Pravděpodobnost a statistika

Pravděpodobnost

Vilém Vychodil

KMI/PRAS, Přednáška 3

Vytvořeno v rámci projektu 2963/2011 FRVŠ

Přednáška 3: Přehled

1. Struktury náhodných jevů:
   - náhodný jev a jeho výskyt,
   - vzájemné vztahy náhodných jevů a operace s náhodnými jevy,
   - pole, σ-algebry, Borelovské množiny, Borelovské jevové pole.
2. Míry a pravděpodobnostní míry:
   - míra, vlastnosti míry, příklady měr,
   - pravděpodobnostní míra a pravděpodobnostní prostor,
   - Lebesgueova a Diracova míra,
   - klasické pravděpodobnostní prostory.
3. Vlastnosti pravděpodobnostní míry:
   - Kolmogorovovy axiomy,
   - zákony pro počátíní s pravděpodobností, princip inkluze a exkluze,
   - příklady počítání pravděpodobností.

Opakování: Náhodný pokus

Definice (Náhodný pokus a jeho výsledek)

Náhodný pokus je činnost probíhající pod vlivem náhody a jehož výsledek není plně určen podmínkami, za kterých je prováděn. Každý **náhodný pokus** (angl.: *random experiment*) končí výsledkem, který je nazýván **elementární jev** (angl.: *outcome*).

Dále předpokládáme, že

- náhodný pokus může být libovolně *opakován*,
- výsledek náhodného pokusu je *nejistý dokud není pokus dokončen*,
- předpokládáme, že všechny možné výsledky náhodného pokusu jde vymezit:

Definice (Prostor elementárních jevů Ω)

Množina všech elementární jevů náhodného pokusu, o který se zajímáme, se označuje Ω a nazývá **prostor** (**elementárních jevů**), angl.: *outcome space*.

Náhodný jev a jeho výskyt

Definice (Náhodný jev, výskyt náhodného jevu)

Uvažujme náhodný pokus s prostorem elementárních jevů Ω. Každou podmnožinu $A \subseteq \Omega$ nazveme **náhodný jev** (angl.: *event*). Speciálně,

- $\emptyset$ nazveme **jev nemožný** (angl.: *empty event, impossible event*),
- Ω nazveme **jev jistý** (angl.: *universal event, certain event*).

Předpokládejme, že je proveden náhodný pokus a jeho výsledkem je $x \in \Omega$. Pokud $x \in A$, pak mluvíme o **výskytu náhodného jevu** A (angl.: *event* A *occurred*).

Množinový pohled na náhodné jevy:

$$\textit{náhodný jev} = \textit{libovolná podmnožina } \Omega$$

Poznámka:

Elementární jev $x \in \Omega$ (PŘEDNÁŠKA 1) lze chápat jako náhodný jev $\{x\} \subseteq \Omega$.

Příklady (Příklady náhodných jevů)

- Jsou vrženy dvě kostky; zajímáme se o součet teček na obou kostkách.
  $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \ldots$

- Pro $\Omega = \{A, B\}$ máme $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{M\}$, $A_3 = \{D\}$, $A_4 = \{M, D\}$.

- Házíme mincí tak dlouho, dokud neuvidíme orla; zajímáme se o počet hodů.
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$.
  $A = \{1, \ldots, 100\}$, $B = \{n \mid n \geq 1000\}, \ldots$

- Pro spojitý prostor $\Omega = (50, 400)$ máme $A = (0, 1)$, $B = (0, 1] \cup [6, 7), \ldots$

Vztahy náhodných jevů

Definice (Vzájemně neslučitelné jevy, úplný systém jevů)

Uvažujme prostor Ω a spočetně mnoho náhodných jevů $A_1, A_2, \ldots$ v tomto prostoru. Náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots$ nazveme

- **vzájemně neslučitelné** (angl.: *mutually exclusive events*) pokud pro každé i, j, kde $i \neq j$, platí $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- **úplným systémem jevů** (angl.: *exhaustive events*) pokud $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$;
- **úplným systémem neslučitelných jevů** (angl.: *mutually exclusive and exhaustive events*) pokud jsou vzájemně neslučitelné a tvoří úplný systém jevů.

Poznámky:

- vzájemně neslučitelné jevy: nemohou nastat současně;
- úplným systémem jevů: alespoň jeden z jevů vždy nastane;
- úplný systém neslučitelných jevů $=$ nastává právě jeden z jevů

Příklady (Příklady vztahů náhodných jevů)

Jsou vrženy dvě kostky a zajímáme se o *součet teček na horních stranách.*

Prostor elementárních jevů: $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ . . . sudý počet teček;
$A_2 = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ . . . lichý počet teček;
$A_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . . . počet teček menší než 8;
$A_4 = \{10, 11, 12\}$ . . . počet teček větší než 9;
$A_5 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . . . vše kromě „hadích očí“.

A_1, A_2 . . . úplný systém neslučitelných jevů (rovněž třeba $A_1, A_2, \emptyset$)
A_3, A_4 . . . vzájemně neslučitelné jevy (rovněž třeba $A_3, A_4, \emptyset$)
A_1, A_5 . . . úplný systém jevů (rovněž třeba $A_1, A_5, \emptyset$)
A_3, A_5 . . . úplný systém jevů (rovněž třeba $A_3, A_5, \emptyset$)

Poznámka: úplný systém neslučitelných jevů $\neq$ rozklad na Ω (může obsahovat $\emptyset$)

Operace s náhodnými jevy

Množinové operace:

- $A \cap B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ a } x \in B\}$ (**průnik**)
- $A \cup B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ nebo } x \in B\}$ (**sjednocení**)
- $A - B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ a } x \notin B\}$ (**rozdíl**)
- $A' = \{x \in \Omega \,|\, x \notin A\} = \Omega - A$ (**doplněk**, neboli **komplement**)
- $A \div B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (**symetrický rozdíl**)

Význam:

- $A \cap B$ nastane p.k. A nastane a současně nastane $B, \ldots$

Vybrané zákony:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B', \ldots$

Prevděpodobnost jako míra výskytu náhodného jevu

Motivace

Chceme náhodnému jevu $A \subseteq \Omega$ přiřadit číslo $P(A)$, zvané pravděpodobnost výskytu jevu A, které přiřazuje náhodnému jevu A míru jistoty jeho výskytu.

Jaké vlastnosti by měla mít funkce P?

- $P(\emptyset) = 0$ (míra jistoty výskytu nemožného jevu je 0),
- $P(\Omega) = 1$ (míra jistoty výskytu jistého jevu je 1),
- pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$ (monotonie),
- aditivita: pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
  - Rozdělíme náhodný jev C na dvě disjunktní části A a B,
  - stanovíme pravděpodobnosti $P(A)$ a $P(B)$ výskytu A a B,
  - vypočteme pravděpodobnost $P(C)$ výskytu C jako $P(C) = P(A) + P(B)$.
- σ-aditivita (zesílení aditivity pro sekvence náhodných jevů, viz dále), ...

