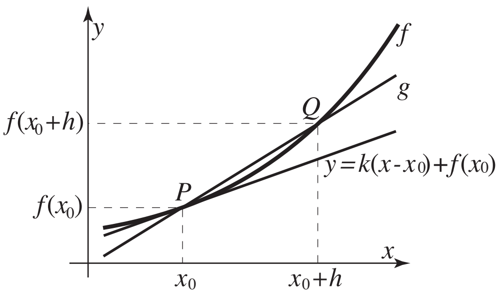
7. Diferenciální počet v $\mathbb{R}$

V této kapitole se dostáváme k jednomu z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy, k derivaci. Nejprve definujeme pojem *derivace* funkce reálné proměnné, následují základní vlastnosti derivace a derivace základních funkcí.

V dalších odstavcích se postupně věnujeme užití derivací při hledání extrémů funkcí, vyšetření konvexnosti, výpočtu limit a odhadu hodnoty funkce.



7.1 Derivace. Postupnými úvahami se pokusíme definovat pojem tečny ke grafu funkce. Uvažujme funkci $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu I. Zvolme si libovolný bod $x_0 \in I$ a kladné číslo $h \in \mathbb{R}$ volme tak, aby $x_0 + h \in I$. Označme si $P = (x_0, f(x_0))$ a $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ jim odpovídající body na grafu funkce f. Jak již víme (věta 2.13), grafem afinní funkce je přímka. Není těžké ověřit, že přímka procházející body P a Q je grafem afinní funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0). \tag{7.1.1}$$

Směrnice této přímky je $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$.

Limitu směrnic těchto přímek, pokud existuje, nazýváme *derivace funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$. Tedy

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\text{případně} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right). \tag{7.1.2}$$

Pokud ve vzorci (7.1.2) nahradíme limitu limitou zleva (případně zprava), dostaneme *derivaci zleva (zprava) funkce f v bodě x_0*, značíme ji $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$). Je-li limita v (7.1.2) nevlastní říkáme, že f má v x_0 *nevlastní derivace*, obdobně pro *vlastní derivaci*. Označení derivace, tedy symbol $f'(x_0)$, připomíná hodnotu nějaké funkce, je to záměrné. Mějme funkci $f\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je-li $X \subset J$ je množina obsahující všechny body, ve kterých má f vlastní derivaci, pak funkci $f'\colon X \to \mathbb{R}$, která bodu z X přiřadí derivaci funkce f v tomto bodě, nazveme *derivace funkce*.

Je-li f konstantní funkce, potom $f' = 0$; skutečně, pokud $f(x) = c$ máme

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Další funkcí, jejíž derivaci můžeme spočítat přímo pomocí definice derivace, je mocninná funkce. Nechť tedy $n \in \mathbb{N}$. Spočítejme derivaci funkce pow_n. Máme

$$\mathrm{pow}'_n(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{pow}_n(x_0 + h) - \mathrm{pow}_n(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^n + n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-1}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nx_0^{n-1} = n\,\mathrm{pow}_{n-1}(x_0).$$

Celkově tedy máme $(\mathrm{pow}_n)' = n\,\mathrm{pow}_{n-1}$, zjednodušeně zapisujeme $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Nyní uvažujme funkci $f(x) = 1/x$. Pro každé $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ máme

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_0+h-x_0}{(x_0+h)x_0}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x_0+h)x_0}h = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Právě jsme odvodili, že $(1/x)' = -1/x^2$.

Nyní již máme dostatečný aparát k tomu, abychom mohli nadefinovat pojem tečny. Přímka procházející bodem $(x_0, f(x_0))$ a mající směrnici $f'(x_0)$ je *tečna ke grafu funkce f v bodě* $(x_0, f(x_0))$. Rovnice této tečny je $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.

Úmluva: Nadále, v rámci této kapitoly, bude $I \subset \mathbb{R}$ představovat otevřený interval.

Následující věta je jednoduchým důsledkem věty 4.30, proto ji uvádíme bez důkazu.

Věta 7.1. *Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in J$ derivaci $f'(x_0)$ (vlastní nebo nevlastní), právě když existují $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.*

Pro ilustraci uvedeme následující příklad. Nechť $f(x) = |x|$ a $x_0 = 0$. Dostáváme

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0_-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_-}\frac{-h}{h} = -1.$$

Kděžto

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_+}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0_+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_+}\frac{h}{h} = 1.$$

Funkce absolutní hodnota má v bodě 0 derivaci zleva rovnu -1 a derivaci zprava rovnu 1, proto podle předchozí věty v nule nemá derivaci.

Souvislost mezi existencí derivace v bodě a spojitostí v tomto bodě popisuje následující věta.

Věta 7.2. *Nechť $f\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in J$ konečnou derivaci, potom f je v x_0 spojitá.*

D ů k a z. Počítejme limitu $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0))$. Je-li $f'(x_0)$ vlastní, potom

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}h =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0} h = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

Což dokazuje, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, a tedy i spojitost v x_0.

Podmínka, že derivace v bodě x_0 musí být konečná se nedá vynechat, to je vidět na funkci signum. Funkce signum má v bodě $x_0 = 0$ nevlastní derivaci rovnu $+\infty$, ale není v něm spojitá.

Na druhou stranu, nevlastní derivace nemusí nutně znamenat nespojitost. Uvažujme funkci $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Tato funkce je spojitá, neboť je to inverze k homeomorfismu (funkce x^3 homeomorfismus podle vět 2.15, 4.15, a 4.22), máme ale

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

7.2 Vlastnosti derivace. Následující věta nám bude velmi užitečná pro výpočet derivací funkcí definovaných jako součet řady funkcí.

Věta 7.3. *Buď (f_n) posloupnost funkcí $f_n\colon J \to \mathbb{R}$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje f_n' na J. Pokud řada $\sum f_n'$ stejnoměrně konverguje na množině J k funkci g a řada $\sum f_n$ na J konverguje k funkci f. Potom funkce f má na J derivaci a platí*

$$f' = g \qquad \Big(\text{nebo-li } f' = \sum f_n\Big).$$

Důsledek 7.4. *Platí:*
1. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
2. $\sin' x = \cos x$.
3. $\cos' x = -\sin x$.
D ů k a z. 1. Na definici funkce e^x aplikujeme větu 7.3. Máme

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x)' &= \Big(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\Big)' = \\
&= (1)' + \Big(\frac{x}{1!}\Big)' + \Big(\frac{x^2}{2!}\Big)' + \Big(\frac{x^3}{3!}\Big)' + \cdots = (\text{věta 7.3}) \\
&= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots = \mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$

Body 2 a 3 se dokáží obdobně.

Věta 7.5. *Buďte $f, g\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce mající derivaci v $x_0 \in J$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom*
1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
D ů k a z. První dva body dokážeme přímým výpočtem, tedy

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} g(x_0+h)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x_0)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} g(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \\
&= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Třetí bod je důsledkem bodu 2 této věty a toho, že derivace konstantní funkce je 0.

