Pravděpodobnost a statistika

Náhodné vektory

Vilém Vychodil

KMI/PRAS, Přednáška 8

Vytvořeno v rámci projektu 2963/2011 FRVŠ

Přednáška 8: Přehled

1. Náhodné vektory:
   - definice náhodného vektoru, vícerozměrná Borelovská jevová pole,
   - rozdělení pravděpodobnosti, borelovské funkce,
   - marginální a sdružená rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce,
   - diskrétní a spojitá sdružená rozdělení, střední hodnoty a variance.
2. Nezávislost náhodných veličin:
   - definice nezávislosti náhodných veličin, ekvivalentní vyjádření,
   - nezávislost a sdružené pravděpodobností funkce a funkce hustoty,
   - kovariance, korelační koeficient, lineární regrese,
   - podmíněná rozdělení, distribuční funkce, očekávané hodnoty.
3. Generování pseudonáhodných čísel:
   - ruletová metoda, metoda inversní transformace,
   - techniky založené na simulaci, využití funkce hustoty.

Příklad (Motivace pro náhodné vektory)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, dvě náhodné veličiny $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ a $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ a Borelovské množiny $A, B \in \mathcal{B}$. Zajímáme se o pravděpodobnost, že Y nabude hodnoty z množiny A a současně Z nabude hodnoty z množiny B:

$$\begin{aligned} P(\{Y \in A\} \cap \{Z \in B\}) &= P(\{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) \in A\} \cap \{\omega \in \Omega \,|\, Z(\omega) \in B\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) \in A \text{ a } Z(\omega) \in B\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \,|\, \langle Y(\omega), Z(\omega) \rangle \in A \times B\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \,|\, \boldsymbol{X}(\omega) \in A \times B\}), \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované $\boldsymbol{X}(\omega) = \langle Y(\omega), Z(\omega) \rangle$. Použitím standardní notace pro vyjádření inverzních obrazů

$$\{\boldsymbol{X} \in A \times B\} = \{\omega \in \Omega \,|\, \boldsymbol{X}(\omega) \in A \times B\},$$

můžeme psát

$$P(\{Y \in A\} \cap \{Z \in B\}) = P(\{\boldsymbol{X} \in A \times B\}).$$

To jest: $\boldsymbol{X}$ lze chápat jako *dvourozměrnou náhodnou veličinu* (*náhodný vektor*).

Náhodný vektor

Zobecnění pojmu náhodná veličina:

Definice (Náhodný vektor / vícerozměrná náhodná veličina)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Zobrazení $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazýváme (n-**rozměrný**) **náhodný vektor** v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ (angl.: *random vector*) pokud

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \boldsymbol{X}(\omega) \in (-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]\} \in \mathcal{F}.$$

platí pro každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Poznámky:

- náhodná veličina $=$ *jednorozměrný* náhodný vektor,
- i-tou složku $\boldsymbol{X}(\omega)$ označujeme $\boldsymbol{X}(\omega)(i)$,
- podmínku z definice lze psát $\{\omega \in \Omega \,|\, \boldsymbol{X}(\omega)(i) \leq a_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n\} \in \mathcal{F}$ nebo $\{\boldsymbol{X} \in (-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]\} \in \mathcal{F}$ pomocí inverzních obrazů.

Vícerozměrné Borelovské jevové pole

Úzce související pojem:

Definice (Vícerozměrné Borelovské jevové pole)

Mějme $\Omega = \mathbb{R}^n$ a nechť

$$\mathcal{A}^n = \{(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n] \,|\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Pak σ-algebru $\mathcal{B}^n = \mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}$ nazveme **n-rozměrné Borelovské (jevové) pole** a každou $A \in \mathcal{B}^n$ nazveme **(n-rozměrná) Borelovská množina**.

Poznámky:

- $\mathcal{B}^1$ je klasické Borelovské jevové pole (Přednáška 3),
- motivace pro zavedení: $\{\boldsymbol{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ pro „rozumné podmnožiny“ $B \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B}^n$ má několik ekvivalentních vyjádření, . . .

Věta (Ekvivalentní zavedení $\mathcal{B}^n$)

$\mathcal{B}^n$ je σ-algebra generovaná $\mathcal{A}^n = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \,|\, a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n\}$.

Důkaz.

Nejprve prokážeme, že každá $(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]$ náleží to $\mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}$. To plyne z toho, že $\mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}$ je uzavřená na sjednocení spočetně mnoha množin:

$$(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big((a_1 - i, a_1] \times \cdots \times (a_n - i, a_n]\big) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}.$$

Tím jsme prokázali $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}$. Abychom dokázali opačnou inkluzi, stačí ověřit, že každá $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ náleží to $\mathcal{B}^n$. To prokážeme s využitím faktu, že $\mathcal{B}^n$ je uzavřená na množinový rozdíl. Například pro $n = 2$ platí, že $(a, b] \times (c, d]$ je rovno

$$((-\infty, b) \times (-\infty, d)) - ((-\infty, b) \times (-\infty, c)) - ((-\infty, a) \times (-\infty, d)).$$

Obecně lze $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ vyjádřit rozdílem $n + 1$ množin ve tvaru $(-\infty, c_1] \times \cdots \times (-\infty, c_n]$, to jest $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{B}^n$. Tím jsme prokázali, že $\mathcal{F}_{\mathcal{A}^n} \subseteq \mathcal{B}^n$. Dohromady dostáváme $\mathcal{B}^n = \mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}$. $\square$

Věta (Generování $\mathcal{B}^n$ pomocí jednorozměrných Borelovských množin)

$\mathcal{B}^n$ je σ-algebra generovaná $\mathcal{A}^n = \{A_1 \times \cdots \times A_n \,|\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}\}$.

Důkaz.

Zřejmě platí, že každá $(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]$ náleží do $\mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}$, protože každá $(-\infty, a_i]$ je Borelovská množina, tedy $(-\infty, a_i] \in \mathcal{B}$. Odtud máme $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}^n}$.

Vezměme libovolné $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$. Nejprve nahlédněme, že

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1} \times (a, b] \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i} \in \mathcal{B}^n$$

pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $a, b \in \mathbb{R}$. To plyne z předchozího tvrzení a užitím uzavřenosti $\mathcal{B}^n$ na sjednocení spočetně mnoha množin. Jelikož $A_i \in \mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ je generovaná otevřenými intervaly, ihned dostáváme, že

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1} \times A_i \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i} \in \mathcal{B}^n.$$

Fakt $A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{B}^n$ tedy plyne z uzavřenosti $\mathcal{B}^n$ na průniky n množin. $\square$

Věta (Ekvivalentní zavedení náhodného vektoru)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Zobrazení $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je náhodný vektor v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ právě tehdy, když $\{\boldsymbol{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ platí pro každé $B \in \mathcal{B}^n$.

Důkaz.

Pokud $\{\boldsymbol{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ platí pro každé $B \in \mathcal{B}^n$, pak je $\boldsymbol{X}$ zřejmě náhodný vektor, protože $(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n] \in \mathcal{B}^n$.

Opačnou implikaci prokážeme následovně: Pro $\mathcal{A}^n = \{B \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, \{\boldsymbol{X} \in B\} \in \mathcal{F}\}$ platí, že $\mathcal{A}^n$ je σ-algebra (jde o obraz σ-algebry $\mathcal{F}$, Přednáška 5). Dále platí, že $\mathcal{A}^n$ zřejmě obsahuje všechny množiny tvaru $(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]$, protože $\boldsymbol{X}$ je náhodný vektor. Tím pádem $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{A}^n$, protože $\mathcal{B}^n$ je generovaná právě množinami v předchozím tvaru. Odtud dostáváme $\{\boldsymbol{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ pro každou $B \in \mathcal{B}^n$. $\square$

Poznámka:

- Zobecnění věty o ekvivalentním zavedení náhodné veličiny (Přednáška 5).

Rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru

Definice (Rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a náhodný vektor $\boldsymbol{X} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pak se pravděpodobnostní míra $P_{\boldsymbol{X}} \colon \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$ na σ-algebře n-rozměrných Borelovských množin $\mathcal{B}^n$ definovaná

$$P_{\boldsymbol{X}}(B) = P\big(\{\boldsymbol{X} \in B\}\big), \qquad \text{pro každou } B \in \mathcal{B}^n$$

nazývá **rozdělení pravděpodobnosti** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Poznámky:

- pro $n = 1$ je $P_{\boldsymbol{X}}$ rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny (Přednáška 5),
- pro $\boldsymbol{X} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ někdy píšeme $P_{\boldsymbol{X}}(B_1, \ldots, B_n)$ místo $P_{\boldsymbol{X}}(B_1 \times \cdots \times B_n)$,
- místo $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a $\boldsymbol{X} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ se (obvykle) vedou úvahy jen v $\langle \mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\boldsymbol{X}} \rangle$.

Borelovské funkce

Definice (Borelovská funkce)

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá **Borelovská funkce** (angl.: *Borel function*), pokud pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí, že $\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \leq a\} \in \mathcal{B}^n$.

Poznámka: Pro $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ uvažujeme **složenou funkci** $g(f)\colon A \to C$ (někdy značíme $f \circ g$) takovou, že $(g(f))(x) = g(f(x))$ pro každé $x \in A$.

Speciálně pro $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ a $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ máme $g(\boldsymbol{f})\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Věta

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}, P\rangle$. Pak platí:

1. *X je náhodná veličina v $\langle \mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P\rangle$ právě tehdy, když je X Borelovská funkce.*
2. *Je-li $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ náhodný vektor v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$ a $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je Borelovská funkce, pak $g(\boldsymbol{X})$ je (jednorozměrná) náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$.*

Důkaz.

První tvrzení plyne přímo z definice náhodného vektoru.

Druhé tvrzení prokážeme takto: Vezměme libovolné $a \in \mathbb{R}$. Platí, že

$$\begin{aligned}\{g(\boldsymbol{X}) \leq a\} &= \{\omega \in \Omega \,|\, g(\boldsymbol{X}(\omega)) \leq a\} = \{\omega \in \Omega \,|\, \boldsymbol{X}(\omega) \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, g(\boldsymbol{x}) \leq a\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, \boldsymbol{X}(\omega) \in \{g \leq a\}\} = \{\boldsymbol{X} \in \{g \leq a\}\}.\end{aligned}$$

Jelikož g je Borelovská funkce, pak $\{g \leq a\} \in \mathcal{B}^n$. Odtud ihned dostáváme, že $\{\boldsymbol{X} \in \{g \leq a\}\} \in \mathcal{F}$, z čehož plyne, že $g(\boldsymbol{X})$ je náhodná veličina. □

Důsledek: Pro Borelovskou funkci g platí $\{g \in B\} \in \mathcal{B}^n$ pro každou $B \in \mathcal{B}$.

Příklad (Projekce jsou Borelovské funkce)

Každá ***i*-tá projekce** π_i, to jest zobrazení $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pro všechna $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, je Borelovská funkce, protože:

$$\{\pi_i \leq a\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1} \times (-\infty, a] \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i} \in \mathcal{B}^n.$$

Marginální náhodné veličiny a rozdělení pravděpodobnosti

S využitím projekcí můžeme zavést:

Definice (Marginální náhodná veličina a rozdělení pravděpodobnosti)

Mějme náhodný vektor $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ s rozdělením $P_{\boldsymbol{X}}$, pak každá $\pi_i(\boldsymbol{X})\colon \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá **marginální náhodná veličina** (angl.: *marginal random variable*) a $P_{\pi_i(\boldsymbol{X})}$ se nazývá **marginální rozdělení pravděpodobnosti** (angl.: *marginal distribution*).

Poznámka: Podle definice lze každé rozdělení $P_{\pi_i(\boldsymbol{X})}\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ vyjádřit

$$\begin{aligned}
P_{\pi_i(\boldsymbol{X})}(B) &= P(\{\pi_i(\boldsymbol{X}) \in B\}) = P(\{\boldsymbol{X} \in \{\pi_i \in B\}\}) = P_{\boldsymbol{X}}(\{\pi_i \in B\}) \\
&= \boxed{P_{\boldsymbol{X}}(\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1} \times B \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i})}\,,
\end{aligned}$$

pro každou Borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ *pouze na základě znalosti* $P_{\boldsymbol{X}}$. (**!!**)

V praxi obvykle známe $\langle \mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\boldsymbol{X}} \rangle$, kdežto $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ jsou neznámé.

Sdružené rozdělení pravděpodobnosti

Definice (Sdružené rozdělení pravděpodobnosti)

Mějme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pak se zobrazení $P_{X_1,\ldots,X_n} \colon \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$P_{X_1,\ldots,X_n}(A_1, \ldots, A_n) = P(\{X_1 \in A_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\})$$

pro každé $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, nazývá **sdružené rozdělení pravděpodobnosti** náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ (angl.: *joint probability distribution*).

Poznámky:

- $\{X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n\}$ je zkrácená notace pro $\{X_1 \in A_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in A_n\}$.
- Pokud známe $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a $X_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ (pro každé $i = 1, \ldots, n$), pak

$$P_{X_1,\ldots,X_n}(A_1, \ldots, A_n) = P_{\boldsymbol{X}}(A_1, \ldots, A_n) = P(\{\boldsymbol{X} \in A_1 \times \cdots \times A_n\}),$$

  kde $\boldsymbol{X}(\omega)(i) = X_i(\omega)$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $\omega \in \Omega$.

Distribuční funkce

Definice (Distribuční funkce náhodného vektoru)

Mějme n-rozměrný náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ s rozdělením $P_{\boldsymbol{X}}$. Potom zobrazení $F_{\boldsymbol{X}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P_{\boldsymbol{X}}\big((-\infty, x_1], \ldots, (-\infty, x_n]\big) \qquad \text{pro každé } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

se nazývá **distribuční funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Poznámky:

- Pro $n = 1$ přechází v distribuční funkci F_X náhodné veličiny;
- distribuční funkce náhodných vektorů mají analogické vlastnosti jako distribuční funkce náhodných veličin (Přednáška 5);
- pro dvourozměrný náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ s rozdělením $P_{\boldsymbol{X}}$ máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} F_{\boldsymbol{X}}(x,y) &= \lim_{x\to\infty} P_{\boldsymbol{X}}\big((-\infty,x],(-\infty,y]\big) = P_{\boldsymbol{X}}\big(\textstyle\bigcup_{x=1}^{\infty}(-\infty,x]\times(-\infty,y]\big)\\ &= P_{\boldsymbol{X}}\big(\mathbb{R}\times(-\infty,y]\big) = P_{\pi_2(\boldsymbol{X})}\big((-\infty,y]\big) = F_{\pi_2(\boldsymbol{X})}(y).\end{aligned}$$

Marginální a sdružené distribuční funkce

Analogicky jako pro rozdělení zavádíme marginální a sdružené distribuční funkce:

Definice (Marginální distribuční funkce)

Mějme náhodný vektor $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ s distribuční funkcí $F_{\boldsymbol{X}}$, pak se každá $F_{\pi_i(\boldsymbol{X})}$ nazývá **marginální distribuční funkce** (angl.: *marginal distribution function*).

Definice (Sdružená distribuční funkce)

Mějme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pak se zobrazení $F_{X_1,\ldots,X_n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq x_n\}),$$

pro každé $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, nazývá **sdružená distribuční funkce** náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ (angl.: *joint distribution function*).

Diskrétní náhodné vektory

Definice (Diskrétní náhodný vektor)

Náhodný vektor $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ s rozdělením $P_{\boldsymbol{X}}$ se nazývá **diskrétní** pokud existuje spočetná množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že $P_{\boldsymbol{X}}(C) = 1$.

