Pravděpodobnost a statistika

Bodové odhady a intervaly spolehlivosti

Vilém Vychodil

KMI/PRAS, Přednáška 10

Vytvořeno v rámci projektu 2963/2011 FRVŠ

Přednáška 10: Přehled

1. Úvod do teorie odhadu:
   - statistická inference, populace, parametr, výběr, odhad parametru,
   - bodové odhady, intervalové odhady,
   - náhodné výběry, statistiky, výběrová rozdělení.
2. Bodové odhady:
   - bodové odhady parametrických funkcí,
   - nestranné bodové odhady, zkreslení,
   - nestranné odhady pro střední hodnoty a rozptyl,
   - metoda momentů, metoda maximálně věrohodného odhadu,
   - Weibullovo rozdělení.
3. Intervaly spolehlivosti:
   - interval spolehlivosti, hladina spolehlivosti (konfidence),
   - kritické hodnoty standardního normálního rozdělení,
   - intervalu spolehlivosti pro střední hodnoty a rozptyly, Studentovo t-rozdělení,
   - velikost intervalů spolehlivosti, délka náhodného výběru.

Statistická inference

Populace:

- naivní pojem *základní populace* (Přednáška 1);
- při statistickém usuzování: **populace** = náhodná veličina s jejím rozložením.

Základní úkol statistické inference:

- zajímáme se o **parametr** = číselnou hodnotu, jež platí pro celou populaci (například: střední hodnota μ_X, rozptyl σ_X^2, hodnota p pro $b(n,p), \ldots$);
- používáme **výběr** (z populace) pro odhad $\mu_X, \sigma_X^2, p, \ldots$;
- **odhad parametru** = získání číselné hodnoty nebo intervalu hodnot z výběru
  cíl: odhad by měl být „dost blízko“ skutečné hodnotě parametru.

Obvykle rozlišujeme dva druhy odhadů:

- **bodové odhady** (angl.: *point estimates*) = odhadem je *jedna hodnota*,
- **intervalové odhady** (angl.: *interval estimates*) = odhadem je *interval hodnot*.

Náhodný výběr

Definice (Náhodný výběr, angl.: *random sample*)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a n nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_n$ v prostoru $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, které mají stejné rozdělení pravděpodobnosti, to jest $P(\{X_i \in A\}) = P(\{X_j \in A\})$ pro každé i, j a $A \in \mathcal{B}$. Označme toto rozdělení P_X. Pak náhodný vektor $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definovaný $\big(\boldsymbol{X}(\omega)\big)(i) = X_i(\omega)$ se nazývá **náhodný výběr** z rozdělení P_X.

Poznámky:

- Náhodný výběr $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ značíme $\boldsymbol{X} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$, nebo jen $X_1, \dots, X_n$;
- posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením;
- abstrakce pojmu *výběr* (Přednáška 1):
  - místo konkrétních hodnot ve výběru máme náhodné veličiny;
  - má smysl uvažovat rozdělení $P_{\boldsymbol{X}}(A) = P(\{\boldsymbol{X} \in A\})$.
- dále se budeme zabývat *statistikami*: funkcemi náhodných výběrů.

Statistiky a výběrová rozdělení

Definice (Statistika a výběrové rozdělení)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, náhodný výběr $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ a Borelovskou funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pak náhodnou veličinu $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}$ definovanou $\vartheta = g(\boldsymbol{X})$ nazveme (**výběrová**) **statistika** nebo **výběrová charakteristika** (angl.: *sample statistics*) náhodného výběru $\boldsymbol{X}$. Rozdělení pravděpodobnosti $P_\vartheta : \mathcal{B} \to [0, 1]$ veličiny ϑ nazýváme **výběrové rozdělení**, angl.: *sampling distribution*.

Poznámky:

- Z definice složené funkce pro statistiku ϑ máme $\vartheta(\omega) = g(\boldsymbol{X}(\omega)) \in \mathbb{R}$;
- z definice rozdělení pravděpodobnosti: $P_\vartheta(A) = P(\{g(\boldsymbol{X}) \in A\})$;
- Pro konkrétní výběr $x_1, \ldots, x_n$ je $g(x_1, \ldots, x_n)$ konkrétní hodnota;
- Například: $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$.

Bodové odhady parametrických funkcí

Definice (Bodový odhad)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a náhodný výběr $\boldsymbol{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ z rozdělení, které závisí na neznámých parametrech $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. Pak **bodový odhad** (angl.: *point estimate*) parametrické funkce $\tau(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ na základě $\boldsymbol{X}$ je libovolná statistika $\vartheta = g(\boldsymbol{X})$, kde g nezávisí na $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$.

Poznámky:

- výše definovaný pojem sám o sobě nic neříká o „kvalitě odhadu“, to jest o tom, jak jsou hodnoty dané odhadem blízko $\tau(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$;
- nejčastěji se zajímáme o jediný parametr Θ a parametrická funkce τ je identita:
  - to jest pokud $\tau(\Theta) = \Theta$,
  - potom bodový odhad značíme $\widehat{\Theta}$,
  - například: pro parametry μ a σ^2 jsou jejich bodové odhady značeny $\widehat{\mu}$ a $\widehat{\sigma^2}$.

