

Principles of Signal Processing

Chenghua Liu

liuch18@mails.tsinghua.edu.cn

Department of Computer Science

Tsinghua University

目录

1	信号的基本概念与数学基础	4
1.1	信号的描述	4
1.2	欧拉公式	4
1.3	函数分解	6
1.4	信号的基本运算	8
1.5	奇异信号	12
2	信号的分解	14
2.1	信号的分解方法	14
2.2	信号的正交分解	15
2.3	信号的正交变换	15
2.4	非周期信号的 FT	18
2.5	FT 与 FS	18
2.6	FT 的性质	20
2.7	常用信号的 FT	22
2.8	采样与采样定理	23
3	离散时间信号的傅立叶分析	26
3.1	离散时间傅立叶变换 $DTFT$	26
3.2	离散傅立叶变换 DFT	29
3.3	有限长离散时间傅立叶变换	34
3.4	离散傅立叶变换的快速算法 FFT	37
3.5	过采样和抽取、提升采样率和插零	38
4	滤波器	39
4.1	滤波器介绍	39
4.2	系统响应的分类	41
4.3	滤波器进阶	43
4.4	Z 变换	44

目录	3
4.5 特定序列 ROC	45
4.6 常见序列及其 ZT	47
4.7 ZT 的性质	47
4.8 逆 Z 变换的求解	51
4.9 数字滤波器的设计	54
5 习题	58
5.1 第一次作业	58
5.2 第二次作业	58
5.3 第三次作业	59
5.4 第四次作业	59
5.5 第五次作业	60
5.6 第六次作业	61
5.7 第七次作业	62
5.8 第八次作业	64
5.9 第九次作业	67
5.10 第十次作业	68

Chapter 1

信号的基本概念与数学基础

1.1 信号的描述

Sa 函数: $Sa(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, 有如下积分等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^0 Sa(t) dt = \int_0^{\infty} Sa(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

1.2 欧拉公式

考虑以下三种理解方式, 并在最后给出严谨证明。

泰勒展开 考虑函数 e^x $\cos x$ 和 $\sin x$ 的泰勒展开:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

将 $x = iz$ 代入 e^x 得到

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

求导 对于所有 $x \in I$, 定义函数 $f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}$ 。由于 $e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$, 所以 e^{ix} 不可能为 0, 故定义成立。 $f(x)$ 之导数为:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\sin x + i \cos x) \cdot e^{ix} - (\cos x + i \sin x) \cdot i \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\ &= \frac{-\sin x \cdot e^{ix} - i^2 \sin x \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\ &= \frac{-\sin x \cdot e^{ix} + \sin x \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

取任意的 $[a, b] \in I$, 根据拉格朗日中值定理, $\exists c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

注意到 $f'(x) = 0$, 所以 $f'(c) = 0$, 故 $f(a) = f(b)$ 。因此 $f(x)$ 必是常数函数。所以,

$$\frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}} = f(x) = f(0) = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{e^0} = 1$$

整理得到

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

微积分 我们寻找这样的函数: $\frac{dy}{dx} = iy$ 且 $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{ix} &= i e^{ix} = iy \\ e^{i0} &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos x + i \sin x) &= -\sin x + i \cos x = i(i \sin x + \cos x) = iy \\ \cos 0 + i \sin 0 &= 1 + i(0) = 1 \end{aligned}$$

积分后发现, iy 的原函数是如上两个函数。 $x = 0$ 时, 原函数的值相等, 故如上两个函数相等, 即

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

证明 最后, 我们给出欧拉公式的严谨证明。(参考自张筑生的《数学分析新讲》)

首先, 我们在复数域上对 e^x 进行定义: 对于 $a, b \in \mathbb{R}, c = a + ib \in \mathbb{C}$, 规定 $e^c = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{c}{n})^n$ 。对复数的极坐标表示 $w = u + iv = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 有:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} \in \mathbb{R}, \theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \in \mathbb{R}$$

根据棣莫弗公式 $w^n = (u + iv)^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, 从而有:

$$\left(1 + \frac{a + bi}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right) + i \frac{b}{n}\right]^n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$$

假设 $n > |a|$, 则:

$$r_n = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}, \theta_n = n \arctan \frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}}$$

从而有:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln r_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{2} \left(\frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2} \right) \right] \\ &= a \end{aligned}$$

第二个等号成立是因为 $\ln(1+x) \approx x$ 。所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln r_n} = e^a$$

又因为:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \arctan \frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{\frac{b}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \right) \\ &= b \end{aligned}$$

从而我们可以证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a + bi}{n} \right)^n = e^a (\cos b + i \sin b)$$

即:

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

令 $a = 0$, 我们得到欧拉公式 $e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$ 。

1.3 函数分解

正交函数集 在 $[t_1, t_2]$ 区间上定义的非零函数 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$, 若满足条件:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) \varphi_2^*(t) dt = 0$$

则函数 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 为在 $[t_1, t_2]$ 区间的正交函数。

在 $[t_1, t_2]$ 区间上定义的非零函数序列 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, 其中任意两个函数 $\varphi_i(t)$ 与 $\varphi_j(t)$ 均满足条件:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$

式中 k_i 为非零常数, 则称函数序列 $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ 为在区间 $[t_1, t_2]$ 上的正交函数集。

实例

1. 三角函数集 $\{1, \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \cos(2\omega_1 t + \varphi_2), \dots, \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)\}$ 是在 $[0, 2\pi/\omega_1]$ 区间的正交函数集。

证明：首先我们证明 1 和 $\cos(a\omega_1 t + \varphi_a)$ 正交 ($a = 1, 2, 3, \dots, n$)

$$\int_0^{2\pi/\omega_1} \cos(a\omega_1 t + \varphi_a) dt = \frac{1}{a\omega_1} \sin(a\omega_1 t + \varphi_a) \Big|_0^{2\pi/\omega_1} = 0$$

接着我们来证明 $\cos(a\omega_1 t + \varphi_a)$ 和 $\cos(b\omega_1 t + \varphi_b) dt$ 正交 ($a \neq b, a, b = 1, 2, 3 \dots n$)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_1} \cos(a\omega_1 t + \varphi_a) \cos(b\omega_1 t + \varphi_b) dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_1} \frac{1}{2} [\cos((a+b)\omega_1 t + \varphi_a + \varphi_b) + \cos((a-b)\omega_1 t + \varphi_a - \varphi_b)] dt \\ &= \left[\frac{1}{2(a+b)\omega_1} \sin((a+b)\omega_1 t + \varphi_a + \varphi_b) + \frac{1}{2(a-b)\omega_1} \sin((a-b)\omega_1 t + \varphi_a - \varphi_b) \right] \Big|_0^{2\pi/\omega_1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

注意到 1 和 1 不正交 $\int_0^{2\pi/\omega_1} 1 \cdot 1 dt = \frac{2\pi}{\omega_1}$, $\cos(a\omega_1 t + \varphi_a)$ 和 $\cos(a\omega_1 t + \varphi_a)$ 不正交

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_1} \cos(a\omega_1 t + \varphi_a) \cos(b\omega_1 t + \varphi_b) dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_1} \cos^2(a\omega_1 t + \varphi_a) dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_1} \frac{1}{2} [\cos(2a\omega_1 t + 2\varphi_a) + 1] dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a\omega_1} \sin(2a\omega_1 t + 2\varphi_a) \Big|_0^{2\pi/\omega_1} + \frac{1}{2} t \Big|_0^{2\pi/\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_1} \end{aligned}$$

证毕。

2. 指数函数集 $\{e^{jn\omega_0 t} \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是在区间 $[-\pi/\omega_0, \pi/\omega_0]$ (ω_0 为实数) 上的正交函数集。

证明：任取 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ 且 $n_1 \neq n_2$ 。

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{jn_1\omega_0 t} e^{-jn_2\omega_0 t} dt \\
 &= \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{j(n_1-n_2)\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{j(n_1-n_2)\omega_0} e^{j(n_1-n_2)\omega_0 t} \Big|_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \\
 &= \frac{1}{j(n_1-n_2)\omega_0} (e^{j(n_1-n_2)\pi} - e^{-j(n_1-n_2)\pi}) \\
 &= \frac{1}{j(n_1-n_2)\omega_0} ((-1)^{(n_1-n_2)} - (-1)^{(n_2-n_1)}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

当 $n_1 = n_2 = n$ 时：

$$\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^0 dt = \frac{2\pi}{\omega_0} \neq 0$$

完备的正交函数集 如果在 $[t_1, t_2]$ 区间，除正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 之外，不存在函数 $x(t)$, $0 < \int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t)dt < \infty$, 满足下式：

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_i^*(t)dt = 0, \forall i$$

则称此正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 为完备的正交函数集。

1.4 信号的基本运算

常规运算 四则运算后的信号在任意一点的取值定义为原信号在同一点处函数值作相同四则运算的结果。

波形运算

- 时移运算：将原信号 $f(t)$ 的波形沿横轴平移 b 个单位

$$f(t) \rightarrow f(t-b)$$

- 反褶运算：将原信号 $f(t)$ 的波形按纵轴对称翻转过来

$$f(t) \rightarrow f(-t)$$

- 压扩变换：又称尺度变换（大于 1 压缩，小于 1 扩张）

$$f(t) \rightarrow f(at)$$

数学运算

- 微分运算

$$\frac{d}{dt}[f(t)]$$

- 积分运算

$$\int_{-\infty}^t f(t)dt$$

相互运算

- 卷积运算: f, g 为两个连续时间信号函数, 其卷积定义为:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

两个信号的卷积是否存在是有条件的: f, g 是可积函数, f, g 卷积运算得到的结果是有界的。

如果 f, g 为两个离散时间信号, f, g 为 Z 上离散序列, 其卷积定义为:

$$(f * g)(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(m - n)$$

一个信号的反褶信号在时间轴上滑动的过程中, 它与另外一个信号重合部分相乘得到的新信号的面积随 t 的变化曲线就是所求的两个信号的卷积的波形。

- 相关运算:

$$R_{f_1 f_2}(t) = R(f_1(t), f_2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2^*(\tau - t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau + t)f_2^*(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2 f_1}(t) = R(f_2(t), f_1(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)f_1^*(\tau - t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau + t)f_1^*(\tau)d\tau$$

相关与次序有关: $R_{f_1 f_2}(t) = R_{f_2 f_1}^*(-t)$

$$\begin{aligned} R_{f_1 f_2}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a)f_2^*(a - t)da \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a)f_2(a - t)da \right]^* \\ &= R_{f_2 f_1}^*(-t) \end{aligned}$$

相关与卷积的关系: $R_{f_2 f_1}(t) = f_1^*(-t) * f_2(t)$

$$\begin{aligned} R_{f_2 f_1}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(a) f_1^*(a-t) da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a-t) f_2(a) da \\ &= f_1^*(-t) * f_2(t) \end{aligned}$$

卷积的性质

1. 交换律 $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

卷积积分的次序可以交换 (通过变换积分变量来证明)

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a) f_2(a) da \\ &\stackrel{b=t-a}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(b) f_2(t-b) db \\ &= (f_2 * f_1)(t) \end{aligned}$$

2. 分配律 $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$

用于并联系统的分析 (利用积分运算的线性性来证明)

$$\begin{aligned} (f_1 * (f_2 + f_3))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a) (f_2(a) + f_3(a)) da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a) f_2(a) da + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a) f_3(a) da \\ &= (f_1 * f_2)(t) + (f_1 * f_3)(t) \end{aligned}$$

3. 结合律 $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$

用于串联系统的分析

$$\begin{aligned} ((f_1 * f_2) * f_3)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) f_2(b-a) da \right] f_3(t-b) db \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) f_2(b-a) f_3(t-b) da db \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(b-a) f_3(t-b) db \right] da \\ &\stackrel{b=a+c}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(c) f_3(t-a-c) dc \right] da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) [(f_2 * f_3)(t-a)] da \\ &= (f_1 * (f_2 * f_3))(t) \end{aligned}$$

4. 卷积的微分 (f_1, f_2 为 R 上连续可导函数)

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \left[\frac{d}{dt} f_2(t) \right] = \left[\frac{df_1(t)}{dt} \right] * f_2(t)$$

推导：为了方便，记 $I(t)$ 为

$$I(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

求导有

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_2(t - \tau) d\tau \\ &= f_1(t) * \left[\frac{df_2(t)}{dt} \right] \end{aligned}$$

其中积分和求导可以交换顺序是因为被积函数和其偏导数都是连续的。根据卷积的交换律有 $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) \cdot f_1(t - \tau) d\tau$ 。完全类似的，我们得到

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left[\frac{df_1(t)}{dt} \right] * f_2(t)$$

5. 卷积的积分 (f_1, f_2 为 R 上连续可导函数)

$$\int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda) d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda = \left(\int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right) * f_2(t)$$

推导：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda) d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(\lambda - \tau) d\tau \right) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^t f_1(\tau) \cdot f_2(\lambda - \tau) d\lambda \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^t f_2(\lambda - \tau) d\lambda \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{t-\tau} f_2(\lambda) d\lambda \right) d\tau \\ &= f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

其中积分能够交换顺序是因为 Fubini 定理，被积分函数在积分区间是非负的，或者被积分函数是绝对可积的那么交换积分次序，积分结果不变。根据卷积的交换律有 $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) \cdot f_1(t - \tau) d\tau$ 。完全类似的，我们得到

$$\int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda) d\lambda = \left(\int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right) * f_2(t)$$

6. 卷积的多阶微分和多阶积分

$$(f_1 * f_2)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$$

上式中的 m n 及 $n - m$ 取正整数时为导数的阶次, 而取负整数时为重积分的次数。可以用数学归纳法证明。

1.5 奇异信号

1. 单位斜变信号

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

2. 单位阶跃信号

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

一个函数与单位阶跃函数的卷积等于该函数的积分

$$\begin{aligned} f(t) * u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau + \int_t^{\infty} f(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot 1 d\tau + \int_t^{\infty} f(\tau) \cdot 0 d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^t f(\lambda) \cdot d\lambda \end{aligned}$$

3. 单位矩形脉冲信号

$$G_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

与单位阶跃信号之间的关系:

- (a) 通过单位阶跃信号的运算结果, 可以不必再用分段的形式表示信号了!
- (b) 其他信号与矩形信号相乘时, 只有在矩形信号对应的区间内, 其他信号的信息才被保留下来, 其余范围都是零。

用矩形信号和乘法运算, 可以截取信号的特定区间片段!

