2. Reálná čísla, funkce reálné proměnné

Upozornění: v tomto textu se používá pro nás neobvyklé značení pro relaci "býti podmnožinou". Zatímco my jsme zvyklí psát X ⊂ Y jen v případech, kdy X ≠ Y, zde je toto značení připouští i rovnost X = Y.

2.1 Binární operace. *Binární operací* na množině X rozumíme libovolné zobrazení z kartézského součinu $X \times X$ do X. Hodnotu binární operace $*$ v bodě $(x, y) \in X \times X$ označujeme $x * y$.

Nechť X je množina. Pak průnik, sjednocení a rozdíl množin definují binární operace na množině $\exp X$ (první a druhá byly definovány v (1.2.1) a (1.3.6)). Tyto operace se značí (jak jinak) $\cap$, $\cup$ a $\setminus$.

Označme Y^X množinu všech zobrazení z X do Y. Pro libovolná dvě zobrazení $f, g \in X^X$ platí $g \circ f \in X^X$. Kompozice zobrazení tedy definuje binární operaci $\circ$ na množině X^X.

Operace $*$ na množině X se nazývá *komutativní*, když pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí

$$x * y = y * x, \tag{2.1.1}$$

a *asociativní*, když pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí

$$(x * y) * z = x * (y * z) \tag{2.1.2}$$

(tuto hodnotu značíme $x * y * z$).

Neutrálním prvkem operace $*$ na množině X rozumíme takový prvek $e \in X$, že pro každé $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} e * x &= x, \\ x * e &= x. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Věta 2.1. *Každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek.*

D ů k a z. Předpokládejme, že e_1, e_2 jsou dva neutrální prvky operace $*$. Z první rovnice (2.1.3) plyne, že $e_1 * e_2 = e_2$ (jelikož e_1 je neutrální prvek), z druhé rovnice zase $e_1 * e_2 = e_1$ (jelikož e_2 je neutrální prvek). Dostáváme $e_1 = e_2$.

Uvažujme operace průniku, sjednocení a rozdílu množin na množině $\exp X$. Z věty 1.1 plyne, že průnik a sjednocení jsou komutativní a asociativní. Neutrálním prvkem průniku je množina X (jelikož pro každé Y platí $X \cap Y = Y \cap X = Y$), neutrálním prvkem sjednocení je prázdná množina ($Y \cup \emptyset = \emptyset \cup Y = Y$). Operace rozdílu množin ukazuje, že neutrální prvek nemusí existovat (pro každé $Y \subset X$ je $Y \setminus Y = \emptyset$; odtud plyne, že jedině prázdná množina má šanci být neutrálním prvkem. Jak se ovšem snadno ověří, bude jím, jedině když $X = \emptyset$).

Má-li operace $*$ na množině X neutrální prvek e, pak *inverzním prvkem (inverzí) prvku* x (vzhledem k operaci $*$) nazveme takový prvek y, že

$$\begin{aligned} y * x &= e, \\ x * y &= e. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Věta 2.2. *Každý prvek množiny X s asociativní operací $*$ má vzhledem k této operaci nejvýše jednu inverzi.*
D ů k a z. Buďte e neutrální prvek operace $*$ a y_1, y_2 dvě inverze prvku $x \in X$. Pak

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 * e = && (e \text{ je neutrální prvek}) \\ &= y_1 * (x * y_2) = && (y_2 \text{ je inverze prvku } x) \\ &= (y_1 * x) * y_2 = && (\text{asociativita } *) \\ &= e * y_2 = && (y_1 \text{ je inverze } x) \\ &= y_2. \end{aligned}$$

Inverzní prvek k prvku x je tedy u asociativních operací určen jednoznačně. Obvykle jej značíme x^{-1}. Z definice ihned plyne, že $(x^{-1})^{-1} = x$.

Důkaz předchozí věty nápadně připomíná důkaz věty 1.4. To není náhoda.

Je-li e neutrální prvek operace $*$, je $e * e = e$, a tedy $e = e^{-1}$.

Je-li operace $*$ asociativní a má-li každý z prvků x a y inverzi, pak má inverzi i prvek $x * y$ a platí $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Je totiž:

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = (y^{-1} * (x^{-1} * x)) * y = (y^{-1} * e) * y = e$$

a

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = (x * (y * y^{-1})) * x^{-1} = (x * e) * x^{-1} = e.$$

2.2 Pole. Množina X se nazývá *pole*, splňuje-li následující podmínky:

1. Na množině X je dána komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem. Každý prvek množiny X má vzhledem k této operaci inverzi.

Tuto operaci budeme značit $+$ a nazývat *sčítání* v poli X. Její neutrální prvek označíme 0. Inverzní prvek k prvku x označíme $-x$.

2. Na množině X je dána komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem různým od 0. Každý prvek množiny $X \setminus \{0\}$ má vzhledem k této operaci inverzi.

Tuto operaci budeme značit $\cdot$ a nazývat *násobení* v poli X. Často budeme místo $x \cdot y$ psát pouze xy. Neutrální prvek označíme 1 a inverzní prvek k prvku x označíme x^{-1}. Při zápisu budeme dodržovat obvyklou přednost násobení před sčítáním.

3. Pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí distributivní zákon:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Věta 2.3. *Pro každé pole platí: 1.* $0 \cdot x = 0$ *pro každý prvek* x.
2. 0 *nemá vzhledem k násobení inverzi.*
3. $(-1)x = -x$ *pro každý prvek* x.

D ů k a z. 1. Především, jelikož $0 + 0 = 0$ (0 je vzhledem ke sčítání neutrální prvek), máme $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ (distributivní zákon). Označíme-li si tedy $0 \cdot x = y$, máme $y = y + y$ a

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = && \text{(0 je neutrální prvek)} \\ &= y + (y + (-y)) = && \text{($-y$ je inverze y)} \\ &= (y + y) + (-y) = && \text{(asociativita sčítání)} \\ &= y + (-y) = && \text{(viz. výše)} \\ &= 0. && \text{($-y$ je inverze y)} \end{aligned}$$

2. Pro inverzní prvek nuly by platilo $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Podle předchozího bodu ovšem $0 \cdot 0^{-1} = 0$. To je spor, protože z definice pole víme, že $0 \neq 1$.

3. Platí

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x = && \text{(1 je neutrální prvek)} \\ &= (1 + (-1)) \cdot x = && \text{(komutativita násobení a distributivita)} \\ &= 0 \cdot x = && \text{(-1 je inverze 1)} \\ &= 0. && \text{(bod 1.)} \end{aligned}$$

To ovšem znamená, že inverzí prvku x vzhledem ke sčítání (tedy prvkem $-x$) je prvek $(-1)x$. Tím je důkaz hotov.

Mějme nyní na poli X dáno uspořádání $\leq$. Řekneme, že toto uspořádání je *úplné*, jestliže pro každé dva prvky $x, y \in X$ nastane alespoň jedna z možností $x \leq y$ a $y \leq x$ (prvky x a y jsou srovnatelné). Dále řekneme, že toto uspořádání je *slučitelné (kompatibilní)* se sčítáním a násobením v poli X, jestliže pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí:

$$\text{Jestliže } x \leq y, \text{ pak } x + z \leq y + z. \tag{2.2.1}$$
$$\text{Jestliže } 0 \leq x \text{ a } 0 \leq y, \text{ pak } 0 \leq xy. \tag{2.2.2}$$

Pole X se nazývá *uspořádané*, je-li na něm dáno úplné uspořádání, slučitelné se sčítáním a násobením.[1)]

Ne každé pole je uspořádané. To znamená, že na něm neexistuje uspořádání slučitelné s operacemi v poli. Příkladem takového pole jsou komplexní čísla, která čtenář zná ze střední školy.

Připomeňme, že v uspořádané množině vztah $x < y$ znamená, že $x \leq y$ a $x \neq y$.

