7.1 Spojité náhodné veličiny

▷ **Příklad 7.1.** Předpokládejte, že chyba nastavení teploty (v desetinách °C) pro kontrolovaný laboratorní experiment je spojitá náhodná veličina s hustotou:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{16} & \text{jestliže } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Je skutečně funkce $f(x)$ hustotou? Aby tomu tak bylo, musí platit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, což platí, protože

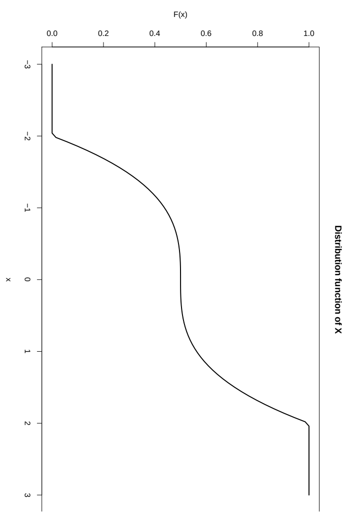
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-2}^{2} \frac{3x^2}{16} dx = \frac{3}{16}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{3}{16} \cdot \frac{16}{3} = 1$$

Zajimá nás, jaká je pravděpodobnost, že chyba měření bude menší nebo rovna než nějaké předem stanovené číslo x. Jinými slovy, chceme najít distribuční funkci. Pro $x < -2$ je $P(\{X \le x\}) = 0$. Pro $x > 2$ je $P(\{X \le x\}) = 1$. Pro $x \in [-2, 2]$ dostáváme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-2}^{x} \frac{3t^2}{16} dt = \frac{3}{16}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{x} = \frac{x^3 + 8}{16}.$$

Tedy:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x < -2 \\ \frac{x^3+8}{16} & \text{jestliže } -2 \le x \le 2 \\ 1 & \text{jestliže } x > 2 \end{cases}$$



K základním charakteristikám náhodné veličiny patří střední hodnota a rozptyl. Proto si je nyní určíme. Pro střední (očekávanou) hodnotu u spojité náhodné veličiny X s rozdělením $f(x)$ platí:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{3x^2}{16} dx = \ldots = 0.$$

Pro rozptyl proto dostáváme:

$$\sigma_X^2 = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{3x^2}{16} dx = \ldots = 2.4$$

Určete pravděpodobnost, že chyba při nastavení přístroje bude v intervalu $[-1, 1]$. Tuto úlohu můžeme vyřešit jak za pomoci funkce hustoty, tak za použití distribuční funkce. Pro srovnání ukážeme postupně obojí.

$$P(\{X \in [-1,1]\}) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{3}{16}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{3}{16}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned} P(\{X \in [-1,1]\}) &= P(\{X \in (-\infty,1] \setminus (-\infty,-1)\}) = P(\{X \in (-\infty,1]\}) - P(\{X \in (-\infty,-1)\}) \\ &= F(1) - F(-1) = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Všechny části úlohy bychom mohli vyřešit i pomocí R:

```
#funkce hustoty
f<-function(x){
  ifelse((-2<x)&(x<2),3*x^2/16,0)
}
print(integrate(f,lower=-Inf,upper=Inf)))

#distribuční funkce
F<-function(x) ifelse(x < -2,0, ifelse(x>2,1,(x^3+8)/16))
plot(F,-3,3,main="Distribution function of X",lwd="2")

#výpočet střední hodnoty (rozptyl zkuste sami)
e<-function(x) ff(x)*x
> integrate(e,lower=-2,upper=2)
0 with absolute error < 1.7e-14

> integrate(f,lower=-1,upper=1)
0.125 with absolute error < 1.4e-15
> F(1)-F(-1)
[1] 0.125
```

Jiný způsob řešení nabízí použití package `distr` a `distrEx`. Význam následujících řádků je zřejmý.

```
> library(distr)
> library(distrEx)
> f<-function(x) 3*x^2/16
> X<-AbscontDistribution(d=f,low1=-2,up1=2)
> E(X)
[1] -3.574532e-07
> var(X)
[1] 2.397071
> p(X)(1)-p(X)(-1)
[1] 0.1250611
```

Srovnejte výsledky s předcházejícími výpočty. Jak jste si jistě všimli, výsledky jsou odlišné. Je to dáno tím, že pokud úloha nelze vyřešit analyticky (R nezná analytický model), použijí se numerické metody. Což ovšem znamená, že výsledky, které nám R vrací, nemusí vždy sedět se teoretickými hodnotami!

► **Příklad 7.1.** Uvažujte $\Omega = [0,1]$ s Lebesgueovskou mírou na borelovksých množinách a náhodnou veličinu $X = 2\omega + 1$ pro $\omega \in \Omega$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny X. Vykreslete v R.