Věta 7.6 (Derivace složené funkce). *Nechť $f\colon J \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to J$, $x_0 \in I$ a nechť existují vlastní derivace $g'(x_0)$ a $f'(g(x_0))$. Potom existuje vlastní derivace $(f \circ g)'(x_0)$ a platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{7.2.1}$$

D ů k a z. Označme $y_0 = g(x_0)$ a definujme funkci $F\colon J \to \mathbb{R}$ takto:

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{pro } y \neq y_0, \\ f'(y_0) & \text{pro } y = y_0. \end{cases}$$

Je jasné, že je funkce F spojitá v y_0 (druhá větev vznikla jako limita první). Pro tuto funkci a libovolný bod $y \in J$ platí

$$(y - y_0)F(y) = f(y) - f(y_0), \tag{7.2.2}$$

a to i pro $y = y_0$ (ověřte si!), toho za chvíli využijeme.

Nyní počítejme derivaci funkce $(f \circ g)$ v x_0. Máme

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))F(g(x))}{x - x_0} = && \text{(viz. (7.2.2) pro } y = g(x)) \\ &= \lim_{x \to x_0} F(g(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= F\big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big)g'(x_0) = && \text{(věta 4.26)} \\ &= F(y_0)g'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0). && \text{(definice } F) \end{aligned}$$

Důsledek 7.7. *Buďte $f, g\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce mající derivaci v $x_0 \in J$ a $g(x_0) \neq 0$. Potom*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

D ů k a z. V následujícím výpočtu jsme využili vět 7.6, 7.5 a toho, že $(1/x)' = -1/x^2$ (kde?).

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{1}{g^2}\right)(x_0)g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Věta 7.8 (Derivace inverzní funkce). *Nechť $f\colon J \to I \subset \mathbb{R}$ je spojitá funkce rostoucí nebo klesající, $x_0 \in J$, $f^{-1}\colon I \to J$ inverze f. Pokud existuje vlastní $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje vlastní $(f^{-1})'(f(x_0))$ a platí*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \left(\textit{nebo také } f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))}\right). \tag{7.2.3}$$

D ů k a z. Pro zkrácení zápisu označme $y_0 = f(x_0)$. Funkce f je podle věty 4.22 homeomorfismus J a I, f^{-1} tedy existuje a je spojitá. Definujeme funkci $G\colon J \to \mathbb{R}$ předpisem

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{pro } x \neq x_0, \\ \dfrac{1}{f'(x_0)} & \text{pro } x = x_0. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá a to i v bodě x_0 (proč?).

Jelikož je f^{-1} injektivní, pro každé $y \in I$, $y \neq y_0$ je $f^{-1}(y) \neq x_0$. Proto v následujícím výpočtu využíváme první větev definice funkce G. Máme

$$\lim_{y\to y_0} G(f^{-1}(y)) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))} = \\ = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = (f^{-1})'(y_0).$$

Na druhou stranu podle věty o limitě složeného zobrazení dostaneme

$$\lim_{y\to y_0} G(f^{-1}(y)) = G(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Porovnáním posledních dvou rovnic dostaneme tvrzení věty.

Důsledek 7.9. *Platí:*
1. $\ln' x = \frac{1}{x}$, *pro* $x > 0$.
2. $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *pro* $x \in (-1, 1)$.
3. $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *pro* $x \in (-1, 1)$.
4. $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$, *pro* $x \in \mathbb{R}$.
5. $\operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$, *pro* $x \in \mathbb{R}$.
6. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ *platí* $(x^a)' = ax^{a-1}$.
7. Pro libovolné $a > 0$, $x > 0$ *platí* $(a^x)' = a^x \ln a$.

D ů k a z. 1. Ve vzorci (7.2.3) položíme $f = \ln$, máme $f^{-1} = \exp$ a

$$f'(x) = \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

Důkazy bodů 2–5 jsou obdobné, proto je zde neuvádíme.

6. Podle věty 7.6 a bodu 1 tohoto důsledku máme

$$(x^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{a\ln x}(a\ln x)' = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Obdobně lze postupovat při důkazu bodu 7.

Kontrolní otázky

1. Lze hovořit o derivaci funkce f i v jiných bodech, než bodech množiny $\operatorname{Dom} f$?
2. Je možné sestrojit funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ neexistují, ale $f'(0)$ existuje?
3. Platila by věta o derivaci složené funkce i pro jednostranné derivace?

7.3 Diferenciál funkce. Uvažujme funkci $f\colon J \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in J$. Lineární homogenní zobrazení $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme *diferenciál funkce* f *v bodě* x_0, jestliže

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)}{h} = 0. \tag{7.3.1}$$

Diferenciál funkce f v bodě x_0 označujeme $\mathrm{d}f(x_0)$.

Souvislost diferenciálu a derivace objasňuje následující věta

Věta 7.10. *Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ má diferenciál v bodě $x_0 \in J$, právě když má v tomto bodě derivaci a platí $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h$.*

D ů k a z. Každé lineární homogenní zobrazení $A\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má tvar $k \cdot h$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$. Dosazením za $A(h)$ do (7.3.1) dostaneme, že limita ve vrzorci (7.3.1) existuje, právě když existuje limita v následujícím vzorci a platí

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

To znamená, že $k = f'(x_0)$.

Lineární homogenní homogenní zobrazení $A\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lze předpisem zapsat $A(x) = kx$ pro pevné $k \in \mathbb{R}$. Proto občas ztotožňujeme lineární homogenní zobrazení A s číslem k. Derivace funkce f v bodě x_0 je také reálné číslo a vzhledem k předchozí větě míváme tendence ztotožňovat i diferenciál funkce v bodě s derivací funkce v tomto bodě. U funkcí jedné reálné proměnné je to přijatelné, u funkcí více proměnných je tento rozdíl již výraznější.

Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi derivací funkce a diferenciálem funkce?
2. Jaký má definiční obor a obor hodnot diferenciál funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

7.4 Derivace vyšších řádů. Má-li funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ derivaci ve všech bodech nějakého okolí U bodu $x_0 \in J$, můžeme uvažovat o existenci derivace funkce f' v bodě x_0. Pokud existuje, tuto hodnotu nazýváme *druhá derivace funkce f v bodě x_0* a označujeme ji $f''(x_0)$.

Postupně se takto můžeme propracovat k definici *derivace n-tého řádu v bodě x_0* (označujeme $f^{(n)}(x)$) jako derivaci derivace $(n-1)$-řádu $(f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0))$.

7.5 Extrémy. Nechť $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *rostoucí* (respektive *klesající, nerostoucí, neklesající*) *v bodě* $x_0 \in X$, jestliže existuje okolí $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ bodu x_0 takové, že $f((x_0-\delta, x_0)\cap X) < f(x_0) < f((x_0, x_0+\delta)\cap X)$ (respektive $f((x_0-\delta, x_0)\cap X) > f(x_0) > f((x_0, x_0+\delta)\cap X)$, $f((x_0-\delta, x_0)\cap X) \geq f(x_0) \geq f((x_0, x_0+\delta)\cap X)$, $f((x_0-\delta, x_0)\cap X) \leq f(x_0) \leq f((x_0, x_0+\delta)\cap X)$). Řekneme, že funkce f na bývá v x_0 *lokálního maxima (minima)* jestliže existuje okolí U bodu x_0 takové, že $f|_{U\cap X}$ nabývá v x_0 maxima (minima).

