2.1 Kombinace jako výběry podmnožin o dané velikosti

Počty permutací a variací jsme stanovili jako počty způsobů, kterými jsme byli schopni vyplnit pozice pomocí objektů z nějaké množiny, přitom pokud byl objekt na danou pozici vložen, již nemohl být použít k zaplnění jiné pozice. Řadu kombinatorických problémů lze rovněž formulovat jako výběr prvků z množiny, pozice však již nehrají roli. Jediné, co nás zajímá je, jestli byl daný prvek množiny vybrán či nikoliv.

▷ **Příklad 2.1.** Mějme balíček obsahující 52 různých herních karet. Kolika způsoby lze z balíčku vybrat 5 karet? U tohoto typu problému se nezajímáme, v jakém pořadí karty z balíčku taháme, ale až o výsledné tažené karty. Z množinového pohledu se ptáme, kolik existuje pětiprvkových podmnožin množiny, která má 52 prvků. Předpokládejme, že odpověď na naši otázku je n. To jest 52 prvková množina má právě n podmnožin o velikosti 5. Když vezmeme libovolnou z těchto n podmnožin, pak existuje celkem 5! způsobů, jak z této množiny vytvořit uspořádané pětice karet. Tuto úvahu můžeme zopakovat pro každou z těchto n podmnožin, takže celkem existuje $n \cdot 5!$ vzájemně různých uspořádaných pětic karet vytažených z balíčku 52 karet. Ale takových pětic je právě $P_{5,52}$, protože se jedná o počet pětiprvkových variací z 52. Odtud dostáváme, že

$$n = \frac{P_{5,52}}{5!} = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2\,598\,960,$$

což je hledaný počet způsobů jak vybrat 5 karet z balíku 52 karet a zároveň je to počet všech různých 5 prvkových podmnožin množiny o 52 prvcích.

Úvahu z předchozího příklady můžeme zobecnit následovně: Označme C počet všech r prvkových podmnožin n prvkové množiny A (předpokládáme, že $0 \leq r \leq n$). Každou uspořádanou r-tici prvků z množiny A, ve které se žádný prvek neopakuje, můžeme získat tak, že nejprve vybereme r-prvkovou podmnožinu z A obsahující stejné prvky jako výchozí r-tice a pak tyto prvky vhodně přeuspořádáme. Jinými slovy, z každé r-prvkové podmnožny A můžeme vytvořit $r!$ vzájemně různých uspořádaných r-tic. Jelikož je celkový počet r-prvkových podmnožin roven C, pak existuje celkem $C \cdot r!$ různých uspořádaných r-tic hodnot z A, ve kterých jsou všechny prvku vzájemně různé. Z vlastností variací ale víme, že tento počet je roven $P_{r,n}$, to jest $C \cdot r = P_{r,n}$, tedy:

$$C \cdot r! = P_{r,n} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Odtud vyjádřením hodnoty C dostáváme:

$$C = \frac{P_{r,n}}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

2.2 Kombinace a kombinační čísla

Kombinačním číslem máme na mysli zobrazení, které hodnoty r a n zobrazuje na počet všech r-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Symbolicky jej zapisujeme $C_{r,n}$ nebo častěji ve tvaru

$$\binom{n}{r},$$

který čteme „n nad r“. Použitím předchozí úvahy tedy můžeme psát

$$C_{r,n} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Číslům $C_{r,n}$ se rovněž říká *binomické koeficienty.*

▷ **Příklad 2.2.** Prokážeme, že kombinační čísla mají následující vlastnosti:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Přímo z definice kombinačního čísla dostáváme:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \binom{n}{n-r}.$$

Za pozornost stojí, že jsme využili faktu $0! = 1$, tedy „faktoriálu nuly“ o kterém jsme v minulém cvičení řekli, že je důležitým speciálním případem.

► **Příklad 2.1.** Kolika způsoby lze rozdat třináct karet z balíčku 52 karet?

$[\binom{52}{13} = \dfrac{52!}{13! \cdot (52-13)!} = \dfrac{52!}{13! \cdot 39!} = 635\,013\,559\,600]$

▷ **Příklad 2.3.** Prokážeme, že pro kombinační čísla platí následující tzv. Pascalova rovnost:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}, \qquad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Z vlastností kombinačních čísel dostáváme:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!} =$$

$$n!\left(\frac{r+1}{(r+1)!((n+1)-(r+1))!} + \frac{(n+1)-(r+1)}{(r+1)!((n+1)-(r+1))!}\right) =$$

$$n!\left(\frac{r+1+(n+1)-(r+1)}{(r+1)!((n+1)-(r+1))!}\right) = \frac{n!(n+1)}{(r+1)!((n+1)-(r+1))!} =$$

$$\frac{(n+1)!}{(r+1)!((n+1)-(r+1))!} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Druhá rovnost je pouze reformulací první.