Věta 2.4. *V každém uspořádaném poli platí: 1.* $0 < 1$.
2. Z $x + z \leq y + z$ *plyne* $x \leq y$.
3. Z $0 < x$ *plyne* $0 < x^{-1}$.
4. Je-li $0 < z$, *pak jsou vztahy* $x \leq y$ *a* $xz \leq yz$ *ekvivalentní.*

D ů k a z. 1. Kdyby $0 \not< 1$, muselo by být $1 \leq 0$ (uspořádání je úplné). Položíme-li v (2.2.1) $x = 1$, $y = 0$ a $z = -1$, dostaneme $1 + (-1) \leq 0 + (-1)$, neboli (protože -1 je inverze 1 a 0 je neutrální prvek) $0 \leq -1$. Teď položme v (2.2.2) $x = -1$ a $y = -1$. Dostaneme $0 \leq (-1)(-1)$. Víme ale (poznámka za větou 2.3), že $(-1)(-1) = 1$. Dostáváme tedy $0 \leq 1$, což spolu s předpokladem $1 \leq 0$ dává $1 = 0$, a to je spor s definicí pole. Z předpokladu $0 \not< 1$ jsme vyvodili spor, platí tedy $0 < 1$.

[1)]Úplnost uspořádání v poli je podmínka natolik přirozená, že míváme sklon považovat ji za samozřejmost. Uvědomme si ovšem, že i v praxi se setkáváme s neúplnými uspořádáními: Když na množině studentů položíme $s_1 < s_2$ (s_1 je horší student, než s_2), jestliže student s_1 má horší studijní průměr než student s_2, dostaneme neúplné uspořádání (definované samosebou předpisem: $s_1 \leq s_2$, jestliže $s_1 < s_2$ nebo $s_1 = s_2$). Pro dva různé studenty se stejným studijním průměrem totiž neplatí ani $s_1 < s_2$, ani $s_2 < s_1$ a samozřejmě ani $s_1 = s_2$.

2. Podle (2.2.1) z $x + y \le y + z$ plyne $(x + z) + (-z) \le (y + z) + (-z)$, to ovšem (podle asociativního zákona, proto, že $-z$ je vzhledem ke sčítání inverze z, a proto, že 0 je vzhledem ke sčítání neutrální prvek) znamená $x \le y$.

4. Předpokládejme, že $x \le y$. Pak podle (2.2.1) platí $x + (-x) \le y + (-x)$, čili $0 \le y + (-x)$. Nyní můžeme použít (2.2.2) na prvky $x + (-y)$ a z (o kterém předpokládáme $0 \le z$). Dostáváme $0 \le (y + (-x))z$ a podle distributivního zákona $0 \le yz + (-x)z$. Teď si stačí uvědomit, že $(-x)z = -(xz)$ (to plyne z bodu 3 věty 2.3 a asociativity násobení), a aplikovat na nerovnost $0 \le yz + (-(xz))$ a prvek xz vztah (2.2.1). Tím je dokázáno, že z $x \le y$ plyne $xz \le yz$.

Nyní můžeme snadno dokázat bod 3 Připusťme, že tvrzení tohoto bodu neplatí, tedy že existuje prvek x takový, že sice $0 < x$, ale $0 \not< x^{-1}$ (existence prvku x^{-1} vyplývá z definice pole; je totiž $x \ne 0$). To znamená, že $x^{-1} \le 0$ (z úplnosti uspořádání) a (podle části bodu 4, kterou jsme již dokázali) že $x^{-1}x \le 0x$. Podle bodu 1 věty 2.3 máme $1 \le 0$, což je spor s bodem 1 této věty, který jsme již dokázali.

Zbývá nám dokázat druhou polovinu bodu 4: Je-li $0 < z$, je také $0 < z^{-1}$, a z $xz \le yz$ vyplývá $xzz^{-1} \le yzz^{-1}$, což znamená $x \le y$.

Tím je celá věta dokázána.

Kromě sčítání a násobení zavádíme v poli ještě *odčítání*: $x - y = x + (-y)$ a *dělení*: x/y (nebo $\frac{x}{y}) = xy^{-1}$ (pouze pro $y \ne 0$; 0^{-1} neexistuje).

Prvky x, splňující $x > 0$ (případně $x < 0$) nazýváme *kladné* (případně *záporné*). Pokud splňují $x \ge 0$ (případně $x \le 0$), nazýváme je *nezápornými* (případně *nekladnými*).

Jsou-li x, y dva prvky uspořádaného pole X, $x \le y$, pak množinu prvků $z \in X$ takových, že $x < z < y$ nazýváme *otevřeným intervalem s koncovými body x a y* a označujeme (x, y).[2] Množinu prvků $z \in X$ takových, že $x \le z \le y$, nazýváme *uzavřeným intervalem s koncovými body x a y* a označujeme $[x, y]$. Množinu prvků $z \in X$ takových, že $x \le z < y$ (případně $x < z \le y$), nazýváme *polootevřeným intervalem s koncovými body x a y, uzavřeným v x a otevřeným v y* (případně *otevřeným v x a uzavřeným v y*) a označujeme $[x, y)$ (případně $(x, y]$). Ve všech těchto případech prvek $y - x$ (který je určitě nezáporný), nazýváme *délkou* příslušného intervalu.

Dále klademe $(x, \infty) = \{y \in X \mid y > x\}$, $[x, \infty) = \{y \in X \mid y \ge x\}$, $(-\infty, x) = \{y \in$ $\in X \mid y < x\}$ a $(-\infty, x) = \{y \in X \mid y \le x\}$. Tyto množiny *nazýváme nevlastní intervaly*.

Občas se nám bude hodit toto označení: pro dvě množiny $Y, Z \subset X$ píšeme $Y \le Z$, jestliže pro každé prvky $y \in Y$ a $z \in Z$ platí $y \le z$. Podobně zavádíme značení $Y < Z$, $Y \ge Z$ a $Y > Z$. Vztah $\{y\} \le Z$ zapisujeme $y \le Z$ (a podobně v ostatních případech).

Pro množinu $Y \subset X$ klademe $-Y = \{-y \mid y \in Y\}$. Pro dvě množiny $Y, Z \subset X$ klademe $Y + Z = \{y + z \mid y \in Y, z \in Z\}$. Podobným způsobem definujeme množiny Y^{-1} (pokud $0 \notin Y$), $Y - Z$, $Y \cdot Z$ a Y/Z (pokud $0 \notin Z$).

2.3 Reálná čísla. Řekneme, že uspořádané pole X je *spojitě uspořádané*, jestliže ke každým dvěma neprázdným podmnožinám $Y, Z \subset X$ takovým, že $Y \le Z$, existuje prvek $x \in X$, splňující podmínku $Y \le x \le Z$ (*axiom spojitosti*).

Každé spojitě uspořádané pole se nazývá *množina reálných čísel* a označuje symbolem $\mathbb{R}$. Prvky množiny reálných čísel se nazývají *reálná čísla*.

Abychom mohli zformulovat následující důležitou větu, uvedeme ještě definici, která by se hodila spíše do odstavce o uspořádaných množinách.

Podmnožina Y uspořádané množiny X se nazývá *shora (zdola) ohraničená*, má-li horní (dolní) závoru. Podmnožina, která je současně shora i zdola ohraničená, se nazývá *ohraničená*.

Věta 2.5 (o supremu). *Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*
D ů k a z. Nechť $Y \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora ohraničená. Položme $Z = \{z \in \mathbb{R} \mid Y \le z\}$ (Z je tedy množina všech horních závor množiny Y). Tato množina je rovněž neprázdná (Y je shora ohraničená — má horní závoru). Navíc platí $Y \le Z$, takže podle axiomu spojitosti existuje prvek

[2] Předpokládáme, že čtenář vždy rozliší, kdy se jedná o interval a kdy o uspořádanou dvojici.

