Pravděpodobnost a statistika

Spojité náhodné veličiny

Vilém Vychodil

KMI/PRAS, Přednáška 7

Vytvořeno v rámci projektu 2963/2011 FRVŠ

Přednáška 7: Přehled

1. Lebesgueův integrál:
   - indikátorová funkce, Lebesgueův integrál nezáporné Borelovské funkce,
   - absolutní spojitost, základní věta Lebesgueova integrálního počtu,
   - vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu,
   - funkce hustoty.
2. Spojité náhodné veličiny:
   - pravděpodobnostní míra indukovaná funkcí hustoty,
   - (absolutně) spojitá náhodná veličina,
   - očekávané hodnoty, střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka,
   - percentily, kvartily, medián.
3. Základní rozdělení spojitých náhodných veličin:
   - empirické rozdělení, uniformní rozdělení,
   - exponenciální rozdělení, Erlangovo rozdělení,
   - gama funkce, gama rozdělení.

Opakování

Definice (Lebesgueova míra Borelovských množin)

Zobrazení $m\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, které zobrazuje každý interval na jeho délku, to jest

$$m\big((a,b)\big) = m\big([a,b)\big) = m\big((a,b]\big) = m\big([a,b]\big) = b - a,$$

a které je navíc σ-aditivní, se nazývá **Lebesgueova míra**.

Definice (Borelovská funkce)

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá **Borelovská funkce**, pokud pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí, že $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$ je Borelovská množina.

Motivace:

- m na $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$ je pravděpodobnostní míra;
- budeme se snažit využít m k definici obecnějších pravděpodobnostních měr.

Indikátorová funkce

V dalším výkladu použijeme následující pomocný pojem:

Definice (Indikátorová funkce / charakteristická funkce)

Mějme množinu $A \subseteq \mathbb{R}$. Zobrazení $\mathbf{1}_A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

se nazývá **indikátorová funkce** množiny A, angl.: *indicator function*.

Poznámky:

- platí: B je Borelovská množina právě tehdy, když $\mathbf{1}_B$ je Borelovská funkce; (jednoduše vidět: důsledek faktu, že $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathbf{1}_B(x) \leq 0.5\} = \mathbb{R} - B$)
- například *Dirichletova funkce* $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ (všude nespojitá funkce) je Borelovská;

Definice (Lebesgueův integrál nezáporných Borelovských funkcí)

Nechť m je Lebesgueova míra Borelovských množin. Pak **Lebesgueův integrál** je zobrazení, které každé nezáporné Borelovské funkci $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ přiřazuje číslo

$$\boxed{\int f \,\mathrm{d}m} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tak, že pro každé $c \in [0, \infty)$, každou Borelovskou množinu $B \subseteq \mathbb{R}$ a libovolné nezáporné Borelovské funkce f, g, f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ platí:

1. $\int \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}m = m(B)$;
2. $\int (f + g) \,\mathrm{d}m = \int f \,\mathrm{d}m + \int g \,\mathrm{d}m$ a $\int cf \,\mathrm{d}m = c \int f \,\mathrm{d}m$; (**linearita**)
3. pokud $f_n \nearrow f$, pak $\int f_n \,\mathrm{d}m \nearrow \int f \,\mathrm{d}m$. (**monotonní konvergence**)

Poznámka:

- $a_n \nearrow b$ značí, že $a_1, a_2, \ldots$ je neklesající posloupnost a $\lim_{n\to\infty} a_n = b$;
- $f_n \nearrow f$ značí, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f_n(x) \nearrow f(x)$.

Absolutní spojitost

Definice (Absolutní spojitost)

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá **absolutně spojité** (angl.: *absolutely continuous*) pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou konečnou posloupnost $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ disjunktních intervalů $(x_i, y_i) \subseteq \mathbb{R}$ platí, že

$$\text{pokud } \textstyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \delta, \text{ pak } \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Další typy spojitosti:

- **spojitost** (pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|y - x| < \delta$, platí $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$);
- **stejnoměrná spojitost** (pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí: pokud $|y - x| < \delta$ pak $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$).

Vztahy pojmů spojitosti:

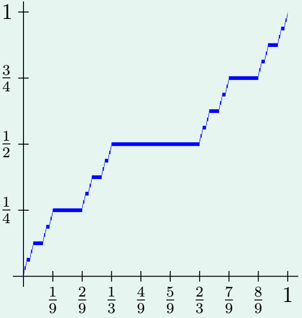
absolutní spojitost (nejsilnější) $\Longrightarrow$ stejnoměrná spojitost $\Longrightarrow$ spojitost (nejslabší)

Příklad (Cantorova funkce není absolutně spojitá)

Uvažujme posloupnost funkcí $f_0, f_1, \ldots,$ kde f_0 je identita a pro libovolné $n \geq 1$ je funkce f_n vyjádřena pomocí f_{n-1} následujícím předpisem:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \left[\frac{3}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Pak funkce f, pro kterou $f_n \nearrow f$, se nazývá **Cantorova funkce**:



- f je spojitá ve všech bodech z intervalu $[0, 1]$,
- f má nulovou derivaci ve všech bodech z intervalu $[0, 1]$ s výjimkou spočetně mnoha bodů,
- f *je spojitá* (*stejnoměrně*) na intervalu $[0, 1]$,
- f *není absolutně spojitá*.

Vlastnosti Lebesgueova integrálu

Věta (Základní věta Lebesgueova integrálního počtu)

Nechť $f : R \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. *f je absolutně spojitá na intervalu $[a, b]$,*
2. *f má na $[a, b]$ derivaci skoro všude, f' je Lebesgueovsky integrovatelná a platí*
$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f' \,\mathrm{d}m = \int f' \cdot \mathbf{1}_{[a,x]} \,\mathrm{d}m$$
pro každé $x \in [a, b]$.
3. *existuje Lebesgueovsky integrovatelná funkce g na intervalu $[a, b]$ taková, že*
$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} g \,\mathrm{d}m = \int g \cdot \mathbf{1}_{[a,x]} \,\mathrm{d}m$$
pro každé $x \in [a, b]$.

Skoro všude = s možnými výjimkami prvků množin $A \subseteq \mathbb{R}$, pro které $m(A) = 0$.

Lebesgueův vs. Riemannův integrál

Při výpočtech budeme používat následující vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu: *pokud je reálná funkce f Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pak je i Lebesgueovsky integrovatelná a platí*:

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}m = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Obrácené tvrzení neplatí (Lebesgueův integrál je obecnější).

Příklad (Funkce, která není Riemannovsky integrovatelná)

Indikátorová funkce $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ není Riemannovsky integrovatelná, ale máme:

$$\int \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \, \mathrm{d}m = m(\mathbb{Q}) = 0,$$

protože množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná, tedy $m(\mathbb{Q}) = 0$.

Funkce hustoty

Definice (Funkce hustoty, angl.: *density function*)

Nezáporná Borelovská funkce $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ se nazývá **funkce hustoty** pokud

$$\int f \,\mathrm{d}m = 1.$$

Funkce hustoty indukují důležité pravděpodobnostní míry:

Věta (O pravděpodobnostní míře indukované funkcí hustoty)

Pokud je f funkce hustoty, pak je zobrazení $P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ definované

$$P(A) = \int_A f \,\mathrm{d}m, \qquad \text{pro každou } A \in \mathcal{B},$$

pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}$.

Důkaz.

Zřejmě platí, že $P(A) \geq 0$. Jelikož je $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ funkce hustoty, platí:

$$P(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m = \int f\,\mathbf{1}_R \,\mathrm{d}m = \int f \,\mathrm{d}m = 1.$$

Uvažujme spočetně mnoho vzájemně disjunktních Borelovských množin $A_1, A_2, \ldots$ a položme $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ a $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (B i B_n jsou Borelovské).

