1 Aritmetik och algebra

I detta kapitel skall vi först arbeta med grundläggande aritmetik, alltså de fyra räknesätten, för olika typer av tal. I den senare delen av kapitlet behandlas hantering av algebraiska uttryck.

Vi rekommenderar att du inte använder räknare eller formelsamling då du löser uppgifterna. De kunskaper du får genom att dels räkna själv och tänka på vilka räkneregler du använder, och dels lära dig en del fakta istället för att förlita dig på formelsamlingen, är oerhört värdefulla för dina fortsatta studier. I många matematikintensiva utbildningar förväntas du klara dig utan både formelsamling och räknare.

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal

De **naturliga talen** är talen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. (De tre avslutande punkterna i listan indikerar att mönstret fortsätter utan slut.)

De **negativa heltalen** är $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Ibland skriver man negativa tal med en parentes: $(-1), (-2), (-3), (-4), \ldots$.

De naturliga talen och de negativa talen bildar tillsammans **heltalen**

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Ett viktigt ord i det matematiska språket är begreppet **mängd**. I normalsvenska betyder ordet *ett stort antal* eller *en mätbar ansamling*. I matematik är en mängd en samling objekt, **element**. Så har t.ex. **mängden av de naturliga talen** varje naturligt tal som element. Talet 13 är ett element i mängden, liksom varje annat naturligt tal. Mängden av alla naturliga tal betecknas ofta $\mathbb{N}$. Med symboler skriver vi att 13 är ett naturligt tal som $13 \in \mathbb{N}$. Det faktum att -1 inte är ett naturligt tal skrivs $-1 \notin \mathbb{N}$.

På samma sätt talar man om mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$, mängden av alla negativa heltal $\mathbb{Z}_-$ och mängden av alla positiva heltal $\mathbb{Z}_+$. Talet 0 är varken positivt eller negativt.

Om varje element i en mängd A också är element i en annan mängd B så säger vi att A är en **delmängd** till B vilket skrivs $A \subset B$. Vi har t.ex. att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, eftersom varje naturligt tal även är ett heltal.

1.1.1 Naturliga tal

Två naturliga tal kan **adderas**, vilket av alla uppfattas som närmast självklart. Det faktum att termerna kan byta plats med varandra utan att resultatet ändras, dvs. att operationen addition är **kommutativ**, ($a+b = b+a$ för alla naturliga tal a och b), är också något så självklart att man sällan eller aldrig reflekterar över det. Operationen är bara definierad för par av tal. Vid addition av fler än två tal måste man därför i princip markera den ordning additionerna skall utföras i med parenteser, så

$$3+(6+13) = 3+19 = 22 \text{ och } (3+6)+13 = 9+13 = 22.$$

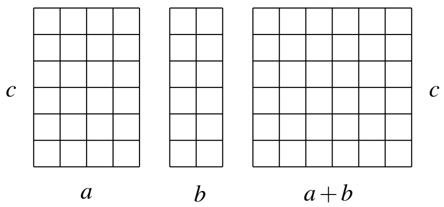
Vi vet dock att det, precis som i exemplet ovan, inte spelar någon roll hur vi sätter parenteserna. Summan av talen 3, 6 och 13 är 22 i vilken ordning vi än räknar. Allmänt gäller att $a+(b+c) = (a+b)+c$ för alla naturliga tal a, b och c, och vi säger att additionen är **associativ**. Om inga parenteser skrivits ut gäller **läsriktningsprioritet**, dvs. additionerna utförs från vänster till höger. Uttrycket $3+6+13+5$ tolkas alltså som $((3+6)+13)+5$.

Talen som adderas kallas **termer** och resultatet av additionen kallas **summa**.

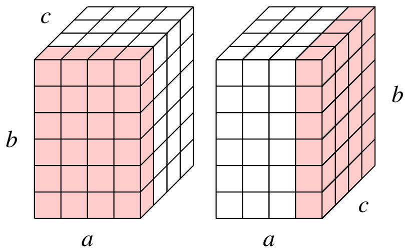
Multiplikation av naturliga tal är upprepad addition, så t.ex.

$$6 \cdot 7 = 7+7+7+7+7+7 = 42.$$

Även multiplikation är som bekant kommutativ, dvs. $a \cdot b = b \cdot a$ för alla naturliga tal a och b. Detta är dock inte lika uppenbart[1] som för addition. Ett sätt att se det på är att föreställa sig en inrutad rektangel med a rutor i ena riktningen och b rutor i den andra. Det totala antalet rutor t är oberoende av ordningen i vilken man räknar dem, och man för att $t = a \cdot b$, alternativt $t = b \cdot a$, beroende på vilken sida man utgår ifrån. Multiplikationen är också associativ, dvs. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, för alla naturliga tal a, b och c. Ett rätblock med sidorna a, b och c kan användas för att inse detta. Talen som multipliceras kallas **faktorer** och resultatet av multiplikationen kallas **produkt**.



Figur 1: $ca + cb = c(a+b)$



Figur 2: $(ab)c{=}a(bc)$

Sammantaget behöver man varken bry sig om ordning eller parenteser när man bara har en av operationerna addition eller multiplikation. Då både addition och multiplikation är inblandade, som i beräkningen av $3+4\cdot 7$, kommer prioritetsregeln **multiplikation före addition** in, så att $3+4\cdot 7 = 3+28 = 31$. Här gäller alltså inte läsriktningsprioritet. Vill vi att additionen skall utföras först måste vi markera det med parenteser: $(3+4)\cdot 7 = 7\cdot 7 = 49$. Denna uträkning kan också göras med **distribution** som $(3+4)\cdot 7 = 3\cdot 7 + 4\cdot 7 = 21+28 = 49$. Allmänt gäller vid addition följt av multiplikation den **distributiva lagen**:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c,$$

för alla naturliga tal a, b och c. Detta övertygar man sig om genom att ta två rektanglar som består av $a\cdot c$ respektive $b \cdot c$ rutor och lägga dem bredvid varandra.

Om $a, b \in \mathbb{N}$ så säger vi att a är **större än** b, vi skriver $a > b$, om det finns $c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$, sådant att $a = b + c$. Vi säger att b är **mindre än** a och skriver $b < a$, om $a > b$. Detta stämmer överens med den intuitiva uppfattningen om jämförelse mellan tal ("a är större än b om a är lika med b plus lite till"). Vi säger att a är **större än eller lika med** b, $a \geq b$, om $a > b$ eller $a = b$, dvs. om det finns $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b + c$. (Notera att $a \geq a$, medan $a \not> a$, dvs. a är större än eller lika med a, men a är inte större än a.) För $a \geq b$ definierar vi **subtraktion** av a med b, $a - b = c$, där c är samma som ovan, dvs.

$$a - b = c, \quad \text{om} \quad a = b + c.$$

[1] Att 5 påsar med 3 kolor i varje och 3 påsar med 5 kolor i varje är lika mycket härligt godis är inte uppenbart för ett litet barn.

I fallet $a < b$ finns inget $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b + c$. Subtraktion i det fallet kräver att man lämnar de naturliga talen. Frågan diskuteras i nästa avsnitt.

Division är i någon mening den motsatta operationen till multiplikation, dvs. eftersom $6 \cdot 7 = 42$ så är $42/7 = 6$. I det här avsnittet handlar det endast om division av naturliga tal. Multiplikation av naturliga tal är som vi nämnde tidigare samma som upprepad addition och division är därför upprepad subtraktion. Vi får alltså $42/7 = 6$ eftersom $42 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 0$. (De gamla mekaniska räknemaskinerna byggde helt på denna princip.) Förutom vanligt bråkstreck använder vi i texten ibland $\div$ som divisionstecken[2]. Antalet gånger man kan utföra subtraktionen kallas **kvot**. Om man så småningom, som i exemplet ovan, kommer till 0, säger man att divisionen går jämnt ut. Om divisionen inte går jämnt ut får man en **rest**, dvs. ett tal som inte är 0, men som är för litet fär att man ska kunna subtrahera vidare. T.ex. får vi

$$45 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3,$$

dvs. $45/7 = 6 + 3/7$.

Vid division av 45 med 7 får man alltså kvoten 6 och resten 3.

Att man vid division av n med m får kvot q och rest r, är samma sak som att n kan skrivas som $n = mq + r$, där resten r är ett naturligt tal mindre än m, dvs. $0 \leq r < m$. I exemplet ovan har vi att $45 = 7 \cdot 6 + 3$.

Det är värdefullt att kunna utföra så kallad **lång division** av naturliga tal för hand, inte minst för att underlätta polynomdivision längre fram. Algoritmen man använder är alltid densamma, men uppställningen kan variera, t.ex. "liggande stolen" eller "trappan". Vilken man väljer är helt oviktigt. Här nedan används "liggande stolen". Schematiskt ser den ut så här:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\text{Kvot}} \\ \hline \text{Täljare} & \text{Nämnare} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Exempel. Vi önskar beräkna $8476 \div 23$.

För att det skall vara enklare att följa kalkylerna redovisas varje steg i en ny "stol". En förklaring ges efter exemplet.

$$\begin{array}{r|l} \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{300} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{l}{-\,6900} & \\ \hline \multicolumn{1}{l}{1576} & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{360} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{l}{-\,6900} & \\ \hline \multicolumn{1}{l}{1576} & \\ \multicolumn{1}{l}{-\,1380} & \\ \hline \multicolumn{1}{l}{196} & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{368 \longleftarrow \text{kvot}} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{l}{-\,6900} & \\ \hline \multicolumn{1}{l}{1576} & \\ \multicolumn{1}{l}{-\,1380} & \\ \hline \multicolumn{1}{l}{196} & \\ \multicolumn{1}{l}{-\,184} & \\ \hline \multicolumn{2}{l}{12 \longleftarrow \text{rest}} \end{array}$$

Vi ser här att $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, dvs. $8476 \div 23 = 368 + 12 \div 23$, eller, som vi är mer vana vid att skriva,

$$\frac{8476}{23} = 368 + \frac{12}{23}.$$

[2]Det finns många tecken som används för att beteckna division, $\div$, : , /, eller ett vanligt bråkstreck.

Vi kan också skriva om resultatet utan något divisionstecken som $8476 = 23 \cdot 368 + 12$.

$\square$

Om du tycker att algoritmen är svårbegriplig eller krånglig kan du kanske ha hjälp av följande förklaring:

Det är väldigt opraktiskt att subtrahera talet 23 från talet 8476 mer än 300 gånger. Därför effektiviserar man genom att först räkna ut hur många hundra gånger 23 går i 8476. Eftersom $84 \div 23 = 3$ med rest 15 går 23 minst 300 gånger i 8476, men inte 400 gånger. Vi kan därmed skriva hundratalet 300 i kvoten och subtrahera $300 \cdot 23$ från 8476.

Vi har att $84 - 3 \cdot 23 = 15$ och $8476 - 300 \cdot 23 = 1500 + 76 = 1576$.

I tredje stolen får vi $157 \div 23 = 6$ med rest 19. Alltså går 23 minst 60 gånger i 1576, men inte 70 gånger. Vi får $157 - 6 \cdot 23 = 19$ och $1576 - 60 \cdot 23 = 190 + 6 = 196$. Vi kan nu lägga till 60 i kvoten.

Slutligen får vi $196 \div 23 = 8$ med rest 12. Alltså är $196 = 8 \cdot 23 + 12$ och kvotens entalssiffra är 8. Kalkylerna ovan kan sammanföras som

$$\begin{aligned} 8476 &= 300 \cdot 23 + 1576 = 300 \cdot 23 + 60 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 196 \\ &= 360 \cdot 23 + 8 \cdot 23 + 12 = 368 \cdot 23 + 12. \end{aligned}$$

Alltså $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, vilket är samma sak som att $8476/23 = 368 + 12/23$.

Fallet då divisionen $a \div b$ går jämnt ut, alltså fallet $r = 0$, är speciellt intressant. I detta fall är $a = b \cdot c$ där c också är ett naturligt tal. Talet a är alltså produkten av de två faktorerna b och c. Det finns många synonymer för detta. Om divisionen $a \div b$ går jämnt ut så säger man att

- a är **delbart med** b, eller
- a **delas av** b, eller
- b **delar** a, eller
- b är **divisor till** a, eller
- b är **delare till** a, eller
- b är en **faktor i** a, eller
- a är en **multipel av** b.