$x \in X$ takový, že $Y \leq x \leq Z$. Jelikož $Y \leq x$, je také x horní závora množiny Y, tedy $x \in Z$. Jelikož nadto $x \leq Z$, je $x = \min Z$. Dostáváme $x = \sup Y$.

Následující Věta o infimu se dá dokázat stejným způsobem jako Věta o supremu.

Věta 2.6 (o infimu). *Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.*

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Podle definice intervalu je $y \geq [x, y]$. Současně ovšem platí $y \in [x, y]$, což znamená, že $y = \max[x, y]$. Podle věty 1.9 je tedy $y = \sup[x, y]$.

Uvažujme nyní otevřený interval (x, y). Opět platí, $y \geq (x, y)$, nicméně $y \notin (x, y)$. To znamená, že $y \neq \max(x, y)$. Má interval (x, y) maximum? Kdyby bylo $z = \max(x, y)$, muselo by být $z < y$ (to je totiž jediná možnost, která zbývá). K takovému číslu ovšem vždy najdeme prvek intervalu (x, y), který je větší. Například pro číslo $u = (z + y)/2$[3] platí $z < u < y$ (ověřte!). To znamená, že $z \neq \max(x, y)$ a interval (x, y) tedy nemá maximum.

Číslo y je ovšem horní závorou intervalu (x, y), což, jak jsme ukázali před chvílí, pro žádné menší číslo neplatí. Máme tedy $y = \sup(x, y)$.

Následující věta uvádí často používané kritérium existence suprema v $\mathbb{R}$.

Věta 2.7. *Nechť $z \in \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. $z = \sup X$,
2. $z \geq X$ a ke každému $y < z$ existuje $x \in X$ takové, že $y \leq x \leq z$.

D ů k a z. Předpokládejme, že platí 1. Podle definice suprema je $z \geq X$. Zvolme číslo $y < z$. Kdyby neexistovalo $x \in X$ s uvedenou vlastností, bylo by y horní závorou množiny X menší než z, což je spor s 1.

Nechť platí podmínka 2. První její část říká, že z je horní závora množiny X. Druhá část zase, že žádná horní závora y není menší. Je tedy z nejmenší horní závora této množiny.

Podobná věta platí i pro infimum. Zkuste ji zformulovat a dokázat.

Poslední věta tohoto odstavce říká, že axiom spojitosti je ekvivalentní s větou o supremu.

Věta 2.8. *Nechť X je uspořádané pole, jehož každá neprázdná shora ohraničená množina má supremum. Pak X je spojitě uspořádané.*

D ů k a z. Musíme dokázat, že v X platí axiom spojitosti. Zvolme tedy dvě neprázdné podmnožiny $Y, Z \subset X$, $Y \leq Z$ a hledejme prvek $x \in X$ splňující podmínku $Y \leq x \leq Z$.

Jelikož množina Z je neprázdná, je množina Y shora ohraničená. Podle předpokladu věty tedy má supremum. Ukážeme, že toto supremum splňuje podmínku $Y \leq \sup Y \leq Z$. První část této podmínky ($Y \leq \sup Y$) plyne okamžitě z definice suprema ($\sup Y$ je horní závora množiny Y). Druhá z věty 2.7: Kdyby pro nějaký prvek $z \in Z$ platilo $z < \sup Y$, existoval by prvek $y \in Y$ větší než z, což by byl spor s předpokladem $Y \leq Z$. Můžeme tedy položit $x = \sup Y$.

2.4 Přirozená čísla. Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ je *induktivní*, jestliže $1 \in X$ a jestliže z $x \in X$ plyne $x + 1 \in X$.

Příklady induktivních množin: $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $[1, \infty)$.

Uvedeme nyní jednoduché tvrzení:

Lemma 2.9. *Průnik libovolného systému induktivních množin je induktivní množina.*

D ů k a z. Nechť S je systém induktivních množin. Ověříme, že množina $\cap S$ je induktivní. Pro libovolnou množinu $X \in S$ platí $1 \in X$ (X je induktivní). Proto $1 \in \cap S$. Jestliže $x \in \cap S$, pak $x \in X$ pro každé X. Jelikož každé $X \in S$ je induktivní množina, leží $x + 1$ v každé množině systému S. Platí tedy i $x + 1 \in \cap S$.

Množinou přirozených čísel nazýváme průnik systému všech induktivních podmnožin $\mathbb{R}$. Značíme ji $\mathbb{N}$. Její prvky nazýváme přirozená čísla.

---

[3] Ach! Číslo 2 jsme ovšem zatím nedefinovali. Honem to tedy napravíme: položíme $2 = 1 + 1$; a k problému se ještě později vrátíme.

Věta 2.10 (základní vlastnosti množiny přirozených čísel). *1. $\mathbb{N}$ je induktivní.*
2. (princip matematické indukce) Jestliže $X \subset \mathbb{N}$ je induktivní množina, pak $X = \mathbb{N}$.
3. $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek. Platí $\min \mathbb{N} = 1$.
4. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, pak $n - 1 \in \mathbb{N}$.
5. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n, n + 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
6. (dobré uspořádání) Každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek.
7. (Archimedova vlastnost) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.

D ů k a z. 1. Plyne z definice množiny přirozených čísel a předchozího lemmatu.

2. Z definice množiny přirozených čísel plyne, že $\mathbb{N} \subset X$.

3. Jelikož $\mathbb{N}$ je induktivní množina, je $1 \in \mathbb{N}$. Jelikož množina $[1, \infty)$ je induktivní (ověřte!), je $\mathbb{N} \subset [1, \infty)$. Každý prvek intervalu $[1, \infty)$ je ovšem větší nebo roven 1, totéž tedy platí i pro prvky množiny $\mathbb{N}$.

4. Nechť $n \neq 1$ a $n - 1 \notin \mathbb{N}$. Pak množina $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ je induktivní a máme $\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \setminus \{n\}$. To ovšem nastane jedině v případě, že $n \notin \mathbb{N}$.

5. Využijeme princip matematické indukce. Nechť X je množina všech přirozených čísel n, pro něž je $(n, n + 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Dokážeme, že tato množina je induktivní:

Nejprve je třeba ukázat, že $1 \in X$. Položme $Y = \{1\} \cup [2, \infty)$. Tato množina je induktivní (ověřte), platí tedy $\mathbb{N} \subset Y$. Navíc, jak snadno plyne z definice intervalů, $Y \cap (1, 2) = \emptyset$. To znamená, že $(1, 2) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, a tedy $1 \in X$.

Nyní předpokládejme, že $n \in X$, a připusťme, že $n + 1 \notin X$, tedy že existuje přirozené číslo x, ležící v intervalu $(n + 1, n + 2)$. Platí $n + 1 < x < n + 2$ (z definice otevřeného intervalu) a $x \neq 1$ (podle bodu 3.). Je tedy $x - 1 \in \mathbb{N}$ (podle bodu 4.) a $n < x - 1 < n + 1$. To je spor s předpokladem $n \in X$. Je tedy i $n + 1 \in X$.

Dokázali jsme tedy, že množina X je induktivní. Z principu matematické indukce nyní plyne, že $X = \mathbb{N}$. To je ovšem přesně to, co jsme měli dokázat.[4)]

6. Buď $Y \subset \mathbb{N}$ podmnožina, která nemá nejmenší prvek. Položme $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n < Y\}$.[5)] Platí $X \cap Y = \emptyset$. Ukážeme, že množina X je induktivní:

Jelikož 1 je nejmenší přirozené číslo (bod 3.), musí být $1 < Y$ nebo $1 \in Y$. Druhý případ ovšem nenastává, jinak by totiž 1 byla nejmenším prvkem množiny Y (která nejmenší prvek nemá). Je tedy $1 < Y$, neboli $1 \in X$.