Jelikož $f\,\mathbf{1}_{B_n} \nearrow f\,\mathbf{1}_B$, z monotonní konvergence máme:

$$P(B_n) = \int_{B_n} f \,\mathrm{d}m = \int f\,\mathbf{1}_{B_n} \,\mathrm{d}m \nearrow \int f\,\mathbf{1}_B \,\mathrm{d}m = \int_B f \,\mathrm{d}m = P(B).$$

S využitím předchozího faktu dostáváme:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

To znamená, že P je σ-aditivní na $\mathcal{B}$. $\square$

Příklad (Funkce hustoty)

Mějme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} \cdot e^{\frac{-x}{40}} & \text{pokud } x \geq 0, \\ 0 & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Funkce f je zřejmě Borelovská. Dále platí:

$$\int f \,\mathrm{d}m = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{40} \cdot e^{\frac{-x}{40}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{\frac{-x}{40}}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{\frac{-b}{40}} - (-e^0)\right) = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{\frac{-b}{40}} = 1 - 0 = 1.$$

To znamená, že f je funkce hustoty.

Spojité pravděpodobnostní míry a veličiny

Definice (Spojitá pravděpodobnostní míra, spojitá náhodná veličina)

Mějme pravděpodobnostní míru $P\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$. Pokud existuje funkce hustoty f tak, že

$$P\big((-\infty, x]\big) = \int_{(-\infty,x]} f \,\mathrm{d}m, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

pak se P nazývá (**absolutně**) **spojitá pravděpodobnostní míra** (**s hustotou** f). Náhodná veličina X s rozdělením pravděpodobnosti $P_X\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ se nazývá (**absolutně**) **spojitá**, pokud je P_X absolutně spojitá pravděpodobnstní míra.

Poznámka: Pokud je f_X funkce hustoty spojité náhodné veličiny X, pak:

$$F_X(b) = P_X\big((-\infty, b]\big) = \int_{(-\infty,b]} f_X \,\mathrm{d}m,$$

$$P\big(\{a < X \leq b\}\big) = P_X\big((a, b]\big) = \int_{[a,b]} f_X \,\mathrm{d}m.$$

Věta (Chrakterizace spojitosti náhodné veličiny)

Náhodná veličina X je absolutně spojitá právě tehdy, když je F_X absolutně spojitá.

Důkaz.

Nechť X je spojitá náhodná veličina. To jest, existuje funkce hustoty f_X tak, že

$$\begin{aligned} F_X(x) - F_X(a) = P_X\big((a,x]\big) &= \int_{(a,x]} f_X \,\mathrm{d}m = 0 + \int_{(a,x]} f_X \,\mathrm{d}m \\ &= \int_{\{a\}} f_X \,\mathrm{d}m + \int_{(a,x]} f_X \,\mathrm{d}m = \int_{[a,x]} f_X \,\mathrm{d}m. \end{aligned}$$

Aplikací základní věty ihned dostáváme, že F_X je absolutně spojitá. Opačná strana: pokud je F_X absolutně spojitá reálná funkce, pak podle základní věty platí, že F_X má derivaci skoro všude, F'_X je Lebesgueovsky integrovatelná a platí

$$\int_{(-\infty,x]} F'_X \,\mathrm{d}m = F_X(x) - \lim_{a \to -\infty} F_X(a) = F_X(x) - 0 = F_X(x) = P_X\big((-\infty,x]\big)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$, což dokazuje, že F'_X je *hledaná funkce hustoty.* □

Důsledky vlastností spojitých náhodných veličin

Důsledky absolutní spojitosti F_X ($\textsc{Přednáška}$ 5):

$$P_X\big((a,b]\big) = P_X\big((a,b)\big) = P_X\big([a,b]\big) = P_X\big([a,b)\big) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{[a,b]} F'_X \,\mathrm{d}m.$$

Příklad (Prokázání slabší vlastnosti bez použití základní věty)

Označme f_X funkci hustoty X. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$P_X(\{x\}) = \int_{\{x\}} f_X \,\mathrm{d}m = \int f_X \,\mathbf{1}_{\{x\}} \,\mathrm{d}m = \int f_X(x) \cdot \mathbf{1}_{\{x\}} \,\mathrm{d}m = f_X(x) \cdot \int \mathbf{1}_{\{x\}} \,\mathrm{d}m$$
$$= f_X(x) \cdot \int \mathbf{1}_{\{x\}} \,\mathrm{d}m = f_X(x) \cdot m(\{x\}) = f_X(x) \cdot 0 = 0.$$

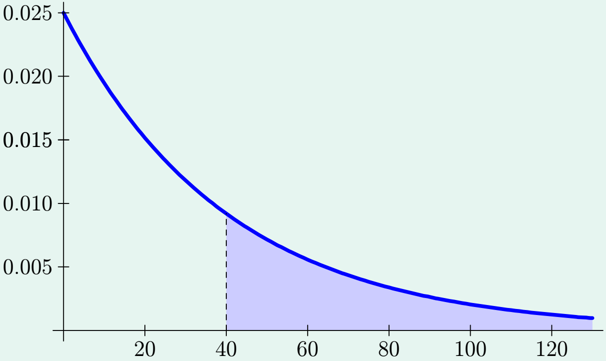
Z kritéria o spojitosti F_X zleva ($\textsc{Přednáška}$ 5) tedy máme, že F_X je spojitá.

Příklad (Počítání pravděpodobností pro spojité veličiny)

Mějme spojitou náhodnou veličinu X s hustotou f_X z předchozího příkladu:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} \cdot e^{\frac{-x}{40}} & \text{pokud } x \geq 0, \\ 0 & \text{pokud } x < 0, \end{cases} \qquad P_X(A) = \int_A f_X \,\mathrm{d}m.$$

$$\begin{aligned} P(\{X > 40\}) &= P_X\big([40, \infty)\big) \\ &= \int_{40}^{\infty} \frac{1}{40} \cdot e^{\frac{-x}{40}} \,\mathrm{d}x \\ &= e^{-1} \approx 0.368. \end{aligned}$$



Příklad (Vyjádření distribuční funkce z funkce hustoty a obráceně)

Mějme spojitou náhodnou veličinu X s hustotou f_X z předchozího příkladu:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} \cdot e^{\frac{-x}{40}} & \text{pokud } x \geq 0, \\ 0 & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Pak pro distribuční funkci F_X veličiny X platí $F_X(x) = 0$ pro každé $x < 0$ a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \frac{1}{40} \cdot e^{\frac{-t}{40}}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{\frac{-t}{40}}\right]_0^x = 1 - e^{\frac{-x}{40}}.$$

Vyjádření (nové) funkce hustoty g_X derivací distribuční funkce F_X:

$$g_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{40} \cdot e^{\frac{-x}{40}} & \text{pokud } x > 0, \\ 0 & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Všimněte si: $F'_X(0)$ není definovaná; aby byla g_X funkce tvaru $g_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stačí nadefinovat $g_X(0)$ (lze zvolit libovolně). Obě f_X a g_X jsou funkce hustoty pro X.

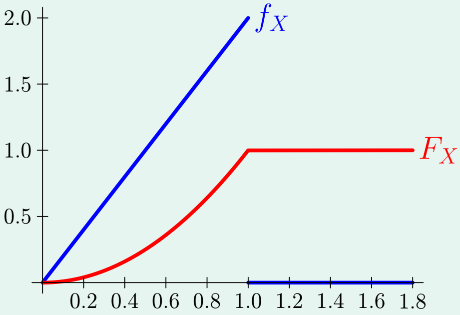
Příklad (Funkce hustoty s funkčními hodnotami ostře většími než 1)

Mějme spojitou náhodnou veličinu X s hustotou f_X, pro kterou platí:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{pokud } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro náhodnou veličinu X a její distribuční funkci F_X platí:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x < 0, \\ \displaystyle\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2 & \text{pokud } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{pokud } x \geq 1. \end{cases}$$



Věta (O rozdělení složené náhodné veličiny $g(X)$)

Pro náhodnou veličinu X a Borelovskou funkci g platí $P_{g(X)}(A) = P_X(\{g \in A\})$.