T.ex. har vi att $8464 \div 23 = 368$ med rest 0. Detta innebär att $8464 \div 23 = 368$ så med andra ord är 8464 **delbart med** 23 och 23 en **faktor i** 8464.

Eftersom $a = 1 \cdot a$, så har a alltid delarna a och 1 (1 är med andra ord delare till alla tal). Om b är delare till a där $b \neq 1$ och $b \neq a$ så kallas b **äkta delare** till a.

Tal som är större än 1 och som saknar äkta delare kallas **primtal**. Tal som har äkta delare kallas **sammansatta tal**. Talet 1 är en enhet och kallas varken primtal eller sammansatt tal.

Alla tal som är delbara med två kallas **jämna**, övriga naturliga tal kallas **udda**. Att ett tal n är jämnt betyder att det ger rest 0 vid division med 2, dvs. $n = 2k$ för något naturligt tal k. Att n är udda betyder att det ger rest 1 vid division med 2 (den enda möjliga resten förutom 0), dvs. $n = 2k + 1$ för något naturligt tal k.

De fem minsta primtalen är 2, 3, 5, 7 och 11. Alla jämna tal större än 2 har ju 2 som en äkta delare, så primtal större än 2 måste därför vara udda tal.

Talet 15 kan skrivas som produkt av primtalen 3 och 5, $15 = 3 \cdot 5$, och 15 har alltså 3 och 5 som äkta delare. I denna produkt kan faktorernas ordning varieras, dvs. $15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. Bortsett från det är faktoruppdelningen unik. För att övertyga oss om detta i det konkreta fallet kan vi resonera som följer: Om $15 = a \cdot b$, där a och b är naturliga tal större än 1, så är både a och b mindre än 15. Nu kan vi antingen testa alla möjliga produkter av tal mellan 1 och 15, eller också reducera antalet försök genom att inse att $4 \cdot 4 > 15$ och att minst ett av talen a och b därför måste vara mindre än 4. Vi ser då lätt att enda möjligheten att skriva 15 som produkt av primtal, om vi bortser från ordningen, är $15 = 3 \cdot 5$.

Resonemanget ovan om möjliga faktorer gäller generellt: Om talet c inte är ett primtal så har c en primtalsfaktor p, $1 < p \leq \sqrt{c}$. Det är alltså relativt enkelt att avgöra om ett visst tal är ett primtal under förutsättning att talet inte är särskilt stort. Tag som exempel talet 97. Om 97 inte är ett primtal så har det en primtalsfaktor p som uppfyller

$$p \leq \sqrt{97} < \sqrt{100} = 10.$$

Det räcker då att konstatera att 97 inte finns i någon av ”multiplikationstabellerna” för primtal mindre än 10 för att dra slutsatsen att 97 är ett primtal.

För stora tal är det däremot tidsödande att avgöra om talet är ett primtal eller ej på detta sätt, till och med om det är ett datorprogram som genomför undersökningen. Det finns dock mer sofistikerade och snabbare sätt att undersöka riktigt stora tal om man har tillgång till en dator.

Det faktum att 15 bara kunde faktoriseras i primtalsfaktorer på ett enda sätt gäller generellt. Redan under antiken bevisade Euklides i Elementa (bok 9) följande centrala sats om uppdelning i primtalsfaktorer.

Aritmetikens fundamentalsats: Varje naturligt tal som är större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal. Bortsett från ordningsföljden är primtalsfaktorerna entydigt bestämda. (Här utvidgar vi begreppet produkt något och kallar även ett ensamt primtal för en produkt av primtal.)

Som exempel på hur man kommer fram till en primtalsfaktorisering ska vi skriva talet 8464 som en produkt av primtalsfaktorer. Vi vet redan att $8464 = 23 \cdot 368$, men här agerar vi som om vi inte visste det. Talet är jämnt, så vi kan skriva $8464 = 2 \cdot 4232$. Nu ska 4232 faktoriseras; det är också ett jämnt tal. Vi fort sätter bryta ut tvåor så länge det går och får $8464 = 2 \cdot 4232 = 2 \cdot 2 \cdot 2116 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1058 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 529$. Talet 529 är udda, så vi får nu leta efter primtalsfaktorer större än två. Undesökning visar att 529 inte är delbart med vare sig $3, 5, 7, 11, 13, 17$ eller 19, men väl med 23, $529 = 23 \cdot 23$, och vi får slutligen

$$8464 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 23 = 2^4 \cdot 23^2,$$

en produkt av primtal. (Här använder vi potenser med heltalsexponenter som ett kort skriv sätt för upprepad multiplikation av ett tal med sig självt, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$. Potensräkning diskuteras ingående senare i kursen.)

Ett bevis för att varje tal kan skrivas som en produkt av primtal bygger på att ett tal som inte är ett primtal kan skrivas som produkt av två mindre tal. Antingen är dessa primtal, eller så kan de skrivas som produkt av ännu mindre tal, vilka i sin tur antingen är primtal eller kan skrivas som produkt av ännu mindre tal o.s.v.. Processen är ändlig, eftersom mängden av naturliga tal, skilda från noll, har ett minsta element, nämligen 1. Vi avstår här från att visa att faktorerna är entydigt bestämda, vilket är betydligt knivigare.

En annan av Euklides viktiga satser är:

Det finns oändligt många primtal.

Bevis. Antag motsatsen, dvs. antag att det bara finns ändligt många primtal,

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Bilda produkten M av alla dessa och lägg till 1. Enligt aritmetikens fundamentalsats måste då $M + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ vara en produkt av primtal, men det är inte möjligt eftersom talet ger rest 1 vid division med vilket primtal p_k som helst. Motsägelsen visar att vårt antagande om att primtalen är ändligt många är felaktigt, alltså finns det oändligt många primtal. $\square$

En lista över alla primtal skulle alltså bli oändligt lång, men man kan naturligtvis ge en ändlig lista över alla primtal upp till ett visst tal. Denna lista kan sedan användas vid primtalsfaktorisering av större tal. Vill man på ett systematiskt sätt plocka fram alla primtal upp till ett givet tal kan man använda **Erathostenes primtalssåll** från ca 230 före vår tid. Detta beskrivs i många läroböcker och kan säkert hittas på Internet. Idén är att utgå från alla naturliga tal från 2 till och med den önskade övre gränsen. Successivt stryker man alla äkta multipler av primtalen med början från 2, sedan 3, 5 o.s.v.. Det minsta överhoppade talet som är större än de hittills funna primtalen måste vara nästa primtal i listan. Då man strukit multiplerna av 2, 3 och 5 är minsta överhoppade talet 7, därefter 11 o.s.v..

1.1.2 Negativa tal

De naturliga talen och additionen av sådana är direkt sammankopplade med antalsräkning och därmed något som även mycket små barn förstår. Eftersom de övriga räknesätten för naturliga tal bygger på addition, så finns det en lättbegriplig tolkning också för dessa. Namnet “naturliga” speglar just det sätt på vilket vi uppfattar talen i $\mathbb{N}$ och deras egenskaper. Då det gäller negativa heltal är situationen lite annorlunda, även om också dessa har naturliga tolkningar. Vi är sedan barnsben vana vid minusgrader på vintern och vet att om det är fem grader varmt ($+5^\circ$) och temperaturen sjunker tio grader, så blir det fem grader kallt (-5°). Ett annat begrepp som ofta dyker upp i vardagslivet är “skuld”, om man är skyldig någon 100 kronor behöver man en hundralapp för att nollställa sin ekonomi. Medan begreppet naturliga tal är ett av de begrepp som ligger i grunden för all matematik och som inte definieras, måste man definiera de negativa heltalen med hjälp av de naturliga talen. De naturliga talen och de negativa heltalen bildar tillsammans mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$. Man definierar sedan de fyra räknesätten inom den nya talmängden och visar att de har samma egenskaper som räknesätten för naturliga tal (med den väsentliga skillnaden att det i $\mathbb{Z}$ gör att subtrahera vilket tal som helst från vilket tal som helst utan att lämna mängden). Vi kommer här dock att nöja oss med den intuitiva uppfattningen om negativa tal illustrerad ovan och repetera hur man räknar med negativa tal utan att ge formella definitioner och bevis.

Vi utgår alltså från att vi, givet det naturliga talet n, har en uppfattning om vad $(-n)$ är, samt att vi vet hur man adderar och subtraherar i $\mathbb{N}$.

Om $a, b \in \mathbb{N}$, så gäller

- $-(-a) = a$
- $(-a) + b = b - a$ för $b \geq a$
- $(-a) + b = -(a - b)$ för $b < a$
- $(-a) + b = b + (-a)$
- $(-a) + (-b) = -(a + b)$
- $(-a) - b = (-a) + (-b)$
- $a - (-b) = a + b$
- $(-a) - (-b) = (-a) + b$

Exempel.

$$
\begin{aligned}
3 + (-7) &= -(7-3) = -4 \\
(-3) + 7 &= 7 - 3 = 4 \\
(-3) + (-7) &= -(7+3) = -10.
\end{aligned}
$$

□

Multiplikation definieras som följer

$$
\begin{aligned}
(-a) \cdot b &= b \cdot (-a) = -(a \cdot b), \\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot b,
\end{aligned}
$$

för alla naturliga tal a och b. Den andra likheten ovan är den kända regeln "minus minus är plus". Detta är en definition och alltså inget som kan härledas. Dock är det så att det inte är slumpen som avgör hur man väljer att definiera en operation. Multiplikation av heltal definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna för naturliga tal fortsätter gälla i $\mathbb{Z}$. Man kan ändå ge en intuitiv förklaring: om man tolkar minustecknet som byte av sida med avseende på 0 på tallinjen, så måste två successiva byten innebära att man hamnar på samma sida nollan som man utgick från. Likaså, om man säljer en skuldsedel resulterar det i att man får intäkter.

Exempel.

$$\begin{aligned}4\cdot(-7) &= -(4\cdot 7) = -28\\ (-4)\cdot(-7) &= 4\cdot 7 = 28.\end{aligned}$$

□

För att illustrera hur man går tillväga när man bevisar att de önskade räknereglerna fortfarande gäller visar vi att en trippel av negativa tal uppfyller den distributiva lagen. Vi har nämligen för alla naturliga tal a, b och c att

$$(-a)\cdot((-b)+(-c)) = (-a)\cdot(-(b+c)) = a\cdot(b+c),$$

och

$$(-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot(-c) = (a\cdot b)+(a\cdot c) = a\cdot(b+c),$$

där vi i sista likheten utnyttjar den distributiva lagen för naturliga tal. Därmed har vi visat

$$(-a)\cdot((-b)+(-c)) = (-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot(-c),$$

som är den distributiva lagen för en trippel negativa tal.

Delbarhet fungerar på samma sätt i $\mathbb{Z}$ som i $\mathbb{N}$. Tal som är delbara med 2 kallas jämna och har formen $n = 2k,\ k\in\mathbb{Z}$, tal som inte är delbara med 2 kallas udda och kan skrivas som $n = 2k\pm 1,\ k\in\mathbb{Z}$ (± 1 betyder att man kan välja mellan $+1$ och -1).

Olikheten $a > b$ för $a,b\in\mathbb{Z}$ definieras på samma sätt som för naturliga a,b, dvs. $a > b$ om det finns ett positivt tal c sådant att $a = b+c$. övriga olikheter definieras analogt.

1.1.3 Räkneregler

I början av kapitlet diskuterades räknereglerna för naturliga tal. Vi utvidgade sedan talområdet till att även omfatta negativa tal. Utvidgningen gjordes på ett sådant sätt att såväl priorits- som räknereglerna fortsatte att gälla. Nedan sammanfattas de prioritetsregler och räkneregler som behandlats i kapitlet. Observera att om a är ett heltal så kan talet $(-a)$ vara negativt (om a är positivt) eller positivt (om a är negativt).

