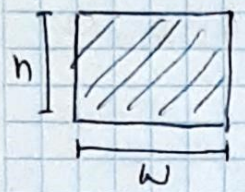
Actividad 2.7
Simulación Matemática

2 / Marzo / 2025

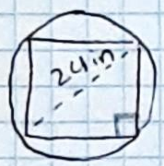
1. Sección transversal de una viga



Sea S la resistencia de la viga:

$S = k\,w h^2$ $\quad$ K es constante de proporcionalidad

¿Dimensiones de viga más resistente, a partir de leño con $D = 24$ in?



Maximizar S, considerando que $\sqrt{w^2+h^2} \leq 24$ in

Es conveniente expresar h como función de D y w:

$24^2 = w^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 24^2 - w^2 \Rightarrow S = Kw(24^2 - w^2)$

$S = 24^2 Kw - Kw^3 \Rightarrow \dfrac{dS}{dw} = 24^2 K - 3Kw^2$

$24^2 K - 3Kw^2 = 0 \Rightarrow 3Kw^2 = 24^2 K \Rightarrow w^2 = 192$

$w = \pm\sqrt{192} \approx \pm 13.86$ in

Punto crítico

$w > 0$ para sentido físico, entonces $\underline{w = 8\sqrt{3} \approx 13.86 \text{ in}}$

Segunda derivada:

$\dfrac{d^2S}{dw^2} = -6Kw$, evaluando en punto crítico:

$\left.\dfrac{d^2S}{dw^2}\right|_{w=8\sqrt{3}} = -6K(8\sqrt{3}) = \underline{-48\sqrt{3}\,K}$

Si $K > 0$, signo de seg. derivada es negativo, entonces $w = 8\sqrt{3}$ es un máximo relativo.

$h_{max} = \sqrt{24^2 - (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{384} = 8\sqrt{6} \approx 19.60$ in

Si $K = \dfrac{1000\ N}{mm^2}\left|\dfrac{645.16\ mm^2}{1\ in^2}\right| = \underline{645160\ \dfrac{N}{in^2}}$

$S = K(8\sqrt{3})(8\sqrt{6})^2 = K(384\sqrt{3}\ in^3) = \underline{429.1\ MN \cdot in}$

Actividad 2.7
Simulación Matemática

21 / Marzo / 2025

7. Mesa circular con $D = 4$ ft $\qquad I = K\sin(\alpha)\left(\frac{1}{s^2}\right)$

Fuente luminosa sobre mesa a h ft. donde s es altura oblicua, α ángulo de incidencia.

Si $s^2 = h^2 + 4$ y $\sin(\alpha) = \frac{h}{s}$

$(h^2+4)^{-3/2}$

$$I = K\frac{h}{s(h^2+4)} = K\frac{h}{(h^2+4)^{3/2}} = I(h)$$

$$\frac{dI}{dh} = K\left[\frac{(h^2+4)^{3/2} - h\frac{3}{2}(2h)(h^2+4)^{1/2}}{((h^2+4)^{3/2})^2}\right]$$

$$\frac{dI}{dh} = K\left[\frac{(h^2+4)^{1/2}((h^2+4)-3h^2)}{(h^2+4)^{6/2}}\right] = K\left[\frac{h^2-3h^2+4}{(h^2+4)^{5/2}}\right]$$

$$\frac{dI}{dh} = 2K\left(\frac{2-h^2}{(h^2+4)^{5/2}}\right)$$

Puntos críticos: $\frac{dI}{dh} = 0 = \frac{2K(2-h^2)}{(h^2+4)^{5/2}} \Rightarrow 4K - 2Kh^2 = 0$

$2 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{2}$ Por sentido físico, $h = +\sqrt{2}$ Punto crítico

