

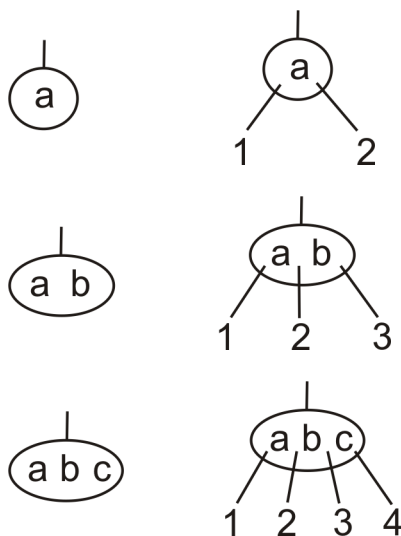
Červeno-černé stromy

Červeno-černé (dále jen ČČ) stromy jsou vyvážené binární vyhledávací stromy. Mají obdobnou strukturu jako B-stromy řádu 4.

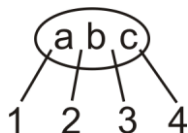
B-stromy řádu 4

B-stromy řádu 4 jsou vyvážené vyhledávací stromy s vlastnostmi:

- V každém uzlu mohou být uloženy 1-3 datové prvky.
- Každý uzel je list nebo má o 1 následníka více, než je počet prvků uložených v uzlu.



- Pro každý prvek uložený ve stromu platí pravidlo, že prvky uložené ve stejném uzlu vlevo od něho jsou menší a prvky uložené vpravo od něho jsou větší. Totéž platí pro podstromy – prvky v podstromu, který je vlevo, jsou menší a prvky v podstromu vpravo jsou větší.

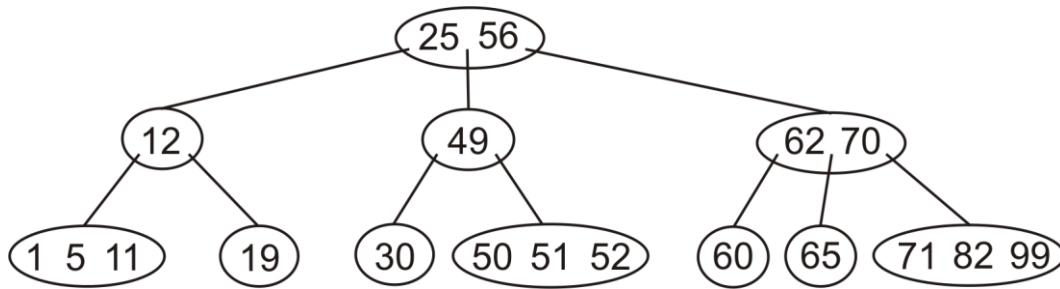


Platí: $a < b < c$

Nechť x je libovolný prvek z podstromu:	Platí:
1	$x < a$
2	$a < x < b$
3	$b < x < c$
4	$x > c$

- Všechny listy mají stejnou vzdálenost od kořene (strom je vyvážený).

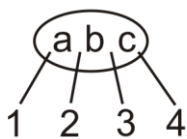
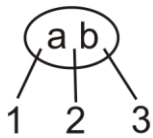
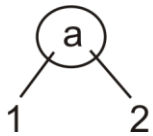
Příklad B-stromu řádu 4



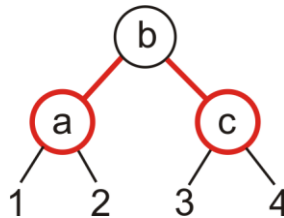
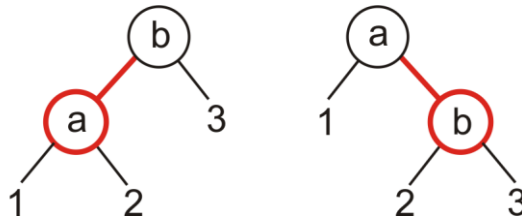
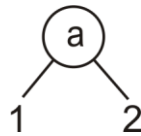
Vytvoření ČČ stromu z B-stromu

Jednotlivé uzly B-stromu nahradíme 1-3 binárními uzly. Horní z těchto uzlů bude černý uzel, uzly pod ním budou červené uzly. Uzly jsou navzájem spojeny červenými hranami.