Příklad (Pravděpodobnost jako délka)

Uvažujme prostor elementárních jevů $\Omega = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Náhodný pokus:
„Je vybráno jedno číslo z Ω, přitom všechna čísla mají stejnou šanci být vybrána."

Pokud je náhodný jev (otevřený) interval $(a, b) \subseteq \Omega$, pak má smysl chápat pravděpodobnost výskytu tohoto jevu jako *délku intervalu* (a, b), například:

- pokud $A = (0.3, 0.7)$, pak $P(A) = 0.7 - 0.3 = 0.4$;
  pokud $B = (0.1, 0.25)$, pak $P(B) = 0.25 - 0.1 = 0.15, \ldots$

Použitím aditivity (součet délek disjunktních intervalů):

- pokud $C = (0.3, 0.7) \cup (0.1, 0.25)$, pak $P(C) = 0.4 + 0.15 = 0.55, \ldots$

Pozorování: P se na intervalech chová jako *délka*.

Fundamentání otázka: Lze rozšířit definici takové P pro každý $A \in 2^{\Omega}$? **Nelze!**

Důsledek: Je potřeba se omezit pouze na některé podmnožiny Ω.

Pole a sigma algebry (σ-algebry)

Definice (Pole a σ-algebry)

Podmnožina $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ se nazývá **pole** (angl.: *field*) v Ω, pokud platí následující:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- pokud $A \in \mathcal{F}$, pak $\Omega - A \in \mathcal{F}$ (to jest $A' \in \mathcal{F}$) a
- pokud $A, B \in \mathcal{F}$, pak $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Pole $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ se nazývá **σ-algebra** v Ω, pokud platí následující:

- pokud $A_i \in \mathcal{F}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$, pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Poznámky:

- pole = podmnožina 2^{Ω} obsahující Ω uzavřená na doplňky a sjednocení,
- σ-algebra = pole, které je navíc uzavřené na spočetná sjednocení,
- zřejmé: každá σ-algebra je pole (opačně obecně neplatí, viz dále).

Příklady (Pole a σ-algebry)

1. Pro každou Ω jsou $\mathcal{F}_\emptyset = \{\emptyset, \Omega\}$ (nejměnší), $\mathcal{F}_\Omega = 2^\Omega$ (největší) σ-algebry.
2. Pro každou je $A \subseteq \Omega$ je $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \Omega - A, \Omega\}$ σ-algebra.
3. Mějme $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, pak
   - $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\}$ je σ-algebra,
   - $\mathcal{F}_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ není pole, protože $\Omega - \Omega \notin \mathcal{F}_2$,
   - $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ není pole, protože $\{1\} \cup \{3, 4\} \notin \mathcal{F}_3$.
4. Mějme $\Omega = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, pak
   - $\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, (0, 0.4), (0.4, 1), (0, 1)\}$ není pole, protože $(0, 0.4) \cup (0.4, 1) \notin \mathcal{F}_4$,
   - $\mathcal{F}_5 = \{\emptyset, (0, 0.4), [0.4, 1), (0, 0.6), [0.6, 1), (0, 1)\}$ není pole: $(0, 0.4) \cup [0.6, 1) \notin \mathcal{F}_5$,
   - $\mathcal{F}_6 = \{\emptyset, (0, 0.5), [0.5, 1), (0, 1)\}$ je σ-algebra.
5. Uvažujme Ω a $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \,|\, A \text{ je konečná}\}$.
   - Pokud je Ω konečná, pak je $\mathcal{F}$ σ-algebra.
   - Pokud je Ω nekonečná, pak $\mathcal{F}$ není pole, protože komplement $\Omega - A$ konečné množiny $A \in \mathcal{F}$ je nekonečný a tím pádem $\Omega - A \notin \mathcal{F}$.

Vlastnosti polí a σ-algeber

Věta

1. *Každé konečné pole je σ-algebra.*
2. *Každé pole je uzavřené na průniky každých dvou prvků.*
3. *Každá σ-algebra je uzavřená na průniky každých spočetně mnoha prvků.*

Důkaz.

První tvrzení: Pokud je $\mathcal{F}$ konečné pole, pak pro libovolné $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \dots)$ existuje konečná $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ tak, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k} \in \mathcal{F}$.

Druhé tvrzení: Důsledek De Morganových zákonů $A \cap B = (A' \cup B')'$. To jest, pokud $A, B \in \mathcal{F}$, pak i $A', B' \in \mathcal{F}$, tím pádem i $A' \cup B' \in \mathcal{F}$ a také $(A' \cup B')' \in \mathcal{F}$.

Třetí tvrzení: Důsledek De Morganových zákonů pro spočetně mnoho množin z $\mathcal{F}$: Pro $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \dots)$ platí: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right)' \in \mathcal{F}$. $\square$

Příklad (Příklad nekonečného pole)

Uvažujme libovolnou nekonečnou množinu Ω.

Označme $\mathcal{F}$ tu podmnožinu 2^{Ω} obsahující právě všechny konečné podmnožiny Ω a všechny podmnožiny Ω, které mají konečný doplněk.

Tvrzení: *$\mathcal{F}$ je pole.*

1. Zřejmě $\Omega \in \mathcal{F}$, protože $\Omega' = \emptyset$ je konečná.
2. Pokud $A \in \mathcal{F}$, pak mohou nastat dvě situace: (i) A je konečná a tím pádem $A' \in \mathcal{F}$, protože $A' \in \mathcal{F}$ má konečný doplněk. (ii) A má konečný doplněk, tím pádem $A' \in \mathcal{F}$, protože A' je konečná.
3. Vezměme $A, B \in \mathcal{F}$. Pokud jsou obě A, B konečné, je i jejich sjednocení $A \cup B$ konečné a tím pádem $A \cup B \in \mathcal{F}$. Pokud má A konečný doplněk, pak je $A' \cap B'$ konečná množina a patří tedy do $\mathcal{F}$. To jest, z De Morganových zákonů plyne, že $A \cup B$ má konečný doplněk $A' \cap B'$, to jest $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Příklad (Pole, které není σ-algebra)

Vezměme Ω a $\mathcal{F}$ z předchozího příkladu:

Uvažujme libovolnou nekonečnou množinu Ω.

Označme $\mathcal{F}$ tu podmnožinu 2^{Ω} obsahující právě všechny konečné podmnožiny Ω a všechny podmnožiny Ω, které mají konečný doplněk.