Prioriteringsordning

1. Operation inom parenteser
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion
4. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

RÄKNEREGLER FÖR HELTAL

För alla heltal a, b och c gäller det att

- $a+b=b+a$ **kommutativitet**
- $a+(b+c)=(a+b)+c$ **associativitet**
- $a+0=a$ **identitet**
- $a \cdot b=b \cdot a$ **kommutativitet**
- $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c)$ **associativitet**
- $a \cdot 1=a$ **identitet**
- $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$ **distributivitet**
- $a+(-a)=0$
- $a+(-b)=a-b$
- $-(-a)=a$ **minus minus är plus**
- $a \cdot(-b)=-(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot(-b)=a \cdot b$ **minus minus är plus**
- $a-(b-c)=a-b+c$ **minus minus är plus**
- $a-(b+c)=a-b-c$

Övningar

1.1.1 Bestäm kvot och rest vid divisionerna nedan. Ange svaret på formen $n=m \cdot q+r$.

a. $7956 \div 21$
b. $7497 \div 21$
c. Är något av talen 7956 eller 7497 delbart med 21?

1.1.2 Skriv talen nedan som produkt av primtal.

a. 495
b. 47502
c. 249

1.1.3 Beräkna

a. $7-(-2) \cdot(3-9) \cdot((2+(-5)-8) \cdot(-3-(-5))-4)$
b. $(-4-2) \cdot((-6-(-9))-((6-(-7)+3) \cdot((-2)-3)+(-1) \cdot(7-(-4))))$

1.1.4 Skriv om följande uttryck utan parenteser.

a. $a-(-b) \cdot(a+1)-b \cdot(-a+1)$
b. $((-a) \cdot(-b)+a \cdot(b-2 \cdot(-a))) \cdot(-1+b)$

1.1.5 Ordna talen i listorna nedan i stigande ordning.

a. $5, 11, -2, 4$
b. $-a, b, -c, d$, där $a = 19, b = -20, c = -18, d = -100$

1.2 Bråkräkning

När man inför de negativa talen så får uttrycket $a - b$ med $a < b$ mening som ett (negativt) tal. På samma sätt ger man genom att införa **rationella tal** eller **bråktal** mening åt $a \div b$ som ett tal även då resten inte är 0. Både de rationella talen och de fyra räknesätten för dessa definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna som listats tidigare fortfarande gäller.

1.2.1 De rationella talen

Rationella tal eller **bråktal** skrivs p/q, där p och q är heltal och $q \neq 0$. Mängden av alla rationella tal betecknas med $\mathbb{Q}$. Utan att ge en formell definition kan vi säga att p/q är det tal som multiplicerat med q ger p. Därmed kan ett heltal p identifieras med det rationella talet $p/1$. Det betyder att alla heltal kan uppfattas som rationella tal. Mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$, är alltså en delmängd till mängden av alla rationella tal, dvs. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Talet 0 kan skrivas som $0/q$ för godtycklig nämnare $q \neq 0$. Allmänt gäller att $p/q = 0$ om och endast om $p = 0$. Observera att villkoret $q \neq 0$ fortfarande måste vara uppfyllt!

Ett rationellt tal kan alltid skrivas på (oändligt) många olika sätt, för om $s \neq 0$ är ett heltal så är

$$\frac{p}{q} = \frac{s \cdot p}{s \cdot q}.$$

För att övertyga sig om det ska man inse att om man multiplicerar talet till vänster med högerledets nämnare, så får man precis högerledets täljare:

$$s \cdot q \cdot \frac{p}{q} = s\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = s \cdot p.$$

(Här har vi använt den associativa lagen för en produkt av två heltal och ett rationellt tal.) Man säger att bråktalet p/q **förlängts** med (faktorn) $s \neq 0$ till $(s \cdot p)/(s \cdot q)$, eller att $(s \cdot p)/(s \cdot q)$ **förkortats** med s till p/q. Till exempel är $7/11$ och $14/22$ lika eftersom

$$\frac{7}{11} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{14}{22}.$$

I allmänhet försöker man ange bråktal på enklaste formen så att täljaren p och nämnaren q inte har någon gemensam faktor utom ± 1 (sådana tal p och q kallas **relativt prima**). Man säger då att talet är skrivet på **enklaste bråkform**. Ett systematiskt sätt att hitta den enklaste bråkformen är att primtalsfaktorisera täljare och nämnare och förkorta med alla gemensamma primtalsfaktorer. Vi har t.ex. att

$$\frac{84}{30} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 7}{5} = \frac{14}{5}.$$

Man kan förlänga/förkorta med negativa faktorer också och speciellt kan man alltid se till att nämnaren är positiv:

$$\frac{-7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot 11} = \frac{7}{11} \quad \text{och} \quad \frac{7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot (-11)} = \frac{-7}{11}.$$

1.2.2 Räkning med rationella tal

Addition (och subtraktion) av bråktal med samma nämnare ges av addition (respektive subtraktion) av täljarna med samma nämnare:

$$\frac{11}{13}+\frac{5}{13}=\frac{11+5}{13}=\frac{16}{13} \quad \text{och} \quad \frac{11}{13}-\frac{5}{13}=\frac{11-5}{13}=\frac{6}{13}.$$

I allmänhet måste termerna skrivas om så att de får samma nämnare innan man kan addera eller subtrahera bråken. **Korsvis förlängning** av de två nämnarna fungerar alltid:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}.$$

Det är dock en god vana att inte förlänga med mer än nödvändigt, eftersom det är jobbigare att räkna med stora tal och risken att räkna fel ökar. Då man arbetar med rationella funktioner, se avsnitt 4.3, blir detta extra viktigt. För att förlänga med så lite som möjligt letar man upp den den **minsta gemensamma nämnaren**, dvs. den minsta gemensamma multipeln av nämnarna. Ett systematiskt sätt att göra detta är att primtalsfaktorisera nämnarna och leta upp den minsta produkt av primtal som innehåller alla faktorer för nämnarna. Om vi t.ex. vill räkna ut

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30},$$

där båda talen är på enklaste bråkform, så använder vi att $12=2^2\cdot 3$ och $30=2\cdot 3\cdot 5$. De primtal som ingår är alltså 2 (med potensen 2), 3 och 5. Den minsta möjliga gemensamma nämnaren är alltså $2^2\cdot 3\cdot 5=60$. För att få denna nämnare så får vi förlänga med 5 respektive 2:

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}+\frac{2\cdot 37}{2\cdot 30}=\frac{35}{60}+\frac{74}{60}=\frac{109}{60}.$$

Om man slaviskt följer den allmänna principen med korsvis multiplikation får man istället

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{30\cdot 7}{30\cdot 12}+\frac{12\cdot 37}{12\cdot 30}=\frac{210}{360}+\frac{444}{360}=\frac{654}{360}=\frac{109}{60},$$

vilket ger jobbigare räkningar.

Oavsett hur man väljer att utföra beräkningarna ska man i svaret alltid ange resultatets enklaste bråkform.

Subtraktion av bråktal görs på motsvarande sätt som addition:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b},$$

Här, som för addition, bör man hitta den minsta gemensamma nämnaren

$$\frac{7}{12}-\frac{39}{15}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}-\frac{4\cdot 39}{4\cdot 15}=\frac{35}{60}-\frac{156}{60}=\frac{35-156}{60}=\frac{-121}{60}=-\frac{121}{60}.$$

Här hade vi $12=2^2\cdot 3$ och $15=3\cdot 5$, och minsta gemensamma nämnaren var alltså åter $2^2\cdot 3\cdot 5=60$.

Multiplikation av rationella tal ska definieras så att räknelagarna för heltalsmultiplikation fortfarande gäller. Det betyder att multiplikation med heltal skall motsvara upprepad addition. Alltså gäller exempelvis att

$$n \cdot \frac{c}{d} = \underbrace{\frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \cdots + \frac{c}{d}}_{n \text{ termer}} = \frac{n \cdot c}{d}.$$

Vidare skall multiplikation vara associativ. Alltså gäller

$$\frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{c}{d} = \frac{n}{n} \cdot \frac{c}{d} = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{c}{d} = n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d}\right).$$

Detta är möjligt endast om

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{n \cdot d}.$$

Sammantaget ger detta

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = a \cdot \frac{c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Vi fick alltså att den enda rimliga definitionen för multiplikation av rationella tal är

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Division av rationella tal ges av

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Detta motiveras av att kvoten

$$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d}$$

måste vara ett tal A sådant att

$$A \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

och vi ser att $A = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ är det tal som uppfyller kravet, eftersom

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}.$$

Bråket q/p kallas ibland för det inverterade bråket till p/q (här förutsätts att $p, q \neq 0$). Vi skulle då kunna säga att man dividerar ett bråk med ett annat genom att multiplicera det första med det inverterade till det andra.

Vid närmare eftertanke är detta intuitivt självklart. Om man har en tolvbitarstårta och alla ska få en bit var så räcker den till tolv personer, men om man bara ger en halv bit till var och en så kan dubbelt så många få, alltså

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot 2 = 24.$$

I kapitel 1.1.1 då vi räknade med enbart heltal skulle vi sagt att $13 \div 4$ ger kvoten 3 och resten 1, medan vi nu kallar $\frac{13}{4}$ kvot. Då handlade det om heltalsdivision som speglar t.ex. en fördelning: *om tretton ägg skall fördelas på kartonger som rymmer fyra ägg vardera så får man tre fulla kartonger och ett ägg över.* I detta kapitel handlar det om division för rationella tal. Alla rationella tal kan divideras, kvoten är alltid ett rationellt tal.

Ibland kan användningen av bråkstreck som divisionssymbol bli anledning till felläsning/feltolkning:

Vi har att

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \cdot c}$$

men

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$$

Därför är det viktigt att veta vad som avses då man använder ”dubbelbråk”. Att uttrycken ovan inte är samma sak, syns lätt i tryckt text, men inte lika lätt i handskriven text. Speciellt viktigt är det att skriva likhetstecknet på rätt nivå.

Tänk också på att ett dubbelbråk ofta innehåller ”osynliga parenteser”, vilket illustreras i nästa exempel.

Exempel. Vi skall skriva $\frac{\frac{1}{7} - \frac{3}{11}}{\frac{2}{63} + \frac{11}{18}}$ som ett bråktal på enklaste bråkform.

Vi subtraherar i täljare och och adderar i nämnare och utför sedan divisionen vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{7} - \frac{3}{11}}{\frac{2}{63} + \frac{11}{18}} &= \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{11}\right) \div \left(\frac{2}{63} + \frac{11}{18}\right) \\
&= \left(\frac{1 \cdot 11}{7 \cdot 11} - \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 7}\right) \div \left(\frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 9 \cdot 2} + \frac{11 \cdot 7}{2 \cdot 9 \cdot 7}\right) \\
&= \left(\frac{11 - 21}{11 \cdot 7}\right) \div \left(\frac{4 + 77}{2 \cdot 9 \cdot 7}\right) = \frac{-10 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7}{11 \cdot 7 \cdot 81} = -\frac{20}{99},
\end{aligned}$$

efter förenkling. □

Man ska inte vara för snabb med att multiplicera ihop faktorerna i nämnaren. Om man behåller faktoriseringen ända till sista steget är det mycket lättare att se vad man eventuellt kan förkorta med för att få svaret på enklaste bråkform.

1.2.3 Räkneregler

De prioritets- och räkneregler som gällde för heltalen gäller även för rationella tal. Här sammanfattas de räkneregler som tillkommer för de rationella talen. Observera att nämnaren $d \cdot b$ kan vara onödigt stor och att man alltid bör hitta den minsta gemensamma nämnaren istället.

För alla rationella tal, a/b och c/d, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{d\cdot a}{d\cdot b}+\dfrac{b\cdot c}{b\cdot d}=\dfrac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

Sist i avsnittet ska vi titta närmare på likhet och olikheter mellan rationella tal.

Likheten $a/b=c/d$ äger rum om och endast om (dvs. precis när)

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}=1$$

alltså om och endast om $ad=bc$. Både uttrycket **om och endast om** och uttrycket **precis när** betyder att påståendena före och efter är ekvivalenta. Att två påståenden är ekvivalenta betyder att antingen så är båda påståenden sanna, eller så är båda påståendena falska. För ekvivalenta påståenden kan det alltså inte vara så att ena påståendet är sant medan det andra är falskt. Ekvivalens mellan påståenden skrivs ofta med en dubbelpil, $\Leftrightarrow$. Notera att det måste stå påståenden på båda sidor, ekvivalenspilen kan inte användas som likhetstecken.