Připomeňme (Přednáška 3), že pravděpodobnostní míra $P_{\boldsymbol{X}} : \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá *diskrétní* pokud existuje spočetně mnoho $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ a koeficientů $a_i \in [0,1]$ (pro každé $i = 1, 2, \ldots$) tak, že $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ a $P_{\boldsymbol{X}}$ lze psát

$$P_{\boldsymbol{X}}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{\boldsymbol{x}_i}(A), \qquad \text{pro každou } A \in \mathcal{B}^n,$$

kde $\delta_{\boldsymbol{x}_i} : \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$ je Diracova míra koncentrovaná v $\boldsymbol{x}_i$. Lze prokázat:

Věta (Charakterizace diskrétních náhodných vektorů)

Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ s rozdělením $P_{\boldsymbol{X}}$ je diskrétní právě tehdy, když $P_{\boldsymbol{X}}$ je diskrétní pravděpodobnostní míra.

Důkaz (veden podobně u náhodných veličin, PŘEDNÁŠKA 5).

Tvrzení je ve tvaru ekvivalence, prokazujeme proto obě implikace.

„$\Rightarrow$“: Předpokládejme, že X je diskrétní náhodný vektor a označme C spočetnou podmnožinu $\mathbb{R}^n$ pro niž $P_{\boldsymbol{X}}(C) = 1$. Lze psát $C = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots\}$, kde $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}_j$ pro $i \neq j$. Z faktu $P_{\boldsymbol{X}}(C) = 1$ dostáváme pro každou $B \in \mathcal{B}^n$:

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{X}}(B) = P_{\boldsymbol{X}}(B \cap C) &= P_{\boldsymbol{X}}\left(\textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty}(B \cap \{\boldsymbol{x}_k\})\right) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P_{\boldsymbol{X}}(B \cap \{\boldsymbol{x}_k\}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P_{\boldsymbol{X}}(\{\boldsymbol{x}_k\}) \cdot \delta_{\boldsymbol{x}_k}(B). \end{aligned}$$

Užitím σ-aditivity, $1 = P_{\boldsymbol{X}}(C) = P_{\boldsymbol{X}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\boldsymbol{x}_k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{\boldsymbol{X}}(\{\boldsymbol{x}_k\})$, takže za hledané koeficienty a_i lze vzít hodnoty $P_{\boldsymbol{X}}(\{\boldsymbol{x}_i\})$ a $P_{\boldsymbol{X}}$ je tím pádem diskrétní pravděpodobnostní míra.

„$\Leftarrow$“: Nechť $P_{\boldsymbol{X}}$ je diskrétní míra ve tvaru $P_{\boldsymbol{X}}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{\boldsymbol{x}_i}(A)$. Pak lze za hledanou $C \subseteq \mathbb{R}^n$ vzít spočetnou $C = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots\}$. Zbývá ověřit $P_{\boldsymbol{X}}(C) = 1$:

$$P_{\boldsymbol{X}}(C) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{\boldsymbol{x}_i}(C) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1.$$

$\square$

Pravděpodobnostní funkce

U diskrétních náhodných vektorů uvažujeme pravděpodobnostní funkce:

Definice (Pravděpodobnostní funkce)

Mějme diskrétní náhodný vektor $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ s rozdělením $P_{\boldsymbol{X}}$. Zobrazení $f_{\boldsymbol{X}}\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, kde $f_{\boldsymbol{X}}(x_1,\ldots,x_n) = P_{\boldsymbol{X}}(\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\})$ pro každé $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, se nazývá **pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Zjednodušení: $P_{\boldsymbol{X}}(A)$ pro diskrétní náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ lze vyjádřit

$$P_{\boldsymbol{X}}(A) = \sum\nolimits_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in A} f_{\boldsymbol{X}}(x_1,\ldots,x_n).$$

Distribuční funkce $F_{\boldsymbol{X}}$ má tvar

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{X}}(a_1,\ldots,a_n) &= \sum\nolimits_{x_1 \leq a_1} \cdots \sum\nolimits_{x_n \leq a_n} f_{\boldsymbol{X}}(x_1,\ldots,x_n) \\ &= \sum \{ f_{\boldsymbol{X}}(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 \leq a_1, \ldots, x_n \leq a_n \}. \end{aligned}$$

Marginální a sdružené pravděpodobnostní funkce

Definice (Marginální a sdružené pravděpodobnostní funkce)

Mějme náhodný vektor $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ s pravděpodobnostní funkcí $f_{\boldsymbol{X}}$, pak se každá $f_{\pi_i(\boldsymbol{X})}$ nazývá **marginální pravděpodobnostní funkce**. Mějme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pak se zobrazení $f_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}),$$

pro každé $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, nazývá **sdružená pravděpodobnostní funkce** náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$.

Poznámka: Marginální pravděpodobnostní funkce lze dle definice psát ve tvaru

$$f_{\pi_i(\boldsymbol{X})}(x) = \sum\nolimits_{x_1,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{R}} f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_{n-1}).$$

Příklad (Výsledek házení dvěma kostkami)

Problém: Jsou vrženy dvě nefalšované šestistěnné kostky. Předpokládejme, že X označuje menší z výsledných hodnot a Y označuje větší z obou výsledných hodnot.

Úkol: *Určete, jak vypadají sdružené a marginální pravděpodobnostní a distribuční funkce veličin* X *a* Y.

$\frac{11}{36}$	6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\frac{9}{36}$	5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
$\frac{7}{36}$	4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
$\frac{5}{36}$	3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
$\frac{3}{36}$	2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
$\frac{1}{36}$	1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
		1	2	3	4	5	6
		$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

1	6	$\frac{11}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{35}{36}$	1
$\frac{25}{36}$	5	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{25}{36}$
$\frac{16}{36}$	4	$\frac{7}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{16}{36}$
$\frac{9}{36}$	3	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{36}$
$\frac{4}{36}$	2	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$
$\frac{1}{36}$	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
		1	2	3	4	5	6
		$\frac{11}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Příklad (Vyjádření marginálních pravděpodobnostních funkcí)

Problém: Mějme náhodné veličiny X a Y, které mají sdruženou pravděpodobnostní funkci $f_{X,Y}$ danou předpisem

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2^{x+1}} \qquad \text{pokud } x \geq y \text{ a } x, y \in \mathbb{N},$$

a $f_{X,Y}(x,y) = 0$ ve všech ostatních případech.

Úkol: *Najděte marginální pravděpodobnostní funkce f_X a f_Y.*

Řešení: Pomocí součtu prvků geometrické řady dostáváme:

$$f_X(x) = \sum\nolimits_{y=1}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = \sum\nolimits_{y=1}^{x} \frac{1}{2^{x+1}} = \frac{x}{2^{x+1}},$$

$$f_Y(y) = \sum\nolimits_{x=1}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = \sum\nolimits_{x=y}^{\infty} \frac{1}{2^{x+1}} = \sum\nolimits_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x+y+1}} = \frac{1}{2^{y+1}} \sum\nolimits_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x}}$$

$$= \frac{1}{2^{y+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{y+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{y}}.$$

Věta (O sdruženém rozdělení diskrétních náhodných veličin)

Pokud jsou $X_1, \ldots, X_n$ diskrétní veličiny, pak je jejich sdružené rozdělení pravděpodobnosti $P_{X_1,\ldots,X_n}$ diskrétní.

Důkaz.

Pokud jsou všechny $X_1, \ldots, X_n$ diskrétní náhodné veličiny, pak existují spočetné množiny $C_1, \ldots, C_n \subseteq \mathbb{R}$ tak, že $P_{X_1}(C_1) = \cdots = P_{X_n}(C_n) = 1$. Tedy i jejich kartézský součin $C_1 \times \cdots \times C_n$ je spočetná množina. Stačí ukázat, že hledaná spočetná podmnožina $\mathbb{R}^n$ je právě $C_1 \times \cdots \times C_n$.

Pro každou C_i položme

$$D_i = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1} \times C_i \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i}.$$

Jelikož $P_{X_1,\ldots,X_n}(D_i) = P_{X_i}(C_i) = 1$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, dostáváme:

$$P_{X_1,\ldots,X_n}(C_1 \times \cdots \times C_n) = P_{X_1,\ldots,X_n}(D_1 \cap \cdots \cap D_n) = 1.$$

□

Věta (O marginálních rozděleních diskrétního sdruženého rozdělení)

Pokud je sdružené rozdělení pravděpodobnosti $P_{X_1,\ldots,X_n}$ náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ diskrétní, pak jsou všechny $X_1, \ldots, X_n$ diskrétní veličiny.

