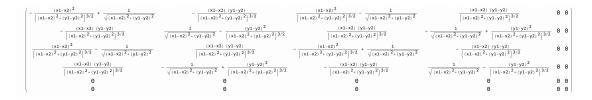
刘程华 2018011687 计91

Prob1:

设三点的坐标为: (x_1,y_1) (x_2,y_2) (x_3,y_3)

$$f\left(x_{1},y_{1},x_{2},y_{2},x_{3},y_{3}
ight) = \sqrt{\left(x_{1}-x_{2}
ight)^{2}+\left(y_{1}-y_{2}
ight)^{2}} + \sqrt{\left(x_{1}-x_{3}
ight)^{2}+\left(y_{1}-y_{3}
ight)^{2}} + \sqrt{\left(x_{2}-x_{3}
ight)^{2}+\left(y_{2}-y_{3}
ight)^{2}} + 0 \leqslant x_{i} \leq 2 \quad i=1,2,3 \ 0 \leqslant y_{i} \leq 1 \quad i=1,2,3$$

易得其Hessian阵如下:



得到此方阵的特征值为:

$$\left\{0,0,0,0,0,\frac{2}{\sqrt{\left(x_{1}-x_{2}
ight)^{2}+\left(y_{1}-y_{2}
ight)^{2}}}
ight\}$$

显然Hessian阵是半正定的。

因此 f_1 是凸的,同理可得 f_2 , f_3 是凸的, $f = f_1 + f_2 + f_3$ 是凸的(凸函数的非负加权求和仍然是凸函数)。

我们也可以通过定义来证明 f是凸函数:

ਪੋਟ੍ਰਿ
$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)^T, \mathbf{x} = (x_1, y_1)^T, \mathbf{y} = (x_2, y_2)^T, \mathbf{z} = (x_3, y_3)^T$$

$$f(v) = \|x - y\|_2 + \|x - z\|_2 + \|y - z\|_2$$

 $\forall t \in (0,1)$:

$$\begin{split} tf\left(\mathbf{v}^{(1)}\right) + (1-t)f\left(\mathbf{v}^{(2)}\right) &= t \big\|x^{(1)} - y^{(1)}\big\|_2 + t \big\|x^{(1)} - z^{(1)}\big\|_2 + t \big\|y^{(1)} - z^{(1)}\big\|_2 + \\ & (1-t)\big\|x^{(2)} - y^{(2)}\big\|_2 + (1-t)\big\|x^{(2)} - z^{(2)}\big\|_2 + (1-t)\big\|y^{(2)} - z^{(2)}\big\|_2 \\ &\geq \big\|t\left(x^{(1)} - y^{(1)}\right) + (1-t)\left(x^{(2)} - y^{(2)}\right)\big\| + \big\|t\left(x^{(1)} - z^{(1)}\right) + (1-t)\left(x^{(2)} - z^{(2)}\right)\big\| + \\ & \big\|t\left(y^{(1)} - z^{(1)}\right) + (1-t)\left(y^{(2)} - z^{(2)}\right)\big\| = f\left(tv^{(1)} + (1-t)v^{(2)}\right) \end{split}$$

因此这是一个凸优化问题!

通过 CVX 可以轻松得到最大值为5.236

最大值点(0,0) (2,0) (2,1)