Nestranné bodové odhady

Bodové odhady, jejichž střední hodnoty jsou rovny hodnotám parametrických funkcí:

Definice (Nestranný / nezkreslený / nevychýlený bodový odhad)

Mějme pravděpodobnostní prostor $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ a náhodný výběr $\boldsymbol{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ z rozdělení, které závisí na neznámých parametrech $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. Bodový odhad $\vartheta = g(\boldsymbol{X})$ parametrické funkce $\tau(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ se nazývá **nestranný bodový odhad** (angl.: *unbiased estimate*), pokud platí $E(\vartheta) = \tau(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$. Rozdíl hodnot $E(\vartheta) - \tau(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ se nazývá **zkreslení** nebo **vychýlení** (angl.: *bias*).

Poznámky:

- Parametrická funkce $\tau(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ má obecně nekonečně mnoho odhadů;
- nestranný odhad = odhad, pro který klademe omezení na střední hodnotu;

Příklad (Nestranný odhad parametru p pro binomické rozdělení)

Problém: Výrobce automobilů testuje odolnost nárazníků vyhodnocením výsledků série n kontrolovaných srážek nárazníku s umělou překážkou. Výsledkem každého pokusu je *úspěch* (nárazník odolal) nebo *neúspěch* (neodolal).

Úkol: *Uvažujme náhodnou veličinu X označující počet jednotlivých pokusů končících úspěchem. Stanovte nestranný bodový odhad pravděpodobnosti úspěchu jednotlivého testu.*

Řešení: Každý jednotlivý pokus X_i má alternativní rozdělení s parametrem p. Počet (nezávislých) pokusů končících úspěchem je potom $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, přitom X má binomické rozdělení $b(n, p)$. Dále platí:

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p.$$

Závěr: Pokud má X rozdělení $b(n, p)$, potom je $\boxed{\widehat{p} = \frac{X}{n}}$ nestranný odhad p.

Nestranné bodové odhady pro střední hodnotu a rozptyl

Plyne z toho, co víme o střední hodnotě $\overline{X}$:

Věta (Nestranný bodový odhad pro střední hodnotu)

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$, kde všechny X_i jsou náhodné veličiny se střední hodnotou μ. Potom je $\overline{X}$ nestranný bodový odhad pro μ.

Dále máme:

Věta (Nestranný bodový odhad pro rozptyl)

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$, kde všechny X_i jsou náhodné veličiny se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Potom je

$$\widehat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

nestranný bodový odhad pro σ^2.

Důkaz (začátek).

Nejprve prokážeme:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)\\
&= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\left(n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}(n\overline{X})+n\overline{X}^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2.
\end{aligned}$$

Důkaz (pokračování).

S využitím předchozího a faktu, že $\sigma_Y^2 - E(Y)^2 = E(Y^2)$, máme:

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = E\left(\frac{1}{n-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\cdot\overline{X}^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - n\cdot E(\overline{X}^2)\right) = \frac{1}{n-1}\cdot\left(n\cdot E(X_1^2) - n\cdot E(\overline{X}^2)\right) \\
&= \frac{n}{n-1}\cdot\left(E(X_1^2) - E(\overline{X}^2)\right) = \frac{n}{n-1}\cdot\left(\sigma^2 - E(X_1)^2 - (\sigma_{\overline{X}}^2 - E(\overline{X})^2)\right)
\end{aligned}
$$

Důkaz (dokončení).

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\sigma^2 - E(X_1)^2 - \left(\sigma^2_{\overline{X}} - E(\overline{X})^2\right)\right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\sigma^2 - \mu^2 - \left(\sigma^2_{\overline{X}} - \mu^2_{\overline{X}}\right)\right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\sigma^2 - \mu^2 - \left(\sigma^2_{\overline{X}} - \mu^2\right)\right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\sigma^2 - \sigma^2_{\overline{X}}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n \cdot \sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n \cdot \sigma^2 - \sigma^2}{n}\right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2\right) = \sigma^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Momenty náhodných výběrů

Budeme se zabývat tím, jak stanovit (nestranné) bodové odhady.

Potřebujeme nový pojem – výběrový moment.

Připomeňme: r-tý moment X je očekávaná hodnota $E(X^r)$.

Definice (r-tý moment náhodného výběru)

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$, pak **r-tý moment náhodného výběru**, angl.: *rth sample moment* je náhodná veličina

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^r.$$

Poznámka: pokud rozdělení závisí na parametrech $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$, pak momenty $E(X^r)$ rovněž závisí na těchto parametrech; momenty náhodných výběrů však nikoliv.

Získání bodových odhadů: metoda momentů

Princip metody momentů

Mějme náhodný výběr $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ z rozdělení, které závisí na neznámých parametrech $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. Potom momentové odhady $\widehat{\Theta}_1, \ldots, \widehat{\Theta}_k$ pro parametry $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ získáme jako řešení soustavy k rovnic, ve kterých klademe do rovnosti i-té momenty X a i-té moment náhodného výběru.

Vede na soustavy rovnic ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^1 &= E\big(X^1\big), \\
&\vdots \\
\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^k &= E\big(X^k\big).
\end{aligned}$$

Příklad (Stanovení bodových odhadů pro parametry rozdělení Γ)

Funkce hustoty rozdělení Γ: $f_X(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\theta}}$ (Přednáška 7).

Úkol: *Stanovte bodové odhady pro parametry*

- α (*počet změn*),
- θ (*střední doba čekání na jednu změnu*).