Důkaz.

Nechť je sdružené rozdělení $P_{X_1,\ldots,X_n}$ diskrétní. To jest, existuje spočetná $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že $P_{X_1,\ldots,X_n}(C) = 1$. Pro libovolné $i = 1, \ldots, n$ položme $C_i = \{x_i \mid \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in C\}$. Označme

$$D_i = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1} \times C_i \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i}.$$

Zřejmě $C \subseteq D_i$. Z monotonie $1 = P_{X_1,\ldots,X_n}(C) \leq P_{X_1,\ldots,X_n}(D_i) = P_{X_i}(C_i)$, náhodná veličina X_i je tedy diskrétní, protože C_i je spočetná. $\square$

Poznámky:

- Opačná implikace jako u předchozího tvrzení; dohromady dostáváme:
- $P_{X_1,\ldots,X_n}$ *je diskrétní právě tehdy, když jsou všechny* $X_1, \ldots, X_n$ *diskrétní.*

Absolutně spojité sdružené rozdělení

Definice (Spojitě sdružené náhodné věličiny, angl.: *jointy continuous*)

Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou (**absolutně**) **spojitě sdružené** pokud existuje funkce $f_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ tak, že

$$P_{X_1,\ldots,X_n}\big((-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]\big) = \int_{-\infty}^{a_n} \cdots \int_{-\infty}^{a_1} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Funkce $f_{X_1,\ldots,X_n}$ se nazývá **sdružená hustota** (angl.: *joint density*). Rozdělení pravděpodobnosti $P_{X_1,\ldots,X_n}$ se nazývá (**absolutně**) **spojité sdružené rozdělení** (angl.: *jointly continuous probability distribution*).

Marginální hustoty: pro marginální veličinu X_i zavádíme:

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Příklad (Sdružené abolutně spojité náhodné veličiny)

Mějme náhodné veličiny X a Y se sdruženou funkcí hustoty

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot (1 - |y|), \qquad \text{pokud} \ -1 < x < 1 \text{ a } -1 < y < 1,$$

a $f_{X,Y}(x,y) = 0$ jinak. Pro $A = \{\langle x,y\rangle \,|\, 0 < x < 1 \text{ a } 0 < y < x\}$ dostáváme

$$P_{X,Y}(A) = \int_0^1 \int_0^x f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot \int_0^x 1 - |y|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2}\left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{9}{40}.$$

To jest,

$$P_{X,Y}(A) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, 0 < X(\omega) < 1 \text{ a } 0 < Y(\omega) < X(\omega)\}) = \frac{9}{40} = 0.225.$$

Věta (O absolutně spojitých marginálních veličinách)

Mějme náhodné veličiny X a Y s absolutně spojitým sdruženým rozdělením daným sdruženou funkcí hustoty $f_{X,Y}$. Potom X a Y jsou absolutně spojité náhodné veličiny s marginálními hustotami f_X a f_Y.

Důkaz.

Pokud je sdružené rozdělení X a Y absolutně spojité, potom máme

$$P_X\big((a,b]\big) = P_{X,Y}\big((a,b] \times \mathbb{R}\big) = \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$P_Y\big((a,b]\big) = P_{X,Y}\big(\mathbb{R} \times (a,b]\big) = \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

To znamená, že f_X a f_Y jsou funkce hustoty rozdělení veličin X a Y. $\square$

Poznámka: Na rozdíl od diskrétních veličin, opačné tvrzení neplatí. (**!!**)

Příklad (Sdružené rozdělení, které není absolutně spojité)

Uvažujme absolutně spojitou náhodnou veličinu X jejíž funkce hustoty je $f_X = \mathbf{1}_{[0,1]}$. To jest, $f_X(x) = 1$ pro $x \in [0,1]$ a $f_X(x) = 0$ ve všech ostatních případech.

Položme $Y = X$. Obě X a Y jsou *absolutně spojité náhodné veličiny.*

Uvažujme nyní $B = \{\langle x, x\rangle \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Platí

$$P\big(\{\langle X, Y\rangle \notin B\}\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \neq Y(\omega)\}\big) = P(\{X \neq Y\}) = 0.$$

Kdyby X a Y měly sdruženou funkci hustoty $f_{X,Y}$, pak by platilo

$$\begin{aligned} P\big(\{\langle X, Y\rangle \notin B\}\big) &= P(\{X < Y\}) + P(\{X > Y\}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = P_{X,Y}(\mathbb{R}^2) = 1, \end{aligned}$$

což by byl spor s faktem, že $P(\{X \neq Y\}) = 0$; $P_{X,Y}$ proto *není absolutně spojité.*

Očekávané hodnoty

Očekávané hodnoty marginálních veličin:

- uvažujeme náhodný vektor $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ s rozdělením $P_{\boldsymbol{X}}$;
- marginální veličiny $\pi_i(\boldsymbol{X})\colon \Omega \to \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, n$;
- lze uvažovat očekávané hodnoty $E\big(\pi_i(\boldsymbol{X})\big)$, $E\big(g(\pi_i(\boldsymbol{X}))\big), \ldots$ (Přednáška 7)

Střední hodnoty marginálních veličin:

- $E\big(\pi_i(\boldsymbol{X})\big)$ je střední hodnota i-té marginální veličiny;
- pokud se marginální veličina označuje X, pak označujeme $E(X) = \mu_X$.

Rozptyl marginálních veličin:

- $E\Big(\big(\pi_i(\boldsymbol{X}) - E(\pi_i(\boldsymbol{X}))\big)^2\Big)$ je rozptyl i-té marginální veličiny;
- pokud je marginální veličina X, píšeme $E\big((X - \mu_X)^2\big) = \sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Příklad (Motivace pro nezávislost náhodných veličin)

Uvažujme dvě náhodné veličiny X a Y v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pro libovolné $A, B \in \mathcal{B}$ platí, že $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$ a $\{Y \in B\} \in \mathcal{F}$. Podle definice *nezávislosti náhodných jevů* (Přednáška 4) platí, že $\{X \in A\}$ a $\{Y \in B\}$ pokud

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\}).$$

Pomocí sdružených a marginálních rozdělení lze předchozí vyjádřit jako

$$P_{X,Y}(A, B) = P_X(A) \cdot P_Y(B).$$

Pokud $P_Y(B) > 0$, lze v důsledku nezávislosti $\{X \in A\}$ a $\{Y \in B\}$ psát

$$P(\{X \in A\} | \{Y \in B\}) = \frac{P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{P(\{Y \in B\})} = \frac{P_{X,Y}(A, B)}{P_Y(B)} = P_X(A).$$

Rozšíření úvahy: Místo nezávislosti náhodných jevů $\{X \in A\}$ a $\{Y \in B\}$ daných dvěma konkrétními Borelovskými množinami $A, B \in \mathcal{B}$ můžeme uvažovat nezávislosti jevů pro libovolné $A, B, \ldots$

Nezávislost náhodných veličin

Definice (Nezávislost náhodných veličin)

Mějme náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pak $X_1, \dots, X_n$ se nazývají **nezávislé** (angl.: *independent*) náhodné veličiny pokud

$$\{X_1 \leq a_1\}, \dots, \{X_n \leq a_n\}$$

jsou vzájemně nezávislé náhodné jevy pro každé $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. V opačném případě se $X_1, \dots, X_n$ nazývají **závislé** (angl.: *dependent*).

Důsledky nezávislosti: Mějme nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$. Pak pro sdruženou pravděpodobnostní míru $P_{X_1,\dots,X_n}$ platí

$$\begin{aligned} P_{X_1,\dots,X_n}\big((-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]\big) &= P(\{X_1 \leq a_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq a_n\}) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \leq a_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}\big((-\infty, a_i]\big). \end{aligned}$$

V případě nezávislých veličin lze vyjádřit $P_{X_1,\dots,X_n}$ z marginálních pravděpodobností.

Věta (Ekvivalentní zavedení nezávislosti náhodných veličin)

Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ jsou nezávislé právě tehdy, když $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\}$ jsou vzájemně nezávislé náhodné jevy pro všechny Borelovské množiny $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$.

