Pravděpodobnost a statistika

Náhodné veličiny a jejich rozdělení

Vilém Vychodil

KMI/PRAS, Přednáška 5

Vytvořeno v rámci projektu 2963/2011 FRVŠ

Přednáška 5: Přehled

1. Náhodné veličiny a jejich rozdělení:
   - náhodná veličina, inverzní obraz,
   - rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny,
   - distribuční funkce.
2. Diskrétní náhodné veličiny:
   - definice diskrétní náhodné veličiny,
   - vztah k diskrétním pravděpodobnostním prostorům,
   - koncentrace pravděpodobnosti, pravděpodobnostní funkce,
   - Borelovské funkce, skládání náhodných veličin.
3. Očekávané hodnoty diskrétních náhodných veličin:
   - definice očekávané hodnoty, operátor E,
   - střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka,
   - linearita operátoru E,
   - momenty, faktoriální momenty.

Opakování: Pravděpodobnostní prostory

Definice (Pravděpodobnostní míra, pravděpodobnostní prostor)

Mějme σ-algebru $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. Každé zobrazení $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ splňující

(P1) $P(A) \geq 0$ pro každou $A \in \mathcal{F}$,

(P2) $P(\Omega) = 1$,

(P3) $P\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ pro libovolnou spočetnou $\{A_i \in \mathcal{F} \,|\, i \in I\}$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in I$ takové, že $i \neq j$ (**σ-aditivita**),

se nazývá **pravděpodobnostní míra** na $\mathcal{F}$ a trojici $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ potom nazýváme **pravděpodobnostní prostor**.

Motivace:

- chceme zavést pojem jako „očekávaná hodnota" náhodného pokusu,
- číslené hodnoty jsou přiřazeny elementárním jevům,
- vede na pojem *náhodná veličina*.

Příklad (Měření na výsledku náhodného pokusu)

Uvažujme náhodný experiment: Jsou vrženy dvě různě barevné kostky; zajímáme se o počty teček, které padnou na obou kostkách.

$$\Omega = \{\langle x, y \rangle \,|\, x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \ldots, \langle 6, 6 \rangle\}\ .$$

Na Ω můžeme provést různá měření:

1. součet teček na obou kostkách:

   $\langle 1, 1 \rangle \mapsto 2,\ \langle 1, 2 \rangle \mapsto 3,\ \langle 2, 1 \rangle \mapsto 3,\ \langle 1, 3 \rangle \mapsto 4,\ \langle 2, 2 \rangle \mapsto 4, \ldots$
2. větší hodnota z hodnot na obou kostkách:

   $\langle 1, 1 \rangle \mapsto 1,\ \langle 1, 2 \rangle \mapsto 2,\ \langle 2, 1 \rangle \mapsto 2,\ \langle 1, 3 \rangle \mapsto 3,\ \langle 2, 2 \rangle \mapsto 2, \ldots$
3. průměr hodnot na obou kostkách:

   $\langle 1, 1 \rangle \mapsto 1,\ \langle 1, 2 \rangle \mapsto 1.5,\ \langle 2, 1 \rangle \mapsto 1.5,\ \langle 1, 3 \rangle \mapsto 2,\ \langle 2, 2 \rangle \mapsto 2, \ldots$

   $\vdots$

Pro výsledky měření se můžeme klást otázky typu: „Jaká hodnota je typická?“

Náhodná veličina

Definice (Náhodná veličina / náhodná proměnná)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazýváme **náhodnou veličinou** v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ (angl.: *random variable*) pokud

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

platí pro každé $a \in \mathbb{R}$. Množinu reálných čísel $\{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}$ nazveme **prostor** nebo **obor hodnot** náhodné veličiny X, angl.: *space*.

Význam:

- náhodné veličiny označujeme $X, Y, Z, \ldots$
- $X(\omega) \in \mathbb{R}$ je výsledek měření na elementárním jevu ω,
- obor hodnot X je množina všech možných výsledků měření,
- termín „náhodná veličina“ *není příliš šťastný* (každá $X(\omega)$ je jednoznačná).

Příklady (Náhodné veličiny v témže $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$)

Uvažujme náhodný experiment: Jsou vrženy dvě různě barevné kostky; zajímáme se počty teček, které padnou na obou kostkách.

$$\Omega = \{\langle x, y\rangle \,|\, x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \dots, \langle 6,6\rangle\}.$$

Součet teček na obou kostkách: $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že

$X(\langle 1,1\rangle) = 2$, $X(\langle 1,2\rangle) = 3$, $X(\langle 2,1\rangle) = 3$, $X(\langle 1,3\rangle) = 4$, $X(\langle 2,2\rangle) = 4$, $X(\langle 3,1\rangle) = 4$, $X(\langle 1,4\rangle) = 5$, $X(\langle 2,3\rangle) = 5, \dots$

Větší hodnota z hodnot na obou kostkách: $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že

$Y(\langle 1,1\rangle) = 1$, $Y(\langle 1,2\rangle) = 2$, $Y(\langle 2,1\rangle) = 2$, $Y(\langle 1,3\rangle) = 3$, $Y(\langle 2,2\rangle) = 2$, $Y(\langle 3,1\rangle) = 3$, $Y(\langle 1,4\rangle) = 4$, $Y(\langle 2,3\rangle) = 3, \dots$

Průměr hodnot na obou kostkách: $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že

$Z(\langle 1,1\rangle) = 1$, $Z(\langle 1,2\rangle) = 1.5$, $Z(\langle 2,1\rangle) = 1.5$, $Z(\langle 1,3\rangle) = 2$, $Z(\langle 2,2\rangle) = 2$, $Z(\langle 3,1\rangle) = 2$, $Z(\langle 1,4\rangle) = 2.5$, $Z(\langle 2,3\rangle) = 2.5, \dots$

Inverzní obrazy

Definice (Inverzní obraz množiny vzhledem k X)

Mějme zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$, pak **inverzní obraz** (angl.: *inverse image*) množiny $B \subseteq \mathbb{R}$ vzhledem k zobrazení X je množina $X^{-1}(B)$ definovaná

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\}.$$

Inverzní obraz $B \subseteq \mathbb{R}$ vzhledem k X také označujeme $\{X \in B\}$.

Značení inverzních obrazů speciálních množin

píšeme $\{X < a\}$ místo $\big\{X \in (-\infty, a)\big\} = X^{-1}\big((-\infty, a)\big)$
píšeme $\{X \leq a\}$ místo $\big\{X \in (-\infty, a]\big\} = X^{-1}\big((-\infty, a]\big)$
píšeme $\{X = a\}$ místo $\big\{X \in \{a\}\big\} = X^{-1}\big(\{a\}\big)$
píšeme $\{X \geq a\}$ místo $\big\{X \in [a, -\infty)\big\} = X^{-1}\big([a, -\infty)\big)$
píšeme $\{a \leq X \leq b\}$ místo $\big\{X \in [a, b]\big\} = X^{-1}\big([a, b]\big), \ldots$

Věta (O obrazech σ-algeber I)

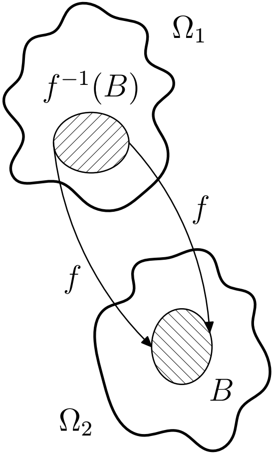
Nechť Ω_1 a Ω_2 jsou libovolné množiny a nechť $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ je zobrazení. Pokud je $\mathcal{F}_2$ σ-algebra na Ω_2, pak $\mathcal{F}_1 = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}_2\}$ je σ-algebra na Ω_1.

Důkaz.

Platí, že $\Omega_2 \in \mathcal{F}_2$, protože $\mathcal{F}_2$ je σ-algebra. To znamená, že $f^{-1}(\Omega_2) = \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1) \in \Omega_2\} = \Omega_1$, tedy $\Omega_1 \in \mathcal{F}_1$.

