6.2 a. $\sin(x+4) + C$
b. $2\sqrt{1+x} + C$
c. $e^{3x}/3 + C$
d. $\ln|x+5| + C$
e. $-\cos(2x)/2 + C$
f. $-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C$

7.6.3 a. $8\arctan x + \ln(1+x^2)/2 + C$
b. $\ln|1+x^3|/3 + C$
c. $\ln|\sin x| + C$
d. $-\ln|\cos x| + C$

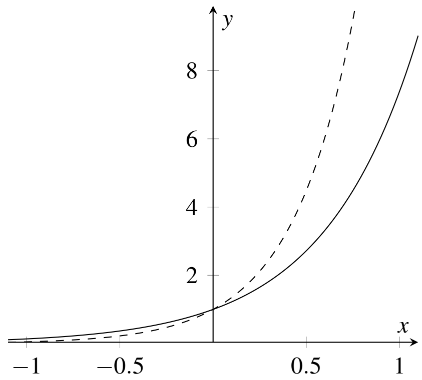
7.6.4 a. $1/2$
b. 0
c. $-1/2$
d. 0

7.6.5 a. $1/3$
b. 1
c. $\ln 2$
d. 0
e. 2
f. $\pi/3$
g. $3/8$
h. $-(1+2e-5e^2)/(2e^2)$
i. $-1/\pi$

7.6.6 Observera att $e^{3x}$ är störst för positiva $x$ och $e^{2x}$ är störst för negativa $x$. Arean ges alltså av

$$\int_{-1}^{0} e^{2x} - e^{3x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{3x} - e^{2x}\,dx.$$

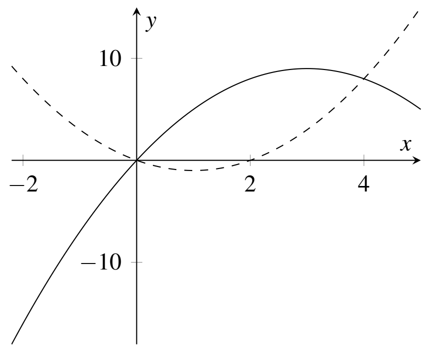
Svar: $1/3 + 1/(3e^3) - 1/(2e^2) - e^2/2 + e^3/3$




7.6.7 Observera att kurvorna skär varandra i origo och i punkten $(4,8)$ och att det är $6x - x^2$ som är störst i intervallet $(0,4)$. Arean ges alltså av

$$\int_{0}^{4} (6x - x^2) - (x^2 - 2x)\,dx.$$

Svar: $64/3$



7.6.8 Observera att kurvorna skär varandra i punkterna $(-1,0)$ och $(2/3,5/9)$ och att det är $1-x^2$ som är störst i intervallet $(-1,2/3)$. Arean ges alltså av

$$\int_{-1}^{2/3} (1-x^2)-(x+1)/3\,dx.$$

Svar: $125/162$