Důkaz.

Prokážeme pouze netriviální implikaci pro náhodné veličiny X a Y (tvrzení pro $X_1, \ldots, X_n$ lze získat přímočarým zobecněním). Předpokládejme, že X a Y jsou nezávislé veličiny. Položme

$$\mathcal{X} = \big\{A \in \mathcal{B} \,|\, \{X \in A\} \text{ a } \{Y \leq b\} \text{ jsou nezávislé pro každé } b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Dle předpokladu, $(-\infty, a] \in \mathcal{X}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Navíc platí, že $\mathcal{X}$ je uzavřená na komplement, sjednocení spočetně mnoha prvků z $\mathcal{X}$ a $\mathbb{R} \in \mathcal{X}$ (Přednáška 4). Odtud ihned dostáváme, že $\mathcal{X}$ je σ-algebra a je totožná s $\mathcal{B}$. Analogicky:

$$\mathcal{Y} = \big\{B \in \mathcal{B} \,|\, \{X \in A\} \text{ a } \{Y \in B\} \text{ jsou nezávislé pro každé } A \in \mathcal{X}\big\}.$$

Opět máme $\mathcal{Y} = \mathcal{B}$. Pro $A, B \in \mathcal{B}$ tedy tvrzení platí, protože $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$. □

Věta (Nezávislost odvozených náhodných veličin)

Mějme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a Borelovské funkce $g_1, \ldots, g_n$. Pokud jsou $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé, pak jsou náhodné veličiny $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ rovněž nezávislé.

Důkaz.

Vezměme $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Stačí ukázat, že $\{g_1(X_1) \leq a_1\}, \ldots, \{g_n(X_n) \leq a_n\}$ jsou vzájemně nezávislé. Pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí, že

$$\{g_i(X_i) \leq a_i\} = \{X_i \in \{g_i \leq a_i\}\}.$$

Dále platí, že $\{g_i \leq a_i\} \in \mathcal{B}$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Aplikací předchozí věty tedy ihned dostáváme, že

$$\{X_1 \in \{g_1 \leq a_1\}\}, \ldots, \{X_n \in \{g_n \leq a_n\}\}$$

jsou vzájemně nezávislé náhodné jevy. Tvrzení je tedy důsledkem předchozích dvou pozorování a toho, že $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ byly voleny libovolně. $\square$

Sdružená pravděpodobnostní funkce a nezávislost

Věta (Nezávislost diskrétních náhodných veličin)

Diskrétní náhodné veličiny X, Y *s pravděpodobnostními funkcemi* f_X *a* f_Y *jsou nezávislé právě tehdy, když* $f_{X,Y}(a,b) = f_X(a) \cdot f_Y(b)$, *pro libovolné* $a, b \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Nechť X a Y jsou nezávislé veličiny, pak pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(a,b) &= P(\{X = a\} \cap \{Y = b\}) \\ &= P(\{X = a\}) \cdot P(\{Y = b\}) = f_X(a) \cdot f_Y(b). \end{aligned}$$

Obráceně, nechť platí $f_{X,Y}(a,b) = f_X(a) \cdot f_Y(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Platí:

$$\begin{aligned} &P(\{X \leq a\}) \cdot P(\{Y \leq b\}) = \textstyle\sum_{x \leq a} f_X(x) \cdot \sum_{y \leq b} f_X(y) \\ &= \textstyle\sum_{x \leq a} \big(\sum_{y \leq b} f_X(y) \cdot f_X(x)\big) = \sum_{x \leq a} \sum_{y \leq b} \big(f_X(y) \cdot f_X(x)\big) \\ &= \textstyle\sum_{x \leq a} \sum_{y \leq b} f_{X,Y}(x,y) = P(\{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\}). \end{aligned}$$

$\square$

Příklad (Nezávislé diskrétní náhodné veličiny)

Mějme diskrétní náhodné veličiny X a Y se sdruženou pravděpodobnostní funkcí

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x \cdot y^2}{30} \qquad \text{pokud } x \in \{1,2,3\} \text{ a } y \in \{1,2\},$$

a $f_{X,Y}(x,y) = 0$ ve všech ostatních případech.

Úkol: *Vyšetřete, jestli jsou X a Y nezávislé.*

Řešení: Marginální rozdělení pravděpodobnosti veličin X a Y jsou

$$f_X(x) = \sum\nolimits_{y=1}^{2} \frac{x \cdot y^2}{30} = \frac{x}{30} + \frac{4x}{30} = \frac{x}{6} \qquad \text{pro } x \in \{1,2,3\},$$

$$f_Y(y) = \sum\nolimits_{x=1}^{3} \frac{x \cdot y^2}{30} = \frac{y^2}{30} + \frac{2y^2}{30} + \frac{3y^2}{30} = \frac{y^2}{5} \qquad \text{pro } y \in \{1,2\}.$$

Zřejmě $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, to jest *X a Y jsou nezávislé.*

Příklad (Nezávislé diskrétní náhodné veličiny)

Mějme diskrétní náhodné veličiny X a Y se sdruženou pravděpodobnostní funkcí

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{21}, \qquad \text{pokud } x \in \{1,2,3\} \text{ a } y \in \{1,2\},$$

a $f_{X,Y}(x,y) = 0$ ve všech ostatních případech.

Úkol: *Vyšetřete, jestli jsou X a Y nezávislé.*

Řešení: Marginální rozdělení pravděpodobnosti veličin X a Y jsou

$$f_X(x) = \sum\nolimits_{y=1}^{2} \frac{x+y}{21} = \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} = \frac{2x+3}{21} \qquad \text{pro } x \in \{1,2,3\},$$

$$f_Y(y) = \sum\nolimits_{x=1}^{3} \frac{x+y}{21} = \frac{6+3y}{21} \qquad \text{pro } y \in \{1,2\}.$$

To jest například $f_{X,Y}(1,1) = \frac{2}{21} \neq \frac{5}{49} = \frac{5}{21} \cdot \frac{9}{21} = f_X(1) \cdot f_Y(1)$, což znamená že náhodné veličiny X *a* Y *jsou závislé.*

Příklad (Rychlé vyšetření nezávislosti diskrétních náhodných veličin)

Mějme diskrétní náhodné veličiny X a Y se sdruženou pravděpodobnostní funkcí

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x \cdot y^2}{13} \qquad \text{pro } \langle x, y\rangle \in \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}.$$

a $f_{X,Y}(x,y) = 0$ ve všech ostatních případech.

Úkol: *Vyšetřete, jestli jsou X a Y nezávislé.*

Řešení: Marginální rozdělení pravděpodobnosti veličin X a Y jsou

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{13} & \text{pro } x = 1, \\ \frac{8}{13} & \text{pro } x = 2, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{13} & \text{pro } y = 1, \\ \frac{12}{13} & \text{pro } y = 2. \end{cases}$$

Odtud $f_{X,Y}(2,1) = 0 \neq \frac{8}{169} = \frac{8}{13} \cdot \frac{1}{13} = f_X(2) \cdot f_Y(1)$, veličiny jsou *závislé.*

Obecná (kratší) úvaha: $S = \{\langle x, y\rangle \mid f_{X,Y}(x,y) > 0\}$ není ve tvaru kartézského součinu dvou podmnožin $\mathbb{R}$. V tom případě zřejmě musí existovat $x, y \in \mathbb{R}$ tak, že $f_{X,Y}(x,y) = 0$ a $f_X(x) > 0$ a $f_Y(y) > 0$, což znamená, že *X a Y jsou závislé.*

Sdružená funkce hustoty a nezávislost

Věta (Nezávislost absolutně spojitých náhodných veličin)

Absolutně spojité náhodné veličiny X, Y se sdruženou funkcí hustoty $f_{X,Y}$ jsou nezávislé právě tehdy, když $f_{X,Y}(a,b) = f_X(a) \cdot f_Y(b)$, pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Prokazuje se užitím Fubiniho věty a faktů

$$P(\{X \leq a\}) \cdot P(\{Y \leq b\}) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{b} f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f_X(x) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$P(\{X \leq a\}) \cap P(\{Y \leq b\}) = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$\square$

Příklad (Nezávislé absolutně spojité náhodné veličiny)

Problém: Mějme absolutně spojité náhodné veličiny se sdruženou hustotou

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot e^{x+y}, \qquad \text{pokud } x, y \leq 0,$$

a $f_{X,Y}(x,y) = 0$ ve všech ostatních případech.

