

TEMA 5

1. Determinați inversele următoarelor matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

$$\det A = 3 - 12 = 3 - 2 \equiv 1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_{26})$$

$$\det B = 15 \cdot 9 - 17 \cdot 4 = 135 - 68 = 67 \equiv 15$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 9 & -17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^*$$

Aflăm 15^{-1} în \mathbb{Z}_{26}

$$\begin{array}{l|l} 26 = 15 \cdot 1 + 11 & 1 = 4 - 3 \cdot 1 \\ 15 = 11 \cdot 1 + 4 & 1 = 4 - (11 - 4 \cdot 2) = 4 \cdot 3 - 11 \\ 11 = 4 \cdot 2 + 3 & 1 = (15 - 11 \cdot 1) \cdot 3 - 11 = 15 \cdot 3 - 11 \cdot 1 \\ 4 = 3 \cdot 1 + 1 & 1 = 15 \cdot 3 - (26 - 15 \cdot 1) \cdot 4 = 15 \cdot 3 - 26 \cdot 4 + 15 \cdot 4 = 15 \cdot 7 - 26 \cdot 1 \\ 3 = 1 \cdot 3 + 0 & \end{array}$$

$$B^{-1} = 7 \begin{pmatrix} 9 & -17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & -119 \\ -28 & 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 197 & 62 \\ 603 & 271 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_{841})$$

$$\det C = 197 \cdot 271 - 603 \cdot 62 = 53387 - 37486 = 15901 \equiv 763$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 271 & -62 \\ -603 & 197 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} C^*$$

Aufm 763^{-1} im \mathbb{Z}_{841}

$$\begin{array}{l|l} 841 = 763 \cdot 1 + 78 & 1 = 7 - 3 \cdot 2 \\ 763 = 78 \cdot 9 + 61 & 1 = 7(10 - 7 \cdot 1) \cdot 2 = 7 - 10 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 7 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \\ 78 = 61 \cdot 1 + 17 & 1 = (17 - 10 \cdot 1) \cdot 3 - 10 \cdot 2 = 17 \cdot 3 - 10 \cdot 5 \\ 61 = 17 \cdot 3 + 10 & 1 = 17 \cdot 3 - (61 - 17 \cdot 3) \cdot 5 = 17 \cdot 18 - 61 \cdot 23 \\ 17 = 10 \cdot 1 + 7 & 1 = 78 \cdot 18 - (763 - 78 \cdot 9) \cdot 23 = 78 \cdot 225 - 763 \cdot 23 \\ 10 = 7 \cdot 1 + 3 & 1 = 78 \cdot 225 - 763 \cdot 23 = (841 - 763 \cdot 1) \cdot 225 - 763 \cdot 23 = \\ 7 = 3 \cdot 2 + 1 & = 841 \cdot 225 - 763 \cdot 248 = 841 \cdot 225 + 763 \cdot \underline{\underline{-248}} \\ 3 = 1 \cdot 3 + 0 & \end{array}$$

$$763^{-1} = 841 - 248 = 593$$

$$C^{-1} = 593 \begin{pmatrix} 271 & -62 \\ -603 & 197 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 418 \\ 722 & 4 \end{pmatrix}$$