Segunda derivada

$$\frac{d^2I}{dh^2} = \frac{d}{dh}\left(\frac{4K - 2Kh^2}{(h^2+4)^{5/2}}\right) = 2K\left[\frac{-2h(h^2+4)^{5/2} - (2-h^2)\left(\frac{5}{2}\right)(h^2+4)^{3/2}(2h)}{(h^2+4)^{10/2}}\right]$$

$$= 2K\left[\frac{-2h(h^2+4) - \left(\frac{5}{2}\right)(2-h^2)(2h)}{(h^2+4)^{7/2}}\right] = 2K\left[\frac{-2h^3 - 8h - 10h + 5h^3}{(h^2+4)^{7/2}}\right]$$

$$\frac{d^2I}{dh^2} = 2K\left[\frac{3h^3 - 18h}{(h^2+4)^{7/2}}\right] = 6Kh\left[\frac{h^2-6}{(h^2+4)^{7/2}}\right]$$

$$\left.\frac{d^2I}{dh^2}\right|_{h=\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}K\left[\frac{2-6}{(2+4)^{7/2}}\right] = 6\sqrt{2}K\left[-\frac{4}{6^{7/2}}\right] < 0$$

$\Rightarrow h = \sqrt{2}$ es un máximo relativo

$$I(\sqrt{2}) = K\frac{\sqrt{2}}{((\sqrt{2})^2+4)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}K}{(6)^{3/2}}$$

Actividad 2.7
Simulación Matemática

2 / Marzo / 2025

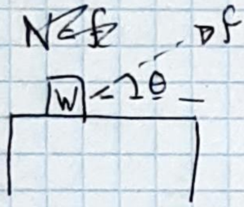
3. Fuerza mínima

Determinar f, la fuerza mínima para deslizar el bloque.

$W_{bloque} = 10\,N$

$f_r \propto W_{bloque}$

$f_r = K\,\cancel{N}\, f\sin\theta$ con $K = 0.1$



$$\Sigma F_x = f\cos\theta - K(W - f\sin\theta) = 0$$

$$f\cos\theta + Kf\sin\theta = KW$$

$$f(\cos\theta + K\sin\theta) = KW$$

$$f = \frac{KW}{\cos\theta + K\sin\theta}$$

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{-KW(K\cos\theta - \sin\theta)}{(\cos\theta + K\sin\theta)^2} = KW\left(\frac{\sin\theta - K\cos\theta}{(\cos\theta + K\sin\theta)^2}\right)$$

$$\frac{df}{d\theta} = 0 = \sin\theta - K\cos\theta \Rightarrow K\cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = K$$

$$\tan\theta = K \Rightarrow \theta = \underline{\arctan(K) \approx 0.10}$$ Punto crítico

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} = KW\left[\frac{\cancel{(\cos\theta + K\sin\theta)}(\cos\theta + K\sin\theta)^2 - 2\cancel{(\cos\theta + K\sin\theta)}(K\cos\theta - \sin\theta)(\sin\theta - K\cos\theta)}{(\cos\theta + K\sin\theta)^4}\right]$$

$$= KW\left[\frac{(\cos\theta + K\sin\theta)^2 + 2(K\cos\theta - \sin\theta)^2}{(\cos\theta + K\sin\theta)^3}\right]$$

$$= KW\left[\frac{\cos^2\theta + 2K\sin\theta\cos\theta + K^2\sin^2\theta + 2(K^2\cos^2\theta - 2K\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta)}{(\cos\theta + K\sin\theta)^3}\right]$$

$$= KW\left[\frac{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + \sin^2\theta - 2K\sin\theta\cos\theta + K^2\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} + K^2\cos^2\theta}{(\cos\theta + K\sin\theta)^3}\right]$$

$$= KW\left[\frac{1 + K^2 + \sin^2\theta - 2K\sin\theta\cos\theta + K^2\cos^2\theta}{(\cos\theta + K\sin\theta)^3}\right]$$

$$= KW\left[\frac{1 + K^2 + (\sin\theta - K\cos\theta)^2}{(\cos\theta + K\sin\theta)^3}\right]$$

$$\left.\frac{d^2f}{d\theta^2}\right|_0 > 0 \Rightarrow \underline{\theta \approx 0.10 \text{ es mínimo relativo}}$$

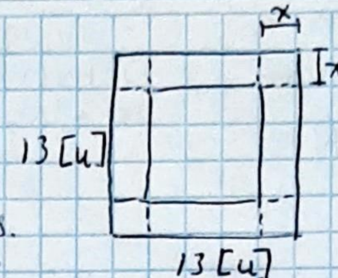
Actividad 2.7
Simulación matemática

21 / Marzo / 2025

4. Máximo volumen de caja.

Láminas de 13 [u] por lado.