2.3 Pascalův trojúhelník

Vztah $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ má následující známou grafickou reprezentaci:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&&&1\\
&&&&&&&&&&&1&&1\\
&&&&&&&&&&1&&2&&1\\
&&&&&&&&&1&&3&&3&&1\\
&&&&&&&&1&&4&&6&&4&&1\\
&&&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1\\
&&&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1\\
&&&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1\\
&&&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1\\
&&&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1\\
&&1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1\\
&1&&11&&55&&165&&330&&462&&462&&330&&165&&55&&11&&1\\
1&&12&&66&&220&&495&&792&&924&&792&&495&&220&&66&&12&&1
\end{array}$$

2.4 Algoritmus pro výpis kombinací

Podobně, jako jsme generovali permutace a variace n-prvkové množiny můžeme generovat všechny její kombinace. Jinými slovy, úkolem je pro danou n-prvkovou množinu $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ vypsat všechny její r-prvkové podmnožiny. K problému se opět můžeme postavit tak, že jej redukujeme na výpis podmnožin A bez zvoleného prvku. Zřejmě totiž, pokud vezmeme prvek $a_1 \in A$, pak všechny r-prvkové podmnožiny A lze rozdělit na dvě (stejně velké) podmnožiny, totiž na všechny r-prvkové podmnožiny A obsahující a_1 a všechny r-prvkové podmnožiny A neobsahující a_1. V obou případech tyto podmnožiny získáme z $(r-1)$-prvkových podmnožin $A - \{a_1\}$ (v prvním případě k nim přidáme a_1, v druhém případě nikoliv).

Algoritmus pro výpis všech r-prvkových podmnožin $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ lze tedy shrnout následovně:

- vypiš všechny $(r-1)$-prvkové podmnožiny $A = \{a_2, \ldots, a_n\}$;
- vypiš všechny $(r-1)$-prvkové podmnožiny $A = \{a_2, \ldots, a_n\}$ a ke každé z nich přidej prvek a_1.

Opět se jedná o rekurzivní předpis, jehož limitní podmínkou jsou případy, kdy

- hledáme 0-prvkové kombinace (podmnožiny),
  výsledkem je jediná podmnožina $\emptyset$,
- hledáme 1-prvkové kombinace (podmnožiny) množiny $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$,
  výsledky jsou jednoprvkové množiny $\{b_1\}, \{b_2\}, \ldots, \{b_m\}$.

Z předchozího je zřejmé, že problém nalezení r-prvkových podmnožin n-prvkové množiny jsme redukovali na problém nalezení $(r-1)$-prvkových podmnožin $(n-1)$-prvkové množiny.

▷ **Příklad 2.4.** Dokážeme následující tvrzení (*binomická věta*):

$$(a+b)^n = \sum\nolimits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}.$$

Stačí si uvědomit, že n-tá mocnina součtu $a+b$ je ve tvaru

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)}_{n\text{-krát}},$$

přitom kdybychom roznásobili výrazy ve všech závorkách, dostaneme výraz ve tvaru součtu členů ve tvaru $a^r \cdot b^{n-r}$, přitom některé z nich se budou opakovat. Výraz $a^r \cdot b^{n-r}$ se přitom bude ve výsledném součtu opakovat tolikrát, kolik je možností, jak vybrat hodnotu a z r různých výrazů $(a+b)$. Výrazů je celkem n, počet možných výběrů je proto $C_{r,n}$. Odtud dostáváme, že $a^r \cdot b^{n-r}$ je ve výsledném součtu zopakováné $C_{r,n}$ krát. Řešení, které jsme ukázali, je kombinatorické. Zkuste si tvrzení dokázat indukcí.

