刘程华 计91 2018011687

Problem 1

$$\min_x \ |Ax-b|_2^2+|x|_1 \qquad x\in R^n \quad b\in R^m \quad A\in R^{m\times n} \quad rank(A)=n$$

写成标准凸优化形式

$$\min_{x,y} \ |y-b|_2^2+|x|_1$$
$$s.t \quad y-Ax=0$$

$$L(x,y,u)=|y-b|_2^2+|x|_1+u^T(y-Ax)$$

$$g(u)=\min_{x,y} |y-b|_2^2+|x|_1+u^T(y-Ax)$$

$$=\min_y\{|y-b|_2^2+u^Ty\}+\min_x\{|x|_1-u^TAx\}$$

$$\frac{\partial\ (y-b)^T(y-b)+u^Ty}{\partial y}=2y-2b+u=0 \quad\Rightarrow\quad y=b-\frac{u}{2}$$

$$\min_y\{|y-b|_2^2+u^Ty\}=|\tfrac{u}{2}|_2^2+u^T(b-\tfrac{u}{2})=u^Tb-\tfrac{1}{4}|u|_2^2$$

$$\min_x\{|x|_1-u^TAx\}=-\max_x\{u^TAx-|x|_1\}=-f^*(u^TA)$$

$$=-I_{\{v:|v|_\infty\le 1\}}(u^TA) \qquad 其中,\ f: x\to|x|_1$$

$$g(u)=u^Tb-\tfrac{1}{4}|u|_2^2-I_{\{v:|v|_\infty\le 1\}}(u^TA)$$

引理：范数的共轭函数是示性函数 $f(x)=\|x\|$

$$f^*(y)=\begin{cases}0 & \|y\|_* \le 1\\ \infty & else\end{cases}=I_{\{z:\|z\|_*\le 1\}}(y)$$

证明： $f^*(y)=\sup\{y^Tx-\|x\|\}$

① 若 $\|y\|_*>1$，则 $\exists z\in R^n$ $\|z\|\le 1$ 使得 $y^Tz>1$ 取 $x=tz$

$f^*(y)=\sup\{t(y^Tz-\|z\|)\}$，令 $t\to\infty$ $f^*(y)\to\infty$

② 若 $\|y\|_* \le 1$ $\quad \forall x,\ y^T x \le \|x\| \, \|y\|_*$

$\Rightarrow \quad \forall x:\ y^T x - \|x\| \le 0 \quad$ 当 $x=0$ 时 $f^*(y)$ 取最大 0.

对偶问题: maximize $g(u)$

Problem 2

$$\max_x \ \frac{1}{|c^T x - d|_2} \qquad x, c \in R^n, b \in R^m, d\lambda \in R, \ A \in R^{m\times n}\ rank(A)=n$$
$$s.t \quad |Ax - b|_2 \le \lambda$$

写成标准凸优化的形式

$$\min_x \ |c^T x - d|_2^2$$
$$s.t \quad |Ax - b|_2^2 - \lambda^2 \le 0$$

$$L(x,u) = |c^T x - d|_2^2 + u\left(|Ax-b|_2^2 - \lambda^2\right)$$

$$g(u) = \min_x \ |c^T x - d|_2^2 + u(|Ax-b|_2^2 - \lambda^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2c(c^T x - d) \quad + u2 \cdot A^T(Ax - b)$$

$$cc^T x - cd + uA^T(Ax - b) = 0$$

$u>0 \quad \forall x$

$x^T(cc^T + uA^TA)x$

$= (c^T x)^T (c^T x) + u(Ax)^T(Ax) \ge 0$

$x \ne 0.\ A^T x \ne 0$ 上式 >0

当且当 $x=0$ 时 取等号

故 $(cc^T + uA^TA)$ 正定 故可逆

$$cc^T x + uA^TAx = cd + uA^Tb$$

$$(cc^T + uA^TA)x = cd + uA^Tb$$

记 $x_0 = (cc^T + uA^TA)^{-1}(cd + uA^Tb)$

$$g(u) = \| c^T x_0 - d \|_2^2 + u(\| A x_0 - b \|_2^2 - \lambda^2)$$

$$= x_0^T (cc^T + uA^TA) x_0 - 2(cd + uA^Tb)^T x_0 + d^Td + ub^Tb - \lambda^2 u$$

$$= -(cd + uA^Tb)^T (cc^T + uA^TA)^{-1} (cd + uA^Tb) + d^Td + ub^Tb - \lambda^2 u$$

$u=0$时，$g(u) = \min_x \| c^T x - d \|_2^2 = 0$

与 $u>0$时$g(u)$相容

对偶问题 maximze $g(u)$

s.t. $u \geq 0$