Nechť $A \in \mathcal{F}_1$, to jest $A = f^{-1}(B)$ pro nějakou $B \in \mathcal{F}_2$. Platí, že $\Omega_1 - A = \Omega_1 - f^{-1}(B) = \Omega_1 - \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1) \in B\} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1) \in \Omega_2 - B\} = f^{-1}(\Omega_2 - B)$. To jest $\Omega_1 - A = f^{-1}(\Omega_2 - B)$ pro $\Omega_2 - B \in \mathcal{F}_2$, tj. $\Omega_1 - A \in \mathcal{F}_1$.

Pro spočetně mnoho $A_i \in \mathcal{F}_1$ $(i \in I)$ existují $B_i \in \mathcal{F}_2$ tak, že $A_i = f^{-1}(B_i)$. Máme $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = \bigcup_{i \in I}\{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1) \in B_i\} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid f(\omega_1) \in \bigcup_{i \in I} B_i\} = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$ pro $\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{F}_2$. $\square$



Věta (O obrazech σ-algeber II)

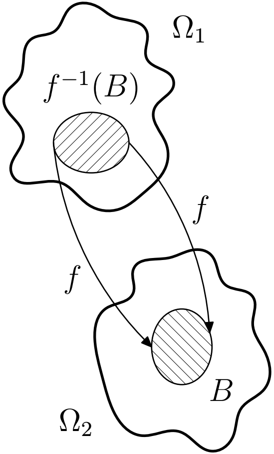
Nechť Ω_1 a Ω_2 jsou libovolné množiny a nechť $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ je zobrazení. Pokud je $\mathcal{F}_1$ σ-algebra na Ω_1, pak $\mathcal{F}_2 = \{B \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1\}$ je σ-algebra na Ω_2.

Důkaz.

Platí, že $f^{-1}(\Omega_2) = \{\omega \in \Omega_1 \mid f(\omega) \in \Omega_2\} = \Omega_1 \in \mathcal{F}_1$, což prokazuje, že $\Omega_2 \in \mathcal{F}_2$.

Vezměme $B \in \mathcal{F}_2$. Dle definice $\mathcal{F}_2$ máme $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$. Tím pádem i $\Omega_1 - f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$. To jest, $\Omega_1 - f^{-1}(B) = \Omega_1 - \{\omega \in \Omega_1 \mid f(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega_1 \mid f(\omega) \in \Omega_2 - B\} = f^{-1}(\Omega_2 - B) \in \mathcal{F}_1$, což znamená $\Omega_2 - B \in \mathcal{F}_2$.

Pro spočetně mnoho $B_i \in \mathcal{F}_2$ $(i \in I)$ máme $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}_1$. Odtud platí, že $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}_1$. To jest, $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) = \bigcup_{i\in I}\{\omega \in \Omega_1 \mid f(\omega) \in B_i\} = \{\omega \in \Omega_1 \mid f(\omega) \in \bigcup_{i\in I} B_i\} = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \in \mathcal{F}_1$, tedy $\bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{F}_2$. $\square$



Věta (Ekvivalentní zavedení náhodné veličiny)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ právě tehdy, když $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ platí pro každou Borelovskou množinu $B \subseteq \mathbb{R}$.

Důkaz.

Z definice náhodné veličiny, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina právě tehdy, když $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$, což platí právě tehdy, když $\{X \leq a\} = X^{-1}\big((-\infty, a]\big) \in \mathcal{F}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Nyní prokážeme obě implikace:

„$\Rightarrow$“: Položme $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \,|\, X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$. Užitím předchozí věty dostáváme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Jelikož je X náhodná veličina, $\mathcal{A}$ obsahuje $(-\infty, a]$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Pro každý $[a, b]$ máme $[a, b] = (-\infty, a] \cap (-\infty, b] \in \mathcal{A}$, to jest $\mathcal{A}$ je σ-algebra obsahující všechny uzavřené intervaly. Tím pádem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, protože σ-algebra $\mathcal{B}$ je generovaná uzavřenými intervaly v $\mathbb{R}$ (Přednáška 3). To znamená, že každá Borelovská množina je v $\mathcal{A}$, tím pádem $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pro každou $B \in \mathcal{B}$.

„$\Leftarrow$“: Plyne z toho, že $(-\infty, a] \subseteq \mathbb{R}$ je Borelovská pro každé $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Náhodné jevy spojené s náhodnými veličinami

Důsledky předchozí věty

Pro náhodnou veličinu $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ lze počítat pravděpodobnost

$$P(\{X \in B\}) = P\big(X^{-1}(B)\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\}\big),$$

pro každou Borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$.

Intuitivní význam:

- provedeme opakovaně náhodný pokus a měření na jejich výsledcích;
- některé výsledky měření se budou vyskytovat častěji (mít větší relativní četnosti);
- můžeme se bavit o pravděpodobnost výskytu hodnoty X;
- $P(\{X \in B\})$ je pravděpodobnost, že výsledek měření bude v B.

Příklad (Náhodné jevy spojené s náhodnými veličinami)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a náhodnou veličinu $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ reprezentující výsledek měření na elementárních jevech z Ω.

Pravděpodobnosti jevů spojených s náhodnými veličinami:

- $P(\{X = a\}) = P\big(X^{-1}(\{a\})\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a\}\big)$
  . . . pravděpodobnost, že hodnota X bude rovna a,
- $P(\{X \leq a\}) = P\big(X^{-1}((-\infty, a])\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq a\}\big)$
  . . . pravděpodobnost, že hodnota X bude menší nebo rovna a,
- $P(\{a < X < b\}) = P\big(X^{-1}((a, b))\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, a < X(\omega) < b\}\big)$
  . . . pravděpodobnost, že hodnota X bude ostře mezi a a b
- $P(\{a \leq X \leq b\}) = P\big(X^{-1}([a, b])\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, a \leq X(\omega) \leq b\}\big)$
  . . . pravděpodobnost, že hodnota X bude mezi a a b, . . .

Příklad (Férová hra)

Jsou vrženy dvě šestistěnné kostky a spočten součet teček; pak

- vyhráváme $\$10$ pokud padne 2, 3, 11, nebo 12,
- prohrajeme $\$10$ pokud padne 7,
- v ostatních případech nevyhráváme ani neztrácíme nic.

To jest, máme klasický pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, 2^{\Omega}, P \rangle$, kde $\Omega = \{\langle 1,1 \rangle, \ldots, \langle 6,6 \rangle\}$ a náhodnou veličinu $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takovou, že

$$X(\langle a,b \rangle) = \begin{cases} 9, & \text{pokud } a+b \in \{2,3,11,12\}, \\ -10, & \text{pokud } a+b = 7, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro X máme:

$$\begin{aligned} P(\{X > 0\}) &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 0\}) = \\ &= P(\{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 5,6 \rangle, \langle 6,5 \rangle, \langle 6,6 \rangle\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$P(\{X < 0\}) = P(\{\langle 1,6 \rangle, \langle 6,1 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Příklad (Náhodná veličina na Borelovském jevovém poli)

Mějme σ-algebru Borelovských množin $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$ na intervalu $[0,1]$ a nechť P je Lebesgueova míra zúžená na $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$ (Přednáška 3). Uvažujme zobrazení $X\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definované $X(a) = a^2$ pro každé $a \in [0,1]$.

Pozorování: X je náhodná veličina v $\langle [0,1], \mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}, P \rangle$, protože pro každé $a \in [0,1]$ je $\{\omega \in [0,1] \,|\, X(\omega) \leq a\} = \{\omega \in [0,1] \,|\, \omega^2 \leq a\} = [0, \sqrt{a}]$ je Borelovská množina, to jest patří do $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$.

Úkol: *Najděte hodnotu* $P\big(\{X \in [0, 0.5)\}\big)$.