4. 符号函数信号

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(t) + 1 = 2u(t) \Rightarrow \text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

5. 单位冲击信号

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{G_\tau}{\tau}$$

更一般的，冲激点在 t_0 、强度为 E 的冲激信号 $\delta_{E,t_0}(t) = E\delta(t - t_0)$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{E,t_0}(t) dt = E \\ \delta_{E,t_0}(t) = 0 \quad (t \neq t_0) \end{cases}$$

性质

(a) 搬移抽样特性

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数平移到单位冲激函数的冲激点位置。

(b) 筛选零点函数值

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

冲激函数能从检验函数中筛选出零点处的函数值。

(c) 对称性：冲激函数是偶函数

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

(d) 时域压扩性： $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) (a \neq 0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) dat = \frac{1}{|a|}$$

(e) 积分

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1 & (t > 0) \\ \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 0 & (t < 0) \end{cases} \longrightarrow \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

(f) 抽样特性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Chapter 2

信号的分解

2.1 信号的分解方法

- 信号的直流分量

$$f_{DC}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \rightarrow \text{信号的均值}$$

- 信号的交流分量

$$f_{AC}(t) = f(t) - f_{DC}(t)$$

- 信号的偶分量

$$f_e(t) = Ev[f(t)] = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

- 信号的奇分量

$$f_o(t) = Od[f(t)] = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

- 信号的实部分量

$$f_r(t) = \text{Re}[f(t)] = \frac{1}{2} (f(t) + f^*(t))$$

- 信号的虚部分量

$$f_i(t) = \text{Im}[f(t)] = \frac{1}{2j} (f(t) - f^*(t))$$

信号的脉冲分解 信号可以近似表示成一组矩形脉冲的和的形式。

$$f(t) \approx \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f_{t_1}(t) = \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) [u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta_{t_1})]$$

2.2 信号的正交分解

函数的正交分解 当函数 $f(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 区间具有连续的一阶导数和逐段连续的二阶导数时, $f(t)$ 可以用完备的正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 来表示, 即:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

其中 c_i 为常数。其中:

$$c_i = \frac{(f(t), \varphi_i(t))}{(\varphi_i(t), \varphi_i(t))} = \frac{(f(t), \varphi_i(t))}{k_i} = \frac{1}{k_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_i^*(t) dt$$

式中 k_i 为函数 $\varphi_i(t)$ 的内积:

$$k_i = (\varphi_i, \varphi_i) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_i^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_i(t)\|^2 dt$$

帕斯瓦尔定理 (Parseval's theorem)

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 k_i$$

表明用一个正交函数集来准确地表示一个信号时, 这信号的能量等于相应的正交函数各分量的能量之和。

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \right\|^2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^* \varphi_i^*(t) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_i^*(t) + \sum_{i \neq j} c_i c_j^* \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_j^*(t) \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 k_i \end{aligned}$$

2.3 信号的正交变换

信号级数展开 考虑使用一组函数 $\varphi_i, i \in Z$, 将信号 $x(t) \in L^2(R)$ 展开成级数, 即

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

这一形式称为信号 $x(t)$ 的级数展开。通常, 展开系数 c_i 使用信号 $x(t)$ 的某种积分形式来确定。这一积分公式 (即求展开系数的公式) 习惯称为信号变换。

信号的正交变换 若信号级数展开的基函数 $\varphi_i(t)$ 为标准完备正交基, 则积分变换

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_i^*(t) dt$$

称为信号 $x(t)$ 的正交变换, 亦称为 Karhunen-Loeve 变换

周期信号的正交分解 满足 Dirichlet 条件的周期函数都可以在一组完备的正交基函数上展开成为无穷级数。具体条件为, 在一个周期内

1. 间断点的个数有限
2. 极值点的个数有限
3. 绝对积分数值有限

如果完备的正交函数集是三角函数集或指数函数集, 则周期函数展成的级数就是“傅里叶级数”。常用的正交函数集的基本函数, 除正弦型函数(含复指数函数)外, 还有 Legendre 函数、Bessel 函数、Walsh 函数等。

- 三角形式傅里叶级数

设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T_1 , 函数 $\{1, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t\}$ 是正交函数集, 令 $T_1 = 2\pi/\omega_1$, 则展开成三角函数的无穷级数形式:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt \end{aligned}$$

- 复指数形式傅里叶级数

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right] \\ f(t) &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1) e^{-jn\omega_1 t}] \end{aligned}$$

简写为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

其中

$$F(0) = a_0, \quad F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

- 奇偶周期信号

- 偶周期信号的 FS

F_n 只有直流分量和余弦项。

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt = 0$$

- 奇周期信号的 FS

F_n 只有正弦项。

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt \neq 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

- 周期信号的傅里叶频谱特点

1. 仅在一些离散频率点 $n\omega_1$ 上有值。(谐波)
2. 离散间隔为 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$
3. F_n 是双边谱, 正负频率的频谱幅度相加才是实际幅度。
4. 信号的功率为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$

- 周期矩形脉冲信号的 FS

周期为 T_1 , 脉冲宽度为 τ , 脉冲幅度为 E 的周期矩形脉冲信号, 谱线包络线为 $\frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 。
 频谱谱线的间隔为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, 谱线包络线过零点位置 $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}, k \in N^+$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{E}{T_1} e^{-jn\omega_1 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{E}{T_1} \cdot \frac{1}{-jn\omega_1} \cdot (e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_1 \frac{\tau}{2}}) \\ &= \frac{E}{T_1} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \frac{-2j \sin(n\omega_1 \frac{\tau}{2})}{-jn\omega_1 \cdot \frac{\tau}{2}} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

- 在频域, 能量主要集中在第一个零点以内。
- 实际上, 在允许一定失真的条件下, 可以要求一个通信系统只把 $|\omega| \leq \frac{2\pi}{\tau}$ 频率范围内的各个频率分量传送过去, 而舍弃 $|\omega| \geq \frac{2\pi}{\tau}$ 的分量。
- 常把 $-\frac{2\pi}{\tau} \leq |\omega| \leq \frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形信号的频带宽度, 简称带宽。
- 带宽只与脉冲的脉宽有关, 而与脉高和周期均无关。

非周期信号的 FS 可以看作周期趋于无穷大的周期信号, 所以谱线间隔趋于无穷小从而变成了连续频谱, 谱线长度趋于零。

2.4 非周期信号的 FT

$$\begin{aligned} F(\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \end{aligned}$$

所以

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

注意到以下奇偶性

- $R(\omega) = R(-\omega)$ 频谱实部是偶对称的
- $X(\omega) = -X(-\omega)$ 频谱虚部是奇对称的
- $\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$ 频谱相位是奇对称的

回顾之前的分解过程, 显然我们有 IFT

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

值得一提的是, FT 和 IFT 有唯一性和可逆性, 即

- 如果两个函数的 FT 或者 IFT 相等, 则两个函数相等
- $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$

2.5 FT 与 FS

回顾周期信号傅立叶级数 FS 和非周期信号傅立叶变换 FT

$$\begin{aligned} F_n &= F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

显然有

$$F_n = F(n\omega_1)/T_1$$

FS 与非周期信号 若 $f(t)$ 是非周期信号, 则分解区间有限制 $(t_0, t_0 + T_1)$, 即 FS 仅在区间 $(t_0, t_0 + T_1)$ 内成立。FS 是函数正交分解的一种, 因此它也可用于对非周期信号在特定区间上的一段进行展开

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad t \in (t_0, t_0 + T_1)$$

FT 与周期信号

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

证明：

注意到

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^0 d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

这里用到冲激函数的特性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ 。根据 FT 与 IFT 的可逆性有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow F(\omega) = \delta(\omega)$$

所以

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t} dt = \delta(\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

所以

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

证毕。

简单的应用这一公式有

- 余弦信号的 FT

$$\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

- 正弦信号的 FT

$$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

典型非周期信号 FT

- 矩形脉冲信号：脉高为 E , 脉宽为 τ

$$f(t) = EG_{\tau}(t) \quad F(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$$

$$\text{幅度谱: } |F(\omega)| = E\tau \left|Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

矩形脉冲信号 FT 的特点：

- FT 为 Sa 函数, 原点处函数值等于矩形脉冲的面积
- FT 的过零点位置为 $\omega = 2k\pi/\tau$ ($k \neq 0$)
- 频域的能量集中在第一个过零点区间 $\omega \in -2\pi/\tau, 2\pi/\tau$
- 带宽只与脉宽有关, 与脉高 E 无关。带宽为 $B_{\omega} = 2\pi/\tau$
- 冲激信号：

$$\mathcal{F}[E\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E\delta(t)e^{-j\omega t} dt = Ee^{-j\omega 0} = E$$

这一结果也可以由矩形脉冲信号取极限得到。冲激函数的频谱是常数, 即在整个频率范围内频谱是均匀分布的。

2.6 FT 的性质

- FT 是线性运算
即满足齐次性和叠加性。
- 反褶与共轭性

反褶与共轭	时域	频域
反褶	$f(-t)$	$F(-\omega)$
共轭	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
反褶 && 共轭	$f^*(-t)$	$F^*(\omega)$

- IFT 与 FT 的对偶性

$$- \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \{F_{\omega}[F^*(\omega)]\}^*$$

其中, $F_{\omega}[F^*(\omega)]$ 表示按自变量 ω 进行 FT , 结果仍是 t 的函数。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \{F_{\omega}[F^*(\omega)]\}^* &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right\}^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (F^*(\omega) e^{-j\omega t})^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \end{aligned}$$

$$- F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将变量 t 与 ω 互换, 可以得到:

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

等号右边是对函数 $F(t)$ 的傅里叶变换!

- FT 的尺度变换特征

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad (a \neq 0)$$

- 压扩变化是相反的 (注意 a 的位置)

$$f(at) \Leftrightarrow F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- 幅度也发生变化, 是原先的 $1/a$ (或 $-1/a$) 倍。

$$\frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- 当 $f(t), F(\omega)$ 在负无穷到正无穷的积分存在时

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$$

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 所覆盖的面积分别等于 $F(\omega)$ 与 $2\pi f(t)$ 在零点的数值 $F(0)$ 与 $2\pi f(0)$ 。所以, 设 $f(0)$ 与 $F(0)$ 分别等于各自对应曲线的最大值, 定义信号

- 等效脉宽: $\tau = F(0)/f(0)$
- 等效带宽: $B_f = f(0)/F(0)$

- FT 的时移特性和频移特性

时域延时, 频域则是相位变化, 不影响幅度谱, 只在相位谱上叠加一个线性相位。

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0} = \mathcal{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$$

与尺度变换结合

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\omega t_0/a}, \quad (a \neq 0)$$

相位增加, 频谱右移

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

与尺度变换结合

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{j\omega_0 t/a}\right] = F(a\omega - \omega_0), \quad (a \neq 0)$$

- 微积分运算

- 微分特性:

$$\begin{cases} \text{时域微分} & \frac{d}{dt} f(t) \Leftrightarrow j\omega F(\omega) \\ \text{频域微分} & \frac{dF(\omega)}{d\omega} \Leftrightarrow -jt f(t) \end{cases}$$

- 积分特性:

$$\begin{cases} \text{时域积分} & \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow (j\omega)^{-1} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega) \\ \text{频域积分} & \int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda) d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0) \delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \end{cases}$$

可以用 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * u(t)$, $u(t) \Leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ 以及时域卷积定理推导。

- 卷积定理

- 时域卷积定理:

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f_2(t)]$$

– 频域卷积定理:

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1(t)] * \mathcal{F}[f_2(t)]$$

- FT 时域相关性定理

$$F[R_{f_1 f_2}(t)] = F[f_1(t)] F^*[f_2(t)]$$

若函数 $f_2(t)$ 是实偶函数, 则:

$$F[R_{f_1 f_2}(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

自相关的傅里叶变换定义为:

$$F[R_f(t)] = F[f(t)] F^*[f(t)] = |F[f(t)]|^2$$

信号自相关函数与其幅度谱平方是一对傅里叶变换对。

- 时域和频域的能量守恒

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|F(\omega)\|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \|F(2\pi f)\|^2 df$$

2.7 常用信号的 FT

- $f(t) = e^{-at}u(t) (a > 0)$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{j\omega + a} \end{aligned}$$

- 矩形脉冲信号

$$f(t) = EG_{\tau}(t) \quad \text{where } G_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt \\ &= E \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} = E \frac{-2j \sin(\frac{\omega\tau}{2})}{-j\omega} \\ &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

- 单位阶跃信号

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt$$

令 $u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} e^{-\alpha t} u(t)$, 则 $F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha + j\omega}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{j\omega}$$

其中:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} \infty, \omega = 0 \\ 0, \omega \neq 0 \end{cases} = A\delta(\omega)$$

而,

$$A = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi$$

所以,

$$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

2.8 采样与采样定理

把模拟信号变成数字信号时, 每隔一个时间间隔在模拟信号波形上抽取一个幅度值, 称之为采样。采样的时间间隔称采样间隔, 倒数成为采样频率。

采样的数学模型:

- 在时域: $x_p(t) = x(t)p(t)$
- 在频域: $X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$

冲激串采样 (理想采样): $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, T 为采样间隔, 所以有

$$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

下面我们来求 $x_p(t)$ 的傅立叶频谱。

对 $p(t)$ 做 FS 有

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_s t} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