Důkaz.

Z toho, že složené zobrazení $g(X)$ je náhodná veličina (Přednáška 5) a z vlastností inverzních obrazů dostáváme:

$$\begin{aligned} P_{g(X)}(A) &= P(\{g(X) \in A\}) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \in A\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \{g \in A\}\}) = P(\{X \in \{g \in A\}\}) = P_X(\{g \in A\}), \end{aligned}$$

což je požadované tvrzení. □

Speciálně pro absolutně spojitou náhodnou veličinu X:

$$\boxed{P_{g(X)}(A) = \int_{\{g \in A\}} f_X \,\mathrm{d}m}\,, \qquad \boxed{F_{g(X)}(x) = \int_{\{g \leq x\}} f_X \,\mathrm{d}m}\,.$$

Pozor: Výsledná $g(X)$ nemusí být absolutně spojitá. (**!!**)

Věta (O funkci hustoty složené veličiny $g(X)$)

Pokud je X absolutně spojitá náhodná veličina s hustotu f_X a g je monotonní funkce, která má spojitou derivaci, pak $g(X)$ je absolutně spojitá veličina a její funkce hustoty $f_{g(X)}$ je ve tvaru

$$f_{g(X)}(x) = |(g^{-1})'(x)| \cdot f_X(g^{-1}(x)) = \left|\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}\right| \cdot f_X(g^{-1}(x)).$$

Důkaz.

Použitím předchozího tvrzení, inverzní funkce g^{-1} a vlastnosti F_X můžeme psát

$$F_{g(X)}(a) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(a)} f_X(x)\,\mathrm{d}x = F_X(g^{-1}(a)) - \lim_{y\to-\infty} F_X(y) = F_X(g^{-1}(a)),$$

a to za předpokladu, že g je rostoucí. V tom případě derivací získáme

$$f_{g(X)}(x) = F'_{g(X)}(x) = F'_X(g^{-1}(x)) = f_X(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x).$$

Pokud je g klesající, důkaz je analogický. Ostatní plyne z věty o inverzní funkci. $\square$

Příklad (Složené absolutně spojité veličiny)

Mějme absolutně spojitou náhodnou veličinu X s hustotou f_X, pro kterou platí:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{pokud } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Úkol: *Stanovte funkce hustoty veličin e^X a $-2X + 3$.*

Řešení:

1. Pro e^X a $x \in (1, e)$ máme (v ostatních případech je hustota nulová):

$$f_{e^X}(x) = (\ln(x))' \cdot f_X(\ln(x)) = \frac{1}{x} \cdot f_X(\ln(x)) = \frac{f_X(\ln(x))}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}.$$

2. Pro $-2X + 3$ a $x \in (1, 3)$ máme (v ostatních případech je hustota nulová):

$$f_{-2X+3}(x) = \left|\left(\frac{3-x}{2}\right)'\right| \cdot f_X\left(\frac{3-x}{2}\right) = 0.5 \cdot 2\left(\frac{3-x}{2}\right) = \frac{3-x}{2}.$$

Poznámka: Předchozí tvrzení lze zobecnit i pro funkci g, která má spojitou první derivaci, není obecně monotonní, ale je *po částech monotonní.*

Očekávané hodnoty

Význam:

- *střední hodnota* náhodné veličiny v pravděpodobnostním prostoru;
- další charakteristiky (*rozptyl*...) jsou střední hodnoty odvozených veličin;
- pro diskrétní veličiny jsme zavedli $E(X)$.

Dva základní přístupy zavedení:

- *inženýrský* (netechnický) $\times$ *matematický* (teoretický);
- inženýrský přístup: pro diskrétní a absolutně spojité veličiny dvě definice;
- matematický přístup: zavedení pomocí obecného pojmu integrál.

Nevýhody inženýrského přístupu:

- do definice „není dostatečně vidět“ (zejména v případě spojitých veličin);
- $E(X)$ je definovaná pomocí hustoty (nebo pravděpodobnostní funkce);
- neřeší případy, pokud X není ani diskrétní, ani absolutně spojitá.

Definice (Integrál X vzhledem k pravděpodobnostní míře P)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ Pak **integrál** je zobrazení, které každé nezáporné náhodné veličině $X\colon \Omega \to [0, \infty)$ v tomto prostoru přiřazuje číslo

$$\boxed{\int X \,\mathrm{d}P} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

tak, že pro každé číslo $c \in [0, \infty)$, každý jev $A \in \mathcal{F}$ a libovolné nezáporné náhodné veličiny X, Y, X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ platí:

1. $\int \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}P = P(A)$;
2. $\int (X + Y) \,\mathrm{d}P = \int X \,\mathrm{d}P + \int Y \,\mathrm{d}P$ a $\int cX \,\mathrm{d}P = c \int X \,\mathrm{d}P$; (**linearita**)
3. pokud $X_n \nearrow X$, pak $\int X_n \,\mathrm{d}P \nearrow \int X \,\mathrm{d}P$. (**monotonní konvergence**)

Zobecnění (pro všechny X, nejen nezáporné): Pro X definujeme

$$X^+(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{pokud } X(\omega) \geq 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad X^-(\omega) = \begin{cases} -X(\omega) & \text{pokud } X(\omega) < 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak zavádíme $\boxed{\int X \,\mathrm{d}P = \int X^+ \,\mathrm{d}P - \int X^- \,\mathrm{d}P}$ (rozdíl *pozitivní* a *negativní* části).

Očekávané hodnoty náhodných veličin

Definice (Očekávaná hodnota, angl.: *expected value*)

Mějme náhodnou veličinu $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pak **očekávaná hodnota** X vzhledem k $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ je

$$E(X) = \int X \,\mathrm{d}P.$$

Odvozené charakteristiky:

- **střední hodnota** (angl.: *mean*): $\mu_X = E(X)$;
- **rozptyl** (angl.: *variance*): $\sigma_X^2 = E\big((X - \mu_X)^2\big)$;
- **směrodatná odchylka** (angl.: *standard deviation*): $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$.

Pozorování:

- Obecně zavedené $E(\cdots)$ je opět *lineární operátor.*

Věta („Zákon nevědomého statistika“)

Mějme náhodnou veličinu $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *v pravděpodobnostním prostoru* $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$ *a Borelovskou funkci* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Pak platí:*

1. $\int g(X)\,\mathrm{d}P = \int g\,\mathrm{d}P_X$*;*
2. $\int g(X)\,\mathrm{d}P = \sum_{x\in\mathbb{R}}\bigl(g(x)\cdot P(\{X=x\})\bigr)$ *pokud je* X *diskrétní;*
3. $\int g(X)\,\mathrm{d}P = \int g\cdot f_X\,\mathrm{d}m$ *pokud je* X *absolutně spojitá s hustotu* f_X*.*

Důkaz (náznak).

První tvrzení plyne užitím faktu, že g je náhodná veličina v $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X\rangle$ a užitím faktu, že $P_X(\{g\in A\}) = P(\{g(X)\in A\})$, viz Billingsley (Věta 16.13).

Pokud je X diskrétní, existuje spočetná $C\subseteq\mathbb{R}$ tak, že $P_X(C)=1$. Tvrzení se prokáže užitím $\int \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}P = \sum_{x\in C}(\mathbf{1}_A(x)\cdot P_X(\{x\}))$, viz Billingsley (Věta 16.9).

Poslední část tvrzení plyne užitím faktu, že $\int \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}P = P(A) = \int_A f_X\,\mathrm{d}m$, viz Billingsley (Věta 16.11). □

Důsledky pro očekávané hodnoty spojitých veličin

Mějme absolutně spojitou náhodnou veličinu X s funkcí hustoty f_X.

