

Análisis Frecuencial

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2019

Espectro de señales continuas periódicas

Espectro de señales continuas periódicas

Señales continuas periódicas: **serie de Fourier**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\Omega_0 kt}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j\Omega_0 kt} dt$$

Si la señal tiene potencia media finita P_x

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|^2 dt$$

Relación de Parseval: señales continuas periódicas

Con $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ se reduce la **Relación de Parseval**:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)x^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j\Omega_0 kt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left[\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j\Omega_0 kt} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned}$$

$kF_0 \rightarrow |c_k|^2$: Densidad espectral de potencia.

Paridad de espectro de densidad de potencia

Si $x(t) \in \mathbb{R}$, densidad de potencia es par puesto que $|c_{-k}| = |c_k^*| = |c_k|$.

Al par de gráficas de $|c_k|$ vs. kF_0 y $\theta_k = \angle c_k$ vs. kF_0 se le denomina **espectro de tensión**.

Puesto que para funciones reales $\theta_{-k} = \angle c_k^* = -\angle c_k = -\theta_k$, la fase es impar.

Ejemplo: Serie de Fourier de pulsos rectangulares (1)

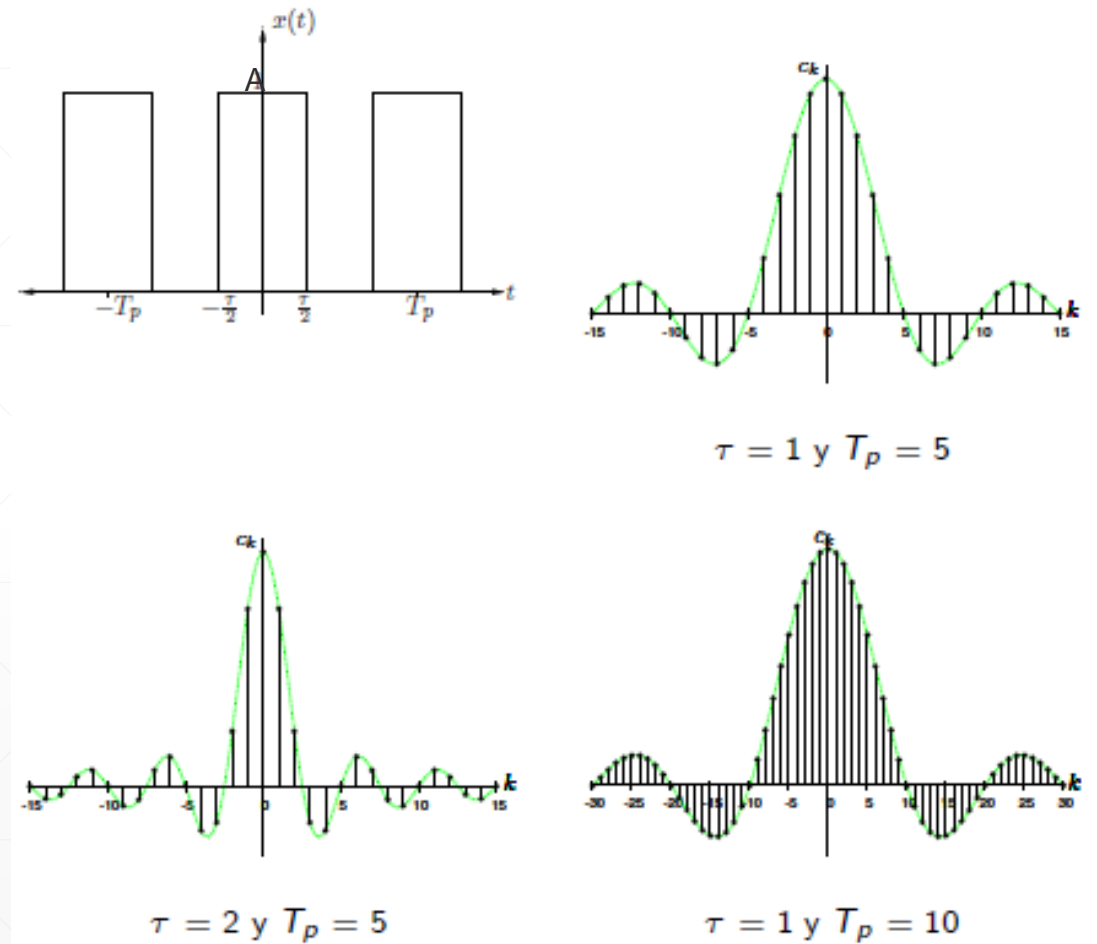
La serie de Fourier de un tren periódico de pulsos rectangulares de ancho τ en tiempo continuo tiene como coeficientes