其中

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \\ \mathcal{F}[p(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_s t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

回顾

$$\mathcal{F}[e^{jn\omega_s t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$$

所以

$$\mathcal{F}[p(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} 2\pi\delta(\omega - n\omega_s) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以 ω_s 为周期进行延拓。即

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

抽样周期变大，频谱周期变小，离散信号的谱发生混叠。

要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$ 。这就要求 $X(j\omega)$ 在周期性延拓时不能发生频谱的混叠。为此必须要求：

1. $x(t)$ 必须是带限的，最高频率分量为 ω_M 。
2. 采样间隔 (周期) 不能是任意的，必须保证采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_M$ 。其中 $\omega_s = 2\pi/T$ 为采样频率。

在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$ 。

总结一下就是著名的 **Nyquist 采样定理**：

对带限于最高频率 ω_M 的连续时间信号 $x(t)$ ，如果以 $\omega_s \geq 2\omega_M$ 的频率进行理想采样，则 $x(t)$ 可以唯一的由其样本 $x(nT)$ 来确定。

在工程实际应用中，理想滤波器是不可能实现的。而非理想滤波器一定有过渡带。因此，实际采样时， ω_s 必须大于 $2\omega_M$ 。

内插 由样本值重建某一函数的过程。

- 理想内插：以理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应（Sa 函数形态）做为内插函数。

$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0}, |\omega| < \omega_c$$

其单位冲激响应

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(t-t_0)} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(t-t_0)} \cdot \frac{1}{2j} [e^{j\omega_c(t-t_0)} - e^{-j\omega_c(t-t_0)}] \\
 &= \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)} \\
 &= \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)]
 \end{aligned}$$

当 $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$ 时, 可以恢复原信号:

$$x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s)$$

频域混叠后, 时域信号变了, 但抽样点取值不变。在频域的理想采样, 相当于在时域将信号以 $T_s \left(\frac{2\pi}{\omega_s} \right)$ 周期延拓。

- 一阶保持内插（线性内插）：内插函数是三角形脉冲。

$$H(\omega) = T \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T/2} \right]^2 = \frac{1}{T} \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega/2} \right]^2$$

三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积, 从而快速得到上述公式。

Chapter 3

离散时间信号的傅立叶分析

3.1 离散时间傅立叶变换 DTFT

- 抽样信号

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

- 频谱函数

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega - m\omega_s)$$

(1) 如果抽样过程满足抽样定理的要求，则在奈奎斯特区间中，下式成立：

$$T\hat{F}(\omega) = F(\omega), \quad -\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$$

(2) 若不满足抽样定理，混叠发生时，在 $\omega \in [-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ 内混有其他部分”扩展”过来频谱“密度”分布，即在上述区间中：

$$T\hat{F}(\omega) = F(\omega) + F(\omega - \omega_s) + F(\omega - 2\omega_s) + \dots$$

$$F(\omega) \approx T\hat{F}(\omega)$$

视下式为 FS 展开式 (即 IFS)

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT}$$

其中核函数是 $\{e^{-jn\omega T}\}$ ，则可用 FS 计算展开系数：

$$f(nT) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \hat{F}(\omega)e^{jn\omega T} d\omega$$

其中 T 为采样时间间隔是常量

$$F(\omega) = T\hat{F}(\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT} \quad \omega \in \left[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right]$$

为方便起见，把采样频率“归一”，即将具体的物理时间抽象为单位时间，在数学上用 1 表示它。

数字信号与数字频谱

- 称时间间隔归一的离散信号序列为数字信号，
- 称数字信号 DTFT 归一化频谱为数字频谱。

$$X(\omega) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{jn\omega} d\omega$$

DTFT 的性质

- DTFT 频谱密度函数是周期函数

$$X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$$

- DTFT 是线性变换

$$DTFT \left[\sum_k a_k \cdot x_k(n) \right] = \sum_k a_k \cdot DTFT [x_k(n)]$$

信号线性组合的 DTFT, 等于各信号 DTFT 的线性组合。

- 平移特性
 - 时域平移: $DTFT [x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(\omega)$
 - 频域平移: $DTFT [e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(\omega - \omega_0)$

- 反褶共轭

- 反褶: $DTFT [x(-n)] = X(-\omega)$
- 共轭: $DTFT [x^*(n)] = X^*(-\omega)$

- 时域扩展

时域扩展的定义如下

$$x_{(a)}(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{a}\right), \frac{n}{a} \in Z \\ 0, \text{ others} \end{cases} \quad a \in Z, a \neq 0$$

相应的 DTFT

$$DTFT [x_{(a)}(n)] = X(a\omega) \quad a \in Z, a \neq 0$$

- 频域微分 (时域线性加权)

$$DTFT[nx(n)] = j \left[\frac{d}{d\omega} X(\omega) \right]$$

两边同时对 ω 微分即得。

- 卷积定理

– 时域卷积

$$DTFT[x(n) * y(n)] = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

证明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) * y(n)) e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(n-m) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-m) e^{-j\omega n} \\ &\stackrel{k=n-m}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k) e^{-j\omega k} \\ &= X(\omega) Y(\omega) \end{aligned}$$

– 频域卷积 (注意: 频谱是周期的)

$$\begin{aligned} DTFT[x(n) \cdot y(n)] &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes Y(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega') Y(\omega - \omega') d\omega' \end{aligned}$$

圆周卷积: 积分限制在一个周期内, 简称为圆卷积。

- Parseval 定理

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega \right)^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} Y^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

如果 $y(n) = x(n)$, 那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

即序列 $x(n)$ 的能量, 可以通过对 $|X(\omega)|^2$ 的积分求得, 所以称 $|X(\omega)|^2$ 为序列 $x(n)$ 的能量谱密度。

3.2 离散傅立叶变换 DFT

DFT 序列长度为 L , 求其 DTFT 谱上 $[0, 2\pi]$ 区间上均匀分布的 N 个谱值由 $x(n), n = 0, 1, \dots, L-1$ 直接计算 $X(k), k = 0, 1, \dots, N-1$ 的过程:

$$\omega_k = 0 + k \cdot \frac{2\pi}{N} = 2k\pi/N \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

为了表示方便, 记 $W_N \rightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ $X(\omega_k) \rightarrow X(k)$, 我们有 DFT 公式

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)W_N^{nk}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT 频谱的性质

- 离散的, 周期的 (是对 DTFT 频谱的采样)
- 实序列是 DFT 频谱是共轭对称的。
 - 关于原点共轭对称: $X(-\omega) = X^*(\omega)$
 - 关于 $N/2$ 点共轭对称, N 为偶数。

$$X\left(\frac{N}{2} + k\right) = X^*\left(\frac{N}{2} - k\right)$$

证明:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{N}{2} + k\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{n(k+\frac{N}{2})} \\ X^*\left(\frac{N}{2} - k\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) \left[W_N^{n(\frac{N}{2}-k)}\right]^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{n(k-\frac{N}{2})} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{n(k+\frac{N}{2})} \end{aligned}$$

- DFT 是线性变换
- Parseval 定理

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \quad L = N$$

- 奇偶虚实性

– 奇对称和偶对称序列:

- * 奇函数的 DFT 是奇函数;
- * 偶函数的 DFT 是偶函数。

– 实序列:

- * 实偶函数的 DFT 是实偶函数; 实奇函数的 DFT 是虚奇函数。
- * 实函数的 DFT , 实部是偶函数, 虚部是奇函数; 模是偶函数, 相位是奇函数。

– 虚序列:

- * 虚偶函数的 DFT 是虚偶函数; 虚奇函数的 DFT 是实奇函数。
- * 虚函数的 DFT , 实部是奇函数, 虚部是偶函数; 模是偶函数, 而相位是奇数。

- 反褶和共轭性 (同 FT)

时域	频域
反褶	反褶
共轭	反褶 && 共轭
反褶 && 共轭	共轭

- 离散傅里叶变换逆变换 $IDFT$

设某一长度为 L 的序列 $x(n)$, 其中 n 的取值范围为 0 到 $L-1$, 按照 DFT 的定义, $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$X(k)$ 的逆变换为:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \right) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

为避免混淆, 将上式括号内的求和变量 n 替换为 m , 并且进一步改写

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{L-1} x(m) e^{-j \frac{2\pi}{N} mk} \right) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{L-1} x(m) e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m)k} \right)$$

将上式括号内的求和项展开有:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x(0) e^{j \frac{2\pi}{N} (n-0)k} + x(1) e^{j \frac{2\pi}{N} (n-1)k} + \dots + x(N-1) e^{j \frac{2\pi}{N} (n-(N-1))k} + \dots + x(L-1) e^{j \frac{2\pi}{N} (n-(L-1))k} \right)$$

将上式对 k 的求和式展开，并且分别以 $x(0) x(1) \dots x(N-1)$ 作为提出项合并，上式可以改写为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left[x(0) \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(n-0)0} + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-0)1} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-0)(N-1)} \right) \right. \\ & + x(1) \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(n-1)0} + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-1)1} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-1)(N-1)} \right) + \dots \\ & + x(N-1) \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(n-(N-1))0} + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-(N-1))1} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-(N-1))(N-1)} \right) + \dots \\ & \left. + x(L-1) \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(n-(L-1))0} + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-(L-1))1} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-(L-1))(N-1)} \right) \right] \end{aligned}$$

对于上式中的任意一项 $x(z) \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)0} + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)1} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)(N-1)} \right)$ ，容易看到括号内为等比数列求和，首项为 1，公比为 $e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)}$ ，一共 N 项，应用等比数列求和公式可以得到

$$\begin{aligned} x(z) \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)0} + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)1} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)(N-1)} \right) &= x(z) \frac{1 - \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)} \right)^N}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)}} \\ &= x(z) \left(\frac{1 - e^{j2\pi(n-z)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(n-z)}} \right) \end{aligned}$$

显然，当 $n \neq z$ 时，上式为零，否则为 $Nx(z)$ （洛必达法则）。因此，

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = x(n)$$

- 频移特性

$$X(k-l) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{n(k-l)} = \sum_{n=0}^{L-1} [x(n) W_N^{-nl}] W_N^{nk}$$

- 时移特性：假设 $x(n) \rightarrow X(k)$ ，求 $x(n-m)$ 的 DFT

回顾

$$DTFT[x(n-m)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m) e^{-jn\omega} = e^{-jm\omega} X(\omega)$$

DFT 是对 DTFT 频谱的抽样（一个周期上均匀分布的 N 个点），回顾 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$DFT[x(n-m)] = e^{-jm\omega} X(\omega) \Big|_{\omega=\omega_k=k\frac{2\pi}{N}} = W_N^{mk} X(k)$$

证明：

$$\begin{aligned}
 DFT[x(n-m)] &= \sum_{n=0}^{m-1} x(n+N-m)W_N^{nk} + \sum_{n=m}^{N-1} x(n-m)W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n_1=N-m}^{N-1} x(n_1)W_N^{(n_1-N+m)k} + \sum_{n_2=0}^{N-m-1} x(n_2)W_N^{(n_2+m)k} \\
 &= \sum_{n=N-m}^{N-1} x(n)W_N^{(n-N+m)k} + \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)W_N^{(n+m)k} \\
 &= W_N^{mk} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}
 \end{aligned}$$

- 卷积定理

- 时域卷积

$$DFT[x(n) \otimes y(n)] = DFT[x(n)] \cdot DFT[y(n)]$$

证明：

$$\begin{aligned}
 IDFT[X(k)Y(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k)W_N^{-nk} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{L-1} x(m)W_N^{mk}Y(k)W_N^{-nk} \\
 &= \sum_{m=0}^{L-1} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{mk}W_N^{-nk} \right] \\
 &= \sum_{m=0}^{L-1} x(m) [IDFT[Y(k)W_N^{mk}]] \\
 &= \sum_{m=0}^{L-1} x(m)y(n-m)
 \end{aligned}$$

查看圆卷积定义

$$x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N$$

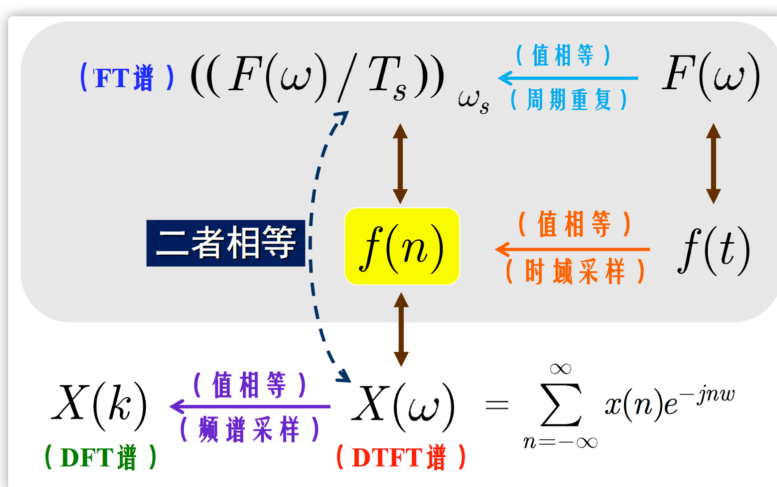
证毕。

- 频域卷积

$$DFT[x(n) \cdot y(n)] = \frac{1}{N} X(k) \otimes Y(k)$$

两边同时取 $IDFT$ 后将 DFT 公式公式带入即得。

DFT 梳理 见下图



1. DFT 求解非周期信号 FT

已知连续时间信号 $f(t)$ 按 T_s 采样后的 DFT 函数 $X(k)$ ，求其 FT 函数 $F(\omega)$ 的图像。
注意到

$$X(k) = X(\omega_k) = (F(\omega)/T_s)|_{\omega=\omega_k} = F(\omega_k)/T_s$$

逐点绘制 $F(\omega_k) = T_s X(k)$

2. 用 $IDFT$ 计算非周期信号 IFT

已知连续时间信号 $f(t)$ 的 FT 函数 $F(\omega)$ ，求信号 $f(t)$ 的图像。

注意到

$$\begin{aligned} IDFT[F(\omega_k)] &= IDTFT[((F(\omega))_{\omega_s})] \\ &= T_s \cdot \text{IDTFT}[(F(\omega)/T_s)_{\omega_s}] \\ &= T_s \cdot f(n) \end{aligned}$$