Příklad: Pro $\Omega = \mathbb{N}$ máme $\{1,2,3\} \in \mathcal{F}$, $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 1000\} \in \mathcal{F}$, ale $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ je sudé}\} \notin \mathcal{F}$, $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ je prvočíslo}\} \notin \mathcal{F}$ a podobně.

Pozorování: *Pole $\mathcal{F}$ není σ-algebra.*

Konkrétní protipříklad:

Vezměme $A_i = \{2i\}$ $(i = 1, 2, \dots)$.
To jest $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{4\}$, $A_3 = \{6\}, \dots$
Sjednocení: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ je sudé}\} \notin \mathcal{F}$.

Uzávěrový systém všech σ-algeber v Ω

Věta (O uzávěrových vlastnostech)

Mějme indexový systém polí $\{\mathcal{F}_i \subseteq 2^\Omega \mid i \in I\}$. Pak $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \subseteq 2^\Omega$ je pole. Pokud jsou navíc všechny $\mathcal{F}_i$ σ-algebry, pak je $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ rovněž σ-algebra.

Důkaz.

Označme $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Platí:

- $\Omega \in \mathcal{F}_i$ pro každé $i \in I$, Odtud $\Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$.
- Pokud $A \in \mathcal{F}$, pak platí, že $A \in \mathcal{F}_i$ pro každé $i \in I$. Z toho dostáváme, že $A' \in \mathcal{F}_i$ pro každé $i \in I$, to jest $A' \in \mathcal{F}$.
- Pokud $A, B \in \mathcal{F}$, pak platí, že $A, B \in \mathcal{F}_i$ pro každé $i \in I$. To jest, $A \cup B \in \mathcal{F}_i$ pro každé $i \in I$, tedy $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Pokud $A_j \in \mathcal{F}$, pro každé $j = 1, 2, \ldots$, pak $A_j \in \mathcal{F}_i$ pro každé $j = 1, 2, \ldots$ a $i \in I$, to znamená, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}_i$ pro každé $i \in I$, to jest $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. $\square$

Příklad (Sjednocení polí obecně není pole)

Dvě pole definované na témže Ω:

$\Omega = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ je pole (σ-algebra).

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$ je pole (σ-algebra).

Operace s poli:

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ je pole (σ-algebra); důsledek předchozí Věty.

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ není pole, protože $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ je nejmenší pole obsahující $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Generování σ-algeber

Důsledek: Předchozí věta říká, že všechny σ-algebry v Ω tvoří *uzávěrový systém*. Má tedy smysl bavit se o σ-algebře generované libovolnou podmnožinou Ω.

Definice (σ-algebra generovaná podmnožinou Ω)

Mějme Ω a libovolnou množinu $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. Pak

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \bigcap\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra v } \Omega, \text{ pro kterou } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}$$

se nazývá **σ-algebra v Ω generovaná $\mathcal{A}$**.

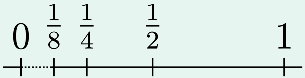
Z vlastností uzávěrových systémů dostáváme:

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$; pokud $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, pak $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$; $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{F}_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}$.
- $\mathcal{A}$ je σ-algebra, právě když $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.
- $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ je nejmenší σ-algebra v Ω obsahující $\mathcal{A}$.

Příklady (σ-algebry generované podmnožinami Ω)

$\Omega = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

$\mathcal{A}_1 = \big\{[0,1]\big\} \cup \big\{\big[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\big) \,|\, n = 0,1,2,\ldots\big\}$, to jest:
$\mathcal{A}_1 = \big\{[0,1], \big[\frac{1}{2},1\big), \big[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\big), \big[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\big), \big[\frac{1}{16},\frac{1}{8}\big), \big[\frac{1}{32},\frac{1}{16}\big),\ldots\big\}$.



$\mathcal{A}_2 = \big\{\{0,1\}\big\} \cup \big\{\big[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\big) \,|\, n = 0,1,2,\ldots\big\}$, to jest:
$\mathcal{A}_2 = \big\{\{0,1\}, \big[\frac{1}{2},1\big), \big[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\big), \big[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\big), \big[\frac{1}{16},\frac{1}{8}\big), \big[\frac{1}{32},\frac{1}{16}\big),\ldots\big\}$.

Tvrzení: $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_1} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}_2}$.

Stačí ověřit $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}_2}$ a $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}$, potom $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_1} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}_2}} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}_2}$ a $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_2} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}$:

$$\{0,1\} = [0,1] - \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty}\big[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\big), \qquad [0,1] = \{0,1\} \cup \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty}\big[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\big).$$

To jest, $\{0,1\} \in \mathcal{A}_1$ a $[0,1] \in \mathcal{A}_2$, odtud $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_1} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}_2}$.

Příklady:

- $\big[\frac{1}{4},1\big) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}$, $\big(0,\frac{1}{2}\big) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}, \ldots$
- $\{0\} \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}$, $\{1\} \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}$, $\big\{\frac{1}{2}\big\} \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}$, $\big(\frac{1}{4},1\big] \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}$, $\big[0,\frac{1}{2}\big] \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_1}, \ldots$

Borelovské jevové pole

Speciální σ-algebra generovaná otevřenými intervaly:

Definice (Borelovské jevové pole, Borelovská množina)

Mějme $\Omega = \mathbb{R}$ a nechť $\mathcal{A}$ je množina všech otevřených intervalů v Ω. Pak σ-algebru $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ nazveme **Borelovské (jevové) pole** (angl.: *Borel σ-algebra*) a každou $A \in \mathcal{B}$ nazveme **Borelovská množina** (angl.: *Borel set*).

Terminologie: Borelovské jevové pole / Borelovská σ-algebra.

Poznámky:

- $\mathcal{B}$ obsahuje všechny otevřené intervaly, jejich doplňky, sjednocení spočetně mnoha intervalů nebo jejich doplňků, ... (transfinitní proces);
- lze ukázat, že $\mathcal{B} \cap 2^{(a,b)}$ je σ-algebra na intervalu (a, b) (σ-algebra všech Borelovských množin, které jsou podmnožinami (a, b)).

Příklad (Příklady Borelovských množin)

Nechť $\mathcal{A}$ je množina všech otevřených intervalů v Ω. Potom pro $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ platí:

$(a, b) \in \mathcal{B}$, protože $(a, b) \in \mathcal{A}$.

$(a, \infty) \in \mathcal{B}$, protože $(a, \infty) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a, a + i) \in \mathcal{B}$.

$(-\infty, a) \in \mathcal{B}$, protože $(-\infty, a) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a - i, a) \in \mathcal{B}$.

$[a, b] \in \mathcal{B}$, protože $\mathbb{R} - \big((-\infty, a) \cup (b, \infty)\big) \in \mathcal{B}$.

$\{a\} \in \mathcal{B}$, protože $[a, a] = \mathbb{R} - \big((-\infty, a) \cup (a, \infty)\big) \in \mathcal{B}$.