Lze dokázat, že pokud je funkce rostoucí v každém bodě intervalu J, pak je rostoucí na J, a že pokud je rostoucí na J pak je rostoucí v každém bodě intervalu J. Obdobně i pro další typy monotonie v bodě.

Věta 7.11. *Buď $f\colon J \to \mathbb{R}$ potom*
1. Je-li $f'(x_0) > 0$ (případně je-li $f'(x_0) = \infty$), potom je f v bodě x_0 rostoucí.
2. Je-li $f'(x_0) < 0$ (případně je-li $f'(x_0) = -\infty$), potom je f v bodě x_0 klesající.

D ů k a z. Z věty dokážeme pouze bod 1. Jelikož $f'(x_0) > 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \tag{7.5.1}$$

Pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $x - x_0 > 0$, a tedy z rovnice (7.5.1) plyne $f(x) > f(x_0)$, což dokazuje, že $f(x_0) < f(x_0, x_0 + \delta)$. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $x - x_0 < 0$ a z (7.5.1) plyne $f(x) < f(x_0)$, odtud $f(x_0 - \delta, x_0) < f(x_0)$. Dohromady dostáváme, že $f(x_0 - \delta, x_0) < f(x_0) < f(x_0, x_0 + \delta)$, to znamená, že f je v x_0 rostoucí.

Důsledek 7.12. *Je-li $x_0 \in J$ bodem extrému funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ a existuje-li $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.*

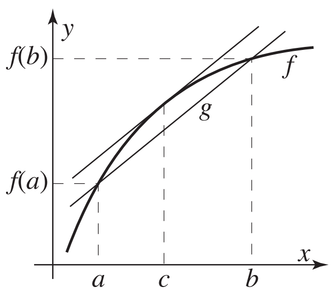
Věta 7.13 (Rolleova). *Buď $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce mající derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Pokud $f(a) = f(b)$, potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*
D ů k a z. Je-li f konstantní, pak c je libovolný bod intervalu (a, b).

Uvažujme dva možné případy. První: Existuje-li bod v (a, b), v němž funkce f nabývá hodnoty větší než $f(a)$, potom vezměme za c bod v němž funkce f nabývá na $[a, b]$ svého maxima. Takový bod existuje podle věty 4.9 a je různý od a i b, protože f nabývá hodnoty větší než $f(a)$ v nějakém bodě (a, b).

Zbývá ukázat, že $f'(c) = 0$. To ale plyne z Důsledku 7.12.

Druhý případ se dokáže obdobně.

Podmínka, že funkce musí mít derivaci v každém bodě (a, b) se nedá vynechat, důkazem toho je funkce $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Funkční hodnota v -1 i v 1 je rovna 1, ale v intervalu, $(-1, 1)$ není žádný bod v němž by byla derivace rovna 0.



Věta 7.14 (Lagrangeova věta o střední hodnotě). *Buď $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce mající derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{7.5.2}$$

D ů k a z. Větu dokážeme pomocí Rolleovy věty tak, že ji aplikujeme na rozdíl funkce f a afinní funkce g procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ (obdobně jako v (7.1.1)). Tedy uvažujme funkci $F : [a, b] \colon\to \mathbb{R}$,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Tato funkce splňuje všechny předpoklady věty 7.13 (ověřte!). A tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$. Protože

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

pro $x = c$ dostáváme

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Odtud již plyne (7.5.2).

Důsledek 7.15. *Buďte $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ spojité funkce. Je-li $f' = g'$, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f = g + c$.*

Jinak řečeno: funkce se stejnou derivací se na intervalu liší jen o konstantu.
D ů k a z. Označme $h = f - g$. Naším úkolem nyní je ukázat, že h je konstantní. Zvolme $x, y \in [a, b]$, $x < y$ libovolné body a ukážeme, že v nich má h stejnou hodnotu. Aplikujme

větu 7.14 na h a interval $[x, y]$. Pak existuje $z \in (x, y)$ takové, že $h(y) - h(x) = h'(z)(y - x) = (f'(z) - g'(z))(y - x) = 0$.

Větu o střední hodnotě ještě zobecníme.

Věta 7.16 (Cauchova věta o střední hodnotě). *Buďte $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ spojité funkce a nechť existuje v každém bodě $x \in (a, b)$ derivace $f'(x)$ (vlastní nebo nevlastní) a vlastní derivace $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{7.5.3}$$

D ů k a z. Větu dokážeme obdobným způsobem jako předchozí větu. Nejprve, protože $g'(x) \neq 0$ na (a, b), podle věty 7.14 máme, že $g(a) \neq g(b)$. Definujeme funkci $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Tato funkce splňuje podmínky věty 7.13, a proto existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$, tedy

$$F'(c) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

Odtud, protože $g(a) \neq g(b)$, již plyne (7.5.3).

Uvažujme funkci $f = \ln$ na intervalu $[a, b] = [5, 10]$. Podle věty o střední hodnotě existuje $c \in (5, 10)$ takové, že

$$(10 - 5)\ln'(c) = 5/c = \ln 10 - \ln 5 = \ln 2.$$

Protože $5 < c < 10$, znamená to, že $\frac{5}{10} < 5/c = \ln 2 < \frac{5}{5}$. Dostáváme první odhad hodnoty funkce ln v bodě 2:

$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

Pokračujme dále, z nerovnice $1 < 2\ln 2$ a z monotonosti funkce exp dostaneme

$$\mathrm{e} = \exp(1) < \exp(2\ln 2) = 4. \tag{7.5.4}$$

Číslo e je tedy menší než 4. Později v odstavci Taylorova řada se dozvíme, jak tyto odhady zpřesnit.

Věta 7.17. *Buď $f\colon J \to \mathbb{R}$ potom*
1. Je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in (a, b)$ (případně je-li $f'(x) = \infty$), pak je f na J rostoucí.
2. Je-li $f'(x) < 0$ pro $x \in (a, b)$ (případně je-li $f'(x) = -\infty$), pak je f na J klesající.
D ů k a z.

1. Zvolme $x, y \in J$, $x < y$. Pak podle věty 7.14 existuje $c \in (x, y)$ takové, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$. To znamená, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$.

2. Zvolme $x, y \in J$, $x < y$. Pak podle věty 7.14 existuje $c \in (x, y)$ takové, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$. To znamená, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) < 0$.

Věta 7.18. *Buď $f\colon J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$, f spojitá v x_0. Potom:*
1. Existuje-li okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$, má f v x_0 lokální maximum.
2. Existuje-li okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) > 0$, má f v x_0 lokální minimum.
D ů k a z. 1. Zvolme si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ libovolně, podle věty 7.14 existuje $c \in (x, x_0)$ takové, že $f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(c)$. Podle předpokladu $f'(c) > 0$, a proto $f(x_0) > f(x)$. Zvolíme-li si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, podle téže věty máme $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$. Nyní je podle předpokladu $f'(c) < 0$, a proto opět $f(x_0) > f(x)$. To znamená, že f má v x_0 lokální maximum.

Bod 2 se dokáže obdobně.

V kombinaci s větou 7.17 lze tuto popsat tak, že pokud je funkce spojitá v bodě, která je nějakém levém okolí bodu rostoucí a na nějakém pravém okolí bodu klesající, má v tomto bodě lokální maximum; pokud je na nějakém levém okolí bodu klesající a na nějakém pravém okolí bodu rostoucí, má v něm lokální minimum.

