

Geometrie pro informatiky

pracovní verze

Michal Krupka

23. února 2012

Obsah

Obsah	3
1 Úvod	5
2 Připomenutí vektorových prostorů	7
2.1 Vektorový prostor	7
2.2 Báze a souřadnice ve vektorových prostorech	7
3 Afinní prostory a podprostory	9
3.1 Afinní prostory	9
3.2 Afinní kombinace a afinní obal	13
3.3 Vektorové kombinace	17
3.4 Afinní podprostory	18
3.5 Afinní báze a souřadnice	21
3.6 Body v obecné poloze, bodové báze a souřadnice	27
ÚLOHY	29
4 Další vlastnosti afinních prostorů	31
4.1 Orientace afinních prostorů	31
4.2 Konvexní kombinace a konvexní množiny	34
4.3 Vzájemná poloha afinních podprostorů	36
4.4 Příčka mimoběžek	37
5 Afinní zobrazení	39
5.1 Základní vlastnosti afinních zobrazení	39
5.2 Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím	44
ÚLOHY	46
6 Eukleidovské prostory	49

7	Projektivní prostory	51
7.1	Projektivní prostory a jejich vztah k afinním prostorům	51
7.2	Projektivní zobrazení	57

Kapitola 1

Úvod

Vznikne až na závěr.

Kapitola 2

Připomenutí vektorových prostorů

Tato kapitola bude časem obsahovat základní pojmy z teorie vektorových prostorů, potřebné v dalším textu.

Zatím je to jen takové neuspořádané skladiště.

2.1 Vektorový prostor

V tomto textu používáme pouze vektorové prostory nad tělesem reálných čísel.

2.2 Báze a souřadnice ve vektorových prostorech

Je-li V vektorový prostor dimenze n , $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ jeho báze, pak souřadnice (souřadnicové vyjádření) vektoru $v \in V$ v bázi α značíme v_α . Jedná se o n -tici čísel, kterou indexujeme horními indexy a v případě, že nešetříme místem, píšeme do sloupce:

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} v_\alpha^1 \\ v_\alpha^2 \\ \vdots \\ v_\alpha^n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Je-li $\bar{\alpha} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ druhá báze vektorového prostoru V , pak matici přechodu od báze α k bázi $\bar{\alpha}$ značíme $M_{\alpha, \bar{\alpha}}$. Pro libovolný vektor $v \in V$ tedy

$$v_{\bar{\alpha}} = M_{\alpha, \bar{\alpha}} \cdot v_\alpha. \quad (2.2)$$

Platí také

$$M_{\alpha, \bar{\alpha}} \cdot M_{\bar{\alpha}, \alpha} = E, \quad (2.3)$$

kde E je jednotková matice.

Matice přechodu $M_{\alpha, \tilde{\alpha}}$ je složena ze souřadnic vektorů báze α vzhledem k bázi $\tilde{\alpha}$:

$$M_{\alpha, \tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} (u_1)_{\tilde{\alpha}}^1 & (u_2)_{\tilde{\alpha}}^1 & \cdots & (u_n)_{\tilde{\alpha}}^1 \\ (u_1)_{\tilde{\alpha}}^2 & (u_2)_{\tilde{\alpha}}^2 & \cdots & (u_n)_{\tilde{\alpha}}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1)_{\tilde{\alpha}}^n & (u_2)_{\tilde{\alpha}}^n & \cdots & (u_n)_{\tilde{\alpha}}^n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

V dalším textu definujeme pojmy, které ve svém názvu obsahují slovo „báze“ (afin-ní báze, bodová báze). Abychom zabránili nedorozumění, budeme o bazích vektoro-vých prostorů hovořit také jako o *vektorových bazích*.

Kapitola 3

Afinní prostory a podprostory

Tato kapitola se zabývá úvodními pojmy: afinními prostory a jejich podprostory. Jak postupně uvidíme, afinní prostory jsou vhodným modelem dvojrozměrného a trojrozměrného světa pro počítačovou grafiku.

3.1 Afinní prostory

Řekneme, že na neprázdné množině A je dána *struktura afinního prostoru* (stručněji *afinní struktura*), je-li dán vektorový prostor U a zobrazení $\text{Add}_A : A \times U \rightarrow A$ takové, že

1. pro všechna $a \in A, u, v \in U$

$$\text{Add}_A(\text{Add}_A(a, u), v) = \text{Add}_A(a, u + v), \quad (3.1)$$

2. pro všechna $a, b \in A$ existuje právě jedno $u \in U$ tak, že

$$\text{Add}_A(a, u) = b. \quad (3.2)$$

Množina A se strukturou afinního prostoru se nazývá *afinní prostor*, její prvky se nazývají *body*. Vektorový prostor U se nazývá *zaměření afinního prostoru* A .

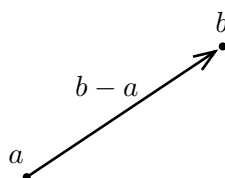
Zobrazení Add_A se nazývá *sčítání bodů a vektorů*. Pro libovolné $a \in A$ a $u \in U$ se bod $\text{Add}_A(a, u)$ označuje $a + u$ a nazývá se *součet bodu* a *a vektoru* u .

Jelikož podle bodu 1. definice platí $(a + u) + v = a + (u + v)$, můžeme při přičítání dvou vektorů k bodu vynechat závorky a psát pouze $a + u + v$.

Vektor u z bodu 2. definice afinního prostoru se označuje $b - a$. Vzhledem k podmínce bodu 2. tento vektor existuje pro libovolné a a b , a to právě jeden. Přiřazením

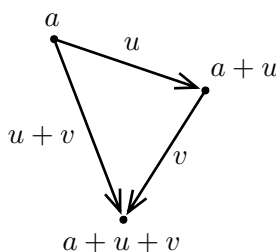
$(a, b) \mapsto b - a$ je tedy jednoznačně určené zobrazení z $A \times A$ do U . Vektoru $b - a$ se říká *rozdl bodů b a a* .

Afinní prostory si můžeme celkem snadno představit. Například kus papíru nebo třeba obrazovku počítače můžeme chápat jako část nějakého afinního prostoru (v druhém případě si ovšem nesmíme plést bod s pixelem!). Jak si v takovém případě představit vektory? Podle podmínky 2. definice struktury afinního prostoru určuje každá dvojice bodů jednoznačně nějaký vektor („pro všechna $a, b \in A$ existuje právě jedno $u \in U$...“), nabízí se tedy představovat si vektor jako něco, co je těmito body nějak jednoznačně určeno. Ujala se šipka vedoucí z druhého bodu do prvního, jak je vidět na Obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Body a, b a vektor $b - a$.

Tato představa dobře odpovídá i první podmínce definice, jak vidíme na Obrázku 3.2. Podle ní se má bod $(a + u) + v$ rovnat bodu $a + (u + v)$, což je opravdu v souladu s geometrickým způsobem, kterým znázorňujeme součet dvou vektorů (rovnoběžníková metoda).



Obrázek 3.2: Grafické znázornění podmínky 1. definice afinní struktury.

Ke grafickému znázorňování vektorů je třeba ještě dodat, že dvě různé šipky mohou znázorňovat též vektor, a to pokud jsou rovnoběžné, stejně dlouhé a ukazují stejným směrem (Pozor! zde mluvíme pouze o délce šipek v rámci našeho grafického znázornění, tedy například nakreslených na papír. Jejich délku samozřejmě změřit umíme. Hovořit o délce vektoru by ale nebylo správně.).

Je-li U vektorový prostor konečné dimenze, říká se o afinním prostoru A , že je také konečné dimenze. V takovém případě *dimenzí afinního prostoru A* nazýváme dimenzi vektorového prostoru U . Nemá-li vektorový prostor U konečnou dimenzi, říkáme i o

afinním prostoru A , že nemá konečnou dimenzi (má nekonečnou dimenzi, je nekonečně rozměrný). Afinní prostor dimenze 1 se nazývá *afinní přímka*, afinní prostor dimenze 2 *afinní rovina*.

Pro počítačovou grafiku jsou samozřejmě důležité hlavně afinní prostory dimenze nejvýše 3.

Příklad 3.1. Na libovolné jednoprvkové množině $A = \{a\}$ lze zavést jediným způsobem strukturu afinního prostoru¹.

Na vektorovém prostoru U zavádíme *kanonickou strukturu afinního prostoru* takto: zaměřením prostoru U volíme samotný vektorový prostor U , pro libovolné dva vektory $u, v \in U$ klademe $\text{Add}_U(u, v) = u + v$, kde součet na pravé straně je součet vektorů ve vektorovém prostoru U .

Příklad 3.2. Ověřte, že v definici kanonické struktury afinního prostoru na vektorovém prostoru jsou splněny podmínky definice afinního prostoru.

Pokud nebude řečeno jinak, budeme vektorové prostory uvažovat vždy s kanonickou strukturou afinního prostoru, popsanou v předchozím příkladě.

Příklad 3.3. Víme, že na n -té kartézské mocnině množiny reálných čísel R^n je dána kanonická struktura vektorového prostoru. Pokud tuto strukturu využijeme jak je popsáno v předchozím příkladě, dostaneme kanonickou strukturu afinního prostoru na R^n .

Pokud nebude řečeno jinak, budeme množinu R^n uvažovat vždy s kanonickou strukturou afinního prostoru.

Abychom odlišili, kdy prvek R^n chápeme jako bod z afinního prostoru R^n a kdy jako vektor z vektorového prostoru R^n , budeme v prvním případě používat hranaté a ve druhém kulaté závorky.

Příklad 3.4. Zvolme bod $a_0 \in A$ a definujme zobrazení $f: A \rightarrow U$ předpisem $f(a) = a - a_0$. Ukažte, že toto zobrazení je bijekce a najděte jeho inverzi.

Příklad 3.5. Pro afinní prostor A_1 se zaměřením U_1 a afinní prostor A_2 se zaměřením U_2 definujte na množině $A_1 \times A_2$ strukturu afinního prostoru se zaměřením $U_1 \times U_2$.

Věta 3.1. Pro libovolný afinní prostor A se zaměřením U a prvky $a, b \in A, u \in U$ platí

1. $a + 0 = a$,
2. $a - b = -(b - a)$,

¹Připomeňme, že uvažujeme pouze vektorové prostory nad tělesem reálných čísel

$$3. (a + u) - b = (a - b) + u,$$

„0“ v bodu 1. je nulový vektor ve vektorovém prostoru U .

Důkaz. 1. Podle bodu 2. definice afinního prostoru existuje právě jeden vektor $u \in U$ takový, že $a + u = a$. Odtud plyne rovnost $a + u = (a + u) + u$, která podle bodu 1. definice znamená $a + u = a + (u + u)$, což podle bodu 2. (jednoznačnost) vede k $u = u + u$. Tuto rovnost ale splňuje pouze nulový vektor (proč?). Z rovnosti $a + u = a$ tedy vyplývá $u = 0$, což znamená, že žádný jiný vektor kromě nulového tuto rovnost nesplňuje. To společně s bodem 2. (existence) dokazuje první bod věty.

2. Označme $a - b = u$, $b - a = v$. Dostáváme $b = a + v = (b + u) + v = b + (u + v)$. Podle prvního bodu této věty, který jsme již dokázali, platí $u + v = 0$, neboli $u = -v$.

3. Vektor $v = (a + u) - b$ splňuje podmínku $b + v = a + u$. Přičtením vektoru $-v$ k oběma stranám této rovnice a úpravou dostaneme $a = b + (v - u)$. Odtud plyne $v - u = a - b$. Nyní, přičtením vektoru u dostaneme $v = (a - b) + u$, což je dokazované tvrzení. \square

Projděte všechny výskyty symbolu „+“ v důkazu předchozí věty a rozhodněte, kdy označuje sčítání vektorů ve vektorovém prostoru U a kdy přičítání bodu z afinního prostoru A a vektoru z U (tedy zobrazení Add_A z definice afinního prostoru). Podobně rozhodněte, kdy symbol „−“ označuje odečítání vektorů (tedy operaci na vektorovém prostoru U) a kdy rozdíl bodů (tedy zobrazení $A \times A \rightarrow U$).

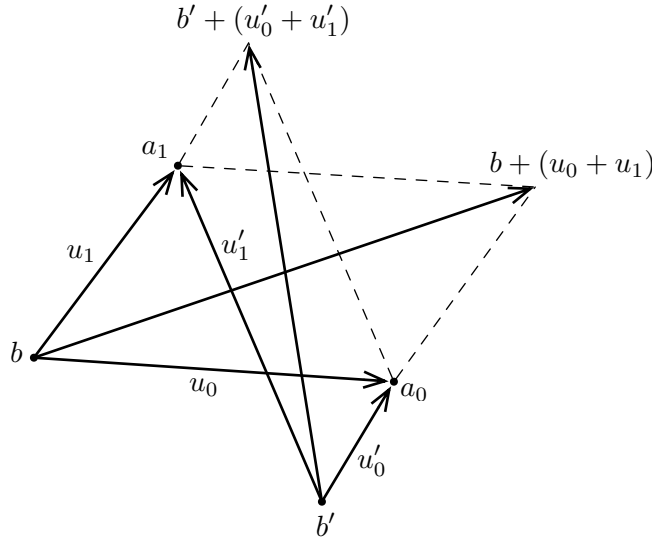
V případech, kdy symboly „+“ a „−“ neoznačují základní operace s reálnými čísly nebo vektory, ale slouží k označení sčítání bodů s vektory a odečítání bodů, jak jsme je definovali v této kapitole, nelze k práci s nimi používat naše znalosti z oblasti reálných čísel či vektorových prostorů. Je nutné postupovat pouze podle poznatků o afinních prostorech. Například v důkazu předchozí věty je třeba umět každý jednotlivý krok zdůvodnit pomocí definice afinního prostoru.

Příklad 3.6. Dokažte, že pro libovolné tři body a, b, c afinního prostoru A platí

$$(a - b) + (b - c) = a - c.$$

Příklad 3.7. Dokažte, že pro libovolné dva body a, b afinního prostoru A a vektory u, v jeho zaměření platí

$$(a + u) - (b + v) = (a - b) + (u - v).$$



Obrázek 3.3: Pokud součet koeficientů c^0 a c^1 není roven 1, závisí bod $b + (c^0 u_0 + c^1 u_1)$ na volbě bodu b . Obrázek ukazuje případ $c^0 = c^1 = 1$.

3.2 Afinní kombinace a afinní obal

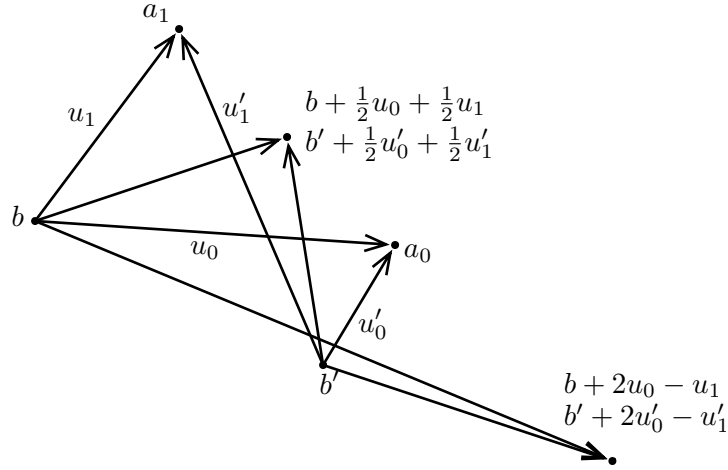
Začneme pozorováním. Na Obrázku 3.3 vidíme body a_0, a_1, b afinního prostoru A . Dvojice bodů a_0, b a a_1, b definují vektory $u_0 = a_0 - b$ a $u_1 = a_1 - b$, které jsou na obrázku rovněž znázorněny. Lineární kombinace $c^0 u_0 + c^1 u_1$ těchto vektorů pak definuje bod $b + (c^0 u_0 + c^1 u_1)$ (na obrázku je znázorněn případ $c^0 = c^1 = 1$). Pokud místo bodu b vybereme nějaký jiný bod b' , pak se výsledný bod, získaný stejným postupem, bude od původního lišit:

$$b + (c^0 u_0 + c^1 u_1) \neq b' + (c^0 u'_0 + c^1 u'_1),$$

což je patrné i z obrázku.