$(-\infty, a] \in \mathcal{B}$, protože $(-\infty, a] = (-\infty, a) \cup \{a\} \in \mathcal{B}$.

$[a, \infty) \in \mathcal{B}$, protože $[a, \infty) = \{a\} \cup (a, \infty) \in \mathcal{B}$.

Pro každou $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ máme $A \in \mathcal{B}$, protože $A = \bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\} \in \mathcal{B}$.

Pro každou $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ máme $A \in \mathcal{B}$, protože $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\} \in \mathcal{B}$.

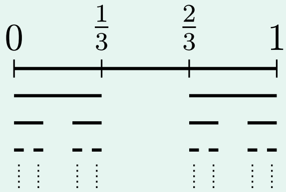
Speciálně: $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$, $\mathbb{Z} \in \mathcal{B}$ a $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$, protože jsou všechny spočetné.

Důsledek: $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$, protože $\mathbb{I}$ je doplněk $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$.

Příklad (Cantorova množina je Borelovská)

Konstrukce Cantorovy množiny:

- odstraníme otevřený interval $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ z intervalu $[0, 1]$,
- každý ze zbývajících intervalů rozdělíme na třetiny,
- odstraníme prostřední části, to jest $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ a $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.
- stejnný postup aplikujeme na nově vzniklé intervaly.
- Cantorova množina je *množina zbylých bodů.*
- vlastnost: Cantorova množina je *nespočetná*



Tvrzení: *Cantorova množina je Borelovská.* Zdůvodnění:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1], \\
C_1 &= \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right], \\
C_2 &= \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right], \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

$$\boxed{C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i}$$

Věta (Ekvivalentní zavedení Borelovského jevového pole)

Platí, že $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, kde $\mathcal{A}$ je množina všech uzavřených intervalů v $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Víme, že $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$, protože každý uzavřený interval patří do $\mathcal{B}$. Zbývá ověřit, že $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. K tomu stačí prokázat, že každý otevřeý interval náleží do $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

Vezměme otevřený interval (a, b).

Nejprve prokážeme, že $(-\infty, a] \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ a $[b, \infty) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. To jsou ale důsledky:

$$(-\infty, a] = \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} [a - i, a] \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}, \qquad [b, \infty) = \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} [b, b + i] \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}.$$

To znamená, že $(a, b) = \mathbb{R} - \big((-\infty, a] \cup [b, \infty)\big) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. $\square$

Poznámka: Existují množiny, které nejsou Borelovské (pro nás nezajimavé).

Míra, pravděpodobnostní míra, pravděpodobnostní prostor

Definice (Míra a pravděpodobnostní míra)

Mějme σ-algebru $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. Každé zobrazení $m\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ splňující

- $m(A) \geq 0$ pro každou $A \in \mathcal{F}$,
- $m(\emptyset) = 0$,
- $m\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} m(A_i)$ pro libovolnou spočetnou $\{A_i \in \mathcal{F} \mid i \in I\}$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in I$ takové, že $i \neq j$ (**σ-aditivita**).

nazýváme **míra na $\mathcal{F}$** (angl.: *measure*). Míra m na $\mathcal{F}$ splňující $m(\Omega) = 1$ se nazývá **pravděpodobnostní míra na $\mathcal{F}$** (angl.: *probability measure*). Pravděpodobnostní míru na $\mathcal{F}$ obvykle označujeme $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

Definice (Pravděpodobnostní prostor)

Je-li $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ pravděpodobnostní míra na σ-algebře $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, pak trojici $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ nazýváme **pravděpodobnostní prostor**, (angl.: *probability space*).

Příklady (Pravděpodobnostní prostory na konečné Ω)

Pro $\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ uvažujme $P_1 \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ a $P_2 \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
P_1(\emptyset) &= 0, & P_1(\{a\}) &= 0.3, \\
P_1(\{b\}) &= 0.2, & P_1(\{c\}) &= 0.5, \\
P_1(\{a, b\}) &= 0.5, & P_1(\{a, c\}) &= 0.8, \\
P_1(\{b, c\}) &= 0.7, & P_1(\{a, b, c\}) &= 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2(\emptyset) &= 0, & P_2(\{a\}) &= 0.2, \\
P_2(\{b\}) &= 0.6, & P_2(\{c\}) &= 0.2, \\
P_2(\{a, b\}) &= 0.8, & P_2(\{a, c\}) &= 0.4, \\
P_2(\{b, c\}) &= 0.8, & P_2(\{a, b, c\}) &= 1.
\end{aligned}
$$

Poznámka: $\langle \Omega, \mathcal{F}, P_1 \rangle$ a $\langle \Omega, \mathcal{F}, P_2 \rangle$ jsou (různé) pravděpodobnostní prostory.

Frekventistická interpretace pravděpodobnosti

Otázka: *Jaký význam má pravděpodobnost* $P(A)$ *výskytu náhodného jevu* A*?*

- Několik interpretací toho, „co znamená hodnota $P(A)$“;
- nejznámější: **frekventistická** a **Bayesovská**.

Definice (Relativní četnost výskytu náhodného jevu)

Uvažujme náhodný pokus s prostorem Ω. Pokud je náhodný pokus opakován n-krát a f je počet výskytů náhodného jevu $A \subseteq \Omega$, pak se $\frac{f}{n}$ nazývá **relativní četnost výskytu náhodného jevu A** a označuje se $N(A)$.

Frekventistická interpretace pravděpodobnosti

Relativní četnost výskytu jevu A je (obvykle) nestabilní pro malé hodnoty n. Se vzrůstající hodnotou n se relativní četnost výskytu A stabilizuje kolem nějaké hodnoty. Pokud $n \to \infty$, relativní četnost výskytu A přejde v $P(A)$.

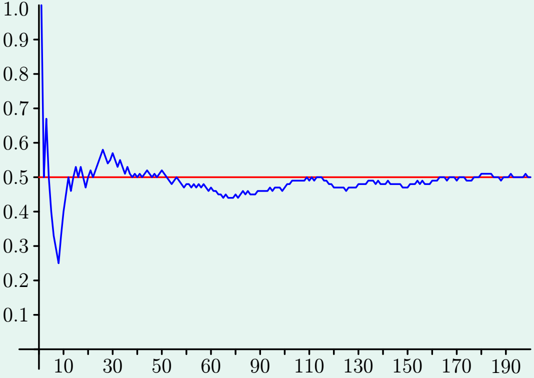
Čítač relativních četností pro simulované náhodné pokusy

```lisp
(defparameter *repetitions* 10000)

(defun %relative-frequency (fn &optional (n *repetitions*))
  "Return relative frequency of FN returning true in N trials."
  (iter (for i :from 1 :to n)
        (when (funcall fn)
          (counting i :into success))
        (finally (return (float (/ success n))))))

(defmacro relative-frequency (&rest forms)
  "Return relative frequency of FORMS evaluating to true."
  `(%relative-frequency
    #'(lambda ()
        ,@forms)))
```

Příklad (Házení nefalšovanou mincí)

Je hozena mince a zajímáme se o stranu, která padne.