Úkol: *Stanovte hodnotu $c \in \mathbb{R}$ a určete, jestli jsou X a Y nezávislé.*

Řešení: Nejprve z vlastností funkce hustoty stanovíme konstantu $c \in \mathbb{R}$.

$$1 = P_{X,Y}(\mathbb{R}^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c \cdot e^{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = c \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\right)^2 = c.$$

Marginální funkce hustoty f_X a f_Y mají potom tvar:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y}\,\mathrm{d}y = e^x, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y}\,\mathrm{d}x = e^y.$$

X a Y jsou *nezávislé*, protože $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Kovariance a korelační koeficient

Definice (Kovariance a korelační koeficient náhodných veličin)

Mějme náhodné veličiny X a Y. Potom

1. Pokud jsou μ_X a μ_Y střední hodnoty veličin X a Y, pak
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E((X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y))$$
nazýváme **kovariance** náhodných veličin X a Y (angl.: *covariance*);

2. Pokud $\sigma_X^2 > 0$ a $\sigma_Y^2 > 0$, pak
$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$
se nazývá **korelační koeficient** veličin X a Y (angl.: *correlation coefficient*).

Poznámka: Pro $\boldsymbol{X}(\omega) = \langle X(\omega), Y(\omega) \rangle$ a $g(x, y) = (x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y)$ máme
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(g(\boldsymbol{X})).$$

Věta (Střední hodnota součinu náhodných veličin)

$E(XY) = \mu_X\mu_Y + \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y = \mu_X\mu_Y + \mathrm{Cov}(X,Y).$

Důkaz.

Užitím faktu, že E je lineární operátor dostáváme:

$$\begin{aligned} E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big) &= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X\mu_Y) = \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X\mu_Y = \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y = E(XY) - \mu_X\mu_Y. \end{aligned}$$

Jelikož $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \dfrac{E(XY) - \mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y}$, vyjádřením $E(XY)$ dostáváme:

$$E(XY) = \mu_X\mu_Y + \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y. \qquad \square$$

Důsledek: Střední hodnota součinu XY je rovna součinu středních hodnot X a Y zvětšenému o kovarianci $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y$.

Příklad (Výpočet korelačního koeficientu dvou náhodných veličin)

Mějme diskrétní náhodné veličiny se sdruženou pravděpodobnostní funkcí

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+2y}{18}, \qquad \text{pro } x \in \{1,2\} \text{ a } y \in \{1,2\},$$

$f_{X,Y}(x,y) = 0$ v ostatních případech. Střední hodnota a rozptyl marginálních náhodných veličin jsou následující:

$$\mu_X = \frac{14}{9}, \qquad \sigma_X^2 = \frac{20}{81}, \qquad \mu_Y = \frac{29}{18}, \qquad \sigma_Y^2 = \frac{77}{324}.$$

Kovarianci veličin X a Y stanovíme pomocí vztahu z předchozího tvrzení

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum\nolimits_{x=1}^{2} \sum\nolimits_{y=1}^{2} xy \cdot \frac{x+2y}{18} - \frac{14}{9} \cdot \frac{29}{18} = -\frac{1}{162}.$$

Potom má korelační koeficient $\rho_{X,Y}$ hodnotu

$$\rho_{X,Y} = \frac{-1/162}{\sqrt{(20/81) \cdot (77/324)}} \approx -0.025\,.$$

Příklad (Kovariance nezávislých diskrétních veličin)

Problém: Mějme nezávislé diskrétní náhodné veličiny X a Y.

Úkol: *Stanovte kovarianci X a Y.*

Řešení: S využitím faktu $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ máme:

$$\begin{aligned} E\big(u(X) \cdot v(Y)\big) &= \textstyle\sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{y \in \mathbb{R}} u(x) \cdot v(y) \cdot f_{X,Y}(x,y) = \\ &= \textstyle\sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{y \in \mathbb{R}} u(x) \cdot v(y) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) = \\ &= \textstyle\sum_{x \in \mathbb{R}} u(x) \cdot f_X(x) \cdot \sum_{y \in \mathbb{R}} v(y) \cdot f_Y(y) = \\ &= E\big(u(X)\big) \cdot E\big(v(Y)\big). \end{aligned}$$

To jest, ve speciálním případě:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big) = E(X - \mu_X) \cdot E(Y - \mu_Y) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Důsledek: Pokud jsou X a Y nezávislé, jejich kovariance je nulová.

Pozor: Opačné tvrzení neplatí: existují závislé veličiny s nulovou kovariancí. (**!!**)

Lineární regresní funkce

- Vyšetřování (*lineární*) *závislosti* jedné náhodné veličiny na druhé;
- jako v případě výběrů (Přednáška 2), ale pracujeme s *náhodnými veličinami.*

Nalezení regresní přímky ve smyslu metody nejmenších čtverců

Předpokládejme, že máme náhodné veličiny X a Y.

1. Uvažujeme body $\langle x, y \rangle$ v prostoru (s jejich pravděpodobnostmi);
2. speciálně lze uvažovat bod $\langle \mu_X, \mu_Y \rangle$ daný středními hodnotami X a Y;
3. přímky procházející bodem $\langle \mu_X, \mu_Y \rangle$ splňují $y - \mu_Y = b \cdot (x - \mu_X)$;
4. uvažujme bod $\langle x_0, y_0 \rangle$, čtverec jeho vzdálenosti od přímky $y = b \cdot (x - \mu_X) + \mu_Y$ je $(y_0 - \mu_Y - b \cdot (x_0 - \mu_X))^2$.
5. Očekávaná střední vzdálenost bodů od přímky je tedy
$$E\big((Y - \mu_Y - b \cdot (X - \mu_X))^2\big).$$
6. Hledáme proto $b \in \mathbb{R}$, které minimalizuje $K(b) = E\big((Y - \mu_Y - b \cdot (X - \mu_X))^2\big)$.

Vyjádření lineární regresní funkce

Zjednodušením tvaru funkce K a vyjádřením pomocí korelačního koeficientu:

$$\begin{aligned}K(b) &= E\big((Y-\mu_Y-b\cdot(X-\mu_X))^2\big) = \\ &= E\big((Y-\mu_Y)^2-2b(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)+b^2(X-\mu_X)^2\big) = \\ &= \sigma_Y^2-2b\sigma_{X,Y}+b^2\sigma_X^2 = \boxed{\sigma_Y^2-2b\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y+b^2\sigma_X^2}\,.\end{aligned}$$

První derivace funkce K je následující:

$$K'(b) = -2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y+2b\sigma_X^2$$

To znamená, že hledané minimum je $b = \dfrac{\rho_{X,Y}\cdot\sigma_Y}{\sigma_X}$ (platí $K''(b) = 2\sigma_X^2 > 0$).

Věta (Tvar regresní přímky ve smyslu metody nejmenších čtverců)

$$y = \mu_Y+\rho_{X,Y}\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot(x-\mu_X).$$

□

Příklad (Lineární regresní funkce)

Mějme diskrétní náhodné veličiny se sdruženou pravděpodobnostní funkcí

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+2y}{18}, \qquad \text{pro } x \in \{1,2\} \text{ a } y \in \{1,2\},$$

$f_{X,Y}(x,y) = 0$ v ostatních případech.