Situace se ovšem změní, pokud $c^0 + c^1 = 1$. To můžeme odhadnout už z Obrázku 3.3, když se podíváme na průsečík šipek znázorňujících vektory $u_0 + u_1$ a $u'_0 + u'_1$. Na Obrázku 3.4 jsou zobrazeny případy $c^0 = c^1 = \frac{1}{2}$ a $c_0 = 2$ a $c_1 = -1$. Zřejmě pokud $c^0 + c^1 = 1$, pak $b + (c^0 u_0 + c^1 u_1) = b' + (c^0 u'_0 + c^1 u'_1)$. Následující věta naši domněnku potvrzuje pro libovolný počet bodů.

Věta 3.2. *Mějme body a_0, a_1, \dots, a_m afinního prostoru A . Pro libovolné dva body $b, b' \in$*



Obrázek 3.4: Pokud součet koeficientů c^0 a c^1 je roven 1, bod $b + c^0 u_0 + c^1 u_1$ nezávisí na volbě bodu b . Obrázek ukazuje dva případy: $c^0 = c^1 = \frac{1}{2}$ a $c^0 = 2, c^1 = -1$

A a čísla c^0, c^1, \dots, c^m taková, že $c^0 + c^1 + \dots + c^m = 1$ platí

$$\begin{aligned} b + c^0(a_0 - b) + c^1(a_1 - b) + \dots + c^m(a_m - b) \\ = b' + c^0(a_0 - b') + c^1(a_1 - b') + \dots + c^m(a_m - b'). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Důkaz. Zkusíme vypočítat rozdíl levé a pravé strany. Měl by nám vyjít nulový vektor. Podle příkladu 3.7 je tento rozdíl roven

$$\begin{aligned} (b - b') + c^0(a_0 - b + b' - a_0) + c^1(a_1 - b + b' - a_1) + \dots \\ \dots + c^m(a_m - b + b' - a_m) = \\ = (b - b') + c^0(b' - b) + c^1(b' - b) + \dots + c^m(b' - b) = \\ = (b - b') + (c^0 + c^1 + \dots + c^m)(b' - b) = \\ = (b - b') + (b' - b) = \\ = 0. \end{aligned}$$

□

Z uvedené věty vyplývá, že hodnota výrazu $b + c^0(a_0 - b) + c^1(a_1 - b) + \dots + c^m(a_m - b)$ nezávisí na volbě bodu b . Závisí tedy pouze na bodech a_0, a_1, \dots, a_m a číslech c^0, c^1, \dots, c^m (jejichž součet je roven 1). Tento výraz nazýváme *afinní* (nebo také *bodovou*) *kombinací bodů* a_0, a_1, \dots, a_m s *koeficienty* c^0, c^1, \dots, c^m a značíme

$$c^0 a_0 + c^1 a_1 + \dots + c^m a_m. \quad (3.4)$$

Tento výraz je třeba vnímat jako celek a nechávat jeho části jako výsledek aplikace nějakých operací. Body nelze násobit čísly, ani je nelze sčítat. Je třeba mít také na paměti, že v tomto výrazu musí být součet koeficientů c^0, c^1, \dots, c^m roven jedné.

Příklad 3.8. Je-li V vektorový prostor s kanonickou strukturou afinního prostoru, pak afinní kombinace jeho prvků splývají s lineárními. Například pro dva vektory v_1, v_2 a čísla c^1, c^2 taková, že $c^1 + c^2 = 1$, je afinní kombinace $c^1 v_1 + c^2 v_2$ rovna stejně označené lineární kombinaci. Zdůvodněte.

Příklad 3.9. Pro body $a_0, a_1, a_2, a_3 \in A$ a čísla $c^0 + c^1 = c^2 + c^3 = d^0 + d^1 = 1$ platí

$$d^0(c^0 a_0 + c^1 a_1) + d^1(c^2 a_2 + c^3 a_3) = d^0 c^0 a_0 + d^0 c^1 a_1 + d^1 c^2 a_2 + d^1 c^3 a_3. \quad (3.5)$$

Afinní kombinace afinních kombinací lze tedy roznásobovat, jakoby platil distributivní zákon. Ověřte to a zobecněte na libovolný počet bodů.

Příklad 3.10. Z předchozího příkladu plyne, že každou afinní kombinaci více než dvou bodů lze vyjádřit pomocí afinních kombinací dvojic bodů. Ukážeme si to na příkladě afinní kombinace $c^0 a_0 + c^1 a_1 + c^2 a_2$. Pokud je $c^0 + c^1 \neq 0$, platí podle předchozího příkladu

$$c^0 a_0 + c^1 a_1 + c^2 a_2 = (c^0 + c^1) \left(\frac{c^0}{c^0 + c^1} a_0 + \frac{c^1}{c^0 + c^1} a_1 \right) + c^2 a_2,$$

přičemž $\frac{c^0}{c^0 + c^1} + \frac{c^1}{c^0 + c^1} = 1$, takže uvnitř velké závorky je opravdu afinní kombinace dvou bodů, stejně jako je afinní kombinací dvou bodů i celý výraz, protože $(c^0 + c^1) + c^2 = 1$. Co se stane, když $c^0 + c^1 = 0$?

Příklad 3.11. Pro body $a_1, a_2, a_3 \in A$ můžeme vypočítat nový bod a_4 jako afinní kombinaci $a_3 + a_2 - a_1$ (součet koeficientů je roven jedné). Také můžeme položit $\bar{a}_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$, kde na pravé straně uvažujeme součet bodu a_3 a vektoru $a_2 - a_1$. Ukažme, že $\bar{a}_4 = a_4$. Zvolíme jako pomocný bod b bod a_3 . Podle definice afinní kombinace máme

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 - a_1 = \\ &= a_3 + (a_3 - a_3) + (a_2 - a_3) - (a_1 - a_3) = \\ &= a_3 + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_1) = \\ &= a_3 + (a_2 - a_1) = \\ &= \bar{a}_4. \end{aligned}$$

Příklad 3.12. Pro bod $a \in A$ a vektory u_1, u_2 ze zaměření A označme $b_1 = a + u_1, b_2 = a + u_2$. Ukažte, že pro libovolná reálná čísla c^1, c^2 je bod $a + c^1 u_1 + c^2 u_2$ (součet bodu a vektoru) roven afinní kombinaci

$$(1 - c^1 - c^2)a + c^1 b_1 + c^2 b_2.$$

Zobecněte toto tvrzení na libovolný počet vektorů.

Příklad 3.13. Podle binomické věty platí pro každé reálné číslo t

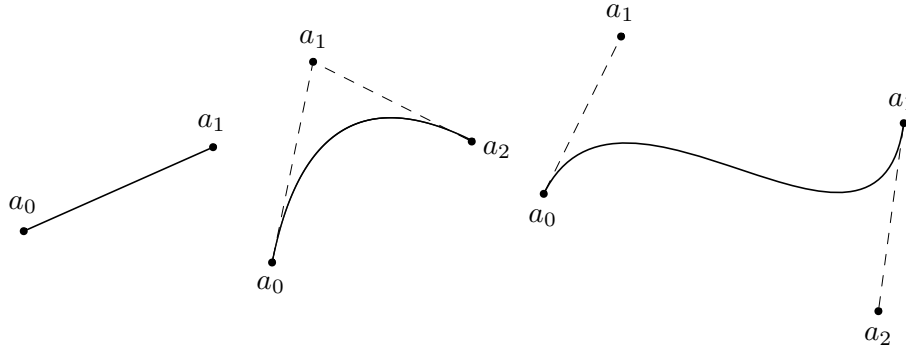
$$1 = (t + (1 - t))^2 = t^2 + 2t(1 - t) + (1 - t)^2.$$

Na pravé straně máme tři čísla, jejichž součet je roven jedné. Můžeme je tedy použít jako koeficienty afinní kombinace. Pro tři body $a_0, a_1, a_2 \in A$ tak dostáváme nový bod

$$b_t = t^2 a_0 + 2t(1 - t)a_1 + (1 - t)^2 a_2.$$

Bod b_t závisí na volbě čísla t , přičemž $b_0 = a_2$ a $b_1 = a_0$ (pokud bod a_1 neleží na přímce určené body a_0 a a_2 , pak neexistuje hodnota t , pro kterou by $b_t = a_1$). Množina všech bodů b_t pro $t \in R$ (někdy se uvažuje jen $t \in [0, 1]$) se nazývá *kvadratická Bézierova křivka*.

Obecně můžeme výraz $t + (1 - t)$ umocnit libovolným přirozeným číslem. Dostaneme tak koeficienty afinní kombinace libovolného počtu bodů a Bézierovy křivky libovolného stupně. Na Obrázku 3.5 je ukázka lineární, kvadratické a kubické Bézierovy křivky (tj. Bézierovy křivky prvního, druhého a třetího stupně) pro $t \in [0, 1]$.



Obrázek 3.5: Lineární, kvadratická a kubická Bézierova křivka.

Bézierovy křivky jsou hojně používány v počítačové grafice.

Afinním obalem neprázdné množiny $K \subseteq A$ nazýváme množinu všech afinních kombinací prvků množiny K . Afinní obal množiny K označujeme symbolem $\text{Aff}(K)$. Platí

$$\text{Aff}(K) = \{c^0 a_0 + \cdots + c^k a_k \mid k \geq 1, a_0, \dots, a_k \in K, c^0 + \cdots + c^k = 1\}. \quad (3.6)$$

Příklad 3.14. Z Příkladu 3.10 plyne jednodušší vyjádření pro afinní obal množiny K :

$$\text{Aff}(K) = \{c^0 a_0 + c^1 a_1 \mid a_0, a_1 \in K, c^0 + c^1 = 1\}. \quad (3.7)$$

Věta 3.3. Pro libovolnou neprázdnou množinu $K \subseteq A$ platí $\text{Aff}(\text{Aff}(K)) = \text{Aff}(K)$.

Důkaz. Použijeme Příklad 3.14 a Příklad 3.9. Pro libovolný bod $a \in \text{Aff}(\text{Aff}(K))$ platí

$$\begin{aligned} a &= d^0(c^0 a_0 + c^1 a_1) + d^1(c^2 a_2 + c^3 a_3) \\ &= d^0 c^0 a_0 + d^0 c^1 a_1 + d^1 c^2 a_2 + d^1 c^3 a_3, \end{aligned}$$

kde a_0, a_1, a_2, a_3 jsou nějaké body z K a $c^0 + c^1 = c^2 + c^3 = d^0 + d^1 = 1$ (Vyjádřili jsme prostě a jako afinní kombinaci afinních kombinací bodů z K , což musí jít, protože $a \in \text{Aff}(\text{Aff}(K))$ a platí (3.7)). Pak jsme použili (3.5)). To ovšem znamená, že $a \in \text{Aff}(K)$. \square

3.3 Vektorové kombinace

Následující poznatky jsou velmi podobné poznatkům o afinních kombinacích, proto je uvádíme jen stručně. Pilný čtenář si může doplnit důkazy.

Pokud $c^0 + c^1 + \dots + c^m = 0$, pak vektor

$$c^0(a_0 - b) + c^1(a_1 - b) + \dots + c^k(a_k - b) \quad (3.8)$$

nezávisí na volbě bodu b (přesvědčte se o tom). Body a_0, a_1, \dots, a_k spolu s koeficienty c^0, c^1, \dots, c^k tak jednoznačně definují vektor, který se nazývá *vektorová kombinace bodů* a_0, a_1, \dots, a_k . Tento vektor se značí stejně jako kombinace afinní:

$$c^0 a_0 + c^1 a_1 + \dots + c^k a_k. \quad (3.9)$$

Příklad 3.15. Dokažte nezávislost vektoru (3.8) na volbě bodu b pokud $c^0 + c^1 + \dots + c^k = 0$.

Příklad 3.16. Každou afinní kombinaci lze vyjádřit jako součet bodu a vektorové kombinace:

$$c^0 a_0 + c^1 a_1 + \dots + c^k a_k = a_0 + ((c^0 - 1)a_0 + c^1 a_1 + \dots + c^k a_k)$$

(součet koeficientů vlevo je 1, takže součet koeficientů v závorce vpravo je 0). Prověřte.

Příklad 3.17. V příkladech za definicí afinní kombinace bodů jsme studovali její základní vlastnosti. Udělte totéž pro vektorové kombinace bodů.

Pro neprázdnou množinu $K \subseteq A$ označujeme symbolem $\text{Vec}(K)$ množinu všech vektorových kombinací prvků množiny K . Platí

$$\text{Vec}(K) = \{c^0 a_0 + \cdots + c^k a_k \mid k \geq 1, a_0, \dots, a_k \in K, c^0 + \cdots + c^k = 0\}. \quad (3.10)$$

Věta 3.4. $\text{Vec}(K)$ je vektorový podprostor zaměření afinního prostoru A .

Příklad 3.18. Jednodušší vyjádření množiny $\text{Vec}(K)$:

$$\text{Vec}(K) = \{c^0 a_0 + c^1 a_1 \mid a_0, a_1 \in K, c^0 + c^1 = 0\}. \quad (3.11)$$

Analogie Věty 3.3 pro vektorové kombinace:

Věta 3.5. $\text{Vec}(\text{Aff}(K)) = \text{Vec}(K)$.

3.4 Afinní podprostory

Neprázdna podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U se nazývá *afinní podprostor afinního prostoru A* , jestliže $\text{Aff}(B) = B$.

Věta 3.6. Neprázdna podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U je jeho *afinním podprostorem*, právě když existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ takový, že jsou splněny následující podmínky:

1. Pro každé $a \in B, u \in V$ platí $a + u \in B$.
2. Pro každé $a, b \in B$ platí $b - a \in V$.

Platí $V = \text{Vec}(B)$.

Důkaz. Zleva doprava: Položme $V = \text{Vec}(B)$ a ověřme podmínky 1. a 2. Podmínka 1: u je prvek $\text{Vec}(B)$, takže je vektorovou kombinací nějakých bodů z B :

$$u = c^0 b_0 + \cdots + c^k b_k, \quad c^0 + \cdots + c^k = 0.$$

Ze základních vlastností afinních a vektorových kombinací plyne, že $a + u$ je rovno afinní kombinaci $a + c^0 b_0 + \cdots + c^k b_k$. Jde ovšem o afinní kombinaci bodů z B , takže $a + u \in B$. Podmínka 2: $b - a$ je vektorová kombinace bodů z B , což znamená, že $b - a \in \text{Vec}(B) = V$.

Zprava doleva: Tady předpokládáme, že existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ tak, že jsou splněny podmínky 1. a 2., a dokazujeme $\text{Aff}(B) = B$ a $\text{Vec}(B) = V$.

Podle Příkladu 3.10 stačí k důkazu vlastnosti $\text{Aff}(B) = B$ dokázat, že afinní kombinace libovolných dvou bodů z B je prvkem B (zdůvodněte!). Mějme tedy nějakou afinní kombinaci dvou bodů $b_0, b_1 \in B$:

$$b = c^0 b_0 + c^1 b_1, \quad c^0 + c^1 = 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} b &= b_0 + ((c^0 - 1)b_0 + c^1 b_1) && \text{(Příklad 3.16)} \\ &= b_0 + c^1(b_1 - b_0) && \text{(proč?)} \end{aligned}$$

Podle podmínky 2. je vektor $b_1 - b_0$ prvkem V . Je tedy prvkem V i jeho násobek $c^1(b_1 - b_0)$. Podmínka 1. nám tedy zaručí $b \in B$.