Řešení: Nejprve stanovíme $\{X \in [0, 0.5)\}$, to jest:

$$\begin{aligned} \{X \in [0,0.5)\} &= \{\omega \in [0,1] \,|\, X(\omega) \in [0,0.5)\} = \{\omega \in [0,1] \,|\, \omega^2 \in [0,0.5)\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq \omega^2 < 0.5\} = \big\{\omega \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq \omega < \sqrt{0.5}\big\} = \big[0, \sqrt{0.5}\big). \end{aligned}$$

Užitím faktu, že Lebesgueova míra přiřazuje intervalům jejich délku:

$$P\big(\{X \in [0,0.5)\}\big) = P\big(\big[0, \sqrt{0.5}\big)\big) = \sqrt{0.5} - 0 = \sqrt{0.5}.$$

Věta (Základní vlastnosti náhodných veličin)

Pro pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$ a zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ platí:

1. *pokud je X konstantní, pak je X náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$;*
2. *pokud je X náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}_1, P_1\rangle$ a $\langle \Omega, \mathcal{F}_2, P_2\rangle$ je pravděpodobnostní prostor, pro který $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, pak je X náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}_2, P_2\rangle$.*

Důkaz.

Nechť $X(a) = c$ pro každé $a \in \Omega$. Pak pro libovolnou $B \in \mathcal{B}$ platí: (i) $\{X \in B\} = \Omega$, pokud $c \in B$; (ii) $\{X \in B\} = \emptyset$, pokud $c \notin B$. V obou případech je tedy výsledek z $\mathcal{F}$, což prokazuje první tvrzení.

Jelikož je X náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}_1, P_1\rangle$, pro každou $B \in \mathcal{B}$ platí, že $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_1$. Jelikož $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ dostáváme, že $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_2$ pro každou $B \in \mathcal{B}$. Zbytek plyne z definice náhodné veličiny. □

Věta (O pravděpodobnostní míře indukované náhodnou veličinou)

Mějme náhodnou veličinu $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$. Pak zobrazení $P_X\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ definované $P_X(B) = P\bigl(\{X \in B\}\bigr)$ je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}$.

Důkaz.

Zřejmě $P_X(\mathbb{R}) = P\bigl(\{X \in \mathbb{R}\}\bigr) = P\bigl(X^{-1}(\mathbb{R})\bigr) = P(\Omega) = 1$. Dále platí, že $P_X(B) \geq 0$ pro každou $B \in \mathcal{B}$. Zbývá ověřit, že P_X je σ-aditivní vzhledem k $\mathcal{B}$. Vezměme spočetně mnoho Borelovských množin $A_i \in \mathcal{B}$ $(i \in I)$ takových, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. Potom

$$
\begin{aligned}
P_X\bigl(\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i\bigr) &= P\bigl(\{X \in \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i\}\bigr) = P\bigl(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i\}\bigr) \\
&= P\bigl(\textstyle\bigcup_{i\in I}\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A_i\}\bigr) = P\bigl(\textstyle\bigcup_{i\in I}\{X \in A_i\}\bigr) \\
&= \textstyle\sum_{i\in I} P\bigl(\{X \in A_i\}\bigr) = \sum_{i\in I} P_X(A_i),
\end{aligned}
$$

protože každá $\{X \in A_i\} \in \mathcal{F}$ v důsledku toho, že X je náhodná veličina a dále proto, že $\{X \in A_i\} \cap \{X \in A_j\} = \emptyset$ pro $i \neq j$, protože $A_i \cap A_j = \emptyset$. $\square$

Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny

Definice (Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a náhodnou veličinu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Pak se pravděpodobnostní míra $P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ na σ-algebře Borelovských množin $\mathcal{B}$ definovaná

$$P_X(B) = P\big(\{X \in B\}\big), \qquad \text{pro každou } B \in \mathcal{B}$$

nazývá **rozdělení pravděpodobnosti** náhodné veličiny X, angl.: *distribution*.

Poznámky:

- P_X je skutečně pravděpodobnostní míra (důsledek předchozí Věty);
- $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X \rangle$ je pravděpodobnostní prostor (indukovaný náhodnou veličinou X);
- při úvahách o pravděpodobnostech náhodných jevů spojených s náhodnými veličinami $X : \Omega \to \mathbb{R}$ často opouštíme původní pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a pracujeme pouze s $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X \rangle$.

Příklad (Příklad různých náhodných veličin se stejným rozdělením)

Pozor: Rozdělení náhodné veličiny popisuje chování náhodné veličiny z hlediska pravděpodobnosti výskytu jejích hodnot, ale (jednoznačně) tuto náhodnou veličinu neurčuje (existuje obecně víc náhodných veličin s tímtéž rozdělením).

Například: Uvažujme náhodnou veličinu X s rozdělením P_X, kde $P_X = \delta_0$, to jest P_X je Diracova míra koncentrovaná v bodě 0, (Přednáška 3).

Pak X lze chápat jako:

- konstantní zobrazení $X\colon \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, kde $X(0) = X(1) = 0$;
- konstantní zobrazení $X\colon \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, kde $X(0) = X(1) = X(2) = 0$;
- konstantní zobrazení $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $X(a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$;

  $\vdots$

Pravděpodobnost rozšiřující se posloupnosti náhodných jevů

Věta

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ *a uvažujme posloupnost* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ *náhodných jevů z* $\mathcal{F}$*. Pak platí:*

$$P\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Důkaz.

Položme $B_1 = A_1$ a $B_i = A_i - A_{i-1}$ pro každé $i \geq 2$. Množiny B_i tvoří systém neslučitelných jevů. Dále platí, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ a rovněž $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.
S využitím σ-aditivity a definice součtu nekonečné řady:

$$\begin{aligned} P\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) &= P\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i\big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

$\square$

Pravděpodobnost zužující se posloupnosti náhodných jevů

Věta

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ *a uvažujme posloupnost* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ *náhodných jevů z* $\mathcal{F}$*. Pak platí:*

$$P\big(\textstyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Důkaz.

Na posloupnost doplňků $\Omega - A_1 \subseteq \Omega - A_2 \subseteq \Omega - A_3 \subseteq \cdots$ lze aplikovat předchozí větu. Užitím De Morganových zákonů dostáváme:

$$\begin{aligned} 1 - P\big(\textstyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) &= P\big(\Omega - \textstyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = P\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty}(\Omega - A_i)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\Omega - A_n) = \lim_{n\to\infty}\big(1 - P(A_n)\big) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n), \end{aligned}$$

odtud $P\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$. $\square$

Příklad (Postupné házení mincí)

Házíme mincí tak dlouho, dokud neuvidíme stejné strany dvakrát po sobě. Zajímáme se o počet hodů, které je potřeba vykonat.

Úkol: *Jaká je pravděpodobnost, že budeme potřebovat sudý počet hodů?*

Uvažujeme náhodné jevy $A_n = \{2i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$, to jest: $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 = \{2, 4, 6\}, \ldots$; máme:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4+1}{8}, \quad P(A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{16+4+1}{32}, \ldots$$

Užitím součtu n prvků geometrické posloupnosti máme:

$$P(A_n) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^{2i}}{2^{2n-1}} = \frac{2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 4^i}{4^n} = \frac{2 \cdot (4^n - 1)}{3 \cdot 4^n} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

Užitím předchozí věty:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = \frac{2}{3}.$$

Distribuční funkce

Snaha o jednoduchý popis P_X:

- rozdělení P_X je zobrazení z $\mathcal{B}$ do $[0, 1]$ (množinová funkce);
- nevýhoda: těžko si lze „představit“ nebo „zakreslit“;
- obtížná přímá analýza vlastností funkce P_X;
- snaha o vyjádření P_X pomocí reálné funkce jedné proměnné;
- vede na pojem *distribučí funkce*:

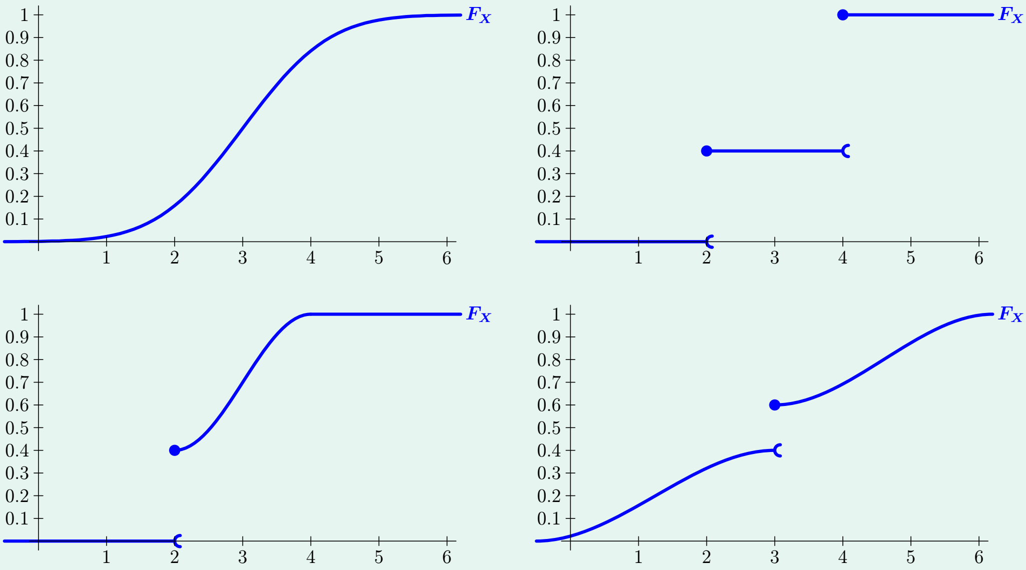
Definice (Distribuční funkce)

Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením P_X. Potom funkce $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x]\big), \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}$$

se nazývá **distribuční funkce** náhodné veličiny X, angl.: *distribution function*.

Příklady (Grafy různých distribučních funkcí)



Věta (Základní vlastnosti distribuční funkce)

Nechť F_X je distribuční funkce náhodné veličiny X. Pak platí:

1. F_X *je neklesající: pokud* $y_1 \leq y_2$, *pak* $F_X(y_1) \leq F_X(y_2)$,
2. *pokud je oborem hodnot* X *interval* $[a, b]$, *pak* $F_X(y) = 0$ *a* $F_X(z) = 1$ *pro každé* $y < a$ *a* $z \geq b$,
3. $\lim_{y \to -\infty} F_X(y) = 0$,
4. $\lim_{z \to \infty} F_X(z) = 1$.

Důkaz (začátek).

První plyne monotonie pravděpodobnosti: z $y_1 \leq y_2$ dostáváme $(-\infty, y_1] \subseteq (-\infty, y_2]$, odtud $F_X(y_1) = P_X\big((-\infty, y_1]\big) \leq P\big((-\infty, y_2]\big) = F_X(y_2)$.

Dále platí $F_X(y) = P_X\big((-\infty, y]\big) = P(\{X \leq y\}) = P(\emptyset) = 0$ pro každé $y < a$. Analogicky dostaneme $F_X(z) = P(\Omega) = 1$ pro $z \geq b$.

Důkaz (dokončení).

Pro prokázání třetího tvrzení stačí ukázat, že $F_X(y_n)$ jde k nule pro každou klesající posloupnost hodnot y_n jdoucí do $-\infty$. Jelikož

$$F_X(y_n) = P_X\big((-\infty, y_n]\big) = P(\{X \leq y_n\}) = P(A_n),$$

kde $A_n = \{X \leq y_n\}$, stačí prokázat, že $P(A_n)$ jde k nule pro n rostoucí nade všechny meze. Z faktu, že A_i tvoří zužující se posloupnost náhodných jevů máme:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\big(\textstyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = P(\emptyset) = 0.$$

Poslední tvrzení se dokazuje analogicky: pro každou rostoucí posloupnost hodnot y_n jsoucí do ∞ máme $F_X(y_n) = P_X\big((-\infty, y_n]\big) = P(\{X \leq y_n\}) = P(A_n)$, kde $A_n = \{X \leq y_n\}$. Z faktu, že A_i tvoří rozšiřující se posloupnost náhodných jevů:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = P(\Omega) = 1. \qquad \square$$

Věta (O spojitosti F_X zprava)

Každá distribuční funkce je spojitá zprava.

Důkaz.

Prokážeme, že v každém bodě je hodnota F_X rovna hodnotě limity zprava. Vezměme libovolnou $y \in \mathbb{R}$ a libovolnou klesající posloupnost hodnot y_n jdoucí do y. Množiny $A_n = \{X \leq y_n\}$ tvoří zužující se posloupnosti náhodných jevů, to jest $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big)$. Stačí tedy prokázat, že $F_X(y) = P\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big)$.

Jelikož $F_X(y) = P(\{X \leq y\})$, stačí ukázat, že platí $\{X \leq y\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. To znamená, že stačí prokázat platnost rovnosti

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq y\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

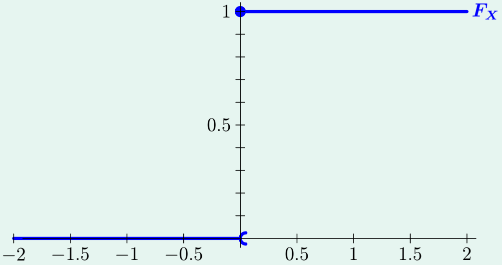
„$\subseteq$“: Pokud $X(\omega) \leq y$, pak i $X(\omega) \leq y \leq y_n$ pro každé n, tudíž $\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.
„$\supseteq$“: Pokud $\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, pak ω patří do každé $A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq y_n\}$, odtud $X(\omega) \leq y_n$ pro každé n, to jest $X(\omega) \leq \lim_{n\to\infty} y_n = y$. $\square$

Příklad (F_X obecně není spojitá zleva)

Uvažujme náhodnou veličinu X s rozdělením P_X takovým, že P_X je Diracova pravděpodobnostní míra koncentrovaná v bodě 0, to jest $P_X = \delta_{x_0}$.

Podle definice Diracovy míry (Přednáška 3) a z $F_X(x) = P_X\big((-\infty, x]\big)$ máme

$$P_X(A) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 0 \notin A, \\ 1 & \text{pokud } 0 \in A, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x < 0, \\ 1 & \text{pokud } x \geq 0. \end{cases}$$



F_X není spojitá zleva v bodě 0.

Věta (Vyjádření hodnot P_X pomocí distribuční funkce)

Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením P_X a distribuční funkcí F_X. Pak

1. $P_X\big((a,b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$,
2. $P_X\big((a,b)\big) = \lim_{y\nearrow b} F_X(y) - F_X(a)$,
3. $P_X\big([a,b]\big) = F_X(b) - \lim_{y\nearrow a} F_X(y)$,
4. $P_X\big([a,b)\big) = \lim_{y\nearrow b} F_X(y) - \lim_{y\nearrow a} F_X(y)$,

kde $\lim_{y\nearrow c} f(y)$ označuje limitu funkce f v bodě c zleva.

Důkaz (začátek).

V prvním případě platí, že $(a,b] = (-\infty,b] - (-\infty,a]$ a $(-\infty,a] \subseteq (-\infty,b]$.
S použitím faktu, že $P_X(A - B) = P_X(A) - P_X(A \cap B)$ dostáváme:

$$\begin{aligned} P_X\big((a,b]\big) &= P\big((-\infty,b] - (-\infty,a]\big) = P_X\big((-\infty,b]\big) - P_X\big((-\infty,b] \cap (-\infty,a]\big) \\ &= P_X\big((-\infty,b]\big) - P_X\big((-\infty,a]\big) = F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Důkaz (dokončení).