Olikheter och räkneregler för olikheter diskuteras något i avsnittet om reella tal och mer ingående i kursens andra del. Här går vi händelserna i förväg för att komma till insikt om hur man jämför positiva rationella tal.

Antag att a,b,c,d är positiva heltal. Det är rimligt att ha samma definition för olikhet som tidigare, dvs. vi utgår från att

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\quad\text{om och endast om}\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0.$$

Nu kan vi skriva de två bråktalen på gemensam nämnare, subtrahera, och får

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{ad-bc}{bd}>0.$$

“Minus minus är plus”-regeln säger att detta inträffar om och endast om täljaren och nämnaren har samma tecken. Eftersom $b,d>0$, har vi att $bd>0$ och får slutligen

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0\quad\Leftrightarrow\quad ad-bc>0\quad\Leftrightarrow\quad ad>bc.$$

Vi sammanfattar

För alla rationella tal, a/b och c/d, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{om och endast om} \quad ad = bc$$

Om dessutom $a,\ b,\ c$ och d är positiva heltal, gäller det att

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{om och endast om} \quad ad > bc$$

Vi avslutar med att konstatera en av de rationella talens viktigaste egenskaper som skiljer dem från heltalen: givet två olika rationella tal finns alltid ett tredje rationellt tal mellan dem, dvs. om $r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2$, så finns $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r_1 < r < r_2$. Även om det låter abstrakt är det i själva verket oerhört lätt att visa, välj helt enkelt

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

(talet mittemellan de två givna). Man kanske har svårt att omedelbart inse konsekvenserna av detta faktum. En konsekvens är att det, givet ett rationellt tal, inte finns ett "nästa" rationellt tal. En annan är att man kan tala om gränsvärden av rationella talföljder på ett meningsfullt sätt.

Övningar

1.2.1 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{5040}{40320}$ b. $\frac{6182}{-616}$

c. $\frac{(-42)\cdot 308\cdot 230}{(-60)\cdot 121\cdot(-69)}$ d. $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$

e. $3+\frac{1}{4}+\frac{17}{6}+\frac{35}{8}$ f. $\frac{49}{17}-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-3$

1.2.2 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{1}{4}-\left(\frac{4}{3}-\frac{13}{6}\right)$

b. $\frac{9}{4}-\frac{16}{5}-\left(\frac{11}{21}-\frac{26}{7}+4\right)+\left(\frac{16}{5}-\frac{22}{15}\right)$

1.2.3 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{1}{7}\div\frac{4}{7}$ b. $\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{24}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{38}{17}$

c. $\frac{13}{6}\cdot\frac{15}{4}\div\frac{55}{12}$ d. $-\frac{34}{3}\cdot\frac{12}{5}\div\left(-\frac{17}{15}\right)$

e. $\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\right)\div\left(\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}\right)$ f. $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{20}\div\frac{9}{100}\cdot\frac{5}{19}$

g. $\left(\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}\right)$ h. $\frac{77}{8}\div\frac{4}{3}\div\frac{24}{13}\div\frac{6}{11}$

1.2.4 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform.

a. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)$ b. $\frac{\frac{23}{6}-\frac{23}{8}}{\frac{49}{11}-\frac{19}{6}}$

c. $\frac{\frac{13}{4}-\frac{31}{12}}{\frac{6}{5}-\frac{2}{7}}-\frac{\frac{13}{11}-\frac{8}{9}}{\frac{23}{99}}\cdot\frac{46}{41}$

1.2.5 Skriv talen a, b, c, d i avtagande ordning.

a. $a = 2/3,\ b = 5/6,\ c = 7/8,\ d = 4/5$

b. $a = -1/5,\ b = -2/11,\ c = -3/14,\ d = -5/19$

1.3 Potenser med heltalsexponent

1.3.1 Potenser

I detta avsnitt introduceras begreppet potens för rationella tal, och därmed naturligtvis för alla heltal. Exponenten är här heltal men längre fram (i avsnitt 1.7) kommer exponenten att vara ett rationellt tal och slutligen ett reellt tal. De räknelagar som presenteras i avsnittet är allmängiltiga, de gäller även med reella exponenter.

1.3.2 Potens med heltalsexponent

Potenser med heltalsexponenter definieras av

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1, \ \text{för } a \neq 0,\\
a^1 &= a,\\
a^2 &= a \cdot a,\\
a^3 &= a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a,\\
a^n &= a \cdot a^{n-1} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}}, \ \text{då } n \text{ är ett positivt heltal,}\\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \ \text{då } n \text{ är ett positivt heltal och } a \neq 0.
\end{aligned}$$

I definitionen ovan kan n bara vara ett heltal medan a kan vara såväl ett heltal som ett rationellt tal.

Vid beräkning av potenser av negativa tal måste man vara extra uppmärksam. De beräknas naturligtvis på samma sätt som potenser av positiva tal, så t.ex.

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81.$$

Man måste skriva parentes runt talet, eftersom $-3^4 = -81 \neq (-3)^4 = 81$.

Eftersom $(-1)^2 = 1$, så gäller att: $(-a)^1 = -a$, $(-a)^2 = a^2$, $(-a)^3 = -a^3 = -(a^3)$ och allmänt

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{om} \quad n \text{ är ett jämnt heltal} \\ -a^n & \text{om} \quad n \text{ är ett udda heltal.} \end{cases}$$

Definitionen av multiplikation för rationella tal:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q} = \frac{p^2}{q^2}$$

ger för potenser av rationella tal att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}.$$

I detta fall är det nödvändigt att använda förtydligande parenteser, eftersom man annars för

$$\frac{p^n}{q} \left(\neq \frac{p^n}{q^n}\right).$$

1.3.3 RÄKNEREGLER

Vi sammanfattar här de regler som gäller vid räkning med potenser. De kan härledas om man skriver ut vad de olika potenserna är. Exempelvis är

$$(2^3)^4 = (2\cdot 2\cdot 2)^4 = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2) = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}.$$

För a, $b \neq 0$ och m, n heltal gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Vid räkning med potenser gäller prioritetsregeln att **potenser beräknas före multiplikation och division** och även före addition eller subtraktion, så t.ex.

$$2\cdot 3^2 = 2\cdot 9 = 18 \text{ och } 2+3^2 = 2+9 = 11.$$

Som tidigare skall operation inom parenteser beräknas först så t.ex.

$$(2\cdot 3)^2 = 6^2 = 36 \text{ och } (2+3)^2 = 5^2 = 25.$$

Vid upprepad potensberäkning, som i 2^{3^3}, gäller att exponenten beräknas först så vi får

$$2^{3^3} = 2^{(3^3)} = 2^{27} = 134217728 \text{ och } 2^{5+3} = 2^{(5+3)} = 2^8 = 256.$$

Också här ger parenteser förtur så $(2^3)^3 = 8^3 = 512$

En liten varning! Det finns ingen standardprioritet för upprepad potensberäkning på räknare. Vissa kalkylatorer har ”exponenten först” prioritet, andra har läsriktningsprioritet. Uttrycket 2^{3^3} kan bli antingen 134217728 eller 512 beroende på räknarfabrikatet och ibland till och med på modellen. Använd alltid parenteser för säkerhets skull.

Här sammanfattar vi de prioritetsregler som behandlats hittills.

PRIORITERINGSORDNING

1. Operation inom parenteser
2. Exponent
3. Potens
4. Multiplikation och division
5. Addition och subtraktion
6. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Övningar

1.3.1 Beräkna

a. 5^2 b. 2^5 c. $(-3)^4$ d. $(-4)^3$
e. 1^{100} f. 100^1 g. 3^0 h. $(-3)^0$

1.3.2 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a. 2^{-2} b. $(-3)^{-3}$ c. 1^{-5}

1.3.3 Skriv som potenser av 2

a. $1/64$ b. $16^3/2^{10}$ c. $128^3/32^5$

1.3.4 Skriv följande som ett tal på enklaste bråkform, utan potenser.

a. $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot (-7)^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$ b. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}}{56 \cdot 10^{-6}}$

1.4 Reella tal

Vår önskan att kunna subtrahera obehindrat ledde oss till definitionen av negativa tal (och därmed heltal), medan behovet av rationella tal (bråktal) bottnade i att vi ville kunna dividera obehindrat. Låt oss nu, givet $b \in \mathbb{Q},\ b \geq 0$, försöka hitta ett tal $a \in \mathbb{Q},\ a \geq 0$, sådant att $a^2 = b$. Det är lätt för vissa tal b, men inte för andra. För $b = 4$ får vi $a = 2$, för $b = 0$ får vi $a = 0$, $b = 1/9$ ger $a = 1/3$. Men, kan man lösa problemet för $b = 2$? Det visar sig att svaret är nej.

Det finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2.

Bevis. Antag motsatsen, dvs. antag att det finns ett rationellt tal r sådant att $r^2 = 2$. Talet r kan då skrivas på enklaste bråkform $r = p/q$, där p och q är relativt prima heltal, dvs. p och q har inga gemensamma delare andra än ± 1. Eftersom $p^2 = 2q^2$ måste p vara ett jämnt tal, $p = 2s$. Det medför att $4s^2 = 2q^2$, och alltså att $q^2 = 2s^2$. Därmed måste även q vara jämnt. Vi fick att p och q båda är delbara med 2, vilket strider mot att de är relativt prima. Motsägelsen beror på det felaktiga antagandet att det finns ett tal $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r^2 = 2$, alltså finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2. $\square$

Givet ett icke-negativt tal b, definieras **kvadratroten** ur b som det icke-negativa tal a, vars kvadrat är lika med b, dvs. $\sqrt{b} = a$ är samma sak som $a \geq 0,\ a^2 = b$. Satsen vi visade ovan säger att kvadratroten ur 2 inte finns så länge vi med tal menar rationella tal. Detta antyder att det är på sin plats att utföra ytterligare en utvidgning av begreppet tal – vi har kommit fram till de reella talen.

Det är mycket svårt att definiera vad som menas med ett reellt tal. Vi måste därför hålla oss till en relativt intuitiv och förenklad bild av begreppet. Den framställning vi valt att presentera här (om än något viftande) bygger på talens decimalutvecklingar.

Vi är vana vid att skriva alla tal i ett s.k. positionssystem med basen 10. Positionssystem betyder att en siffras värde beror på dels vilken denna siffra är, dels vad den har för plats (position) i talets framställning. Att ett naturligt tal n skrivs som $n = c_4c_3c_2c_1c_0$ i basen

10 betyder att $n = c_4 \cdot 10^4 + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0$, där $0 \leq c_k \leq 9$. (Observera att det inte handlar om en produkt.) På liknande sätt kan man skriva rationella tal, $r = n,d_1d_2$ är samma sak som $r = n + d_1 \cdot 10^{-1} + d_2 \cdot 10^{-2}$. I praktiken hittar man ett rationellt tals decimalutveckling genom att utföra divisionen i $r = p/q$. Talet n är kvoten vid heltalsdivisionen $p \div q$, $p = nq + r_1$; den första decimalen d_1 är kvoten vid heltalsdivisionen $10r_1 \div q$, $10r_1 = d_1q + r_2$, etc. Det är inte svårt att inse att alla rationella tals decimalutvecklingar antingen är ändliga, eller avslutas periodiskt. Decimalutvecklingen blir ändlig om man i något skede kommer fram till rest 0. Den blir oändlig med periodiskt avslut om man aldrig kommer fram till rest 0. Periodiciteten beror på att det endast finns $q - 1$ möjliga rester som inte är noll, så att man förr eller senare kommer fram till en rest som varit framme tidigare, varpå decimalerna upprepas. Det omvända är också sant, alla ändliga decimalutvecklingar och alla decimalutvecklingar med periodiskt avslut ger rationella tal.