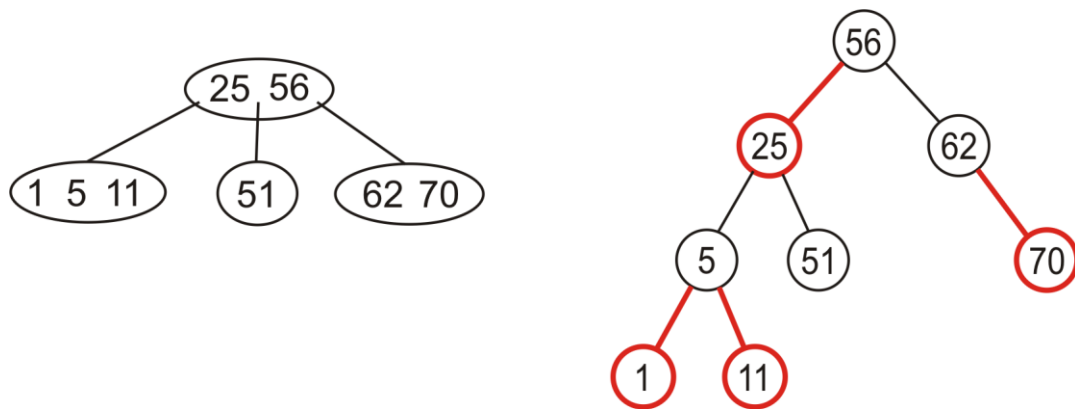
B-strom



ČČ strom



Příklad vytvoření ČČ stromu



Vlastnosti ČČ stromu:

- Kořenový uzel je vždy černý. Barva ostatních uzlů je dána barvou hrany, kterou je uzel spojen s předchůdcem.
- Mezi kořenem a libovolným listovým uzlem je stejný počet černých hran (a tím i černých uzlů).
- Ve stromu nikdy nenásledují dvě červené hrany po sobě (a tím i nikdy nenásledují dva červené uzly po sobě).
- Necht' mezi kořenem a listem je m černých hran. Pak mezi kořenem a libovolným listem je nejvýše $m+1$ červených hran.

Přidání prvku

Přidání probíhá standardním způsobem jako v běžném binárním vyhledávacím stromu.

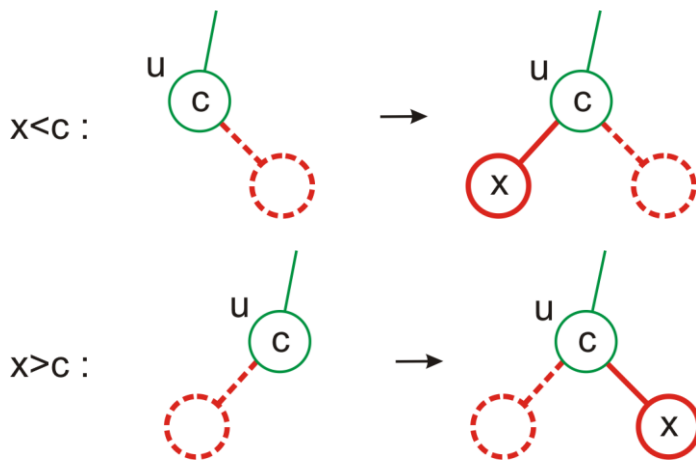
Označení:

x - přidávaný prvek

Vyhledáme prvek x ve stromu. Vyhledání může skončit třemi způsoby:

- Prvek x byl ve stromu nalezen – nelze ho znovu přidat a přidávání tím končí.
- Vyhledávání skončilo v uzlu u , ve kterém je uložen prvek c , přičemž $x < c$ a uzel u nemá levého následovníka. Vytvoříme nový uzel jako levého následovníka uzlu u a do něho dáme přidávaný prvek x .
- Vyhledávání skončilo v uzlu u s prvkem c , přičemž $x > c$ a uzel u nemá pravého následovníka. Vytvoříme pravého následovníka uzlu u a do něho dáme přidávaný prvek x .

Přidávání je tedy realizováno vytvořením nového uzlu a jeho spojením hranou s uzlem u , ve kterém skončilo vyhledávání. Vytvořený uzel bude novým listem stromu. Aby zůstala zachována podmínka, že mezi kořenem a libovolným listem byl stejný počet černých hran, musíme nový uzel spojit s uzlem u červenou hranou a nový uzel bude červený uzel.



Pokud uzel u je černý uzel, operace přidání je ukončena.