$\Omega = \{\text{panna}, \text{orel}\}$, $A = \{\text{panna}\}$, $B = \{\text{orel}\}$,
$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.5$, $P(\emptyset) = 0$, $P(A \cup B) = 1$.

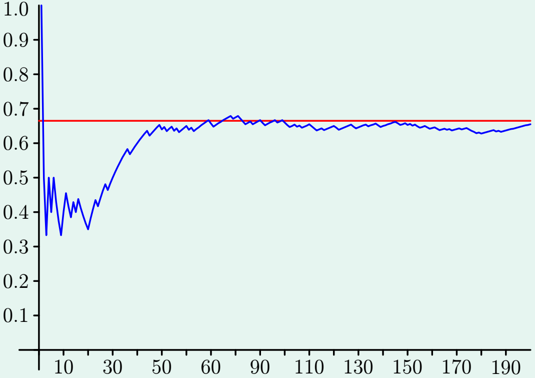



```
(relative-frequency
  (= (random 2) 0))
```

Příklad (Série hodů šestistrannou kostkou)

Šestistraná kostka je šestkrát vržena. Pokud na i-tý pokus hodíme i, pak nazveme výsledek shodou. Náhodný pokus považujeme za úspěch, pokud padne během šesti hodů alespoň jedna shoda.

$\Omega = \{\text{úspěch}, \text{neúspěch}\}$, $A = \{\text{úspěch}\}$, $B = \{\text{neúspěch}\}$,
$P(A) \approx 0.665102$, $P(B) \approx 0.334898$, $P(\emptyset) = 0$, $P(A \cup B) = 1$.

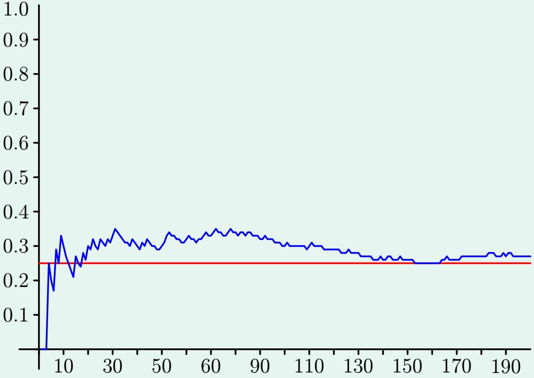



```
(relative-frequency
  (iter (for i :from 0 :to 5)
        (when (= i (random 6))
          (return t))))
```

Příklad (Házení disku na podlahu)

Kruhový disk o průměru $2\,\mathrm{dm}$ je vržen na podlahu se čtvercovými kachličkami o straně $4\,\mathrm{dm}$. Jaká je pravděpodobnost, že disk přistane uvnitř některé kachličky?

$\Omega = [0,4] \times [0,4]$, $A = [1,3] \times [1,3]$, $P(A) = 0.25$.




```
(relative-frequency
  (let ((x (random 4.0))
        (y (random 4.0)))
    (and (<= 1 x 3)
         (<= 1 y 3))))
```

Bayesovská interpretace pravděpodobnosti

Bayesovská (subjektivní) interpretace pravděpodobnosti

Mějme náhodný jev $A \subseteq \Omega$. Pokud věříme, že $P(A) = p$ a pokud jsme ochotni si vsadit peníze na to, že náhodný jev A nastane, pak bychom měli akceptovat libovolnou z následujících dvou sázek:

1. Získáme $1\$$, pokud A nastane; odevzdáme $p\$$, pokud A nenastane.
2. Získáme $1\$$, pokud A nenastane; odevzdáme $1\$ - p\$$, pokud A nastane.

Příklad (Sázka na „české hokejisty“)

Pokud věřím, že pravděpodobnost výhry je $P(A) = 0.2$, pak přijmu sázky:

1. Získám $80\$$ (plus $20\$$), pokud A nastane; odevzdám $20\$$, pokud A nenastane.
2. Získám $20\$$ (plus $80\$$), pokud A nenastane; odevzdám $80\$$, pokud A nastane.

Klasické pravděpodobnostní prostory

Definice (Klasická pravděpodobnostní míra)

Mějme konečnou Ω a σ-algebru $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Pravděpodobnostní míru $P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ nazveme **klasická pravděpodobnostní míra** na $\mathcal{F}$ pokud

$$P(\{a\}) = \frac{1}{|\Omega|}, \qquad \text{platí pro každý } a \in \Omega.$$

Navíc $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ se nazývá **klasický pravděpodobnostní prostor**.

Důsledek (Pravděpodobnosti se odvozují z velikostí náhodných jevů)

Pokud je $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ klasický pravděpodobnostní prostor, pak lze každou $A \in \mathcal{F}$ vyjádřit jako $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ a z aditivity P dostáváme:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(\{a_k\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{k}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Příklad (Tahání karet z balíku)

Náhodně táhneme karty ze standarního balíčku 52 hracích karet.

Můžeme předpokládat, že $|\Omega| = 52$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ a $P(\{x\}) = \frac{1}{52}$.

Příklad pravděpodobností výskytů vybraných náhodných jevů

- A … množina karet skládající se ze všech králů
  $P(A) = \frac{4}{52} = 0.0769.$
- B … množina všech karet, které jsou buď kluk, dáma, nebo král
  $P(B) = \frac{3 \cdot 4}{52} = \frac{12}{52} = 0.231.$
- C … množina karet, které jsou $\heartsuit$, $\clubsuit$, nebo $\spadesuit$
  $P(C) = \frac{13 \cdot 3}{52} = \frac{39}{52} = 0.75.$

Analogické problémy: házení mincí, vrhání kostek, …

Příklad (Jednoduchá analýza hazardní hry)

Hrajeme následující hazardní hru:

- Zvolíme si tři různá čísla od 1 do 20.
- Protihráč (kasino) losujeme tři míčky z urny obsahující míčky s čísly od 1 do 20.
- Dva možné výsledky hry:
  - vyhráváme $\$1000$ pokud jsou naše čísla stejná jako čísla na vylosovaných míčcích;
  - v opačném případě ztrácíme $\$1$.

Otázka: *Je rozumné (dlouhodobě) hrát tuto hru?*

Míčky mohou být taženy 1140 způsoby: $\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = \dfrac{6840}{6} = 1140 = \binom{20}{3}$.

Pravděpodobnost, že zvolíme správná čísla je $\frac{1}{1140} \approx 0.000877$.