Recorte de cuadrados en las esquinas.



$V(x) = x(13-2x)^2 \; [u]$

$0 \leq x < \frac{13}{2}$

$\frac{dV}{dx} = (13-2x)^2 + 2x(13-2x)(-2) = (13-2x)^2 - 4x(13-2x)$

$= 169 - 52x + 4x^2 - 52x + 8x^2 = 12x^2 - 104x + 169$

$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{104}{24} \pm \frac{\sqrt{10816 - 4(12)(169)}}{24} = \frac{13}{3} \pm \frac{\sqrt{2704}}{24}$

$x_{1,2} = \frac{13}{3} \pm \frac{52}{24} = \frac{13}{3} \pm \frac{13}{6} = \frac{26}{6} \pm \frac{13}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{13}{6}, \; x_2 = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$

$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 104 \qquad \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\frac{13}{6}} = 24\left(\frac{13}{6}\right) - 104 = -52$

$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{\frac{13}{2}} = 24\left(\frac{13}{2}\right) - 104 = 52$

En $x = \frac{13}{6}$, $\frac{d^2V}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ es un máximo relativo

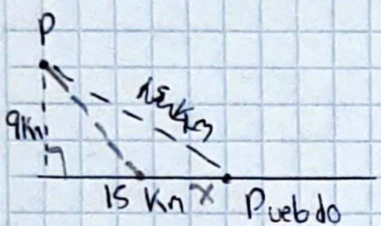
En $x = \frac{13}{2}$, $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ es un mínimo relativo

Para maximizar V, usar $x = \frac{13}{6}$

Actividad 2.7
Simulación Matemática

21 / Marzo / 2025

5. Tiempo a la orilla



$v = 5 \frac{Km}{h}$ (a pie)

$v = 4 \frac{Km}{h}$ (barca)

Sea x la dist. entre el punto de desembarque y el pueblo.

$$t = \frac{x\,[Km]}{5\left[\frac{Km}{h}\right]} + \frac{\sqrt{9^2 + (15-x)^2}}{4}$$

$$y^2 = 9^2 + (15-x)^2 \Rightarrow y = \sqrt{9^2 + (15-x)^2}$$

$$\min t(x)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{9^2+(15-x)^2}}\right)\left(2(15-x)\right)(-1)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\left(\frac{15-x}{\sqrt{81+(15-x)^2}}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\left(\frac{x-15}{\sqrt{81+(15-x)^2}}\right)$$

$$y = \sqrt{81 + 225 - 30x + x^2} = \sqrt{x^2 - 30x + 306}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{15-x}{\sqrt{x^2-30x+306}}\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow 5(15-x) = 4\sqrt{x^2-30x+306}$$

$$\Rightarrow 75 - 5x = 4\sqrt{81+(15-x)^2} \Rightarrow (75-5x)^2 = 16\left(81+(15-x)^2\right)$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 750x + 5625 = 1296 + 16(225 - 30x + x^2)$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 270x + 729 = 0$$

$$x_1 = 27 \quad , x_2 = 3$$

Como $0 \leq x \leq 15\,[Km]$, el punto crítico es $x = 3$ Km

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{(81+(15-x)^2)^{1/2} - (x-15)\left(\frac{1}{2}\right)(81+(15-x)^2)^{-1/2}(2(15-x))(-1)}{81+(15-x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{81+(15-x)^2}} + \frac{(x-15)(15-x)}{(81+(15-x)^2)^{3/2}}\right]$$

$$\left.\frac{d^2t}{dx^2}\right|_{x=3} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{81+144}} + \frac{(-12)(12)}{(81+144)^{3/2}}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{15} - \frac{144}{3375}\right]$$

$\approx 6 \times 10^{-3} > 0 \Rightarrow$ el punto crítico $x = 3$ es un mínimo relativo