Užitím předchozí věty dostáváme:

$$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Speciálně dostáváme:

- **střední hodnota**:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

- **rozptyl**:

$$\sigma^2 = E\big((X-\mu)^2\big) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklad (Střední hodnota a rozptyl spojité náhodné veličiny)

Mějme spojitou náhodnou veličinu X s hustotou f_X, pro kterou platí:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{pokud } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnotu X vyjádříme následovně:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 2 \cdot x\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Z linearity operátoru E dostáváme:

$$\sigma_X^2 = E\big((X - \mu_X)^2\big) = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot 2 \cdot x\,\mathrm{d}x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Kvantilová funkce

Definice (Kvantilová funkce)

Mějme náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F_X, pak se $F_X^- \colon (0,1) \to \mathbb{R}$, kde

$$F_X^-(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, p \leq F_X(x)\}.$$

nazývá **kvantilová funkce** (angl.: *quantile function*)

Věta (Základní vlastnosti kvantilové funkce)

Pro kvantilovou funkci F_X^- náhodné veličiny X s distribuční funkcí F_X platí:

1. $F_X^-(p)$ *je nejmenší prvek množiny* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, p \leq F_X(x)\}$;
2. $F_X^-(F_X(a)) \leq a$ *pro každé* $a \in \mathbb{R}$;
3. $p \leq F_X(F_X^-(p))$ *pro každé* $p \in (0,1)$;
4. $F_X^-(p) \leq a$ *právě tehdy, když* $p \leq F_X(a)$;
5. *pokud je* F_X *spojitá a rostoucí, pak* $F_X^- = F_X^{-1}$.

Důkaz.

Sporem, kdyby $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, p \leq F_X(x)\}$ neměla nejmenší prvek, pak by existovala klesající posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ taková, že $p \leq F_X(x_i)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$ a $\lim_{i\to\infty} x_i \notin A$. Potom ale $p \leq \lim_{i\to\infty} F_X(x_i)$. Jelikož je F_X spojitá zprava, $p \leq \lim_{i\to\infty} F_X(x_i) = F_X(\lim_{i\to\infty} x_i)$, tedy $\lim_{i\to\infty} x_i \in A$, což je spor.

Druhé tvrzení plyne z toho, že triviálně $a \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, F_X(a) \leq F_X(x)\}$.

Třetí tvrzení plyne z prvního, protože $F_X^-(p) \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, p \leq F_X(x)\}$.

Čtvrté tvrzení prokážeme pomocí předchozích dvou: pokud $F_X^-(p) \leq a$, pak $F_X(F_X^-(p)) \leq F_X(a)$, protože F_X je neklesající; užitím předchozího tedy $p \leq F_X(F_X^-(p)) \leq F_X(a)$. Obráceně, pokud $p \leq F_X(a)$, pak $F_X^-(p) \leq F_X^-(F_X(a))$, protože F^- je rovněž neklesající; užitím předchozího dostáváme $F_X^-(p) \leq F_X^-(F_X(a)) \leq a$.

Poslední tvrzení je důsledkem toho, že pokud je F_X spojitá a rostoucí, pak je invertovatelná a tím pádem nejmenší prvek $\{x \in \mathbb{R} \,|\, p \leq F_X(x)\}$ je roven $F_X^{-1}(p)$. Odtud dostáváme, že $F_X^-(p) = F_X^{-1}(p)$. □

Percentily, kvartily, medián

Definice (Percentil, kvantil, angl.: *percentile, quantile*)

Mějme náhodnou veličinu X s kvantilovou funkcí F_X^- a $p \in (0,1)$. Hodnotu $F_X^-(p)$ nazýváme $(100p)\%$ **percentil** nebo **kvantil s hladinou p** veličiny X.

Vlastnosti:

- $P(\{X \leq F_X^-(p)\}) = F_X(F_X^-(p)) \geq p$ pro libovolnou X;
- $P(\{X \leq F_X^-(p)\}) = F_X(F_X^-(p)) = p$ pokud je F_X spojitá; v důsledku:

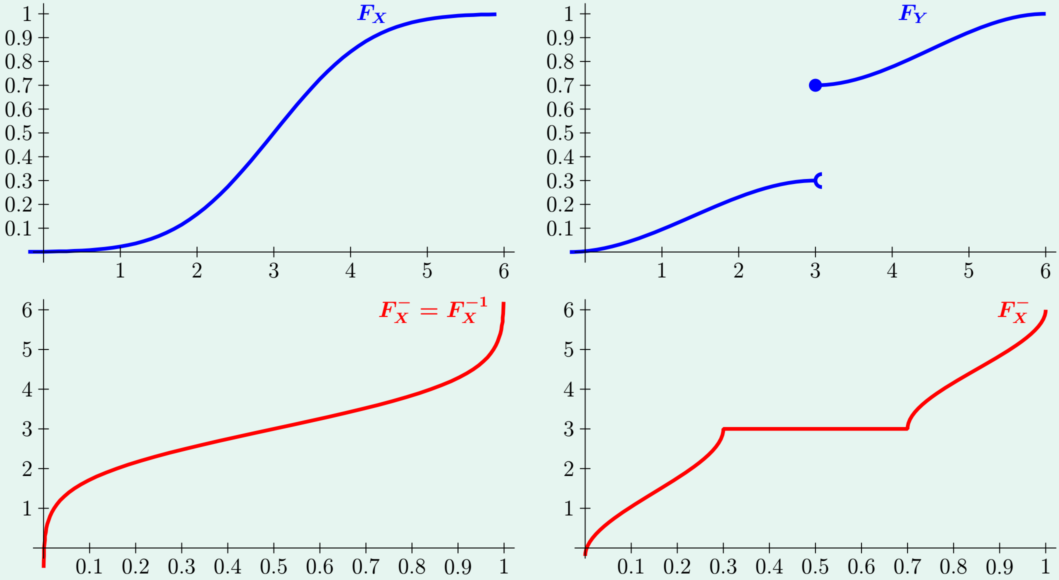
$$\int_{-\infty}^{F_X^-(p)} f_X(x)\,\mathrm{d}x = p\,.$$

pokud je X absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f_X.

Terminologie a značení:

- Pokud je X zřejmá z kontextu, píšeme π_p místo $F_X^-(p)$;
- **kvartily** (angl.: *quartile*): $\pi_{0.25}$, $\pi_{0.5}$, $\pi_{0.75}$; **medián** (angl.: *median*): $\pi_{0.5}$.

Příklady (Hodnoty kvantilových funkcí)



Příklad (Hledání percentilů spojité náhodné veličiny, *začátek*)

Mějme spojitou náhodnou veličinu X s hustotou f_X, pro kterou platí:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{pokud } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak distribuční funkce F_X je ve tvaru:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{pokud } 0 \leq x < 1, \\ 1 - \dfrac{(2-x)^2}{2} & \text{pokud } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{pokud } 2 \leq x. \end{cases}$$

Abychom našli například hodnoty $F_X^-(0.32)$ a $F_X^-(0.92)$, musíme vyřešit:

$$F_X(\pi_{0.32}) = \frac{\big(F_X^-(0.32)\big)^2}{2} = 0.32, \quad F_X(\pi_{0.92}) = 1 - \frac{\big(2 - F_X^-(0.92)\big)^2}{2} = 0.92.$$

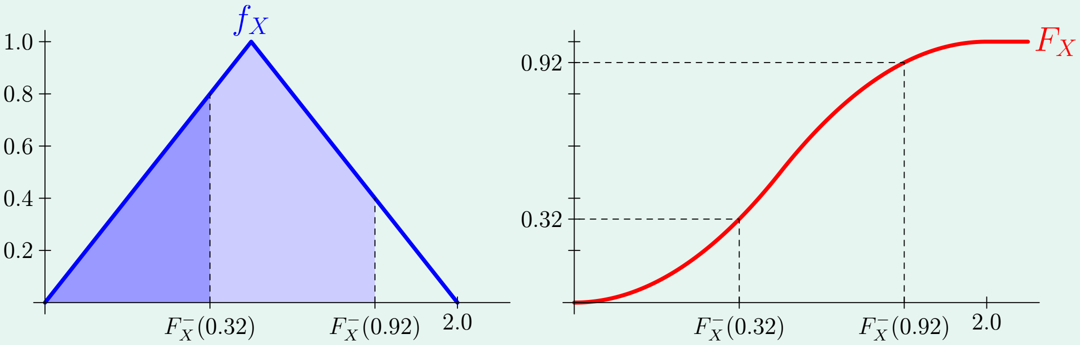
Příklad (Hledání percentilů spojité náhodné veličiny, *dokončení*)

Vyjádřením $F_X^-(0.32)$ a $F_X^-(0.92)$ ze vztahů

$$F_X(\pi_{0.32}) = \frac{\left(F_X^-(0.32)\right)^2}{2} = 0.32, \quad F_X(\pi_{0.92}) = 1 - \frac{\left(2 - F_X^-(0.92)\right)^2}{2} = 0.92.$$

dostáváme: $F_X^-(0.32) = \sqrt{2 \cdot 0.32}$ a $F_X^-(0.92) = 1.6$.