Z předchozího příkladu víme, že

$$\mu_X = \frac{14}{9}, \qquad \sigma_X^2 = \frac{20}{81}, \qquad \mu_Y = \frac{29}{18}, \qquad \sigma_Y^2 = \frac{77}{324}.$$

Dále máme stanovenu hodnotu korelačního koeficientu:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{(20/81)\cdot(77/324)}} \approx -0.025\,.$$

Lineární regresní funkce je proto ve tvaru:

$$y = \mu_Y + \rho_{X,Y}\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot(x-\mu_X) = \frac{14}{9} + \frac{-0.025\sqrt{77/324}}{\sqrt{20/81}}\cdot\left(x - \frac{14}{9}\right).$$

Podmíněná rozdělení

S využitím podmíněné pravděpodobnosti (Přednáška 4) lze psát

$$P(\{X \in A\}|\{Y \in B\}) = \frac{P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{P(\{Y \in B\})} = \frac{P_{X,Y}(A,B)}{P_Y(B)}.$$

To nás motivuje k zavedení následujícího pojmu:

Definice (Podmíněné rozdělení náhodné veličiny)

Mějme náhodné veličiny X a Y se sdruženým rozdělením pravděpodobnosti $P_{X,Y}$. Pak pravděpodobnostní míra $P_{X|\{Y \in B\}}$ daná pro každou $A \in \mathcal{B}$ předpisem

$$P_{X|\{Y \in B\}}(A) = \frac{P_{X,Y}(A,B)}{P_Y(B)} \qquad \text{pokud } P_Y(B) > 0,$$

je **podmíněné rozdělení** pravděpodobnosti náhodné veličiny X za předpokladu, že náhodná veličina Y nabude hodnoty z $B \in \mathcal{B}$, angl.: *conditional distribution*.

Pojmy související s podmíněným rozdělením

Pro $P_{X|\{Y\in B\}}$ je $F_{X|\{Y\in B\}}$ **podmíněná distribuční funkce** ve tvaru

$$F_{X|\{Y\in B\}}(a) = P_{X|\{Y\in B\}}\big((-\infty, a]\big) = P(\{X \leq a\}|\{Y \in B\})\,.$$

Pokud je X diskrétní, pak **podmíněná pravděpodobnostní funkce** je ve tvaru

$$f_{X|\{Y\in B\}}(x) = P_{X|\{Y\in B\}}(\{x\}) = P(\{X = x\}|\{Y \in B\})\,.$$

Pokud je $P_{X|\{Y\in B\}}$ absolutně spojitá pravděpodobnostní míra s hustotu f, pak se f označuje $f_{X|\{Y\in B\}}$ a nazývá se **podmíněná funkce hustoty**. V důsledku:

$$P_{X|\{Y\in B\}}(A) = \int_A f_{X|\{Y\in B\}}\,\mathrm{d}m\,.$$

Pokud je $P_Y(B) > 0$, **podmíněná střední hodnota** X za předpokladu $\{Y \in B\}$ je

$$E(X|\{Y \in B\}) = \frac{E(X \cdot \mathbf{1}_{\{Y\in B\}})}{P_Y(B)}\,,$$

kde $\mathbf{1}_{\{Y\in B\}}$ je indikátorová funkce.

Příklad (Podmíněné rozdělení pravděpodobnosti)

Mějme diskrétní náhodné veličiny X a Y se sdruženou pravděpodobnostní funkcí

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{21} \qquad \text{pro } x \in \{1,2,3\} \text{ a } y \in \{1,2\},$$

$f_{X,Y}(x,y) = 0$ ve všech ostatních případech.

Marginální pravděpodobnostní funkce f_X a f_Y jsou následující:

$$f_X(x) = \frac{2x+3}{21} \text{ pro } x \in \{1,2,3\}; \qquad f_Y(y) = \frac{6+3y}{21} \text{ pro } y \in \{1,2\}.$$

Podmíněnou pravděpodobnostní funkci $f_{X|\{Y=y\}}$ lze vyjádřit

$$f_{X|\{Y=y\}}(x) = P(\{X=x\}|\{Y=y\}) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{(x+y)/21}{(6+3y)/21} = \frac{x+y}{6+3y}.$$

Například tedy máme

$$P(\{X \geq 2\}|\{Y=2\}) = f_{X|\{Y=2\}}(2) + f_{X|\{Y=2\}}(3) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{3}{4}.$$

Příklad (Podmíněné střední hodnoty)

Problém: Uvažujme náhodné veličiny X a Y z předchozího příkladu.

Úkol: *Stanovte podmíněnou střední hodnotu X za předpokladu, že $\{Y = 2\}$.*

Řešení: Jelikož je X diskrétní, existuje spočetná $C \subseteq \mathbb{R}$ tak, že

$$E(X|\{Y \in B\}) = \frac{E(X \cdot \mathbf{1}_{\{Y\in B\}})}{P_Y(B)} = \frac{1}{P_Y(B)} \sum_{x\in C} x \cdot P(\{X \cdot \mathbf{1}_{\{Y\in B\}} = x\})$$

$$= \sum_{x\in C} x \cdot \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y \in B\})}{P_Y(B)} = \sum_{x\in C} x \cdot f_{X|\{Y\in B\}}(x).$$

Speciálně pro $B = \{y\}$ dostáváme:

$$E(X|\{Y = y\}) = \sum_{x\in C} x \cdot f_{X|\{Y=y\}}(x) = \sum_{x\in C} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Případě předchozího příkladu pro $y = 2$ dostáváme:

$$E(X|\{Y = 2\}) = 1 \cdot f_{X|\{Y=2\}}(1) + 2 \cdot f_{X|\{Y=2\}}(2) + 3 \cdot f_{X|\{Y=2\}}(3) = \frac{13}{6}.$$

Příklad (Jeden politicky nekorektní příklad)

Problém: Malý podnik zaměstnává 100 mužů a 100 žen a výplaty všech zaměstnanců jsou buď $20\,000$ Kč nebo $30\,000$ Kč nebo $50\,000$ Kč. Muži zaměstnaní v podniku mají následující výplaty: 20 z nich má $20\,000$ Kč, 20 z nich má $30\,000$ Kč a zbývajících 60 má $50\,000$ Kč. Průměrný plat muže v podniku je tedy:

$$\frac{20 \cdot 20\,000 + 20 \cdot 30\,000 + 60 \cdot 50\,000}{100} = 40\,000 \text{ Kč.}$$

Ženy zaměstnané v podniku vydělávají následovně: 60 vydělává $20\,000$, 20 vydělává $30\,000$ a zbývajících 20 vydělává $50\,000$, což dává průměrnou hodnotu

$$\frac{60 \cdot 20\,000 + 20 \cdot 30\,000 + 20 \cdot 50\,000}{100} = 28\,000 \text{ Kč.}$$

Otázka: Jak máme tento výsledek interpretovat?

Odpověď statistika: Nijak. (Alespoň ne bez dodatečné informace.)

Příklad (Simpsonův paradox)

Pokud budeme uvažovat *dodatečnou dimenzi dat* (počet let v zaměstnání), situace z předchozího příkladu může vypadat následovně:

	výplata	*1 rok*	*5 let*	*celkem*
muži	20 000	15	5	20
	30 000	5	15	20
	50 000	0	60	60
průměr		22 500	44 375	40 000
ženy	20 000	60	0	60
	30 000	5	15	20
	50 000	5	15	20
průměr		23 750	45 000	28 000

Ačkoliv mají muži vyšší celkovou průměrnou mzdu než ženy, v rámci obou skupin se stejnou dobou praxe mají ženy vyšší průměrnou mzdu než muži.

Příklad (Generování pseudonáhodných čísel ruletovovou metodou)

Problém: Máme diskrétní náhodnou veličinu X takovou, že $P_X(C) = 1$ pro *konečnou* množinu $C \subseteq \mathbb{R}$. Úkolem je generovat (na počítači) pseudonáhodná čísla, která mají stejné rozdělení, jako veličina X (simulace náhodné veličiny X).

Většina programovacích jazyků disponuje pouze funkcí pro generování pseudonáhodných čísel odpovídající (*diskrétnímu*) *uniformnímu* rozdělení.

Pokud pro konečnou $C \subseteq \mathbb{R}$ platí $P_X(C) = 1$, lze použít následující *princip ruletového výběru*:

1. Označme $C = \{x_1, \ldots, x_k\}$ tak, že $f_X(x_i) > 0$ a $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$;
2. vygenerujeme uniformní pseudonáhodné číslo $p \in [0, 1]$;
3. najdeme nejmenší index $i = 1, \ldots, k$ splňující podmínku $p \leq \sum_{n=1}^{i} f_X(x_n)$;
4. vrátíme hodnotu x_i jako výsledek.