即

$$f(n) = \frac{1}{T_s} \cdot \text{IDFT} [F(\omega_k)]$$

其中 $T_s = 2\pi/\omega_s$ 是样本时间间隔, 与 $F(\omega_k)$ 的范围有关。

3. 用 DFT 计算周期信号的 FS

假设连续时间信号 $f(t)$ 的 FT 函数 $F(\omega)$, 按 T_s 采样后的 DFT 函数为 $X(k)$ 。

回顾 FS ,

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

注意到

$$X(k) = X(\omega)|_{\omega=\omega_k} = F_0(\omega)/T_s|_{\omega=\omega_k} = F\left(k\frac{\omega_s}{N}\right)/T_s$$

其中

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{(T_1/N)} = N \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_1$$

所以

$$X(k) = F_0(k\omega_1)/T_s \Rightarrow F_0(k\omega_1) = T_s X(k)$$

我们得到

$$F_k = \frac{1}{T_1} F_0(k\omega_1) = \frac{1}{T_1} (T_s X(k)) = \frac{1}{N} X(k)$$

总结以上三点,

1. 用 DFT 计算非周期信号的 FT

频谱在对应频率处的取值等于 DFT 结果乘以 T_s

2. 用 $IDFT$ 计算非周期信号的 IFT

信号在对应时间点取值等于 $IDFT$ 结果除以 T_s

3. 用 DFT 计算周期信号的 FS

FS 频谱分量值等于 DFT 结果除以 N

3.3 有限长离散时间傅立叶变换

时域加窗的傅立叶变换 宽为 L 的矩形窗

$$W(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & n \geq L \end{cases}$$

加窗后的信号为

$$x_L(n) = x(n)W(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & n \geq L \end{cases}$$

加窗前后信号的频谱

$$\begin{cases} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ X_L(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} \end{cases}$$

由 $DTFT$ 卷积定理, 加窗后的频谱密度函数为

$$\begin{aligned} X_L(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes W(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega') W(\omega - \omega') d\omega' \end{aligned}$$

其中

$$W(\omega) = \frac{1 - e^{-jL\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$

我们定义主瓣宽度为

$$\Delta\omega_W = 2\pi/L$$

频谱分辨率 给定

$$x(n) = A_1 e^{j\omega_1 n} + A_2 e^{j\omega_2 n} \quad (0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi)$$

在一个奈奎斯特区间内

$$X(\omega) = 2\pi (A_1 \delta(\omega - \omega_1) + A_2 \delta(\omega - \omega_2))$$

定义 *DTFT* 频谱分辨率为频谱可分辨的最小 $\Delta\omega$ ，此处为 $\omega_2 - \omega_1$ 。

考虑上述的离散化情形，给定

$$x_L(n) = A_1 e^{j\omega_1 n} + A_2 e^{j\omega_2 n} \quad (0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots, L-1)$$

在一个奈奎斯特区间内

$$\begin{aligned} X_L(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes W(\omega) \\ &= A_1 W(\omega - \omega_1) + A_2 W(\omega - \omega_2) \end{aligned}$$

频谱分辨率为

$$\Delta\omega_{\min} = \Delta\omega_W = \frac{2\pi}{L}$$

序列加窗后，序列频谱重的可分辨的最小频率间隔由数据长度决定，即由窗函数的时间长度决定，这个现象被称为不确定原理。加窗后序列频谱中出现了高频分量，他们是由于矩形窗的两个边缘处的突变造成的，这个现象被称为频率泄漏。

***DFT* 中 N 与 L 的关系** L 是数据记录中时域样本的数目，可能是无限的。 N 是对 *DTFT* 进行抽样时的频率点的数目。

通常讨论 *DFT* 时我们假设 $N = L$ ，这是为什么？

考虑如下两种情况。

- $N > L$ ：频域点数 N 取得比序列的长度 L 要大（补零）

我们在序列尾部补任意数目的零，新序列与旧序列的 *DFT* 结果一样

$$\begin{aligned} x &= [x_0, x_1, \dots, x_{L-1}] \\ x_D &= \left[x_0, x_1, \dots, x_{L-1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_D \right] \end{aligned}$$

先计算 $DTFT$

$$X_D(\omega) = \sum_{n=0}^{L+D-1} x_D(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

再计算 DFT

$$X_D(\omega_k) = X(\omega_k)$$

- $N < L$: 频域点数 N 取得比序列的长度 L 要小 (回绕)

定义序列 $x(n)$ 关于 N 的回绕序列 (长度为 N) 为

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x(mN + n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

下面我们证明 $\tilde{x}(n)$ 和 $x(n)$ 的 DFT 结果是相等的。我们引入 DFT 的矩阵表示:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{L-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{DFT} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

记 $A_{k,n} = W_N^{kn}$, 我们得到 DFT 的矩阵表示 $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

我们要证明

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}}$$

注意到

$$A_{k,mN+n} = W_N^{k(mN+n)} = W_N^{kmN} W_N^{kn}$$

其中,

$$W_N^{kmN} = (W_N^N)^{km} = 1$$

所以

$$A_{k,mN+n} = W_N^{kn} = A_{k,n}$$

即

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots]$$

\mathbf{A} 矩阵规模为 $N \times L$, 每 N 列组成一个 $N \times N$ 的子阵 \mathbf{B} , 最后一个子阵 \mathbf{B} 列不足时补零列记做 \mathbf{B}' , 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x} &= [\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}']\mathbf{x} = (\mathbf{B}[\mathbf{I}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{I}_N, \dots, \mathbf{I}'_N])\mathbf{x} \\ &= \mathbf{B}([\mathbf{I}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{I}_N, \dots, \mathbf{I}'_N]\mathbf{x}) = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

证毕。

多个完全不同的序列, 只要它们的回绕序列相等, 它们的 DFT 也就相等。从 $IDFT$ 只能得到唯一的一个序列, 实际上其对应所有序列的回绕序列。为了方便, 我们一般取 $L = N$ 。

3.4 离散傅立叶变换的快速算法 FFT

回忆计算 DFT 的公式

$$DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

每算一个 $X(k)$, 需要 N 次复数乘法, $N-1$ 次加法。因此, N 点 DFT 需要 $N*N$ 次复数乘法, $N(N-1)$ 次复数加法。尽管预先算好并保存旋转因子 W_N^k 可以节省部分运算, 但按定义式直接编程求 DFT 的运算量仍然很大。

FFT 是 DFT 的快速算法, 其基于 W 的周期性和对称性。

- $W_N^{nk} = W_N^{nk \% N}$
- $W_N^{nk + \frac{N}{2}} = -W_N^{nk}$

N 点 DFT 可以分解为两组 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 运算。

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n \text{ is even}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n \text{ is odd}} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{(2r)k} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk} \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} g(r) = x(2r) \\ h(r) = x(2r+1) \end{cases} \quad r = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

我们有

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} =: G_{N/2}(k) \\ \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} h(r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} =: H_{N/2}(k) \end{cases}$$

所以有

$$X_N(k) = G_{N/2}(k) + W_N^k H_{N/2}(k)$$

为了方便, 我们省略 $H(k), G(k)$ 的下标 $N/2$ 。注意到 $H(k), G(k)$ 的周期都是 $N/2$, 所以

$$\begin{aligned} G\left(\frac{N}{2} + k\right) &= G(k) \\ H\left(\frac{N}{2} + k\right) &= H(k) \end{aligned}$$

又有

$$W_N^{\left(\frac{N}{2}+k\right)} = W_N^{\frac{N}{2}} \cdot W_N^k = -W_N^k$$

于是, N 点 $X(k)$ 可用 $N/2$ 点的 $G(k)$ 和 $H(k)$ 来计算:

$$\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X\left(\frac{N}{2} + k\right) &= G\left(\frac{N}{2} + k\right) + W_N^{\left(\frac{N}{2}+k\right)} H\left(\frac{N}{2} + k\right) \\ &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned}$$

因此, N 点 FFT 需要 $\frac{N}{2} \log N$ 次复数乘法, $N \log N$ 次复数加法。算法复杂度为 $O(N \log N)$ 。 $IDFT$ 同样可以用 FFT 实现, 算法复杂度相同。

3.5 过采样和抽取、提升采样率和插零

截止频率越高, 模拟抗镜像滤波器越是容易实现 (成本越低)。因此, 为了提高截止频率, 数字信号的采样率需要进行”提升”。对于数字信号, 要实现采样率提升很容易。最简单的办法是在原数字序列中插入一定数目的零,

$$x(n) \rightarrow x(n/M), M \in \mathbb{Z}^+$$

再经过一个数字抗镜像滤波器, 就可以达到提升信号采样率的目的。

Chapter 4

滤波器

4.1 滤波器介绍

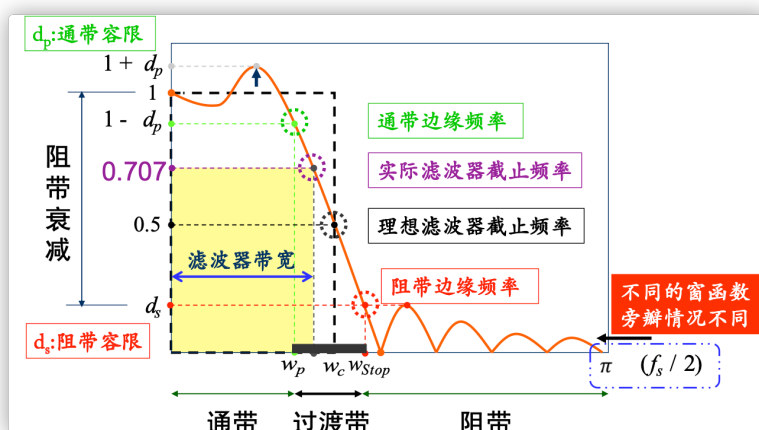
滤波器 什么是滤波器? 滤波器是以特定方式改变信号的频率特性, 从而变换信号的处理系统。滤波器有以下类别:

- 高通滤波器 (HP)
- 低通滤波器 (LP)
- 带通滤波器 (BP)
- 带阻滤波器 (BS)
- 全通滤波器 (AP)

模拟滤波器是用硬件实现的, 数字滤波器是软件实现的。其中数字滤波器的实现方式为:

1. 用流图计算滤波器的输出
2. 用差分方程计算滤波器的输出
3. 用卷积过程计算滤波器的输出
4. 用 $DTFT$ 直接改变信号的频谱

我们从下图来一瞥滤波器的滤波特性参数 (低通滤波器)。看图, 虚线表示的是理想低通滤波器的滤波特性, 实线表示的是窗函数设计得到的实际的低通滤波器的滤波特性。



系统 系统是由若干相互作用和互相依赖的模块组合而成的具有特定功能的整体。根据信号是否离散可以分为连续时间系统和离散时间系统。以后我们仅讨论线性、时不变、因果系统。

- 线性系统

输入输出同时满足叠加性和齐次性的系统。

- 时不变系统

顾名思义，无论系统何时收到输入输出都是相同的。线性且时不变的系统简记为 LTI 系统。

- 因果系统

如果系统的输出取决于现在和以前的输入数据，而与以后的输入数据无关，则称为因果系统。

- 稳定系统

如果系统的输入有界则输出也是有界的，则称为稳定系统。这个性质通常被称为 BIBO 原则。

我们介绍如下两种系统的描述方法。

1. 用差分方程描述线性时不变因果数字滤波器。

一个简单的例子为

$$y(n) = \frac{1}{b_0} [a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)]$$

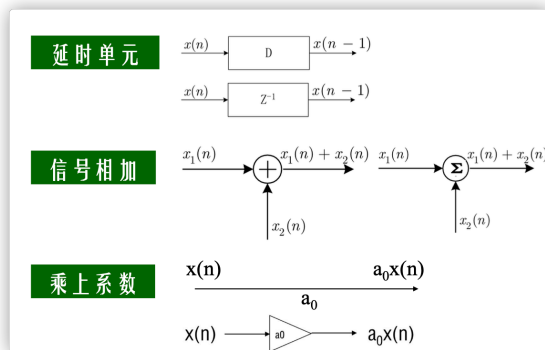
更一般的表达式为

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M a_r x(n-r)$$

其中 N 为所需过去输出的个数，通常称为滤波器的阶数

2. 用差分方程流图描述。

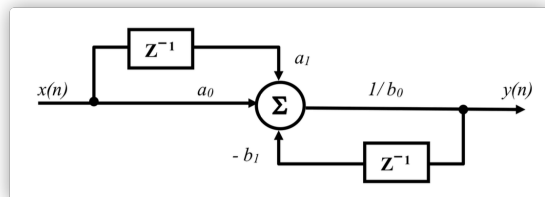
其基本组件为：



举例说明：

$$y(n) = \frac{1}{b_0} [a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1)]$$

其对应的流图为



4.2 系统响应的分类

• 零输入响应

系统可能在没有任何激励信号作用时产生信号输出。

• 零状态响应

系统在起始状态时状态值为零（此时系统没有储存任何能量和信息），此时给系统一个激励信号，则系统所产生的输出响应被称为系统的零状态响应。

滤波器的脉冲响应 滤波器的脉冲响应（冲激响应），就是滤波器对脉冲输入的响应。当输入为单位脉冲时，输出就是单位脉冲响应。

举两例说明。例一，求如下滤波器脉冲响应的前六个采样值。

$$y(n) = 0.25[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$$

用 $\delta(n)$ 代替 $x(n)$, $h(n)$ 代替 $y(n)$, 则有:

$$h(n) = 0.25[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)]$$

回忆

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & (n=0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases}$$