Grafický význam:



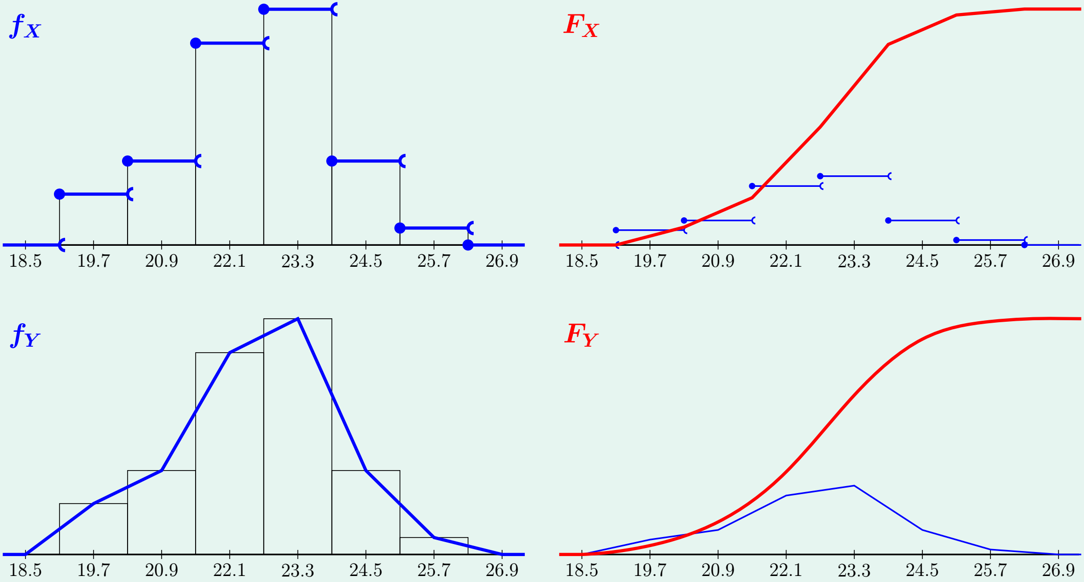
Příklad (Motivace pro empirické rozdělení)

Uvažujme výběrový soubor obsahující hmotnosti 40 produktů stejného typu:

22.38	21.55	22.20	22.55	22.87	24.40	21.65	23.30	23.58	22.37
19.39	23.86	23.28	24.63	22.35	24.23	23.95	23.21	22.11	21.42
25.92	24.00	22.97	23.43	22.72	22.90	23.32	23.58	21.37	22.67
19.84	21.97	20.11	21.06	20.57	22.48	23.60	22.45	21.00	23.82

interval	meze	f_i	h_i	střed
$(19.1, 20.3)$	$(19.39, 20.11)$	3	0.063	19.7
$(20.3, 21.5)$	$(20.57, 21.42)$	5	0.104	20.9
$(21.5, 22.7)$	$(21.55, 22.67)$	12	0.250	22.1
$(22.7, 23.9)$	$(22.72, 23.86)$	14	0.292	23.3
$(23.9, 25.1)$	$(23.95, 24.63)$	5	0.104	24.5
$(25.1, 26.3)$	$(25.92, 25.92)$	1	0.021	25.7

Příklad (Dva způsoby zavedení funkce hustoty z empirických dat)



Příklad (Motivace pro uniformní rozdělení)

Uvažujme náhodnou veličinu X, která označuje výsledek náhodného výběru jednoho bodu z reálného intervalu $(a, b]$, přitom všechny body mají stejnou šanci být zvoleny.

Otázka: *Jak vypadá distribuční funkce X?*

Analýza: Pravděpodobnost, že bod je zvolen z podintervalu $(a, x]$ je

$$P\big(\{X \in (a, x]\}\big) = \frac{x-a}{b-a} = P\big(\{a < X \leq x\}\big) = F_X(x),$$

kde F_X je hledaná distribuční funkce ve tvaru

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pokud } a < x \leq b, \\ 1 & \text{pokud } x > b. \end{cases}$$

Důsledek: X je spojitá veličina, funkci hustoty stanovíme jako F'_X.

Uniformní rozdělení

Definice (Náhodná veličina s uniformním rozdělením)

Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má **uniformní rozdělení** (angl.: *uniform distribution*) pokud existují $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $a < b$ a f_X je ve tvaru

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad \text{pokud } a < x \leq b,$$

a $f_X(x) = 0$ jinak; zkráceně značíme, že X má rozdělení $U(a, b)$.

Poznámky:

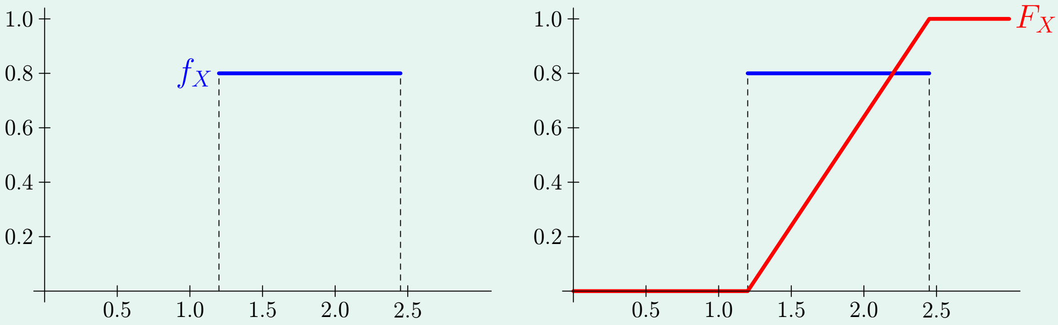
- rozdělení má dva parametry: meze intervalu $(a, b]$;
- důsledek spojitosti F_X: interval lze chápat také jako $[a, b]$, $(a, b), \ldots$
  - obecně lze z $[a, b]$ „vyjmout spočetně mnoho bodů“,
  - distribuční funkce F_X bude na intervalu $[a, b]$ stále ve tvaru $F_X(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$,
- neplést s diskrétním uniformním rozdělením (PŘEDNÁŠKA 6).

Příklad (Distribuční funkce a funkce hustoty pro $U(a, b)$)

Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením $U(1.2, 2.45)$. Potom je f_X ve tvaru:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1.25} = 0.8, \qquad \text{pokud } 1.2 < x \leq 2.45$$

a $f_X(x) = 0$ pro $x \leq 1.2$ nebo $x > 2.45$.



Poznámka: Pokud položíme například $f_X(1.2) = 10$, nezměníme tím F_X ani P_X.

Věta (Střední hodnota uniformní veličiny)

Pokud má X rozdělení $U(a,b)$, pak $\mu_X = \dfrac{b+a}{2}$.

Důkaz.

Integrací $x \cdot f_X(x)$ dostáváme:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{(b+a)\cdot(b-a)}{2\cdot(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

□

Věta (Rozptyl uniformní veličiny)

Pokud má X *rozdělení* $U(a,b)$, *pak* $\sigma_X^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Důkaz.