Zbývá dokázat $\text{Vec}(B) = V$. Podle toho, co jsme zatím dokázali, je V i $\text{Vec}(B)$ vektorový podprostor, který splňuje podmínky 1. a 2. Z těchto podmínek ovšem snadno plyne, že takový vektorový podprostor je jediný (zkuste to ověřit). \square

Vektorový prostor V z Věty 3.6 se nazývá *Zaměření afinního podprostoru B* .

Věta 3.6 má tvar ekvivalence. Ukazuje tedy jinou možnost definice afinního podprostoru. Tato alternativní možnost se v literatuře často bere jako definice. V dalším textu budeme moci při úvahách o afinních podprostorech používat jak definici, tak Větu 3.6.

Příklad 3.19. Ukažte, že každý vektorový podprostor daného vektorového prostoru je jeho afinním podprostorem.

Příklad 3.20. Uvedte příklad vektorového prostoru V a jeho afinního podprostoru, který není jeho vektorovým podprostorem.

Příklad 3.21. Charakterizujte všechny afinní podprostory $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Příklad 3.22. Charakterizujte všechny afinní podprostory $B \subseteq \mathbb{R}^3$.

Příklad 3.23. Uvedte příklad afinního prostoru A a množiny $B \subseteq A$, která má všechny vlastnosti z Věty 3.6 kromě podmínky 1.

Příklad 3.24. Uvedte příklad afinního prostoru A a množiny $B \subseteq A$, která má všechny vlastnosti z Věty 3.6 kromě podmínky 2.

Příklad 3.25. Rozhodněte, zda následující podmínka je ekvivalentní podmínce „ B je afinním podprostorem A “: B je neprázdná podmnožina A a existuje podmnožina $V \subseteq U$ tak, že jsou splněny následující podmínky:

1. Pro každé $a \in B, u \in V$ platí $a + u \in B$.

2. Pro každé $a, b \in B$ platí $b - a \in V$.

Příklad 3.26. Dokažte, že pro libovolné lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ vektorových prostorů U a V a bod $b \in V$ platí, že je-li množina $f^{-1}(b)$ neprázdná, je afinním podprostorem vektorového prostoru U .

Příklad 3.27. Aplikujte předchozí tvrzení na množinu všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

Věta 3.7. Je-li A afinní prostor se zaměřením U a $B \subseteq A$ jeho afinní podprostor se zaměřením $V \subseteq U$, pak množina B spolu s vektorovým prostorem V a zobrazením $\text{Add}_B : B \times V \rightarrow B$ vzniklým zúžením zobrazení Add_A je afinní prostor.

Důkaz. Přenecháme čtenáři. Je třeba ověřit podmínky definice afinního prostoru nebo postupovat podle Věty 3.6. □

Afinní podprostory budeme vždy uvažovat se strukturou afinního prostoru uvedenou v předchozí větě. Můžeme tedy hovořit o dimenzi afinního podprostoru (také například o afinní nebo bodové bázi afinního podprostoru, které jsou definovány dále). Je-li dimenze afinního prostoru A rovna m a dimenze afinního podprostoru $B \subseteq A$ rovna $m - 1$, pak afinní podprostor B nazýváme *nadrovinou* v *afinním prostoru* A .

Pro množinu $B = \{a \in A \mid a = a_0 + u, u \in V\}$, kde $V \subseteq U$ je vektorový podprostor, zavádíme symbolické označení

$$B = a_0 + V. \quad (3.12)$$

Následující věta ukazuje, že každý podprostor afinního prostoru lze charakterizovat pomocí jednoho bodu a vektorového podprostoru zaměření.

Věta 3.8. Mějme afinní prostor A se zaměřením U .

1. Je-li $a_0 \in A$ bod a $V \subseteq U$ vektorový podprostor, pak množina $B = a_0 + V$ je podprostor afinního prostoru A , jehož zaměření je V .

2. Je-li B podprostor afinního prostoru A se zaměřením $V \subseteq U$, $a_0 \in B$ bod, pak $B = a_0 + V$.

Důkaz. Bude doplněn. □

Příklad 3.28. Mějme dva afinní podprostory B_1, B_2 afinního prostoru A takové, že $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Ukažte, že množina $B_1 \cap B_2$ je afinním podprostorem afinního prostoru A .

Příklad 3.29. Obecněji: ukažte, že pokud pro neprázdný systém S afinních podprostorů afinního prostoru A platí $\bigcap S \neq \emptyset$, pak $\bigcap S$ je afinním podprostorem afinního prostoru A .

Je-li (u_1, \dots, u_m) báze vektorového podprostoru $V \subseteq U$, platí pro libovolný bod $a_0 \in A$,

$$a_0 + V = \left\{ a \in A \mid a = a_0 + \sum_{i=1}^m t_i u_i, t_1, \dots, t_m \in R \right\}. \quad (3.13)$$

Rovnice

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^m t_i u_i \quad (3.14)$$

se nazývá *parametrická rovnice afinního podprostoru* $a_0 + V$.

Příklad 3.30. Parametrická rovnice přímky je tedy

$$a = a_0 + tu, \quad (3.15)$$

kde a_0 je libovolný bod přímky a u libovolný nenulový vektor jejího zaměření.

Příklad 3.31. Parametrickou rovnici přímky lze pomocí dvou jejích různých bodů a_1, a_2 napsat takto:

$$a = a_1 + t(a_2 - a_1). \quad (3.16)$$

Příklad 3.32. Ukažte, že pokud dva různé body a, b leží v afinním podprostoru $B \subseteq A$, leží v něm i celá přímka tyto dva body obsahující.

3.5 Afinní báze a souřadnice

Afinní báze a souřadnice v afinních prostorech hrají podobnou roli jako (vektorové) báze a souřadnice v prostorech vektorových. Představují způsob, jak prvky světa, který modelujeme, ztotožnit s n -ticemi reálných čísel, které můžeme reprezentovat v počítači a se kterými můžeme počítat.

Rozlišení mezi prvky afinního prostoru a jejich souřadnicemi je podstatné pro pochopení celé problematiky afinních prostorů.

V této kapitole nejprve stručně opakujeme základní pojmy z vektorových prostorů, týkající se bazí a souřadnic, a uvádíme jejich značení, které budeme používat v tomto textu. Dále zavádíme základní pojem afinní báze a afinních souřadnic a pojem matice přechodu mezi afinními bazemi, který je analogií pojmu matice přechodu mezi (vektorovými) bazemi vektorových prostorů.

Matice přechodu mezi afinními bazemi jsou základním nástrojem v analytické geometrii. Pokud prostor, se kterým pracujeme, popisujeme pomocí více různých bazí (což je obvyklé), potřebujeme nějak charakterizovat vztah mezi nimi. Proto se matice přechodu mezi afinními bazemi rutinně používají v počítačové grafice.

Mějme afinní prostor A dimenze m se zaměřením U . Pro bod $a_0 \in A$ a bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ vektorového prostoru U nazýváme dvojici $\varphi = (\alpha, a_0)$ *afinní bází afinního prostoru A* . Bod a_0 nazýváme *počátkem báze φ* .

Afinní bázi φ zapisujeme také jako $(m+1)$ -tici (u_1, \dots, u_m, a_0) .

Pro libovolný bod $a \in A$ nazýváme *afinními souřadnicemi (souřadnicovým vyjádřením) bodu a vzhledem k afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$* $(m+1)$ -tici

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} (a - a_0)_\alpha^1 \\ (a - a_0)_\alpha^2 \\ \vdots \\ (a - a_0)_\alpha^m \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Souřadnicové vyjádření bodu a vzhledem k afinní bázi φ tedy vznikne tak, že se najdou souřadnice vektoru $a - a_0$ vzhledem k bázi α vektorového prostoru U a doplní se číslem 1 (důvody této formality vysvětlí postupně).

Kvůli odlišení od souřadnic vektorů budeme afinní souřadnice bodů zapisovat v hranatých závorkách.

Příklad 3.33. Nalezněme souřadnice bodu $a = [0, -2, 1] \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$, kde $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ a

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Máme

$$a - a_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Hledáme tedy souřadnice vektoru $(-1, -2, 0)$ v bázi α . Jelikož (jak lze zjistit například vyřešením soustavy lineárních rovnic)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

dostáváme

$$(a - a_0)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

čili

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Je-li $a_0 = [0, \dots, 0] \in R^m$ a α kanonická báze vektorového prostoru R^m , nazývá se afinní báze (α, a_0) afinního prostoru R^m *kanonickou afinní bází* prostoru R^m .

Příklad 3.34. Součet bodu a vektoru lze v afinních souřadnicích vyjádřit pomocí sčítání souřadnic, pokud k souřadnicím vektoru přidáme na konec nulu. Konkrétně: máme-li afinní souřadnicový systém $\varphi = (\alpha, a_0)$ afinního prostoru A se zaměřením U , pak pro libovolný bod $a \in A$ a vektor $u \in U$ platí

$$(a+u)_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0+u)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-a_0)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = a_\varphi + \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.35. Obecněji: totéž lze dělat s afinními a vektorovými kombinacemi.

Mějme dvě afinní báze $\varphi = (\alpha, a_0)$, $\bar{\varphi} = (\bar{\alpha}, \bar{a}_0)$ afinního prostoru A dimenze m se zaměřením U . Podívejme se na následující problém: jak najít souřadnicové vyjádření bodu $a \in A$ vzhledem k bázi $\bar{\varphi}$, známe-li souřadnicové vyjádření tohoto bodu vzhledem k bázi φ ? Při řešení tohoto problému můžeme předpokládat, že známe vzájemné vztahy obou bází, tj. že známe souřadnice počátku a_0 vzhledem k bázi $\bar{\varphi}$ a souřadnice vektorů vektorové báze α vzhledem k vektorové bázi $\bar{\alpha}$ a naopak.

Zvolme tedy libovolný bod $a \in A$ a pokusme se vypočítat jeho souřadnice vzhledem k bázi $\bar{\varphi}$ pomocí souřadnic vzhledem k bázi φ :

$$\begin{aligned} (a - \bar{a}_0)_{\bar{\alpha}} &= (a - a_0 + a_0 - \bar{a}_0)_{\bar{\alpha}} = \\ &= (a - a_0)_{\bar{\alpha}} + (a_0 - \bar{a}_0)_{\bar{\alpha}} = \\ &= M_{\alpha, \bar{\alpha}} \cdot (a - a_0)_\alpha + (a_0 - \bar{a}_0)_{\bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

(Umíte zdůvodnit všechny kroky tohoto výpočtu?)

Vidíme, že se nám podařilo vypočítat souřadnice bodu a vzhledem k afinní bázi $\bar{\varphi}$ pomocí následujících dat: souřadnic bodu a vzhledem k afinní bázi φ , matice přechodu od (vektorové) báze α k bázi $\bar{\alpha}$ a souřadnic počátku a_0 vzhledem k afinní bázi $\bar{\varphi}$.

Hodnoty $M_{\alpha, \bar{\alpha}}$ a $(a_0)_{\bar{\varphi}}$ přitom nezávisí na volbě bodu a . Pokud tedy potřebujeme přepočítat souřadnice u více bodů, stačí tyto hodnoty vypočítat pouze jednou.

Nyní ještě provedeme menší trik. Uvědomme si, že $(m+1)$ -tice $a_{\bar{\varphi}}$ obsahuje ve svých prvních m složkách hodnoty m -tice $(a - \bar{a}_0)_{\bar{\alpha}}$. Levá strana (3.23) je tedy souřadnicové vyjádření bodu a v afinní bázi $\bar{\varphi}$ kromě posledního řádku (obsahujícího jedničku). Poslední výraz v (3.23), pokud se doplní o tento řádek (obsahující jedničku), lze zase vyjádřit jako součin jisté matice a souřadnicového vyjádření a_φ .

Konkrétně, pokud definujeme po blocích matici $M_{\varphi, \bar{\varphi}}$ takto:

$$M_{\varphi, \bar{\varphi}} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\alpha, \bar{\alpha}} & (a_0)_{\bar{\varphi}} \\ \hline 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \quad (3.24)$$

bude tato matice splňovat

$$a_{\bar{\varphi}} = M_{\varphi, \bar{\varphi}} \cdot a_{\varphi}. \quad (3.25)$$

(pokud vám není poslední rovnice jasná, zkuste si napsat jednoduchý příklad).

Matice $M_{\varphi, \bar{\varphi}}$ se nazývá *matice přechodu od afinní báze φ k afinní bázi $\bar{\varphi}$* .

Příklad 3.36. Pro libovolné tři afinní báze $\varphi, \bar{\varphi}, \varphi'$ afinního prostoru A platí

$$M_{\varphi', \bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi}, \varphi} = M_{\varphi', \varphi}. \quad (3.26)$$

Příklad 3.37. Pro libovolné dvě afinní báze $\varphi, \bar{\varphi}$ afinního prostoru A platí

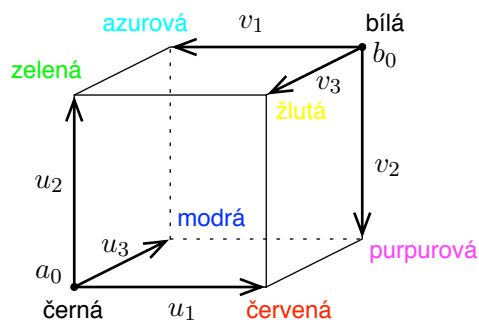
$$M_{\varphi, \bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi}, \varphi} = E \quad (3.27)$$

(E je jednotková matice).

Příklad 3.38. V počítačové grafice se často používají dva typy afinníchází k popisu pixelů na monitoru. Je-li rozlišení monitoru $h \times w$, měla by báze prvního typu (používaného například v 2D grafice systému Windows) počátek v levém horním rohu obrazovky, souřadnice levého dolního rohu vzhledem k této bázi by byly $[0, w, 1]$, souřadnice pravého horního $[h, 0, 1]$. Báze druhého typu (bližšího matematikům a používaného také v OpenGL) by měla počátek v levém dolním rohu, souřadnice levého horního by byly $[0, w, 1]$ a pravého dolního $[h, 0, 1]$. Jak by vypadala matice přechodu mezi těmito bazemi?

Příklad 3.39. Při kreslení v OpenGL se používají dvě základní afinní báze: *Báze modelu* (Model Coordinate System) a *Báze pozorovatele* (View Coordinate System). Báze modelu je báze, vzhledem k níž uvádíme souřadnice vykreslovaných objektů — při zadávání bodů objektu používáme jejich souřadnice vzhledem k bázi modelu. Báze pozorovatele je spojena s kamerou tak, že první vektor její vektorové báze směřuje doprava, druhý nahoru a třetí dozadu.

Matice přechodu od báze modelu k bázi pozorovatele se nazývá *matice ModelView*. Aby systém zjistil souřadnice vykreslovaných bodů vzhledem k bázi pozorovatele, vynásobí jejich souřadnice vzhledem k bázi modelu, které jsme zadali, maticí ModelView.



Obrázek 3.6: Barevná krychle.