Poznámka. Pomocí binomické věty můžeme odvodit počet všech podmnožin konečné množiny – tento počet je pochopitelně $2^{|A|}$ a tvrzení jako takové není překvapující, pro nás je ale zajímavé, že lze toto číslo vyjádřit kombinatoricky. Z našeho pohledu lze sečíst počet všech nulaprvkových, jednoprvkových, dvouprvkových,...,n-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, který je roven $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$. Použitím binomické věty dostáváme

$$\sum\nolimits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = \sum\nolimits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot 1 = \sum\nolimits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot 1^r 1^{n-r} = (1+1)^n = 2^n.$$

2.5 Permutace s opakováním

V předchozích úvahách jsme odvodili permutace jako počty způsobů, jak zaplnit n volných pozic n vzájemně rozlišitelnými objekty. Nyní můžeme tuto úlohu upravit a budeme uvažovat, že máme k dispozici n objektů, které jsou *dvou různých typů* a objektu v rámci každého z typů nelze vzájemně rozlišit. Celkový počet objektů n tedy lze rozdělit na r objektů prvního typu a $n-r$ objektů druhého typu (například r žlutých kuliček a $n-r$ modrých kuliček).

Pokud bychom chtěli nyní vyjádřit počet všech způsobů, jak zaplnit n pozic r objekty prvního typu a $n-r$ objekty druhého typu, pak zřejmě tento počet, zvaný počet *permutací s opakováním*, bude obecně menší než $n!$ (rozmyslete si, proč).

$\triangleright$ **Příklad 2.5.** Stanovte počet permutací s opakováním n objektů, které jsou rozděleny na dvě skupiny r a $n-r$ vzájemně identických objektů. Na problém zaplnění n pozic se v tomto případě můžeme dívat tak, že nejprve vybereme r pozic, kam vložíme (vzájemně nerozlišitelné) objekty prvního typu a zbylé pozice již vyplníme objekty druhého typu. Způsobů výběru pozic pro vložení objektů prvního typu je ale $\binom{n}{r}$, protože jde o libovolné r-prvkové podmnožiny z n pozic. Počet permutací s opakováním n prvků při uvažování dvou skupin s r a $n-r$ vzájemně nerozlišitelnými prvky je proto $\binom{n}{r}$.

2.6 Multinomický koeficient

V předchozím příkladu je zajímavé, že počet permuatcí (s opakováním) lze vyjádřit kombinačním číslem. To by někoho (kdo se na střední škole učil matematiku stylem memorování pouček a vzorců) mohlo překvapit vzhledem k tomu, že u permutací „záleží na pořadí“ a u kombinací „nezáleží na pořadí“. Úvaha je ale naprosto v pořádku, musíme si uvědomit, že se nám v ní vyskytuje pojem „pořadí“ ve dvou významech. Pozice pro vkládání prvků jsme volili jako podmnožiny všech pozic a u podmnožiny pozic nezáleží na pořadí v jakém do ní vkládáme identické prvky – toto pořadí nelze zaměňovat s pořadím r vybraných pozic z celkových n.

Zobecněním předchozí úvahy o dvou skupinách nerozlišitelných objektů můžeme přejit od binomického koeficientu obecně k multinomickému. Konkrétně uvažujme, že máme n pozic zaplnit objektu, které jsou z k disjunktních skupin. Všechny skupiny mají $n_1, n_2, \ldots, n_k$ vzájemně nerozlišitelných prvků, přitom $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Počet všech možností, jak zaplnit n pozic těmito prvky je roven

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

$\triangleright$ **Příklad 2.6.** Odvodíme předchozí vztah násobnou aplikací úvahy z předchozího příkladu. Uvědomme si, že každé zaplnění n pozic objekty z k skupin s četnostmi $n_1, n_2, \ldots, n_k$ získáme tak, že nejprve z n volných pozic vybereme pozice pro vložení n_1 prvků. Těch je, jako v předchozí úvaze, $\binom{n}{n_1}$. Dále nám zbývá $n-n_1$ volných pozic a ty stačí zaplnit prvky ze zbývajících skupin s četnostmi $n_2, \ldots, n_k$. To znamená, že z $n-n_1$ volných pozic vybereme pozice pro zaplnění n_2 prvky z druhé skupiny. Těch je potom $\binom{n-n_1}{n_2}$. Pomocí pravidla součinu tedy dostáváme, že existuje $\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2}$ možností, jak do n volných pozic umístit n_1 prvků prvního typu a potom n_2 prvků druhého typu. Dále můžeme úvahu opakovat pro další skupiny až po poslední skupinu s n_k prvky, které umístíme právě do zbývajících $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1} = n_k$ volných pozic. To znamená, že

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Pravou stranu rovnosti jsme získali vyjádřením kombinačních čísel pomocí faktoriálů a zkrácením čitatelů a jmenovatelů.