Exempel. Talet $1/8$ har den ändliga decimalutvecklingen $0,125$. □

Exempel. Talet $5/6$ har den periodiska decimalutvecklingen $0,8333\ldots$. □

Exempel. Talet $29/17$ har decimalutvecklingen

$$1,70588235294117647058823529411764\ldots.$$

De avslutande punkterna innebär som vanligt att mönstret fortsätter oavbrutet. I det här fallet har sifferkombimationen som upprepas periodiskt längd 16. □

Exempel. Skriv talet $0,3535353535\ldots$ på enklaste bråkform p/q. Decimalutvecklingen till talet $0,3535353535\ldots$ består av sekvensen 35, som upprepar sig om och om igen. I det här fallet har sekvensen som upprepar sig längd 2. Om $r = 0,3535353535\ldots$, så är det precis samma sak som att säga att

$$\begin{aligned} 10^2 \cdot r &= 10^2 \cdot 0,3535353535\ldots \\ &= 35,35353535\ldots \\ &= 35 + 0,3535353535\ldots \\ &= 35 + r \end{aligned}$$

Notera att vi valde att multiplicera med precis den 10-potens som gjorde att precis en kopia av den sekvens som upprepade sig hamnade före kommatecknet. Om vi tittar lite närmare på likheterna ovan, så ser vi att vi har visat att

$$100r = 35 + r$$

Eftersom att

$$100r = 35 + r \Leftrightarrow 99r = 35$$

ser vi att $r = 35/99$, vilket är den enklaste bråkformen eftersom talen 35 och 99 är relativt prima. □

Exempel. Skriv talet $1,23330330330\ldots$ på enklaste bråkform p/q.

Decimalutvecklingen till talet $1,23330330330\ldots$ övergår efter ett tag till sekvensen 330, som upprepar sig om och om igen. I det här fallet har sekvensen som upprepar sig längd 3. För att kunna använda oss av samma metod som i föregående uppgift börjar vi med att skriva om vårt tal som

$$1,23+0,01\cdot 0,330330330\ldots$$

Om vi sätter $r=0,330330330$ får vi nu med precis samma metod som i den tidigare uppgiften att $10^3 r = 330+r$ så att $r=330/999$. Eftersom att täljare och nämnare nu har den gemensamma nämnaren 3 kan vi dela med 3 i täljare och nämnare och får då $110/333$. Vi får nu att

$$1,23+0,01\cdot 0,330330330\ldots = 1,23+0.01\cdot\frac{110}{333}=\frac{123}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{110}{333}$$

Om vi förenklar uttrycket ovan får vi att

$$1,23330330330\ldots=\frac{41069}{33300}$$

$\square$

Med ett **reellt** tal menas ett tal r som ges av en **decimalutveckling**, ändlig eller oändlig. Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$. De rationella talen är också reella tal, mängden av alla rationella tal är en delmängd av mängden av alla reella tal. Vi har alltså att

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

Varje positivt reellt tal har en heltalsdel n, som är ett naturligt tal, och en decimaldel (bråkdel)

$$r=n,d_1d_2d_3d_4d_5\ldots,$$

där alla talen d_i är siffror i talsystemet med bas 10, dvs. naturliga tal mellan 0 och 9. Detta ska tolkas som att

$$r=n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{100}+\frac{d_3}{1000}+\frac{d_4}{10000}+\frac{d_5}{100000}+\cdots.$$

Till varje positivt reellt tal finns ett motsatt, negativt tal

$$-r=-n,d_1d_2d_3d_4d_5\ldots=-\left(n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{100}+\frac{d_3}{1000}+\frac{d_4}{10000}+\frac{d_5}{100000}+\cdots\right).$$

De decimalutvecklingar som är oändliga och som inte avslutas periodiskt sägs vara **irrationella tal**. Genom att bara ta med ändligt många decimaler får vi ett rationellt tal som approximerar det reella talet, t.ex.

$$3,1415927=\frac{31415927}{10000000}\approx\pi.$$

Ju fler decimaler vi tar med dess bättre approximation får vi.

Man skulle kunna tro att olika tal måste representeras av olika decimalutvecklingar. Så är det inte. Betrakta talet $r=0,9999\ldots$. Det måste vara ett rationellt tal, eftersom dess utveckling avslutas periodiskt. Vi resonerar som i det tidigare exemplet och får

$10r = 9 + r$, dvs. $r = 1$. [3] Två decimalutvecklingar representerar samma reella tal om deras differens är 0, dvs. om skillnaden mellan deras approximationer närmar sig 0 när man ökar antalet decimaler. Detta innebär att t.ex. $3,25300000\ldots = 3,25299999\ldots$.

Reella tal kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras, genom att man utför operationerna på deras rationella approximationer. Genom att ta med fler och fler decimaler får man en följd av rationella tal som närmar sig (har gränsvärdet) de reella talens summa, differens, produkt eller kvot. Alla räkneregler och prioritetsregler som gäller för rationella tal gäller även för reella. Ofta är det önskvärt att ha en så enkel nämnare som möjligt. Man förlänger därför med ett lämpligt tal så att nämnaren blir ett t.ex. ett positivt heltal (om det låter sig göras).

Exempel.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\square$

En fördel är att det är svårt att avgöra hur stort talet $1/\sqrt{2}$ är, medan det är betydligt lättare att se att $\sqrt{2}/2 \approx 0,7$. Observera att $1/\pi$ inte kan modifieras på liknande sätt.

Exempel. Förenkla

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Vi har

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{6}.$$

$\square$

För att åskådliggöra de reella talen använder man ofta punkter på tallinjen. De rationella talen ligger som det heter tätt på linjen, dvs. hur liten sträcka vi än tar kommer den alltid att innehålla rationella tal. Ändå fyller de inte ut linjen, vi insåg tidigare att det finns ett ”hål” i punkten som motsvarar $\sqrt{2}$ som vi nu ”fyllt igen” med ett reellt tal.

I praktiken räknar vi bara med rationella approximationer till de reella talen, eller med symboler, som $\sqrt{2}$ [4], som representerar specifika reella tal. Redan de gamla grekerna visste att det inte finns rationella tal x sådana att $x^2 = 2$, 3, 5, 6 m.fl., med andra ord att $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ m.fl. inte är rationella tal. Man kan numera visa att det däremot finns sådana reella tal.

1.4.1 Olikheter för reella tal

I likhet med heltalen och de rationella talen finns det tre typer av reella tal, de positiva, de negativa och talet 0. Detta gör det möjligt att definiera olikhet, större än och mindre än för reella tal.

---

[3] Det korrekta förfarandet vore att summera en oändlig geometrisk serie, i det här fallet

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots.$$

[4] Notera att $\sqrt{2}$ endast är en symbol, det är beteckningen för det icke-negativa reella tal vars kvadrat är 2.

Det reella talet a är **större än** talet b, skrivs $a > b$, om och endast om $a - b$ är positivt. Talet a är **mindre än** talet b, skrivs $a < b$, om och endast om $a - b$ är negativt.

För alla reella tal a och b finns därmed tre möjligheter: $a = b$, $a > b$ eller $a < b$.

I detta sammanhang har man ofta användning av en praktisk mängdbeskrivning. Säg till exempel att vi, av någon anledning, är intresserade av alla reella tal x som uppfyller villkoret $x < 5$. Ett praktiskt sätt att beskriva denna mängd av tal är

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 5\},$$

som tolkas och utläses på följande sätt. De speciella parenteserna $\{$ och $\}$ är mängdparenteser, (vardagligt krullparenteser). De inramar beskrivningen av objekten i mängden. Det inledande $x \in \mathbb{R}$ innebär att alla objekt skall tillhöra mängden av alla reella tal, kort sagt att alla objekt är reella tal. Kolon ':' läses **sådana att**. Efter kolontecknet kommer villkoret som skall vara uppfyllt för att ett reellt tal x skall få vara med i mängden. I ord läser man alltså: *mängden av alla reella tal x sådana att x är mindre än* 5. Vi har att $-3 \in \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ och $12 \notin \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. Talet -3 tillhör mängden medan talet 12 inte tillhör mängden.

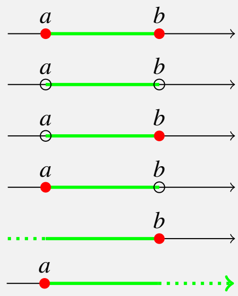
Mängden av alla positiva reella tal kan skrivas som $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, mängden av de negativa reella talen som $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ och av de **icke-negativa** reella talen som $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Mängdbeteckningen kommer vi också att använda för andra grundmängder än de reella talen. Man kan t.ex. skriva $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$ vilket betyder mängden av alla heltal vars kvadrat är mindre än 5, dvs. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Man inför de två s.k. **oändligheterna**, symbolerna $-\infty$ och ∞ som uppfyller $-\infty < x < \infty$ för alla reella tal x. Observera att oändligheterna inte är reella tal.

Vissa mängder, så kallade **intervall**, förekommer mycket ofta. Därför är det praktiskt att ha speciella beteckningar för sådana. Notera att grundmängden här alltid är de reella talen.

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}
\end{aligned}$$



Lägg märke till att '(' respektive ')' betyder att ändpunkten *inte* är med och att '[' respektive ']' betyder att ändpunkten är med.

1.4.2 Räkneregler för olikheter

Också för olikheter gäller vissa räkneregler. De kan alla härledas från definitionen av olikhet. Vi ger här ett exempel på några regler och härledning.

Exempel. Vi skall bevisa att om a och b är reella tal sådana att $a < b$ så gäller det att $a+c < b+c$ för alla reella tal c.

Vi beräknar differensen $(b+c)-(a+c)$ och skall visa att denna är positiv om $a < b$. Men $(b+c)-(a+c) = b+c-a-c = b-a$, som är positiv eftersom $a < b$. Vi har därmed visat att $a+c < b+c$ om $a < b$. $\square$

Exempel. Vi skall bevisa att om a och b är reella tal sådana att $a < b$ och $c < 0$ så gäller det att $a \cdot c > b \cdot c$. (Det är den olikhetsregeln man i särklass oftast gör fel på.)

Vi beräknar differensen $a \cdot c - b \cdot c$ och skall visa att denna är positiv om $a < b$ och $c < 0$. Men $a \cdot c - b \cdot c = (a-b) \cdot c$. Eftersom $a < b$, dvs. $a - b < 0$, och $c < 0$ har vi att båda faktorerna i den sista produkten är negativa. Alltså är produkten $(a-b) \cdot c$ positiv, vilket innebär att $a \cdot c > b \cdot c$. $\square$

Vi återkommer till olikheter i del 2 av kursen.

För alla reella tal $a,\ b,\ c$ och d, gäller det att

- Om $a < b$ och $b < c$ så gäller $a < c$
- Om $a < b$ så gäller $a+c < b+c$
- Om $a < b$ och $c < d$ så gäller $a+c < b+d$
- Om $a < b$ och $0 < c$ så gäller $a \cdot c < b \cdot c$
- Om $a < b$ och $c < 0$ så gäller $a \cdot c > b \cdot c$
- Om $0 < a < b$ så gäller $a^2 < ab < b^2$
- Om $a < b < 0$ så gäller $a^2 > ab > b^2$
- Om $a, b > 0$ och $a^2 < b^2$ så gäller $a < b$
- Om $a, b < 0$ och $a^2 < b^2$ så gäller $a > b$

Övningar

1.4.1 Gäller det att

a. $2 \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$? b. $2 \leq 3$?
c. är det någon skillnad på utsagorna i (a) och (b) ovan?

1.4.2 Visa att räknereglerna för olikheter i avsnitt 1.4.2 gäller genom att använda metoden som presenteras i exemplet i samma avsnitt.

1.4.3 Ge exempel på reella tal a, b, c och d sådana att $a < b$ och $c < d$ men där $a - c < b - d$ inte gäller.

1.4.4 Skriv talen nedan på decimalform.

a. $\frac{17}{8}$ b. $\frac{7}{6}$ c. $-\frac{3}{14}$

1.4.5 Skriv talen nedan på enklaste bråkform.

a. $-2,33333\ldots$ b. $0,852852852\ldots$ c. $1,2399999\ldots$

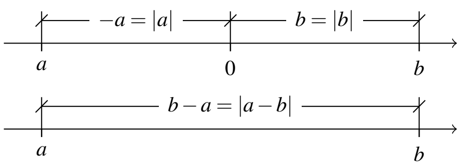
1.5 ABSOLUTBELOPP

I detta avsnitt introduceras ett viktigt begrepp, nämligen absolutbeloppet av ett reellt tal. Absolutbeloppet är i grund och botten ett avstånd, och därför alltid ett icke-negativt tal. Begreppet återkommer i avsnitt 4.4 då vi studerar funktioner samt i kursens andra del då vi studerar komplexa tal.