Řešení: První a druhý moment veličiny X mají následující tvary.

$$E(X^1) = \alpha \cdot \theta,$$
$$E(X^2) = \theta^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot \alpha.$$

Použitím metody momentů tedy stačí stanovit α a θ z rovnic

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^1 = E(X^1) = \alpha \cdot \theta, \qquad \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) = \theta^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot \alpha.$$

Příklad (Stanovení bodových odhadů pro parametry rozdělení Γ)

Použitím metody momentů stanovíme odhady pro parametry α a θ z rovnic

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^1 = \alpha \cdot \theta,$$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \theta^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot \alpha.$$

Vyjádřením bodových odhadů $\widehat{\alpha}$ a $\widehat{\theta}$ dostáváme:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2}, \qquad \widehat{\theta} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2}{\overline{X}}.$$

Získání BO: princip maximálně věrohodného odhadu

Mějme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ z rozdělení, které závisí na neznámých parametrech $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$. Potom:

- sdružená pravděp. funkce (nebo funkce hustoty) $f_{\boldsymbol{X}}$ závisí na $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$;
- pro libovolný výběr $y_1, \ldots, y_n$ lze uvažovat funkci $L_{x_1,\ldots,x_n}$ v proměnných $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ definovanou $L_{x_1,\ldots,x_n}(\Theta_1, \ldots, \Theta_k) = f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \Theta_1, \ldots, \Theta_k)$.

Definice (Maximálně věrohodný odhad)

Pokud existují funkce $g_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolný výběr $x_1, \ldots, x_n$ je

$$\langle g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \rangle$$

bodem maxima funkce $L_{x_1,\ldots,x_n}$, pak se statistiky $\widehat{\Theta}_1 = g_1(\boldsymbol{X}), \ldots, \widehat{\Theta}_k = g_k(\boldsymbol{X})$ nazývají **maximálně věrohodné odhady** (angl.: *maximum likelihood estimators*) pro parametry $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$.

Příklad (Maximálně věrohodný odhad parametru θ)

Uvažujme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ z exponenciálního rozdělení s parametrem $\theta = \lambda^{-1}$. Z nezávislosti $X_1, \ldots, X_n$ dostáváme, že

$$L_{x_1,\ldots,x_n}(\lambda) = f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \exp\Big(-\lambda \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i\Big).$$

Zlogaritmováním $f_{\boldsymbol{X}}$ dostáváme $\ln\big(f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \lambda)\big) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$.
Využitím faktu, že $f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \lambda)$ má stejné extrémy jako $\ln\big(f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \lambda)\big)$ vyjádříme bod maxima

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}, \text{ to jest } \widehat{\lambda} = \boxed{\frac{1}{\overline{X}}}.$$

Poznámka (Interpretace hodnot $L_{x_1,\ldots,x_n}(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$)

Pokud je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pak je $L_{x_1,\ldots,x_n}(\Theta_1, \ldots, \Theta_k)$ je pravděpodobnost, že $x_1, \ldots, x_n$ vzniklo výběrem při použití parametrů $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ (chceme maximalizovat).

Příklad (Maximálně věrohodné odhad parametrů $N(\mu, \sigma^2)$)

Pokud je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, pak maximálně věrohodné odhady parametrů μ a σ^2 jsou

$$\widehat{\mu} = \overline{X}, \qquad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Poznámka (Maximálně verohodný odhad není obecně nestranný)

V předchozím případě platí

maximálně věrohodný odhad $\neq$ nestranný odhad ,

protože nestranný odhad parametru σ^2 je

$$\widehat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Weibullovo rozdělení

Definice (Náhodná veličina s Weibullovým rozdělením)

Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má **Weibullovo rozdělení** pokud existují reálná čísla $\lambda > 0$ a $k > 0$ tak, že f_X je ve tvaru

$$f_X(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \cdot \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \qquad \text{pokud } x \geq 0,$$

a $f_X(x) = 0$ jinak.

Poznámky:

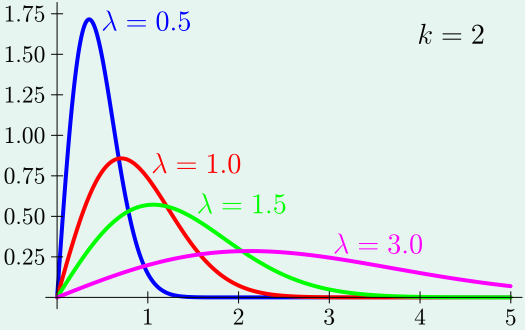
- Parametry λ a k určují škálu a tvar ($+$ někdy se zavádí posunutí θ);
- pro $k = 1$ přejde Weibullovo rozdělení v exponenciální rozdělení;
- pro $k = 3.4$ je Weibullovo rozdělení zhruba podobné normálnímu rozdělení;
- využívá se v aplikacích pro *analýzu životnosti* komponent.

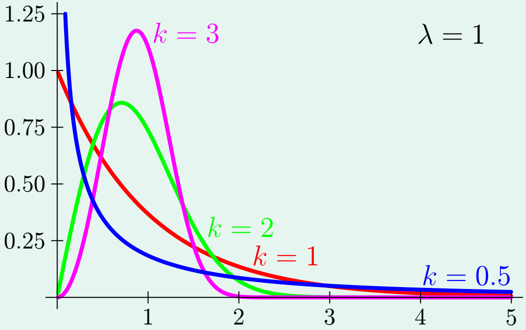
Příklad (Příklady f_X pro Weibullovo rozdělení)

Weibullovo rozdělení lze použít pro modelování **poměru selhání**, které

1. se v čase snižuje (pro $k < 1$); nebo
2. je neměnné v čase (pro $k = 1$); nebo
3. se v čase zvyšuje (pro $k > 1$).

Příklady funkcí hustoty Weibullova rozdělení:





Příklad (Maximálně věrohodný odhad parametrů Weibullova rozdělení)

Problém: Máme výběr $x_1, \ldots, x_n$ zaznamenávající n časů životnosti, po kterých selhala každá z n nezávislých součástek stejného typu.