Povšimněme si, že předcházející věta nepožaduje, aby existovala derivace funkce f v bodě x_0. Proto nám tato věta odhaluje nejen lokální minimum funkce x^2 v $x_0 = 0$, ale i lokální minimum funkce $|x|$ v $x_0 = 0$.

Věta 7.19. *Buď $f: J \to \mathbb{R}$. Potom:*
1. Je-li $f''(x) > 0$ pro $x \in (a, b)$, pak je f na J konvexní.
2. Je-li $f''(x) < 0$ pro $x \in (a, b)$, pak je f na J konkávní.
D ů k a z. Zvolme si body $x, y, z \in J$, $x < y < z$. Podle věty 7.14 existují body $c \in (x, y)$ a $d \in (y, z)$ tak, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$ a $f'(d) = (f(z) - f(y))/(z - y)$. Odtud

$$\begin{aligned}(f'(d) - f'(c))(y - x)(z - y) &= (f(z) - f(y))(y - x) - (f(y) - f(x))(z - y) \qquad (7.5.5)\\ &= yf(z) - yf(y) - xf(z) + xf(y) - zf(y) + zf(x) + yf(y) - yf(x) =\\ &= yf(z) - xf(z) + xf(y) - zf(y) + zf(x) - yf(x) =\\ &= f(x)(z - y) + f(y)(x - z) + f(z)(y - x).\end{aligned}$$

1. Je-li $f'' > 0$ na J, tedy f' je na J rostoucí, potom je $f'(d) > f'(c)$ a levá strana v (7.5.5) je kladná.
2. Je-li $f'' < 0$ na J, tedy f' je na J klesající, potom je $f'(d) < f'(c)$ a levá strana v (7.5.5) je záporná.

Nechť $f: J \to \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $x_0 \in J$ a označme $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.[1)] Pokud existuje okolí bodu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ takové, že buďto 1. $f|_{(x_0, x_0-\delta)} > g$ a $f|_{(x_0, x_0+\delta)} < g$; nebo 2. $f|_{(x_0, x_0-\delta)} < g$ a $f|_{(x_0, x_0+\delta)} > g$, potom říkáme, že funkce f má v x_0 *inflexi*.

Podrobný pohled na tuto definici prozradí, že na okolí vlevo od inflexního bodu leží graf funkce f nad tečnou v tomto bodě a vpravo pod tečnou, nebo naopak. Je jasné, že pokud má funkce f v nějakém bodě inflexi, pak v něm nemůže mít extrém.

Funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ inflexi. Skutečně, nastává zde případ 1 z definice inflexe, tečnou ke grafu funkce x^3 v bodě $x_0 = 0$ je přímka $g(x) = 0$, pro libovolné $\delta > 0$ platí $f(-\delta, 0) < 0$ a $f(0, \delta) > 0$.

Věta 7.20. *Nechť $f: J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ a nechť existuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ale $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 < k < n$. Potom:*
1. Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$, je f v bodě x_0 rostoucí.
2. Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0$, je f v bodě x_0 klesající.
3. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 lokální minimum.
4. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 lokální maximum.
D ů k a z. Budeme větu dokazovat pouze pro případ $f^{(n)}(x_0) > 0$, případ, kdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, lze dokázat obdobně, uvažujeme-li funkci $-f$. Dokazujeme pomocí principu matematické indukce vzhledem k n.

Je-li $n = 1$, znamená to, že $f'(x_0) > 0$, a podle věty 7.11 je f v x_0 rostoucí.

Nyní nechť $n > 0$ a předpokládejme, že tvrzení věty platí pro n, a pokusme se jej dokázat pro $n + 1$. Položme $g = f'$; platí $g^{(n)} = f^{(n+1)}$, funkce g splňuje předpoklady naší věty.

Uvažujeme dva případy. Je-li $n + 1$ sudé, tedy n je liché. Protože g splňuje předpoklady této věty dostaneme, že g a následně i f' je v x_0 rostoucí. Protože f' je v x_0 rostoucí a $f'(x_0) = 0$ musí na nějakém levém okolí x_0 být $f' < 0$ a na pravém $f' > 0$. Použijeme větu 7.18 a dostaneme, že f má v x_0 lokální minimum.

[1)] Graf funkce g je tečna ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Je-li $n+1$ liché, to znamená n sudé. Užitím této věty na funkci g dostaneme, že g a tedy i f' má v x_0 lokální minimum. To ale spolu s $f'(x_0) = 0$ znamená, že na některém okolí x_0 je $f'(x) > 0$ pro $x \neq x_0$. Proto f musí být v x_0 rostoucí.

Důsledek 7.21. *Nechť $f\colon J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ a nechť existuje přirozené číslo $n >$* È1 *takové, že $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ale $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $1 < k < n$. Potom*
1. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, je f na okolí x_0 konvexní.
2. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, je f na okolí x_0 konkávní.
3. Je-li n liché, má f v x_0 inflexi.
D ů k a z. V bodech 1 a 2 použijeme předchozí větu na funkci $g(x) = f'(x)$ a v bodě 3 na funkci $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Výsledky obdržené v tomto odstavci použijeme pro vyřešení následujícího příkladu.

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(x^2+1)$. Najděme její lokální extrémy, inflexní body, intervaly konvexnosti, konkávnosti, kde je rostoucí a klesající.

Platí

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Tedy $f'(x) = 0$ pouze pro $x = 1$ a $x = -1$. Vzhledem k tomu, že $f'(x) > 0$ pro $-1 < x < 1$ a $f'(x) < 0$ pro $x < -1$ nebo $x > 1$, dostáváme, podle věty 7.17, že f je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$ a klesající na intervalech $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Podle věty 7.18 víme, že v bodě $x = -1$ nabývá f minima a v bodě $x = 1$ maxima. Protože

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = -2x\frac{x^2+1+2-2x^2}{(x^2+1)^3} = 2x\frac{x^2-3}{(x^2+1)^3}.$$

Platí $f''(x) = 0$ pro $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. Navíc $f'' > 0$ na intervalech $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$ a z věty 7.19 plyne, že je na těchto intervalech konvexní. (To nás jen utvrzuje, že je v bodě $x = -1$ lokální minimum, viz věta 7.20, bod 3.) Obdobně dostaneme, že f je konkávní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$. Po úpravě dostáváme

$$f'''(x) = 6\frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(x^2+1)^4}.$$

Inflexními body jsou body $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, protože v těchto bodech je $f''(x) = 0$ ale $f'''(x) \neq 0$ (porovnej s důsledkem 7.21).

7.6 Užití derivace pro výpočet limit. Pro výpočet limit typu $0/0$ nebo ∞/∞ je velice užitečná následující věta.

Věta 7.22 (L'Hospitalovo pravidlo). *Buďte $f, g\colon J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Pokud existuje $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní), pak existuje i $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.6.1}$$

D ů k a z. Nejprve dokážeme větu pro $x_0 \in \mathbb{R}$ a limitu zprava. Funkce $\bar{f}$, $\bar{g}$ budou rozšíření funkcí f, g s tím, že položíme $\bar{f}(x_0) = 0$ a $\bar{g}(x_0) = 0$. Obě funkce $\bar{f}$, $\bar{g}$ jsou spojité v x_0. Pro každé $x \in J$ podle věty 7.16 existuje $c \in (x_0, x)$ tak, že

$$\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}.$$

Jelikož $c \in (x_0, x)$, dostáváme

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \lim_{c \to x_0^+} \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}.$$

Případ $\lim_{x \to x_0^-}$ se dokáže obdobně. Kombinací obou výsledků máme větu dokázánu pro „oboustrannou" limitu.

