炉石传说天梯中的博弈论

刘程华 2018011687 计91

炉石传说是一款我非常喜欢的游戏，陪我度过了很多休闲时光。在中国乃至世界范围内，炉石传说都有着极高的人气，它堪称是知名度最高、玩家最多的卡牌网游。在炉石传说中一个非常重要的模式是天梯模式，玩家可以通过天梯模式与随机的网络玩家对战，输者会掉落一颗星，赢者会赚的一颗星，当取得连续两次及以上次胜利时，会额外获得一颗星星。除此之外在某些的星星数设置有防坠落机制，即自己的星星达到该位置时对战输掉也不会掉落星星。玩家们非常乐于参加天梯对战模式，与随意的陌生人对战，希望获得更多的星星，从而在月末得到更多的奖励。当玩家进行天梯对战时候往往抱着这样的想法（我尤其感同身受）：争取得到更多的星星直到到达下一防坠落等级，然后改天再战；假如我多次战败，最多回到上一防坠落等级，此时我就善罢甘休。我不禁关心，我多次战败回到上一防坠落等级的概率以及预计的对战时间，相反的，我多次获胜到达下一防坠落等级的概率是多少一集预计的总对战时间。

为了简化问题，我们把随机的对手实例化为一个人，然后我们做出以下合理假设：每次对战所需的时间相同，每次对战我都以概率 p 获胜。因此我们关心的不再是对战时间而是对战次数。自然的，我们在伯努利概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$上定义双人博弈模型 $G(r,s,p)$， $s-1$颗星用来奖励 r 及 r 以上连胜。其中 $\Omega=\{\omega:\omega=(x_1,x_2,\cdots),x_i=\pm1\}$，$\mathscr{A}=\{A:A\subseteq\Omega\}$，在炉石传说模型中，$r=2,s=2$。

我们可以用一系列的独立同分布（伯努利分布）随机变量 $\{\xi_k\}_{k\geq1}$，来描述我的博弈过程，然后容易得到每轮的收益$\{X_k\}_{k\geq1}$和游戏 n 次的总收益 S_n

$$X_k=\begin{cases}-1, & \text{if } \xi_k=-1,\\ s, & \text{if } \xi_k=\xi_{k-1}=\cdots=\xi_{k-r+1}=1\\ 1, & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}$$

我们假设某天游戏开始时有 x 颗星星，则此后对战n局后星星数量为 $S_n^x=x+S_n$ ，根据我们在前面描述的玩家想法，我们定义停止游戏时间$\tau_k^x=\min\left\{0\leqslant l\leqslant k: S_l^x\leqslant L \text{ or } S_l^x\geqslant U\right\}\wedge k$ 为最早结束对战的游戏次数。其中，L 是上一防堕落等级对应的星星数，也就是下界；U 是下一防堕落等级对应的星星数，也就是上界；为了避免冲突，我们假设两者满足$L\leqslant x\leqslant U$ 且 $U-L\geqslant 4$。

我们可以定义跌落到下界的概率$\alpha_k(x)$和攀升到上界的概率$\beta_k(x)$

$$\alpha_k(x)=\mathbb{P}\left(\mathscr{A}_k^x\right),\quad \mathscr{A}_k^x=\bigcup_{l=0}^{k}\left\{w:\tau_k^x=l \text{ and } S_l^x\leqslant L\right\}$$
$$\beta_k(x)=\mathbb{P}\left(\mathscr{B}_k^x\right),\quad \mathscr{B}_k^x=\bigcup_{l=0}^{k}\left\{w:\tau_k^x=l \text{ and } S_l^x\geqslant U\right\}$$

$\{\mathscr{A}_k^x\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{\mathscr{B}_k^x\}_{k=1}^{\infty}$ 都是单调递增序列，根据单调收敛定理我们可以知道两者有极限，不妨设为$\alpha(x)$和$\beta(x)$。

将$\alpha_k(x)$用条件概率拆开，经过分类讨论和整理，我们得到$\alpha(x)$如下的差分形式

$$\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=U,\\ q\alpha(x-1), & x=U-1,\\ pq\alpha(x)+q\alpha(x-1), & x=U-2,\\ pq\alpha(x)+p\alpha(x+2)-pq\alpha(x+1)+q\alpha(x-1), & L+1\leqslant x\leqslant U-3,\\ 1, & x=L\end{cases}$$

$\beta(x)$类似不再繁述，并且值得一提的是，由于跌落和攀登之间是零和博弈，自然的想到有 $\alpha(x)+\beta(x)=1$，经过验证也确实如此。

现在我们已经得到跌落至防坠落等级和攀登至下一防坠落等级的概率，我们还关心的是我们预计的游戏局数$m_k(x)$。和处理$\alpha_k(x)$相同的方法，可以得到$m_k(x)$如下的差分形式

$$m_k(x)=\mathbb{E}\left(\tau_k^x\right)=\begin{cases}0, & x=L,U\\ 1+qm_{k-1}(x-1), & x=U-1,\\ 1+p+pqm_{k-2}(x)+qm_{k-1}(x-1), & x=U-2,\\ 1+pqm_{k-2}(x)+pm_{k-1}(x+2)-pqm_{k-2}(x+1)+qm_{k-1}(x-1), & \text{otherwise}\end{cases}$$

另外，直觉上我猜测$m_k(x)$也收敛到某一极限，通过计算机我已经模拟验证，但我还没想到好的证明方法。借助随机过程理论中的想法，我觉得还可以研究问题：是否存在某一概率p，使得星星不会回到初始值。

通过博弈论的学习，我觉得博弈论的架构在于用数学语言准确而简洁的构建模型，借助概率、矩阵、递推、随机模拟等方法解决问题，本文关于炉石传说天梯的模型构建也借助了这些想法并给出了一些结论。最后非常感谢一学期以来郑老师的教导和助教的帮助，谢谢！

附录

炉石传说天梯图（图中的保护区即为文中所说的防坠落等级）