Příklad 3.40. Na Obrázku 3.6 vidíme základních osm barev (bílou, černou, červenou, zelenou, modrou, žlutou, azurovou a purpurovou) uspořádaných do vrcholů tzv. *barevné krychle*. Tuto krychli si můžeme představit jako podmnožinu trojrozměrného afinního prostoru; body mimo ni pro nás ovšem nemají význam. Všechny barvy leží v této krychli. Na obrázku jsou zakresleny dvě základní afinní báze, které se používají k vyjádření barev: báze $\varphi_{RGB} = (u_1, u_2, u_3, a_0)$ a $\varphi_{CMY} = (v_1, v_2, v_3, b_0)$. Souřadnice barvy v první bázi udávají její červenou, zelenou a modrou složku (v intervalu $[0, 1]$) a ve druhé pak její žlutou, azurovou a purpurovou složku. Pro příslušné matice přechodu platí (jak se lze přesvědčit)

$$M_{\varphi_{RGB}, \varphi_{CMY}} = M_{\varphi_{CMY}, \varphi_{RGB}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.41. Další dvě používané afinní báze na barevné krychli jsou báze φ_{YUV} a

φ_{YIQ} s následujícími maticemi přechodu:

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_{RGB}, \varphi_{YUV}} &= \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ -0.14713 & -0.28886 & 0.436 & 0.0 \\ 0.615 & -0.51499 & -0.10001 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \\
 M_{\varphi_{YUV}, \varphi_{RGB}} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 1.13983 & 0.0 \\ 1.0 & -0.39465 & -0.5806 & 0.0 \\ 1.0 & 2.03211 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \\
 M_{\varphi_{RGB}, \varphi_{YIQ}} &= \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.595716 & -0.274453 & -0.321263 & 0.0 \\ 0.211456 & -0.522591 & 0.311135 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \\
 M_{\varphi_{YIQ}, \varphi_{RGB}} &= \begin{pmatrix} 1.0 & 0.9563 & 0.6210 & 0.0 \\ 1.0 & -0.2721 & -0.6474 & 0.0 \\ 1.0 & -1.1070 & 1.7046 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Uměli byste zhruba znázornit tyto báze na barevné krychli na Obrázku 3.6? Umíte vypočítat matice přechodu $M_{\varphi_{CMY}, \varphi_{YUV}}, M_{\varphi_{YUV}, \varphi_{CMY}}, M_{\varphi_{CMY}, \varphi_{YIQ}}, M_{\varphi_{YIQ}, \varphi_{CMY}}$?

Báze φ_{YUV} a φ_{YIQ} se používají ke kódování barev v televizních systémech PAL a NTSC (po řadě). Jsou postaveny na tom, že lidské oko vnímá mnohem citlivěji změny barev v rozsahu oranžové až modré než v rozsahu purpurové až oranžové (proto některé monitory používají k zobrazení jednoho pixelu čtyři subpixely: po jednom pro červený a modrý kanál a dva pro zelený).

První souřadnice barvy v bázi φ_{YUV} i φ_{YIQ} určuje stupeň šedi (kvůli zpětné kompatibilitě s černobílými televizory) a je u obouází stejná. Vidíme, že k jejímu určení potřebujeme použít nadpoloviční podíl (přesně 0.587) zeleného kanálu, zatímco u modrého nám stačí 0.114.

Barevné složky v jiných modelech (HSV, HSL) se nedají zjistit pomocí žádné afinní báze v barevné krychli. Transformace mezi těmito modely a např. modelem RGB mají složitější vyjádření než pouhý součin matice a vektoru.

Příklad 3.42. Úsečka v barevné krychli s krajními body a_0 a b_0 (černá a bílá barva) je tvořena šedými barvami různých stupňů.

3.6 Body v obecné poloze, bodové báze a souřadnice

O bodech $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$ říkáme, že jsou v *obecné poloze*, jestliže žádný z nich není afinní kombinací ostatních, čili jestliže neexistuje číslo $i \in \{0, \dots, k\}$ a čísla $c^0, \dots, c^{i-1}, c^{i+1}, \dots, c^k$ tak, že $c^0 + \dots + c^{i-1} + c^{i+1} + \dots + c^k = 1$ a

$$a_i = c^0 a_0 + \dots + c^{i-1} a_{i-1} + c^{i+1} a_{i+1} + \dots + c^k a_k. \quad (3.28)$$

Věta 3.9. *Nechť $a_0, \dots, a_k \in A$. Pak následující čtyři podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Body a_0, \dots, a_k jsou v obecné poloze.*
2. *Vektory $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0$ jsou lineárně nezávislé.*
3. *Dimenze afinního obalu bodů a_0, \dots, a_k je rovna k .*
4. *Pokud pro dvě afinní kombinace bodů a_0, \dots, a_k s koeficienty c^0, \dots, c^k a $\bar{c}^0, \dots, \bar{c}^k$ platí $c^0 a_0 + \dots + c^k a_k = \bar{c}^0 a_0 + \dots + \bar{c}^k a_k$, pak*

$$c^0 = \bar{c}^0, c^1 = \bar{c}^1, \dots, c^k = \bar{c}^k. \quad (3.29)$$

Důkaz. Nejprve sporem dokážeme, že z podmínky 1. plyne podmínka 2. Předpokládejme, že vektory z podmínky 2. jsou lineárně závislé. Existují tedy čísla c^1, \dots, c^k , ne všechna současně rovna nule a taková, že

$$c^1(a_1 - a_0) + \dots + c^k(a_k - a_0) = 0.$$

Pro nenulový koeficient c^i (takový určitě existuje) můžeme všechny členy kromě i -tého převést na pravou stranu a rovnici podělit c^i :

$$\begin{aligned} a_i - a_0 &= \\ &= -\frac{c^1}{c^i}(a_1 - a_0) - \dots - \frac{c^{i-1}}{c^i}(a_{i-1} - a_0) - \frac{c^{i+1}}{c^i}(a_{i+1} - a_0) - \dots - \frac{c^k}{c^i}(a_k - a_0). \end{aligned}$$

Podle příkladu 3.12 je tedy bod a_i roven afinní kombinaci

$$a_i = d a_0 - \frac{c^1}{c^i} a_1 - \dots - \frac{c^{i-1}}{c^i} a_{i-1} - \frac{c^{i+1}}{c^i} a_{i+1} - \dots - \frac{c^k}{c^i} a_k,$$

kde

$$d = 1 + \frac{c^1}{c^i} + \dots + \frac{c^{i-1}}{c^i} + \frac{c^{i+1}}{c^i} + \dots + \frac{c^k}{c^i}.$$

Tak se nám podařilo vyjádřit bod a_i jako afinní kombinaci ostatních bodů a dospět ke sporu s podmínkou 1.

Nyní z podmínky 2. odvodíme podmínku 4. (podmínku 3. zatím vynecháme). Podle definice afinní kombinace je rovnost $c^0 a_0 + \dots + c^k a_k = \bar{c}^0 a_0 + \dots + \bar{c}^k a_k$ ekvivalentní rovnosti

$$c^1(a_1 - a_0) + \dots + c^k(a_k - a_0) = \bar{c}^1(a_1 - a_0) + \dots + \bar{c}^k(a_k - a_0).$$

Z lineární nezávislosti vektorů $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ nyní plyne rovnost koeficientů z podmínky 4.

K odvození podmínky 1. z podmínky 4. si stačí uvědomit, že ve vztahu (3.28) na levé i pravé straně vystupuje afinní kombinace bodů a_0, \dots, a_k . Tyto afinní kombinace mají různé koeficienty, protože na levé straně je u bodu a_i koeficient 1, zatímco na straně pravé 0. Proto z podmínky 4. plyne, že body jsou v obecné poloze.

Na závěr dokážeme, že podmínka 3. je ekvivalentní s podmínkou 2. Podle Věty 3.6 je zaměření afinního obalu $\text{Aff}(\{a_0, a_1, \dots, a_k\})$ rovno lineárnímu obalu vektorů $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$, jehož dimenze je rovna k právě když jsou tyto vektory lineárně nezávislé. \square

V druhé části této podkapitoly se ještě stručně zmíníme o bodových bazích a barycentrických souřadnicích. Tyto pojmy se v počítačové grafice přímo nepoužívají, ale jsou dobré pro dokreslení.

Je-li dimenze afinního prostoru A rovna m a body $a_0, \dots, a_m \in A$ jsou v obecné poloze, pak se $(m+1)$ -tice (a_0, \dots, a_m) nazývá *bodová báze afinního prostoru* A .

Z předchozí věty plyne, že je-li $\varphi = (a_0, \dots, a_m)$ bodová báze A , pak pro každý bod $a \in A$ existuje právě jedna $(m+1)$ -tice čísel c^0, \dots, c^m , jejichž součet je roven jedné a

$$a = c^0 a_0 + \dots + c^m a_m. \quad (3.30)$$

$(n+1)$ -tice $[c^0, \dots, c^n]$ (píšeme do hranatých závorek a do sloupce) se nazývá *bodovými (barycentrickými) souřadnicemi bodu a vzhledem k bodové bázi φ* . Zavádíme označení $[c^0, \dots, c^m] = [a_\varphi^0, \dots, a_\varphi^m] = a_\varphi$.

Mějme dvě bodové báze afinního prostoru A : $\varphi = (a_0, \dots, a_m)$, $\bar{\varphi} = (\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m)$. Matici

$$M_{\varphi, \bar{\varphi}} = \begin{pmatrix} (a_0)_{\bar{\varphi}}^0 & (a_1)_{\bar{\varphi}}^0 & \dots & (a_m)_{\bar{\varphi}}^0 \\ (a_0)_{\bar{\varphi}}^1 & (a_1)_{\bar{\varphi}}^1 & \dots & (a_m)_{\bar{\varphi}}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_0)_{\bar{\varphi}}^m & (a_1)_{\bar{\varphi}}^m & \dots & (a_m)_{\bar{\varphi}}^m \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

nazýváme *maticí přechodu od bodové báze φ k bodové bázi $\bar{\varphi}$* .

Matice přechodu od bodové báze φ k bodové bázi $\bar{\varphi}$ vznikne tak, že do sloupců zapíšeme souřadnice jednotlivých prvků bodové báze φ vzhledem k bodové bázi $\bar{\varphi}$ — tedy stejným postupem, jakým vzniká matice přechodu mezi dvěma bázemi vektorového prostoru.

Součet prvků každého sloupce v matici přechodu mezi bodovými bázemi je roven jedné.

Věta 3.10. Pro libovolné dvě bodové báze $\varphi, \bar{\varphi}$ afinního prostoru A a bod $a \in A$ platí

$$a_{\bar{\varphi}} = M_{\varphi, \bar{\varphi}} \cdot a_{\varphi}. \quad (3.32)$$

Příklad 3.43. Pro libovolné tři bodové báze $\varphi, \bar{\varphi}, \varphi'$ afinního prostoru A platí

$$M_{\varphi', \bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi}, \varphi} = M_{\varphi', \varphi}. \quad (3.33)$$

Příklad 3.44. Pro libovolné dvě bodové báze $\varphi, \bar{\varphi}$ afinního prostoru A platí

$$M_{\varphi, \bar{\varphi}} \cdot M_{\bar{\varphi}, \varphi} = E \quad (3.34)$$

(E je jednotková matice).

ÚLOHY

3.1. Napište parametrickou rovnici přímky v R^2 , procházející body $[1, 2], [-1, 3]$. Napište tuto přímku jako součet bodu a vektorového podprostoru R^2 (podle vzorce (3.12)).

3.2. Napište parametrickou rovnici afinního obalu množiny $\{a_0, a_1, a_2\} \in R^3$, jestliže

1. $a_0 = [1, 1, 0], a_1 = [-1, 2, 1], a_2 = [0, -1, -1]$,
2. $a_0 = [1, 2, 0], a_1 = [-1, 2, 2], a_2 = [2, 2, -1]$.

3.3. Napište afinní podprostory z předchozí úlohy jako součet bodu a vektorového podprostoru R^3 (podle vzorce (3.12)).

3.4. Pro oba afinní podprostory z úlohy 3.2 rozhodněte, zda obsahují bod b , jestliže

1. $b = [0, 2, 1]$,
2. $b = [0, 3, 2]$.

3.5. V afinním prostoru R^2 mají vzhledem k afinní bázi φ body $[1, 1], [1, 2]$ a $[-1, 1]$ souřadnice (po řadě) $[0, 1], [0, -1]$ a $[-2, -1]$. Najděte afinní bázi $\bar{\varphi}$.

3.6. Lze změnit číselné údaje v zadání předchozí úlohy tak, aby neměla řešení?

3.7. Napište matici přechodu od afinní báze $\varphi = (e_1, e_2, a_0)$ k afinní bázi $\bar{\varphi} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{a}_0)$ afinního prostoru R^2 , je-li

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{a}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.8. Rozhodněte, zda existují dvě afinní báze φ a φ' afinní roviny A tak, že matice přechodu $M_{\varphi, \varphi'}$ je rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.9. Vraťme se k Příkladu 3.38 a označme první afinní bázi φ a druhou φ' . Dále definujme novou bázi $\psi = (f_1, f_2, b_0)$, kde b_0 je bod ve středu obrazovky, f_1 svislý vektor takový, že bod $b_0 + f_1$ leží na jejím horním okraji a f_2 vodorovný vektor takový, že bod $b_0 + f_2$ leží na jejím pravém okraji (pojmy „svislý“ a „vodorovný“ nedefinujeme, ale jsou zřejmé z kontextu). Najděte matice $M_{\psi, \varphi}$, $M_{\psi, \varphi'}$, $M_{\varphi, \psi}$, $M_{\varphi', \psi}$.

3.10. Ověřte nebo vyvráťte každou ze čtyř podmínek Věty 3.9 pro obě trojice bodů a_0, a_1, a_2 z úlohy 3.2.

Kapitola 4

Další vlastnosti afinních prostorů

4.1 Orientace afinních prostorů

Podle příkladu 3.37 má matice přechodu $M_{\varphi, \psi}$ mezi libovolnými dvěma afinními bazemi afinního prostoru inverzi (touto inverzí je matice $M_{\psi, \varphi}$). Je tedy $\det M_{\varphi, \psi} \neq 0$.

Z příkladu 3.44 plyne, že stejnou vlastnost má i matice přechodu mezi dvěma bodovými bazemi. Následující úvahy, které povedeme převážně pro případ afinních bazí, budou použitelné i pro bodové báze.

Řekneme, že afinní báze φ a ψ afinního prostoru A jsou *souhlasně orientované*, jestliže $\det M_{\varphi, \psi} > 0$.

Věta 4.1. *Předpokládejme, že $\dim A \geq 1$. Relace „býti souhlasně orientované“ je ekvivalence na množině všech afinních bazí afinního prostoru A . Příslušný rozklad má právě dvě třídy.*

Důkaz. Reflexivita: Báze φ je souhlasně orientovaná sama se sebou, protože matice $M_{\varphi, \varphi}$ je jednotková a tedy $\det M_{\varphi, \varphi} = 1 > 0$.

Symetrie: Pokud $\det M_{\varphi, \psi} > 0$, pak

$$\det M_{\psi, \varphi} = \det(M_{\varphi, \psi})^{-1} = \frac{1}{\det M_{\varphi, \psi}} > 0$$

(determinant inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu původní matice).

Tranzitivita: Předpokládejme $\det M_{\varphi, \psi} > 0$ a $\det M_{\psi, \vartheta} > 0$.¹ Jelikož determinant součinu dvou matic je roven součinu jejich determinantů, dostáváme

$$\det M_{\varphi, \vartheta} = \det(M_{\varphi, \psi} \cdot M_{\psi, \vartheta}) = \det M_{\varphi, \psi} \cdot \det M_{\psi, \vartheta} > 0.$$

¹Theta.

Na závěr dokážeme tvrzení o počtu tříd rozkladu. Začneme volbou dvou afinních bází φ a φ' prostoru A , které nejsou souhlasně orientované (takové dvě báze vždy existují (víte proč?)). Platí $M_{\varphi, \varphi'} < 0$. Pro libovolnou třetí afinní bázi ψ platí

$$M_{\psi, \varphi'} = M_{\psi, \varphi} \cdot M_{\varphi, \varphi'},$$

takže

$$\det M_{\psi, \varphi'} = \det M_{\psi, \varphi} \cdot \det M_{\varphi, \varphi'}$$

a determinanty $\det M_{\psi, \varphi'}$ a $\det M_{\psi, \varphi}$ mají opačná znaménka. Báze ψ je tedy souhlasně orientovaná s φ' nebo φ . \square

Třídy ekvivalence z předchozí věty se nazývají *orientace afinního prostoru* A . Každý afinní prostor dimenze alespoň 1 má tedy právě dvě orientace. Dvě různé orientace se také nazývají opačné. Každá afinní báze afinního prostoru určuje právě jednu jeho orientaci (tu, do které patří).