Nyní nechť $x_0 = \infty$. Připomeňme, že $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(1/x)$. Definujeme funkce $F, G \colon \{1/x \mid x \in J \setminus \{0\}\} \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(1/x)$ a $G(x) = g(1/x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)}{G(x)} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = && \text{(předchozí odstavec)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

Důkaz případu $\lim_{x\to-\infty}$ si jistě čtenář udělá sám.

Věta 7.23 (L'Hospitalovo pravidlo). *Buďte $f, g \colon J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Pokud existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní), pak existuje i $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.6.2}$$

Pro důkaz této věty čtenáře odkazujeme na literaturu (například []).

Pomocí L'Hospitalova pravidla můžeme vypočítat limity, které bychom bez něj vypočítali jen stěží. Například je-li $n \in \mathbb{N}$, potom použijeme-li L'Hospitalovo pravidlo n-krát, dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

7.7 Taylorův polynom, Taylorova řada. Nechť $f \colon J \to \mathbb{R}$ je funkce, která má derivace na J až do řádu $n+1$ v bodě $a \in J$. Polynom $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-a)^n \tag{7.7.1}$$

nazýváme *Taylorův polynom řádu n v bodě a*. Definováním Taylorova polynomu se snažíme najít polynom, který by se od funkce f na intervalu J lišil jen „velmi málo". Tedy ptáme se, zda je možno k libovolně malé odchylce najít polynom $P(x)$, jehož hodnoty by se na J lišily od hodnot f nejvýše o tuto odchylku.

Pomocí Taylorova polynomu lze počítat hodnoty goniometrických (a jiných) funkcí s vysokou přesností. Pokud bychom chtěli vypočítat hodnotu $\sin 2$ na čtyři desetinná místa, stačil by nám odhad provedený v příkladě 4.

Věta 7.24 (Taylorova). *Buďte $a, x \in \mathbb{R}$ různá. Označme $I = [a, x]$ (případně $I = [x, a]$, je-li $x < a$). Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ má v I derivace až do řádu $n+1$ a nechť $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ má uvnitř I nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in \operatorname{int} I$ takové, že*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{7.7.2}$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi). \tag{7.7.3}$$

D ů k a z. Položme $F\colon I \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\frac{x-t}{1!} - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \cdots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Zřejmě $F(x) = 0$ a $F(a) = R_{n+1}(x)$. Funkce F má na celém intervalu I derivaci, přičemž platí

$$F'(t) = -f'(t) - \Big(-f'(t) + f''(t)\frac{x-t}{1!}\Big) - \Big(-f''(t)\frac{x-t}{1!} + f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big) - \\ - \cdots - \Big(-f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \\ -\Big(f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big) = \\ = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Na funkce F a φ aplikujme větu 7.16. Existuje tedy číslo $\xi \in \operatorname{int} I$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi'(\xi)}\frac{(x-\xi)^n}{n!}. \tag{7.7.4}$$

Uvědomíme-li si, že $F(x) - F(a) = -R_{n+1}(x)$, z (7.7.4) již (7.7.3) plyne.

Důsledek 7.25. *Za předpokladů věty 7.24*
1. pro $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, dostáváme Lagrangeův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi); \tag{7.7.5}$$

2. pro $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$, dostáváme Cauchyův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n(x-a)}{n!}f^{(n+1)}(\xi). \tag{7.7.6}$$

Budeme-li zvyšovat řád Taylorova polynomu, dospějeme nakonec k tomu, že polynom bude aproximovat funkce f přesně (bezchybně), třeba i za cenu toho, že se polynom změní v mocninnou řadu? Odpověď, kdy se tak stane, dává následující věta.

Věta 7.26 (Taylorova řada). *Buďte $a, x \in \mathbb{R}$ různá, označme $I = [a, x]$ (případně $I = [x, a]$, je-li $x < a$). Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ má v I derivace všech řádů a $R_n(x)$ je definováno vzorcem (7.7.3) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \end{aligned} \tag{7.7.7}$$

právě když $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

D ů k a z. Je velice jednoduchý, stačí si uvědomit, že pro částečný součet s_n řady ve vzorci (7.7.7) podle věty 7.24 platí $f(x) = s_n + R_{n+1}(x)$. Tedy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, právě když $f(x) = \lim s_n$.

Bývá velice výhodné rozvinout Taylorovu v bodě $a = 0$; v takovém případě hovoříme o *Maclaurinově řadě*.

Čtenáři doporučuji vypočítat si Maclaurinovy řady funkcí sin, cos a exp, výsledky potom porovnat s jejich definicemi v předchozí kapitole (měly by se shodovat). Taylorovy řady dalších funkcí například arctg nebo arcsin, zde neuvádíme a čtenář si je musí vyhledat v literatuře či sám vypočítat. Řada pro funkci ln je předmětem příkladu 3.

Pokusme se odhadnout číslo e s chybou menší než 0,001. Použitím věty 7.24 na funkci exp (střed volíme $a = 0$) dostaneme, že[2)]

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x). \\ R_{n+1}(x) &= \frac{x^n}{(n+1)!}\exp(\xi) < \frac{x^n}{(n+1)!}\exp(x). \quad \text{(exp je rostoucí)} \end{aligned} \tag{7.7.8}$$

Již víme z (7.5.4), že $\exp(1) = \mathrm{e} < 4$. Chceme-li mít chybu odhadu menší než 0,001 musíme najít n, pro nějž bude $|R_{n+1}(1)| < 0{,}001$. Máme

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{(n+1)!}4 < 0{,}001.$$

Pro $n \geq 6$ je poslední nerovnost splněna (ověřte!), stačí tedy sečíst prvních šest členů řady (7.7.8) a na intervalu [0, 1] je chyba menší než 0,001. Proto

$$\exp(1) = \mathrm{e} \doteq 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \tfrac{1}{5!} + \tfrac{1}{6!} = \tfrac{1957}{720} \doteq 2{,}718\,055\,5\ldots$$

Hodnota $R_7(1)$ se pohybuje kolem 0,000 024 a $R_9(1)$ blízko $2 \cdot 10^{-7}$, řada (7.7.8) konverguje skutečně velmi rychle.

Kontrolní otázky

1. Platila by Rolleova věta i bez předpokladu spojitosti funkce f? Ve kterém místě důkazu jsme jej využili?
2. Lze najít funkci splňující předpoklady věty o střední hodnotě (Rolleovy věty) mající v (a, b) nevlastní derivaci?
3. Ve kterých bodech může funkce nabývat svých extrémů?
4. Je vždy nutné počítat druhou respektive vyšší derivaci, abychom zjistili, zda funkce nabývá v daném bodě maxima, minima, nebo zda se jedná o inflexní bod?
5. Je možné, aby spojitá funkce měla na intervalu dvě lokální maxima a žádné lokální minimum?