Hodnoty počtů permutací s opakováním z předchozího příkladu zapisujeme

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

a nazýváme je *multinomické koeficienty.*

► **Příklad 2.2.** Loď má k dispozici tři červené vlajky, čtyři žluté vlajky a dvě bílé vlajky. Kolikati způsoby může signalizovat na stežni s použitím všech vlajek? [$\binom{9}{3,4,2} = \dfrac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1\,260$]

► **Příklad 2.3.** Kolik různých slov bychom mohli sestavit přeudpořádáním písmen ve slově "`WOOLLOOMOOLOO`" (název čtvrti v Sydney). [$\binom{13}{1!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 1!} = 25\,740$]

2.7 Kombinace s opakováním

Kombinace s opakováním nejsou příliš zajímavé z pohledu výpočtu pravděpodobností. Pro úplnost je ale uvedeme. Uvažujme problém, kdy se snažíme vybrat r objektů z n možných skupin. Přitom prvků v každé skupině je neomezené množství. Výběr přitom probíhá tak, že můžeme bez omezení vybírat z libovolné skupiny. Jedná se přitom o *výběry prvků*, nikoliv o *zaplňování pozic*, takže nemá smysl uvažovat pořadí, v jakém jsou prvky vybírány. Otázkou je, kolik různých výběrů lze takto provést.

Svou povahou se tento typ výběrů podobá výběru podmnožin. V našem případě se však může libovolný prvek opakovat. Příkladem takového výběru může být například vrh deseti identickými šestistrannými kostkami. Počtu výběrů tohoto typu říkáme *r prvkové kombinace s opakováním z n prvků.*

Počet r prvkových kombinací s opakováním z n prvků můžeme vyjádřit pomocí permutací s opakováním objektů ze *dvou různých skupin.* Objekty z první skupiny budou označovat výchozí prvky, ze kterých vybíráme. Objekty druhé skupiny budou označovat oddělovače vzájemně odlišných prvků. Budeme tedy uvažovat:

- množinu A skládající ze z r nul a $n-1$ jedniček.
  0 ... označuje jakoukoliv z n výchozích hodnot
  1 ... reprezentuje oddělovač mezi sousedními různými hodnotami;
- permutace s opakováním z množiny A jsou například:
  pro $n = 6$ a $r = 10$ následující řetězce jedniček a nul:
  000101001100010, 001010010100010, 111110000000000, 100011010001000, ...

Nyní si stačí uvědomit, že každou r-prvkovou kombinaci s opakováním z n prvků lze jednodnačně zakódovat řetězcem skládajícím se z r nul a $n-1$ jedniček.

▷ **Příklad 2.7.** Pro $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ ($n = 6$) a $r = 10$ máme následující korespondenci:

000101001100010	$\Longleftrightarrow$	`aaabcceeef`
001010010100010	$\Longleftrightarrow$	`aabccdeeef`
111110000000000	$\Longleftrightarrow$	`ffffffffff`
100011010001000	$\Longleftrightarrow$	`bbbdeeefff`,...

a to za přepokladu, že prvku z A vypisujeme v pořadí `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`.

Počet r-prvkových kombinací s opakováním z n prvků je tedy roven počtu permutací s opakováním z $n-1+r$ prvků, přitom uvažujeme dvě skupiny nerozlišitelných prvků o $n-1$ a r prvcích. Vyjádřením permutací s opakováním pomocí kombinačních čísel:

$$C_{r,n-1+r} = \binom{n-1+r}{r} = \frac{(n-1+r)!}{r! \cdot (n-1+r-r)} = \frac{(n-1+r)!}{r! \cdot (n-1)!}.$$

► **Příklad 2.4.** Vrháme dvojicí šestistěnných kostek. Kolik existuje vzájemně různých výsledků vrhu? [$\binom{6-1+2}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$]

► **Příklad 2.5.** Uvažujme množinu $A = \{a, b, c, d, e\}$. Stanovte počet všech tříprvkových kombinací s opakováním prvků z množiny A, jednotlivé kombinace vypište a vypište i řetězce nul a jedniček (hodnot a oddělovačů), které s nimi korespondují.