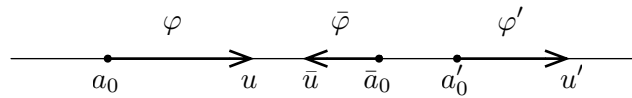
Pokud je na afinním prostoru zadána orientace, hovoříme o *orientovaném afinním prostoru*.

Pojem orientace afinního prostoru je definovaný způsobem, jakým se v matematice často nové pojmy zavádějí: pomocí *abstrakce*. Tě se v matematice obvykle dosahuje pomocí faktori-zace, tedy vytvořením rozkladu množiny podle dané ekvivalence.

Za poznámku stojí, že takto abstraktním způsobem definovaný pojem, jakým je orientace afinního prostoru, má praktické uplatnění v různých oblastech. Kromě počítačové grafiky a geometrie obecně také ve fyzice, inženýrství atd.

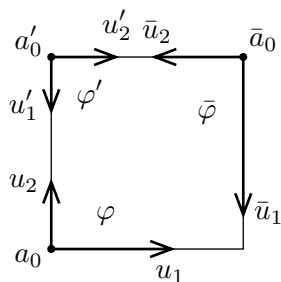
Pojem orientace afinního prostoru osvětlíme na příkladech afinního prostoru dimenze 1, 2 a 3.

Příklad 4.1. Je-li $\dim A = 1$ (tj. A je afinní přímka), jsou dvě afinní báze $\varphi = (u, a_0)$ a $\varphi' = (u', a'_0)$ prostoru A souhlasně orientované (a určují tutéž orientaci), pokud je vektor u' kladným násobkem vektoru u . Je-li jeho záporným násobkem, nejsou souhlasně orientované a určují různé orientace prostoru A . Na Obr. 4.1 určují báze φ a φ' tutéž orientaci, báze $\bar{\varphi}$ určuje opačnou orientaci.



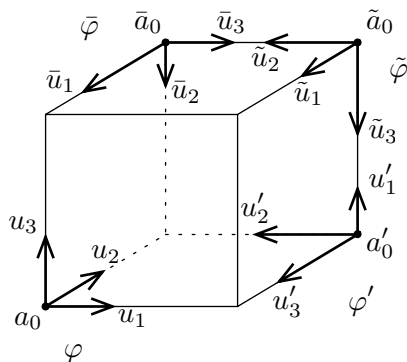
Obrázek 4.1: Tři afinní báze afinní přímky.

Příklad 4.2. Na obrázku 4.2 jsou znázorněny tři afinní báze afinní roviny. Z obrázku lze zhruba odhadnout matice přechodu mezi jednotlivými bazemi a jejich determinant. Mělo by vyjít, že báze φ a φ' určují tutéž orientaci a báze $\bar{\varphi}$ orientaci opačnou.



Obrázek 4.2: Tři afinní báze afinní roviny.

Příklad 4.3. Na obrázku 4.3 vidíme čtyři afinní báze trojrozměrného afinního prostoru. Opět můžeme odhadnout matice přechodu mezi jednotlivými bazemi a odvodit, že báze φ , φ' a $\tilde{\varphi}$ určují tutéž orientaci, zatímco báze $\tilde{\varphi}$ opačnou.

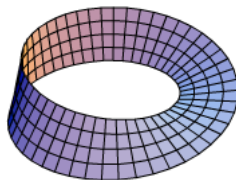


Obrázek 4.3: Čtyři afinní báze trojrozměrného afinního prostoru.

Pro zajímavost dodejme, že pojem orientace lze zavést i na složitějších útvech, než jsou afinní prostory. Pro dimenzi 2 jsou to různě pokroucené plochy, tedy kromě roviny třeba povrch koule (tzv. sféra), povrch pneumatiky (tzv. torus), nebo známá Möbiova páska (Obr. 4.4). První dvě z uvedených ploch mají dvě orientace podobně jako afinní prostory, na Möbiově pásce ovšem orientace zavést nelze (je tzv. neorientovatelná).

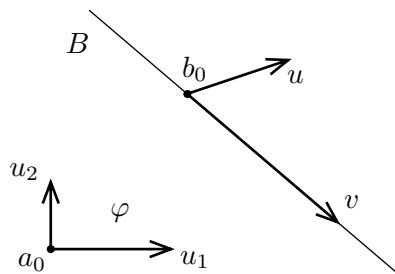
Na afinním prostoru R^n určuje kanonická afinní báze tzv. *standardní orientaci*.

Je-li na afinním prostoru A dimenze m se zaměřením U dána orientace, lze na libovolné nadrovině $B \subseteq A$ se zaměřením $V \subseteq U$ zadat orientaci pomocí jednoho vektoru $u \in U$ takového, že $u \notin V$, následujícím způsobem. Jde o orientaci, do které patří takové afinní báze $(v_0, \dots, v_{m-1}, b_0)$ prostoru B , že afinní báze $(v_0, \dots, v_{m-1}, u, b_0)$ patří do orientace prostoru A .



Obrázek 4.4: Möbiova páska.

Příklad 4.4. Na obrázku 4.5 je znázorněna afinní přímka B v afinní rovině A a vektor $u \notin V$. Orientace afinní roviny A je dána afinní bazí φ . Vektor u určuje orientaci přímky B danou bazí (v, b_0) , protože afinní báze (v, u, b_0) je souhlasně orientovaná s bazí φ .



Obrázek 4.5: Orientace afinní nadroviny pomocí vektoru.

4.2 Konvexní kombinace a konvexní množiny

Afinní kombinaci $c^0 a_0 + c^1 a_1 + \dots + c^m a_m$ bodů a_0, a_1, \dots, a_m afinního prostoru A s koeficienty c^0, c^1, \dots, c^m nazýváme *konvexní kombinací*, jestliže všechny koeficienty c^0, c^1, \dots, c^m jsou nezáporné (to současně znamená, že jsou všechny menší nebo rovny jedné).

Konvexním obalem neprázdné podmnožiny $K \subseteq A$ nazýváme množinu všech konvexních kombinací prvků množiny K .

Uvažme množinu $K = \{a_0, \dots, a_m\}$ bodů v obecné poloze. Konvexní obal této množiny se nazývá *úsečka*, je-li $m = 1$, *trojúhelník*, je-li $m = 2$ a *čtyřstěn*, je-li $m = 3$. Konvexní obal libovolné konečné množiny (jejíž prvky nemusejí být v obecné poloze) se nazývá *mnohostěn*, pokud je její afinní obal roven celému prostoru A .

Neprázdna množina $K \subseteq A$ se nazývá *konvexní*, je-li její konvexní obal roven K .

Věta 4.2. *Konvexní obal libovolné neprázdné podmnožiny afinního prostoru A je konvexní množina.*

Na konvexních množinách lze zadat orientaci tak, že zadáme orientaci na jejím afinním obalu.

Příklad 4.5. Při interpretaci barvy jako prvku barevné krychle z Příkladu 3.40 můžeme pro dvě barvy a_0, a_1 jejich konvexní kombinaci $ca_0 + (1 - c)a_1$ chápat jako barvu, která je „mezi“ těmito dvěma barvami, neboli jako barvu, která vznikla jejich smícháním. Koeficienty c a $1 - c$ pak určují poměr, ve kterém se barvy míchají. Konvexní kombinace lze využít k prolnutí dvou bitmap, jak je vidět na Obrázku 4.6. Vyšli jsme ze dvou



Obrázek 4.6: Prolnutí obrázků.

bitmap a vytvořili novou bitmapu tak, že jsme barvu každého pixelu vypočetli jako kon-

vexní kombinaci barev příslušného pixelu v původních bitmapách. Koefficient c byl postupně (zleva doprava, shora dolů) roven hodnotám 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.

4.3 Vzájemná poloha afinních podprostorů

Mějme dva afinní podprostory B_1 a B_2 se zaměřenými V_1 , V_2 afinního prostoru A se zaměřením U .

O afinních podprostorech B_1 , B_2 řekneme, že jsou

- *rovnoběžné*, pokud platí $V_1 \subseteq V_2$ nebo $V_2 \subseteq V_1$,
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a pokud $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$,
- *mimoběžné* ve všech ostatních případech.

Uvědomte si, že tato definice opravdu odpovídá třem typům vzájemné polohy dvou afinních podprostorů (přímek, rovin), jak je známe ze střední školy. Pokud se vám uvedená definice zdá nepřírozená (to se bude zřejmě týkat především definice rovnoběžnosti), pokuste se navrhnout definici vlastní, která by vycházela pouze z předchozích kapitol tohoto textu.

Příklad 4.6. Dokažte, že bod (tedy 0-rozměrný afinní podprostor) je rovnoběžný s libovolným jiným afinním podprostorem.

Pokud jsou afinní podprostory B_1 a B_2 rovnoběžné, mohou nastat dva případy: buď mají společný bod, nebo nemají. Následující věta uvádí dvě podmínky, které pomáhají tyto dva případy rozlišit.

Věta 4.3. *Předpokládejme, že afinní podprostory B_1 , B_2 jsou rovnoběžné a že $V_1 \subseteq V_2$. Následující tři podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje bod $b_0 \in B_1 \cap B_2$.*
2. *Pro každé dva body $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$ platí $b_2 - b_1 \in V_2$.*
3. *Existují body $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$ takové, že $b_2 - b_1 \in V_2$.*

Důkaz. Předpokládejme, že platí tvrzení 1. a zvolme libovolné dva body $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$. Pro vektor $b_2 - b_1$ platí $b_2 - b_1 = (b_2 - b_0) + (b_0 - b_1)$. Jelikož bod b_2 i bod b_0 leží v podprostoru B_2 , máme $b_2 - b_0 \in V_2$. Podobně pro vektor $b_0 - b_1$ platí $b_0 - b_1 \in V_1$. Jelikož $V_1 \subseteq V_2$, máme $b_2 - b_1 \in V_2$, což dokazuje tvrzení 2.

Tvrzení 3 plyne z tvrzení 2, jelikož podprostory B_1 a B_2 jsou neprázdné.

Pokud platí tvrzení 3, je $b_1 = b_2 - (b_2 - b_1)$. Proto je tvrzení 1 splněno pro $b_0 = b_1$. □

Pokud afinní podprostory nejsou rovnoběžné, mohou být různoběžné nebo mimoběžné. Následující věta pomáhá rozlišit mezi těmito dvěma případy.

Věta 4.4. *Předpokládejme, že afinní podprostory B_1, B_2 nejsou rovnoběžné. Pak jsou následující tři podmínky ekvivalentní:*

1. B_1 a B_2 jsou různoběžné.
2. Pro každé dva body $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$ platí $b_2 - b_1 \in V_1 \vee V_2$.
3. Existují body $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$ takové, že $b_2 - b_1 \in V_1 \vee V_2$.

Symbolem „ \vee “ označujeme operaci spojení vektorových podprostorů.

Bod 2 předchozí věty můžeme využít, pokud máme dva afinní podprostory, o kterých víme, že jsou různoběžné. Naopak tvrzení bodu 3 se hodí pro situace, kdy se o dvou podprostorech potřebujeme přesvědčit, zda jsou různoběžné.

Příklad 4.7. Dokažte, že v R^3 neexistují dvě mimoběžné roviny.

Příklad 4.8. Najděte dvě mimoběžné roviny v R^4 .

Příklad 4.9. Existují v R^4 dva mimoběžné podprostory dimenzí 2 a 3?

Příklad 4.10. Na základě výsledků předchozích příkladů se pokuste zformulovat a dokázat obecné tvrzení.

4.4 Příčka mimoběžek

Nyní se podíváme na speciální problém nalezení příčky dvou mimoběžných přímek v trojrozměrném prostoru. V této podkapitole budeme tedy předpokládat, že dimenze afinního prostoru A je rovna 3 a afinní podprostory $B_1, B_2 \subseteq A$ jsou mimoběžné přímky.

Uvedené výsledky lze ovšem poměrně snadno zobecnit na případ dvou mimoběžných přímek v afinním prostoru libovolné dimenze. Můžete se o to pokusit.

Příčkou mimoběžek $B_1, B_2 \subseteq A$ nazýváme libovolnou přímku $C \subseteq A$, která má neprázdný průnik s každou z přímek B_1, B_2 .

Příklad 4.11. Libovolnou volbou bodů $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$ je určena příčka mimoběžek B_1, B_2 . Je tedy zřejmé, že příček mimoběžek B_1, B_2 existuje nekonečně mnoho.

Z důvodu uvedeného v předchozím příkladě má smysl uvažovat o příčce mimoběžek splňující nějaké dodatečné podmínky. V obecném případě se řeší následující dvě úlohy:

1. nalézt příčku dvou mimoběžek, která má zadaný směrový vektor,
2. nalézt příčku dvou mimoběžek, která prochází zadaným bodem.

Obecné řešení první úlohy uvádí následující věta.

Příklad 4.12. Než začnete číst dál, pokuste se sami odpovědět na otázku: „Za jakých podmínek existuje příčka dvou mimoběžek určená daným směrovým vektorem?“ Jako pomůcka se osvědčuje představit si zadané mimoběžky pomocí nějakých reálných předmětů, například jako průnik dvou zdí a jedné zdi a stropu místnosti, ve které právě sedíte. Pak si můžete představovat různé směrové vektory a zkoušet hledanou příčku nalézt.

Věta 4.5. *Mějme dvě mimoběžné přímky B_1, B_2 se zaměřenými V_1, V_2 v trojrozměrném afinním prostoru A se zaměřením U . Dále uvažujme nenulový vektor $w \in U$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje příčka mimoběžek B_1, B_2 se směrovým vektorem w .*
2. *$w \notin V_1 \vee V_2$.*

Následující věta uvádí obecné řešení druhé z výše uvedených úloh.

Příklad 4.13. Podobně jako před předchozí větou byste se měli i zde nejprve zamyslet nad řešením této úlohy sami. S trochou geometrické představivosti lze řešení poměrně snadno odhalit.

Věta 4.6. *Mějme dvě mimoběžné přímky $B_1 = b_1 + V_1$ a $B_2 = b_2 + V_2$ v trojrozměrném afinním prostoru A a bod $c \in A$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje příčka C mimoběžek B_1, B_2 taková, že $c \in C$.*
2. *$c \notin b_1 + (V_1 \vee V_2)$ a $c \notin b_2 + (V_1 \vee V_2)$.*

Kapitola 5

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení jsou zobrazení, která jsou popsitelná v rámci teorie afinních prostorů. Mezi afinní zobrazení patří mnohá zobrazení, která se používají v počítačové grafice: posunutí, otočení, změna měřítka apod., jak v dvojrozměrném, tak trojrozměrném prostoru. Dále také rovnoběžné promítání (například trojrozměrného prostoru na obrazovku počítače).

K popisu afinních zobrazení slouží jejich matice vzhledem k afinním bazím. Při realizaci afinních zobrazení na počítači (například v OpenGL) se pracuje s jejich maticemi.

V této kapitole budeme pracovat s afinními prostory A a B se zaměřenými (po řadě) U a V .

5.1 Základní vlastnosti afinních zobrazení

Zobrazení $f: A \rightarrow B$ afinních prostorů A a B se nazývá *afinní*, jestliže pro libovolné dva body $a_1, a_2 \in A$ a jejich afinní kombinaci $c^1 a_1 + c^2 a_2$ platí

$$f(c^1 a_1 + c^2 a_2) = c^1 f(a_1) + c^2 f(a_2). \quad (5.1)$$

Pro připomenutí pojmu afinní kombinace bodů si přečtěte začátek kapitoly 3.2. Zejména si uvědomte, že $c^1 + c^2 = 1$.

Příklad 5.1. Podle Příkladu 3.10 plyne z podmínky (5.1) její zobecnění na libovolný počet bodů:

$$f(c^0 a_0 + c^1 a_1 + \cdots + c^k a_k) = c^0 f(a_0) + c^1 f(a_1) + \cdots + c^k f(a_k). \quad (5.2)$$

Součet koeficientů c^0, c^1, \dots, c^k je opět roven jedné.