V druhém případě využijeme faktu, že $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}]$ je sjednocení rozšiřující se posloupnosti náhodných jevů a že F_X je monotonní, tedy:

$$\begin{aligned} P_X\big((a,b)\big) &= P_X\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}]\big) = \lim_{n\to\infty} P_X\big((a, b - \frac{1}{n}]\big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\big(F_X(b - \tfrac{1}{n}) - F_X(a)\big) = \lim_{y\nearrow b} F_X(y) - F_X(a). \end{aligned}$$

V třetím případě využijeme $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b]$, to jest:

$$\begin{aligned} P_X\big([a,b]\big) &= P_X\big(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b]\big) = \lim_{n\to\infty} P_X\big((a - \frac{1}{n}, b]\big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\big(F_X(b) - F_X(a - \tfrac{1}{n})\big) = F_X(b) - \lim_{y\nearrow a} F_X(y). \end{aligned}$$

V posledním případě využijeme $[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a, b - \frac{1}{n}]$ a předchozího pozorování:

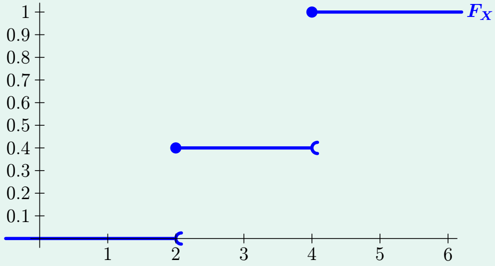
$$\begin{aligned} P_X\big([a,b)\big) &= P_X\big(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty}[a, b - \frac{1}{n}]\big) = \lim_{n\to\infty} P_X\big([a, b - \frac{1}{n}]\big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\big(F_X(b - \tfrac{1}{n}) - \lim_{y\nearrow a} F_X(y)\big) \\ &= \lim_{y\nearrow b} F_X(y) - \lim_{y\nearrow a} F_X(y). \end{aligned}$$

□

Příklad (Vyjádření hodnot P_X pomocí distribuční funkce)

Uvažujme náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F_X danou předpisem:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x < 2, \\ 0.4 & \text{pokud } 2 \leq x < 4, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Příklady:

$P_X\big((0,3)\big) = \lim_{y \nearrow 3} F_X(y) - F_X(0) = F_X(3) - F_X(0) = 0.4 - 0 = 0.4,$
$P_X\big((3,4]\big) = F_X(4) - F_X(3) = 1 - 0.4 = 0.6,$
$P_X\big((3,4)\big) = \lim_{y \nearrow 4} F_X(y) - F_X(3) = 0.4 - 0.4 = 0,$
$P_X\big([1,5]\big) = F_X(5) - \lim_{y \nearrow 1} F_X(y) = F_X(5) - F_X(1) = 1 - 0 = 1,$
$P_X\big([2,5)\big) = \lim_{y \nearrow 5} F_X(y) - \lim_{y \nearrow 2} F_X(y) = F_X(5) - 0 = 1 - 0 = 1.$

Věta (Kritérium spojitosti F_X)

Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením P_X a distribuční funkcí F_X. Distribuční funkce F_X je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $P_X(\{a\}) = 0$.

Důkaz.

Jelikož je F_X zprava spojitá funkce, F_X je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je F_X v bodě a zleva spojitá, což platí právě tehdy, když $F_X(a) = \lim_{y \nearrow a} F_X(y)$, to jest $F_X(a) - \lim_{y \nearrow a} F_X(y) = 0$. Z předchozí věty ale víme, že

$$P_X(\{a\}) = P_X\big([a, a]\big) = F_X(a) - \lim_{y \nearrow a} F_X(y),$$

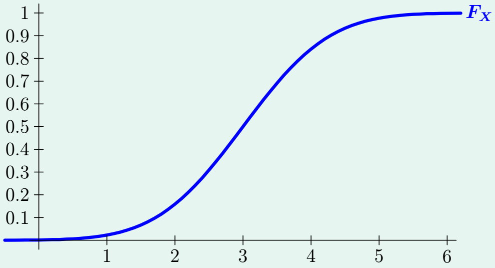
to jest F_X je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $P_X(\{a\}) = 0$. $\square$

Důsledek: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- distribuční funkce F_X je spojitá,
- $P_X(\{a\}) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Příklad (Důsledek spojitosti F_X)

Uvažujme náhodnou veličinu X se spojitou distribuční funkcí F_X:



Ze spojitosti F_X dostáváme:

1. $P_X\big((a,b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$,
2. $P_X\big((a,b)\big) = \lim_{y \nearrow b} F_X(y) - F_X(a) = F_X(b) - F_X(a)$,
3. $P_X\big([a,b]\big) = F_X(b) - \lim_{y \nearrow a} F_X(y) = F_X(b) - F_X(a)$,
4. $P_X\big([a,b)\big) = \lim_{y \nearrow b} F_X(y) - \lim_{y \nearrow a} F_X(y) = F_X(b) - F_X(a)$.

Diskrétní náhodné veličiny

Typy náhodných veličin

- rozeznáváme různé typy náhodných veličin podle jejich rozdělení;
- klademe nároky na P_X (v důsledku na F_X);
- první typ: *diskrétní náhodné veličiny* (Přednáška 5 a 6);
- druhý typ: *spojité náhodné veličiny* (Přednáška 7 a další).

Definice (Diskrétní náhodná veličina)

Náhodná veličina X s rozdělením P_X se nazývá **diskrétní** (angl.: *discrete*) pokud existuje spočetná množina $C \subseteq \mathbb{R}$ taková, že $P_X(C) = 1$.

Poznámky:

- rozdělení diskrétní náhodné veličiny je koncentrováno ve spočetně mnoha bodech;
- souvisí s pojmem **diskrétní pravděpodobnostní míra** (Přednáška 3).

Charakterizace diskrétních náhodných veličin

Připomeňme (PŘEDNÁŠKA 3), že pravděpodobnostní míra $P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ se nazývá *diskrétní* pokud existuje spočetně mnoho čísel $x_i \in \mathbb{R}$ a koeficientů $a_i \in [0, 1]$ (pro každé $i = 1, 2, \ldots$) tak, že $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ a P_X lze psát

$$P_X(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{x_i}(A),$$

kde δ_{x_i} je Diracova míra koncentrovaná v bodě x_i. Lze prokázat:

Věta (Charakterizace diskrétních náhodných veličin)

Náhodná veličina X s rozdělením P_X je diskrétní právě tehdy, když P_X je diskrétní pravděpodobnostní míra.

- diskrétní náhodné veličiny = náhodné veličiny s rozdělením, které je diskrétní pravděpodobnostní míra;
- říkáme: „diskrétní náhodné veličiny mají diskrétní rozdělení“.

Důkaz.

Tvrzení je ve tvaru ekvivalence, prokazujeme proto obě implikace.

„$\Rightarrow$“: Předpokládejme, že X je diskrétní náhodná veličina a označme C spočetnou podmnožinu $\mathbb{R}$ pro niž $P_X(C) = 1$. Lze psát $C = \{x_1, x_2, \ldots\}$, kde $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$. Z faktu $P_X(C) = 1$ dostáváme pro každou $B \in \mathcal{B}$:

$$
\begin{aligned}
P_X(B) = P_X(B \cap C) = P_X\left(\textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty}(B \cap \{x_k\})\right) &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P_X(B \cap \{x_k\}) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P_X(\{x_k\}) \cdot \delta_{x_k}(B).
\end{aligned}
$$

Užitím σ-aditivity, $1 = P_X(C) = P_X\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(\{x_k\})$, takže za hledané koeficienty a_i lze vzít hodnoty $P_X(\{x_i\})$ a P_X je tím pádem diskrétní pravděpodobnostní míra.

„$\Leftarrow$“: Nechť P_X je diskrétní míra ve tvaru $P_X(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{x_i}(A)$. Pak lze za hledanou $C \subseteq \mathbb{R}$ vzít spočetnou $C = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Zbývá ověřit $P_X(C) = 1$:

$$
P_X(C) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{x_i}(C) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1.
$$

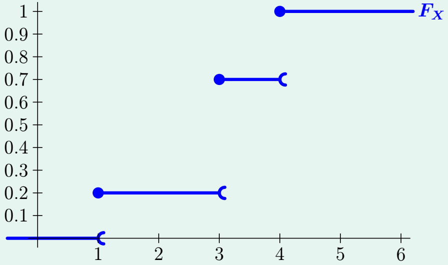
□

Příklad (Motivace pro pravděpodobnostní funkci)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X jejíž rozdělení je (jednoznačně) dáno body $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, a koeficienty $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.3$:

$$P_X(A) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot \delta_{x_i}(A) = 0.2 \cdot \delta_1(A) + 0.5 \cdot \delta_3(A) + 0.3 \cdot \delta_4(A).$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x < 1, \\ 0.2 & \text{pokud } 1 \leq x < 3, \\ 0.7 & \text{pokud } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{pokud } x \geq 4. \end{cases}$$



Platí: $P(\{X = x_i\}) = P_X(\{x_i\}) = a_i$ a $F_X(x) = \sum\{a_i \,|\, x_i \leq x\}$.