Lze očekávat, že vyhrajeme (zhruba) 1 hru za 1140 kol (cena $> \$1000$).

Lebesgueova míra Borelovských množin

Definice (Lebesgueova míra Borelovských množin)

Zobrazení $m\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, které zobrazuje každý interval na jeho délku, to jest

$$m\big((a,b)\big) = m\big([a,b)\big) = m\big((a,b]\big) = m\big([a,b]\big) = b - a,$$

a které je navíc σ-aditivní, se nazývá **Lebesgueova míra**.

Poznámky:

- zavedli jsme pro naše účely **zjednodušeně** (bude dostačovat),
- existují podmnožiny $\mathbb{R}$, které mají Lebesgueovu míru a nejsou Borelovské,
- existují podmnožiny $\mathbb{R}$, které nemají Lebesgueovu míru (Vitaliho množina),

Důsledek: Při úvahách o pravděpodobnosti se omezujeme na Borelovské množiny na $[0,1]$, to jest $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$ místo celé $2^{[0,1]}$.

Příklad (Lebesgueova míra Borelovských množin)

Platí:

Pro $(a,b) \in \mathcal{B}$ máme $m\big((a,b)\big) = b - a$.

Pro $(a,b) \in \mathcal{B}$ a $(c,d) \in \mathcal{B}$, kde $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$ platí $m\big((a,b) \cup (c,d)\big) = b - a + d - c$.

Pro $(a,\infty) \in \mathcal{B}$ máme $m\big((a,\infty)\big) = \infty$, protože

$$m\big((a,\infty)\big) = m\Big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty}(a+i-1, a+i]\Big) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} m\big((a+i-1, a+i)\big) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\big(a+i-(a+i-1)\big) = \infty.$$

Pro $\{a\} \in \mathcal{B}$ máme $m(\{a\}) = 0$.

Pro každou $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{B}$ máme $m(A) = 0$.

Pro každou $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathcal{B}$ máme $m(A) = 0$.

Speciálně: $m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Z}) = m(\mathbb{Q}) = 0$.

Platí: m na $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$ je pravděpodobnostní míra.

Diracova pravděpodobnostní míra

Definice (Diracova míra)

Mějme libovolnou Ω, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ a nechť $x \in \Omega$. Pak se $\delta_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definované

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

nazývá **Diracova míra** na Ω **koncentrovaná v bodě x**.

Zřejmě δ_x je pravděpodobnostní míra:

- Triviálně platí $\delta_x(\emptyset) = 0$, $\delta_x(\Omega) = 1$ a $\delta_x(A) \geq 0$.
- Pokud je A sjednocením spočetně mnoha vzájemně disjunktních množin A_i, pak
  - pokud $x \in A$, pak platí, že x náleží do právě jedné z A_i, tedy $\delta_x(A) = 1 = \delta_x(A_i) = \sum_{i \in I} \delta_x(A_i)$.
  - pokud $x \notin A$, pak zřejmě $\delta_x(A) = 0 = \sum_{i \in I} \delta_x(A_i)$.

Diskrétní pravděpodobnostní míra

Definice (Diskrétní pravděpodobnostní míra)

Mějme libovolnou Ω, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ a prvky $x_i \in \Omega$ a $a_i \in [0, 1]$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$ tak, že $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Pak se $P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definované

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \delta_{x_i}(A),$$

nazývá **diskrétní pravděpodobnostní míra** na Ω.

Poznámky:

- diskrétní pravděpodobnostní míra je zobecnění Diracovy míry a klasické pravděpodobnostní míry;
- lze definovat na libovolné Ω, tedy i $\Omega = \mathbb{R}$;
- míra je koncentrovaná ve spočetně mnoha bodech.

Věta

Diskrétní pravděpodobnostní míra je pravděpodobnostní míra.

Důkaz.

Zřejmě $P(\emptyset) = 0$, protože $\delta_{x_i}(\emptyset) = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots$.

Dále platí $P(\Omega) = 1$, protože $a_i \cdot \delta_{x_i}(\Omega) = a_i \cdot 1 = a_i$ a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$.

Zřejmě $P(A) \geq 0$ pro každou $A \in \mathcal{F}$.

Zbývá ověřit σ-aditivitu:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \delta_{x_j}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_j}(A_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \delta_{x_j}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

$\square$

Kolmogorovovy axiomy

Pravděpodobnostní míra se často zavádí následovně:

Definice (Андрей Николаевич Колмогоров)

Mějme σ-algebru $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. Každé zobrazení $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ splňující

(P1) $P(A) \geq 0$ pro každou $A \in \mathcal{F}$,

(P2) $P(\Omega) = 1$,

(P3) $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ pro libovolnou spočetnou $\{A_i \in \mathcal{F} \mid i \in I\}$,
kde $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in I$ takové, že $i \neq j$ (**σ-aditivita**),

se nazývá **pravděpodobnostní míra na $\mathcal{F}$**, (angl.: *probability measure*). Číslu $P(A) \in \mathbb{R}$ říkáme **pravděpodobnost výskytu jevu A**.

Je třeba prokázat, že

- *předchozí dvě definice jsou ekvivalentní* (viz dále).

Věta (Pravděpodobnost komplementárních jevů)

Pro každý náhodný jev $A \in \mathcal{F}$ platí:

$$P(A) + P(A') = 1, \tag{1}$$

$$P(A) = 1 - P(A'). \tag{2}$$

Důkaz.

Jelikož je $\mathcal{F}$ σ-algebra, pokud $A \in \mathcal{F}$, pak $A' \in \mathcal{F}$.

Jevy A a A' se vzájemně vylučují, protože $A \cap A' = \emptyset$. Použitím (P3) dostáváme

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A').$$

Dále platí, že $A \cup A' = \Omega$ a $P(\Omega) = 1$ plyne užitím (P2). Odtud

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(\Omega) = 1,$$

což dokazuje (1). Vztah (2) plyne přímo ze vztahu (1). $\square$

Příklad (Postupné házení mincí)

Házíme mincí tak dlouho, dokud neuvidíme stejné strany dvakrát po sobě.

Zajímáme se o počet hodů, které je potřeba vykonat.

Uvažujme $A = \{3, 4, 5, \ldots\}$, to jest A má význam „je potřeba tři hody nebo víc".

Úkol: Stanovte hodnotu $P(A)$.

Zřejmě $A' = \Omega - A = \{2\}$.

Během dvou hodů máme následující možné výsledky: $\{HH, HT, TH, TT\}$.

Za předpokladu, že mince je nefalšovaná, máme:

$$P(A') = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

To jest, $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Věta (Pravděpodobnost nemožného jevu)

$$P(\emptyset) = 0. \tag{3}$$

Důkaz.

