Logaritmus a polynomy:

Logaritmus

- definována pro $x, b \in R^+$, $b \neq 1$ jako $y = \log_b x$ (logaritmický tvar) právě když $x = b^y$ (exponenciální tvar)
- b... základ logaritmu
- odpověd na "Na kolikátou musím umocnit b, abych dostal x?"
- vhodná funkce pro modelování růstu a poklesu, např. pro růst počtu kroků v algoritmu.
- přirozený logaritmus: b odpovídá Eulerově konstantě (2,718...)

Příklady

1. Napište v exponenciálním tvaru
   (a) $\log_3 x = 9$
   (b) $\log_5 y = 2$
2. Napište v logaritmickém tvaru
   (a) $y = 3^4$
   (b) $64 = 4^x$

Základní vlastnosti logaritmu

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n \tag{1}$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n \tag{2}$$

$$\log_b m^a = a \log_b m \tag{3}$$

$$\log_b x = \frac{\log_k x}{\log_k b} = \log_a b \cdot \log_b x \tag{4}$$

Příklady:

1. Nalezněte x
   (a) $\log_b(x+2) - \log_b 4 = \log_b 3x$
   (b) $\log_b 4 + \log_b 5 - \log_b 10 = \log_b x$
   (c) $3^{x+3} = 7$
   (d) $\sqrt[x]{2^{x+3}} = 4.1$
   (e) $\log_3(5 + 4log_2(x-1)) = 2$ pro $x > 1$
2. Zjednodušte
   (a) $\log 9x^4 - \log(3x)^2$

(b) $\log 4(xy)^3 - \log 4(xy)$

3. Vyřešte:

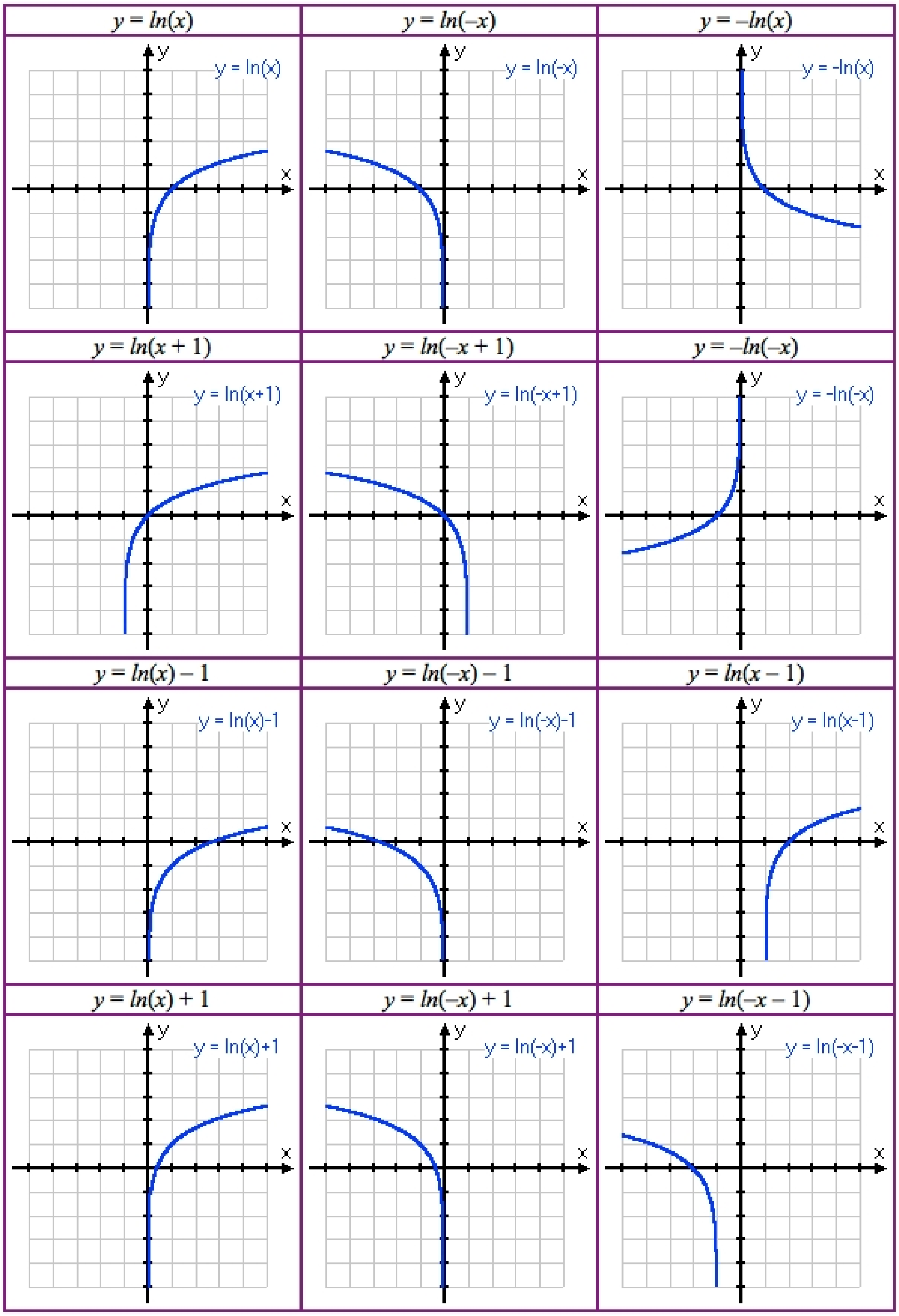
   (a) Populace bakterií roste rychlostí $N = N_0 e^{2t}$, kde N_0 je velikost počáteční populace a t je počet měsíců. Za jak dlouho vyroste populace bakterií z velikosti 100 na velikost 1 000 000?