[2)] To už tu jednou bylo, ne?

Příklady

1. *Nechť $g\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in J$ je spojitá. Pokud $g'(x_0)$ existuje a $g'(x_0) \neq 0$, potom existuje okolí U bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq x_0$ je $g(x_0) \neq g(x)$.*
Řešení: Jestliže $g'(x_0) > 0$, potom existuje $a > 0$ a okolí U bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U$, $x \neq x_0$ je

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) > a > 0.$$

To znamená, že

$$\begin{aligned} g(x) &> g(x_0) + a(x - x_0), && \text{(pro } x > x_0\text{)} \\ g(x) &< g(x_0) + a(x - x_0). && \text{(pro } x < x_0\text{)} \end{aligned}$$

Případ, kdy $g'(x_0) < 0$, se dokáže obdobně.

2. *Najděte lokální extrémyfunkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = 6 + \frac{5}{(x^2+1)^2},$$

určete, kde je funkce rostoucí, klesající, konvexní a konkávní.
Řešení: Spočítejme nejprve derivaci

$$f'(x) = -\frac{20x}{(x^2+1)^3}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Derivace je rovna 0 pouze pro $x = 0$ (funkce může mít lokální extrém pouze v nule). Snadno zjistíme, že $f'(x) > 0$ pro $x < 0$ a $f'(x) < 0$ pro $x > 0$, z toho již dostáváme, že f je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a klesající na intervalu $(0, \infty)$. Z posledních výsledku plyne, že funkce nabývá lokálního maxima v bodě $x = 0$, minima funkce nenabývá.

Nyní spočítáme druhou derivaci:

$$f''(x) = \frac{120x^2}{(x^2+1)^4} - \frac{20}{(x^2+1)^3}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Kořeny rovnice $f''(x) = 0$ jsou $x = \sqrt{5}/5$ a $x = -\sqrt{5}/5$. Z toho, že f'' je spojitá funkce, a odhadem hodnot $f''(-1)$, $f''(0)$ a $f''(1)$ dostaneme, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -\sqrt{5}/5)$ a $x \in (\sqrt{5}/5, \infty)$ (f je tedy na těchto intervalech konvexní) a že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5)$ (to znamená, že f je na tomto intervalu konkávní).

3. *Najděte Taylorovu řadu funkce $f = \ln$ se středem v 1 a určete její interval konvergence.*
Řešení: Taylorova řada má tvar $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f^{(n)}(x)/n! \cdot (x - x_0)^n$. První derivace funkce $\ln x$ je $\ln' x = 1/x$, dále druhá $\ln'' x = -1/x^2$, třetí $\ln''' x = 2/x^3$ a čtvrtá $\ln^{(4)} x = 3!/x^4$. Vidíme, že $\ln^{(n)} x = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. V bodě $x = 1$ dostaneme $\ln^{(n)} 1 = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Využijeme Lagrangova tvaru zbytku (7.7.5) a máme

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)\right| = \left|\frac{(x-1)^n}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\xi^n}\right| = \left|\frac{(x-1)^n}{n\xi^n}\right| \qquad (7.7.9)$$

Pro $x = 1$ je $\lim_{n\to\infty} R_n(1) = 0$ triviálně. Je-li $x > 1$, je $1 < \xi < x$. Proto $|R_n(x)| < (x-1)^n/n$ a $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pro $x \leq 2$.

Nyní nechť $0 < x < 1$. Využijeme Chauchyho tvar zbytku (7.7.6) Pro $f = \ln$ a $a = 1$ máme:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi)\right| = \left|\frac{(x-\xi)^{n-1}(x-1)}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\xi^n}\right| =$$
$$= (1-x)\left|\frac{(x-\xi)^{n-1}}{\xi^n}\right| = \frac{1-x}{\xi}\left|\frac{x-\xi}{\xi}\right|^{n-1}. \qquad (7.7.10)$$

Jelikož $0 < x < \xi < 1$, máme $|\xi| > |x-\xi|$, odtud $|x-\xi|/|\xi| < 1$. A tedy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
Proto Taylorova řada pro ln v $a = 1$ a $x \in (0, 2]$ bude mít tvar

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n. \qquad (7.7.11)$$

Pro $x \notin (0, 2]$ dostaneme, že řada v (7.7.11) nekonverguje.

4. *Odhadněte číslo* $\sin 2$ *s chybou menší než* 0,001.
Řešení: Musíme zjistit, kolik členů Taylorovy řady musíme sečíst, abychom dosáhli požadované přesnosti. Lagrangeův tvar zbytku (7.7.5) pro funkci sinus

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!}\sin^{(n+1)}(\xi).$$

Využijeme toho, že funkce sin a cos nabývají hodnot z intervalu $[-1, 1]$ a že funkce x^{n+1} je rostoucí (nabývá svého maxima v krajních bodech intervalu). Máme

$$|R_{n+1}(2)| \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}001.$$

Poslední nerovnost je splněna pro $n \ge 10$. Stačí tedy sečíst prvních deset členů Taylorovy řady pro sinus a získáme požadovaný odhad $\sin 2$:

$$\sin 2 \doteq 2 - \frac{2^3}{6} + \frac{2^5}{120} - \frac{2^7}{5\,040} + \frac{2^9}{362\,880} = \frac{2\,578}{2\,835} \doteq 0{,}909\,347\,442\,7.$$

Cvičení

1. Pomocí definice derivace, vypočítejte $f'(x_0)$ jestliže
   a) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$;
   b) $f(x) = |x|, \quad x_0 = 2$;
   c) $f(x) = ax^2, \quad x_0 = 1, a \in \mathbb{R}$;
   d) $f(x) = x + a, \quad x_0 = 1, a \in \mathbb{R}$;
   e) $f(x) = x^2, \quad x_0 = a \in \mathbb{R}$;
   f) $f(x) = |x|, \quad x_0 = a \in \mathbb{R}$;
   g) $f(x) = ax^2, \quad x_0 = b, a, b \in \mathbb{R}$;
   h) $f(x) = x + a, \quad x_0 = b, a, b \in \mathbb{R}$;
   i) $f(x) = 1/x, \quad x_0 = a \in \mathbb{R}$;
   j) $f(x) = 1/x^2, \quad x_0 = 2$;
2. Najděte minimum a maximum (pokud existují) funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na množině $A \subset \mathbb{R}$, jestliže
   a) $f(x) = x^2 + 3, \quad A = [-2, 2]$;
   b) $f(x) = -(x-3)^2, \quad A = [0, 5]$;
   c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad A = [-1, 1]$;
   d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}, \quad A = (0, 3]$.