则有 $h(0) = 0.25$ $h(1) = 0.25$ $h(2) = 0.25$ $h(3) = 0.25$ $h(4) = 0$ $h(5) = 0$

例二, 求如下滤波器脉冲响应的前六个采样值。

$$y(n) - 0.4y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

设滤波器是因果系统, 即脉冲响应在 $n=0$ 之前为零。用 $\delta(n)$ 代替 $x(n)$, $h(n)$ 代替 $y(n)$, 则有:

$$h(n) - 0.4h(n-1) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

则有 $h(0) = 1.0$ $h(3) = -0.096$ $h(1) = -0.6$ $h(4) = -0.0384$ $h(5) = -0.01536$

上面两个例子对应了以下两类滤波器。

- 有限脉冲响应 FIR 和 FIR 滤波器

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k)$$

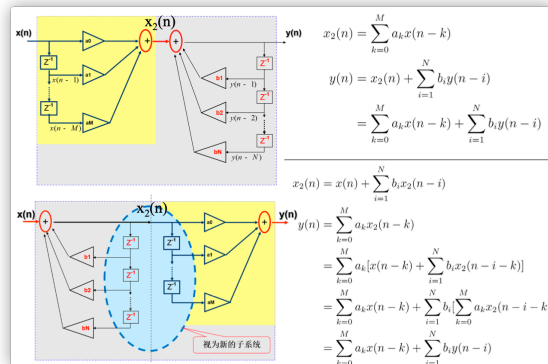
上述系统的脉冲响应在有限个非零采样值后下降到零这种响应被称为有限脉冲响应 (finite impulse response FIR), 这种滤波器称为 FIR 滤波器。

- 无限脉冲响应 IIR 和 IIR 滤波器

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^N b(k)y(n-k)$$

显然, 新的输出取决于过去的输出, 所以脉冲响应永远不会消失, 这种响应被称为无限脉冲响应 (infinite impulse response, IIR), 这种滤波器称为 IIR 滤波器。

设计滤波器的差分方程流图时, 高阶滤波器可以拆分为多个二阶滤波器的级联, 分级后各滤波器系数变大, 对量化误差的敏感度降低。下面是一个典型的滤波器优化。



4.3 滤波器进阶

设滤波器的脉冲响应为 $h(n)$ ，某输入信号为 $x(n)$ ，输入信号可以表示为一系列脉冲函数之和

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

令输入单位脉冲时滤波器的输出响应为 $\delta(n) \rightarrow h(n)$ 。根据 LTI 系统的线性特性和时不变特性，输入 $x(n)$ 时的输出为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

注意到 $h(n)$ ， $x(n)$ 的卷积为

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

我们发现，数字滤波器的输出等于输入与脉冲响应的卷积！

LTI 系统稳定的充要条件 LTI 系统稳定的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$$

证明:

[\Leftarrow] 设 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = A < \infty$ ，对任意的有界输入 $|x(n)| < B < \infty$ 有

$$\begin{aligned} |y(n)| &= |x(n) * h(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| \leq B \sum_{K=-\infty}^{\infty} |h(k)| = AB < \infty \end{aligned}$$

即输出也是有界的，所以系统稳定。

[\Rightarrow] 我们要证明的是：系统是稳定的则系统的单位冲激响应是绝对可积的。采用反证法，假设系统的单位冲激响应不是绝对可积的，即 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$ 。

若系统激励为

$$x(n) = \begin{cases} 0, & h(-n) = 0 \\ \text{sgn}[h(-n)], & h(-n) \neq 0 \end{cases}$$

显然，输入是有界的。于是对于 $\forall n$ 有 $|x(n)| \leq 1$ 。

$$\begin{aligned} y(0) &= (x * h)(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \text{sgn}[h(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty \end{aligned}$$

即输出是无界的。这与系统是稳定的相矛盾。

证毕。

脉冲响应的用途 系统串联，脉冲响应函数做卷积；系统并联，脉冲响应函数做加法。

回顾 $y(n) = x(n) * h(n)$ ，两边做 $DTFT$ 我们得到

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

所以有 $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ 。我们定义 $H(\omega)$ 为滤波器的频率响应。系统的频率响应，简称频响，它反映了系统对激励汇总各频率分量的幅度和相位影响。滤波器的频响等于脉冲响应的 $DTFT$ ，即

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

频率响应是周期函数，关于 $\omega = 0$ 和 $\omega = \omega_s/2$ 共轭对称。

回顾滤波器的差分方程表示

$$\sum_{k=0}^N b(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^M a(k)x(n-k)$$

两边做 $DTFT$ 后有

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^N b(k)e^{-jk\omega} = X(\omega) \sum_{k=0}^M a(k)e^{-jk\omega}$$

整理后有

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \left[\sum_{k=0}^M a(k)e^{-jk\omega} / \sum_{k=0}^N b(k)e^{-jk\omega} \right] = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

即

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M a(k)e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N b(k)e^{-jk\omega}}$$

显然，系统串联频响函数做乘法，系统并联频响函数做加法。

4.4 Z 变换

Z 变换将差分方程转化为简单的代数方程，使其求解过程得以简化。

Z 变换的定义

- 单边 Z 变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 双边 Z 变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 记号

$$\begin{aligned} Z[x(n)] &= X(z) \\ x(n) &= Z^{-1}[X(z)] \\ x(n) &\stackrel{ZT}{\Leftrightarrow} X(z) \end{aligned}$$

Z 变换是一种幂级数求和的形式，显然其不是总能收敛。它既不是对所有序列都能成立，也不是对某序列的所有 z 值都成立。如果给定了具体的具体的序列，我们可以求出使其成立的所有 z 值的集合，该集合我们称作 $X(z)$ 的收敛域，简记为 ROC。

Z 变换收敛域的一般特点

1. 收敛域的一般形式是 z 平面上以原点为中心的圆环
2. 收敛域不会包含极点，而且经常以极点作为收敛域的边界
3. 在 ROC 内， ZT 及其倒数是 z 的连续函数，即 ZT 函数是收敛域内每一点的解析函数。

4.5 特定序列 ROC

Z 变换是一个幂级数，幂级数的收敛范围称为收敛圆，收敛圆的半径称为幂级数的收敛半径，序列 a_n 的收敛半径求法有比值法和根值法

- 比值法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

- 根值法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

- - 如果 ρ 不等于 0，那么收敛半径 $R = 1/\rho$
 - 如果 ρ 等于 0，收敛半径 R 为 ∞
 - 如果 ρ 等于 ∞ ，收敛半径 R 为 0

考虑如下特定序列的 ROC

1. 有限长序列

$x(n)$ 在 $n < n_1$ 和 $n > n_2$ 时为零 (其中 $n_1 < n_2$)

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

ROC 至少是 $0 < |z| < \infty$ 序列的左右端点只会影响其在零点和无穷点的收敛情况

$$\begin{cases} n_1 < 0, n_2 > 0 & 0 < |z| < \infty \\ n_1 < 0, n_2 \leq 0 & 0 \leq |z| < \infty \\ n_1 \geq 0, n_2 > 0 & 0 < |z| \leq \infty \end{cases}$$

2. 右边序列

序列 $x(n)$ 在 $n < n_1$ 时为零

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

由根值法, 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|} < 1$ 则

$$|z| > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} =: R_{x_1}$$

右边序列的收敛域是半径为 R_{x_1} 的圆外部分, 端点只影响无穷远处的收敛情况。

$$\begin{cases} n_1 \geq 0 & R_{x_1} < |z| \leq \infty \\ n_1 < 0 & R_{x_1} < |z| < \infty \end{cases}$$

3. 左边序列

序列 $x(n)$ 在 $n > n_2$ 时为零

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

由根值法, 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)z^n|} < 1$ 则

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}} =: R_{x_2}$$

右边序列的收敛域是半径为 R_{x_2} 的圆内部分, 端点只影响无穷远处的收敛情况。

$$\begin{cases} n_2 > 0 & 0 < |z| < R_{x_2} \\ n_2 \leq 0 & 0 \leq |z| < R_{x_2} \end{cases}$$

4. 双边序列

序列在整个实数域都有定义。我们将其看成左边序列和右边序列的组合

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$$

$$R_{x_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} \quad R_{x_2} = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}$$

若 R_{x_1} 和 R_{x_2} 存在且 $R_{x_2} > R_{x_1}$, 则双边序列的 ROC 为

$$R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$

否则, ROC 为空集, 即双边序列不存在 Z 变换。

值得说明的是, 求 ROC 所得的是级数收敛的充分而非必要条件, 实际的收敛域可能更大。实际的离散信号通常是因果序列, 收敛域是 z 平面上的某个圆外面的区域。

4.6 常见序列及其 ZT

在本节中我们考虑如下常见序列及其 ZT:

- 单位冲激序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & (n=0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases} \longrightarrow Z[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = \delta(0) = 1$$

其 ROC 为 $0 \leq |z| \leq \infty$

- 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & (n \geq 0) \\ 0, & (n < 0) \end{cases} \longrightarrow Z[u(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

其 ROC 为 $|z| > 1$

- 矩形脉冲序列

$$G_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases} \longrightarrow Z[G_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad (0 < |z| \leq \infty)$$

- 单位指数序列

$$\begin{aligned} Z[a^n u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \\ Z[-a^n u(-n-1)] &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n z^{-n}) = \begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}} & |z| < |a| \\ 0 & z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4.7 ZT 的性质

- 线性性

$$Z\left[\sum_{k=1}^K a_k x_k(n)\right] = \sum_{k=1}^K a_k Z[x_k(n)] = \sum_{k=1}^K a_k X_k(z)$$

- 时域平移性

– 左移

$$Z[x(n+m)] = z^m X(z)$$

– 右移

$$Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

- 时域扩展性

$$x_{(a)}(n) \triangleq \begin{cases} x\left(\frac{n}{a}\right), \frac{n}{a} \in Z \\ 0, \frac{n}{a} \notin Z \end{cases} \quad (0 \neq a \in Z)$$

扩展因子 a

- 大于 1

相当于在原序列每两点之间插入 $a - 1$ 个零

- 小于 -1

相当于愿序列先反褶，再每两个点之间插入 $-a - 1$ 个零

$$Z[x_{(a)}(n)] = X[z^a] \quad R_1 < |z^a| < R_2$$

- 对称性

- 如果序列是偶对称的，则

$$X(z) = Z[x(n)] = Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

- 如果序列是奇对称的，则

$$X(z) = -X\left(\frac{1}{z}\right)$$

如果一个偶对称或者奇对称序列的 ZT 含有一个非零的零点（或极点） z_0 ，那么它一定含有另外一个与 z_0 互为倒数的零点（或极点） $\frac{1}{z_0}$ 。

- 时域共轭性

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_1 < |z| < R_2$$

如果一个序列是实序列，则

$$X(z) = Z[x(n)] = Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$$

如果一个实序列的 ZT 含有一个零点（或极点） z_0 ，那么它必含有另外一个与之共轭的零点（或极点） z_0^*

- Z 域尺度变换（序列指数加权）

$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2}$$

$$Z[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad R_{x1} < |az| < R_{x2}$$

$$Z[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad R_{x1} < |z| < R_{x2}$$

$$Z[e^{jn\omega_0} x(n)] = X(e^{-j\omega_0} z) \quad R_{x1} < |z| < R_{x2}$$

我们可以用复指数序列调制序列的相位特性。

- Z 域微分 (序列线性加权)

$$Z[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} Z[x(n)] \quad R_1 < |z| < R_2$$

ROC 唯一可能的变化是加上或去掉零或无穷点。

$$Z[n^m x(n)] = \left[-z \frac{d}{dz} \right]^m Z[x(n)] \quad R_1 < |z| < R_2$$

下面给出一个一次微分的证明。

$$\begin{aligned} Z[nx(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = z \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n-1} \\ &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (-nz^{-n-1}) = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{dz} (z^{-n}) \\ &= -z \frac{d}{dz} Z[x(n)] \end{aligned}$$

- 初值定理和终值定理

- 初值定理

$x(z)$ 是因果序列 $x(n)$ 的 Z 变换, 则

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- 终值定理

如果 $(z-1)X(z)$ 的极点在单位圆内 (在单位圆上只能是 $z = +1$ 且是一阶极点), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

考虑到初值定理和终值定理在分析中也很常用, 这里我们直接介绍和证明连续版本。首先我们引入 Z 变换的连续形式——拉普拉斯变换

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- 初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

证明:

通过分部积分, 我们有

$$\int_{t=0^-}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = sF(s) - f(0^-)$$

因此,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[f(0^-) + \int_{t=0^-}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \right]$$

但在 $t = 0^-$ 到 $t = 0^+$ 之间, $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st}$ 是不确定的; 为了避免这种情况, 可以通过对两段区间分别积分求得

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_{t=0^-}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{t=0^-}^{\epsilon} e^{-st} f'(t) dt \right] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{t=\epsilon}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \right] \right\}$$

在第一个表达式中 $0^- < t < 0^+$, $e^{-st} = 1$ 。在第二个表达式中, 可以交换积分和取极限的次序。同时在 $0^+ < t < \infty$ 时 $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st}$ 为零。故

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_{t=0^-}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \right] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{t=0^-}^{\epsilon} f'(t) dt \right] \right\} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{t=\epsilon}^{\infty} \lim_{s \rightarrow \infty} [e^{-st} f'(t) dt] \right\} \\ &= f(t) \Big|_{t=0^-}^{t=0^+} + 0 \\ &= f(0^+) - f(0^-) \end{aligned}$$

将该结果在主方程中进行代换就得到

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^-) + f(0^+) - f(0^-) = f(0^+)$$

— 终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

证明:

同上, 通过分部积分, 我们有

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

如果无穷积分存在, 则积分的极限可以写作极限的积分 (交换极限积分次序), 因此上式左边可以写作

$$\int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df(t) = f(\infty) - f(0)$$

令上面两个等式的右边相等, 两边同时消去 $f(0)$ 有

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

• 时域卷积定理

$$Z[x(n) * y(n)] = Z[x(n)]Z[y(n)]$$

卷积的 ZT 的 ROC 至少是原序列 ZT 的 ROC 的交集。

$$\begin{aligned}
 Z[x(n) * y(n)] &= Z \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)y(n-l) \right\} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)y(n-l) \right] z^{-n} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-l)z^{-n} \right] \\
 &= \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)z^{-l} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \right] \\
 &= Z[x(n)]Z[y(n)]
 \end{aligned}$$

复习如下几个常用结果。

$$\begin{aligned}
 x(n) * u(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x(k) \\
 x(n) * \delta(n - n_0) &= x(n - n_0) \\
 x(n)\delta(n - n_0) &= x(n_0)\delta(n - n_0)
 \end{aligned}$$

• Parseval 定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)Y^* \left(\frac{1}{z^*} \right) z^{-1} dz$$

4.8 逆 Z 变换的求解

我们经常遇到输入序列为组合序列的情况, 这种序列的 Z 变换就是它的组成序列的 Z 变换的线性组合。

$$x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] + \cdots \xleftrightarrow{Z} X_1(z) + X_2(z) + X_3(z) + \cdots$$

观察可以发现大多数典型序列的 Z 变换都是分数形式, 因此这些 Z 变换的组合可以假设为

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

其中 c_k 是 $X(z)$ 的非零值零点, d_k 是 $X(z)$ 的非零值极点。

1. $M < N$

若 $M < N$, 并且极点都是一阶 (即没有相同的极点, 即没有相同的 d_k), 那么 $X(z)$ 就能表示为

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

此时, 等式两边乘以 $(1 - d_k z^{-1})$, 并取 z 等于其中的某个极点 $z = d_k$, 可以消去等式右边除了 A_k 之外所有的项

$$(1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k} = A_k$$

按照这种计算方式可以得到所有的 A_k 。举例说明如下。

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{2 - 2.05z^{-1}}{1 - 2.05z^{-1} + z^{-2}} = \frac{2 - 2.05z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 1.25z^{-1})} \\ X(z) &= \frac{A_1}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 1.25z^{-1}} \\ A_1 &= [(1 - 0.8z^{-1}) X(z)]_{z=0.8} = \left[\frac{2 - 2.05z^{-1}}{1 - 1.25z^{-1}} \right]_{z=0.8} = 1 \\ A_2 &= [(1 - 1.25z^{-1}) X(z)]_{z=1.25} = \left[\frac{2 - 2.05z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} \right]_{z=1.25} = 1 \end{aligned}$$

2. $M = N$

若 $M < N$, $X(z)$ 可以表示为

$$X(z) = A_0 + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

其中, $A_0 = X(z)|_{z=0}$, $A_k (k > 1)$ 同上。举例说明如下。

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}} = \frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} \\ X(z) &= A_0 + \frac{A_1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + 0.5z^{-1}} \\ A_0 &= \left[\frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.25z^{-2}} \right]_{z=0} = 4 \\ A_1 &= \left[\frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 + 0.5z^{-1}} \right]_{z=0.5} = 4 \\ A_2 &= \left[\frac{10 + z^{-1} - z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}} \right]_{z=-0.5} = 2 \end{aligned}$$

3. $M > N$

事实上, 如果 $M \geq N$, 我们就可以用长除法, 分子除以分母以使得分式的 $M < N$, 然后就可以按照 $M < N$ 方法求解

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

举例说明如下。

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{6 + z^{-5}}{1 - 0.25z^{-2}} \\ X(z) &= -16z^{-1} - 4z^{-3} + \frac{6 + 16z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}} \\ X(z) &= -16z^{-1} - 4z^{-3} + \frac{19}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{13}{1 + 0.5z^{-1}} \\ x(n) &= -16\delta(n-1) - 4\delta(n-3) + 19(0.5)^n u(n) - 13(-0.5)^n u(n) \end{aligned}$$

传递函数 注意到离散时间 LTI 系统输入输出满足下列关系

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

两边做 Z 变换得到

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) \longrightarrow H(z) = Y(z)/X(z)$$

$H(z)$ 与系统特性有一一对应关系, 也可以说是系统特性的一种反映, 所以通常称 $H(z)$ 为 LTI 系统的传递函数, 也称系统函数。传递函数 $H(z)$ 实际上是系统单位冲激响应 $h(n)$ 的 Z 变换, 可以直接由单位冲激响应求出来

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

显然, 系统并联后传递函数相加, 系统串联后传递函数相乘。

下面我们给出离散线性时不变系统的稳定性判定和因果性判定。

- 离散线性时不变系统是因果系统的充要条件是: 传递函数 ROC 是某个圆外部的区域, 包括无穷远点。
- 离散线性时不变系统是稳定系统的充要条件是: 传递函数的 ROC 包括单位圆。

所以系统是稳定的因果系统的充要条件是其 ROC 是包含于单位圆的圆 (比单位圆小的圆) 的外部区域。下面给出两道例题。

例 1 已知滤波器的差分方程为 $y(n) + 0.8y(n-1) - 0.9y(n-2) = x(n-2)$ 求该滤波器的传递函数。若已知其为因果系统, 求其收敛域。

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} - 0.9z^{-2}} = \frac{1}{z^2 + 0.8z - 0.9}$$

极点: $z_1 = 0.6296, z_2 = -1.4296$ 。由于该系统是因果系统, $|z| > \max\{|z_1|, |z_2|\} = 1.4296$ 。

例 2 对下面给出的 Z 变换结果, 求它对应的序列。

$$X(z) = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.6z^{-1} - 0.8z^{-2}}$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.6z^{-1} - 0.8z^{-2}} = \frac{2z - 1}{z^2 - 1.6z - 0.8} = \frac{2z - 1}{(z - 2)(z + 0.4)} \\
&= A_0 + \frac{A_1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + 0.4z^{-1}} \\
A_0 &= [X(z)]_{z=0} = 1.25 \\
A_1 &= [(1 - 2z^{-1}) X(z)]_{z=2} = 0.625 \\
A_2 &= [(1 + 0.4z^{-1}) X(z)]_{z=-0.4} = -1.875 \\
X(z) &= 1.25 + \frac{0.625}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1.875}{1 + 0.4z^{-1}} \\
x(n) &= \begin{cases} 1.25 \cdot \delta(n) + 0.625 \cdot 2^n \cdot u(n) - 1.875 \cdot (-0.4)^n \cdot u(n) & |z| > 2 \\ 1.25 \cdot \delta(n) - 0.625 \cdot 2^n \cdot u(-n-1) - 1.875 \cdot (-0.4)^n \cdot u(n) & 0.4 < |z| < 2 \\ 1.25 \cdot \delta(n) - 0.625 \cdot 2^n \cdot u(-n-1) + 1.875 \cdot (-0.4)^n \cdot u(-n-1) & |z| < 0.4 \end{cases}
\end{aligned}$$

幂级数展开法和应用留数定理的留数法也是求解 Z 逆变换的常用方法，但我们略过。

4.9 数字滤波器的设计

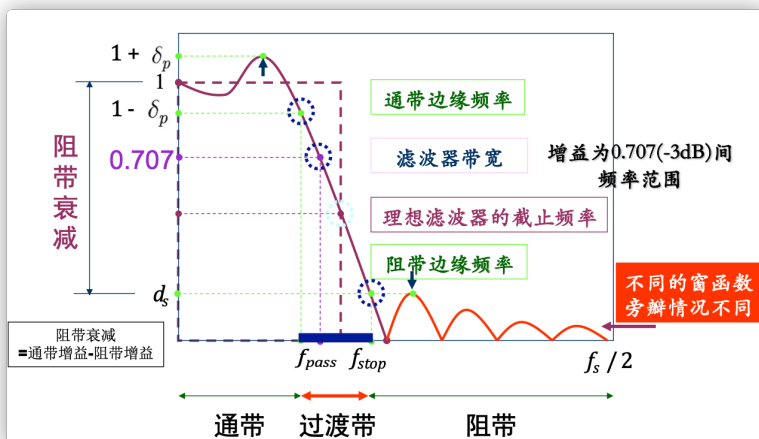
FIR 数字滤波器的设计 FIR 滤波器的单位冲激响应 $h'(n)$ 是有限长的因果序列。下面是 FIR 数字滤波器的窗函数设计法。

1. $h'(n)$ 将满足要求的理想低通滤波器的 $h(n)$ 截断
2. 因为时域平移只影响相位，所以可以将截断后的 $h(n)$ 平移成因果序列（而不影响系统的幅频响应特性）
3. 用所得 $h(n)$ 实现的滤波器即为所需 FIR 的 $h'(n)$

$$\begin{aligned}
h(n) &= \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi} \quad (\text{理想的低通滤波器}) \\
\implies h'(n) &= h(n)w(n)
\end{aligned}$$

时域截断，频域 $H(w)$ 与窗函数作卷积，滤波器的滤波性能（滤波器形状）发生改变。

我们再次祭出下图。虚线表示的是理想低通滤波器的滤波特性，实线表示的是窗函数设计得到的实际的低通滤波器的滤波特性。



理想低通滤波器的 $h(n)$ 被不同的窗函数截断时性能见下图。

窗类型	窗函数 $ n \leq \frac{N-1}{2}$	窗内项数 T.W.是过渡带宽度	阻带衰减dB	通带边缘增益dB $20 \log(1 - \delta_p)$
矩形	1	$0.91 \frac{f_s}{T.W.}$	21	-0.9
汉宁	$0.5 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$	$3.32 \frac{f_s}{T.W.}$	44	-0.06
哈明	$0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$	$3.44 \frac{f_s}{T.W.}$	55	-0.02
布莱克曼	$0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$	$5.98 \frac{f_s}{T.W.}$	75	-0.0014
凯塞	$\frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \frac{2n}{N-1}}\right)}{I_0(\beta)}$	$4.33 \frac{f_s}{T.W.} (\beta = 6)$	64	-0.0057
		$5.25 \frac{f_s}{T.W.} (\beta = 8)$	81	-0.00087
		$6.36 \frac{f_s}{T.W.} (\beta = 10)$	100	-0.000013

理想低通滤波器的截止频率，由于单位冲激响应被截短成了有限项，所以滤波器的频率响应特性会发生改变。根据经验，在设计滤波器时，理想低通滤波器的截止频率不使用通带边缘频率，而是使用过渡带中点的频率。即：

理想低通滤波器的截止频率 (设计用) = 设计指标要求的通带边缘频率 + (过渡带宽度) / 2

我们给出详细的低通 FIR 滤波器的设计步骤如下。

1. 在过渡带宽度中间，选择理想低通滤波器的截止频率 f_c 。(上式)
2. 计算截止频率的数字频率，并代入

$$h(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi} \quad \omega_c = 2\pi f_c / f_s$$

3. 从表中选择满足阻带衰减及其他要求的窗函数, 计算窗内非零项的数目, 选择奇数项 (好处: 脉冲响应完全对称, 相位没有失真), 计算出窗函数的表达式
4. 用窗函数与 $h(n)$ 相乘, 计算有限长脉冲响应
5. 将脉冲响应右移 $(N-1)/2$, 使第一个非零值在 $n=0$ 处

两个具体实例

1. 根据下列指标设计低通 FIR 滤波器

通带边缘频率 10kHz, 阻带边缘频率 22kHz, 阻带衰减 75dB, 采样频率 50kHz。

设计:

过渡带宽度 $= 22 - 10 = 12$ kHz

理想低通滤波器的截止频率 $f_1 = 10 + 12/2 = 16$ kHz

相应的数字频率 $\omega_1 = 2\pi f_1/f_s = 2\pi 16/50 = 0.64\pi$

理想滤波器的脉冲响应为

$$h(n) = \frac{\sin(n\omega_1)}{n\pi} = \frac{\sin(0.64\pi n)}{n\pi}$$

布莱克曼窗和凯塞窗都可以达到阻带衰减 75dB 的要求。尽管凯塞窗的长度短, 但布莱克曼窗计算简单。

$$N = 5.98 \frac{f_s}{T.W.} = 5.98 \times \frac{50}{12} = 24.9 \rightarrow 25$$

窗长取 25, 窗函数为

$$w(n) = 0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{24} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{24}$$

滤波器脉冲响应为

$$h'(n) = h(n)\omega(n) \quad (|n| \leq 12)$$

将脉冲响应右移 $(N-1)/2$, 使第一个非零值在 $n=0$ 处

$$h'(n) = h(n-12)\omega(n-12) \quad (0 \leq n \leq 24)$$

2. 根据下列指标设计低通 FIR 滤波器

通带边缘频率 2kHz, 阻带边缘频率 3kHz, 阻带衰减 40dB, 采样频率 10kHz。

设计:

过渡带宽度 $= 3 - 2 = 1$ kHz

理想低通滤波器的截止频率 $f_c = 2 + 1/2 = 2.5$ kHz

相应的数字频率 $\omega_c = 2\pi f_c/f_s = 2\pi 2.5/10 = 0.5\pi$

理想滤波器的脉冲响应为

$$h(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi} = \frac{\sin(0.5\pi n)}{n\pi}$$

阻带衰减 40 dB, 可以选择汉宁窗。窗长为

$$N = 3.32 \frac{f_s}{T.W.} = 3.32 \times \frac{10}{1} = 33.2 \rightarrow 35$$

窗函数为

$$w(n) = 0.5 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{34}$$

滤波器脉冲响应为

$$h'(n) = h(n)w(n) \quad (|n| \leq 17)$$

将脉冲响应右移 $(N-1)/2$, 使第一个非零值在 $n=0$ 处

$$h'(n) = h(n-17)w(n-17), (0 \leq n \leq 34)$$

Chapter 5

习题

这里是 2021 年秋季学期贾珈老师的信号处理原理课程对应习题。

5.1 第一次作业

1. 任选第三种方法理解欧拉公式。(参见 1.2 节)
2. 证明 $\{e^{jn\omega_0 t} \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 在区间 $[-\pi/\omega_0, \pi/\omega_0]$ (ω_0 为实数) 上是正交函数集。(参见例题2)