Nejprve vyjádříme druhý moment:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)}.$$

S využitím předchozího pozorování a linearity operátoru E dostáváme:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$\square$

Opakování: Počet změn ve spojitém jednotkovém prostoru

Definice (Náhodná veličina s Poissonovým rozdělením)

Náhodná veličina X má **Poissonovo rozdělení** pokud existuje $\lambda > 0$ tak, že její pravděpodobnostní funkce f_X je ve tvaru

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{pro } x = 0, 1, \ldots$$

a $f_X(x) = 0$ jinak.

Interpretace:

- parametr λ: průměrný počet změn v jednotce uvažovaného prostoru,
- nutné předpoklady (přibližný Poissonův proces, Přednáška 6):
  - počty změn v disjunktních podintervalech jsou nezávislé;
  - $\lambda h \approx$ pravděpodobnost právě jedné změna v (dost malém) podintervalu délky h;
  - pravděpodobnost dvou a více změn v (dost malém) podintervalu je ≈ 0.

Příklad (Modifikace problému: čekání na první změnu, *začátek*)

Problém: Uvažujeme přibližný Poissonův proces s parametrem λ, ale:

- místo pozorování *počtu změn* v intervalu (diskrétní náhodná veličina)
- budeme pozorovat *dobu uplynulou mezi změnami* (spojitá náhodná veličina W).

Otázka: *Jaké má náhodná veličina W rozdělení?*

Analýza:

- W je zřejmě spojitá a nabývá hodnot z intervalu $[0, \infty)$,
- zjednodušení úlohy: místo pozorování „doby mezi změnami“ budeme pozorovat *dobu od začátku procesu do výskytu první změny* za předpokladu, že se jedná o přibližný Poissonův proces s parametrem λ,
- vyjádříme distribuční funkci F_W náhodné veličiny W.

Jelikož *doba čekání je nezáporná*, zřejmě $F_W(w) = 0$ pro každé $w < 0$.

Příklad (Modifikace problému: čekání na první změnu, *dokončení*)

Úvaha: Pravděpodobnost, že doba čekání na první změnu bude delší než $w \geq 0$ je rovna pravděpodobnosti, že v intervalu $[0, w]$ nedojde k žádné změně.

To znamená, že pro každé $w \geq 0$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} F_W(w) = P(\{W \leq w\}) &= 1 - P(\{W > w\}) \\ &= 1 - P(\text{„žádná změna v intervalu } [0, w]\text{“}) \\ &= 1 - P(\{X = 0\}) = 1 - f_X(0), \end{aligned}$$

kde X je diskrétní náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda \cdot w$ (průměrný počet změn v intervalu délky w) a f_X je její pravděpodobnostní funkce:

$$f_X(x) = \frac{(\lambda \cdot w)^x \cdot e^{-\lambda \cdot w}}{x!}, \quad \text{odtud} \quad f_X(0) = \frac{1 \cdot e^{-\lambda \cdot w}}{1} = e^{-\lambda \cdot w}.$$

Důsledky:

- distribuční funkce: $F_W(w) = 1 - e^{-\lambda \cdot w}$;
- funkce hustoty: $f_W(w) = F'_W(w) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot w}$.

Exponenciální rozdělení

Definice (Náhodná veličina s exponenciálním rozdělením)

Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má **exponenciální rozdělení** (angl.: *exponential distribution*) pokud existuje $\theta > 0$ tak, že f_X je ve tvaru

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{\frac{-x}{\theta}}, \qquad \text{pokud } x \geq 0,$$

a $f_X(x) = 0$ jinak.

Poznámky:

- parametr θ je převrácená hodnota (výchozího) parametru λ,
- intuice: θ je „průměrná doba čekání na změnu“ (později dokážeme),
- interpretace: $P(\{a \leq X \leq b\})$ pravděpodobnost, že první změna (od počátku pozorování) nastane v časovém rozmezí $[a, b]$.

Věta (Střední hodnota veličiny s exponenciálním rozdělením)

Pokud má X exponenciální rozdělení s parametrem θ, pak $\mu_X = \theta$.

Důkaz.

Nejprve si všimněme, že $-e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot (x+\theta)$ je primitivní funkcí k $\frac{x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$ jelikož

$$\left(-e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot (x+\theta)\right)' = -e^{-\frac{x}{\theta}} + \left(\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\right)(x+\theta) = \frac{x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

Odtud využitím základní věty integrálního počty a L'Hôpitalova pravidla dostáváme

$$\mu_X = E(X) = \int_0^\infty \frac{x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot (x+\theta)\right]_0^\infty = \theta + \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot (x+\theta)\right)$$

$$= \theta + \lim_{x\to\infty} \frac{x+\theta}{-e^{\frac{x}{\theta}}} = \theta + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{\theta} \cdot e^{\frac{x}{\theta}}} = \theta + 0 = \theta.$$

$\square$

Poznámka: θ je vskutku *střední doba čekání na první změnu.*

Věta (Rozptyl veličiny s exponenciálním rozdělením)

Pokud má X exponenciální rozdělení s parametrem θ, pak $\sigma_X^2 = \theta^2$.

Důkaz.

Použitím pravidla o derivaci součinu na $\left(-e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot (x^2 + 2\theta x + 2\theta^2)\right)'$ dostáváme

$$-e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot 2(x+\theta) + \left(\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\right)(x^2 + 2\theta x + 2\theta^2) = \frac{x^2}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

Analogicky jako v předchozím důkazu proto máme:

$$E(X^2) = \int_0^\infty \frac{x^2}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \, \mathrm{d}x = \left[-e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot (x^2 + 2\theta x + 2\theta^2)\right]_0^\infty = 2\theta^2.$$

Z linearity operátoru E a předchozích pozorování dostáváme:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2.$$

□

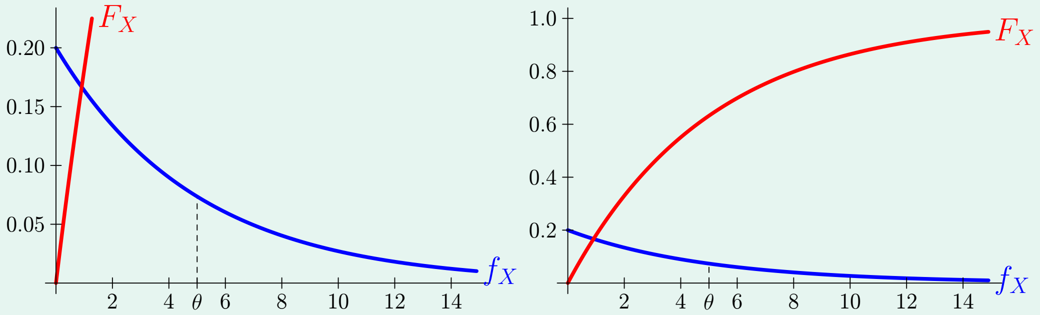
Důsledek: Směrodatná odchylka exponenciální veličiny s parametrem θ je $\sigma_X = \theta$.