Důsledek: Hodnoty F_X lze počítat jako součty (některých) hodnot $P(\{X = x_i\})$.

Pravděpodobnostní funkce

Definice (Pravděpodobnostní funkce)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X s rozdělením P_X. Zobrazení $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, kde $f_X(x) = P_X(\{x\})$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, se nazývá **pravděpodobnostní funkce** f_X náhodné veličiny X, angl.: *probability mass function*.

Poznámky:

- hodnota $f_X(x)$ je rovna $P_X(\{x\}) = P(\{X = x\})$:
  - pravděpodobnost, že X nabude hodnotu x;
  - pravděpodobnost elementárního jevu $\{x\}$ v prostoru $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X \rangle$.
- když je P_X koncentrovaná v $x_1, x_2, \ldots$, pak $P_X(A) = \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) \cdot \delta_{x_i}(A)$;
- uvažujeme pouze u diskrétních náhodných veličin;
- pokud je F_X spojitá funkce, pak $P(\{X = x\}) = P_X(\{x\}) = 0$, tedy f_X by měla v každém bodě hodnotu 0 (**nezajímavé**).

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X s rozdělením P_X, které je koncentrováno v bodech $x_1, x_2, \ldots$, to jest, $P(\{X = y\}) = 0$ pro každé $y \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Důsledky předchozích pozorování:

$$P_X(A) = \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) \cdot \delta_{x_i}(A), \qquad F_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) \cdot \delta_{x_i}\big((-\infty, x]\big).$$

Pokud je navíc $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$, pak lze pro každé $x \in \mathbb{N}$ psát:

$$P(\{X \leq x\}) = \sum_{y=1}^{x} f_X(y) = F_X(x), \qquad P(\{X < x\}) = \sum_{y=1}^{x-1} f_X(y),$$

$$P(\{X \geq x\}) = \sum_{y=x}^{\infty} f_X(y) = 1 - P(\{X < x\}), \qquad P(\{X > x\}) = \sum_{y=x+1}^{\infty} f_X(y) = 1 - P(\{X \leq x\}).$$

Příklad (Součet teček na dvou kostkách)

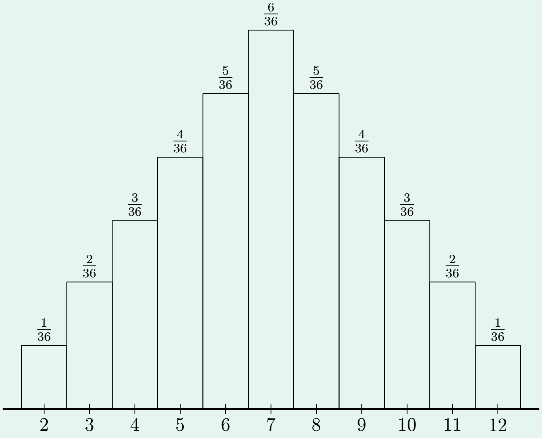
Jsou vrženy dvě kostky; zajímáme se o součet teček na obou kostkách.

X je náhodná veličina reprezentující „součet teček na obou kostkách“

$f_X(x)$ je pravděpodobnost, že součet teček na obou kostkách je právě x

pravděpodobnost je koncentrována v bodech z $R = \{2, 3, \ldots, 12\}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{6 - |7 - x|}{36} & \text{pokud } x \in R, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Příklad (Maximum z počtu teček na dvou kostkách)

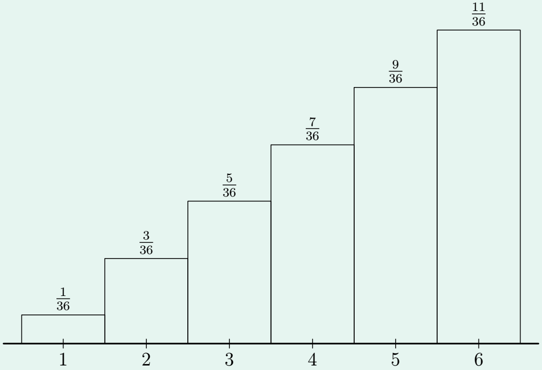
Jsou vrženy dvě kostky; zajímáme se o maximum počtu teček na obou kostkách.

X je náhodná veličina reprezentující „maximum počtu teček na kostkách“

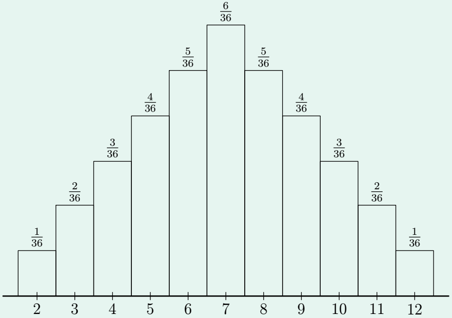
$f_X(x)$ je pravděpodobnost, že větší z počtu teček na kostkách je právě x

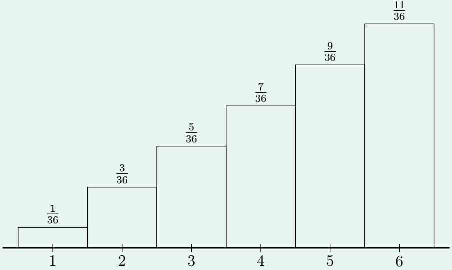
pravděpodobnost je koncentrována v bodech z $R = \{1, 2, \ldots, 6\}$

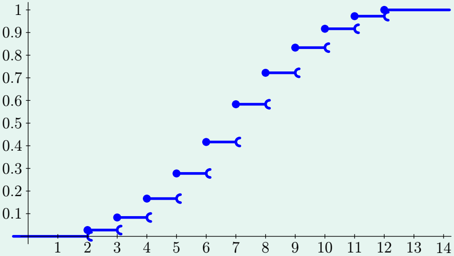
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot x - 1}{36} & \text{pokud } x \in R, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

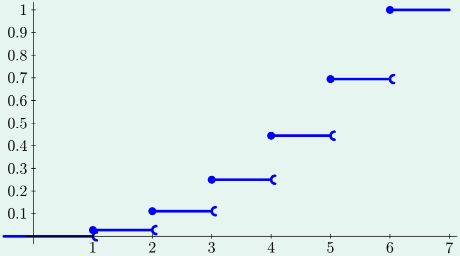


Příklady (Pravděpodobnostní a distribuční funkce)









Borelovské funkce

Definice (Borelovská funkce)

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá **Borelovská funkce** (angl.: *Borel function*), pokud pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí, že $\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \leq a\}$ je Borelovská množina.

Poznámka: Pro $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ uvažujeme **složenou funkci** $g(f)\colon A \to C$ (někdy značíme $f \circ g$) takovou, že $(g(f))(x) = g(f(x))$ pro každé $x \in A$.

Věta

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}, P \rangle$. Pak platí:

1. *X je náhodná veličina v $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}, P \rangle$ právě tehdy, když je X Borelovská funkce.*
2. *Je-li X náhodná veličina v pravděpodobnostním prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a g je Borelovská funkce, pak $g(X)$ je náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$.*
3. *Je-li X diskrétní náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a g je Borelovská funkce, pak $g(X)$ je rovněž diskrétní náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$.*

Důkaz.

První tvrzení plyne přímo z definice náhodné veličiny.

Ověříme druhé tvrzení. Mějme náhodnou veličinu $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a Borelovskou funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Evidentně, složená funkce $g(X)$ je zobrazení $g(X)\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Vezměme $a \in \mathbb{R}$. Jelikož je g Borelovská funkce, pro $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) \leq a\}$ máme $B \in \mathcal{B}$. Z toho, že X je náhodná veličina dostáváme $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$, což znamená

$$\begin{aligned}\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\} &= \big\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) \leq a\}\big\} \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \leq a\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Z čehož dostáváme, že $g(X)$ je náhodná veličina v $\langle \Omega, \mathcal{F}, P\rangle$.