Nyní předpokládejme, že $n \in X$ (platí tedy $n < Y$) a podívejme se, zda $n + 1 \in X$. Mezi čísly n a $n + 1$ neleží žádný prvek množiny Y (bod 5.) a číslo $n + 1$ také není jejím prvkem — jinak by totiž bylo jejím nejmenším prvkem. Odtud ovšem plyne, že $n + 1 < Y$, neboli $n + 1 \in X$.

Tím jsme dokázali, že množina X je induktivní. Podle principu matematické indukce tedy $X = \mathbb{N}$, což znamená, že $Y = \emptyset$ (množiny X a Y jsou disjunktní). Tím jsme dokázali, že jedině prázdná podmnožina množiny $\mathbb{N}$ nemá nejmenší prvek.

7. Předpokládejme, že podmnožina všech reálných čísel x takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq x$ je neprázdná, a označme si ji X. Máme $\mathbb{N} \leq X$ a podle axiomu spojitosti existuje prvek $x \in \mathbb{R}$ takový, že $\mathbb{N} \leq x \leq X$. Určitě neplatí $x \in \mathbb{N}$ (to by bylo i $x + 1 \in \mathbb{N}$, což je ve sporu s $\mathbb{N} \leq x$) a tedy ani $x - 1 \notin \mathbb{N}$ (to by bylo ve sporu s $x \notin \mathbb{N}$). Nyní ovšem vidíme, že $x - 1 > \mathbb{N}$ (interval $(x - 1, x)$ nepochybně žádné přirozené číslo neobsahuje; číslo o 1 větší by totiž bylo větší než x), a dostáváme se do sporu: Před chvílí jsme tvrdili, že $x \leq X$, a teď nám vychází $x - 1 \in X$. Tento spor dokazuje, že množina X je prázdná.

Tím je věta dokázána.

Označení některých přirozených čísel: $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, 5 = 4 + 1, 6 = 5 + 1, 7 = 6 + 1, 8 = 7 + 1, 9 = 8 + 1$. Další přirozená čísla se dají jednoznačně vyjádřit pomocí dekadického zápisu, kterým se ovšem na tomto místě nebudeme zabývat.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označujeme $\{1, \ldots, n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. Existuje-li bijekce mezi množinou X a touto množinou, říkáme, že množina X má *n prvků*. Množina se nazývá *konečná*, když je prázdná

[4)]Co jsme měli dokázat?
[5)]Co znamená $n < Y$?

nebo existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že tato množina má n prvků. Ostatní množiny se nazývají *nekonečné*.

Nyní můžeme uvést pojem *uspořádané n-tice*, který je zobecněním pojmu uspořádané dvojice. Nechť n je přirozené číslo. Předpokládejme, že pro každé číslo $i \in \{1, \dots, n\}$ máme dán objekt x_i.[6] *Uspořádaná n-tice* objektů $x_1, \dots, x_n$ je objekt označovaný $(x_1, \dots, x_n)$ takový, že rovnost $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$ nastane, právě když pro každé číslo $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $x_i = x'_i$.

Kartézským součinem množin $X_1, \dots, X_n$ rozumíme množinu

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}. \tag{2.4.1}$$

Speciálně, jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $X_i = X$, píšeme

$$X_1 \times \dots \times X_n = X^n. \tag{2.4.2}$$

Tuto množinu nazýváme *n-tou kartézskou mocninou množiny* X.

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ definujeme *i-tou kartézskou projekci* $\mathrm{pr}_i\colon X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$ předpisem

$$\mathrm{pr}_i(x_1, \dots, x_n) = x_i. \tag{2.4.3}$$

Nechť X je množina. Libovolné zobrazení $a\colon \mathbb{N} \to X$ se nazývá *posloupnost prvků množiny* X. Pro $n \in \mathbb{N}$ označujeme $a_n = a(n)$ a posloupnost a zapisujeme (a_n), nebo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.5 Celá, racionální a iracionální čísla. Množinu $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ nazýváme *množinou celých čísel*. Množinu $\mathbb{Q} = \{p \cdot q^{-1} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N}\}$ nazýváme *množinou racionálních čísel*. Množinu $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *množinou iracionálních čísel*. Prvky těchto množin nazýváme (po řadě) *celá*, *racionální* a *iracionální čísla*.

Věta 2.11. *V každém otevřeném intervalu v* $\mathbb{R}$ *délky větší než* 1 *leží celé číslo.*

Důkaz. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $y - x > 1$. Hledáme celé číslo p takové, že $p \in (x, y)$.

1. Předpokládejme, že $x \ge 0$ a označme X množinu přirozených čísel větších než x. Tato množina je neprázdná (to plyne z Archimédovy vlastnosti množiny $\mathbb{N}$ — věta 2.10) a má nejmenší prvek (tatáž věta, bod 6.). Položme $p = \min X$. Platí $p - x \le 1$ (jinak by bylo $p - 1 \in X$), a tedy $p < x$.

2. Jestliže $x < 0$ a $y > 0$, pak podmínce vyhovuje 0.

3. Jestliže $y \le 0$ (tím pádem $x < 0$), pak interval $(-y, -x)$ obsahuje přirozené číslo (to jsme ukázali v prvním bodě), řekněme n. Číslo $p = -n$ leží v intervalu (x, y).

Věta 2.12. *V každém neprázdném otevřeném intervalu v* $\mathbb{R}$ *leží racionální číslo.*

Důkaz. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Hledáme racionální číslo $p \cdot q^{-1}$ takové, že $p \cdot q^{-1} \in (x, y)$. Řešíme tedy dvojici nerovnic

$$x < p \cdot q^{-1} < y. \tag{2.5.1}$$

S těmito nerovnicemi je ekvivalentní[7] podmínka

$$qx < p < qy. \tag{2.5.2}$$

Nyní budeme postupovat takto: Najdeme přirozené číslo q tak, aby délka intervalu (qx, qy) byla větší než 1. Pak, podle věty 2.11, bude zaručena existence celého čísla p, které v tomto intervalu leží. Bude tedy splněno (2.5.2) a tím i (2.5.1).

Podmínka, kterou musí splňovat hledané přirozené číslo q, je

---

[6] Často říkáme prostě: Mějme dány objekty $x_1, \dots, x_n$.

[7] Dvojice (p, q) splňuje (2.5.1), právě když platí (2.5.2).

$$qy - qx > 1. \tag{2.5.3}$$

Ta je ovšem ekvivalentní podmínce

$$q > \frac{1}{y - x}. \tag{2.5.4}$$

Hledané číslo q tedy existuje, vyplývá to z Archimédovy vlastnosti.

Tím je důkaz ukončen.

Podobná věta platí i pro iracionální čísla; zatím ovšem není v našich silách ji dokázat. Zatím, popravdě řečeno, ani nevíme, zda vůbec nějaké iracionální číslo existuje. (Všimli jste si?)

Příležitostně budeme používat následující pojmy, vztahující se k celým číslům: dělitelnost čísel, zbytek po dělení, soudělná a nesoudělná, sudá a lichá čísla. Věříme, že definice všech těchto pojmů, stejně jako jejich základní vlastnosti, je čtenář schopen zformulovat sám.

Kontrolní otázky

1. Je prázdná množina ohraničená? Existuje její maximum a minimum?
2. Z čeho vyplývá, že existuje v $\mathbb{R}$ číslo, které není přirozené?
3. Z čeho vyplývá, že existuje v $\mathbb{R}$ číslo, které není celé?
4. Z čeho vyplývá, že existuje v $\mathbb{R}$ číslo, které není racionální?
5. Je největší prvek podmnožiny v $\mathbb{R}$ určen jednoznačně?
6. Jaký je vztah suprema a maxima množiny v $\mathbb{R}$?

2.6 Funkce reálné proměnné. *Funkcí reálné proměnné* rozumíme libovolné zobrazení $f\colon X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}$ (někdy píšeme $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *shora ohraničená (zdola ohraničená, ohraničená) na množině* $X' \subset X$, je-li taková množina $f(X') \subset \mathbb{R}$.