Om a är ett reellt tal så är **absolutbeloppet** av a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{om} \quad a < 0. \end{cases}$$

Tänk på att $-a$ är det motsatta talet till a. Om a är negativt så är $-a$ positivt, så t.ex. är $|-3| = -(-3) = 3$.



Figur 3: Olika avstånd

Av definitionen följer direkt att $|a| = |-a| \geq 0$ för alla reella tal a. **En geometrisk tolkning** av absolutbeloppet är att $|a|$ talar om hur långt från punkten 0 som punkten a ligger på tallinjen, dvs. $|a|$ är lika med avståndet mellan a och 0.

Om a och b är två reella tal så är $|a - b|$ avståndet mellan a och b på tallinjen. Vi har t.ex. att -7 och 3 ligger på avståndet 10 från varandra, eftersom $|-7-3| = |-10| = 10$.

Exempel. Vi söker de tal x som uppfyller $|3 - x| = 5$.

Vi söker de punkter på tallinjen, som ligger på avståndet 5 från 3. Det är två punkter, en till höger om 3, nämligen $3 + 5 = 8$, och en till vänster, $3 - 5 = -2$. $\square$

Exempel. Vi söker de tal x som uppfyller $|3 - x| \leq 5$.

Nu söker vi de punkter på tallinjen, som ligger på avstånd högst 5 från 3. Det är alla punkter som ligger mellan 3 och $3 + 5 = 8$, eller mellan 3 och $3 - 5 = -2$, alltså alla punkter mellan -2 och 8, och vi får

$$\{x \in \mathbb{R} : |3-x| \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \text{ och } x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 8\} = [-2, 8].$$

□

Tidigare definierades $\sqrt{x}$, för $x \geq 0$ som det (enda) icke-negativa tal vars kvadrat är x. Det betyder att $\sqrt{4} = 2$, och därmed att $\sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Generellt gäller att

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{för alla reella tal} \quad a.$$

Övningar

1.5.1 Bestäm

a. $|7|$ b. $|-7|$ c. $|0|$

1.5.2 Bestäm alla reella tal x sådana att

a. $|x+1| = 1$ b. $|3-x| = 7,5$ c. $|x+4| = 0$
d. $|3-2x| = 5$ e. $|x-2| = -2$

1.5.3 Ange (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

a. $|x-1| \leq 2$ b. $|x+3| < 5$ c. $|x+3| > 5$
d. $|x+2| \leq 0$ e. $2 < |x-2| \leq 3$ f. $|x+1| > 0$

1.6 Kvadratrötter

Vi har redan tidigare haft anledning att definiera och kommentera kvadratrötter. Här gör vi det något mer systematiskt. Vi återkommer till ämnet i kapitlet om funktioner.

1.6.1 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom produkten av såväl två positiva tal, som två negativa tal, är positiv så gäller det att

$$x^2 = x \cdot x \geq 0 \text{ för alla reella tal } x.$$

Alltså har ekvationen $x^2 = b$ ingen reell lösning om $b < 0$. I avsnitt 1.4 behandlades svårigheterna med att avgöra huruvida en viss ekvation har lösningar i det talsystem man arbetar med. Där påpekades att ekvationen $x^2 = b$ alltid har en (dvs. minst en) reell lösning om $b > 0$. I själva verket har den alltid två, t.ex. har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna 3 och -3.

Med **kvadratroten** ur b, $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b.

Notera att $\sqrt{b} \geq 0$. Alltså är $\sqrt{9} = 3$ och inte -3 eller ± 3. Det gäller också att $\sqrt{0} = 0$. Enligt definitionen har vi alltså att $(\sqrt{b})^2 = b$. Men det gäller också att

$$\left(-\sqrt{b}\right)^2 = \left(-\sqrt{b}\right) \cdot \left(-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$

Alltså gäller det att:

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika **reella lösningar** (ibland även kallade **rötter**):

$$\sqrt{b} \text{ och } -\sqrt{b}$$

Man skriver ibland $x^2 = b \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$. Med detta menas alltså att ekvationen har lösningarna $x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = -\sqrt{b}$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 9$ har således lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, dvs. $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$. $\square$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 20$ har lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$, eftersom direkt kontroll ger att $(2\sqrt{5})^2 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4(\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$. $\square$

1.6.2 Räkneregler

Av definitionen av kvadratrot får vi följande räkneregler:

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ för $a \geq 0$.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, dvs.
$$\sqrt{a^2} = a \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2} = -a \text{ om } a < 0.$$
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$ och alla a, dvs.
$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2 \cdot b} = -a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a < 0.$$
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, om $a > 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, $a \neq b$, $a, b > 0$.

Den första punkten följer direkt av definitionen av kvadratrot eftersom $\sqrt{a}$ är det icke-negativa tal vars kvadrat är a.

Punkt två kan bevisas genom att vi konstaterar att $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ och att

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b.$$

Alltså är $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ enligt definitionen av kvadratrot.

På liknande sätt bevisas regeln för roten ur en kvot och de två efterföljande reglerna.

Den femte regeln följer av

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Metoden som används i sista punkten kallas **förlängning med konjugatuttryck**. Uttrycken $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ och $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ kallas konjugerade, eller varandras **konjugat**. Om man multiplicerar de med varandra så får man (se avsnitt 1.8 för den s.k. konjugatregeln)

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

De två sista reglerna kan nu visas genom att man förlänger med konjugatet, så t.ex. för den första likheten har vi

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \text{ för } a \neq b,\ a, b > 0.$$

Anmärkning. I allmänhet, alltså för de flesta tal a och b, är

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Till exempel ger $a = b = 1$ att $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$, medan $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$. På samma sätt är i allmänhet

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Vi visar nu ett antal exempel på hur man kan använda räknereglerna.

Exempel. Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$ får vi till $x^2 = 3/4$ genom att addera 3 till båda leden och sedan dividera dem med 4. Den har därmed lösningarna

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Exempel. Den tredje punkten implicerar att

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |-3|.$$

$\square$

Exempel. Den fjärde punkten handlar om att bryta ut ur eller multiplicera in faktorer i rotuttryck och vi har exempelvis att

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

och

$$-2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = -\left(2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{2}} = -\sqrt{6}.$$

$\square$

Exempel. Den fjärde punkten ger ibland möjlighet till förenkling om man har flera rötter sådana att talen under rottecknen har gemensamma faktorer. Här kommer ett exempel

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

$\square$

Exempel. Den näst sista punkten ger exempelvis att

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6} \ (\approx 0,4).$$

$\square$

Exempel. Förlängning med konjugat (sista punkten) ger att man kan skriva om uttryck som

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}}$$

på följande sätt

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}} = \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

så att man får heltalsnämnare. $\square$

Exempel. Vi kan jämföra storleksordningen mellan tal som innehåller kvadratrötter utan att använda räknare. Låt oss jämföra talen $\sqrt{2}+1$ och $\sqrt{5}$. Eftersom vi inte vet vilket av dem som är störst, skriver vi frågetecken mellan dem. Vi använder räknereglerna för olikheter. Både vänster- och högerledet är positiva, alltså får vi samma olikhetstecken efter kvadrering

$$\sqrt{2}+1 \;?\; \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}+1)^2 \;?\; (\sqrt{5})^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2+2\sqrt{2}+1 \;?\; 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \;?\; 1.$$

Eftersom $\sqrt{2} > 1$, gäller $\sqrt{2}+1 > \sqrt{5}$. $\square$

Exempel. Här visar vi att

$$\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} > 1.$$

Enligt räknereglerna för olikheter kan vi förlänga med 3 och istället visa att

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > 3\cdot 1 = 3,$$

eftersom $3 > 0$. Vänsterledet kan nu skrivas om

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Vi använder återigen räknereglerna för olikheter: $\sqrt{3}+\sqrt{2} > 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 > 9 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}+2 > 9 \Leftrightarrow \sqrt{6} > 2 \Leftrightarrow 6 > 4$, vilket är uppenbart, alltså är det sant att

$$\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} > 1.$$

$\square$

Övningar

1.6.1 Förenkla

a. $\sqrt{0,49}$ b. $\sqrt{90000}$
c. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}$ d. $\sqrt{10}/\sqrt{125}$
e. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ f. $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{64}$.

1.6.2 Lös ekvationen

a. $x^2-25=0$ b. $5-x^2=0$ c. $9x^2-4=0$
d. $16-6x^2=0$ e. $x^2=0$

1.6.3 Skriv med heltalsnämnare

a. $2/\sqrt{6}$ b. $3/\sqrt{21}$ c. $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
d. $2/(\sqrt{11}-3)$ e. $1/(2-\sqrt{5})$ f. $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

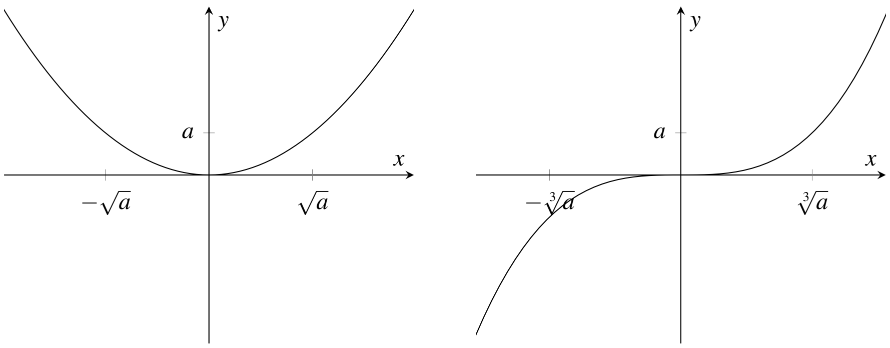
1.7 POTENSER MED RATIONELL EXPONENT

1.7.1 n-TE ROTEN UR REELLA TAL

Man kan visa att, om $b \geq 0$ och n är ett positivt heltal, så finns, i likhet med specialfallet $n = 2$, precis ett icke-negativt tal a sådant att $a^n = b$. Om n är ett jämnt tal så gäller också att $(-a)^n = b$. Om n är ett udda tal så gäller istället att $(-a)^n = -b$. Detta leder till följande definition av n-te roten ur ett icke-negativt tal.

Om n är ett positivt heltal och $b \geq 0$ är ett reellt tal, så menas med **n-te roten** ur b, $\sqrt[n]{b}$, det icke-negativa reella tal vars n-te potens är b, dvs. som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Om b är ett negativt tal och n är ett positivt, udda heltal så menas med $\sqrt[n]{b}$ det negativa reella tal vars n-te potens är b, dvs. som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.



Figur 4: Graferna till x^2 och x^3

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt tal och n är ett positivt heltal, har då följande **reella lösningar (rötter)**:

1. $x = \sqrt[n]{b}$, om n är ett udda (positivt) heltal,
2. $x = \pm\sqrt[n]{b}$, om $b \geq 0$ och n är ett jämnt (positivt) heltal,
3. saknar reella rötter om n är jämnt och $b < 0$ (roten $\sqrt[n]{b}$ är i detta fall inte definierad).

För udda $n = 1, 3, 5, \ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{-b} = -\sqrt[n]{b}$. Definitionen av $\sqrt[n]{b}$ gäller även för $n = 1$, vi har då att $\sqrt[1]{b} = b$ för alla reella tal b.

Exempel. Eftersom $2^4 = 16$ och $5^3 = 125$ så får vi

$$\sqrt[4]{16} = 2,\ \sqrt[3]{125} = 5 \text{ och } \sqrt[3]{-125} = -5.$$

direkt från definitionen. $\square$

1.7.2 RÄKNEREGLER

Följande **räkneregler för n-te rötter** bevisas på samma sätt som motsvarande regler för kvadratroten.

RÄKNEREGLER FÖR n-TE RÖTTER

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, för $a \geq 0$ om n är jämnt, för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ om n är jämnt.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ och $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.