Otázka: Jak postupovat pro obecná X?

Věta (O inverzní transformaci)

Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením $U(0,1)$. Pak pro libovolnou distribuční funkci F platí, že náhodná veličina $F^{-}(X)$ má distribuční funkci F.

Důkaz.

Distribuční funkce náhodné veličiny $F^{-}(X)$ je ve tvaru

$$F_{F^{-}(X)}(a) = P_{F^{-}(X)}\big((-\infty, a]\big) = P(\{F^{-}(X) \leq a\}) = P(\{X \in \{F^{-} \leq a\}\}).$$

Pokud si nyní uvědomíme, že $\{F^{-} \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, F^{-}(x) \leq a\}$ a využijeme faktu, že $x \leq F(a)$ platí právě tehdy, když $F^{-}(x) \leq a$ (Přednáška 7), pak

$$\{F^{-} \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, F^{-}(x) \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq F(a)\} = (-\infty, F(a)].$$

Dosazením do předchozí rovnosti a využitím faktu, že X má uniformní rozdělení $U(0,1)$, dostáváme:

$$\begin{aligned} F_{F^{-}(X)}(a) &= P(\{X \in \{F^{-} \leq a\}\}) = P(\{X \in (-\infty, F(a)]\}) \\ &= P(\{0 \leq X \leq F(a)\}) = F(a). \end{aligned}$$

□

Příklad (Použití inverzní transformace)

Předchozí věta dává následující *postup generování pseudonáhodných čísel*:

1. vygenerujeme *uniformní pseudonáhodné číslo* $x \in [0, 1]$;
2. vypočítej *výslednou hodnotu* $F^{-}(x)$.

Použitelné v případech, kdy F^{-} má jednoduché explicitní vyjádření.

Poznámka: Nutné mít kvalitní generátor uniformních (pseudo)náhodných čísel.

Implementace ve standardních knihovnách C99 (ISO/IEC 9899)

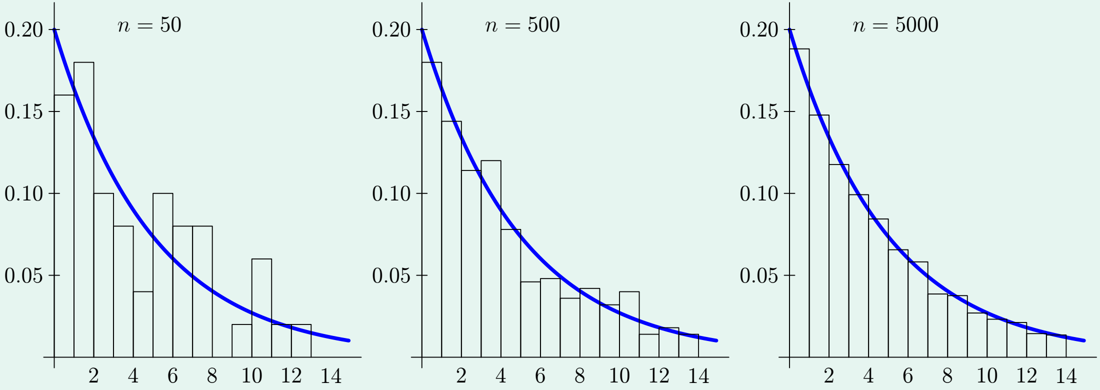
```
#include <stdlib.h>

double random_u01 (void) {
    /* 0x7FFFFFFF = 2^31 - 1 */
    return random () / ((double) 0x7FFFFFFF);
}
```

Příklad (Pseudonáhodná čísla z exponenciálního rozdělení)

Mějme náhodnou veličinu X, která má exponenciální rozdělení s parametrem $\mu = \theta$. Pak kvantilová funkce F_X^- náhodné veličiny X je ve tvaru:

$$F_X^-(p) = -\theta \cdot \ln(1 - p), \qquad \text{pro } p \in [0, 1).$$

Příklad: Pro X s parametrem $\theta = 5$ a odpovídající F_X^- použijeme předchozí postup:



Věta (Základní věta simulace náhodných veličin)

Mějme absolutně spojitou náhodnou veličinu X *s hustotou* f_X *a uvažujme dvourozměrný absolutně spojitý náhodný vektor* $\boldsymbol{X}$ *jehož hustota* $f_{\boldsymbol{X}}$ *je*

$$f_{\boldsymbol{X}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } 0 < y < f_X(x), \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Pak $f_X = f_{\pi_1(\boldsymbol{X})}$*, to jest* f_X *je marginální hustota* $\boldsymbol{X}$*. Pokud je navíc* f_X *shora omezená hodnotou nějakého* $m \in \mathbb{R}$ *a* f_X *nabývá nenulových hodnot pouze na intervalu* (a,b)*, pak platí, že*

$$P(\{X \leq x\}) = P(\{U \leq x\} | \{V \leq f_X(U)\}),$$

kde U *má rozdělení* $U(a,b)$ *a* V *má rozdělení* $U(0,m)$*.*

Důkaz (začátek).

První část tvrzení je triviální, protože:

$$f_{\pi_1(\boldsymbol{X})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{f_X(x)} 1\,\mathrm{d}y = f_X(x).$$

Důkaz (dokončení).

Rozepsáním podmíněné pravděpodobnosti z druhé části tvrzení dostáváme

$$P(\{U \leq x\} | \{V \leq f_X(U)\}) = \frac{P(\{U \leq x\} \cap \{V \leq f_X(U)\})}{P(\{V \leq f_X(U)\})}.$$

Jelikož $f_{U,V}(u,v)$ má na $(a,b) \times (0,m)$ konstantní nenulovou hodnotu:

$$\frac{P(\{U \leq x\} \cap \{V \leq f_X(U)\})}{P(\{V \leq f_X(U)\})} = \frac{\int_a^x \int_0^{f_X(u)} f_{U,V}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}{\int_a^b \int_0^{f_X(u)} f_{U,V}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u} = \frac{\int_a^x \int_0^{f_X(u)} 1\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}{\int_a^b \int_0^{f_X(u)} 1\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}.$$

Užitím pozorování z první části tvrzení dostáváme:

$$\frac{\int_a^x \int_0^{f_X(u)} 1\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}{\int_a^b \int_0^{f_X(u)} 1\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u} = \frac{\int_a^x f_X(u)\,\mathrm{d}u}{\int_a^b f_X(u)\,\mathrm{d}u} = \frac{\int_a^x f_X(u)\,\mathrm{d}u}{1} = \int_a^x f_X(u)\,\mathrm{d}u = P(\{X \leq x\}).$$

$\square$

Aplikace věty: Lze generovat pseudonáhodná čísla pouze pomocí funkce hustoty f_X a generátoru uniformních pseudonáhodných čísel. (**!!**)

Implementace

Algoritmus (generování pseudonáhodných čísel pomocí funkce hustoty)

```
(defun density-random (f a b m)
  "Generate random number from interval (A,B) according to
   distribution with density F bounded by [0,M]."
  (loop
     for u := (+ a (random (float (- b a) 1L0)))
     for v := (random (float m 1L0))
     when (<= v (funcall f u)) do
       (return u)))
```

Poznámka:

- používá se v případech, kdy F_X^- nelze jednoduše vyjádřit;
- metoda inverzní funkce se naopak používá, pokud lze F_X^- jednoduše počítat.

Přednáška 8: Závěr

Pojmy:

- náhodný vektor, vícerozměrné Borelovské jevové pole,
- sdružené rozdělení pravděpodobnosti, marginální rozdělení pravděpodobnosti
- nezávislost náhodných veličin, kovariance, korelační koeficient
- podmíněná rozdělení, inverzní transformace, pseudonáhodná čísla

Použité zdroje:

Capinski M., Zastawniak T. J.: *Probability Through Problems*
Springer 2001, ISBN 978–0–387–95063–1.

Gentle J. E.: *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*
Springer 2004, ISBN 978–0–387–00178–4.

Hogg R. V., Tanis E. A.: *Probability and Statistical Inference*
Prentice Hall; 7. vydání 2005, ISBN 978–0–13–146413–1.