   (b) Množství energie uvolněné při zemětřesení se počítá podle vzorce:

$$E = 1.74 \cdot 10^{19} \cdot 10^{1.44M},$$

   kde M je síla zemětřesení podle Richterovy stupnice. Kolik energie bylo uvolněno při zemětřesení v Newcastlu v roce 1939, které mělo sílu 5 RS? Jakou sílu mělo zemětřesení v San Francisku v roce 1900, při kterém bylo uvolněno dvakrát větší množství energie.

Grafy a průběh logaritmu



Příklady:

1. nakresletete grafy:
   (a) $log(-x) + 3$
   (b) $log(2x + 1)$
   (c) $-log(-x + 2)$

Polynomy

- výraz: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot + a_nx^n$,
- $a_i \in R$ jsou koeficienty, koefienty $a_{n+1}, \ldots$ jsou brány jako rovny 0
- a_0 konstantní výraz (nezávisí na x),
- stupeň polynomu je hodnota maximální mocniny u výrazu, jehož koeficient je nenulový
- Dva polynomy jsou si rovny, jsou-li si rovny odpovídající koeficienty

Příklady:
Mějme dva polynomy $f(x) = 2ax^3 - 3x^2 - b^2x - 7$, $g(x) = cx^4 + 10x^3 - (d+1)x^2 - 4x + e$. Najděte a, b, c, d, e tak, aby platilo $f(x) = g(x)$.

Operace s polynomy

- sčítání, odčítání: sečteme (odečteme) koeficienty u výrazů se stejným stupněm
- násobení: každý výraz s každým
- dělení: obdobně jako dělíme čísla pod sebou, výsledek vychází se zbytkem

Příklady:

1. Upravte výrazy
   (a) $(2x - 4x^2 + 7) - (3x^2 - 12x - 7)$
   (b) $(x^2 + 3x)(4x^3 - 3x - 1)$
   (c) $(x^2 + 2x + 1)^2$
2. Nechť je $p(x) = 3x^4 - 7x^2 - 10x + 4$. Vypočítejte:
   (a) $p(1)$,$p(0)$,$p(-5)$
   (a) $p(y - 1)$
3. Vydělte
   (a) $(3x^3 - x^2 + 4x - 7) : (x + 2)$
   (b) $(x^4 + 1) : (x^2 - 1)$
   (c) $(5x^4 + 30x^3 - 6x^2 + 8x) : (x^2 - 3x + 1)$

Kořeny polynomů a faktorizace

- c je kořenem polynomu $p(x)$, pokud $p(c) = 0$
- polynom má tolik kořenů, jaký je jeho stupeň
- pro stupně 2,3,4 lze kořeny spočítat podle vzorců a symbolickými úpravami (pro jakýkoliv polynom)
- pro stupeň 5 a vyšší stupně takový postup neexistuje
- pokud je c kořenem polynomu $p(x)$, pak $p(x) = f(x)(x - c)$, kde $f(x)$ je polynom, který má nižší stupeň než $p(x)$.

Příklady:
Nalezněte polynom, který má kořeny:

(a) -1,1,2

(b) 4,4,-2,1