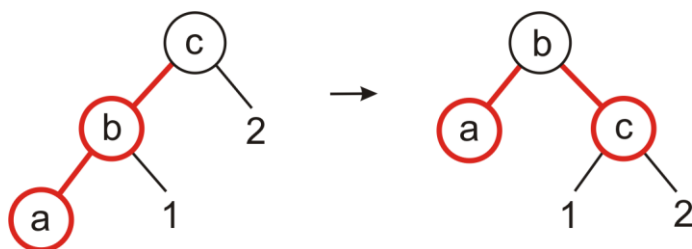
Jestliže ale uzel u je červený uzel, jsou nyní ve stromu dvě červené hrany (dva červené uzly) po sobě.

Odstranění dvou červených uzlů po sobě

K tomu používáme podle situace dva typy transformací:

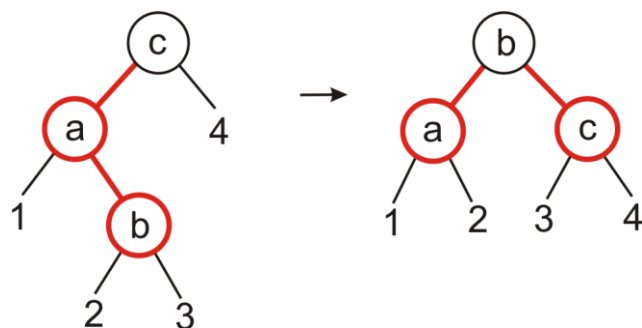
- rotace
 - výměna barev
- Horní z dvojice po sobě následujících červených uzlů nemá červeného sourozence – jednoduchá nebo dvojitá rotace.

Jednoduchá rotace:



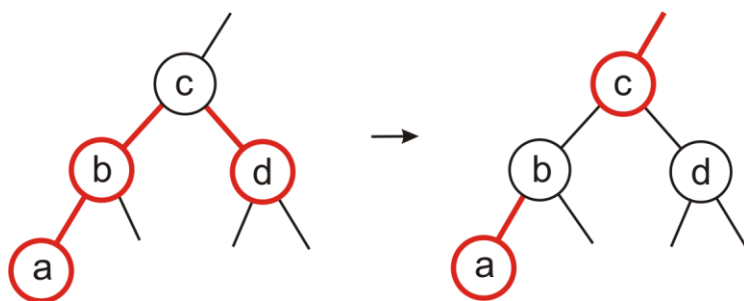
+ symetrický případ

Dvojitá rotace:

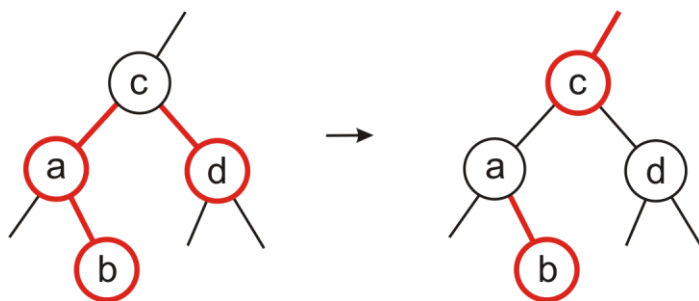


+ symetrický případ

- Horní z dvojice červených uzlů má červeného sourozence. Změníme jejich obarvení na černou barvu a barvu jejich předchůdce, pokud to není kořen, změníme na červenou barvu.