Exempel.

a. $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

b. $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{-3^4} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = -3\sqrt[3]{3}$

□

Precis som för kvadratrötter gäller i allmänhet

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}.$$

1.7.3 POTENSER MED RATIONELL EXPONENT

I detta avsnitt definieras vad som menas med en **potens med rationell exponent**. Definitionen bygger både på potens med heltalsexponent (avsnitt 1.3) och på definitionen av n-te roten som gjordes i föregående avsnitt. Många av n-te rotens egenskaper är lättare att ta till sig efter en omskrivning som potens med rationell exponent. I slutet av avsnitt 1.7.4 "översätter" vi en viktig egenskap från potensspråk till rotspråk.

Om m/n, $(n > 0)$, är ett rationellt tal och $b > 0$ är ett reellt tal så ges $b^{\frac{m}{n}}$ av

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Speciellt gäller

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}.$$

Om $m, n > 0$ gäller definitionen även för $b = 0$.

Speciellt är $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Exempelvis gäller för kvadratroten, att

$$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{\frac{1}{2}}.$$

Heltalet m kan skrivas som $m/1$. För att definitionen ovan ska vara lyckad måste $a^m = a^{\frac{m}{1}}$. Som tur är får vi $a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$. Inte nog med det, eftersom

$$\frac{m}{n} = \frac{s \cdot m}{s \cdot n}$$

för alla $s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, vore det olyckligt om det skulle visa sig att resultatet är beroende av s. Så är det inte, för positiva reella tal b och $s, n > 0$ gäller att $b^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{s \cdot m}{s \cdot n}}$. Istället för att ge ett generellt bevis illustrerar vi detta med ett exempel (exakt samma metod fungerar för allmänna m, n, s).

Exempel. För $b > 0$ gäller att $b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{4}{6}}$.

Per definition har vi att

$$b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2},$$

medan

$$b^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{b^4}.$$

För att visa att båda talen är lika med varandra räcker det att visa att

$$\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^6 = b^4$$

(det skulle betyda att $\sqrt[3]{b^2}$ är ett positivt tal vars sjätte potens är b^4, och alltså att $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{b^4}$). Vi har

$$\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^6 = \left(\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^3\right)^2 = \left(b^2\right)^2 = b^4,$$

och därmed har vi visat att $b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{4}{6}}$. □

För udda heltal n kunde vi definiera $\sqrt[n]{b}$ även för $b < 0$. Man använder därför ibland skrivsättet $b^{\frac{1}{n}}$ för udda n även då $b < 0$. Här krävs dock stor försiktighet, beroende på att rationella tal inte har en entydig framställning på formen p/q. Man måste komma ihåg att definitionen $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ endast gäller för $b > 0$. Att det inte går att generellt definiera potens med rationell exponent för negativa tal framgår av följande exempel.

Exempel. Vi har att $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$. Men vi har också att $1/3 = 2/6$. Om man skulle tillämpa definitionen av $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ med $b = -27$ skulle man få

$$-3 = (-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3,$$

en motsägelse. □

1.7.4 Räkneregler

Med hjälp av räknereglerna för n-te roten ur ett positivt tal och räknereglerna för potenser med heltalsexponent kan man visa att potensuttrycket $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent för $b > 0$ lyder samma **potenslagar** som potens med heltalsexponent (se avsnitt 1.3.3). Vi har alltså följande:

För alla positiva reella tal a och b och alla rationella tal x och y gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Potensregeln $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ med $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m}$ (n och m är heltal, större än eller lika med 2) kan skrivas om till en räkneregel för n-te rötter:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, för alla $a > 0$ och alla $m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq 2$

Exempel. Här är några exempel på hur man tillämpar räknereglerna.

a. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

b. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

c. $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

d. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72}$

e. $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2} - 2 + 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - 2$

$\square$

Övningar

1.7.1 Förenkla

a. $27^{1/3}$ b. $4^{-0,5}$ c. $(\sqrt{8})^{2/3}$
d. $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ e. $3^{1/2}/9^{-3/4}$ f. $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$
g. $(0,0016)^{-0,25}$

1.7.2 Förenkla

a. $\sqrt[6]{9}$ b. $\sqrt[6]{8}$ c. $\sqrt[3]{-24}$
d. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ e. $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$ f. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$
g. $4/\sqrt[3]{16}$ h. $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.7.3 Förenkla

a. $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ b. $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ c. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$
d. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ e. $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ f. $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.8 Algebraiska omskrivningar

Syftet med algebraiska omskrivningar är att framställa algebraiska uttryck på den form som är lämpligast för det man sysslar med. Man talar ofta om ”förenkling”, men det gäller att komma ihåg att ordet ”enkelt” kan betyda olika saker i olika sammanhang.

Vid algebraiska omformningar utnyttjas alla de räkneregler som gäller vid räkning med reella tal, potenser, olikheter etc. Man bör därför vara synnerligen väl förtrogen med dessa.

När man skriver produkter med variabler inblandade utelämnar man ofta multiplikationssymbolen. Produkten $6 \cdot a$ skrivs $6a$, $a \cdot b \cdot c$ skrivs abc o.s.v.. Då man utelämnar multiplikationssymbolen måste man vara säker på att detta inte orsakar missuppfattning, abc skulle kunna vara en variabel istället för en produkt av tre variabler. Hur skall $2m+10cm$ tolkas? Betyder det $210cm$ eller $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m = 2 \cdot (1+5 \cdot c) \cdot m$? Det beror helt på sammanhanget. I detta kapitel skall abc tolkas som $a \cdot b \cdot c$ och $2m+10cm$ betyder $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$. I tryckt text är konventionen att lutande stil betecknar enstaka variabler, så att flera lutande bokstäver i rad betecknar en produkt av motsvarande variabler. Enheter för meter, liter etc skrivs rakt, likaså bokstavskombinationer som är funktionsnamn eller liknande. T.ex. betecknar $\sin x$ funktionen sinus värde i punkten x, medan $sinx$ tolkas som $s \cdot i \cdot n \cdot x$; $2m+10cm = 2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$, medan 2 m+10 cm=210 cm.

Exempel. Här är några exempel på hur man med de vanliga räknereglerna kan förenkla algebraiska uttryck.

a.

$$\begin{aligned} 10m - 9y + 5y + 7m + 4y - m &= (10+7-1)m + (-9+5+4)y \\ &= 16m + 0 \cdot y = 16m \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} (m - (a - b - (c - m)) &= m - (a - b - c + m) \\ &= m - a + b + c - m = b + c - a \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} 3abc \cdot a^3bc^2 \cdot (-4b^2) &= 3 \cdot (-4) \cdot a \cdot a^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 \\ &= -12a^4b^4c^3 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} (3x^2y^3z)^4 &= 3^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 \cdot z^4 \\ &= 81x^8y^{12}z^4 \end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned} (2x+3)(4x^2-6x+9) &= 2x \cdot (4x^2-6x+9) + 3 \cdot (4x^2-6x+9) \\ &= 2x \cdot 4x^2 - 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 + 3 \cdot 4x^2 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 9 \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 \\ &= 8x^3 + 27 \end{aligned}$$

□

Vissa omskrivningar förekommer så ofta att man behöver kunna dem aktivt. Det räcker inte att veta att de finns och kunna slå upp dem i en formelsamling. För att kunna räkna ”med flyt” krävs en hel del utantillkunskap.

Följande viktiga identiteter behöver man kunna utantill:

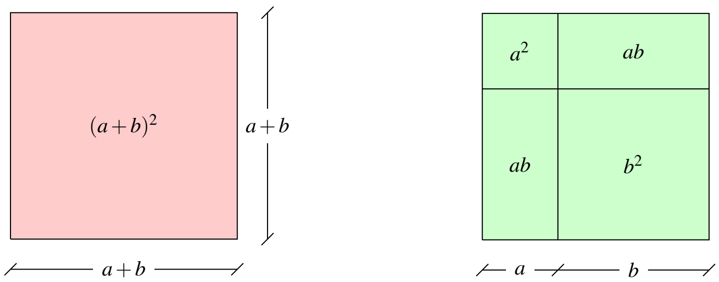
Kvadreringsreglerna: $\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$

Konjugatregeln: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$

Kuberingsreglerna: $\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$

Faktoruppdelningarna: $\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$

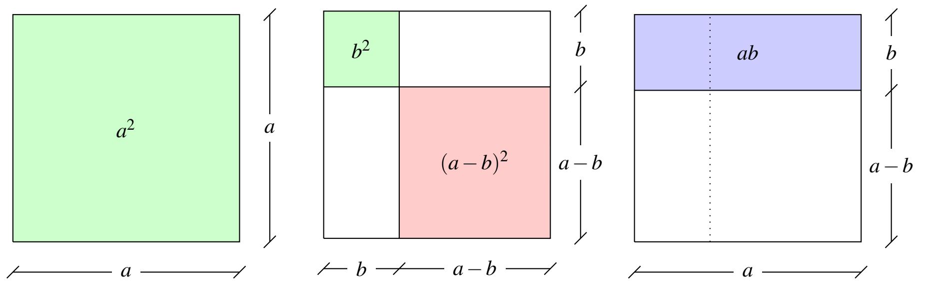
Vi ska nu också argumentera geometriskt för att kvadreringsregeln och konjugatreglerna stämmer. Vi börjar med den första av kvadreringsreglerna, och tar hjälp av följande bild:



Figur 5: Illustration till kvadreringsregeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Eftersom att de två kvadraterna i figur 5 har samma sidlängd så har de samma area. Vi ska nu räkna ut den här arean A på två olika sätt. Om vi multiplicerar sidlängdena i den vänsta kvadraten ser vi att $A = (a+b)^2$. I figuren till höger räknar vi ut samma area genom att lägga ihop areorna för de fyra mindre rektanglarna som vi delat ipp den stora kvadraten i. Vi ser då att vi också har att $A = a^2 + ab + ab + b^2$. Alltså är $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

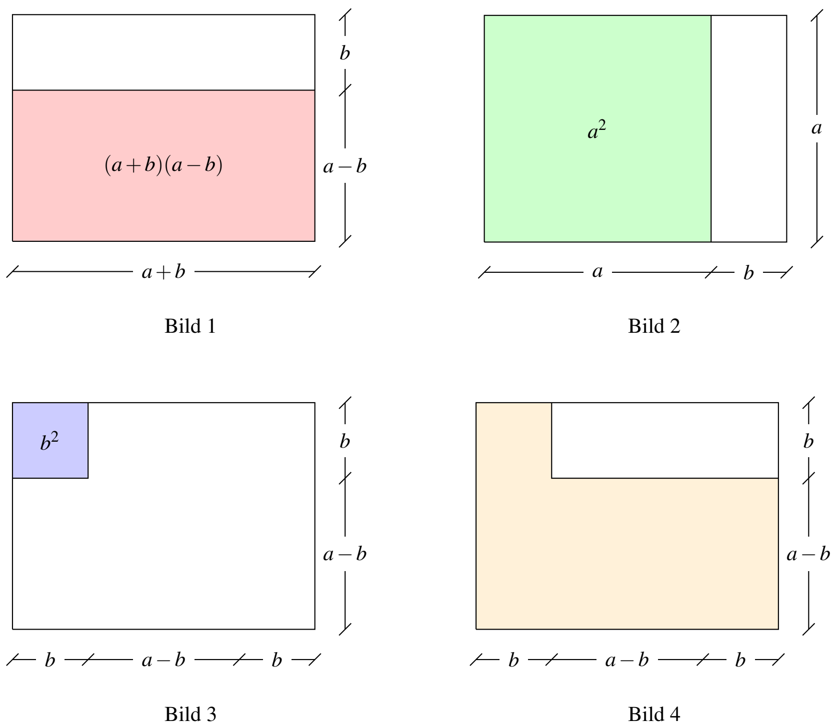
Vi visar nu ett geometriskt argument för den andra kvadreringsregeln, som säger att $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Till vår hjälp ska vi nu ta följande bild.



Figur 6: Illustration till kvadreringsregeln $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Precis som för den första kvadreringsregeln är arean A för de tre kvadraterna i figur 6 alla lika stora. Med hjälp av kvadraten längst till vänster ser vi att $A = a^2$. Med hjälp av de två andra figurerna kan vi dock se att vi kan bygga ihop samma area av de mindre rektanglarna. Ett sätt att göra det på är att lägga ihop kvadraten med area $(a-b)^2$ med de två(!) rektanglarna med area ab, och sedan dra bort en kvadrat med area b^2, eftersom att vi annars räknar den lilla kvadraten två gånger (en gång i varje rektangel med area ab. Om vi lägger ihop alla de areorna så har vi alltså kommit fram till att vi också måste ha att $A = (a-b)^2 + ab + ab - b^2$. Om vi lägger ihop de två uttrycken för A får vi att $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Sist men inte minst så ska vi visa att konjugatregeln gäller, dvs. att $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; och vi behöver nu fyra rektanglar.