$$c_k = \frac{A\tau}{T_p} \frac{\text{sen}(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau}$$

Analice el efecto del periodo T_p y el ancho del pulso τ en el espectro de la señal.

Ejemplo: Serie de Fourier de pulsos rectangulares (2)

Solución:



Ejemplo: Serie de Fourier de pulsos rectangulares (3)

- La distancia entre dos líneas espectrales correspondientes a c_k y c_{k+1} es $F_0 = 1/T_p$ y el término τ , además de determinar el ancho del pulso temporal, indica qué tan extensa resulta la función $\text{sen}(x)/x$.
- Si se modifica el ancho del pulso temporal manteniendo el periodo, la distancia entre cada línea espectral se mantiene, mientras que el espectro se contrae (si τ aumenta).
- Por otro lado, si T_p aumenta (o lo que es equivalente, la frecuencia fundamental F_0 baja), pero se mantiene el ancho del pulso τ , la misma función en la frecuencia $\text{sen}(k\pi F_0 \tau)/\pi k F_0 \tau$ es muestreada más a menudo (la densidad de líneas espectrales aumenta).

Propiedad	Señal en el tiempo	Coeficientes
	$x(t)$	c_k
	$x_1(t)$	c_{1k}
	$x_2(t)$	c_{2k}
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 c_{1k} + \alpha_2 c_{2k}$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$c_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cos(\omega_0 k t) dt$ $c_k \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$c_k = -\frac{2j}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \sin(\omega_0 k t) dt$ $c_k \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$c_k = c_{-k}^*$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega_0 k \tau} c_k$
Conjugación	$x^*(t)$	c_{-k}^*
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	c_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t), \alpha > 0$	c_k
Convolución periódica	$\int_{T_p} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$	$T_p c_{1k} c_{2k}$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1l} c_{2k-l}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 c_k$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt, c_0 = 0$	$\frac{c_k}{jk\omega_0}$
Relación de Parseval	$\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) ^2 dt$	$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ^2$

Propiedades de la Serie de Fourier

Espectro de señales continuas aperiódicas

Transformada de Fourier

Distancia entre líneas espectrales (señales periódicas): $F_0 = 1/T_p$

Coeficientes calculados con $t_0 = T_p/2$:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi F_0 k t} dt$$

Si T_p aumenta, $F_0 \rightarrow \Delta F_0$ (pequeño)

Si $T_p \rightarrow \infty$, entonces $\Delta F_0 \rightarrow dF$ y $k\Delta F_0 \rightarrow F$

Transformada de Fourier: eliminar $1/T_p$ y hacer $T_p \rightarrow \infty$:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt$$

Relación de la transformada y la serie de Fourier

Coeficientes de la serie:

$$X(F) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} T_p c_k$$

Con frecuencia angular $\Omega = 2\pi F$:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Transformada Inversa de Fourier

Transformada inversa:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

O con $d\Omega = 2\pi dF$:

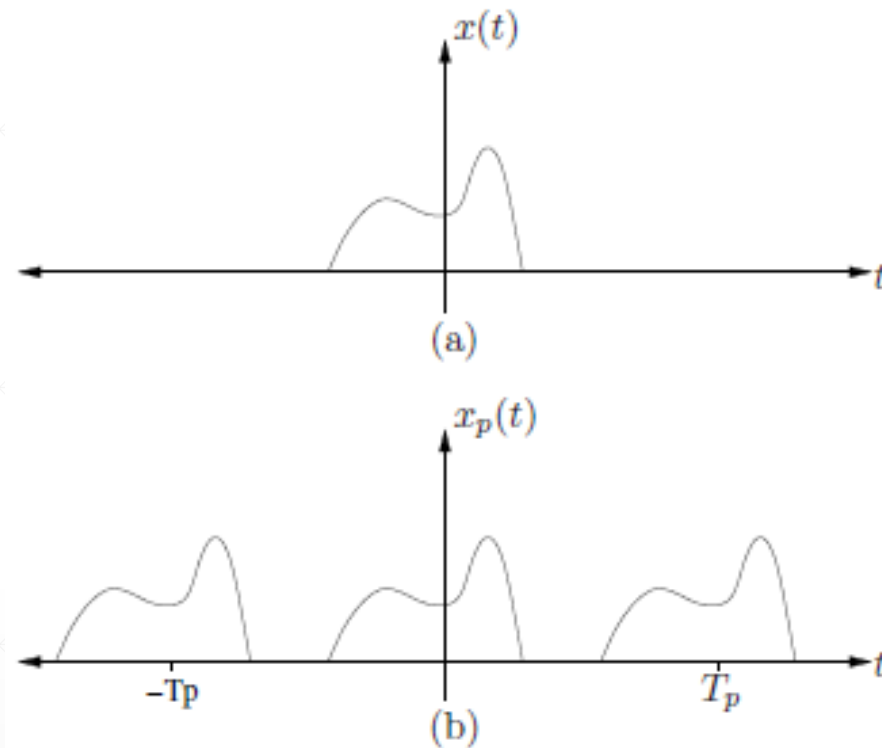
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Serie de extensión periódica

Si $x(t)$ es una señal de extensión finita entonces existe una extensión periódica $x_p(t)$ de periodo T_p mayor a la extensión de $x(t)$.

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0)$$

Es decir, la extensión periódica de una señal aperiódica conduce al muestreo del espectro de la transformada de Fourier con una tasa F_0 .



Condiciones de Dirichlet

Condiciones de Dirichlet similares a caso periódico, donde $T_p \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Lo que se deduce del hecho que

$$\begin{aligned} |X(F)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| |e^{-j2\pi Ft}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \end{aligned}$$

Energía

De forma similar a las señales periódicas puede demostrarse que

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF$$

Densidad espectral de energía $S_{xx}(F) = |X(F)|^2$ es la distribución de energía de la señal en función de la frecuencia $X(F)$ tiene simetría hermítica si $x(t) \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Serie de Fourier del pulso rectangular continuo (1)