Největší hodnotou (maximem) funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\max f(X')$ (označení: $\max_{x \in X'} f(x)$). Řekneme, že funkce f této hodnoty *nabývá v bodě* $x \in X'$, jestliže $f(x) = \max f(X')$ (jestliže existuje maximum, existuje i tento bod; platí totiž $\max f(X') \in f(X')$).

Podobně: *Nejmenší hodnotou (minimem) funkce* $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\min f(X')$ (označení: $\min_{x \in X'} f(x)$). Řekneme, že funkce f této hodnoty *nabývá v bodě* $x \in X'$, jestliže $f(x) = \min f(X')$.

Řekneme, že maximum (případně minimum) funkce f na množině $X' \subset X$ je *ostré*, jestliže existuje právě jeden bod této množiny, v němž funkce maxima (případně minima) nabývá. Je-li takových bodů víc, říkáme, že maximum (minimum) je *neostré*.

Maximum a minimum se souhrnně nazývají *extrémy*.

Jak už jsme řekli, bod, v němž funkce maxima nebo minima na dané množině nabývá, vždy existuje. To ale nemusí platit o supremu a infimu:

Supremem funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\sup f(X')$ (označení: $\sup_{x \in X'} f(x)$). *Infimem funkce* f *na množině* X' nazýváme číslo $\inf f(X')$ (označení: $\inf_{x \in X'} f(x)$).

Řekneme, že funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na množině $X' \subset X$ *rostoucí* (*nerostoucí*, *klesající*, *neklesající*), jestliže pro každé dva body $x, y \in X'$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$, $f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$). Je-li funkce f rostoucí (nerostoucí, klesající, neklesající) na celé množině X, nazývá se prostě *rostoucí* (*nerostoucí*, *klesající*, *neklesající*). Souhrnně se takové funkce nazývají *monotonní*. Funkci, která je rostoucí nebo klesající říkáme pojemryze monotonní.

Řekneme, že funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *konvexní* na intervalu $I \subset X$, jestliže pro každé tři body $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \geq 0. \tag{2.6.1}$$

Řekneme, že funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *konkávní* na intervalu $I \subset X$, jestliže pro každé tři body $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \leq 0. \tag{2.6.2}$$

Je-li definiční obor funkce interval a je-li funkce na tomto intervalu konvexní (konkávní), nazývá se prostě *konvexní* (*konkávní*).

Funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *sudá* (*lichá*), jestliže pro každý bod $x \in X$ platí $-x \in X$ a $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = f(-x)$).

Funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *periodická*, jestliže existuje číslo $p > 0$ takové, že $x \in X$, právě když $x + p \in X$, a jestliže $x \in X$, pak $f(x+p) = f(x)$. Číslo p se nazývá *perioda funkce f*.

Funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že množina $f(X)$ je jednoprvková, se nazývá *konstantní*. Je-li $f(X) = \{c\}$, píšeme $f = c$.[8] Konstantní funkce, stejně jako funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, jsou speciálním případem afinních funkcí. Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *afinní*, existují-li čísla $p, q \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = px + q$.

Množina $Y \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *přímka*, existují-li čísla $a, b \in \mathbb{R}$, ne současně rovna nule, taková, že

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \tag{2.6.3}$$

Souvislost afinních funkcí s přímkami je jednoduchá:

Věta 2.13. *Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je afinní, právě když je její graf přímka.*
D ů k a z. Důkaz si čtenář jistě rád udělá sám.

Uvedená věta neříká, že každá přímka je grafem nějaké funkce!

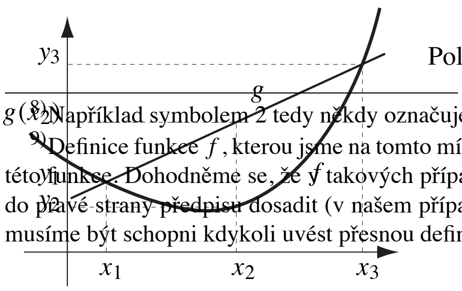
Afinní funkce $f(x) = px + q$ je rostoucí, právě když je $p > 0$, a klesající, právě když je $p < 0$.[9] Ukážeme první část tohoto tvrzení: Předpokládejme, že funkce f je rostoucí. Pak musí platit $f(0) < f(1)$ (podle definice rostoucí funkce), což ovšem vede k $q < p + q$, neboli $p > 0$. Naopak, nechť $p > 0$. Pak pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, platí $px < py$, čili $px + q < py + q$, což znamená, že $f(x) < f(y)$ a funkce f je rostoucí.

Každá afinní funkce je konvexní i konkávní. Pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ totiž platí

$$\begin{aligned}
&f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_2)(x_1 - x_3) + f(x_3)(x_2 - x_1) = \\
&\quad = (px_1 + q)(x_3 - x_2) + (px_2 + q)(x_1 - x_3) + (px_3 + q)(x_2 - x_1) = \\
&\quad = p(x_1x_3 - x_1x_2) + q(x_3 - x_2) + p(x_2x_1 - x_2x_3) + q(x_1 - x_3) + \\
&\qquad + p(x_3x_2 - x_3x_1) + q(x_2 - x_1) = \\
&\quad = p(x_1x_3 - x_1x_2 + x_2x_1 - x_2x_3 + x_3x_2 - x_3x_1) + q(x_3 - x_2 + x_1 - x_3 + x_2 - x_1) = \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Pokusme se nyní vyjasnit definici konvexní funkce. Označme $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, kde $x_1 < x_2 < x_3$. Podmínka (2.6.1) v níž se zvolí $x = x_1$, $y = x_2$ a $z = x_3$ se dá přepsat na

$$y_2 \leq \frac{y_1(x_3 - x_2) + y_3(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{2.6.4}$$



Položíme-li

[8] Například symbolem 2 tedy někdy označujeme číslo a někdy konstantní funkci!

[9] Definice funkce f, kterou jsme na tomto místě uvedli, je neúplná: neuvedli jsme ani definiční obor, ani obor hodnot této funkce. Dohodněme se, že v takových případech bude definičním oborem množina všech reálných čísel, která lze do pravé strany předpisu dosadit (v našem případě tedy $\mathbb{R}$), a oborem hodnot množina $\mathbb{R}$. V případě nejasností ovšem musíme být schopni kdykoli uvést přesnou definici!

$$g(x) = \frac{y_1(x_3 - x) + y_3(x - x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{2.6.5}$$

dostaneme afinní funkci $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (to se snadno zjistí úpravou vztahu (2.6.5)), pro kterou platí $g(x_1) = y_1$, $g(x_3) = y_3$ (dosazením do (2.6.5)) a $g(x_2) \geq y_2$ z (2.6.4). Dostáváme tedy tento výsledek: funkce f je konvexní na intervalu I, právě když pro každé tři body x_1, x_2, x_3, $x_1 < x_2 < x_3$, platí $f(x_2) \leq g(x_2)$, kde g je afinní funkce, jejímž grafem je přímka, procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Nechť $f, g: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce. Funkci $(f + g): X \to \mathbb{R}$, definovanou pro každé $x \in X$ předpisem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, nazýváme *součtem funkcí f a g*. *Součinem* těchto funkcí nazýváme funkci $(f \cdot g): X \to \mathbb{R}$, definovanou pro každé $x \in X$ předpisem $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Tím jsme definovali operace sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}^X$.

Množina $\mathbb{R}^X$ s těmito operacemi ovšem není pole. Které podmínky z definice pole nesplňuje?

Uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$ je definováno takto: Klademe $f \leq g$, právě když pro každé $x \in X$ platí $f(x) \leq g(x)$.

Ověřte, že takto definovaná relace na $\mathbb{R}^X$ je skutečně uspořádání. Je toto uspořádání úplné?

Mocninná funkce se definuje pomocí konečného počtu násobení.