3. Najděte přímku, která se dotýká paraboly $f(x) = x^2 - 7x + 13$ v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže
   a) $x_0 = 0$; b) $x_0 = 1$; c) $x_0 = a \in \mathbb{R}$.
4. Najděte kružnici o poloměru 1, která se dotýká přímky $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže
   a) $f(x) = 2, \quad x_0 = 1$; b) $f(x) = x, \quad x_0 = 2$;
   c) $f(x) = 3x, \quad x_0 = 3$; d) $f(x) = 2x + 2, \quad x_0 = 22$;
   e) $f(x) = 2x + a, \quad x_0 = 2a, a \in \mathbb{R}$.
5. Vypočtěte derivaci funkce f, kde
   a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$; b) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x}$; c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$;
   d) $f(x) = \ln(x+2)$; e) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+2}$; f) $f(x) = e^{2x^3+3x}$;
   g) $f(x) = a^{x^2-1}, \quad a > 0$; h) $f(x) = x^{x+1}$; i) $f(x) = x^{ax+a}, \quad a \in \mathbb{R}$;
   j) $f(x) = x^{x+x^2}$.
6. Buď $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce, která má derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$. Vypočítejte derivaci funkce f, kde
   a) $f(x) = 2\sqrt{x+1} + g(x)$; b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + g(2x+1)$;
   c) $f(x) = 6x^2 + g\left(\sqrt{x^2+1}\right)$; d) $f(x) = \dfrac{x+1}{2}g\left(e^{\sqrt{2x+1}}\right)$;
   e) $f(x) = \sqrt{x+1}\,g\left(\sqrt{x+1}\right)$; f) $f(x) = a^{x+1}g\left(\sqrt{x^2+1}\right)$;
   g) $f(x) = \ln(x)g\left(e^{x+1}\right)$; h) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{g(x+1)}$;
   i) $f(x) = x^{g(2x)}$; j) $f(x) = g(x^{2x})$.
7. Najděte Taylorův polynom funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ se středem v bodě 0, tak aby aproximoval f na I s přesností do 0,001, jestliže
   a) $f(x) = \cos x, \quad I = [0, 2\pi]$; b) $f(x) = \sin x, \quad I = [0, 2\pi]$;
   c) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}, \quad \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
8. Najděte Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě a a určete její interval konvergence, jestliže
   a) $f(x) = \sin x, \quad a = 0$; b) $f(x) = \cos x, \quad a = 0$;
   c) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$; d) $f(x) = \arcsin x, \quad a = 0$;
   e) $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad a = 0$.
9. Najděte lokální extrémy, inflexní body f a určete, kde je funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní, jestliže
   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; c) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$;
   d) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$; e) $f(x) = x + \sin x$; f) $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$;
   g) $f(x) = (x^2-1)^3$; h) $f(x) = x - x^{2/3}$.
10. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočítejte limity
   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$; b) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;
   c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$; d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sin^2(x)}$;
   e) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{2x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;
   g) $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)\operatorname{cotg} x$; h) $\lim_{x\to 0} x^{1/x}$;
   i) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x^2+b}\right)$; j) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x, \quad a > 0$.
11. Pomocí věty o třech limitách se pokuste dokázat, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má derivaci $f'(0) = 0$.

12. Nalezněte bod (x, y) na přímce $x + 2y = 5$, jehož vzdálenost od bodu $(0, 0)$ je minimální. (Návod: hledejte minimum funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + (\frac{1}{2}(5 - x))^2}$.)
13. Odhadněte čísla $\mathrm{e}, \mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3, \mathrm{e}^{-1}, \ln 2, \ln\left(\frac{1}{2}\right), \sin 5, \cos 2, \cos\sqrt{2}$ s chybou menší než 0,001.
14. Pod jakým úhlem se protínají grafy funkcí f a g v příslušných bodech, je-li

    a) $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$; b) $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3$;

    c) $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = \mathrm{e}$.
15. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ v průsečíku s přímkou $y = 1$.
16. Ukažte, že neplatí následující tvrzení: Jestliže existuje vlastní derivace $f'(0)$, pak je funkce f spojitá na nějakém okolí bodu 0. (Návod: Pokuste se najít protipříklad.)
17. Najděte funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí $f'(0) = 1$, která není rostoucí na žádném okolí bodu 0.
18. Dokažte následující tvrzení: Nechť f je polynom mající pouze reálné různé kořeny, pak i polynom f' má pouze reálné kořeny. (Návod: Použijte Rolleovu větu.)
19. Dokažte: Nechť f je spojitá a má vlastní nebo nevlastní derivaci na ohraničeném intervalu (a, b). Je-li f neohraničená na (a, b), f' je také neohraničená na (a, b). Jak tomu bude pro neohraničený interval?
20. Dokažte, že derivace periodické funkce je periodická funkce se stejnou periodou.
21. Najděte funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, aby platilo $(fg)' = f'g'$.
22. Najděte funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které nejsou spojité v žádném bodě $\mathbb{R}$, ale $f \circ g$ má derivace všech řádů.
23. Ukažte, že neexistuje funkce $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ taková, že f má vlastní derivaci na celém definičním oboru, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$. (Návod: Pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě ukažte, že je-li $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, potom je f omezená na nějakém intervalu $(0, a)$.)

Problém hasiče amatéra:

Mějme potok, který teče rovně. Hasič amatér bydlí od potoka ve vzdálenosti 40 metrů. Hořící škola je jenom 20 metrů od potoka na témže břehu jako hasičův dům. Vzdálenost kolmic na potok procházejících školou a hasičovým obydlím je 100 metrů. V jakém místě potoka musí hasič nabrat vodu do kbelíku, aby doběhl k hořící škole v nejkratším čase, víme-li, že poběží po přímkách a že s plným kbelíkem běží dvakrát pomaleji než s prázdným?

Problém šikovného strýčka:

Předpokládejme, že jste šikovný strýček. Váš synovec za vámi přijde s následujícím úkolem: Chtěl by z obdélníkového kusu plechu o rozměrech 50×30 centimetrů udělat krabici bez víka s co možná největším objemem. Vaším úkolem je tedy zjistit, jak moc je nutno plech nastřihnout, aby z nej utvořená krabice měla největší objem.

Problém středověkého stavitele:

Dejme tomu, že si vás pozve známý středověký stavitel, který potřebuje poradit s tímto problémem: Má železný pás o délce 200 palců a chtěl by z něj udělat rám románského okna. Jakou má zvolit šířku okna, aby do chrámu procházelo co nejvíce světla — tedy, aby plocha okna byla co největší?

Problém konstruktéra firmy PEPSI:

Předpokládejme, že jste konstruktér firmy PEPSI a dostanete následující úkol. Musíte navrhnout válcovou plechovku takovou, aby se do ní vešlo přesně $250\pi\,\mathrm{cm}^3$ tekutiny a přitom aby se na ní spotřebovalo co nejméně materiálu — tedy, aby měla co nejmenší povrch.

Problém líného vrabce:
Na plotě, jehož výška je 1 metr, sedí vrabec. Ve vzdálenosti 15 metrů od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 metry. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozesety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má vrabec sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot-žížala-větev po přímkách a po nejkratší dráze?

Problém náruživého kávomila:
Jako milovník kávy máte následující problém. Máte papír na kávový filtr kruhového tvaru o poloměru 10cm. Vystřihnutím kruhové výseče o úhlu α vznikne kávový filtr. Jak zvolit úhel α, aby se do něj vešlo co nejvíce kávy? Kolik to bude?