Z předchozí Věty dostáváme, že pro každou $A \in \mathcal{F}$ platí

$$P(A) = 1 - P(A').$$

Speciálně pro $A = \emptyset$ máme

$$P(\emptyset) = 1 - P(\emptyset') = 1 - P(\Omega).$$

To jest, použitím faktu $P(\Omega) = 1$ (P2) dostáváme

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Důsledek: $P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ splňující (P1)–(P3) je míra. □

Příklad (Jev s pravděpodobností 0 může nastat)

Vezměme Lebesgueovu míru m na $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$.

Zřejmě m je míra na $\mathcal{B} \cap 2^{[0,1]}$, pro kterou $m([0,1]) = 1 - 0 = 1$,
to jest m je pravděpodobnostní míra (dále ji označujeme P).

Z definice Lebesgueovy míry:

$P\big((0.5, 1)\big) = 0.5$,
$P\big((0.25, 0.3)\big) = 0.05$,
$P\big([0.5, 0.5]\big) = P(\{0.5\}) = 0, \ldots$

Obecně:

$P\big(\{a\}\big) = P\big([a, a]\big)\big) = 0$ (všechny elementární jevy mají pravděpodobnost 0).

Analogicky: Jev s pravděpodobností 1 nemusí nastat, například
$P\big([0,1] - \{a\}\big) = 1 - P\big(\{a\}\big) = 1 - 0 = 1.$

Věta (Monotonie pravděpodobnosti)

Pro jakékoliv náhodné jevy $A, B \in \mathcal{F}$ *platí:*

$$\textit{pokud } A \subseteq B \textit{ pak } P(A) \leq P(B). \tag{4}$$

Důkaz.

Předpokládejme, že $A \subseteq B$. Platí, že B lze vyjádřit jako $B = A \cup (B - A)$. Dále platí, že A a $B - A$ jsou vzájemně neslučitelné jevy, to jest $A \cap (B - A) = \emptyset$. Můžeme proto aplikovat (P3) následovně:

$$P(B) = P\big(A \cup (B - A)\big) = P(A) + P(B - A).$$

Dále z (P1) plyne, že $P(B - A) \geq 0$, to jest

$$P(A) \leq P(A) + P(B - A) = P(B),$$

což je hledaná nerovnost. □

Věta (Důsledky monotonie)

Pro libovolný náhodný jev $A \in \mathcal{F}$ platí:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \qquad (5)$$

Důkaz.

Užitím (P1) dostáváme $0 \leq P(A)$. Zbývá tedy dokázat, že $P(A) \leq 1$. Užitím předchozí Věty, pro každé $A, B \in \mathcal{F}$ platí:

$$\text{pokud } A \subseteq B \text{ pak } P(A) \leq P(B).$$

Položme $B = \Omega$. Zřejmě platí $A \subseteq \Omega$. Použitím (P2) dostáváme $P(\Omega) = 1$, to jest

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1,$$

což dokazuje (5). □

Věta (Vztah pravděpodobnosti A, $A - B$ a $A \cap B$)

Pro libovolné náhodné jevy $A, B \in \mathcal{F}$ platí:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B). \tag{6}$$

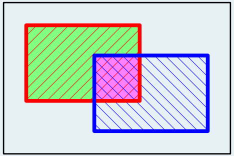
Důkaz.

Jelikož $A, B \in \mathcal{F}$, pak i $A - B = A \cap (\Omega - B) \in \mathcal{F}$ a také $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Dále platí, že $A - B$ a $A \cap B$ se vzájemně vylučují a platí, že $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

Užitím (P3) proto dostáváme:

$$P(A) = P\big((A - B) \cup (A \cap B)\big) = P(A - B) + P(A \cap B).$$



A, $A - B$ a $A \cap B$

□

Věta (Pravděpodobnost sjednocení a průniku náhodných jevů)

Pro libovolné náhodné jevy $A, B \in \mathcal{F}$ *platí:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{7}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B). \tag{8}$$

Důkaz (začátek).

Platí, že $A - B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ a $B - A \in \mathcal{F}$. Navíc jsou $A - B$, $A \cap B$ a $B - A$ vzájemně neslučitelné náhodné jevy, pro které

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A).$$

Použitím (P3) dostáváme, že

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A).$$

Použitím předchozí Věty, $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$, to jest

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A).$$

Důkaz (dokončení).

Nyní zbývá dokázat, že $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$. Toto tvrzení je však opět důsledkem předchozí Věty. Platí totiž

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B),$$

z čehož dostáváme

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B).$$

Shrneme-li předchozí zjištění dohromady, dostaneme

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \\ &= P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \end{aligned}$$

což prokazuje rovnost (7). Rovnost (8) plyne z právě dokázané rovnosti (7). □

Příklad (Problém semaforů na cestě ze Senice na Hané)

Motorista jede ze Senice na Hané automobilem směrem budova PřF a na cestě jej mohou zdržet dva semafory. Pravděpodobnost, že musí zastavit na prvním semaforu je 0.4 (označíme $P(A) = 0.4$); pravděpodobnost, že musí zastavit na druhém semaforu je 0.5 (označíme $P(B) = 0.5$); a pravděpodobnost, že musí zastavit aspoň na jednom z nich je 0.6 (to jest, $P(A \cup B) = 0.6$).

Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že:

1. Motorista musí zastavit na obou semaforech?
2. Motorista musí zastavit na prvním semaforu, ale ne na druhém?
3. Motorista musí zastavit právě na jednom semaforu?

Řešení:

1. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.3.$
2. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1.$
3. $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = 0.1 + P(B) - P(A \cap B) = 0.3.$

Příklad (Dva různé pravděpodobnostní prostory)

$$
\begin{aligned}
P_1(\emptyset) &= 0, & P_1(\{a\}) &= 0.2, & P_1(\{b\}) &= 0.4, & P_1(\{c\}) &= 0.1,\\
P_1(\{d\}) &= 0.3, & P_1(\{a,b\}) &= 0.6, & P_1(\{a,c\}) &= 0.3, & P_1(\{a,d\}) &= 0.5,\\
P_1(\{b,c\}) &= 0.5, & P_1(\{b,d\}) &= 0.7, & P_1(\{c,d\}) &= 0.4, & P_1(\{a,b,c\}) &= 0.7,\\
P_1(\{a,b,d\}) &= 0.9, & P_1(\{a,c,d\}) &= 0.6, & P_1(\{b,c,d\}) &= 0.8, & P_1(\{a,b,c,d\}) &= 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2(\emptyset) &= 0, & P_2(\{a\}) &= 0.3, & P_2(\{b\}) &= 0.3, & P_2(\{c\}) &= 0.2,\\
P_2(\{d\}) &= 0.2, & P_2(\{a,b\}) &= 0.6, & P_2(\{a,c\}) &= 0.5, & P_2(\{a,d\}) &= 0.5,\\
P_2(\{b,c\}) &= 0.5, & P_2(\{b,d\}) &= 0.5, & P_2(\{c,d\}) &= 0.4, & P_2(\{a,b,c\}) &= 0.8,\\
P_2(\{a,b,d\}) &= 0.8, & P_2(\{a,c,d\}) &= 0.7, & P_2(\{b,c,d\}) &= 0.7, & P_2(\{a,b,c,d\}) &= 1.
\end{aligned}
$$

Pro P_1 a P_2 platí:

1. $P_1(\{a,b\}) = 0.6$, $P_1(\{b,c\}) = 0.5$, ale $P_1(\{b\}) = 0.4$ a $P_1(\{a,b,c\}) = 0.7$.
2. $P_2(\{a,b\}) = 0.6$, $P_2(\{b,c\}) = 0.5$, ale $P_2(\{b\}) = 0.3$ a $P_2(\{a,b,c\}) = 0.8$.