5.2 第二次作业

1. 推导卷积的微分公式

$$\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \left[\frac{df_2(t)}{dt} \right] = \left[\frac{df_1(t)}{dt} \right] * f_2(t)$$

(参见卷积的性质4)

2. 推导卷积的积分公式

$$\int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda) d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda = \left(\int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right) * f_2(t)$$

(参见卷积的性质5)

3. 推导一个函数与单位阶跃函数的卷积等于该函数的积分, 即

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda$$

(参见单位阶跃信号2)

5.3 第三次作业

1. 已知 $f(t) = \sin(t) \cos(2t) + 5 \cos(3t) \sin(4t)$, 求该函数的傅里叶级数。

Solution:

首先我们对 $f(t)$ 进行化简

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(t) \cos(2t) + 5 \cos(3t) \sin(4t) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(3t) + \sin(-t)) + \frac{5}{2} (\sin(7t) + \sin(t)) \\ &= 2 \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(3t) + \frac{5}{2} \sin(7t) \end{aligned}$$

所以 $f(t)$ 的周期为 2π , $\omega_1 = 1$ 。对于周期为 T_1 的函数 $f(t)$, 它的傅里叶级数展开可以写为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

通过计算积分, a_0, a_n, b_n 分别为:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ \frac{1}{2} & n = 3 \\ \frac{5}{2} & n = 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

这与 $f(t)$ 化简后对应项的系数是一致的。更方便的, 我们第一步化简成三角函数的形式即为答案。

5.4 第四次作业

1. 写出指数函数 ($f(t) = e^{-at}, a > 0, t > 0$) 的傅里叶变换。
2. 已知 $f(t)$ 如下, 求该函数的傅里叶变换。

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < \tau \\ \tau & \tau \leq t < 2\tau \\ 0 & t < 0 \text{ 或 } t \geq 2\tau \end{cases}$$

Solution:

1. 求傅里叶变换的符号记为 $\mathcal{F}[\cdot]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-at}] &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a+j\omega} (0-1) \\ &= \frac{1}{a+j\omega}\end{aligned}$$

2. 求傅里叶变换的符号记为 $\mathcal{F}[\cdot]$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{2\tau} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\tau} t e^{-j\omega t} dt + \int_{\tau}^{2\tau} \tau e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega t} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{t}{j\omega} \right) \Big|_0^{\tau} - \frac{\tau}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{\tau}^{2\tau} \\ &= \frac{1}{\omega^2} [e^{-j\omega\tau} + j\omega\tau e^{-j\omega 2\tau} - 1]\end{aligned}$$

5.5 第五次作业

1. 现有信号 $f(t) = e^{-\frac{t^2}{20}}$ 。为分析某时刻下的“局部频谱”，可选合适的窗函数 $w(t, t_0)$ ，并截取 $f(t)$ 在 t_0 附近的信号，即 $f_w(t, t_0) = f(t) \cdot w(t, t_0)$ 。

(a) 求信号 $f(t)$ 的 FT 。

(b) 现不妨取窗函数 $w(t, t_0) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2}}$ 。试分析 $t_0 = 0$ 时刻下对应的“局部频谱”，即求 $f_w(t, 0)$ 的 FT 。

(c) 画出信号 $f(t)$ 的频谱图与信号 $f(t)$ 在 $t_0 = 0$ 时刻下的“局部频谱”图，并进行对比。

提示：若 $x \in R, c \in R, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+jc)^2} dx = \sqrt{\pi}$ 。

Solution:

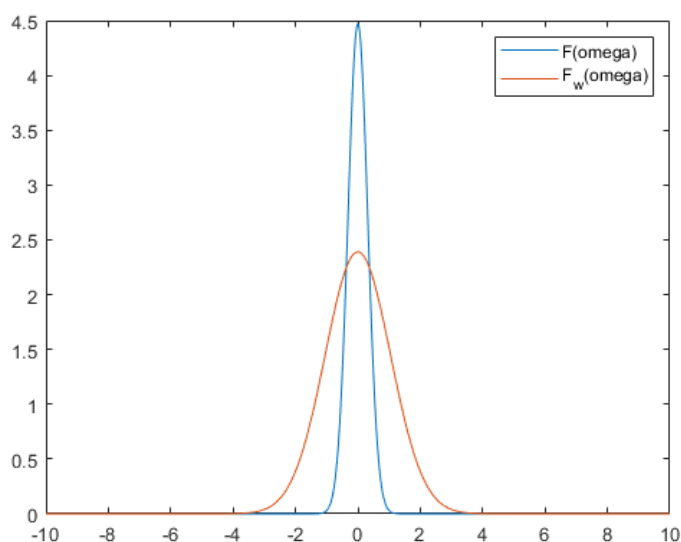
- (a) 求傅里叶变换的符号记为 $\mathcal{F}[\cdot]$,

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{20}} e^{-j\omega t} dt = 2\sqrt{5} \cdot e^{-5\omega^2}$$

- (b)

$$\begin{aligned}f_w(t, 0) &= e^{-\frac{t^2}{20}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{11}{20}t^2} \\ \mathcal{F}[f_w(t, 0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{11}{20}t^2} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{11}{20}}t + \sqrt{\frac{5}{11}}j\omega\right)^2} \cdot e^{-\frac{5}{11}\omega^2} dt \\ &= \frac{2\sqrt{55}\pi}{11} \cdot e^{-\frac{5\omega^2}{11}}\end{aligned}$$

(c) 可以看出, 使用窗口选择使原频谱的低频分量减弱、高频分量增强, 感觉被“压扁”了。



5.6 第六次作业

- 画图以及文字说明: $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 欠采样时, 恢复的信号不仅频率降低, 而且相位相反。注: 1 $\omega_0 < \omega_s < 2\omega_0$; 2、理想低通滤波器的带宽 ω_c , 满足 $\omega_s - \omega_0 < \omega_c < \omega_0$ 。
- 已知 $x(n)$ 的 DTFT 为 $X(\omega)$, 试求下列各序列的 DTFT:
 - $x(n) * x^*(-n)$
 - $x(2n+1)$
 - $x(n) - x(n+2)$
 - $x(n) * x(n+1)$
- 证明, 若 $X(\omega)$ 是 $x(n)$ 的 DTFT, 则

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的 DTFT 为 $Y(\omega) = X(L\omega)$ 。

Solution:

- 略
- (a)

$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x(n) * x^*(-n)] &= \text{DTFT}[x(n)] \cdot \text{DTFT}[x^*(-n)] \\ &= X(\omega) \cdot X^*(\omega) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
DTFT[x(2n+1)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n+1)e^{-jn\omega} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1+(-1)^{m-1}}{2} \cdot x(m)e^{-j(\frac{m-1}{2})\omega} \\
&= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}j\omega} \left[X\left(\frac{1}{2}\omega\right) - X\left(\frac{1}{2}\omega + \pi\right) \right]
\end{aligned}$$

其中第二个等号用到了变量代换 $m = 2n + 1$, 变换得到的 m 只能取到奇数, 这也是存在系数 $\frac{1+(-1)^{m-1}}{2}$ 的原因。

(c)

$$\begin{aligned}
DTFT[x(n) - x(n+2)] &= DTFT[x(n)] - DTFT[x(n+2)] \\
&= X(\omega) - e^{2j\omega} \cdot X(\omega) \\
&= (1 - e^{2j\omega}) X(\omega)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
DTFT[x(n) * x(n+1)] &= DTFT[x(n)] \cdot DTFT[x(n+1)] \\
&= X(\omega) \cdot e^{j\omega} X(\omega) \\
&= e^{j\omega} X^2(\omega)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= DTFT[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-jn\omega} \\
&= \sum_{n=kL}^{\infty} x(n/L)e^{-jn\omega} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-jLm\omega} \\
&= X(L\omega)
\end{aligned}$$

其中, 倒数第二个等号用了变量代换 $m = n/L$ 。

5.7 第七次作业

1. 求 $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ 的 4 点 DFT 和 8 点 DFT, 要求求出具体数值。
2. 求 $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right)$ 的 N 点 DFT, 其中 $0 \leq n \leq N-1$, $0 < m < N$ 且 $m \in \mathbb{Z}$ 。
3. 设信号 $x(t)$ 的理想抽样值序列为 $x(n)$, 数目 (长度) 为 L , 将这 L 个元素每 N 个一组, 其中, $N \leq L = rN + s$, $r \geq 1, s \in [0..N]$, 不足部分补零, 得到 $r+1$ 组抽样值序列分别为:

$$x_m(n) = x(mN + n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots, r$$

将上述各组序列按如下方式相加, 得到一个 N 点有限长序列

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^r x_m(n) = \sum_{m=0}^r x(mN + n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

设 $\omega_k = k2\pi/N$, 则试证明下列等式成立:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jn\omega_k} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-jn\omega_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Solution:

1. 4 点 DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 0n} = 10 \quad X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot n} = -2 + 2j$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2n} = -2 \quad X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3n} = -2 - 2j$$

8 点 DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

$$X(0) = 10 \quad X(1) = (1 - \sqrt{2}) + (-3 - 3\sqrt{2})j$$

$$X(2) = -2 + 2j \quad X(3) = (1 + \sqrt{2}) + (+3 - 3\sqrt{2})j$$

$$X(4) = -2 \quad X(5) = (1 + \sqrt{2}) + (-3 + 3\sqrt{2})j$$

$$X(6) = -2 - 2j \quad X(7) = (1 - \sqrt{2}) + (+3 + 3\sqrt{2})j$$

2.

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi}{N}(m+k)n\right] + \cos\left[\frac{2\pi}{N}(m-k)n\right] - j \sin\left[\frac{2\pi}{N}(m+k)n\right] + j \sin\left[\frac{2\pi}{N}(m-k)n\right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)n} + e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)n} + \sum_{n=1}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n} \right] \end{aligned}$$

这里写复杂了, 可以直接将 $\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right)$ 写成 $\frac{e^{\frac{2\pi}{N}mnj} + e^{-\frac{2\pi}{N}mnj}}{2}$ 得到。最终我们得到

$$X(k) = \begin{cases} 0, & k \neq m, k \neq N - m \\ \frac{N}{2}, & k = m \text{ or } k = N - m \\ N, & k = m = \frac{N}{2} \end{cases}$$

3. 注意到

$$e^{-j(n+N)\omega_k} = e^{-jn\omega_k} \cdot e^{-jN\frac{k \cdot 2\pi}{N}} = e^{-jn\omega_k}$$

对于 $\forall k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$, 所证等式右边

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-jn\omega_k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_k} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-jn\omega_k} + \dots + \sum_{n=rN}^{L-1} x(n)e^{-jn\omega_k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_k} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n+N)e^{-j(n+N)\omega_k} + \dots + \sum_{n=0}^{s-1} x(n+rN)e^{-j(n+rN)\omega_k} \end{aligned}$$

由于序列最后部分补零, 上式等于

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_k} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n+N)e^{-jn\omega_k} + \dots + \sum_{n=0}^{N-1} x(n+rN)e^{-jn\omega_k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^r x(n+mN) \right] e^{-jn\omega_k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-jn\omega_k} \end{aligned}$$

证毕。

5.8 第八次作业

1. 设有限长序列 $x(n)$ 的取值范围为 $0 \sim N-1$, 长度 N 为偶数。若该序列的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 试用 $X(k)$ 表示下列各序列的 DFT

(a) 将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓, 然后对 $0 \sim MN-1$ 点组成的有限长序列求其 MN 点 DFT。

(b) 将 $x(n)$ 按如下方式进行时域扩展, 得到 MN 点新序列 $y(n)$, 求其 MN 点 DFT。

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{M}\right), & n/M \in \mathbb{Z} \\ 0, & n/M \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

(c) 将 $x(n)$ 尾部补上若干零, 成为长度为 MN 的有限长序列 $y(n)$, 求其 MN 点 DFT

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq MN-1 \end{cases}$$

2. 设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N , 它的 N 点 DFT 结果为 $X(k)$, 这里 N 是偶数。序列 $g(n)$ 是 $x(n)$ 中下标为偶数的元素组成的子序列, $h(n)$ 是 $x(n)$ 中下标为奇数的元素组成的子序列, 它们的长度是 $N/2$, 各自对应的 $N/2$ 点 DFT 结果分别为 $G(k)$ 和 $H(k)$ 。试根据 DFT 的计算公式 (定义) 证明:

$$X\left(\frac{N}{2} + k\right) = G(k) - W_N^k H(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

3. 已知序列 $x(n)$ 的长度为 N , $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$, 其中 $x_r(n)$ 和 $x_i(n)$ 分别是 $x(n)$ 的实部和虚部。设 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 令 $X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$, 其中 $X_{ep}(k)$ 是共轭对称序列, $X_{op}(k)$ 是共轭反对称序列, 即

$$\begin{aligned} X_{ep}(k) &= X_{ep}^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ X_{op}(k) &= -X_{op}^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

为表示简便, 本题中规定 $X(N) = X(0)$, $X_{ep}(N) = X_{ep}(0)$, $X_{op}(N) = X_{op}(0)$ 。

- (a) 试用序列 $X(k)$ 分别表示序列 $X_{ep}(k)$ 和 $X_{op}(k)$;
 (b) 证明: $DFT[x_r(n)] = X_{ep}(k)$, $DFT[jx_i(n)] = X_{op}(k)$, 其中 DFT 点数均为 N 。
 4. 已知带限周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数 FS 系数为 F_n 。对 $f(t)$ 进行抽样, 一个周期内采 $2N$ 个采样值, 得到 $2N$ 点有限长序列 $x(n)$, $x(n)$ 的 $2N$ 点离散傅里叶变换 DFT 为 $X(k)$ 。若抽样过程满足抽样定理要求, 试用 F_n 表示 $X(k)$ 。要求: 根据 FS 和 DFT 的相关定义式求解, 求解过程中不利用傅里叶变换 FT 。