► **Příklad 7.2.** Uvažujete náhodnou veličinu X takovou, že

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \quad \omega \in A \\ 2 & \text{jinak} \end{cases}$$

Nechť $P(A) = 1/3$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.

▶ **Příklad 7.3.** Nechť $\Omega = [0,1]$. Uvažujte Lebesgueovu míru na borelovských množinách. Nechť je dána náhodná veličina $X(x) = x$. Určete $P_X([0,1/2))$. $[1/\sqrt{2}]$

▶ **Příklad 7.4.** Bezpečnostní zařízení v laboratoři aktivuje alarm pokud zaregistruje 5 a více radioaktivních částíc během 1 s. Běžná (přirozená radiace) je taková, že zařízení zaregistruje v průměru 0.5 částice za 1 s. Jaká je pravděpodobnost, že alarm bude aktivován během jedné dané sekundy? Jaká je pravděpodobnost, že zařízení zaregistruje první částici až po pěti sekundách? Výsledky výpčtů ověřte v R. Podívejte se, jak jsou jednotlivá rozdělení v R definována, mohou se mírně lišit od toho, co znáte. $[0.00017, 0.08209]$

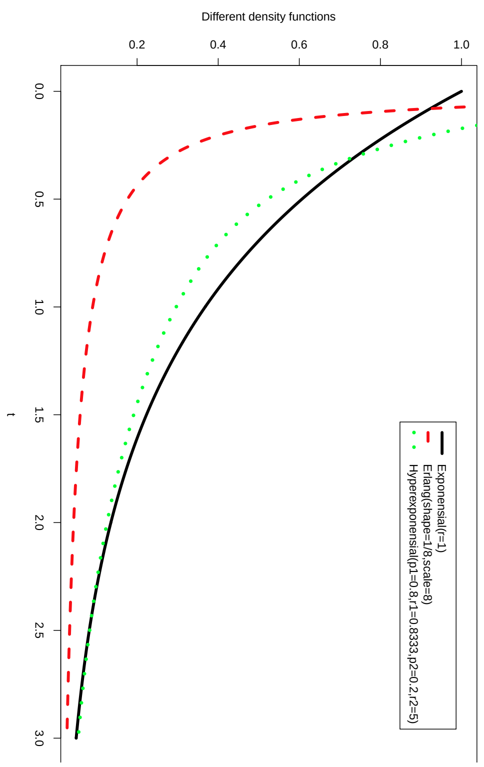
▶ **Příklad 7.5.** Nechť náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci $f(x) = 4x^3$, $0 \le x \le 1$. Najděte předpis pro pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = X^2$. $[2y]$

7.2 Simulace zákaznického centra

▶ **Příklad 7.6.** V zákaznickém centru pracuje n telefonních operátorů. Pokud zákazník zavolá a všichni operátoři jsou obsazeni, bude zákazník blokován. Či-li neexistuje fronta čekajících zákazníků. Uvažujte, že zákazníci volají v souladu s Poissonovým procesem. Délka hovoru s operátorem je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením.
Uvažujte $n = 10$. Průměrný čas potřebný na vyřízení hovoru se zákazníkem je 8 časových jednotek. Průměrná doba mezi telefonáty od dvou zákazníků je 1 časová jednotka. Napište program, který simulujte tento problém pro $N = 10000$ zákazníků. Určete kolik zákazníků bylo a kolik nebylo obslouženo. Program by měl jako vstupní parametry brát počet operátorů, průměrný čas potřebný na vyřízení hovoru a i průměrný čas mezi příchozími hovory.
Zkuste dobu mezi jednotlivými telefonáty simulovat pomocí Erlangovy distribuce s parametry $shape = 1/8$, $scale = 8$ a s pomocí hyberexponenicální distribuce, která má funkci hustoty dánu předpisem:

$$f_X(x) = p_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x} + p_2 \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x},$$

zvolte $p_1 = 0.8, \lambda_1 = 0.833, p_2 = 0.2, \lambda_2 = 5$. Porovnání těchto distribucí vidíte na obrázku. Pro různé



distribuce simulujte tento proces desetkrát a určete výběrový průměr a výběrový rozptyl pro počet blokovaných zákazníků.

Reference

[1] Capinski M., Zastawniak T. J.: Probability Through Problems
Springer 2001, ISBN 978-0-387-95063-1.

[2] Kerns G. J.: Elementary Probability on Finite Sample Spaces, 2009, reference manual package prob, available from: http://CRAN.R-project.org/package=prob

[3] Kerns G. J: Introduction to Probability and Statistics Using R, First Edition
http://cran.r-project.org/web/packages/IPSUR/vignettes/IPSUR.pdf

[4] Kenneth Baclawski: Introduction to Probability with R
Chapman and Hall/CRC, ISBN 978-1420065213.