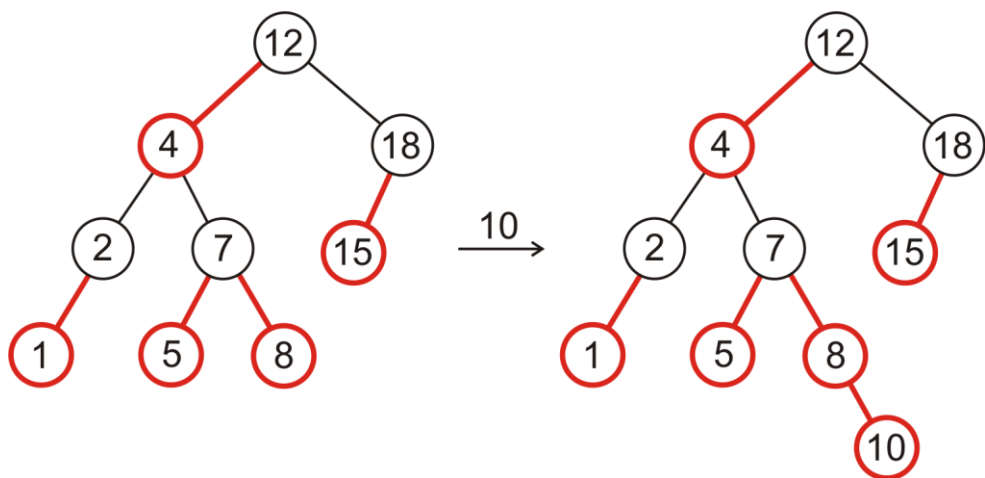
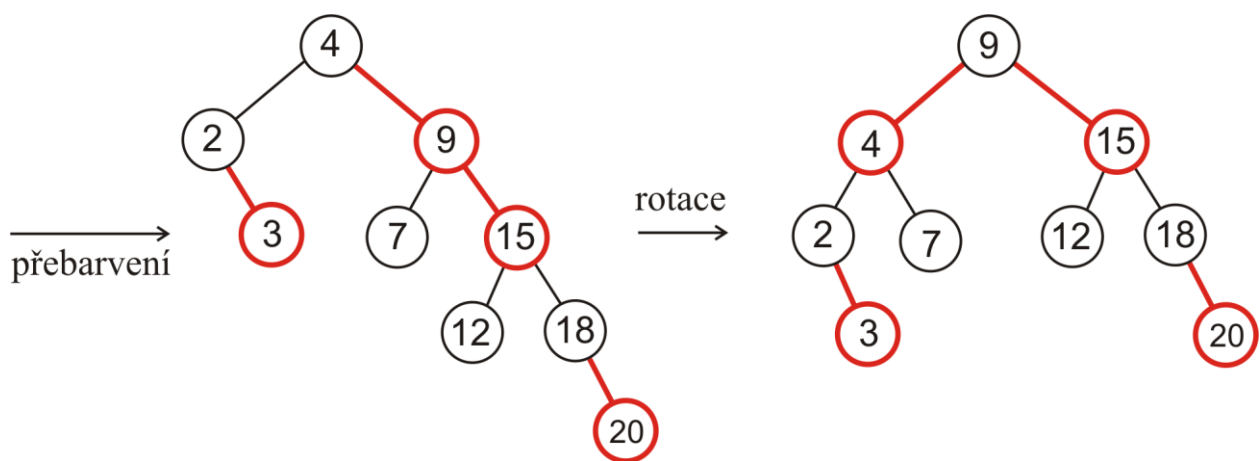
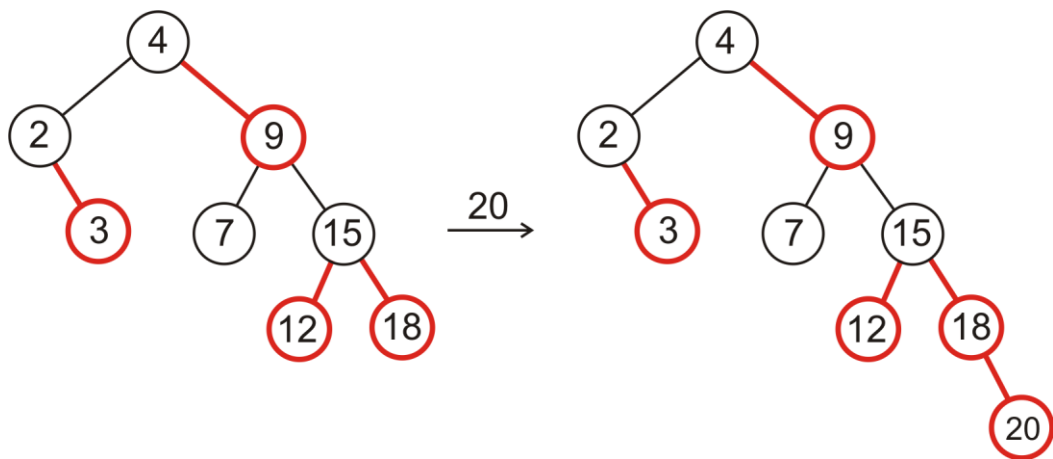


