Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL-5805 Procesamiento Digital de Señales
Profesor: M.Sc. José Miguel Barboza Retana
I Semestre, 2018
Examen Final

Total de Puntos:	93
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: ______________________________ Carné: ______________

Advertencias:

- Resuelva el examen en forma ordenada y clara.
- En todas las preguntas y problemas debe indicarse algún procedimiento o justificación clara para llegar a la solución.
- No se aceptarán reclamos de desarrollos con lápiz, borrones o corrector de lapicero.
- Si trabaja con lápiz, debe marcar su respuesta final con lapicero.
- El uso de lapicero rojo **no** está permitido.
- El uso del teléfono celular no es permitido. Este tipo de dispositivos debe permanecer **totalmente apagado** durante el examen.
- El instructivo de examen debe ser devuelto junto con su solución.
- El examen es una prueba individual.
- El no cumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

Firma: ______________________________

Pregunta 1	de 6
Pregunta 2	de 2
Pregunta 3	de 5
Pregunta 4	de 2
Pregunta 5	de 3
Pregunta 6	de 4
Pregunta 7	de 2
Problema 1	de 17
Problema 2	de 25
Problema 3	de 27

Preguntas

24 Pts

Debe justificar sus respuestas a las preguntas. Para ello basta un esbozo de la idea o concepto requerido, y si necesita más espacio puede utilizar el cuaderno de examen indicando claramente la pregunta correspondiente.

1. Determine la solución particular de la ecuación de diferencias: 6 Pts

$$y(n) = -\frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) - \frac{1}{2}x(n)$$

para la función $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$.

2. Indique cuál de las siguientes secuencias puede representar la autocorrelación de una secuencia real de longitud 4: 2 Pts

- ◯ a) $\left\{1, 2, 3, \underset{\uparrow}{4}, 1, 2, 3\right\}$
- ◯ b) $\left\{1, 2, 3, \underset{\uparrow}{0}, 3, 2, 1\right\}$
- ◯ c) $\left\{-1, -2, -3, \underset{\uparrow}{4}, 3, 2, 1\right\}$
- ◯ d) $\left\{1, 2, 3, 4, \underset{\uparrow}{2}, 4, 3, 2, 1\right\}$
- ◯ e) ninguna de las anteriores

3. Indique qué tipo de periodicidad (P: periódica, A: aperiódica) y continuidad (C: contínua, D: discreta) deben tener las señales en el dominio temporal y en el dominio frecuencial para las siguientes herramientas de análisis de Fourier. 5 Pts

Herramienta	Dominio del tiempo		Dominio de la frecuencia	
	Continuidad	Periodicidad	Continuidad	Periodicidad
Serie de Fourier				
Transformada de Fourier				
Serie de Fourier en T. Discreto				
Transf. de Fourier en T. Discreto				
Transformada Discreta de Fourier				

4. Una señal analógica senoidal con una frecuencia de $F = 100\,kHz$ es muestreada a una tasa de $F_s = 75\,kHz$. Si la señal analógica es reconstruida posteriormente a partir de las muestras con un interpolador ideal, indique qué frecuencia tiene la señal reconstruida. 2 Pts

5. Una señal analógica $x_a(t)$ limitada en banda se muestrea respetando las restricciones del teorema de muestreo. Si las muestras $x(n) = x_a(nT_s)$ están dadas por: 3 Pts

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$$

con T_s el periodo de muestreo, encuentre los valores de $x_a(t)$ en $t = T_s/2$ y en $t = 3T_s$.

6. Indique cuál es el retardo de grupo del filtro con respuesta al impulso: 4 Pts

$$h(n) = \left\{\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}, 0, 0, 0, ...\right\}$$

Justifique.

7. El filtro descrito por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = -0{,}81y(n-2) + 1{,}8y(n-1) + 0{,}1x(n)$$

tiene un comportamiento de paso bajos en la frecuencia. ¿Cúal de las siguientes ecuaciones de diferencias representa un filtro con un comportamiento de paso altos? 2 Pts

- ◯ a) $y(n) = -0{,}81y(n-2) - 1{,}8y(n-1) - 0{,}1x(n)$
- ◯ b) $y(n) = 0{,}81y(n-2) - 1{,}8y(n-1) + 0{,}1x(n)$
- ◯ c) $y(n) = -0{,}81y(n-2) + 1{,}8y(n-1) - 0{,}1x(n)$
- ◯ d) $y(n) = 0{,}81y(n-2) - 1{,}8y(n-1) - 0{,}1x(n)$
- ◯ e) Ninguna de las anteriores

Problemas

Problema 1 Transformada z **17 Pts**

La respuesta al impulso de un sistema en tiempo discreto está dada por:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$$

1.1. Determine la función de transferencia del sistema. Exprese su respuesta como una razón de polinomios. 4 Pts

1.2. Grafique el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia del punto anterior. Indique claramente la región de convergencia. A partir de este diagrama justifique la establidad y la causalidad de este sistema. 3 Pts