Při definici mocninné funkce postupujeme takto: pro každé číslo $x \in \mathbb{R}$ položíme

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^2 &= x \cdot x. \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Dostaneme funkce $\mathrm{pow}_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\mathrm{pow}_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisy $\mathrm{pow}_1(x) = x$ a $\mathrm{pow}_2(x) = x^2$. Tyto definice pak zobecníme na libovolné přirozené číslo tím, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ položíme $x^{n+1} = x^n \cdot x$ a $\mathrm{pow}_{n+1} = x^{n+1}$. Tento postup je založený na principu matematické indukce a k jeho použití nás opravňuje následující věta:

Věta 2.14. *Existuje právě jedna posloupnost funkcí* $(\mathrm{pow}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathrm{pow}_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\mathrm{pow}_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \tag{2.6.7}$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{pow}_{n+1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{pow}_n\,. \tag{2.6.8}$$

D ů k a z. Lze provést pomocí principu matematické indukce. (Ukáže se, že množina všech přirozených čísel m takových, že pro každé $n \in \{1, \ldots, m\}$ existuje právě jedna funkce pow_n tak, že jsou splněny podmínky (2.6.7) a (2.6.8), je induktivní.)

Funkce pow_n z předchozí věty se nazývá *mocninná funkce s exponentem n*. Hodnota této funkce v bodě x se označuje x^n.

Mocninná funkce má následující základní vlastnosti:

Věta 2.15. *Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí:*
1. $\mathrm{pow}_m \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+n}$.
2. $\mathrm{pow}_m \circ \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m \cdot n}$.
3. Je-li n liché, je funkce pow_n *lichá. Je-li n sudé, je funkce* pow_n *sudá.*
4. Funkce pow_n *je na intervalu* $(0, \infty)$ *rostoucí.*
5. Je-li $x > 1$ a $m > n$, je $x^m > x^n$. Je-li $0 < x < 1$ a $m > n$, je $x^m < x^n$.

D ů k a z. 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že množina X všech čísel $m \in \mathbb{N}$, pro která platí $\mathrm{pow}_m \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+n}$, je induktivní. První podmínka definice induktivní množiny říká, že má platit $\mathrm{pow}_1 \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{1+n}$. Je tedy splněna (podle (2.6.7) a (2.6.8)) a máme $1 \in X$. Druhá podmínka říká, že z $\mathrm{pow}_m \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+n}$ musí plynout $\mathrm{pow}_{m+1} \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+1+n}$. To je ovšem splněno, opět díky (2.6.7) a (2.6.8).

2. Důkaz tohoto vztahu necháme na čtenáři (je třeba postupovat podobně, jako v prvním případě).

3. Nechť X je množina všech přirozených čísel, pro která tvrzení platí. Jelikož funkce $\mathrm{pow}_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je lichá, $1 \in X$. Předpokládejme, že n je liché číslo a funkce pow_n lichá. Pak $\mathrm{pow}_{n+1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{pow}_n$ a funkce pow_{n+1} je sudá (jako součin dvou lichých funkcí — viz cvičení 27 k teto kapitole). Podobně, je-li číslo n sudé a funkce pow_n sudá, je funkce pow_{n+1} rovna součinu liché a sudé funkce a je lichá. Celkově, $n + 1 \in X$.

4. Opět využijeme princip matematické indukce.[10] Pro $n = 1$ je $\mathrm{pow}_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, což je rostoucí funkce. Nyní nechť $n \in \mathbb{N}$. Je-li funkce pow_n na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí, pak pro každé $x, yBR{\in}(0, \infty), x < y$, platí

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x \cdot x^n < && \text{(definice funkce } \mathrm{pow}_{n+1}\text{)}\\
&< y \cdot x^n < && \text{(jelikož } x^n > 0 \text{ a } x < y\text{)}\\
&< y \cdot y^n = && (y > 0 \text{ a } \mathrm{pow}_n \text{ je rostoucí})\\
&= y^{n+1} && \text{(definice funkce } \mathrm{pow}_{n+1}\text{)}
\end{aligned}$$

a funkce pow_{n+1} je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí.

5. Je-li $x > 1$, je $x^{n+1} > x^n$ — to plyne z věty 2.4, tvrzení 4, s neostrou nerovností nahrazenou ostrou[11] (viz cvičení 7). Podobně, je-li $k \in \mathbb{N}, k > 1$ a $x > 1, x^{n+k} > x^n$, pak $x^{n+k+1} > x^n$. První část tvrzení tedy plyne z principu matematické indukce. Druhá část tvrzení se dokáže podobně.

Na závěr uvedeme ještě několik příkladů funkcí.

Absolutní hodnotou reálného čísla x nazýváme číslo $|x|$, které je rovno x, je-li $x \geq 0$, a $-x$, jestliže $x < 0$. Dostáváme funkci $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Celou částí $[x]$ reálného čísla x nazýváme největší celé číslo, které je menší nebo rovno x. Dostáváme funkci $[\cdot]: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pro reálné číslo x klademe $\chi(x) = 0$, je-li $x \in \mathbb{I}$, a $\chi(x) = 1$, je-li $x \in \mathbb{Q}$. Dostáváme *Dirichletovu funkci* $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Riemannova funkce $\varrho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována takto: Jestliže $x \in \mathbb{I}$, je $\varrho(x) = 0$. Jestliže $x \in \mathbb{Q}$, pak existuje celé číslo p a přirozené číslo q, která jsou nesoudělná a $x = p/q$. Klademe $\varrho(x) = 1/q$.

Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi oborem hodnot a obrazem zobrazení (funkce)?
2. Existuje funkce, která je současně sudá i lichá?
3. Musí mít každá funkce supremum, případně maximum?
4. Existuje funkce, která je současně rostoucí i klesající? Existuje funkce, která je současně rostoucí i klesající, i v případě, že její definiční obor má více než jeden bod.
5. Existuje funkce, která je současně nerostoucí i neklesající?

Příklady

1. *Rozhodněte, které z množin* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ *s operacemi sčítání a násobení jsou pole a která z nich jsou spojitě uspořádaná.*

---

[10] Co bychom si bez něj počali?

[11] Znaménkům $\leq$ a $\geq$ se někdy říká neostrá nerovnost, znaménkům $<$ a $>$ ostrá.

Řešení: Dokážeme, že množina $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení celých čísel není pole. Budeme ověřovat podmínky uvedené v definici pole. Sčítání na množině $\mathbb{Z}$ je komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem 0 (a to je celé číslo) taková, že každé celé číslo má vzhledem k této operaci inverzi v množině $\mathbb{Z}$ (číslo opačné). Násobení na množině $\mathbb{Z}$ je komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem 1, ale existuje celé číslo různé od 0 takové, že nemá v $\mathbb{Z}$ vzhledem k této operaci inverzi. $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení není pole. Ostatní případy necháváme na čtenáři.

Podívejme se, zda pole $\mathbb{Q}$ s operacemi sčítání a násobení je spojitě uspořádané. Zvolme libovolně číslo $z \in \mathbb{I}$ a uvažujme dvě podmnožiny X, Y množiny $\mathbb{Q}$: $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < z\}$ a $Y = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > z\}$ Množiny X, Y jsou neprázdné a platí $X \leq Y$. Předpokládejme, že existuje $x \in \mathbb{Q}$ takové, že $X \leq x \leq Y$. Potom ale buď $x > z$ nebo $x < z$ (možnost $x = z$ nastat nemůže protože $z \in \mathbb{I}$ a $x \in \mathbb{Q}$). Pokud $x > z$, tak v intervalu (z, x) existuje nějaké racionální číslo (věta 2.12), a neplatí tedy $x \leq Y$. Pokud $x < z$, tak podle stejné věty existuje nějaké racionální číslo v intervalu (x, z), a neplatí tedy $X \leq x$. Z předpokladu, že existuje racionální číslo s uvedenou vlastností, jsme tedy v obou případech dostali spor. Takové racionální číslo tedy neexistuje a $\mathbb{Q}$ není spojitě uspořádané pole.[12)]

2. *Uvažujme Dirichletovu funkci χ. Najděte funkce χ^2, $[] \circ \chi$, $\chi(1-\chi)$, $\chi \circ \chi$, $\chi \circ []$.*
Řešení: Ukážeme, že $\chi(1-\chi) = 0$. Pokud $x \in \mathbb{Q}$, tak $\chi(x) = 0$ a tedy $(\chi(1-\chi))(x) = 0(1-0) = 0$. Pokud $x \in \mathbb{I}$, tak $\chi(x) = 1$ a tedy $(\chi(1-\chi))(x) = 1(1-1) = 0$. Zbylé případy necháváme čtenáři.