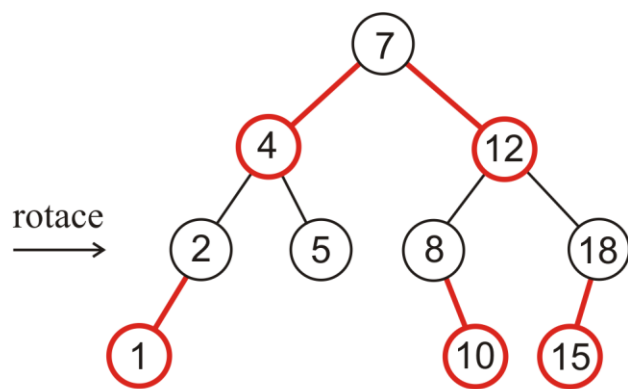
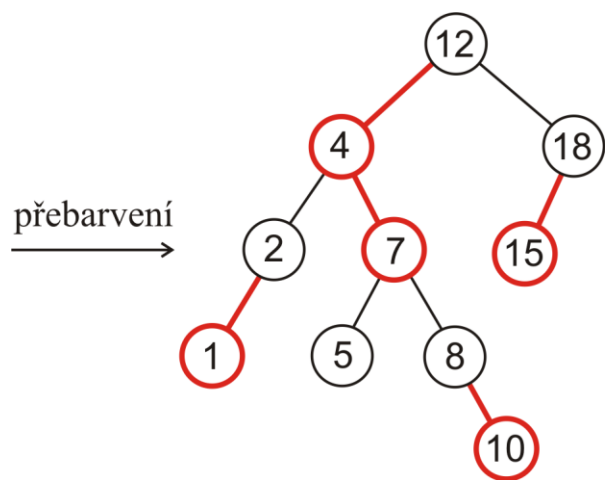
+ symetrický případ



+ symetrický případ

Příklady





Odebrání prvku

Označení:

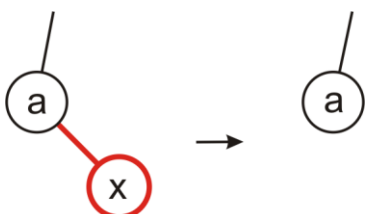
x - odebíraný prvek

1. Vyhledáme prvek x ve stromu. Vyhledání může skončit třemi způsoby:

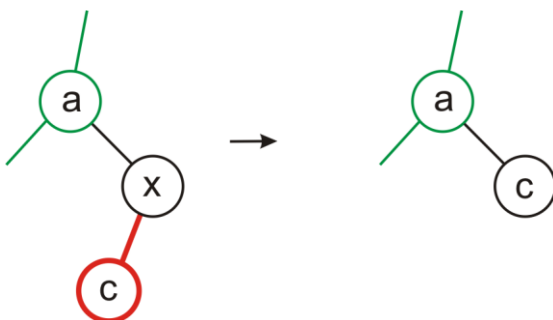
- Prvek x nebyl ve stromu nalezen – není co odebrat.
- Prvek byl nalezen v uzlu v , který má nejvýše jednoho následníka. Tento uzel zrušíme.
- Prvek byl nalezen v uzlu v , který má dva následníky. V tomto případě do uzlu v přesuneme buďto nejpravější (největší) prvek z jeho levého podstromu anebo nejlevější (nejmenší) prvek z jeho pravého podstromu a uzel, z kterého byl prvek přesunut, zrušíme.

2. Další postup závisí na tom, jakou barvu má rušený uzel.

- Rušený uzel má červenou barvu. V tomto případě zrušení uzlu neovlivní počet černých uzlů a odebrání je ukončeno.

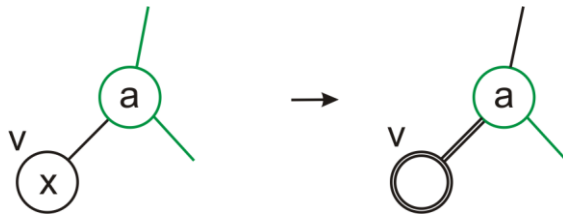


- Rušený uzel má černou barvu a má červeného následníka. Následníka přebarvíme na černou barvu. Tím počet černých uzlů zůstane zachován a odebrání je ukončeno.



Zelené obarvení znamená, že hrana nebo uzel může mít černou nebo červenou barvu.

- Rušený uzel v má černou barvu a nemá červeného následníka. Uzel v obarvíme jako dvojitý černý. Toto obarvení vyjadřuje, že zrušením uzlu by nastal deficit černé barvy na cestách od kořenu k listům, na který tento uzel leží.