Solution:

1. (a) 设 $x(n)$ 以 N 为周期延拓后得到 $x'(n)$, 我们有

$$\begin{aligned} X'(k) &= \sum_{n=0}^{MN-1} x'(n) W_{MN}^{nk} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x'(Nm+n) W_{MN}^{(Nm+n)k} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{MN}^{(Nm+n)k} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} W_{MN}^{Nmk} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n \frac{k}{M}} = \begin{cases} MX\left(\frac{k}{M}\right), & \frac{k}{M} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \frac{k}{M} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{MN-1} y(n) W_{MN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} y(Mn) W_{MN}^{Mnk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{MN}^{Mnk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X(k \bmod N) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
Y(k) &= \sum_{n=0}^{NM-1} y(n)W_{MN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_{MN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{n\frac{k}{M}} \\
&= \begin{cases} X\left(\frac{k}{M}\right), & \frac{k}{M} \in \mathbb{Z} \\ x(n) \text{ 的 DTFT 在 } \frac{k}{M} \text{ 处取值, } & \frac{k}{M} \notin \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

2. 根据题意有

$$x(n) \begin{cases} g\left(\frac{n}{2}\right), & x \text{ 为偶数} \\ h\left(\frac{n-1}{2}\right), & x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{N}{2} + k\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{n\left(\frac{N}{2} + k\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{n}{2}\right)W_N^{n\left(\frac{N}{2} + k\right)} \{n \text{ 取偶数}\} + \sum_{n=0}^{N-1} h\left(\frac{n-1}{2}\right)W_N^{n\left(\frac{N}{2} + k\right)} \{n \text{ 取奇数}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g(n)W_N^{2n\left(\frac{N}{2} + k\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)W_N^{(2n+1)\left(\frac{N}{2} + k\right)}
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
W_N^{2n\left(\frac{N}{2} + k\right)} &= e^{\{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2n\left(\frac{N}{2} + k\right)\}} = e^{\{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n\left(\frac{N}{2} + k\right)\}} = W_{\frac{N}{2}}^{nk} \cdot W_{N/2}^{n \cdot \frac{N}{2}} = W_{\frac{N}{2}}^{nk} \\
W_N^{(2n+1)\left(\frac{N}{2} + k\right)} &= W_N^{n(N+2k)} \cdot W_N^{\left(\frac{N}{2} + k\right)} = W_{\frac{N}{2}}^{nk} \cdot W_N^k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}} = -W_{\frac{N}{2}}^{nk} \cdot W_N^k
\end{aligned}$$

所以有

$$X\left(\frac{N}{2} + k\right) = G(k) - W_N^k H(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

3. (a) 注意到

$$\begin{aligned}
X(k) &= X_{ep}(k) + X_{op}(k) \\
X^*(N-k) &= X_{ep}^*(N-k) + X_{op}^*(N-k) = X_{ep}(k) - X_{op}(k)
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
X_{ep}(k) &= \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)] \\
X_{op}(k) &= \frac{1}{2} [X(k) - X^*(N-k)]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
X_r(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \\
X_r^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) e^{j \frac{2\pi}{N} n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = X_r(k) \\
X_i(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} j x_i(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \\
X_i^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} -j x_i(n) e^{j \frac{2\pi}{N} n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} -j x_i(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = -X_i(k)
\end{aligned}$$

注意到

$$X(k) = DFT[x_r(n) + j x_i(n)] = X_r(k) + j X_i(k)$$

所以有

$$X_r(k) = DFT[x_r(n)] = X_{ep}(k)$$

$$X_i(k) = DFT[j x_i(n)] = X_{op}(k)$$

4.

5.9 第九次作业

1. 设有某个用于信号频谱分析的记录仪, 能以万分之一秒的采样频率对信号进行采样, 如果要求频谱分析时频率分辨率不大于 10 Hz, 则至少要记录多长时间的信号采样值? 输入信号的最高频率是多少?
2. 对一个频率为 5 kHz 的正弦信号进行采样, 采样频率为 40kHz, 共采得 128 点数据。
 - i. 为得到这 128 点数据, 要花多长的时间?
 - ii. 如果对这 128 点数据进行 128 点的 DFT, 则在所得到的频谱图中, 哪此下标 k 处会有局部峰值出现?
3. 以 10kHz 为采样频率, 采得某信号的 10 ms 的数据。已知该信号含有三个正弦谐波分量, 它们的频率满足 $f_1 < f_2 < f_3$, 其中 $f_1 = 1\text{kHz}$, $f_3 = 2\text{kHz}$ 。如果要从采样数据的 DFT 频谱图中区分出这三个分量的谱峰, 则谐波分量频率 f_2 的最大值和最小值分别是多少?

Solution:

1. 依题意有

$$\Delta f = f_s / M \leq 10\text{Hz}$$

$$f_s = \frac{1}{10^{-4}\text{s}} = 10\text{kHz}$$

因此要记录的时间

$$M \geq 1000t_s = M/f_s \geq 0.1s$$

由 Nyquist 采样定理, 可采样的最高信号频率是

$$f_{max} = \frac{1}{2}f_s = 5\text{kHz}$$

2. i. 要花的时间为

$$t = \frac{128}{40\text{kHz}} = 3.2\text{ms}$$

- ii. 将原频谱归一化为数字频谱

$$f = 5\text{kHz} f_s = 40\text{kHz} \omega_0 = \frac{2\pi f}{f_s} = \frac{\pi}{4}$$

对于数字信号 $x(n) = \sin(\omega_0 n)$, 其频谱 $X(\omega)$ 基频为 $\frac{\pi}{4}$, 故冲激所在位置是

$$\omega_1 = \frac{\pi}{4} \quad \omega_2 = \frac{7\pi}{4}$$

再对频域抽样, 有峰值的 DFT 点是

$$n_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \cdot 128 = 16$$

$$n_2 = N - n_1 = 112$$

3. 采样个数为

$$M = t \cdot f_s = 100$$

频率分辨率为

$$\Delta f = f_s/M = 0.1\text{kHz}$$

为使三个简谐分量都能被区分, 其两两频率之差不能小于分辨率。所以有

$$f_{2,max} = f_3 - \Delta f = 1.9\text{kHz}$$

$$f_{2,min} = f_1 + \Delta f = 1.1\text{kHz}$$

5.10 第十次作业

1. 用直接 I 型和直接 II 型 (标准型) 结构实现以下系统函数

$$H(z) = \frac{3 + 4.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{2 + 0.6z^{-1} - 0.4z^{-2}}$$

2. 已知某系统的差分方程如下式:

$$y(n) = 2x(n) + x(n-3) - 0.9y(n-1) + 0.36y(n-2)$$

- (a) 求该系统的传递函数 $H(z)$;

- (b) 画出该系统信号流图;
 (c) 求该系统传递函数可能的收敛域及其对应序列, 并判断该状态下系统是否稳定。
3. 已知离散系统的差分方程为

$$y(n] = x(n] + 4x(n - 1] + 0.7y(n - 1] - 0.1y(n - 2]$$

求

- (a) 系统传递函数 $H(z)$;
 (b) 系统的单位冲激响应 $h(n]$;
 (c) 画出系统的零极点分布;
 (d) 说明系统频响的高低通特性;
 (e) 说明系统的稳定性。

Solution:

1. 由 $H(z)$ 得差分方程为:

$$2y(n] + 0.6y(n - 1] - 0.4y(n - 2] = 3x(n] + 4.2x(n - 1] + 0.8x(n - 2]$$

即

$$y(n] + 0.3y(n - 1] - 0.1y(n - 2] = 1.5x(n] + 2.1x(n - 1] + 0.4x(n - 2]$$

所以有

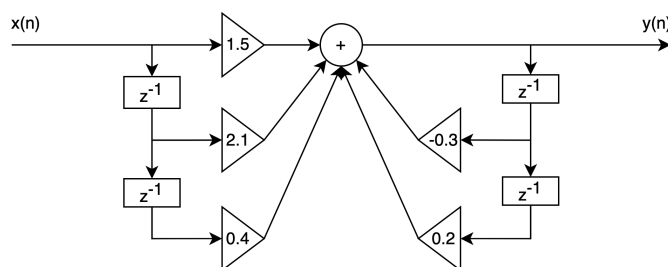


图 5.1: 直接 I 型

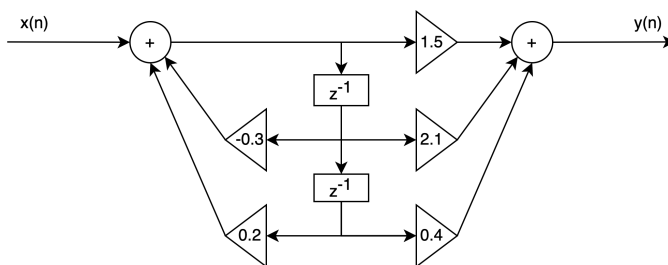


图 5.2: 直接 II 型 (标准型)

2. (a) 整理得到

$$y(n] + 0.9y(n-1) - 0.36y(n-2) = 2x(n) + x(n-3)$$

$$H(z) = \frac{2 + z^{-3}}{1 + 0.9z^{-1} - 0.36z^{-2}}$$

(b) 如图

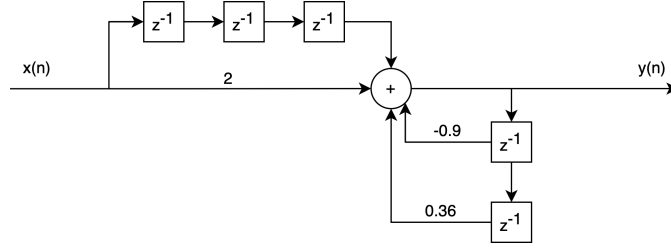


图 5.3: 系统信号流图

(c)

$$H(z) = \frac{2 + z^{-3}}{1 + 0.9z^{-1} - 0.36z^{-2}} = (2 + z^{-3}) \left(\frac{0.2}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{0.8}{1 + 1.2z^{-1}} \right)$$

解方程得到极点 $z = -1.2, 0.3$, 根据收敛域分类讨论:

- $|z| > 1.2$ 系统不稳定

$$h'(n) = 0.2(0.3)^n u(n) + 0.8(-1.2)^n u(n)$$

$$h(n) = 2h'(n) + h'(n-3)$$

$$= [0.4(0.3)^n + 1.6(-1.2)^n] u(n) + [0.2(0.3)^{n-3} + 0.8(-1.2)^{n-3}] u(n-3)$$

- $|z| < 0.3$ 系统不稳定

$$h'(n) = -0.2(0.3)^n u(-n-1) - 0.8(-1.2)^n u(-n-1)$$

$$h(n) = 2h'(n) + h'(n-3)$$

$$= -[0.4(0.3)^n + 1.6(-1.2)^n] u(-n-1) - [0.2(0.3)^{n-3} + 0.8(-1.2)^{n-3}] u(-n+2)$$

- $0.3 < |z| < 1.2$ 系统稳定

$$h'(n) = 0.2(0.3)^n u(n) - 0.8(-1.2)^n u(-n-1)$$

$$h(n) = 2h'(n) + h'(n-3)$$

$$= 0.4(0.3)^n u(n) - 1.6(-1.2)^n u(-n-1) + 0.2(0.3)^{n-3} u(n-3) - 0.8(-1.2)^{n-3} u(-n+2)$$

3. (a) 计算得到

$$H(z) = \frac{1 + 4z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

(b)

$$H(z) = \frac{1 + 4z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{-14}{1 - 0.2z^{-1}} + \frac{15}{1 - 0.5z^{-1}}$$

注意到

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

所以有

$$h(n) = IDTFT[H(z)] = -14(0.2)^n u(n) + 15(0.5)^n u(n)$$

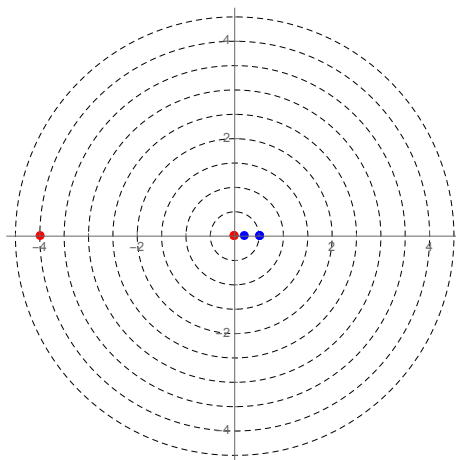
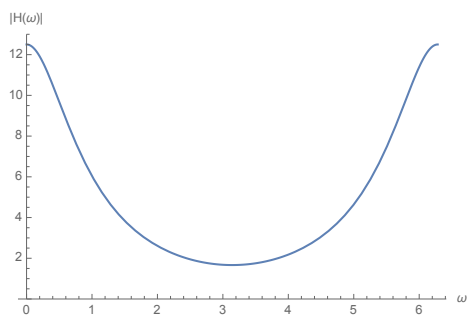
(c) 零点: $z = -4, 0$, 极点: $z = 0.2, 0.5$ 

图 5.4: 零极点分布图

(d) 转化为频率响应

$$H(\omega) = \frac{1 + 4e^{-j\omega}}{(1 - 0.2e^{-j\omega})(1 - 0.5e^{-j\omega})}$$

图 5.5: $|H(\omega)|$

因此为低通滤波器。

(e)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = -14 \sum_{k=0}^{\infty} 0.2^k + 15 \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k = 12.5 < \infty$$

因此系统是稳定的。