

凸优化 2020 Homework-10

1. 考虑等式约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

其中 $\text{dom } f = \mathbb{R}_{++}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$ 。

- 1) 采用标准 Newton 法求解上述问题在 $m = 30, n = 100$, 可行初始点为 x_0 时的最优解 x^* 和 p^* 。

采用回溯直线搜索, 合理选择回溯参数, 要求误差 $\eta = 10^{-10}$, 并画出 $\log(f(x^{(k)} - p^*))$ 和 k 迭代次数的关系图。

- 2) 采用不可行初始点 Newton 法求解上述问题在 $m = 30, n = 100$, 不可行初始点为 x_1 时的最优解 x^{**} 和 p^{**} 。采用回溯直线搜索, 合理选择回溯参数, 要求误差 $\eta = 10^{-10}$, 并画出 $\log(f(x^{(k)} - p^{**}))$ 和迭代次数 k 的关系图。

2. 分别用障碍函数法和原对偶内点法求解下述二次规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (1/2)x^T Px + q^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $P \in S_+^n$, $q \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ 。

障碍函数法要求:

- 阈值误差 $\varepsilon = 10^{-10}$;
- 请画出对数对偶间隙 $\log(\frac{n}{t})$ 与 Newton 迭代次数 k 之间的关系;
- 给出原对偶最优解 x^* , λ^* , ν^* 和最优值 p^* ;

(障碍函数法中参数 μ 建议选取 $\mu = 10$)

原对偶内点法要求:

- 原残差 $\|r_{\text{pri}}\|_2 \leq 10^{-10}$, 对偶残差 $\|r_{\text{dual}}\|_2 \leq 10^{-10}$, 代理对偶间隙 $\hat{\eta} \leq 10^{-10}$;
- 给出最优解 x^* , λ^* , ν^* 和最优值 p^* ;

- 分别画出 $\log \hat{\eta}$ 和 $\log\{(\|r_{\text{pri}}\|_2^2 + \|r_{\text{dual}}\|_2^2)^{1/2}\}$ 与 Newton 迭代次数 k 的关系图。

说明

- 请使用“课程作业”附件中提供的数据求解以上两个问题：

对于第 1 题（文件夹 Data_Q1），我们给出了 $m=30$ ， $n=100$ 时对应的矩阵 A ， b ，以及可行初始点 x_0 ，不可行初始点 x_1 。

对于第 2 题（文件夹 Data_Q2），我们给出了 $m=100$ ， $n=200$ 时对应的矩阵 P ， q ， A ， b ，以及初始点 x_0 ， λ ， v 。

- 本次作业均为编程题，需要提交程序，计算结果及其分析文档的电子版，并通过网络学堂“课程作业”栏目提交。
- \log 指以自然对数为底的对数。
- 提交作业时保证程序可直接在文件夹中运行。

（以下为可选附加题）

对于函数：

$$f(x) = x^2 \left(2 + \frac{1}{2} \sin(x) \right)^2$$

从点 $x_0 = 19$ 出发。分别使用梯度下降，momentum，AdaGrad，RMSProp，Adam 算法，求解最小值点。画出函数值 $f(x)$ 随迭代次数 k 的变化曲线。