Úkol: *Předpokládejte, že výběr $x_1, \ldots, x_n$ pochází z Weibullova rozdělení a metodou maximálně věrohodných odhadů stanovte jeho parametry.*

Řešení: Sdružená funkce hustoty f_{vecX} je ve tvaru:

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \lambda, k) = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k \right) \cdot \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{k-1} \right).$$

Hledáme proto řešení $\widehat{\lambda}$ a $\widehat{k}$ následujících rovnic:

$$\ln\left(\frac{\partial f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \lambda, k)}{\partial \lambda} \right) = 0, \qquad \ln\left(\frac{\partial f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n; \lambda, k)}{\partial k} \right) = 0.$$

Analytické řešení je komplikované (používají se **numerické metody**).

Příklad (Stanovení parametrů Weibullova rozdělení na základě výběru)

Problém: Uvažujme následující výběr (životnost komponenty v hodinách):

$$x_1 = 92,\ x_2 = 35,\ x_3 = 14,\ x_4 = 123,\ x_5 = 52,\ x_6 = 77\,.$$

Úkol: *Metodou maximálně věrohodného odhadu stanovte parametry Weibullova rozdělení, ze kterého výběr pochází. Poté stanovte pravděpodobnost, že náhodně zvolená komponenta vydrží běžet alespoň* 15 *hodin.*

Numerickým řešením soustavy dvou nelineárních rovnic pro $x_1, \ldots, x_6$ dostáváme:

$$\widehat{\lambda} \approx 73.6935\,, \qquad \widehat{k} \approx 1.8539\,.$$

To znamená, že

$$P(\{X \geq 15\}) = 1 - P(\{X < 15\}) = e^{-(\frac{15}{\lambda})^k} = e^{-(\frac{15}{73.6935})^{1.8539}} \approx 0.9490.$$

Pravděpodobnost, že součástka vydrží alespoň 15 hodin je 0.94.

Intervaly spolehlivosti: Motivace

Problémy s bodovými odhady:

- bodový odhad je (jediné) číslo
- neposkytuje informaci o *spolehlivosti odhadu*
  (to jest o pravděpodobnosti, že odhad je blízko skutečné hodnotě parametru)
- typická otázka: „Jak blízko je $\overline{X}$ (nestranný odhad) hodnotě μ?“

Řešení:

- uvažujeme *interval pravděpodobných hodnot* místo jediné hodnoty,
- **bodové odhady** $\longmapsto$ **intervalové odhady**.

Hlavní myšlenka:

1. zvolíme **hladinu spolehlivosti** (danou v procentech);
2. na základě znalosti rozdělení výběrové statistiky stanovíme interval $[a, b]$ obsahující skutečnou hodnotu parametru (například μ_X) s danou spolehlivostí.

Intervaly spolehlivosti

Definice (Interval spolehlivosti / konfidenční interval)

Mějme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ z rozdělení, které závisí na neznámém parametru $\Theta \in \mathbb{R}$ a uvažujme číslo $\alpha \in [0, 1]$. Pokud jsou $g(\boldsymbol{X})$ a $h(\boldsymbol{X})$ statistiky, pro které platí

$$P\big(\{g(\boldsymbol{X}) \leq \Theta \leq h(\boldsymbol{X})\}\big) = 1 - \alpha,$$

potom se $\big(g(\boldsymbol{X}), h(\boldsymbol{X})\big)$ nazývá **$100(1 - \alpha)\%$ interval spolehlivosti** nebo též konfidenční interval (angl.: *confidence interval*). Číslo $1 - \alpha$ (případně $100(1 - \alpha)\%$) se nazývá **hladina spolehlivosti** nebo též **konfidence**, angl.: *confidence coefficient*.

Poznámka:

- $P\big(\{g(\boldsymbol{X}) \leq \Theta \leq h(\boldsymbol{X})\}\big) = P(\{g(\boldsymbol{X}) \leq \Theta\} \cap \{\Theta \leq h(\boldsymbol{X})\})$, to jest $\{g(\boldsymbol{X}) \leq \Theta \leq h(\boldsymbol{X})\}$ je dobře definovaný jev;
- Intervaly spolehlivosti nejsou dány jednoznačně (snaha najít nejkratší).

Vlastnosti intervalů spolehlivosti

Typické hodnoty hladiny spolehlivosti (konfidence):

- 95%, 98%, $\ldots$
- $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$ nemají valný smysl (odpovídající intervaly jsou triviální).

Intervaly spolehlivosti = *náhodné intervaly*

- nejedná se o intervaly v klasickém slova smyslu,
- hranice intervalů jsou dány náhodnými veličinami,
- přejdou v klasické intervaly dosazením hodnot konkrétního výběru,
- pro různě dlouhé výběry dostaneme obecně různě dlouhé intervaly.

Poznámka (Monotonie: vyšší konfidence $\Longrightarrow$ delší intervaly)

Pro $\alpha \leq \beta$ platí, že $100(1-\alpha)\%$ konfidenční interval je podinterval $100(1-\beta)\%$ konfidenčního intervalu.

Základní metody stanovení intervalů spolehlivosti

Přesné $\times$ přibližné stanovení intervalu:

- přesné stanovení intervalu je možné při znalosti rozdělení,
- není obvykle možné, *rozdělení závisí na odhadovaných parametrech.*

Aproximace pomocí normálních rozdělení:

- využívá centrální limitní větu,
- využívá vlastnosti (percentilů) standardního normálního rozdělení.