1.3. La transformada de z de una señal $x[n]$ de excitación aplicada al sistema tiene la forma:

$$X(z) = \frac{(1-3z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Además, se conoce que la señal de excitación $x(n)$ es una señal derecha. A partir de esta información determine la respuesta del sistema $y(n)$ para la entrada de excitación $x(n)$ aplicada. 8 Pts

1.4. Determine los valores de la respuesta del sistema desde $n = -2$ hasta $n = 2$, según lo encontrado en el inciso anterior. 2 Pts

Problema 2 Diseño de Filtros Digitales **25 Pts**

Sea un filtro caracterizado por la función de transferencia:

$$H_1(z) = b_0 \frac{1 + z^{-1}}{1 + rz^{-1}}$$

donde b_0 es una constante que asegura que el máximo valor de la respuesta en magnitud $|H_1(\omega)|$ sea 1, y r es un valor real positivo menor que 1.

2.1. ¿Cuál es la respuesta impulsional del filtro $h_1(n)$ en función de r? Indique que ocurre con los casos extremos $r = 0$ y $r = 1$. 4 Pts

2.2. Calcule las respuestas en magnitud y fase del sistema $H_1(z)$ para el caso particular $r = 0$. Indique el tipo de filtro resultante según la banda de frecuencias que deja pasar. 3 Pts

2.3. ¿En qué frecuencia angular ω_{max} alcanza la respuesta en magnitud $|H_1(\omega)|$ su valor máximo? 1 Pt

2.4. Especifique el coeficiente b_0 en términos de r de tal modo que $|H_1(\omega_{max})| = 1$, donde ω_{max} es la frecuencia encontrada en el punto 1.3. 1 Pt

2.5. Determine la respuesta en magnitud $|H_1(\omega)|$ para cualquier r. 3 Pts

2.6. El ancho de banda de rechazo se define por medio de las frecuencias de potencia mitad y de supresión absoluta. Si ω_c es el punto donde se cumple:

$$|H_1(\omega_c)|^2 = \frac{|H_1(\omega_{max})|^2}{2}$$

y ω_{off} es el punto donde se cumple:

$$|H_1(\omega_{off})|^2 = 0$$

entonces el ancho de la banda de rechazo se define como:

$$\zeta = |\omega_c - \omega_{off}|$$

Determine el ancho de banda de supresión en función de la posición del radio del polo r si $|H_1(\omega_{max})| = 1$.
Ayuda: verifique las identidades trigonométricas en el formulario. 6 Pts

2.7. Encuentre ahora una expresión para calcular r a partir del ancho de banda de supresión deseado.
Sugerencia: utilice los resultados del punto anterior. 3 Pts

2.8. Se requiere un ancho de banda de supresión de 10 Hz. Encuentre el valor de r necesario si se utiliza una frecuencia de muestreo de 10 kHz. 2 Pts

2.9. Exprese la ecuación de diferencias del filtro $H_1(z)$. 2 Pts

Problema 3 Transformada Discreta de Fourier $\boxed{\textbf{27 Pts}}$

Sea $H(k)$ la DFT de un filtro digital real causal de cuatro coeficientes, de los cuales lso primeros tres son:

$$
\begin{aligned}
H(0) &= 1 \\
H(1) &= \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
H(2) &= 0
\end{aligned}
$$

3.1. Indique el tipo de filtro representado por este sistema, en cuanto a la bada de frecuencias que permite pasar. $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.2. ¿Qué valor tiene el coeficiente faltante $H(3)$? $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.3. Dos de los coeficientes de la respuesta al impulso correspondiente son $h(0) = 1/2$ y $h(3) = 0$. ¿Qué valores tiene tienen los coeficientes faltante $h(1)$ y $h(2)$? $\boxed{\text{4 Pts}}$

3.4. ¿Cuántas muestras de la respuesta en frecuencia son necesarias para representar sin pérdidas el filtro utilizando de los puntos anteriores? $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.5. Calcule la DFT del filtro utilizando el menor número posible de muestras en el dominio de la frecuencia. $\boxed{\text{4 Pts}}$

3.6. Ahora se desea filtrar una secuencia de longitud 3 con el filtro $H(k)$ anterior en el dominio de la frecuencia. ¿Qué longitud debe tener entonces la señal de salida $Y(k)$ para que no ocurra aliasing temporal? $\boxed{\text{1 Pt}}$.

3.7. Calcule entonces en el dominio de la frecuencia la DFT de la señal de salida $Y(k)$ utilizando el número de muestreas especificado por usted en el punto anterior, si la señal de entrada es $x(n) = \{-1, 2, 1\}$. $\boxed{\text{6 Pts}}$

3.8. Calcule la salida $y(n)$ utilizando IDFT a partir de $Y(k)$ obtenido en el punto anterior. $\boxed{\text{6 Pts}}$

3.9. Calcule la salida $y(n)$ a partir de la convolución lineal entre la entrada y la respuesta al impulso y verifique el resultado del punto anterior. $\boxed{\text{3 Pts}}$