Příklad 5.2. Pro libovolný bod $b_0 \in B$ je zobrazení $f: A \rightarrow B$, definované předpisem $f(a) = b_0$ (tj. konstantní zobrazení), afinní.

Příklad 5.3. *Identické zobrazení (identita) na množině X* je zobrazení Id_X takové, že $\text{Id}_X(x) = x$ pro každé $x \in X$. Identita na afinním prostoru A je afinní zobrazení.

Příklad 5.4. Zobecnění předchozího příkladu: je-li $Y \subseteq X$, pak *kanonické vložení podmnožiny Y do X* je zobrazení $i_Y: Y \rightarrow X$, definované předpisem $i_Y(y) = y$. Je-li $B \subseteq A$ afinní podprostor afinního prostoru A , pak kanonické vložení $i_B: B \rightarrow A$ je afinní zobrazení.

Příklad 5.5. Kompozice dvou afinních zobrazení je afinní zobrazení.

Příklad 5.6. Pro libovolné afinní zobrazení $f: A \rightarrow B$ platí: je-li $C \subseteq A$ afinní podprostor, je množina $f(C)$ afinním podprostorem afinního prostoru B .

Příklad 5.7. Afinní zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v prvcích bodové báze. Podrobněji: pokud (a_0, a_1, \dots, a_m) je bodová báze afinního prostoru A , pak libovolný bod $a \in A$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci jejích prvků:

$$a = c^0 a_0 + c^1 a_1 + \dots + c^m a_m.$$

Podle Příkladu 5.1 tedy

$$f(a) = f(c^0 a_0 + c^1 a_1 + \dots + c^m a_m) = c^0 f(a_0) + c^1 f(a_1) + \dots + c^m f(a_m),$$

což ukazuje, že hodnota $f(a)$ závisí (kromě bodu a) pouze na hodnotách $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_m)$.

Afinní zobrazení $f: A \rightarrow A$ se nazývá *afinní transformace afinního prostoru A* .

Příklad 5.8. Příkladem afinní transformace afinního prostoru A je *posunutí o vektor $u_0 \in U$* , což je zobrazení $\text{tr}_{u_0}: A \rightarrow A$ (tr jako *translace*), definované předpisem

$$\text{tr}_{u_0}(a) = a + u_0. \quad (5.3)$$

Je užitečné zkusit si podrobně dokázat, že opravdu jde o afinní transformaci.

Věta 5.1. *Mějme afinní zobrazení $f: A \rightarrow B$. Pokud pro čtyři body $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ platí $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$, pak $f(a_2) - f(a_1) = f(a_4) - f(a_3)$.*

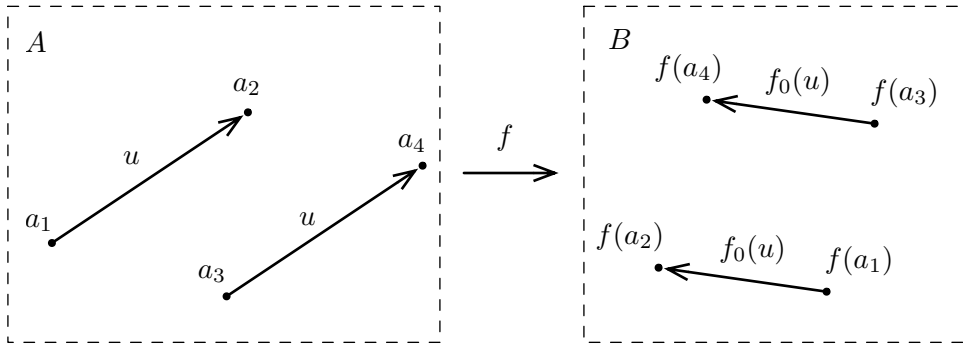
Důkaz. Z předpokladu věty plyne, že $a_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$. Podle příkladu 3.11 platí $a_4 = a_3 + a_2 - a_1$, kde na pravé straně stojí bodová kombinace bodů a_3, a_2, a_1 s koeficienty 1, 1 a -1 . Podle poznámky 5.1 tedy $f(a_4) = f(a_3) + f(a_2) - f(a_1)$, neboli, opět podle příkladu 3.11, $f(a_4) = f(a_3) + (f(a_2) - f(a_1))$ (součet bodu a vektoru). Odtud tvrzení věty. \square

Označíme-li ve větě 5.1 vektor $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$ písmenem u , dostaneme $f(a_1 + u) - f(a_1) = f(a_3 + u) - f(a_3)$. Vektor

$$f_0(u) = f(a_0 + u) - f(a_0) \quad (5.4)$$

z vektorového prostoru V tedy nezávisí na volbě bodu $a_0 \in A$, ale pouze na vektoru $u \in U$. Předpis (5.4) tedy definuje zobrazení $f_0: U \rightarrow V$.

Obrázek 5.1 zachycuje popsanou situaci. Vidíme na něm body a_1, a_2, a_3, a_4 afin-



Obrázek 5.1: Afinní zobrazení zachovává rovnoběžnost.

ního prostoru A takové, že $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$. Obrázek ukazuje, jak by mohly vypadat obrazy těchto bodů v afinním zobrazení f : vektory $f(a_2) - f(a_1)$ a $f(a_4) - f(a_3)$ se rovnají, takže lze definovat zobrazení f_0 . Z obrázku lze odhadnout, že afinní zobrazení zachovávají rovnoběžnost ve smyslu následujícího příkladu.

Příklad 5.9. Pokud C_1 a C_2 jsou dva rovnoběžné afinní podprostory afinního prostoru A a $f: A \rightarrow B$ afinní zobrazení, pak afinní podprostory $f(C_1)$ a $f(C_2)$ afinního prostoru B jsou rovněž rovnoběžné.

Zobrazení $f_0: U \rightarrow V$ definované předpisem (5.4) se nazývá *zobrazení podřízené afinnímu zobrazení f* .

Příklad 5.10. Podřízené zobrazení k zobrazení tr_{u_0} z Příkladu 5.8 je identita.

Přepsání vztahu (5.4) do tvaru

$$f(a_0 + u) = f(a_0) + f_0(u) \quad (5.5)$$

ukazuje, že ke zjištění hodnoty afinního zobrazení f v bodě $a_0 + u$ stačí znát jeho hodnotu v bodě a_0 a hodnotu podřízeného zobrazení ve vektoru u . Pokud označíme $a_0 + u = a$, dostaneme jinou verzi tohoto vztahu,

$$f(a) = f(a_0) + f_0(a - a_0), \quad (5.6)$$

kteřá říká, jak vypočíst hodnotu afinního zobrazení f v libovolném bodě a , pokud známe jeho hodnotu v bodě a_0 a umíme vypočítat hodnotu podřízeného zobrazení ve vektoru $a - a_0$.

(5.5) a (5.6) jsou (kromě základních vlastností matic afinních zobrazení z následující podkapitoly) nejčastěji používané vztahy pro afinní zobrazení. Umožňují řešit problémy kolem afinních zobrazení pomocí jejich podřízených zobrazení, což je výhodné díky následující větě, která říká, že podřízené zobrazení je vždy lineární, a Větě 5.3, která říká, že afinní zobrazení jsou právě zobrazení popsitelná těmito vztahy. Pracovat s afinními zobrazeními na základě definice, bez pomoci podřízených zobrazení, by bylo mnohem obtížnější.

Věta 5.2. *Pro libovolné afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$ je podřízené zobrazení $f_0 : U \rightarrow V$ lineární.*

Důkaz. Podle (5.4) pro libovolné skaláry $c^1, c^2 \in R$, vektory $u_1, u_2 \in U$ a bod $a_0 \in A$ máme

$$f_0(c^1 u_1 + c^2 u_2) = f(a_0 + c^1 u_1 + c^2 u_2) - f(a_0).$$

Označme $a_0 + u_1 = b_1$, $a_0 + u_2 = b_2$. Podle příkladu 3.12 je bod $a_0 + c^1 u_1 + c^2 u_2$ roven afinní kombinaci $(1 - c^1 - c^2)a_0 + c^1 b_1 + c^2 b_2$, takže

$$\begin{aligned} f(a_0 + c^1 u_1 + c^2 u_2) &= f((1 - c^1 - c^2)a_0 + c^1 b_1 + c^2 b_2) = \\ &= (1 - c^1 - c^2)f(a_0) + c^1 f(b_1) + c^2 f(b_2). \end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že $f(b_1) = f(a_0) + f_0(u_1)$ a $f(b_2) = f(a_0) + f_0(u_2)$. Proto se, opět podle příkladu 3.12, poslední výraz rovná

$$f(a_0) + c^1 f_0(u_1) + c^2 f_0(u_2).$$

Když se vrátíme k začátku důkazu, dostaneme

$$\begin{aligned} f_0(c^1 u_1 + c^2 u_2) &= f(a_0 + c^1 u_1 + c^2 u_2) - f(a_0) = \\ &= f(a_0) + c^1 f_0(u_1) + c^2 f_0(u_2) - f(a_0) = \\ &= c^1 f_0(u_1) + c^2 f_0(u_2). \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že zobrazení f_0 je opravdu lineární. □

Věta 5.3. *Pro libovolné dva body $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ a lineární zobrazení $f_0 : U \rightarrow V$ existuje právě jedno afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$ takové, že $f(a_0) = b_0$ a f_0 je podřízené zobrazení f .*

Důkaz. Ze vztahu (5.6) plyne, že je-li dána hodnota zobrazení f v bodě a_0 a podřízené zobrazení f_0 , jsou hodnoty zobrazení f ve všech ostatních bodech afinního prostoru A jednoznačně určeny. Zobrazení f daných vlastností tedy existuje nejvýše jedno a pokud existuje, je dáno vztahem (5.6).

Je tedy třeba dokázat, že zobrazení f dané tímto vztahem je afinní s podřízeným zobrazením f_0 . Zvolme tedy libovolně dva body $a_1, a_2 \in A$ a čísla $c^1, c^2 \in R$ taková, že $c^1 + c^2 = 1$. Dále označme $a_1 - a_0 = u_1, a_2 - a_0 = u_2$. Podle vztahu (5.6) máme

$$\begin{aligned} f(c^1 a_1 + c^2 a_2) &= b_0 + f_0(c^1 a_1 + c^2 a_2 - a_0) = \\ &= b_0 + f_0(c^1 u_1 + c^2 u_2) = \\ &= b_0 + c^1 f_0(u_1) + c^2 f_0(u_2) = \\ &= c^1 f_0(a_1) + c^2 f_0(a_2). \end{aligned}$$

f je tedy afinní zobrazení. Hodnota jeho podřízeného zobrazení ve vektoru $u \in U$ je podle (5.1) rovna

$$f(a_0 + u) - f(a_0) = f(a_0) + f_0(u) - f(a_0) = f_0(u).$$

f_0 je tedy podřízeným zobrazením afinního zobrazení f . □

Příklad 5.11. *Středová souměrnost se středem $a_0 \in A$ je zobrazení $f : A \rightarrow A$ definované předpisem*

$$f(a) = 2a_0 - a$$

(na pravé straně je afinní kombinace, kterou lze také přepsat jako součet bodu a vektoru: $f(a) = a_0 + (a_0 - a)$). Středová souměrnost je afinní transformace afinního prostoru A . To lze odvodit přímo z definice afinního zobrazení (obtížnější), nebo pomocí Věty 5.3 (jednodušší). Najděte podřízené lineární zobrazení ke středové souměrnosti.

Příklad 5.12. Zajímavý příklad středové souměrnosti lze ukázat na barevné krychli (Příklad 3.40). Položme $d = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0$ (bod d leží ve středu úsečky s koncovými body v černé a bílé barvě). Pro $a \in A$ položme $f(a) = 2d - a$ (středová souměrnost se středem d). Zobrazení f přiřadí každé barvě její doplňkovou barvu. Na Obrázku 5.2 je barva každého pixelu na pixmapě vpravo výsledkem aplikace zobrazení f na barvu příslušného pixelu na pixmapě vlevo.

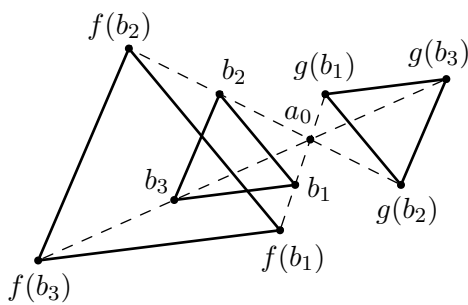
Příklad 5.13. Afinní zobrazení z Příkladu 5.11 můžeme zobecnit, když afinní kombinaci $2a_0 - a$ nahradíme obecnou afinní kombinací dvou bodů:

$$f(a) = (1 - c)a_0 + ca.$$

Zobrazení f se pak nazývá *stejnolehlost se středem a_0 a koeficientem c* . Pro $c = 0$ je f konstantní zobrazení, pro $c = 1$ identita.



Obrázek 5.2: Doplňkové barvy

Obrázek 5.3: Stejnolehlost f s koeficientem $c = 2$ a g s koeficientem $c = -1$.

Na Obrázku 5.3 je znázorněna stejnoolehlost f se středem a_0 a koeficientem $c = 2$ a stejnoolehlost g s tímtož středem a koeficientem $c = -1$.

Příklad 5.14. Pro libovolná dvě afinní zobrazení $f_1, f_2 : A \rightarrow B$ a číslo c je zobrazení $cf_1 + (1 - c)f_2$, které zobrazí každý bod $a \in A$ na afinní kombinaci

$$cf_1(a) + (1 - c)f_2(a),$$

afinní zobrazení.

Afinní projekce afinního prostoru A je takové afinní zobrazení $f : A \rightarrow A$, že pro každé $a \in A$ platí $f(f(a)) = f(a)$.

5.2 Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím

Mějme afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$, $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ afinního prostoru A se zaměřením U a afinní bázi $\psi = (\beta, b_0)$, $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ afinního prostoru B se zaměřením V . Dále

mějme afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$ s podřízeným lineárním zobrazením $f_0 : U \rightarrow V$. Naším cílem je najít způsob, jak ze souřadnicového vyjádření a_φ bodu $a \in A$ vzhledem k bázi φ vypočítat souřadnicové vyjádření $f(a)_\psi$ jeho obrazu $f(a)$ při zobrazení f vzhledem k bázi ψ .

Máme

$$f(a) = f_0(a - a_0) + f(a_0),$$

čili podle příkladu 3.34 a s použitím matice $M_{\alpha,\beta}^{f_0}$ lineárního zobrazení f_0 vzhledem k bazím α, β ,

$$\begin{aligned} f(a)_\psi &= \begin{pmatrix} f_0(a - a_0)_\beta \\ 0 \end{pmatrix} + f(a_0)_\psi = \begin{pmatrix} M_{\alpha,\beta}^{f_0} \cdot (a - a_0)_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + f(a_0)_\psi \\ &= \begin{pmatrix} M_{\alpha,\beta}^{f_0} \\ 0 \quad \dots \quad 0 \end{pmatrix} \cdot (a - a_0)_\alpha + f(a_0)_\psi. \end{aligned}$$

Pokud nyní sestavíme blokovou matici

$$M_{\varphi,\psi}^f = \left(\begin{array}{c|c} M_{\alpha,\beta}^{f_0} & f(a_0)_\psi \\ \hline 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \quad (5.7)$$

dostaneme

$$f(a)_\psi = M_{\varphi,\psi}^f \cdot a_\varphi.$$

Matice $M_{\varphi,\psi}^f$ se nazývá *matice afinního zobrazení f vzhledem k bazím φ, ψ* .

K sestavení této matice potřebujeme následující údaje: matici lineárního zobrazení f_0 vzhledem k vektorovým bazím α, β a souřadnice bodu $f(a_0)$ vzhledem k afinní bázi ψ .