Typické problémy:

- velké výběry $\times$ malé výběry (obvykle jiné techniky),
- odhadování μ závisí na rozptylu σ^2 (může být znám $\times$ nemusí být znám),
- otázky týkající se (dostačující) velikosti výběru.

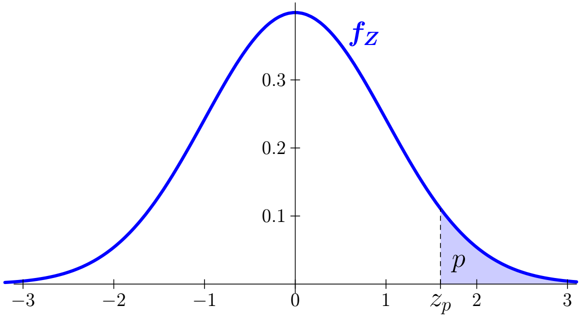
Horní percentily standardního normálního rozdělení

Definice (Horní percentil, angl.: *upper percentile*)

Hodnotu $z_p \in \mathbb{R}$ takovou, že $\Phi(z_p) = 1 - p$ nazveme **horní $(100p)\%$ percentil**.

Z vlastností distribuční funkce Φ a kvantilové funkce Φ^{-1}:

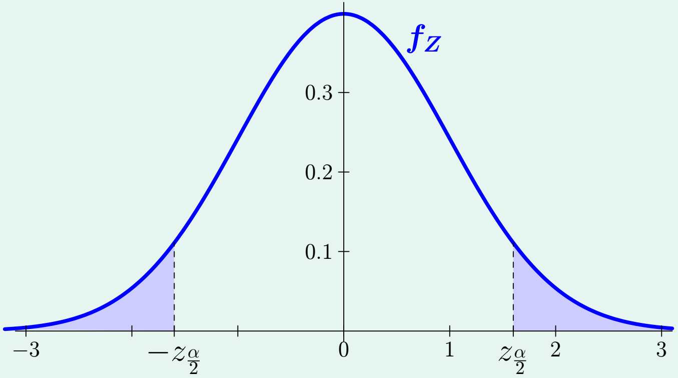
- $1 - \Phi(z_p) = P(\{Z \geq z_p\}) = p$, kde Z je veličina s rozdělením $N(0, 1)$;
- $z_p = \Phi^{-}(1 - p)$: z_p je $100(1 - p)\%$ percentil.



Příklad (Motivace pro intervaly spolehlivosti pro střední hodnoty)

Pokud má Z rozdělení $N(0,1)$, pak

$$\boxed{P\left(\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) = 1 - \alpha}\,.$$



Věta (Int. spolehlivosti pro μ z normálního rozdělení pro dané σ^2)

Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 > 0$ a jeho průměr $\overline{X}$. Pak $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro μ je

$$\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Důkaz (začátek).

Nechť X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Z předchozích pozorování o vlastnostech normálních veličin víme, že $\overline{X}$ má normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2/n. Odtud plyne, že náhodná veličina $W = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ má standardní normální rozdělení $N(0, 1)$. Pomocí horních percentilů vyjádříme

$$P\left(\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) = P\left(\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq W \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) = 1 - \alpha.$$

Důkaz (dokončení).

Vynásobením obou stran nerovností ze

$$P\left(\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) = 1-\alpha$$

zápornou nenulovou hodnotou $-\sigma/\sqrt{n}$ dostáváme

$$P\left(\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu - \overline{X} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1-\alpha.$$

Přičtením $\overline{X}$ ke všem stranám v předchozí nerovnosti dostáváme

$$P\left(\left\{\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1-\alpha,$$

což jsme měli dokázat. $\square$

Příklad (Int. spolehlivosti pro μ z normálního rozdělení pro dané σ^2)

Problém: Předpokládejme, že máme čtyřprvkový náhodný výběr z normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 9$.

Úkol: *Stanovte* 95% *interval spolehlivosti pro* μ.

Řešení:

$$\left(\overline{X} - z_{0.025} \cdot \frac{3}{\sqrt{4}}, \overline{X} + z_{0.025} \cdot \frac{3}{\sqrt{4}}\right) = \left(\overline{X} - 2.940, \overline{X} + 2.940\right).$$

Pro konkrétní čtyřprvkový výběr získáme konkrétní interval hodnot. Například pro

$$x_1 = 0.667, \qquad x_2 = 4.692, \qquad x_3 = 3.338, \qquad x_4 = 9.189$$

dostáváme $\overline{x} = 4.472$, to jest $\boxed{(1.532, 7.412)}$.

Zkrácení délky intervalů spolehlivosti

Obecný požadavek

Je žádoucí stanovovat co možná nejkratší intervaly spolehlivosti.

Intervaly spolehlivosti mohou být zúženy („zkráceny“) pomocí:

1. *snížením hladiny spolehlivosti* (to jest, *zvětšením hodnoty* α),
2. *použitím větších* (*delších*) *výběrů*.

Příklad (Zmenšení intervalů spolehlivosti použitím větších výběrů)

Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením $N(5, 9)$ a náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$.

- Pokud $n = 4$, pak 95% interval spolehlivosti pro μ je $\left(\overline{X} - 2.940, \overline{X} + 2.940\right)$.
- Pokud $n = 25$, pak 95% interval spolehlivosti pro μ je $\left(\overline{X} - 1.176, \overline{X} + 1.176\right)$.
- Pokud $n = 400$, pak 95% interval spolehlivosti pro μ je $\left(\overline{X} - 0.294, \overline{X} + 0.294\right)$.