Věta (Zobecnění předchozí vlastnosti pro tři náhodné jevy)

Pro libovolné náhodné jevy $A, B, C \in \mathcal{F}$ *platí:*

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}P((A \cup B) \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad\; - \big(P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))\big) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad\; - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

$\square$

Věta (Princip inkluze a exkluze pro pravděpodobnostní prostory)

Pro libovolné náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *platí:*

$$P\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I_n} A_i\Big) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq I_n} (-1)^{|I|+1} \cdot P\Big(\bigcap\nolimits_{i \in I} A_i\Big),$$

kde $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

Důkaz (začátek).

Tvrzení prokážeme indukcí přes n. Pro $n = 1$ je zřejmé, protože $P(A) = P(A)$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a ukážeme, že tvrzení platí pro $n + 1$. Platí:

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I_{n+1}} A_i\Big) &= P\Big(\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I_n} A_i\Big) \cup A_{n+1}\Big) \\ &= P\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I_n} A_i\Big) + P(A_{n+1}) - P\Big(\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I_n} A_i\Big) \cap A_{n+1}\Big) \\ &= P\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I_n} A_i\Big) + P(A_{n+1}) - P\Big(\bigcup\nolimits_{i \in I_n} (A_i \cap A_{n+1})\Big) \end{aligned}$$

Důkaz (dokončení).

Dvojnásobým použitím indukčního předpokladu dostáváme:

$$P\Big(\bigcup\nolimits_{i\in I_{n+1}} A_i\Big) = P\Big(\bigcup\nolimits_{i\in I_n} A_i\Big) + P(A_{n+1}) - P\Big(\bigcup\nolimits_{i\in I_n}(A_i \cap A_{n+1})\Big)$$

$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq I_n} (-1)^{|I|+1} \cdot P\Big(\bigcap\nolimits_{i\in I} A_i\Big) + P(A_{n+1}) - P\Big(\bigcup\nolimits_{i\in I_n}(A_i \cap A_{n+1})\Big)$$

$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq I_n} (-1)^{|I|+1} \cdot P\Big(\bigcap\nolimits_{i\in I} A_i\Big) + P(A_{n+1}) - \sum_{\emptyset\neq I\subseteq I_n} (-1)^{|I|+1} \cdot P\Big(\bigcap\nolimits_{i\in I} A_i \cap A_{n+1}\Big)$$

$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq I_{n+1}} (-1)^{|I|+1} \cdot P\Big(\bigcap\nolimits_{i\in I} A_i\Big).$$

□

Příklady (Použití předchozí Věty)

Ze vztahu

$$P\Big(\bigcup\nolimits_{i\in I_n} A_i\Big) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq I_n} (-1)^{|I|+1} \cdot P\Big(\bigcap\nolimits_{i\in I} A_i\Big),$$

dostaneme pro A_1, A_2, A_3, A_4 následující předpis:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\
& - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) \\
& - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) \\
& + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\
& + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
& - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).
\end{aligned}$$

Poznámka: Počet sčítanců roste exponenciálně!

Příklad (Postupné házení mincí – modifikované zadání)

Házíme mincí tak dlouho, dokud neuvidíme stejné strany dvakrát po sobě.
Zajímáme se o počet hodů, které je potřeba vykonat.
Uvažujme $A = \{4, 5, \dots\}$, to jest A má význam „je potřeba čtyři hody nebo víc“.

Úkol: Stanovte hodnotu $P(A)$.

Zřejmě $A' = \Omega - A = \{2, 3\}$.

Výsledky během prvních dvou nebo tří hodů: $\{HH, TT, HTH, HTT, THH, THT\}$.

Po druhém hodu má každý HH, HT, TH, TT pravděpodobnost výskytu $\frac{1}{4}$.

V případě $\{HT, TH\}$, pokračujeme třetím hodem: $\{HTH, HTT, THH, THT\}$.

Po třetím hodu má každý HTH, HTT, THH, THT pravděpodobnost výskytu $\frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} P(A') &= P(\{HH, TT, HTT, THH\}) \\ &= P(\{HH\}) + P(\{TT\}) + P(\{HTT\}) + P(\{THH\}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}. \quad \text{To jest } P(A) = 1 - P(A') = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Poznámka: Neaditivní míry, teorie evidence, možnosti, . . .

Pravděpodobnost formalizuje pouze *specifický typ neurčitosti*.

Dempster-Shaferova teorie (DST)

- teorie evidence založená na dvou „neaditivních“ mírách:
  - superaditivní míra **domnění** (angl.: *belief measure*),
  - subaditivní míra **plauzibility** (angl.: *plausibility measure*).
- formalizuje některé fenomény (například „ignoranci“), které v teorii pravděpodobnosti nelze formalizovat
- speciální případ:
  - míry domnění a plauzibility jsou shodné,
  - míry přejdou v pravděpodobnostní míru.

Teorie možnosti

- míry **možnosti** (angl.: *possibility*) a **nutnosti** (angl.: *necessity*)

Přednáška 3: Závěr

Pojmy:

- náhodný jev, pole, σ-algebra, Borelovská množina, Borelovské jevové pole
- σ-aditivita, míra, pravděpodobnostní míra, pravděpodobnostní prostor
- interpretace pravděpodobnosti: frekventistická a Bayesovská
- Lebesgueova a Diracova míra, klasické pravděpodobnostní prostory

Použité zdroje:

Capinski M., Zastawniak T. J.: *Probability Through Problems*
Springer 2001, ISBN 978–0–387–95063–1.

Riečan B., Neubrunn T.: *Teória miery*
Veda 1992, ISBN 978–80–224–0368–9.

Hogg R. V., Tanis E. A.: *Probability and Statistical Inference*
Prentice Hall; 7. vydání 2005, ISBN 978–0–13–146413–1.