Příklad 5.15. Matice identického zobrazení $\text{id}_A : A \rightarrow A$ vzhledem k bazím α, α' je rovna matici přechodu mezi těmito bazemi:

$$M_{\alpha,\alpha'}^{\text{id}_A} = M_{\alpha,\alpha'}. \quad (5.8)$$

Příklad 5.16. Pro afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$ a afinní báze φ, φ' na A a ψ, ψ' na B platí

$$M_{\varphi',\psi'}^f = M_{\psi,\psi'} \cdot M_{\varphi,\psi}^f \cdot M_{\varphi',\varphi}.$$

Ověřte.

Příklad 5.17. Někdy je vhodnější zadat afinní zobrazení pomocí jeho matice vzhledem k nějakým bazím, než pomocí jeho geometrických vlastností. Ukážeme si to na příkladu barevné krychle (Příklad 3.40). Definujme afinní transformaci $p: A \rightarrow A$ pomocí její matice v afinní bázi φ_{RGB} :

$$M_{\varphi_{RGB}}^p = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení p zobrazuje každou barvu na šedou. Stupeň šedi je přitom namíchán z jednotlivých složek barvy obvyklým způsobem, který respektuje citlivost oka na tyto složky (nejmenší citlivost je na zelenou).

Jednoduchým vynásobením matic lze zjistit, že

$$M_{\varphi_{RGB}}^p \cdot M_{\varphi_{RGB}}^p = M_{\varphi_{RGB}}^p$$

(není nutné násobit konkrétní čísla, stačí místo nich použít obecné proměnné a využít toho, že součet hodnot v každém řádku matice je roven jedné). Zobrazení p je tedy afinní projekce.

Příklad 5.18. Najděte matici zobrazení p z předchozího příkladu vzhledem k bázi φ_{CMY} (Příklad 3.40).

Příklad 5.19. Použijme výsledek Příkladu 5.14 na zobrazení p z Příkladu 5.17 a identické zobrazení. Vychází, že pro libovolné číslo $c \in [0, 1]$ je zobrazení $c \cdot \text{Id}_A + (1 - c) \cdot p$ afinní. Uměli byste nalézt matici tohoto zobrazení pro konkrétní hodnoty čísla c ? Na Obrázku 5.4 jsou zobrazeny výsledky aplikace tohoto zobrazení na jednotlivé pixely dané pixmapy pro hodnoty $c = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ a 1 (zleva doprava, shora dolů).

ÚLOHY

5.1. Rozhodněte, zda existuje afinní zobrazení $f: R^2 \rightarrow R$ takové, že $f(a_0) = b_0$, $f(a_1) = b_1$ a $f(a_2) = b_2$, když

1. $a_0 = [0, -1]$, $a_1 = [2, 1]$, $a_2 = [-1, -2]$, $b_0 = 2$, $b_1 = -2$, $b_2 = 4$,
2. $a_0 = [0, -1]$, $a_1 = [2, 1]$, $a_2 = [-1, -2]$, $b_0 = -1$, $b_1 = -2$, $b_2 = 0$,
3. $a_0 = [-1, 1]$, $a_1 = [2, 2]$, $a_2 = [-1, -1]$, $b_0 = 2$, $b_1 = -2$, $b_2 = 4$,
4. $a_0 = [-1, 1]$, $a_1 = [2, 2]$, $a_2 = [-1, -1]$, $b_0 = -1$, $b_1 = -2$, $b_2 = 0$.

Pokud zobrazení existuje právě jedno, najděte jeho podřízené lineární zobrazení a matici vzhledem ke kanonickým afinním bazím.



Obrázek 5.4: Obrázek k Příkladu 5.19

5.2. Najděte matici posunutí o vektor $(1, -2)$ v R^2 vzhledem ke kanonické bázi.

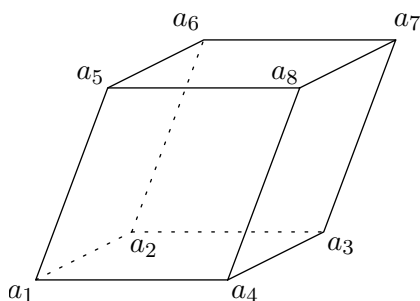
5.3. Zesvětlení barvy (viz Příklad 3.40) lze definovat jako stejnolehlost se středem v bílé barvě (v Příkladu 3.40 je to bod b_0) s nějakým koeficientem $c \in [0, 1]$. Najděte matici tohoto zobrazení vzhledem k bázi φ_{RGB} .

5.4. Místo bodu b_0 v předchozí úloze můžeme použít jinou barvu — např. stejnolehlost se středem v modré barvě a koeficientem $c \in [0, 1]$ realizuje smíchání libovolné barvy s modrou v poměru daném číslem c . Najděte matici tohoto zobrazení vzhledem k bázi φ_{RGB} .

5.5. Najděte matici středové souměrnosti z Příkladu 5.13 (doplňkové barvy) vzhledem k bázi φ_{RGB} .

5.6. Najděte matici středové souměrnosti v R^2 se středem v obecném bodě $[a^1, a^2]$ vzhledem ke kanonické afinní bázi.

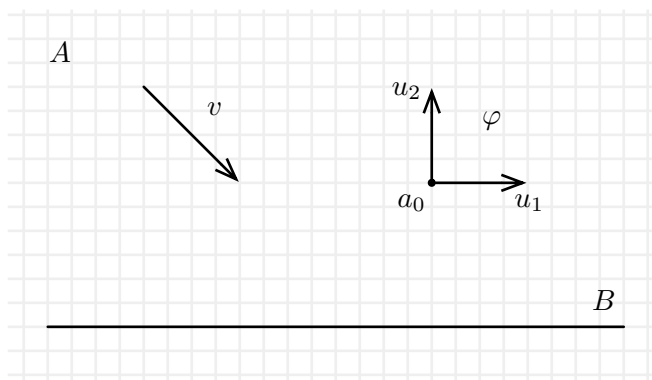
5.7. V trojrozměrném afinním prostoru A je dán rovnoběžnostěn s vrcholy $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ (viz Obrázek 5.5) a afinní zobrazení $f: A \rightarrow A$ takové, že $f(a_1) = a_1, f(a_2) = a_5, f(a_5) = a_4, f(a_4) = a_2$. Najděte matici tohoto zobrazení vzhledem k afinní bázi $(a_3 - a_7, a_6 - a_7, a_8 - a_7)$.



Obrázek 5.5: Obrázek k Úloze 5.7.

5.8. Kolik existuje bijektivních afinních projekcí $f: A \rightarrow A$?

5.9. Najděte matici afinní projekce $p: A \rightarrow A$ vzhledem k afinní bázi φ . Pro projekci p platí, že $f(A) = B$ a obraz každého bodu je dán jeho součtem s vhodným násobkem vektoru v . A je afinní rovina zakreslená na Obrázku 5.6, $B \subseteq A$ je afinní přímka, další údaje jsou rovněž patrné z obrázku.



Obrázek 5.6: Projekce p z Úlohy 5.9.

Kapitola 6

Eukleidovské prostory

Tato kapitola zatím není dokončena.

Eukleidovským prostorem rozumíme afinní prostor, na jehož zaměření je zadán skalární součin. Většina vlastností eukleidovských prostorů úzce souvisí s vlastnostmi skalárního součinu. Na tomto místě uvedeme pouze stručný souhrn.

Skalární součin vektorů u_1 a u_2 budeme značit $\langle u_1, u_2 \rangle$. Na vektorovém prostoru R^n je definován tzv. kanonický skalární součin známým předpisem

$$\langle u_1, u_2 \rangle = u_1^1 u_2^1 + u_1^2 u_2^2 + \cdots + u_1^n u_2^n, \quad (6.1)$$

kde u_1^i resp. u_2^i jsou složky vektorů u_1 resp. u_2 .

Délka vektoru u (také *norma*) se značí $\|u\|$ a je definována předpisem

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Pokud $\|u\| = 1$, je vektor u *jednotkový*. Každý vektor má nenulovou délku, právě když je nenulový. Z libovolného nenulového vektoru můžeme vytvořit jednotkový vektor tzv. *normováním*, které spočívá ve vynásobení vektoru převrácenou hodnotou jeho délky:

$$u_0 = \frac{1}{\|u\|} u.$$

Odchylka θ vektorů u_1, u_2 je definována předpisem

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \|u_2\|} \right).$$

Tyto vektory jsou *kolmé* (*ortogonální*), jestliže $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ (což je právě když je jejich odchylka rovna $\frac{\pi}{2}$).

Báze α vektorového prostoru U je *ortogonální*, jsou-li každé dva její vektory kolmé. Pokud je navíc každý její vektor jednotkový, říkáme, že je tato báze *ortonormální*.

Gram-Schmidtova ortogonalizace je známá metoda, která z libovolné báze vektorového prostoru vytvoří ortogonální bázi.

Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bazemi je vždy tzv. *ortogonální matice* (tady je terminologie trochu nedůsledná), což je matice, jejíž sloupce tvoří ortonormální bázi vektorového prostoru R^n (kde n je velikost matice) vzhledem ke kanonickému skalárnímu součinu na R^n . Inverzní matici k ortogonální matici zjistíme jednoduše její transpozicí:

$$M^{-1} = M^T, \quad \text{neboli} \quad M \cdot M^T = E.$$

Kapitola 7

Projektivní prostory

Tato kapitola obsahuje úvod do teorie projektivních prostorů, který by měl čtenáři umožnit pochopit základy geometrických transformací používaných v trojrozměrné počítačové grafice.

Ve většině textu této kapitoly jsou prvky afinních prostorů současně vektory v nějakých prostorech vektorových. Proto není vždy možné striktně rozlišovat mezi body a vektory, což se projevuje i na značení například tím, že se volba mezi hranatými a kulatými závorkami nemůže řídit přísnými kritérii.

7.1 Projektivní prostory a jejich vztah k afinním prostorům

Začneme několika na sebe navazujícími motivačními příklady.

Příklad 7.1. Uvažme nadrovinu A ve vektorovém prostoru R^3 danou předpisem

$$A = \{(a^1, a^2, a^3) \in R^3 \mid a^3 = 1\}. \quad (7.1)$$

Zaměřením této nadroviny je vektorový podprostor

$$U = \{(a^1, a^2, a^3) \in R^3 \mid a^3 = 0\}. \quad (7.2)$$

Prvky nadroviny A hrají dvojí roli. Jsou to body v afinním prostoru A a současně vektory ve vektorovém prostoru R^3 . Prvky vektorového podprostoru U , který je zaměřením afinního prostoru A , jsou tedy vektory téhož vektorového prostoru jako prvky afinního prostoru A . Podívejme se podrobněji, co lze z těchto souvislostí vytěžit.

Nejprve si uvědomme, jak lze v této situaci interpretovat sčítání bodu a vektoru. Víme, že prostor R^3 je afinní prostor, v němž je sčítání bodu a vektoru totožné se sčítáním vektorů ve vektorovém prostoru. Protože afinní prostor A je afinním podprostorem afinního prostoru R^3 a jeho zaměřením je vektorový podprostor $U \subset R^3$, přeneseme

se tato vlastnost i na tento podprostor: pro libovolný bod $a \in A$ a vektor $u \in U$ je součet bodu a vektoru $a + u$ roven součtu $a + u$ vektorů v R^3 .

Ze vztahů (7.1) a (7.2) vyplývá, jak vypadají složky vektorů a a u . Zatímco třetí složka vektoru a je rovna jedné, vektor u má třetí složku nulovou:

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Odtud je také vidět, že součet $a + u$ bude prvkem podprostoru A , protože bude mít stejně jako bod a třetí složku rovnou jedné:

$$a + u = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 + u^1 \\ a^2 + u^2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Příklad 7.2. Nyní se podívejme, jakým způsobem lze v situaci z předchozího příkladu interpretovat afinní báze afinního prostoru A . Uvažme vektorovou bázi $u_1, u_2, a_0 \in R^3$ takovou, že $u_1, u_2 \in U$ (U je zaměření nadroviny A , viz (7.2)) a $a_0 \in A$. Vektory u_1, u_2 mají tedy svou třetí složku nulovou, vektor a_0 rovnou jedné:

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_0 = \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Vektory u_1, u_2 jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového podprostoru U . Podle definice afinní báze je tedy trojice (u_1, u_2, a_0) afinní bazí afinního prostoru A .

Zvolme nyní libovolný bod $a \in A$ a podívejme se, co lze zjistit o jeho souřadnicích ve zvolené bázi. Pokud

$$a = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_0 a_0, \quad (7.6)$$

pak, rozepsáno po složkách,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 u_1^1 + c_2 u_2^1 + c_0 a_0^1 \\ c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_0 a_0^2 \\ c_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $c_0 = 1$, a souřadnice libovolného bodu $a \in A$ v afinní bázi (u_1, u_2, a_0) jsou tvaru $(c_1, c_2, 1)$. Tím dostává dříve uvedená formální konvence přidávání jedničky k souřadnicím prvku afinního prostoru v afinní bázi zajímavý význam.

Příklad 7.3. Pro zajímavost se ještě podíváme na afinní kombinace a bodové báze v afinním prostoru A . Zvolme $n + 1$ bodů $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$. Tyto body jsou současně vektory v R^3 , takže můžeme udělat jejich lineární kombinaci s libovolnými koeficienty $c_0, c_1, \dots, c_n \in R$. Dostaneme vektor $a = c_0 a_0 + c_1 a_1 + \dots + c_n a_n \in R^3$, který jistě nemusí ležet v podprostoru A . Aby tam ležel, je nutné, aby byla jeho třetí složka rovna 1. Rozepíšeme si tedy tuto lineární kombinaci po složkách a podíváme se, co to znamená:

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_0 a_0^1 + c_1 a_1^1 + \dots + c_n a_n^1 \\ c_0 a_0^2 + c_1 a_1^2 + \dots + c_n a_n^2 \\ c_0 + c_1 + \dots + c_n \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že vektor a bude ležet v podprostoru A jedině když bude $c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1$.

Pojďme teď interpretovat prvky a_0, a_1, \dots, a_n jako body v afinním prostoru A a udělejme jejich afinní kombinaci $\bar{a} = c_0 a_0 + c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$. Víme, že tuto afinní kombinaci můžeme vypočítat jako afinní kombinaci v afinním prostoru R^3 (jsou-li a_0, a_1, \dots, a_n body afinního podprostoru $B \subseteq A$, je jedno, jestli jejich afinní kombinaci $c_0 a_0 + c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$ počítáme v afinním prostoru B , nebo A ; vždy dostaneme stejný výsledek). Dále víme, že afinní kombinace ve vektorovém prostoru lze počítat jako kombinace lineární (příklad 3.8).

Z uvedeného vyplývá, že afinní kombinace bodů z afinního podprostoru A lze počítat jako lineární kombinace v R^3 , chápeme-li tyto body jako vektory v R^3 .

Příklad 7.4. Pokračujme v našich úvahách o nadrovině $A \subseteq R^3$ z (7.1) a uvažme tři body $a_0, a_1, a_2 \in A$, které jsou lineárně nezávislé jako vektory v R^3 . Jak jsme již zjistili, afinní kombinace v A lze počítat jako lineární kombinace v R^3 s týmiž koeficienty. Proto je snadné dokázat, že body a_0, a_1, a_2 jsou v obecné poloze. Kdyby totiž například bod a_0 byl afinní kombinací ostatních,

$$a_0 = c_1 a_1 + c_2 a_2, \quad \text{kde } c_1 + c_2 = 1,$$

platil by tentýž vztah i pro prvky a_0, a_1, a_2 chápané jako vektory, což by bylo v rozporu s jejich předpokládanou lineární nezávislostí.