Intervaly spolehlivosti pro μ: velké n, známé $\sigma^2 > 0$

Zobecnění předchozího postupu

- $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z *libovolného rozdělení* s rozptylem $\sigma^2 > 0$;
- pokud je n *dostatečně velké* (typicky, $n \geq 30$ a větší), pak

$$P\left(\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) \approx 1 - \alpha,$$

protože dle centrální limitní věty má $W = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ přibližně rozdělení $N(0, 1)$.

Důsledek (Int. spolehlivosti pro μ při velkém n a pro dané σ^2).

$100(1 - \alpha)\%$ interval spolehlivosti pro μ je přibližně

$$\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$\square$

Intervaly spolehlivosti pro μ: velké n, neznámé $\sigma^2 > 0$

Postup při neznámé hodnotě rozptylu $\boldsymbol{\sigma^2}$:

- Pokud je n *dostatečně velké*, lze použít S^2 (rozptyl náhodného výběru) místo σ^2 (neznámý rozptyl populace); pro

$$\boxed{W = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}}, \quad \text{kde } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

má W přibližně rozdělení $N(0, 1)$.

Důsledek (Int. spolehlivosti pro μ při velkém n a pro neznámé σ^2).

$100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro μ je přibližně

$$\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

□

- funguje dobře pro výběry, kde $n \geq 30$ (nebo $n \geq 50$ při vyšší šikmosti rozdělení).

Stanovení intervalů spolehlivosti z malých výběrů

Častá situace:

- rozptyl není znám,
- výběr, který je k dispozici je *malý* (jednotky pozorování),
- výběr není možné zvětšit (těžká opakovatelnost experimentu, náklady, ...).

Postup: Vyjádříme výběrové rozdělení

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2}, \text{ kde } \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Pomocí výběrového rozdělení stanovíme rozdělení veličiny $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$.

- Musíme prozkoumat vztah $\overline{X}$ a S^2 (a souvisejících rozdělení);
- významnou roli zde hraje nové rozdělení odvozené z $N(0,1)$ a $\chi^2(r)$.

Nezávislost výběrových charakteristik $\overline{X}$ a S^2

Věta

Mějme n-prvkový náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Pak pro

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{a} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

platí

1. *$\overline{X}$ a S^2 jsou nezávislé,*
2. *$\dfrac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$ má rozdělení $\chi^2(n-1)$.*

Důkaz (nebude vyžadován).

Netriviální (zejména část o nezávislosti $\overline{X}$ a S^2). $\square$

Studentovo t-rozdělení

Definice (Studentovo t-rozdělení)

Mějme náhodnou veličinu T danou zlomkem,

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/r}},$$

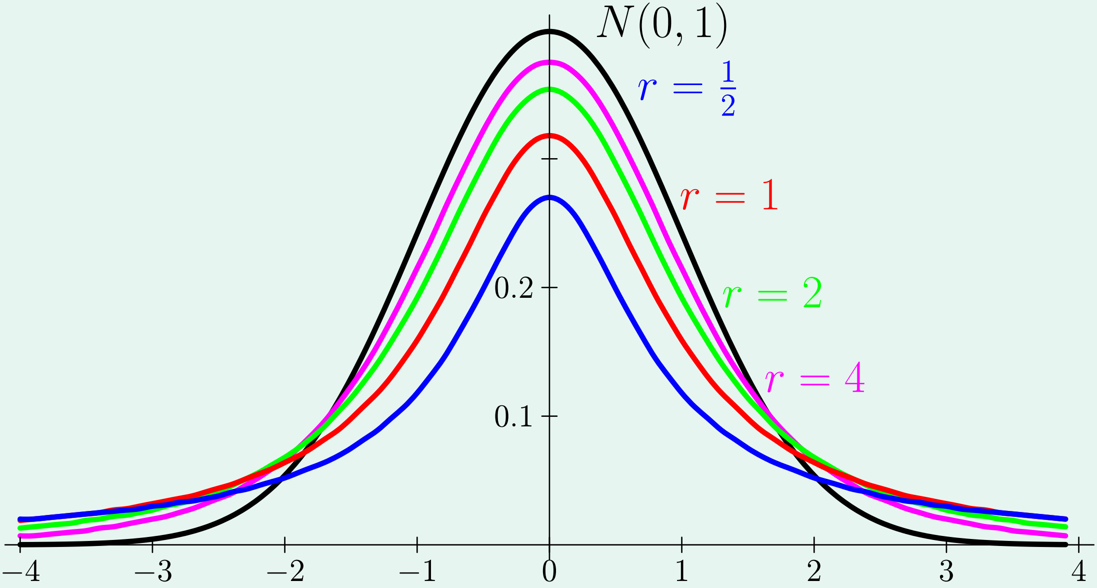
kde Z má rozdělení $N(0,1)$, U má rozdělení $\chi^2(r)$ a Z a U jsou nezávislé. Pak řekneme, že T má ***t*-rozdělení** s $\boldsymbol{r}$ **stupni volnosti** (angl.: *t-distribution*).

Lze ukázat, že funkce hustoty a distribuční funkce jsou v následujících tvarech:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot r} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{t^2}{r}\right)^{(r+1)/2}},$$

$$F_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{t \cdot \sqrt{u/r}} \frac{e^{-z^2/2}}{2^{(r+1)/2}} \mathrm{d}z\right] \cdot u^{\frac{r}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2}} \, \mathrm{d}u\,.$$

Příklad (Studentovo t-rozdělení)



Intervaly spolehlivosti založené na t-rozdělení

Uvažujme n-prvkový náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z normálního rozdělení. Použitím předchozí věty a tvaru veličiny mající t-rozdělení dostáváme, že

$$T = \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}.$$

T má *t-rozdělení s $r = n - 1$ stupni volnosti*. To jest:

Důsledek (Int. spolehlivosti pro μ při malém n a pro neznámé σ^2).