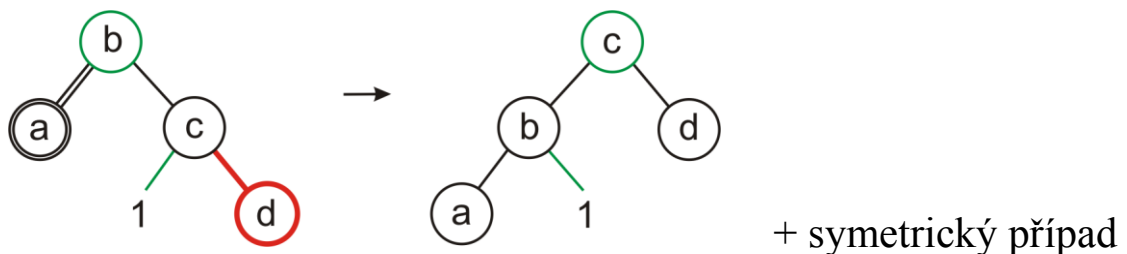
Další postup je transformacemi dosáhnout, aby ve stromu nebyl žádný uzel s dvojitým černým obarvením. Přitom u uzlu, který chceme zrušit, lze při odstranění dvojitého černého obarvení ho ze stromu odstranit.

Odstranění dvojitého černého obarvení uzlu

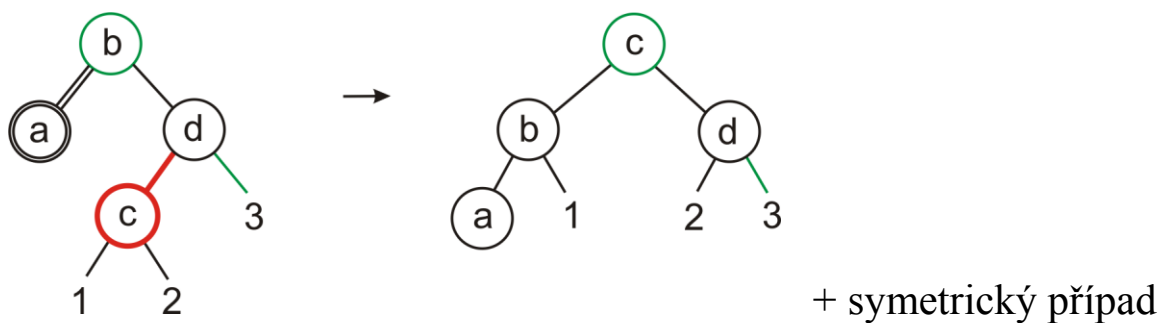
K tomu používáme podle situace dva typy transformací:

- rotace
 - výměna barev
- Sourozenec uzlu s dvojitým černým obarvením je černý uzel a tento má přitom aspoň jednoho červeného následníka – jednoduchá nebo dvojitá rotace.

Jednoduchá rotace:

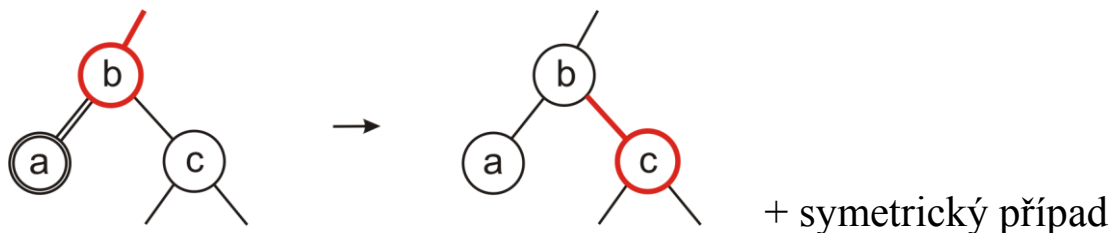


Dvojitá rotace:

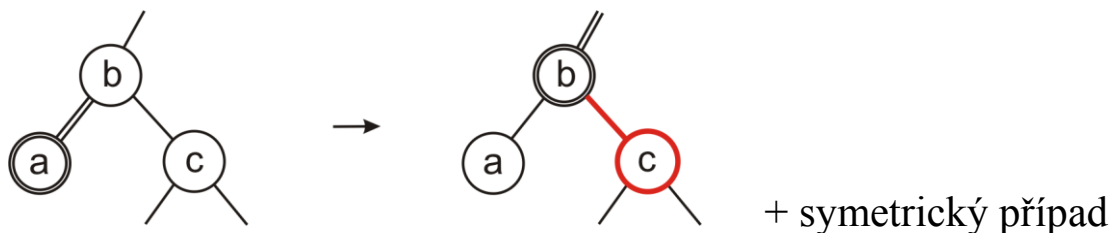


- Sourozenec uzlu v s dvojitým černým obarvením je černý uzel a tento přitom nemá žádného červeného následníka. K předchůdci uzlu v přidáme jedno černé obarvení.