3. *Dokažte, že funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$ je na intervalu $(-\infty, 0]$ rostoucí a na intervalu $[0, \infty)$ konstatní.*
Řešení: Buďte $x, y \in (-\infty, 0)$ taková, že $x < y$. Potom $f(x) = x - |x| = x - (-x) = x + x = 2x$, obdobně $f(y) = 2y$ tedy platí $f(x) < f(y)$. To ovšem znamená, že funkce f je na intervalu $(-\infty, 0)$ rostoucí.

Nechť $x \geq 0$. Potom $f(x) = x - |x| = x - x = 0$. To znamená, že funkce f je na intervalu $[0, \infty)$ konstantní.

4. *Uvažujme stejnou funkci, jako v předcházejícím příkladě. Dokažte, že tato funkce je na $\mathbb{R}$ konkávní.*
Řešení: Máme dokázat, že pro každé tři body x, y, z takové, že $x < y < z$, platí

$$f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \leq 0$$

Nyní mohou nastat následující možnosti:
1. $x, y, z \in (-\infty, 0)$. Potom

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) = \\
&\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-(-y))(x-z) + (z-(-z))(y-x) = \\
&\quad = 2x(z-y) + 2y(x-z) + 2z(y-x) = \\
&\quad = 2(xz - xy + yx - yz + zy - zx) = \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

2. $x, y \in (-\infty, 0)$ a $z \in [0, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) = \\
&\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-(-y))(x-z) + (z-z)(y-x) = \\
&\quad = 2x(z-y) + 2y(x-z) + 0(y-x) = \\
&\quad = 2(xz - xy + yx - yz) = \\
&\quad = 2z(x-y) \\
&\quad \leq 0.
\end{aligned}$$

[12)] Tento důkaz je tedy založen na existenci alespoň jednoho iracionálního čísla. To jsme sice zatím neukázali, ale časem na to dojde.

3. $x \in (-\infty, 0)$ a $y, z \in [0, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) = \\
&\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-y)(x-z) + (z-z)(y-x) = \\
&\quad = 2x(z-y) + 0(x-z) + 0(y-x) = \\
&\quad = 2x(z-y) \le \\
&\quad \le 0.
\end{aligned}$$

4. $x, y, z \in [0, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) = \\
&\quad = (x-x)(z-y) + (y-y)(x-z) + (z-z)(y-x) = \\
&\quad = 0(z-y) + 0(x-z) + 0(y-x) = \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Jak je vidět, ve všech případech jsme zjistili, že $f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \le 0$. Z definice vyplývá, že uvedená funkce je konkávní.

5. *Buď* $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Zjistěte, je-li funkce f sudá, lichá.
Řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|} = -\frac{x}{|x|} = -f(x).$$

To znamená, že funkce f je lichá. Zároveň ale

$$f(1) = \tfrac{1}{|1|} = \tfrac{1}{1} = 1,$$

a tedy f není sudá (proč?).

6. *Nechť* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + (-1)^{[x]}$. *Dokažte, že funkce f je periodická, a určete její periodu.*
Řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $[x] \le x < [x] + 1$, a tedy $[x] + 2 \le x + 2 \le [x] + 2 + 1$. $[x] + 2$ je tedy největší celé číslo, které není větší než $x + 2$, a tedy $[x + 2] = [x] + 2$. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&f(x+2) = 2 + (-1)^{[x+2]} = \\
&\quad = 2 + (-1)^{[x]+2} = \\
&\quad = 2 + (-1)^{[x]}(-1)^2 = \\
&\quad = 2 + (-1)^{[x]} = \\
&\quad = f(x).
\end{aligned}$$

Funkce f je tedy periodická s periodou 2.

Cvičení

1. Je skládání zobrazení komutativní operace?
2. Uveďte příklad neasociativní binární operace.
3. Co je neutrálním prvkem operace sjednocení, průnik, rozdíl podmnožin množiny X a kompozice zobrazení z X do X?

4. Uvažujme množinu $\exp X$ s operací sjednocení. Má každý prvek $Y \in \exp X$ inverzi vzhledem k uvažované operaci?
5. Řekneme, že dvě celá čísla m, n jsou v relaci $\sim$, jestliže jejich rozdíl je celočíselný násobek trojky. Ověřte, že se jedná o ekvivalenci. Příslušnou faktorovou množinu označíme $\mathbb{Z}_3$ a jednotlivé třídy rozkladu $\bar{0} = [0]_\sim$, $\bar{1} = [1]_\sim$, $\bar{2} = [2]_\sim$. Na množině $\mathbb{Z}_3$ definujeme operaci sčítání takto: $[m]_\sim + [n]_\sim = [m+n]_\sim$. Operaci násobení definujeme stejně: $[m]_\sim \cdot [n]_\sim = [m \cdot n]_\sim$. Ověřte, že tyto operace jsou korektně definovány.[13] Ověřte, že množina $\mathbb{Z}_3$ s takto definovanými operacemi je pole. Uvažujme na množině $\mathbb{Z}_3$ relaci $\preccurlyeq$, jejíž graf je množina $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), \}$. Ověřte, že se jedná o uspořádání. Zjistěte, zda je toto uspořádání slučitelné se zmíněnými operacemi sčítání a násobení.
6. Dokažte, že pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}$ jsou vztahy $x \le y$, $0 \le y - x$, $x - y \le 0$ a $-y \le -x$ ekvivalentní.
7. Dokažte, že pro každá tři reálná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

   a) Jestliže $x < y$, pak $x + z < y + z$.
   b) Jestliže $0 < x$ a $0 < y$, pak $0 < xy$.
   c) Jestliže $0 < z$, jsou vztahy $x < y$ a $xz < yz$ ekvivalentní.
8. Dokažte, že množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.
9. Dokažte, že každá konečná pomnožina $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.
10. Ukažte, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí:

    a) $(-x) \cdot (-y) = xy$;
    b) $|-x| = |x|$;
    c) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
    d) $|x + y| \le |x| + |y|$;
    e) $||x| - |y|| \le |x - y|$.
11. Ukažte, že pro každá tři reálná čísla x, y, z platí: Jestliže $x < y$ a $z < 0$, pak $xz > yz$.
12. Ukažte, že pro každá tři reálná čísla x, y, ε, $\varepsilon > 0$ platí: $|x - y| < \varepsilon$ právě tehdy, když $x \in$ $\in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.
13. Zjistěte, zda pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

    a) $x/x = 1$;
    b) $x/x^2 = 1/x$;
    c) $x^2/x = x$.
14. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ jest:

    a) $x < -2x$;
    b) $x^2 - 5x + 6 > 0$;
    c) $|x + 2| + 3|x - 1| - 2|x - 3| > 0$;
    d) $\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-5)(x+6)} > 0$.
15. Najděte reálná čísla x, y taková, že

    a) $x - y < x + y$;
    b) $xy > x/y$.
16. Rozhodněte, zda existují taková dvě reálná čísla x, y, že $xy > x$ a $xy > y$ (resp. $xy < y$ a $xy < x$).
17. Rozhodněte, zda existují taková dvě reálná čísla x, y, že $x + y < x$ (resp. $x + y < x$ a $x + y < y$).
18. Najděte supremum, infimum, maximum a minimum množin $(-3, 2)$, $\{5, 0\}$, $\left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{10}\right\}$, $\{-4, 4\}$, $\{-7\}$, $[1, \infty)$.
19. Najděte $\sup X$ a $\inf X$, jestliže

    a) $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
    b) $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$;
    c) $X = \{(n+1)/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
    d) $X = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
20. Najděte maximum, minimum, supremum a infimum (jestliže existují) následujících množin:

    a) množina všech celých záporných čísel,
    b) množina všech záporných čísel,
    c) intervaly $(0, 1)$, $[-2, 1]$, $(0, 3]$, $[0, \infty)$,
    d) množina $[0, 1] \cup [2, 3]$,