Pokud je $X_1, \ldots, X_n$ z normálního rozdělení, pak $100(1-\alpha)\%$ int. spolehl. pro μ je

$$\left(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

kde $t_p(k)$ označuje **horní $(100p)\%$ percentil** t-rozdělení s k stupni volnosti. □

Jednostranné intervaly spolehlivosti

Možný tvar intervalů spolehlivosti:

- doposud ve tvaru (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}$;
- další možnost: $(-\infty, b)$ nebo (a, ∞) (**jednostranné intervaly**).

Příklad (Určení jednostranného intervalu spolehlivosti)

Pokud je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 > 0$, pak

$$1 - \alpha = P\left(\left\{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_\alpha\right\}\right) = P\left(\left\{\overline{X} - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu\right\}\right).$$

To jest, $100(1 - \alpha)\%$ jednostranné intervaly spolehlivosti pro μ (levý a pravý) jsou

$$\left(-\infty\,, \overline{X} + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \qquad \left(\overline{X} - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right).$$

Analogicky se postupuje v ostatních případech (σ^2 neznámé, ...)

Příklad (Int. spolehlivosti pro μ z normálního rozdělení pro dané σ^2)

Problém: Předpokládejme, že máme čtyřprvkový náhodný výběr z normálního rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 9$.

Úkol: *Stanovte 95% oboustranný a jednostranné intervaly spolehlivosti pro μ.*

Řešení:

$$\left(\overline{X} - z_{0.025} \cdot \frac{3}{\sqrt{4}}, \overline{X} + z_{0.025} \cdot \frac{3}{\sqrt{4}}\right) = (\overline{X} - 2.940, \overline{X} + 2.940),$$

$$\left(-\infty, \overline{X} + z_{0.05} \cdot \frac{3}{\sqrt{4}}\right) = (-\infty, \overline{X} + 2.467),$$

$$\left(\overline{X} - z_{0.05} \cdot \frac{3}{\sqrt{4}}, \infty\right) = (\overline{X} - 2.467, \infty),$$

Pro konkrétní výběr $x_1 = 0.667$, $x_2 = 4.692$, $x_3 = 3.338$, $x_4 = 9.189$ získáváme intervaly $\boxed{(1.532, 7.412)}$, $\boxed{(-\infty, 6.939)}$ a $\boxed{(2.005, \infty)}$.

Intervaly spolehlivosti pro rozdíly středních hodnot

Problém porovnání středních hodnot $\boldsymbol{\mu_X}$ a $\boldsymbol{\mu_Y}$ dvou výběrů:

- náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z normálního rozdělení $N(\mu_X, \sigma_X^2)$;
- náhodný výběr $Y_1, \ldots, Y_m$ z normálního rozdělení $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$;
- (neznámé) střední hodnoty μ_X a μ_Y jsou *dost blízko*, pokud je interval spolehlivosti pro $\mu_X - \mu_Y$ dost malý (a obsahuje 0).

Rozbor: Průměry $\overline{X}$ a $\overline{Y}$ mají rozdělení $N(\mu_X, \sigma_X^2/n)$ a $N(\mu_Y, \sigma_Y^2/m)$; to jest lineární kombinace $W = \overline{X} - \overline{Y}$ má rozdělení $N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m)$.

Odtud dostáváme:

$$P\left(\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) = 1 - \alpha,$$

z toho můžeme ekvivalentně vyjádřit

$$P\big(\big\{(\overline{X} - \overline{Y}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_W \leq \mu_X - \mu_Y \leq (\overline{X} - \overline{Y}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_W\big\}\big) = 1 - \alpha\,.$$

Horní percentily rozdělení χ^2

Podobně jako u standardního normálního a t-rozdělení uvažujeme horní percentily rozdělení χ^2 s r stupni volnosti:

Definice (Horní percentily rozdělení χ^2)

Nechť X je náhodná veličina z rozdělením $\chi^2(r)$ a $p \in (0,1)$. Pak hodnotu $\chi^2_p(r) \in \mathbb{R}$ takovou, že $F_X\big(\chi^2_p(r)\big) = 1 - p$ nazveme **horní $(100p)\%$ percentil** rozdělení χ^2 s r stupni volnosti.

Z vlastností distribuční funkce F_X a kvantilové funkce F_X^{-1}:

- $1 - F_X\big(\chi^2_p(r)\big) = P\big(\{X \geq \chi^2_p(r)\}\big) = p$, kde X je veličina s rozdělením $\chi^2(r)$;
- $\chi^2_p(r) = F_X^{-}(1-p)$, to jest $\chi^2_p(r)$ je $100(1-p)\%$ percentil.

Hodnoty $\chi^2_p(r)$ jsou v tabulkách (*numerické aproximace*).