Příklad (Distribuční funkce exponenciální veličiny)

Mějme náhodnou veličinu X, která má exponenciální rozdělení s parametrem $\mu = \theta$. Pak distribuční funkce F_X náhodné veličiny X je ve tvaru:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x}{\theta}} & \text{pokud } x \geq 0, \\ 0 & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Příklad: Pro X s parametrem $\theta = 5$ máme:



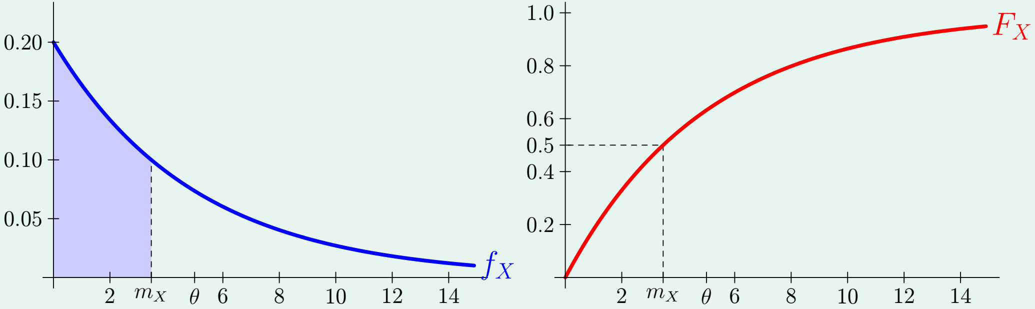
Příklad (Střední hodnota $\neq$ medián)

Mějme exponenciální náhodnou veličinu X danou parametrem $\mu = \theta = 5$.
Medián $m_X = F_X^{-}(0.5)$ náhodné veličiny X stanovíme vyřešením

$$F_X(m_X) = 1 - e^{\frac{-m_X}{\theta}} = 0.5.$$

Zlogaritmováním obou stran dostáváme $m_X = -\theta \cdot \ln(0.5) \approx 3.466$.

Grafický význam:



Příklad (Délka čekání na zákazníka)

Problém: Na pobočku dochází v průměru dvacet záklazníků za hodinu. Zajímáme se o dobu čekání na zákazníka.

Otázka: *Jaká je pravděpodobnost, že na prvního budeme čekat víc jak* 5 *minut?*

Analýza: Pro zjednodušení předpokládáme, že záklazníci na pobočku docházejí v souladu s přibližným Poissonovým procesem s parametrem $\lambda = \frac{1}{3}$ (zvolená jednotka jsou minuty).

Do jaké míry je zjednodušující ponecháme stranou (nemáme další informace, ale lze předpokládat, že průměrný počet změn se mění v čase).

Řešení: Nechť X označuje dobu čekání na prvího zákazníka. Náhodná veličina X má geometrické rozdělení s parametrem $\theta = \dfrac{1}{\lambda} = 3$. Potom tedy $f_X(x) = \dfrac{1}{3} \cdot e^{\frac{-x}{3}}$ a platí

$$P(\{X > 5\}) = \int_5^\infty \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{-x}{3}} \,\mathrm{d}x = e^{\frac{-5}{3}} \approx 0.1889.$$

Příklad (Zobecněný problém čekání na několik změn, *začátek*)

Problém: Předpokládejme, že uvažujeme přibližný Poissonův proces s průměrným počtem změn za jednotku času rovným λ. Zajímáme se o čekání na několik změn.

Otázka: *Nechť W označuje dobu čekání na prvních α změn. Jak vypadá distribuční funkce a funkce hustoty spojité náhodné veličiny W?*

Analýza: Analogicky jako v případě čekání na jednu změnu můžeme psát

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(\{W \leq w\}) = 1 - P(\{W > w\}) \\ &= 1 - P(\text{„méně jak } \alpha \text{ změn v intervalu } [0, w]\text{“}) \\ &= 1 - P(\{X < \alpha\}) = 1 - F_X(\alpha - 1), \end{aligned}$$

kde X je diskrétní náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda \cdot w$ (průměrný počet změn v intervalu délky w) a F_X je její distribuční funkce:

$$F_X(n) = \sum_{x=0}^{n} f_X(n) = \sum_{x=0}^{n} \frac{(\lambda \cdot w)^x \cdot e^{-\lambda \cdot w}}{x!}.$$

Příklad (Zobecněný problém čekání na několik změn, *dokončení*)

Z předchozího tedy dostáváme vyjádření pro distribuční funkci F_W veličiny W:

$$F_W(w) = \boxed{1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda \cdot w)^k \cdot e^{-\lambda \cdot w}}{k!}}.$$

Funkci hustoty f_W vyjádříme jako derivaci F_W. Pro $w > 0$ máme:

$$f_W(w) = F'_W(w) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot w} - e^{-\lambda \cdot w} \cdot \sum_{k=1}^{\alpha-1} \left(\frac{k \cdot (\lambda \cdot w)^{k-1} \cdot \lambda}{k!} - \frac{(\lambda \cdot w)^k \cdot \lambda}{k!} \right)$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot w} - e^{-\lambda \cdot w} \cdot \left(\lambda - \frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot w)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right) = \boxed{\frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot w)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot w}}.$$

Terminologie: W s f_W v předchozím tvaru má tzv. **Erlangovo rozdělení**.

Omezení: $\alpha > 0$ je celé číslo, obecně chceme $\alpha \in (0, \infty)$.

Speciální funkce Γ

Pro každé $t > 0$ definujeme hodnotu **funkce Γ** (**gama**) v bodě t následovně:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x \,.$$

Poznámky:

- $\Gamma(t)$ je pozitivní pro každé $t > 0$ protože $x^{t-1} \cdot e^{-x}$ je pozitivní;
- primitivní funkce k funkci $f(x) = x^{t-1} \cdot e^{-x}$ *není elementární funkce*;
- při výpočtech hodnot $\Gamma(t)$ se používají numerické aproximace;
- Γ lze rozšířit na komplexní čísla (nebudeme potřebovat).

Implementace ve standardních knihovnách C99 (ISO/IEC 9899)

```
#include <math.h>
double tgamma (double x);
```

V `gcc` se překládá s parametrem `-std=c99` a sestavuje s parametrem `-lm`.

Věta (Funkce Γ jako zobecnění faktoriálu)

Pro každé přirozené číslo n *platí* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Důkaz.

Pro každé přirozené číslo $n > 1$ můžeme integrací *per partes* a konečně mnoha aplikacemi L'Hôpitalova pravidla (protože n je přirozené číslo) vyjádřit

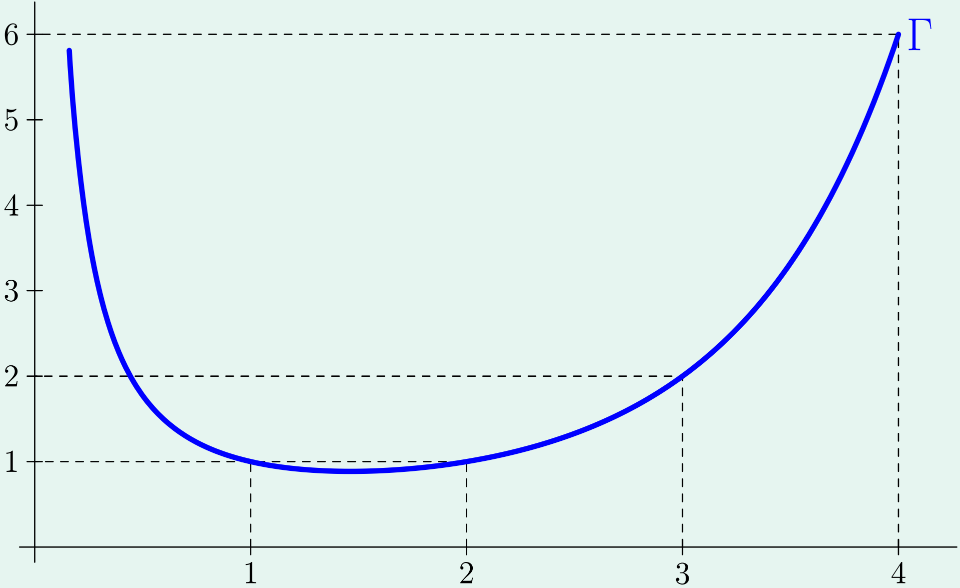
$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= \int_0^\infty x^{n-1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[x^{n-1} \cdot (-e^{-x})\right]_0^\infty + \int_0^\infty (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{x\to\infty}\bigl(x^{n-1} \cdot (-e^{-x})\bigr) - 0 + (n-1) \cdot \int_0^\infty x^{n-2} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{-e^{x}} + (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = 0 + (n-1) \cdot \Gamma(n-1).\end{aligned}$$

