Kombinatorika, posloupnosti a řady

Kombinatorika
Zabývá se tvořením skupin po k prvcích z množiny, která obsahuje n prvků.

k-členná **variace** z n prvků je uspořádaná (tj. záleží na pořadí) k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.
Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Permutace je speciální případ variace. Permutace z n prvků je n-členná variace z těchto prvků. Snadno vidíme, že počet permutací z n prvků $P(n) = n!$.

k-členná **kombinace** z n prvků je neuspořádaná (tj. nezáleží na pořadí) k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.
Počet $K(k,n)$ všech k-členných kombinací z n prvků je

$$K(k,n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tento počet také označujeme **kombinačním číslem** $\binom{n}{k}$.

k-členná **variace s opakováním** z n prvků je uspořádaná (tj. záleží na pořadí) k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.
Počet $V'(k,n)$ všech k-členných variací s opakováním z n prvků je

$$V'(k,n) = n^k.$$

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.
Počet $P'(k1, k2, \dots, kn)$ permutací z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \dots, k_n$-krát, je

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!k_2!\dots k_n!}.$$

k-členná **kombinace s opakováním** z n prvků je neuspořádaná (tj. nezáleží na pořadí) k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.
Počet $K'(k,n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Úkoly:

1. Určete, kolika způsoby je možno seřadit u startovací čáry osm závodních automobilů do dvou řad po čtyřech vozech, jestliže

   a) v každé řadě záleží na pořadí;

   b) na pořadí v řadách nezáleží.

   [40 320; 70]

2. V kupé železničního vagónu jsou proti sobě dvě lavice po pěti místech. Z deseti cestujících si čtyři přejí sedět ve směru jízdy, tři proti směru a zbývajícím třem je to lhostejné. Určete, kolika způsoby se mohou rozsadit.

   [43 200]

3. Kolika způsoby lze uspořádat množinu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

   - V kolika případech bude prvek b před prvkem c?
   - V kolika případech je prvek b na prvním místě a zároveň prvek c není na posledním místě?
   - V kolika případech nebude prvek c ani první, ani poslední?

   [720; 360; 96; 480]

4. Na maturitním večírku je 15 hochů a 12 děvčat. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat čtyři taneční páry.

   [16 216 200]

5. Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků)

   a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8×8;

   b) na libovolné dvě řady šachovnice 8×8.

   [64 864 800; $\binom{8}{2}$64864800]

6. V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit

   a) 15 pohledů;

   b) 51 pohledů;

   c) 8 různých pohledů.

   [1 307 504; 14 783 142 650; 45]

7. Tři děvčata – Anna, Dana a Hana – se mají rozdělit o sedm stejných růží a pět stejných tulipánů. Kolika způsoby to lze provést?

   [756]

8. Určete, kolika způsoby je možno přemístit písmena slova BATERKA tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly.

   [72]

Posloupnosti a řady

Posloupnost je množina čísel zapsaných za sebou podle určitého uspořádání. Jednotlivá čísla v posloupnosti označujeme pomocí indexů, např. prvky posloupnosti U jsou $u_1, u_2 \dots u_n$.

Řada je sekvence součtů čísel v posloupnosti taková, že n-tý prvek řady S je součet prvních n prvků posloupnosti U, tj. $s_n = u_1 + u_2 + \dots u_n$ pro $n \in N$.

Aritmetická posloupnost je taková posloupnost, ve které je hodnota každého členu (vyjma prvního) rovna součtu členu předchozího a diference. Posloupnost lze zapsat rekurentně $a_{n+1} = a_n + d$, nebo předpisem pro n-tý prvek $a_n = a_1 + (n-1)d$, kde a_1 je první prvek posloupnosti a d diference.

Sumy prvků v aritmetické posloupnosti dávají **aritmetikou řadu**. Součet n-členů aritmetické posloupnosti (a tedy n-tý prvek aritmetické řady) je $s_n = \frac{1}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

Geometrická posloupnost je taková posloupnost, ve kterého je hodnota každého členu (vyjma prvního) rovna součinu členu předchozího a kvocientu. Posloupnost lze zapsat rekurentně $g_{n+1} = g_n r$ nebo předpisem pro n-tý prvek $g_n = g_1 r^{n-1}$, kde g_1 je první člen a r je kvocient.

Sumy prvků v geometrické posloupnosti dávají **geometrickou řadu**. Součet n-členů aritmetické posloupnosti (a tedy n-tý prvek geometrické řady) je $s_n = \frac{g_1(1-r^n)}{1-r}$ (pro $r \neq 1$).

Úkoly:

1. První členy aritmetické posloupnosti jsou $k, \frac{2k}{3}, \frac{k}{3}$.
   a) Nalezněte šestý prvek posloupnosti
   b) Nalezněte n-tý prvek posloupnosti
   c) Pokud je 20-tý prvek roven 15, nalezněte k

   $[\frac{-2k}{3}, \frac{k(4-n)}{3}, \frac{-45}{16}]$
2. Nalezněte sumu aritmetické posloupnosti s prvním členem rovným 1, diferencí 3 a posledním členem 100.

   [1717]
3. Pokud je suma prvních 20 členů posloupnosti rovna sumě prvních 22 dvou prvků posloupnosti a diference je rovna -2, jaká je hodnota prvního členu?

   [41]
4. Nalezněte sedmý člen geometrické posloupnosti s prvními třemi prvky $2, -6, 18$.

   [1458]
5. Suma prvních tří členů geometrické posloupnosti je $\frac{37}{8}$. Suma prvních šesti členů je $\frac{3367}{512}$. Najděte první člen a kvocient.

   $[2, \frac{3}{4}]$
6. Kolik členů geometrické posloupnosti $4, 3.6, 3.24, \dots$ je potřeba, aby jejich součet překročil 35?

   [20]

Reference:
Část materiálu převzata z: http://carolina.mff.cuni.cz/ jana/kombinatorika/