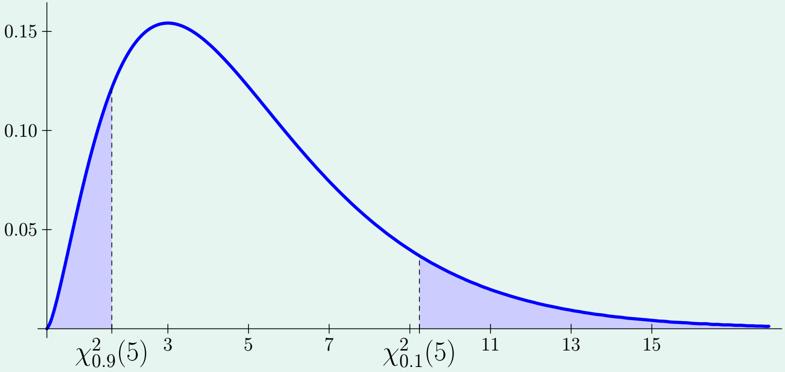
Poznámka: Hodnoty $m_X - \chi^2_p(r)$ a $\chi^2_{1-p}(r)$ jsou obecně různé. (**!!**)

Příklad (Horní percentily rozdělení χ^2)

Uvažujme náhodnou veličinu X, která má rozdělení χ^2 s $r = 5$ stupni volnosti.

Pak máme

$$\chi^2_{0.1}(5) = 9.236 = F^-_X(0.9), \qquad \chi^2_{0.9}(5) = 1.610 = F^-_X(0.1).$$



Věta (Interval spolehlivosti pro σ^2 z normálního rozdělení)

Mějme n-prvkový náhodný výběr z normálního rozdělení. Pak $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro σ^2 je

$$\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

Důkaz.

Mějme $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Dle předchozí věty, $((n-1)\cdot S^2)/\sigma^2$ má rozdělení $\chi^2(n-1)$, přitom S^2 je rozptyl náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$. S využitím horních percentilů můžeme psát:

$$P\left(\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\right) = 1-\alpha\,.$$

Ekvivalentním vyjádřením:

$$P\left(\left\{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\}\right) = 1-\alpha\,.$$

$\square$

Příklad (Stanovení intervalů spolehlivosti pro rozptyl)

Problém: Předpokládejme, že náhodná veličina X má normální rozdělení.

Úkol: Najděte 90% interval spolehlivosti pro rozptyl σ_X^2 za předpokladu, že máme k dispozici následující třináctiprvkový výběr:

$23.15, 15.16, 22.53, 20.83, 19.13, 11.05, 25.29, 18.16, 21.05, 17.19, 26.87, 11.06, 15.19.$

Řešení: Nejprve spočteme výběrový průměr $\overline{x} = 18.97$. Dále máme

$$(n-1) \cdot s^2 = 12 \cdot s^2 = \sum_{i=1}^{13} (x_i - \overline{x})^2 = 12 \cdot 24.85 = 298.23.$$

To jest, 90% interval spolehlivosti pro rozptyl σ_X^2 je

$$\left(\frac{12 \cdot s^2}{\chi^2_{0.05}(12)}, \frac{12 \cdot s^2}{\chi^2_{0.95}(12)}\right) = \left(\frac{298.23}{21.03}, \frac{298.23}{5.226}\right) = (14.18, 57.07).$$

Příklad (Stanovení potřebné velikosti výběru)

Problém: Uvažujme n-prvkový náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.

Úkol: *Jsou dány hodnoty $\alpha \in (0,1)$ a $\varepsilon > 0$. Stanovte velikost n náhodného výběru tak, aby $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro μ byl $(\overline{X} - \varepsilon, \overline{X} + \varepsilon)$.*

Řešení: Z předpokladu, že $W = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ má přibližně standardní normální rozdělení dostáváme, že

$$P\left(\left\{\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right) \approx 1 - \alpha.$$

Odtud přímo dostáváme

$$\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ i.e. } \boxed{n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2}.$$

Příklady (Potřebné počty pozorování)

Velikosti výběrů při $1 - \alpha = 0.95$ (řádky $= \sigma^2$; sloupce $= \omega$)

	8	7	6	5	4	3	2	1
5	0.55	0.63	0.73	0.88	1.10	1.46	2.19	4.38
15	0.95	1.08	1.27	1.52	1.90	2.53	3.80	7.59
25	1.22	1.40	1.63	1.96	2.45	3.27	4.90	9.80
35	1.45	1.66	1.93	2.32	2.90	3.87	5.80	11.60
45	1.64	1.88	2.19	2.63	3.29	4.38	6.57	13.15

Velikosti výběrů při $1 - \alpha = 0.99$ (řádky $= \sigma^2$; sloupce $= \omega$)

	8	7	6	5	4	3	2	1
5	0.72	0.82	0.96	1.15	1.44	1.92	2.88	5.76
15	1.25	1.43	1.66	2.00	2.49	3.33	4.99	9.98
25	1.61	1.84	2.15	2.58	3.22	4.29	6.44	12.88
35	1.90	2.18	2.54	3.05	3.81	5.08	7.62	15.24
45	2.16	2.47	2.88	3.46	4.32	5.76	8.64	17.28

Přednáška 10: Závěr

Pojmy:

- populace, parametr, parametrická funkce, výběrová statistika
- bodový odhad, nestranný odhad, zkreslení, maximálně věrohodný odhad
- intervaly spolehlivosti, práh spolehlivosti, konfidence, náhodný interval
- Weibullovo rozdělení, Studentovo t-rozdělení

Použité zdroje:

Billingsley, P.: *Probability and Measure*
John Wiley & Sons; 3. vydání, ISBN 978–0–471–00710–4.

Gentle J. E.: *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*
Springer 2004, ISBN 978–0–387–00178–4.

Hogg R. V., Tanis E. A.: *Probability and Statistical Inference*
Prentice Hall; 7. vydání 2005, ISBN 978–0–13–146413–1.