8.1 Náhodné vektory

► **Příklad 8.1.** Určete konstantu c tak, aby funkce f byla sdruženým rozdělením pravděpodobností náhodných veličin X a Y.

1. $f(x, y) = cxy$ pro $x = 1, 2, 3,\ y = 1, 2, 3$ [1/36]
2. $f(x, y) = c|x - y|$ pro $x = -2, 0, 2,\ y = -2, 3$ [1/15]

▷ **Příklad 8.1.** V krabici s pralinkami zbylo posledních 8 kusů, z toho 3 s hořkou čokoládou, 2 s mléčnou a 3 s bílou. Náhodně vybereme 2 pralinky. Nechť X je počet vybraných pralinek s hořkou čokoládou a Y je počet pralinek s mléčnou čokoládou. Najděte sdružené rozdělení pravděpodobnosti $f(x, y)$. Počet všech možných dvojic, jak můžeme pralinky vybrat je $\binom{8}{2}$. Proto například:

$$f(1, 0) = P(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}.$$

A obecně tedy:

$$f(x, y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}.$$

Určete $f(x, y)$ pomocí R. Výsledky uložte do data.framu, který bude obsahovat tři sloupce: X, Y, probs.

```
> S
  X Y      probs
1 0 0 0.10714286
2 0 1 0.21428571
3 0 2 0.03571429
4 1 0 0.32142857
5 1 1 0.21428571
6 2 0 0.10714286
```

Určete marginální rozdělení pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu X a Y. Pro náhodnou veličinu X dostáváme

$$P_X(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0, y) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2) = \frac{5}{14}.$$

Obdobně bychom dostali $P_X(1) = \frac{15}{28}$ a $P_X(2) = \frac{3}{28}$. Marginální rozdělení pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu Y se určí obdobně. V R je určení marginálních rozdělení jednoduché:

```
> marginal(S,vars="X")
  X     probs
1 0 0.3571429
2 1 0.5357143
3 2 0.1071429
> marginal(S,vars="Y")
  Y      probs
1 0 0.53571429
2 1 0.42857143
3 2 0.03571429
```

Výsledky můžeme přehledně shrnout do tabulky 8.1.

$f_{X,Y}(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$f_X(x)$
$x=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$x=1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{15}{28}$
$x=2$	$\frac{3}{28}$			$\frac{3}{28}$
$f_Y(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

Tabulka 1: Sdružené a marginální rozdělení pro náhodné veličiny X a Y

Určete podmíněnou distribuci náhodné veličiny X při $Y = 1$. Chceme určit

$$f_{X|\{Y=1\}}(x) = P(\{X = x\}|\{Y = 1\}) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)}.$$

Nejprve určíme $f_Y(1)$:

$$f_Y(1) = \sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} = \frac{3}{7}$$

Tedy dostáváme $f_{X|\{Y=1\}}(x) = \frac{7}{3} f_{X,Y}(x,1)$. Po dosazení:

$$f_{X|\{Y=1\}}(0) = P(\{X = 0\}|\{Y = 1\}) = \frac{7}{3}\frac{3}{14} = \frac{1}{2}$$

$$f_{X|\{Y=1\}}(1) = P(\{X = 1\}|\{Y = 1\}) = \frac{7}{3}\frac{3}{14} = \frac{1}{2}$$

$$f_{X|\{Y=1\}}(2) = P(\{X = 2\}|\{Y = 1\}) = \frac{7}{3} \cdot 0 = 0$$

Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé? Aby tomu tak bylo, musí platit pro každé $x \in \{0,1,2\}$ a $y \in \{0,1,2\}$: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$. Ověřte, že například pro $x = 0$, $y = 1$ rovnost neplatí.

► **Příklad 8.2.** Uvažujte náhodné veličiny X, Y z předchozího příkladu a náhodnou veličnu $Z = XY$. Určete střední hodnotu náhodných veličin X, Y, Z. $[3/4; 1/2; 3/14]$

► **Příklad 8.3.** Za použití výsledků z předchozího příkladu určete kovarianci náhodných veličin X a Y. $[-9/56]$

► **Příklad 8.4.** Nechť náhodná veličina X určuje změnu teploty a náhodná veličina Y je relativní posunutí spektra, kterou vyzařuje určitá elementární částice. Sdružené rozdělení pravděpodobnosti je dáno následovně:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 10xy^2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

1. Určete marginální hustoty pro náhodné veličiny X, Y.

2. Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|\{X=x\}}(y)$. $[\frac{3y^2}{(1-x^3)}]$

3. Určete pravděpodobnost, že se spektrum posune o více než $\frac{1}{2}$ za podmínky, že teplota vzrostla o 0.25 jednotek. $[8/9]$

► **Příklad 8.5.** Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry μ_1, μ_2. Najděte rozdělení pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu $Y = X_1 + X_2$. $[Y \sim Po(\mu_1 + \mu_2)]$

8.2 Generování (pseudo)náhodných čísel - pokračování

► **Příklad 8.6.** Pomocí věty o inverzní transformaci vygenerujte (pseudo)náhodná čísla z Cauchyho distribuce s parametry location=1, scale=1, tj. z Cauchy(0,1), která je dána hustotou $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Nakreslete histogram vygenerovaných bodů a srovnejte s Cauchyho rozdělením.

► **Příklad 8.7.** Implementujte generátor, který bude generovat (pseudo)náhodná čísla z Binomického rozdělení s parametry $n = 10$, $p = 0.3$. Vykreslete histogram pro $N = 1000$. Srovnejte relativní frekvence výskytů hodnot s pravděpodobnostní funkcí pro dané rozdělení. Určete výběrový průměr a výběrový rozptyl a srovnejte se střední hodnotou a rozptylem.

► **Příklad 8.8.** Implementujte genrátor, který bude generovat (pseudo)náhodná čísla z Beta rozdělení s parametry shape1=2 a shape2=5.

Reference

[1] Kerns G. J.: Elementary Probability on Finite Sample Spaces, 2009, reference manual package prob, available from: http://CRAN.R-project.org/package=prob

[2] Kerns G. J: Introduction to Probability and Statistics Using R, First Edition http://cran.r-project.org/web/packages/IPSUR/vignettes/IPSUR.pdf

[3] Kenneth Baclawski: Introduction to Probability with R *Chapman and Hall/CRC*, ISBN 978-1420065213.

[4] Maria L. Rizzo: Statistical Computing with R *Chapman and Hall/CRC*, ISBN: 978-1584885450

[5] Walpole R. E, Myers R., Myers S, Ye K. : Probability & Statistics for Engineers & Scientists *Prentice Hall*, ISBN:0-13-098469-8