Figur 7: Illustration till konjugatregeln $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Vi ska räkna ut arean A av det markerade området i bild 4 på två olika sätt. Om vi kombinerar areorna i bild 1 och bild 3 ovan, så ser vi att $A = (a+b)(a-b)+b^2$. Men om vi jämför bild 4 med bild 2 istället, så ser vi att de markerade områdena i de två bilderna har samma area. Det följer att vi måste ha att $A = a^2$, och vi får därför att $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$, vilket ju är samma sak som att $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Exempel. Här följer först tre exempel på hur man kan använda reglerna för att utveckla en potens (dvs. "öppna parenteserna") och sedan tre exempel på det omvända då man faktoriserar ett uttryck (framställer det som produkt av enklare uttryck).

a.

$$\begin{aligned}(3a+4b)^2 = {} & \text{[kvadreringsregeln]} \\ & = (3a)^2 + 2\cdot 3a\cdot 4b + (4b)^2 \\ & = 9a^2 + 24ab + 16b^2\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}(3+x^2)(x^2-3) & = (x^2+3)(x^2-3) \\ & = \text{[konjugatregeln]} \\ & = (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}(x-2y)^3 = {} & \text{[kuberingsregeln]} \\ & = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2y + 3\cdot x\cdot (2y)^2 - (2y)^3 \\ & = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}4x^2 - 9a^4 & = (2x)^2 - (3a^2)^2 \\ & = \text{[konjugatregeln]} \\ & = (2x+3a^2)(2x-3a^2)\end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned}12x^4 - 2x^5 - 18x^3 = {} & \text{[alla gemensamma faktorer brytes ut]} \\ & = 2x^3\cdot(6x - x^2 - 9) \\ & = -2x^3(x^2 - 6x + 9) \\ & = \text{[kvadreringsregeln]} \\ & = -2x^3\cdot(x-3)^2\end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned}x^4 + 8xy^6 & = x\cdot(x^3 + 8y^6) \\ & = x\cdot\left(x^3 + (2y^2)^3\right) \\ & = [\text{ enligt formeln för } (a^3+b^3)] \\ & = x\cdot(x+2y^2)(x^2 - x\cdot 2y^2 + (2y^2)^2) \\ & = x\cdot(x+2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4)\end{aligned}$$

□

Exempel. Här är ett par numeriska exempel på hur man kan använda räknereglerna. I de två första beräknas kvadraten av ett tal med enkla räkningar.

a. $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2\cdot 20\cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

b. $29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2\cdot 30\cdot 1 + 1^2 = 841$

c. $37^2 - 33^2 = (37-33)\cdot(37+33) = 4\cdot 70 = 280$ □

OBS: Uttrycket $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan ej faktoruppdelas (med reella tal).

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är **allmänna konjugatregeln**.

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 + \cdots + a\cdot b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

som visas genom att utveckla högra ledet.

1.8.1 Pascals triangel och $(a+b)^n$

Koefficienterna i utvecklingen av $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$$\begin{array}{r ccccccccccc c}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{o.s.v.}
\end{array}$$

Raden med $n = 3$ ger kuberingsregeln

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b^3$$

och raden med $n = 5$ innebär att

$$(a+b)^5 = 1\cdot a^5 + 5\cdot a^4\cdot b + 10\cdot a^3\cdot b^2 + 10\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot a\cdot b^4 + 1\cdot b^5$$

Ett tal i triangeln fås genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför[5]. För att inse att detta ger koefficienterna i utvecklingen kan vi titta på $(a+b)^4$. Vi har att $(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)^3$. Men $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Alltså är

$$(a+b)^4 = a\cdot(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b\cdot(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

[5] Det finns även en allmän formel för koefficienterna i utvecklingen $(a+b)^n$. Det vore olyckligt att behöva skriva upp 999 rader i Pascals triangel för att ta reda på en koefficient man behöver i tusende raden.

Man får en term a^3b ur båda produkterna, dels $b \cdot a^3$, dels $a \cdot 3a^2b$. Koefficienten för a^3b är alltså summan av koefficienterna för a^3 och a^2b.

Exempel. Här är tre ytterligare exempel på hur man använder Pascals triangel.

a.
$$\begin{aligned}(a-b)^4 &= (a+(-b))^4 \\ &= a^4+4a^3(-b)+6a^2(-b)^2+4a(-b)^3+(-b)^4 \\ &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\end{aligned}$$

b.
$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

c.
$$(2a+b)^3 = (2a)^3+3(2a)^2b+3(2a)b^2+b^3 = 8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$$
□

1.8.2 Rationella uttryck

Ett uttryck kallas rationellt om det är en kvot mellan två algebraiska summor av termer som i sin tur är produkter och heltalspotenser med positiv exponent av variabler, eventuellt med reella tal som koefficienter. Räkning med rationella uttryck följer samma räkneregler som räkning med rationella tal. Vid addition är det lämpligt att förlänga med ”så lite som möjligt”. Man bestämmer i så fall minsta gemensamma nämnare i stället för att ”multiplicera korsvis” på liknande sätt som vi gjorde för rationella tal. För att bestämma minsta gemensamma nämnare behöver man faktoruppdela de olika termernas nämnare. Primtalen här motsvaras av algebraiska uttryck som inte går att faktorisera reellt. I detta avsnitt arbetar vi med hjälp av kvadrerings-, kuberings- eller konjugatreglerna. Senare kommer vi även ta hjälp av faktorsatsen och polynomdivision.

Exempel. Här är ett antal exempel på omskrivningar av rationella uttryck. Notera att höger- och vänsterledet inte alltid är definierade för samma variabelvärden.

a. En användbar regel är
$$\frac{b-a}{c} = \frac{-(a-b)}{c} = -\left(\frac{a-b}{c}\right),$$
som ger att
$$\frac{b-a}{a^2-b^2} = -\left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = -\left(\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}\right) = -\left(\frac{1}{a+b}\right)$$

b.
$$\frac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}} = \frac{5x^3}{2y^3} = \frac{5}{2}\cdot x^3\cdot y^{-3}$$

c.
$$\frac{x-y}{xy-x^2} = \frac{x-y}{x(y-x)} = -\left(\frac{y-x}{x(y-x)}\right) = -\frac{1}{x}$$

d.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\div\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{a^2}\right) = \frac{(a^2+b^2+2ab)}{ab}\div\frac{(a^2-b^2)}{a^2b}$$
$$= \frac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)}$$
$$= \frac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)}$$
$$= \frac{(a+b)a}{a-b}$$

e.

$$\frac{5}{2x-2}-\frac{1}{3x}+\frac{3x+1}{1-x^2} = \text{[faktoruppdela nämnarna]}$$
$$= \frac{5}{2(x-1)}-\frac{1}{3x}-\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \text{[minsta gemensamma nämnare är } 2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\text{]}$$
$$= \frac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)}-\frac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)}-\frac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x}$$
$$= \frac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)}$$

$$= -\left(\frac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}\right)$$

□

1.8.3 Uttryck som innehåller rötter

Vid omskrivning av rotuttryck kan man givetvis använda alla de räkneregler som gäller för reella tal. Det man speciellt skall tänka på är att $(\sqrt{a})^2 = a$ om $a \geq 0$, och att $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a.

Exempel. Här är två exempel på förenklingar av rationella rotuttryck

a.

$$\frac{3-c}{\sqrt{c-3}} = -\frac{c-3}{\sqrt{c-3}} = -\frac{\left(\sqrt{c-3}\,\right)^2}{\sqrt{c-3}} = -\sqrt{c-3} \text{ om } c > 3.$$

Observera att uttrycket $\sqrt{c-3}$ är definierat om $c-3 \geq 0$, dvs. om $c \geq 3$, men $1/\sqrt{c-3}$ är definierat endast om $c > 3$.

b.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{a^2+a^3}} &= \frac{a}{\sqrt{a^2(1+a)}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1+a}} \\
&= \frac{a}{|a|\sqrt{1+a}} \\
&= \begin{cases} 1/\sqrt{1+a} \text{ om } a > 0, \\ -1/\sqrt{1+a} \text{ om } -1 < a < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!

$\square$

Övningar

1.8.1 Förenkla

a. $10t - 14u + 7v - t - 8v + 14u - 8v - u$
b. $70a + 20c + 33x + c - x - 28a - 40a - 9c + 41x$

1.8.2 Förenkla

a. $m + 2p - (m + p - r)$ b. $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$
c. $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

1.8.3 Förenkla

a. $2xz^7 \cdot 10xz$ b. $a^2b^4c \cdot (-3ac^2) \cdot 9abc$
c. $-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot (-7qr^3)$

1.8.4 Förenkla

a. $(3x^2y)^3$ b. $(4ab^2c^3)^2(-2a^2b)^3$
c. $(a^2)^p \cdot (a^pb^{3p})^2 \cdot b^p$

1.8.5 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

a. $(2x - y)(x + 2y)$ b. $(2x - y)(x + 2y)(x - y)$
c. $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)$ d. $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x - 2x^2)$

1.8.6 Utveckla

a. $(3a - 4b)^2$ b. $(a^3 + 2b^2)^2$
c. $(m^4 + 4)^2 + (m^4 - 4)^2$

1.8.7 Förenkla

a. $(6 - x)(x + 6)$ b. $(a^2 + y)(a^2 - y)$
c. $(x^3 + 3)(x^3 - 3)(x^6 + 9)$

1.8.8 Utveckla

a. $(y + 3x)^3$ b. $(3x + 2y^2)^3$
c. $(x^4 - 6x)^3$

1.8.9 Uppdela i faktorer

a. $x^2 - a^4$ b. $9x^4 - 25x^2$
c. $18x + 81 + x^2$ d. $x^4y + 4x^2y^3 - 4x^3y^2$
e. $x^4 - x$ f. $3a^3 + 81b^3$
g. $x^2 - x^6$ h. $54x^2y^7 - 16x^5y$

1.8.10 Utveckla

a. $(x-1)^5$ b. $(1-y)^7$
c. $(2x+a^2)^5$ d. $(xy^2 - 3z)^6$

1.8.11 Förenkla

a. $(6a^7b^3c)/(16ab^3c^3)$ b. $(32x^ny^p)/(36x^{n+1}y^{p-1})$
c. $(2ay+y^2)/(2ay)$ d. $(12x^2y^2 + 20xy^2 - 8x^2y)/(4xy)$

1.8.12 Förenkla

a. $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ b. $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$
c. $(x-y)^3/(y-x)^5$ d. $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$
e. $(a^3-b^3)/(b-a)^2$ f. $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$
g. $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

1.8.13 Förkorta (om möjligt)

a. $(a^3+b^3)/(a+b)$ b. $(a^4-b^4)/(a-b)$
c. $(a^4+b^4)/(a+b)$ d. $(a^5-b^5)/(b-a)$

1.8.14 Förenkla

a. $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y^2}{x}\right) \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)$
b. $\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) \div \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$
c. $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{2}{1} + \frac{x-y}{x+y}\right)$
d. $\left(\frac{1/a}{b} - \frac{1/b}{a} + \frac{1}{2b/a} + \frac{2}{a/b}\right) \div \left(\frac{a^2+4b^2}{ab}\right)$

1.8.15 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möligt)

a. $1/(x-3) + 1/(x+3) - 2/x$
b. $1 + 1/(2x) + 1/(x^2-4x)$
c. $1/(x^2+x) + 1/(1-x^2)$
d. $1/(x^3-8) + 1/(2x^2-8) + 1/(8-4x)$

1.8.16 Förenkla och avgör för vilka värden på c som följande uttryck är definierade

a. $\sqrt{c^2+4c+4}$ b. $c/\sqrt{c^2}$
c. $(\sqrt{c})^2/c$ d. $(c^2-9c)/\sqrt{9-c}$
e. $c/\sqrt{c^3-2c^2}$ f. $\sqrt{c^3+2c^2}/c$