Výsledky

1. a) 2; **b)** 1; **c)** $2a$; **d)** 1; **e)** $2a$; **f)** -1 pro $a < 0$, 1 pro $a > 0$, pro $a = 0$ neexistuje; **g)** $2ab$; **h)** 1; **i)** $-1/a^2$ pro $a \neq 0$, pro $a = 0$ neexistuje; **j)** $-\frac{1}{4}$. **2. a)** $\min_{x\in A} f(x) = f(0) = 3$, $\max_{x\in A} f(x) = f(-2) = f(2) = 7$; **b)** $\min_{x\in A} f(x) = f(0) = -9$, $\max_{x\in A} f(x) = f(5)-4$; **c)** $\min_{x\in A} f(x) = f(-1) = -\frac{1}{2}$, $\max_{x\in A} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$; **d)** $\min_{x\in A} f(x) = f(1) = 2$, $\max_{x\in A} f(x)$ neexistuje. **3. a)** $y = 7x + 13$; **b)** $y = -5x + 12$; **c)** $y = (2a - 7)x - a^2 + 13$. **4. a)** $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ nebo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; **b)** $(x - 2 + \sqrt{2}/2)^2 + (y - 2 - \sqrt{2}/2)^2 = 1$ nebo $(x - 2 - \sqrt{2}/2)^2 + (y - 2 + \sqrt{2}/2)^2 = 1$; **5. a)** $-2/x^2$; **b)** $(x^2 - 4)/x^2$; **c)** $-2/(x(x + 2))$; **d)** $1/(x + 2)$; **e)** $x/(x^2 + 2)$; **f)** $3(2x^2 + 1)e^{x^3+3x}$; **g)** $2xa^{x^2-1}\ln a$; **h)** $x^x(x \ln x + x + 1)$; **i)** $x^{ax+a-1}(ax + a)$; **j)** $x^{x+x^2}(\ln x + 2x \ln x + x + 1)$. **6. a)** $1/\sqrt{x + 1} + g'(x)$; **b)** $x^2 + 2g'(2x + 1)$; **c)** $12x + xg'(\sqrt{x^2 + 1})/\sqrt{x^2 + 1}$; **d)** $\frac{1}{2}g\big(e^{\sqrt{2x+1}}\big) + ((x + 1)g'(e^{\sqrt{2x+1}}))e^{\sqrt{2x+1}})/(2\sqrt{2x + 1})$; **e)** $g(\sqrt{x + 1})/(2\sqrt{x + 1}) + \frac{1}{2}g'(\sqrt{x + 1})$; **f)** $a^{x+1}\ln a g\big(\sqrt{x^2 + 1}\big) + a^{x+1}xg'\big(\sqrt{x^2 + 1}\big)/\sqrt{x^2 + 1}$; **g)** $g\big(e^{x+1}\big)/x + \ln x g'\big(e^{x+1}\big)e^{x+1}$; **h)** $2x/g(x+1) - (x^2+1)g'(x+1)/(g(x+1))^2$; **i)** $x^{g(2x)}(2g'(2x)\ln x + g(2x)/x)$; **j)** $g'(x^{2x})x^{2x}(2\ln x + 2)$. **7. a)** $P(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! - x^{10}/10! + x^{12}/12!$; **b)** $P(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - x^{11}/11!$; **c)** $P(x) = 2x + 2x^3/3 + 2x^5/5 + 2x^7/7 + 2x^9/9$. **8. a)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n + 1)!$, konverguje na $\mathbb{R}$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$, konverguje na $\mathbb{R}$; **c)** $\sum(-1)^{n+1}(x - 1)^n/n$, konverguje na $(0, 2)$; **d)** $\sum_{n=0}^{\infty}(2n)!x^{2n+1}/(4^n(n!)^2(2n + 1))$, konverguje na $(-1, 1)$; **e)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n + 1)$ konverguje na $[-1, 1]$. **9. a)** lokální maximum $f(0) = -1$, inflexní ani bod lokálního minima nemá, rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$, klesající na $(0, 1)$ a $(1, \infty)$, konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, konkávní na $(-1, 1)$; **b)** lokální minimum $f(1) = 1$, lokální maximum $f(-1) = -1$, inflexní nemá, rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, klesající na $(-1, 0)$ a $(0, 1)$, konvexní na intervalu $(0, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 0)$; **c)** lokální minimum $f(0) = 0$, lokální maxima $f(-1) = f(1) = 1/e$, inflexní body $-\frac{5}{2} - \sqrt{17}/2$, $-\frac{5}{2} + \sqrt{17}/2$, $\frac{5}{2} - \sqrt{17}/2$ a $\frac{5}{2} + \sqrt{17}/2$, rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, klesající na intervalech $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$, konvexní na intervalech $\big(-\infty - \frac{5}{2} - \sqrt{17}/2\big)$, $\big(-\frac{5}{2} + \sqrt{17}/2, \frac{5}{2} - \sqrt{17}/2\big)$ a $\big(\frac{5}{2} + \sqrt{17}/2, \infty\big)$, konkávní na intervalech $\big(-\frac{5}{2} - \sqrt{17}/2, -\frac{5}{2} + \sqrt{17}/2\big)$ a $\big(\frac{5}{2} - \sqrt{17}/2, \frac{5}{2} + \sqrt{17}/2\big)$; **d)** lokální minima $f(-1) = f(1) = -4$, lokální maximum $f(0) = -3$, inflexní body $-\sqrt{3}/3$ a $\sqrt{3}/3$, rostoucí na intervalech $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$, klesající na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$, konvexní na intervalech $\big(-\infty, -\sqrt{3}/3\big)$ a $\big(\sqrt{3}, \infty\big)$, konkávní na intervalu $\big(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\big)$; **e)** lokální extrémy nemá, inflexní body $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, rostoucí na $\mathbb{R}$, konvexní na intervalech $(\pi + 2k\pi, 2(k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, konkávní na intervalech $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; **f)** lokální minima $f(-1) = f(1) = 0$, bod lokálního maxima nemá, inflexní body $-\sqrt{2}/2$ a $\sqrt{2}/2$, rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$, konvexní na intervalech $\bigl(-\infty, -\sqrt{2}/2\bigr)$ a $\bigl(\sqrt{2}/2, \infty\bigr)$ konkávní na intervalech $\bigl(-\sqrt{2}/2, -1\bigr)$ a $\bigl(1, \sqrt{2}/2\bigr)$; **g)** lokální minimum $f(0) = -1$, lokální maximum nemá, inflexní body -1 a 1, rostoucí na intervalu $[0, \infty)$, klesající na intervalu $(-\infty, 0)$, konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $\bigl(-\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5\bigr)$ a $(1, \infty)$, konkávní na intervalech $\bigl(-1, -\sqrt{5}/5\bigr)$ a $\bigl(\sqrt{5}/5, 1\bigr)$; **h)** lokální minimum v bodě $\frac{8}{27}$, lokální maximum $f(0) = 0$, rostoucí na intervalu $\bigl(\frac{8}{27}, \infty\bigr)$, klesající na intervalu $\bigl(0, \frac{8}{27}\bigr)$, konvexní na $(0, \infty)$. **10. a)** 1. **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 0; **d)** ∞; **e)** 1; **f)** 0; **g)** 1; **h)** 1; **i)** $(a - b)/2$; **j)** e^a. **12.** $\bigl(-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\bigr)$. **16.** Protipříklad $f(x) = x^2\chi(x)$. **17.** Například $f(x) = x + x^2\chi(x)$ nebo $f(x) = x + x^2 \sin(1/x)$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$. **21.** f, g konstantní funkce. **22.** $f, g = \chi$.