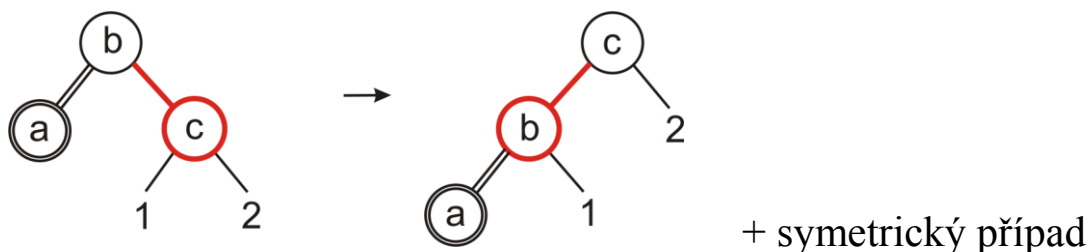
Předchůdce uzlu v je červený uzel – nyní bude černý uzel (a barva černého sourozence se změní na červenou):



Předchůdce uzlu v je černý uzel. Pokud to není kořen, bude mít nyní dvojité černé obarvení (a barva černého sourozence se změní na červenou):

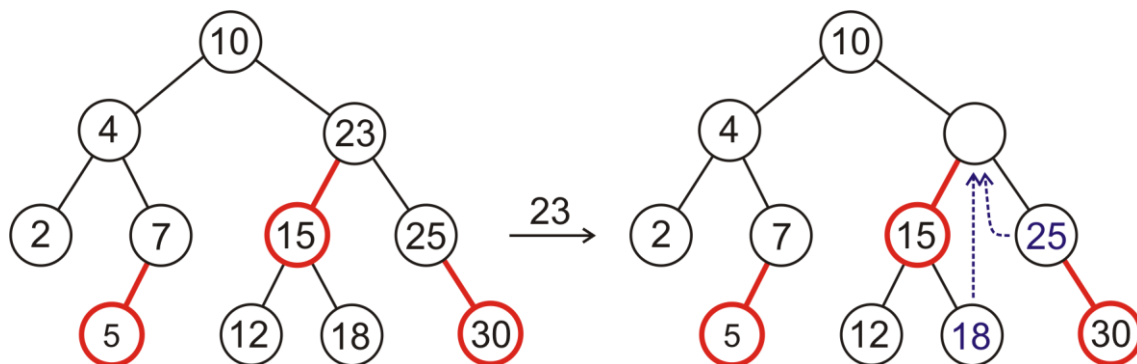


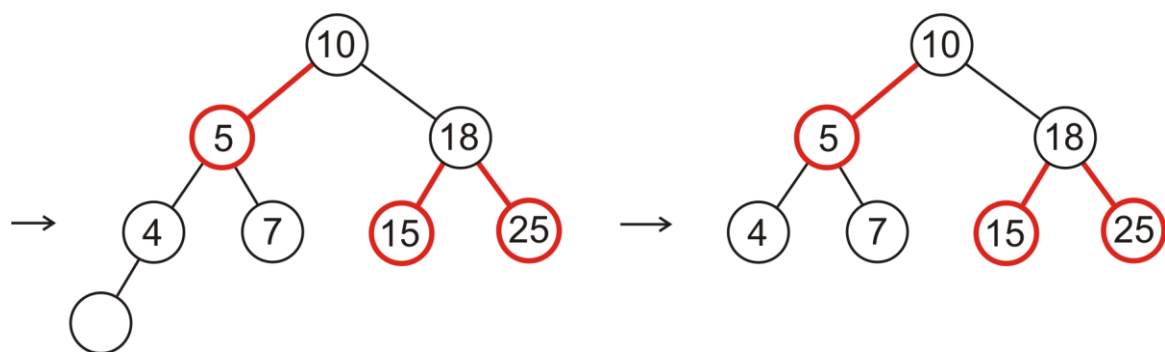
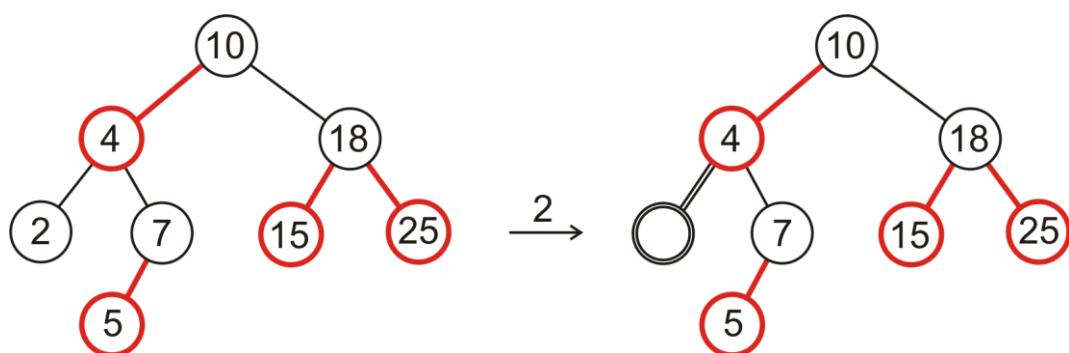
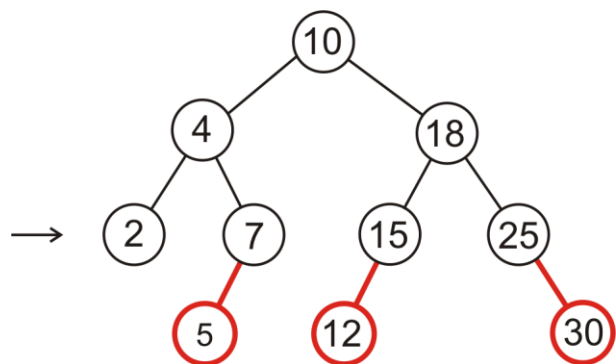
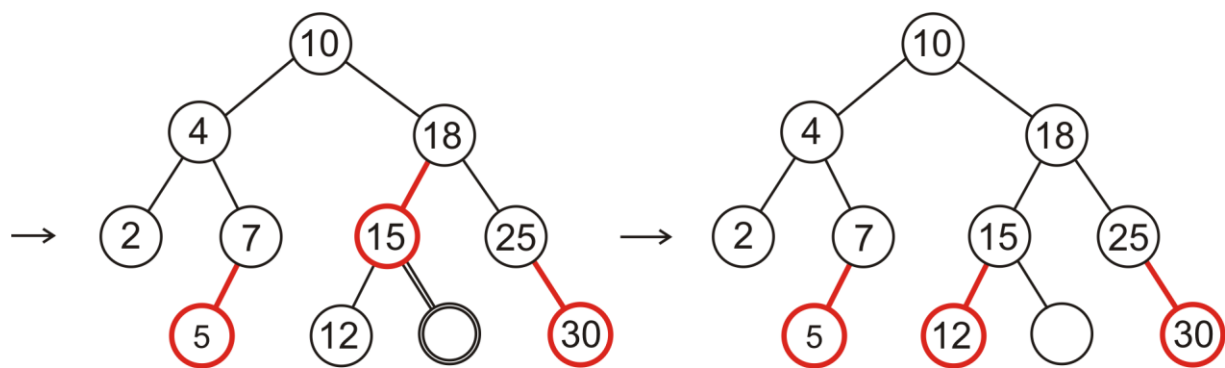
- Sourozenec uzlu v s dvojitým černým obarvením je červený uzel – jednoduchá rotace.



Původní levý následník uzlu c (na obrázku označen číslem 1) musel mít černou barvu. Tento je nyní černým sourozencem uzlu s dvojitým černým obarvením – můžeme nyní použít některou z předchozích transformací (rotaci nebo přebarvení).

Příklady





Časová složitost operací

Časová složitost operací je závislá na výšce červeno-černého stromu. Z popisu vlastností červeno-černého stromu uvedených na začátku popisu těchto stromů plyne, že výška je maximálně $2h + 1$, kde h je výška B-stromu řádu 4, ze kterého lze červeno-černý strom odvodit. A výška B-stromu logaritmicky závisí na počtu prvků v něm uložených. Odtud plyne, že i výška červeno-černého stromu logaritmicky závisí na počtu prvků v něm uložených. Tím složitost operací v červeno-černém stromu je opět $\Theta(\ln(n))$.