Předpokládejme naopak, že body a_0, a_1, a_2 jsou v obecné poloze a jsou přitom jako vektory lineárně závislé. Existují tedy koeficienty c_0, c_1, c_2 , ne všechny různé od nuly, tak, že lineární kombinace $c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2$ je nulová. Rozepíšeme-li si to po složkách,

$$c_0 \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 a_0^1 + c_1 a_1^1 + c_2 a_2^1 \\ c_0 a_0^2 + c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 \\ c_0 + c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vidíme, že $c_0 + c_1 + c_2 = 0$. Zároveň je jeden z těchto koeficientů nenulový. Je celkem jedno, který to je, předpokládejme, že je to třeba c_0 . Můžeme tedy odvodit, že $-c_1 - c_2 = c_0$, neboli $-\frac{c_1}{c_0} - \frac{c_2}{c_0} = 1$ a

$$a_0 = -\frac{c_1}{c_0}a_1 - \frac{c_2}{c_0}a_2.$$

Tím se nám podařilo vyjádřit bod a_0 jako afinní kombinaci bodů a_1 a a_2 a dospět ke sporu. Vektory a_0, a_1 a a_2 jsou tedy lineárně nezávislé.

Příklad 7.5. Body afinního prostoru A z předchozích příkladů lze ztotožnit s jednorozměrnými vektorovými podprostory v R^3 (tj. s přímkami procházejícími počátkem), které s ním mají neprázdný průnik. Každý takový vektorový podprostor se totiž s rovinou A protne právě v jednom bodě a každý bod z A určuje právě jeden jednorozměrný vektorový podprostor v R^3 . Jednorozměrné podprostory R^3 , které se s A neprotínají, můžeme interpretovat jako body ležící v nekonečnu (tzv. nevlastní body). To je motivace následující definice.

Mějme vektorový prostor V dimenze $n + 1$, kde $n \geq -1$. Množinu $P(V)$ všech jednorozměrných vektorových podprostorů prostoru V nazveme *projektivním prostorem nad vektorovým prostorem V* . Prvky projektivního prostoru $P(V)$ nazýváme *geometrickými body*. Je-li $a \in P(V)$ geometrický bod, pak libovolný vektor $v \in a$ nazýváme jeho *aritmetickým zástupcem*.

Pro aritmetického zástupce v geometrického bodu a platí $a = \langle v \rangle$, kde $\langle v \rangle$ označuje lineární obal vektoru v (tj. množinu všech jeho násobků).

Číslo n nazýváme *dimenzí* projektivního prostoru $P(V)$ a označujeme $\dim P(V)$.

Je-li $n = 0$, nazýváme projektivní prostor $P(V)$ *projektivním bodem*, pro $n = 1$ hovoříme o *projektivní přímce*, pro $n = 2$ o *projektivní rovině*.

Je-li W vektorový podprostor vektorového prostoru V , je $P(W) \subseteq P(V)$. Projektivní prostor $P(W)$ nazýváme *projektivním podprostorem projektivního prostoru V* . Je-li $\dim P(W) = \dim P(V) - 1$, nazýváme projektivní podprostor $P(W)$ *nadrovinou* v projektivním prostoru $P(V)$.

Následující věta plyne přímo z definice projektivního prostoru. Všimněme si, že prázdná množina je projektivním prostorem dimenze -1 , takže věta platí i v případě, že podprostory $P(W_1)$ a $P(W_2)$ jsou disjunktní (mají prázdný průnik).

Věta 7.1. *Průnikem $P(W_1) \cap P(W_2)$ dvou projektivních podprostorů $P(W_1), P(W_2) \subseteq P(V)$ je projektivní podprostor $P(W_1 \cap W_2)$.*

Příklad 7.6. Projděme si nyní uvedené definice na afinním prostoru $A \subset R^3$ z příkladů ze začátku této kapitoly. V tomto příkladě je hlavním vektorovým prostorem prostor

R^3 . Projektivní prostor $P(R^3)$ je množina všech jednorozměrných vektorových podprostorů v R^3 , tedy množina všech přímek v R^3 , procházejících počátkem. Prvky této množiny jsou tedy množiny vektorů. Například vektor $(2, -\frac{1}{2}, 1) \in R^3$ určuje přímku $\langle (2, -\frac{1}{2}, 1) \rangle \in P(R^3)$, kterou ale také určuje například vektor $(-4, 1, -2)$, protože je jeho nenulovým násobkem. Oba tyto vektory jsou aritmetickými zástupci téhož geometrického bodu z projektivního prostoru $P(R^3)$.

Při práci s prvky projektivních prostorů často pracujeme s jejich aritmetickými zástupci (tedy s vektory); máme ale přitom na paměti, že různé aritmetické zástupci mohou určovat též geometrický bod.

Podle uvedené definice je dimenze projektivního prostoru $P(R^3)$ rovna dvěma, jedná se tedy o projektivní rovinu.

Jak už jsme si všimli, pokud v R^3 zvolíme afinní nadrovinu neprocházející počátkem (například nadrovinu A z (7.1)), můžeme prvky projektivního prostoru $P(R^3)$, které s ní nejsou rovnoběžné, reprezentovat body v této nadrovině. Podmnožinu projektivního prostoru, obsahující většinu (v pochopitelném intuitivním smyslu) jeho bodů lze tedy chápat jako afinní prostor. Chceme-li pomocí nadroviny A reprezentovat celý projektivní prostor $P(R^3)$, musíme k němu přidat geometrické body, které jsou s ní rovnoběžné (a mají tedy s ní prázdný průnik). O těchto bodech se v této souvislosti hovoří jako o *nevlastních bodech*.

Doposud jsme ve všech příkladech uváděli jako základní vektorový prostor množinu R^3 . Pro práci s obecnými projektivními prostory je užitečné zavést na nich nějaký typ souřadnic. Provedeme to nejjednodušším možným způsobem, pomocí báze na podkladovém vektorovém prostoru.

Libovolnou bázi v_0, v_1, \dots, v_n vektorového prostoru V nazveme *aritmetickou bází projektivního prostoru* $P(V)$. Souřadnice nenulového vektoru $v \in V$ v této bázi nazveme *homogenními souřadnicemi bodu* $\langle v \rangle \in P(V)$ *vzhledem k aritmetické bázi* v_0, v_1, \dots, v_n .

Je vidět, že homogenní souřadnice bodu projektivního prostoru vzhledem k dané aritmetické bázi nejsou určeny jednoznačně, ale závisí na volbě jeho aritmetického zástupce. Všechny se ale liší pouze nějakým nenulovým násobkem.

V následujících příkladech budeme vždy pracovat s projektivním prostorem $P(V)$ dimenze n . Případné konkrétnější zadání uvedeme vždy u příkladu, kterého se bude týkat. Ve většině příkladů bude $V = R^3$, a A nadrovina daná rovnicí (7.1). V R^3 budeme uvažovat kanonickou vektorovou bázi, nebude tedy rozdíl mezi souřadnicemi vektorů a jejich složkami. Tuto bázi budeme také používat jako geometrickou bázi v $P(R^3)$. V nadrovině A budeme uvažovat afinní bázi $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ a souřadnice prvků nadroviny A budeme uvažovat vzhledem k ní (to znamená, že souřadnice bodu $(x, y, 1) \in A$ budou $[x, y, 1]$).

Příklady zatím nepracují s homogenními souřadnicemi, to v budoucnu změníme.

Příklad 7.7. Přímka v projektivním prostoru $P(V)$ je podle definice dána rovinou ve vektorovém prostoru V , procházející nulovým vektorem. Tato rovina je tedy určena dvěma lineárně nezávislými vektory $v_1, v_2 \in V$ a její parametrická rovnice je

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2. \quad (7.7)$$

V případě $V = R^3$ a $\langle v_1 \rangle \cap A \neq \emptyset$ a $\langle v_2 \rangle \cap A \neq \emptyset$, můžeme vektory v_1 a v_2 normovat tak, aby ležely v rovině A (tedy aby měly třetí složku rovnu jedné). Rovnice průniku naší roviny s rovinou A pak bude

$$v = t v_1 + (1 - t) v_2. \quad (7.8)$$

Příklad 7.8. Zkusme pomocí předchozího příkladu najít projektivní přímku v $P(R^3)$, která prochází zadaným nevlastním bodem. Položme $a = \langle (0, 1, 1) \rangle$ a $b = \langle (1, 2, 0) \rangle$. Bod a protíná (jako přímka) nadrovinu A v bodě o souřadnicích $[0, 1]$, bod b ji ale neprotíná a je tedy nevlastní. Rovnice vektorového podprostoru určeného těmito dvěma body je

$$v = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Tato rovnice tedy určuje homogenní souřadnice všech prvků hledané projektivní přímky. Spočtíme ještě množinu vlastních bodů této přímky v rovině A . Tyto body mají třetí složku rovnu jedné, z rovnice (7.9) dostaneme podmínku

$$1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 = 1, \quad (7.10)$$

což znamená $t_1 = 1$ a rovnice hledané množiny vlastních bodů je

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Tato množina je tedy afinní přímkou procházející bodem a a se směrovým vektorem určeným bodem b .

Uvedený postup můžeme v počítačové grafice využít například v případě, že chceme zjistit dráhu paprsku světla, jehož zdroj je umístěn v nekonečnu.

Příklad 7.9. Zkuste ověřit, že nevlastní body afinního prostoru $A \subset R^3$ tvoří projektivní přímku. Tato přímka se nazývá *nevlastní přímka*.

Příklad 7.10. Ukažte, že v projektivním prostoru dimenze 2 mají libovolné dvě různé projektivní přímky jednoprvkový průnik. Tím se projektivní prostory liší od prostorů afinních, v nichž neshodné rovnoběžné přímky průnik nemají. Zkusme tuto skutečnost ověřit na příkladě v projektivním prostoru $P(R^3)$. Položme $a = \langle (0, 1, 1) \rangle$, $b =$

$\langle(1, 2, 0)\rangle$ a $c = \langle(1, 2, 1)\rangle$ a uvažme dvojici přímek určených body a, b a c, b . Z předchozího víme, že tyto dvě projektivní přímky určují afinní přímky v prostoru A o rovnících

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

Vidíme, že se jedná o rovnoběžky, které v prostoru A nemají průsečík. Abychom zjistili průnik projektivních přímek, napišme si a porovnejme jejich rovnice:

$$t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Vyřešením vzniklé soustavy získáme

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_3 &= 0, \\ t_2 &= t_4, \end{aligned} \quad (7.15)$$

což znamená, že uvedené projektivní přímky se protínají v nevlastním bodě $\langle(1, 2, 0)\rangle$.

7.2 Projektivní zobrazení

Příklad 7.11. V počítačové grafice je potřeba kromě afinních zobrazení používat ještě zobrazení jiného typu. Platí to především o *perspektivním promítání*.

Uvedme jednoduchý příklad z dvourozměrného prostoru. Představme si pozorovatele umístěného v prostoru R^2 do bodu $[0, 0]$ a hledícího ve směru osy y . Veškeré předměty, které pozorovatel vidí, se mu promítají na přímku (v přirozenějším trojrozměrném příkladě by to byla rovina). Nazvěme tuto přímku *projekční plátno* a stanovme, že bude mít rovnici $y = 1$. Každý viditelný bod z prostoru R^2 se na projekčním plátně zobrazí do bodu, který vznikne jako jeho průsečík se spojnicí bodu a umístění pozorovatele.

Popsaným způsobem vzniká zobrazení f podmnožiny R^2 na projekční plátno, které je příkladem perspektivního promítání. Není těžké odvodit rovnici tohoto zobrazení:

$$f[x, y] = \left[\frac{x}{y}, 1 \right]. \quad (7.16)$$

Zobrazení f ovšem není afinní; jistě neexistuje matice

$$M = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

taková, že

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{y} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Zajímavé ovšem je, že pokud zvolíme matici M takto:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

dostaneme

$$M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

což sice není výsledek, který jsme chtěli získat, ale po vydělení všech tří složek číslem y už požadovanou trojici $[\frac{x}{y}, 1, 1]$ obdržíme. Pokud je $y \neq 0$, jsou vektory (x, y, y) a $(\frac{x}{y}, 1, 1)$ aritmetickými zástupci téhož prvku projektivního prostoru $P(R^2)$.

Je-li $F: V \rightarrow W$ lineární zobrazení, pak pro každé dva lineárně závislé vektory $v_1, v_2 \in V$ jsou i vektory $F(v_1), F(v_2) \in W$ lineárně závislé. Pokud jsou navíc vektory $F(v_1)$ a $F(v_2)$ nenulové, jsou všechny čtyři vektorové podprostory $\langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle \subseteq V$, $\langle F(v_1) \rangle, \langle F(v_2) \rangle \subseteq W$ jednorozměrné a platí $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ a $\langle F(v_1) \rangle = \langle F(v_2) \rangle$. Pokud je tedy pro $v \in V$ vektor $F(v)$ nenulový, hodnota $\langle F(v) \rangle$ závisí pouze na vektorovém podprostoru $\langle v \rangle$, nikoliv na volbě jeho konkrétního prvku (v našem případě vektoru v).

Jinak řečeno, pro libovolné dva aritmetické zástupce v_1, v_2 téhož bodu z $P(V)$ existuje číslo $c \in R$ tak, že $v_2 = cv_1$. Proto $F(v_2) = F(cv_1) = cF(v_1)$ a vektory $F(v_1)$ a $F(v_2)$ jsou aritmetickými zástupci téhož bodu z $P(W)$.

Můžeme tedy vyslovit následující definici: Mějme nenulové lineární zobrazení $F: V \rightarrow W$ a množinu $U = \{\langle v \rangle \in P(V) \mid F(v) \neq 0\}$. Zobrazení $\langle F \rangle: U \rightarrow P(W)$ definované předpisem $\langle F \rangle(\langle v \rangle) = \langle F(v) \rangle$, nazýváme *projektivním zobrazením vytvořeným lineárním zobrazením F* .

Stručná poznámka o maticích: Jako matici projektivního zobrazení můžeme vzít matici příslušného lineárního zobrazení vzhledem k aritmetickým bazím. Jedno projektivní zobrazení ovšem má více matic (všechny nenulové násobky).

Příklad 7.12. Projektivní zobrazení se v počítačové grafice používají k vytvoření perspektivních efektů. Uvažme lineární zobrazení $F: R^3 \rightarrow R^3$ které má v kanonické bázi matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Pro $x \neq 0$ platí

$$\langle F \rangle (x, y, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{y}{x} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (7.22)$$

Zkuste si nyní představit, jak zobrazení $\langle F \rangle$ transformuje body i složitější útvary v rovině A — například čtverec s vrcholy $[1, 0]$, $[1, 1]$, $[2, 1]$, $[2, 0]$, nebo $[2, 1]$, $[2, 0]$, $[3, 1]$, $[3, 0]$. Uvědomte si také, kam toto zobrazení zobrazuje nevlastní body a naopak, které body zobrazuje na body nevlastní.

Příklad 7.13. Projektivní zobrazení používaná v praxi nemívají tak jednoduché matice, jak jsme zatím uváděli zde. Pokud například matici (7.19) upravíme tak, aby vzdálenost projekčního plátna od pozorovatele nebyla rovna jedné, ale nějakému číslu d , dostaneme matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Grafický software ovšem obvykle nepoužívá přímo matici M , ale její rozklad na součin dvou matic, $M = M_2 \cdot M_1$, z nichž každá realizuje jednodušší projektivní transformaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

Matice M_1 realizuje perspektivní skosení v prostoru A , podobně jako matice z předchozího příkladu. Projektivní zobrazení, které definuje, zobrazuje lichoběžníky určené úhlem pohledu a dvěma přímkami rovnoběžnými s osou x na obdélník (vyzkoušejte si to například na lichoběžníku s vrcholy $[1, d]$, $[2, 2d]$, $[-2, -2d]$, $[-1, -d]$). Po zobrazení bodů zobrazované scény maticí M_1 se jednoduše provádí tzv. *clipping*, neboli omezení scény na body, které leží v zorném úhlu a nejsou k pozorovateli příliš blízko, ani od něj příliš daleko.

Matice M_2 provádí již jen jednoduché kolmé promítnutí prostoru A na projekční plátno (v praxi by to bylo kolmé promítnutí trojrozměrného prostoru na rovinu obrazovky). Jak je vidět z tvaru matice, zobrazení, které realizuje, je afinní.