Nyní stačí ukázat, že $\Gamma(1) = 1$. To ale platí, protože

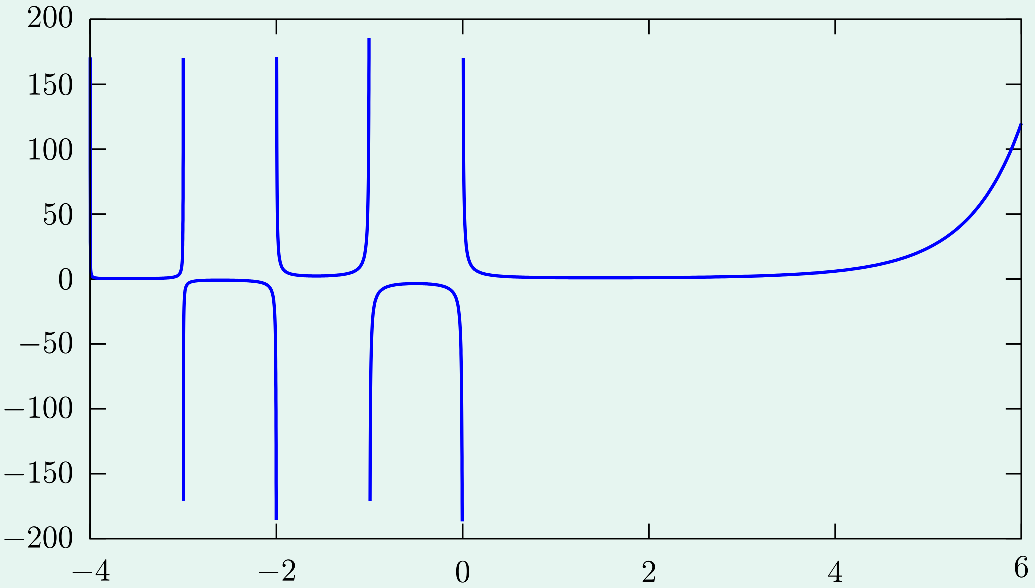
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1 + \lim_{x\to\infty} -e^{-x} = 1 + 0 = 1.$$

$\square$

Příklad (Graf funkce Γ na intervalu $[0, 1]$)



Příklad (Graf funkce Γ na intervalu $[-4, 6]$)



Rozdělení Γ

Definice (Náhodná veličina s rozdělením Γ, angl.: *gamma distribution*)

Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má **rozdělení Γ (gama)** pokud existují reálná čísla $\theta > 0$ a $\alpha > 0$ tak, že f_X je ve tvaru

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\theta}}, \qquad \text{pokud } x \geq 0,$$

a $f_X(x) = 0$ jinak.

Funkce hustoty je ozvozena z funkce hustoty Erlangova rozdělení:

$$f_X(x) = \frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot x} = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)! \cdot \theta^\alpha} \cdot e^{\frac{-x}{\theta}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\theta}}.$$

Distribuční funkce je ve tvaru

$$\boxed{F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \int_0^\infty y^{x-1} \cdot e^{-y}\,\mathrm{d}y}\ .$$

Příklad (Funkce hustoty rozdělení Γ je dobře definovaná)

Využitím substituční metody řešení integrálu pro $y = \theta \cdot x$ můžeme psát

$$\int_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^\alpha}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{\frac{-x}{\theta}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{(\theta\cdot x)^{\alpha-1}\cdot e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^\alpha}\cdot\theta\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^\infty y^{\alpha-1}\cdot e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1.$$

To znamená, že f_X v předchozí definice je korektně zavedená funkce hustoty.

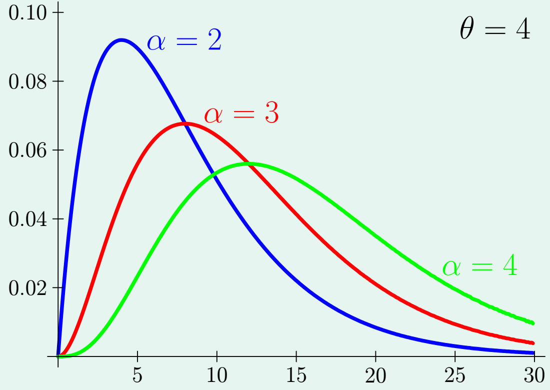
Věta (Střední hodnota a rozptyl veličiny s rozdělením Γ)

Pokud má X rozdělení Γ s parametry θ a α, pak $\mu_X = \alpha\cdot\theta$ a $\sigma_X^2 = \alpha\cdot\theta^2$.

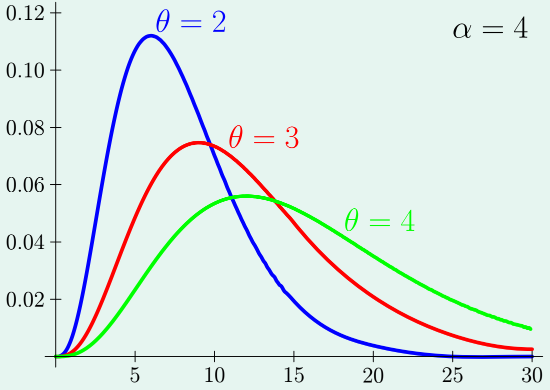
Speciální případy rozdělení Γ:

- $\alpha = 1$ (exponenciální rozdělení);
- $\theta = 2$, $\alpha = \frac{r}{2}$, kde r je přirozené číslo (χ^2 rozdělení, Přednáška 9).

Příklad (Grafy funkcí hustoty rozdělení Γ pro různé parametry)



θ pevně zvolené



α pevná zvolená

Interpretace posunu křivek pro vzrůstající θ:

Pokud se zmenšuje průměrný počet změn v jednotkovém intervalu, pak lze očekávat prodloužení čekací doby na výskyt α změn.

Příklad (Délka čekání na několik zákazníků)

Problém: Na pobočku dochází v průměru třicet záklazníků za hodinu. Zajímáme se o dobu čekání na několik zákazníků.

Otázka: *Jaká je pravděpodobnost, že na první dva budeme čekat víc jak* 5 *minut?*

Analýza: Jako v předchozí situaci, uvažujeme X rozdělením Γ daným parametry $\alpha = 2$ (čekáme na dva zákazníky) a $\theta = 2$ (průměrná čekací doba na jednoho zákazníka jsou 2 minuty).

Řešení: Využitím faktu, že $(-2) \cdot e^{\frac{-x}{2}} \cdot (x + 2)$ je primitivní funkcí k $x \cdot e^{\frac{-x}{2}}$ máme

$$P(\{X > 5\}) = \int_5^\infty \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \mathrm{d}x = \int_5^\infty \frac{x^{2-1} \cdot e^{\frac{-x}{2}}}{\Gamma(2) \cdot 2^2} \mathrm{d}x = \int_5^\infty \frac{x \cdot e^{\frac{-x}{2}}}{4} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[(-2) \cdot e^{\frac{-x}{2}} \cdot (x + 2)\right]_5^\infty = \frac{7}{2} \cdot e^{\frac{-5}{2}} \approx 0.287.$$

Přednáška 7: Závěr

Pojmy:

- indikátorová funkce, Lebesgueův integrál, absolutní spojitost
- funkce hustoty, (absolutně) spojitá náhodná veličina
- očekávané hodnoty, střední hodnota, rozptyl, kvantilová funkce
- empirické, uniformní, exponentiální, gama rozdělení

Použité zdroje:

Billingsley, P.: *Probability and Measure*
John Wiley & Sons; 3. vydání, ISBN 978–0–471–00710–4.

Capinski M., Zastawniak T. J.: *Probability Through Problems*
Springer 2001, ISBN 978–0–387–95063–1.

Hogg R. V., Tanis E. A.: *Probability and Statistical Inference*
Prentice Hall; 7. vydání 2005, ISBN 978–0–13–146413–1.