Ukážeme, že pokud je X diskrétní, pak je i $g(X)$ diskrétní. Předpokládáme, že existuje spočetná C tak, že $P_X(C) = 1$. Pro spočetnou $g(C) = \{g(c) \,|\, c \in C\}$:

$$\begin{aligned}1 = P_X(C) = P\big(\{X \in C\}\big) &= P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in C\}\big) \\ &\leq P\big(\{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \in g(C)\}\big) = P_{g(X)}\big(g(C)\big).\end{aligned}$$

□

Příklad (Borelovské funkce)

Následující funkce jsou Borelovské:

1. *identita*, to jest $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$;
   pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\} = (-\infty, a]$ Borelovská množina;
2. *kvadratická funkce*, to jest $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$;
   pro každé $a \geq 0$ je $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq a\} = \left[-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right]$ Borelovská množina;
   pro každé $a < 0$ je $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq a\} = \emptyset$ Borelovská množina;
3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x^k$;
4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x - a$;
5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = (x - a)^k; \ldots$
6. obecně: každá spojitá funkce je Borelovská.

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které budeme používat budou vždy Borelovské.

Věta (O pravděpodobnostní funkci veličiny $g(X)$)

Nechť X je diskrétní náhodná veličina v $\langle\Omega, \mathcal{F}, P\rangle$, g je Borelovská funkce a $Y = g(X)$. Pak lze pravděpodobnostní funkci f_Y veličiny Y psát

$$f_Y(y) = \sum_{g(x)=y} f_X(x)$$

pro každé $y \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Jelikož je X diskrétní náhodná veličina, dle předchozí věty je i Y diskrétní a navíc existuje spočetná $C \subseteq \mathbb{R}$ taková, že $P_X(C) = 1$. Pro každé $y \in \mathbb{R}$ proto platí

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P_Y(\{y\}) = P_X\big(\{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = y\}\big) = P_X\big(\{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = y\} \cap C\big) \\ &= P_X\big(\{x \in C \,|\, g(x) = y\}\big) = \sum_{\substack{g(x)=y \\ x \in C}} P_X(\{x\}) = \sum_{g(x)=y} P_X(\{x\}) = \sum_{g(x)=y} f_X(x). \end{aligned}$$

$\square$

Příklad (Pravděpodobnostní funkce veličiny $g(X)$)

Jsou vrženy dvě kostky; X označuje součet teček na obou kostkách.

Z předchozího víme, že pravděpodobnostní funkce f_X veličiny X má tvar:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{6 - |7 - x|}{36} & \text{pokud } x \in \{2, 3, \ldots, 12\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Uvažujme funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která každé přirozené číslo zobrazí na jeho celočíselný zbytek po dělení číslem 5; a každé jiné číslo zobrazí na nulu.
(Příklad: $g(11) = 1, g(7) = 2, g(9) = 4, g(1.5) = 0,\ g(-2.3) = 0, \ldots$)

Potom pro $Y = g(X)$ platí:

$$f_Y(y) = \sum_{g(x)=y} f_X(x) = \begin{cases} \frac{7}{36} & \text{pokud } y \in \{0, 1, 3, 4\}, \\ \frac{8}{36} & \text{pokud } y = 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad (Motivace pro očekávané hodnoty)

Uvažujme hazardní hru: Je vržena šestistěnná kostka a X označuje výši výplaty

$$X(s) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } s \in \{1,2,3\}, \\ 5 & \text{pokud } s \in \{4,5\}, \\ 35 & \text{pokud } s = 6. \end{cases}$$

Otázka: *Kolik si máme účtovat za jednu hru, aby byla dlouhodobě výdělečná?*

Pokud je hra hrána dlouhodobě, pak:

- zhruba polovina všech plateb bude \$$1$,
- zhruba jedna třetina všech plateb bude \$$5$,
- zhruba jedna šestina všech plateb bude \$$35$.

Dlouhodobá očekávaná hodnota je tedy:

$$\sum_{x=1}^{6} x \cdot f_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 35 \cdot \frac{1}{6} = 8.$$

Za jedno kolo hry bychom měli chtít alespoň \$$8$.

Očekávané hodnoty

Definice (Očekávaná hodnota, angl.: *expected value*)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X s pravděpodobnostní funkcí f_X a označme C spočetnou podmnožinu $\mathbb{R}$ pro niž $P_X(C) = 1$. Pokud

$$E(X) = \sum_{x \in C} x \cdot f_X(x)$$

absolutně konverguje, pak $E(X)$ nazveme **očekávaná hodnota** X. V opačném případě je očekávaná hodnota nedefinovaná.

Poznámky:

- Lze psát $E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot f_X(x)$, protože $f_X(x) = 0$ pro $x \notin C$.
- Hodnotu $E(X)$ lze chápat jako vážený průměr hodnot náhodné veličiny, kde váhy jsou funkční hodnoty f_X.
- $E(X)$ není definovaná například pokud $f_X(2^n) = 2^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$; nula jinak).

Věta (Očekávaná hodnota $g(X)$)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X s f_X a označme C spočetnou podmnožinu $\mathbb{R}$ pro niž $P_X(C) = 1$. Pro libovolnou Borelovskou funkci $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

$$E\big(g(X)\big) = \sum\nolimits_{x \in C} g(x) \cdot f_X(x).$$

Důkaz.

Z předchozího víme, že $g(X)$ je diskrétní náhodná veličina koncentrovaná v bodech z $g(C) = \{g(c) \,|\, c \in C\}$, to jest, $P_{g(X)}\big(g(C)\big) = 1$. Dále jsme prokázali, že pro $f_{g(X)}$ platí $f_{g(X)}(y) = \sum_{g(x)=y} f_X(x)$. Nyní můžeme psát:

$$\begin{aligned}
E\big(g(X)\big) &= \sum\nolimits_{y \in g(C)} y \cdot f_Y(y) = \sum\nolimits_{y \in g(C)} \Big(y \cdot \sum\nolimits_{g(x)=y} f_X(x)\Big) \\
&= \sum\nolimits_{y \in g(C)} \sum\nolimits_{g(x)=y} y \cdot f_X(x) = \sum\nolimits_{y \in g(C)} \sum\nolimits_{g(x)=y} g(x) \cdot f_X(x) \\
&= \sum\nolimits_{x \in C} g(x) \cdot f_X(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Střední hodnota a rozptyl diskrétní náhodné veličiny

Definice (Střední hodnota, rozptyl a směrodatná odchylka)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X s pravděpodobnostní funkcí f_X. Pokud je očekávaná hodnota $\mu_X = E(X)$ definována, pak se nazývá **střední hodnota** X, angl.: *mean*. Pokud je očekávaná hodnota $\sigma_X^2 = E\big((X-\mu_X)^2\big)$ definována, pak se nazývá **rozptyl** X, angl.: *variance*. Druhá odmocnina $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ se nazývá **směrodatná odchylka** X, angl.: *standard deviation*.

Z definice očekávané hodnoty:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot f_X(x), \quad \sigma_X^2 = E\big((X-\mu_X)^2\big) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x).$$

Význam:

- $E\big((X-\mu_X)^2\big)$ chápeme jako $E\big(g(X)\big)$ pro Borelovskou fci. $g(x) = (x-\mu_X)^2$;
- interpretace: *střední* (*průměrná*) *hodnota* X, *rozptýlenost* od střední hodnoty X;
- **teorie odhadu**: zabývá se (mimo jiné) vztahem μ_X a σ_X^2 a výběrových $\overline{x}$ a s^2.