[13] Ověřte, že je-li $[m]_\sim = [m']_\sim$ a $[n]_\sim = [n']_\sim$, je i $[m + n]_\sim = [m' + n']_\sim$. Podobně pro násobení.

e) množina všech iracionálních čísel z intervalu $(0,1)$,

f) množina všech racionálních čísel z $(0,1)$,

g) množina $\{n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

h) množina $\{(-1)^n \cdot (n/(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

21. Najděte maximum, minimum, supremum a infimum (jestliže existují) funkce f na množině Y, jestliže:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $Y = \{(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$ a $Y = \{(-1)^n(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;

c) $f = \varrho$ a $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

22. Platí věta o supremu (infimu) i v množinách $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$?

23. Předpokládejme, že množiny $X, Y \subset \mathbb{R}$ mají supremum. Nalezněte:

a) $\sup(X \cup Y)$;

b) $\inf(-X)$;

c) $\inf(1/X)$ (za předpokladu $0 < X$).

24. Existuje funkce, která je zároveň sudá i lichá?

25. Ukažte, že pro každou lichou funkci f platí: Jestliže $0 \in \operatorname{Dom} f$, potom $f(0) = 0$.

26. Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce taková, že: Jestliže $x \in \operatorname{Dom} f$, potom $-x \in \operatorname{Dom} f$. Ukažte, že funkci f lze vyjádřit jako součet sudé a liché funkce.

Návod: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

27. Buďte $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sudé funkce, buďte $g_1, g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liché funkce. Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou sudé (resp. liché): $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2$, $f_1 \cdot f_2$, $g_1 \cdot g_2$, $f_1 + g_1$, $f_1 \cdot g_1$, $f_1 \circ g_1$, $g_1 \circ f_1$.

28. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou sudé resp. liché:

a) $f(x) = x/|x|$;

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

c) $f(x) = (2-x)/(2+x)$;

d) $f(x) = x - x^3/6 + x^5/120$;

e) $f(x) = 2$.

29. Existuje ke každé funkci funkce inverzní? Může existovat inverzní funkce k funkci periodické?

30. Ukažte, že každá z následujících funkcí je sama k sobě inverzní:

a) $f(x) = x$;

b) $f(x) = -x$;

c) $f(x) = 1/x$;

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

e) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$;

f) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-a}$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

31. Dokažte následující tvrzení: Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce rostoucí na každém intervalu $(-n, n)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak je f rostoucí na $\mathbb{R}$.

32. Sestrojte rostoucí funkce f, g na intervalu (x, y) tak, aby funkce $f \cdot g$ nebyla rostoucí na (x, y).

33. Existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je současně rostoucí na $\mathbb{R}$ a lichá (resp. rostoucí na $\mathbb{R}$ a sudá)?

34. Dokažte následující tvrzení: Buďte $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce takové, že f je neklesající na $\mathbb{R}$ a $f + g$ je klesající na $\mathbb{R}$. Pak g je klesající na $\mathbb{R}$.

35. Dokažte následující tvrzení: Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce neklesající na intervalu (x, y). Pak je pro každé $z \in \mathbb{R}$ množina $f^{-1}(z) \cap (x, y)$ prázdná nebo jednoprvková nebo interval.

36. Rozhodněte, na kterých intervalech jsou dané funkce rostoucí a na kterých klesající:

a) $f(x) = x^2$;

b) $f(x) = x^3$;

c) $f(x) = |x|$;

d) $f(x) = x + |x|$.

37. Je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rostoucí, je nutně

a) funkce $2f$ rostoucí,

b) funkce $-f$ klesající,

c) funkce f^2 rostoucí?

38. Nechť funkce f i g jsou definovány na stejném intervalu.

a) Jsou-li funkce f i g rostoucí, je funkce $f+g$ také rostoucí?

b) Najděte rostoucí funkci f a klesající funkci g tak, aby funkce $f+g$ byla rostoucí.

39. Sestrojte funkce $f, g\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f \cdot g = 0$ a neplatilo ani $f(X) = \{0\}$ ani $g(X) = \{0\}$. Je možné nalézt takové funkce pro libovolnou neprázdnou množinu X?

40. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce taková, že pro každý otevřený interval J platí $f(J) \subset J$. Pak $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

41. Načrtněte graf funkce f, je-li:

a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$; b) $f(x) = |x-1|$; c) $f(x) = -x|x|$;

d) $f(x) = (x-1)/(x+1)$.

42. Nechť $p\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{1}{x} - 1$. Ověřte, že platí:

a) $p + p \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = -2$; b) $p \circ (2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2}(p-1)$; c) $p \circ (1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{p}$;

d) $\dfrac{-1}{p \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1)} = p + 2$; e) $\dfrac{1}{p+1} = p \circ \left(\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right) + 1$.

43. Známe-li graf funkce $f(x)$, jak sestrojíte grafy funkcí $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+c)$, $f(x)+c$, $a \cdot f(x)$, $f(a \cdot x)$?

44. Jsou dány funkce f a g. Najděte $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$, platí-li:

a) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, $g(x) = 2 - x$;

b) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le 0, \\ x & \text{pro } x > 0, \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le 0, \\ -x^2 & \text{pro } x > 0; \end{cases}$

c) $f, g\colon [0,2] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0,1], \\ 2-x & \text{pro } x \in (1,2], \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 2-x & \text{pro } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

45. Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{pro } x < 1, \\ 2x-1 & \text{pro } x \ge 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{pro } x < 0 \\ x+2 & \text{pro } x \ge 0. \end{cases}$$

a) Určete, pro která x platí $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = x$, $f(x) = g(x)$, $f(g(x)) = 1$, $g(f(x)) = 1$.

b) Dokažte, že $f(x) \ge 0$ pro všechna x.

c) Dokažte, že $g(f(x)) > 0$ pro všechna x.

d) Zjistěte, zda existuje inverzní funkce k funkcím f, g.

e) Určete funkci $f \circ g$ a načrtněte její graf.

46. Buďte f periodická funkce s periodou p a n přirozené číslo. Ukažte, že číslo np je také perioda této funkce.

47. Ukažte, že každá konstantní funkce je periodická.

48. Udejte příklad nekonstantní periodické funkce, která nemá nejmenší periodu.

49. Které z následujících funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou periodické:

a) $f(x) = [x]$; b) $f(x) = x - [x]$.

50. Nechť funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou periodické se stejnou periodou. Dokažte, že funkce $f+g$ a $f \cdot g$ jsou periodické.

51. Je součet dvou periodických funkcí vždy periodická funkce?

52. Určete $\sup_{x \in X} f(x)$, $\inf_{x \in X} f(x)$, $\max_{x \in X} f(x)$, $\min_{x \in X} f(x)$, je-li:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $X = \mathbb{R}$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $X = (-3, 2)$;

c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ a $X = (-\infty, 0)$.

53. Buďte $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničené funkce a nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $h(x) \neq 0$. Rozhodněte, zda funkce $f + g$, $f \cdot g$, $1/h$, g/h jsou ohraničené na $\mathbb{R}$.
54. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte, že je f konvexní na $\mathbb{R}$, jestliže

    a) $f(x) = |x| - x$; b) x^2.