$[C_{r,n-1+r} = \frac{(n-1+r)!}{r!\cdot(n-1)!} = \frac{(5-1+3)!}{3!\cdot(5-1)!} = \frac{5040}{144} = 35$

aaa,	aab,	aac,	aad,	aae,	abb,	abc,
abd,	abe,	acc,	acd,	ace,	add,	ade,
aee,	bbb,	bbc,	bbd,	bbe,	bcc,	bcd,
bce,	bdd,	bde,	bee,	ccc,	ccd,	cce,
cdd,	cde,	cee,	ddd,	dde,	dee,	eee

```
0001111 0010111 0011011 0011101 0011110 0100111 0101011
0101101 0101110 0110011 0110101 0110110 0111001 0111010
0111100 1000111 1001011 1001101 1001110 1010011 1010101
1010110 1011001 1011010 1011100 1100011 1100101 1100110
1101001 1101010 1101100 1110001 1110010 1110100 1111000]
```

2.8 Výběrové charakteristiky v jazyku R

Hodnoty ve vektorech (reprezentující výběru) lze třídit pomocí funkce `sort`, a hledat jejich minima a maxima pomocí funkcí `min` a `max`. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
x <- c(10, -2, 5, -8, 4, 12, 0)
sort (x)
min (x)
max (x)
```

Funkce `sort` vrací kopii vektoru, která je setříděná (není tedy destruktivní), výchozí věktor není změněn. Na funkci `sort` si můžeme ukázat, jak lze obecně funkcím v R předávat nepovinné argumenty. Pokud u volání funkce `sort` uvedene druhý nepovinný parametr s hodnotou `TRUE` nebo `FALSE` (nutné psát velkými písmeny, syntaxe R je case-sensitive), pak je výsledný vektor setříděn buď sestupně nebo vzestupně (implicitní chování). Nepovinné argumenty lze rovněž zadávat pomocí jejich jmen, podobně jako funkgují klíčová slova v Common LISPu. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
sort (x)
sort (x, TRUE)
sort (x, FALSE)
sort (x, decreasing=TRUE)
sort (x, decreasing=FALSE)
```

Pomocí setříděných vektorů můžeme hledat percentily včetně speciálních percentilů, jakými jsou kvartily a medián. K tomuto účeku má R zabudovány funkce `median` a `quantile`. Funkce `range` vrací dvouprvkový vektor obsahující nejmenší a největší prvky z vektoru. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
x <- c(10, 20, 30, 40, 55)
range (x)
median (x)
quantile (x, 0.25)
quantile (x, 0.5)
quantile (x, 0.75)
```

Pětihodnotový souhrn a interkvartilové rozpětí, které se používají při stanovení diagramů s anténami lze použít funkce `fivnum` a `IQR` (opět je nutno prát velkými písmeny). Vyzkoušejte si následující příklady:

```
fivenum (x)
IQR (x)
```

Pro výpočet kovariance a korelačního koeficientu máme k dispozici funkce `cov` a `cor`. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
x <- c(10, 20, 30, 40, 50)
y <- c(30, 20, 10, 0, -10)
sum ((x - mean (x)) * (y - mean (y))) / (length (x) - 1)
cov (x, y)
cov (x, y) / (sd (x) * sd (y))
cor (x, y)
```

2.9 Základní grafické funkce jazyka R

Mezi základními funkcemi dostupnými v balíku R jsou i funkce pro vizualizaci výběrů. Nyní si ukážeme některé z nich. Číslicový dendrogram lze zobrazit (v textovém režimu) pomocí funkce `stem`. Povinným parametrem funkce je vektor reprezentující výběr, nepovinným parametrem `scale` lze měnit hodnoty (řády hodnot), které patří pod jednotlivé stonky. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
x <- c(13, 14, 25, 26, 37, 38, 39)
stem (x)
stem (x, scale=1/2)
stem (x, scale=2)
x^2
stem (x^2)
stem (x^2, scale=100)
```

Dva výběry můžeme porovnat pomocí kvantilového porovnání. K tomuto účelu můžeme použít funkci `qqplot`. Funkce standardně podporuje pouze porovnání dvou výběrů o stejné velikosti. Pokud bychom chtěli provést kvantilové porovnání výběrů různých velikostí, je třeba nejprve pomocí funkce `quantile` vygenerovat z výběru vektor kvantilů. Pro vygenerování vektoru kvantilů lze použít funkce `seq` pro generování vektorů obsahující sekvence hodnot od-do s definovaným krokem. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
x <- c(16, 24, 33, 35, 38, 40, 45, 46, 51, 53,
       56, 59, 60, 63, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 83)

y <- c(12, 13, 20, 27, 34, 37, 40, 40, 41, 42,
       42, 42, 44, 50, 50, 51, 51, 52, 53, 54,
       54, 54, 55, 55, 56, 58, 59, 59, 59, 60,
       67, 70, 70, 77, 81, 82, 83, 84, 86, 99)

s <- seq (0.01, 0.99, by=0.01)
qx <- quantile (x, s, names=FALSE)
qy <- quantile (y, s, names=FALSE)

qqplot (qx, qy, xlab="vyber x", ylab="vyber y", col="blue")
```