Příklad (Střední hodnota a rozptyl pro házení kostkou)

Uvažujme, že X nabývá hodnot počtu teček při hodu šestistrannou kostkou. X má pravděpodobnostní funkci f_X, pro kterou

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pokud } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota X:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Rozptyl X:

$$E\big((X - \mu_X)^2\big) = \sum_{x=1}^{6} \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{24} + \frac{3}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{3}{8} + \frac{25}{24} = \frac{35}{12}.$$

Pozor: σ_X^2 se nerovná výběrovému rozptylu z výběru $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Příklad (Střední hodnota a rozptyl)

Uvažujme diskrétní náhodnou veličinu X, pro kterou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{pro } x = 0, 3, \\ \frac{3}{8} & \text{pro } x = 1, 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota X:

$$\mu_X = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Rozptyl X:

$$\sigma_X^2 = \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Věta (E je lineární operátor)

Nechť $c, c_i \in \mathbb{R}$ a u, u_i jsou Borelovské funkce pro $i = 1, \ldots, k$. Potom platí:

1. $E(c) = c$;
2. $E\big(c \cdot u(X)\big) = c \cdot E(u(X))$;
3. $E\big(\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot u_i(X)\big) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot E\big(u_i(X)\big)$.

Důkaz.

Je-li c konstanta (konstantní funkce), první dvě tvrzení plynou následovně:

$$E(c) = \textstyle\sum_{x \in \mathbb{R}} c \cdot f_X(x) = c \cdot \sum_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) = c \cdot 1 = c.$$
$$E\big(c \cdot u(X)\big) = \textstyle\sum_{x \in \mathbb{R}} c \cdot u(x) \cdot f_X(x) = c \cdot \sum_{x \in \mathbb{R}} u(x) \cdot f_X(x) = c \cdot E\big(u(X)\big).$$

Poslední tvrzení lze prokázat následovně:

$$\begin{aligned} E\big(\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot u_i(X)\big) &= \textstyle\sum_{x \in \mathbb{R}} \big(\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot u_i(x)\big) \cdot f_X(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{k} \big(c_i \cdot u_i(x) \cdot f_X(x)\big) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \sum_{x \in \mathbb{R}} \big(u_i(x) \cdot f_X(x)\big) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot E\big(u_i(X)\big). \end{aligned}$$

□

Příklad (E je lineární operátor)

Uvažujme diskrétní náhodnou veličinu X s pravděpodobnostní funkcí

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & \text{pro } x \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protom máme

$$E(X) = \sum_{x=1}^{4} x \cdot \frac{x}{10} = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = 3.$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{4} x^2 \cdot \frac{x}{10} = 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{2}{10} + 9 \cdot \frac{3}{10} + 16 \cdot \frac{4}{10} = 10.$$

$$E(X(5 - X)) = E(5X - X^2) = 5E(X) - E(X^2) = 5 \cdot 3 - 10 = 5.$$

Věta (O vztahu mezi μ_X a σ_X^2)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X *a* $b \in \mathbb{R}$. *Pokud* $E\big((X-b)^2\big)$ *a* σ_X^2 *existují, pak platí* $\sigma_X^2 \leq E\big((X-b)^2\big)$.

Důkaz.

Rozepsáním $E\big((X-b)^2\big)$ pomocí linearity operátoru E dostáváme:

$$E\big((X-b)^2\big) = E\big(X^2 - 2bX + b^2\big) = E\big(X^2\big) - 2b\mu_X + b^2.$$

$E\big((X-b)^2\big)$ lze chápat jako funkci v proměnné b, označme ji h.

Vyšetříme, pro které b nabývá h svého minima:

$$h'(b) = (E\big(X^2\big) - 2b\mu_X + b^2)' = 2b - 2\mu_X.$$

Zřejmě $h'(b) = 0$ pro $b = \mu_X$. Jelikož navíc $h''(\mu_X) = 2 > 0$, μ_X je hodnota minimalizující $h(b)$. To znamená, že $h(\mu_X) = \sigma_X^2 \leq E\big((X-b)^2\big)$. □

Momenty a faktoriální momenty

Kromě μ_X a σ_X^2 uvažujeme pro X další speciální očekávané hodnoty:

Definice (Moment, faktoriální moment)

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X a $r \in \mathbb{N}$. Pokud je očekávaná hodnota

- $E(X^r)$ definována, pak se nazývá r-**tý moment** X, angl.: *rth moment*;
- $E((X-b)^r)$ definována, pak se nazývá r-**tý moment** X **okolo bodu** b;
- $E\big((X)_r\big) = E\big(X \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdots (X-r+1)\big)$ definovaná, pak se nazývá r-**tý faktorální moment** X, angl.: *rth factorial moment*.

Speciálně pro $b = \mu_X$ se $E((X-\mu_X)^r)$ nazývá r-**tý centrální moment**.

Poznámka:

- střední modnota X = první moment X okolo bodu 0 (počátek);
- rozptyl X = druhý centrální moment X.

Věta (Vztah variance, momentů a faktoriálních momentů)

Pro každou diskrétní náhodnou veličinu X platí

1. $\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$,
2. $\sigma_X^2 = E((X)_2) + \mu_X - \mu_X^2$

Důkaz.

První rovnost se dokazuje s využitím faktu, že E je lineární operátor:

$$\sigma_X^2 = E\big((X-\mu_X)^2\big) = E(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2) = E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu_X \cdot \mu_X + \mu_X^2 = E(X^2) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2.$$

Použitím předchozí rovnosti dostáváme:

$$E((X)_2) + \mu_X - \mu_X^2 = E(X^2) - E(X) + \mu_X - \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X + \mu_X - \mu_X^2$$
$$= E(X^2) - \mu_X^2 = E((X-\mu_X)^2) = \sigma_X^2.$$

□

Lineární transformace diskrétních náhodných veličin

Věta

Mějme diskrétní náhodné veličiny X *a* $Y = a \cdot X + b$, *to jest* $Y = g(X)$ *pro* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *kde* $g(x) = a \cdot x + b$. *Pak platí* $\mu_Y = a \cdot \mu_X + b$ *a* $\sigma_Y^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2$.

Důkaz.

V prvním případě platí:

$$\mu_Y = E(Y) = E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + E(b) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu_X + b\,.$$

V druhém případě dostáváme:

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= E\big((Y - \mu_Y)^2\big) = E\big(((a \cdot X + b) - (a \cdot \mu_X + b))^2\big) \\
&= E\big((a \cdot X + b - a \cdot \mu_X - b)^2\big) = E\big((a \cdot X - a \cdot \mu_X)^2\big) \\
&= E\big(a^2 \cdot (X - \mu_X)^2\big) = a^2 \cdot E\big((X - \mu_X)^2\big) = a^2 \cdot \sigma_X^2\,.
\end{aligned}$$

□

Míry šikmosti a špičatosti

Šikmost rozdělení X (angl.: *skewness*) je definována vztahem

$$\gamma_X^1 = \frac{E\big((X-\mu_X)^3\big)}{E\big((X-\mu_X)^2\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E\big((X-\mu_X)^3\big)}{(\sigma_X^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E\big((X-\mu_X)^3\big)}{\sigma_X^3}.$$

Špičatost rozdělení X (angl.: *kurtosis*) je definována vztahem

$$\gamma_X^2 = \frac{E\big((X-\mu_X)^4\big)}{E\big((X-\mu_X)^2\big)^2} = \frac{E\big((X-\mu_X)^4\big)}{(\sigma_X^2)^2} - 3.$$

Vlastnosti:

- $\gamma_X^1 < 0$ / $\gamma_X^1 > 0$ znamená: rozdělení X je zkoseno doprava / doleva;
- $\gamma_X^1 = 0$ znamená: rozdělení X je symetrické okolo μ_X;
- vyšší hodnoty γ_X^2 znamenají větší „spičatost“.

Přednáška 5: Závěr

Pojmy:

- náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce
- diskrétní náhodná veličina, pravděpodobnostní funkce, Borelovské funkce
- očekávaná hodnota, střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka
- moment, faktoriální moment

Použité zdroje:

- Capinski M., Zastawniak T. J.: *Probability Through Problems* Springer 2001, ISBN 978–0–387–95063–1.
- Hogg R. V., Tanis E. A.: *Probability and Statistical Inference* Prentice Hall; 7. vydání 2005, ISBN 978–0–13–146413–1.
- Johnson J. L.: *Probability and Statistics for Computer Science* Wiley-Interscience 2008, ISBN 978–0–470–38342–1.