Další možností porovnání dvou výběrů je porovnat jejich krabicové grafy s anténami. K tomuto účelu slouží funkce `boxplot`. Funkce má nepovinné arguenty `horizontal` (pro horizontální zobrazení diagramu, implicitní je vertikální), `outline` (zobrazování odlehlých hodnot, implicitně je zapnuté). Vyzkoušejte si následující příklady:

```
boxplot (x, horizontal=TRUE)
boxplot (x, col="yellow", horizontal=TRUE)
z <- c(x, -50, -45, 120, 130, 140);
boxplot (z, horizontal=TRUE)
boxplot (z, horizontal=TRUE, outline=FALSE)
```

Nakreslení dvou krabicových grafů vedle sebe nebo pod sebe můžeme provést uvedením obou výběrů při volání funkce `boxplot`. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
boxplot (x, y)
boxplot (x, y, horizontal=TRUE)
```

Balík R umožňuje pohodlně kreslit i histogramy pomocí funkce `hist`. Ta má kromě vektoru reprezentujícího výběr několik nepovinných argumentů. Například parametr `freq` který udává, jestli se jedná o histogram četností nebo histogram relativních četností. Parametr `col` umožňuje volit barvu obdélníků v diagramu, pomocí parametrů `density` a `angle` lze nastavit šrafování obdélníků (rozestup a úhel sklonu). Vyzkoušejte si následující příklady:

```
hist (y)
hist (y, freq=FALSE)
hist (y, col="lavender")
hist (y, density=10, col="green", border="black")
```

Důležitým nepovinným parametrem funkce `hist` je `breaks`, který umožňuje specifikovat intervalová rozdělení četností. Je možné spoecifikovat buď počet intervalů (jako numerickou hodnotu) nebo metodu stanovení počtu intervalů (řetězce "sturges", "scott" nebo "fd"), nebo vektor čísel určující hranice intervalů. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
hist (y, breaks=50)
hist (y, breaks="sturges")
hist (y, breaks="stcott")
hist (y, breaks="fd")
hist (y, breaks=c(-10,10,20,30,100))
hist (y, breaks=seq (0,110,by=5))
```

Balík R podporuje diagramy zobrazující regresní přímku. Pomocí funkce `plot` je možné proti sobě zobrazit hodnoty nezávislé a vysvětlované veličiny. Pomocí funkce `lm` je pro veličiny možné spočítat koeficienty regresní přímky (posun a sklon). Funkci `abline` lze potom využít k přidání přímky k již zobrazenému bodovému diagramu. Vyzkoušejte si následující příklady:

```
x <- c(3.4, 3.8, 4.1, 2.2, 2.6, 2.9, 2.0, 2.7, 1.9)
y <- c(5.5, 5.9, 6.5, 3.3, 3.6, 4.6, 2.9, 3.6, 3.1)
cara <- lm (y ~ x)
cara
plot (x, y, col="red")
abline (cara, col="blue")
```

Pro další grafické možnosti si prohlédněte demo spustitelné pomocí `demo (graphics)`.

Reference

[1] Baclawski K. P.: *Introduction to Probability with R*
Chapman & Hall/CRC, 2008, ISBN 978–1–42–006521–3.

[2] Devore J. L.: *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*
Duxbury Press, 7. vydání 2008, ISBN 978–0–495–55744–9.

[3] Hendl, J.: *Přehled statistických metod zpracování dat*
Portál, Praha 2006, ISBN 978–80–7367–123–5

[4] Hogg R. V., Tanis E. A.: *Probability and Statistical Inference*
Prentice Hall; 7. vydání 2005, ISBN 978–0–13–146413–1.