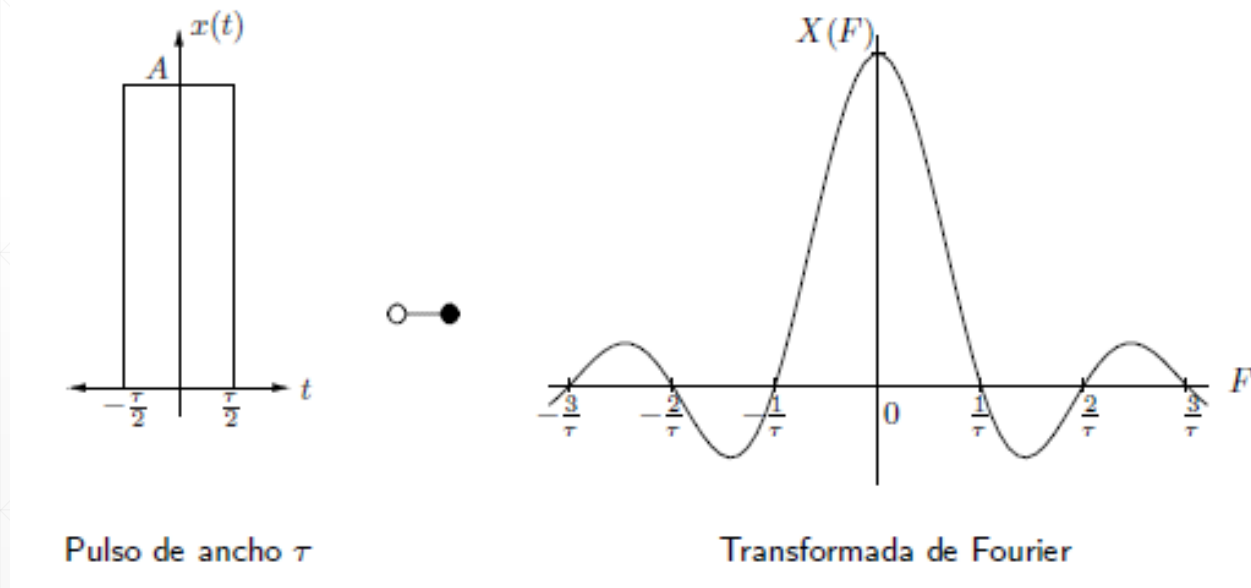
Calcule la transformada de Fourier del pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

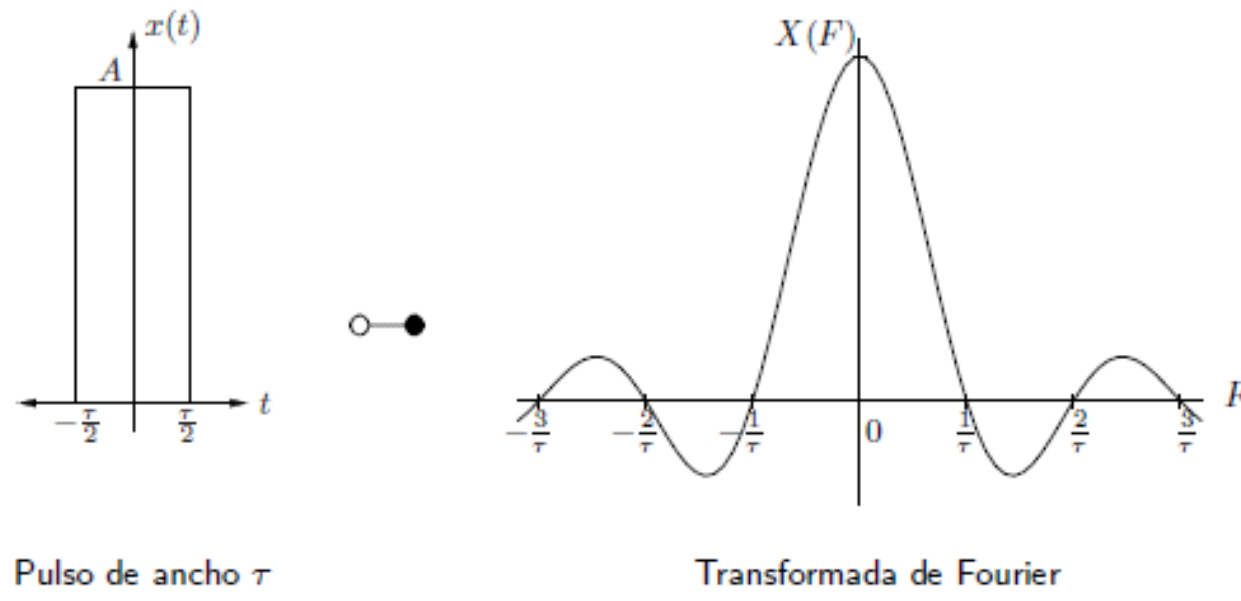
Ejemplo: Serie de Fourier del pulso rectangular continuo (2)

Solución: Utilizando la definición se obtiene:

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi Ft} dt = \frac{A\tau \operatorname{sen}(\pi F\tau)}{\pi F\tau}$$



Principio de incertidumbre



Mientras $x(t)$ sea más localizada en el tiempo (más pequeño τ), más amplio es su espectro.

Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(j\omega)$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$ $X(j\omega) \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$-2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$ $X(j\omega) \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
Dualidad	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau} X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j\omega - j\omega_0)$
Modulación	$\cos(\omega_0 t) x(t)$	$\frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(j\omega) X_2(j\omega)$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$

Espectro de señales en tiempo discreto periódicas

Espectro de señales en tiempo discreto

- Espectro de señales continuas \rightarrow frecuencias de $-\infty$ a ∞ .
- Si además periódicas \rightarrow frecuencias “discretas” $k/T_p = kF_0$

Señal discreta periódica

Señal discreta periódica con periodo N .

Se utiliza una base funcional de N exponenciales complejas armónicamente relacionadas de frecuencia racional $f = k/N$ o $\omega = 2\pi/N$.

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

Serie de Fourier en tiempo discreto

(1)

Utilizando la serie generalizada de Fourier con estas señales como base se obtiene para la síntesis de una señal:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

Y considerando que

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1 - a^N}{1 - a} & a \neq 1 \end{cases}$$

Se puede afirmar para las exponenciales complejas

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Serie de Fourier en tiempo discreto

(2)

Tomando $a = e^{j2\pi k/N}$ por lo que $a^N = 1$.

Multiplicando $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$ por $e^{-j2\pi ln/N}$ y sumando de 0 a $N - 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi ln/N} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} e^{-j2\pi ln/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} \\ &= N c_l\end{aligned}$$

Y finalmente

$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi ln/N}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Serie de Fourier en tiempo discreto

(3)

que es la **Serie de Fourier en Tiempo Discreto** (DTFS, discrete time Fourier Series)

Serie de Fourier en tiempo discreto

(4)

Los coeficientes son periódicos con periodo N

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi(k+N)n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} e^{-j2\pi n} = c_k$$

Por conveniencia se utiliza para c_k normalmente el intervalo $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Serie de Fourier en tiempo discreto

(5)

La **relación de Parseval** es en este caso

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Es decir, la potencia media de la señal es igual a la suma de las potencias de cada componente en el dominio de la frecuencia.

Espectro de señales en tiempo discreto aperiódicas

Espectro de señales discretas aperiódicas (1)

La **transformada de Fourier** de una señal de energía finita en tiempo discreto $x(n)$ se define como:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Como $X(\omega) = X(\omega + 2\pi k)$ el rango de frecuencias únicas se limita a $[0, 2\pi[$, o de forma equivalente a $]-\pi, \pi]$, que contrasta con el rango $[-\infty, \infty]$ de las señales continuas.

Espectro de señales discretas aperiódicas (2)

Como la señal $x(n)$ es discreta, una sumatoria reemplaza la integral del caso continuo. Puede demostrarse además que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

La transformada de Fourier converge si

$$|X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

Es decir, si la señal es absolutamente sumable.

Espectro de señales discretas aperiódicas (3)

La **relación de Parseval** en este caso es:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Para señales reales $X(\omega)$ tiene simetría hermítica.

Relación entre dominios

periódico \longleftrightarrow discreto

aperiódico \longleftrightarrow continuo

Relación entre las transformadas de Fourier *y z*

Relación entre las transformadas de Fourier y z (1)

La transformada z de la secuencia $x(n)$ se ha definido como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad \text{ROC: } r_2 < |z| < r_1$$

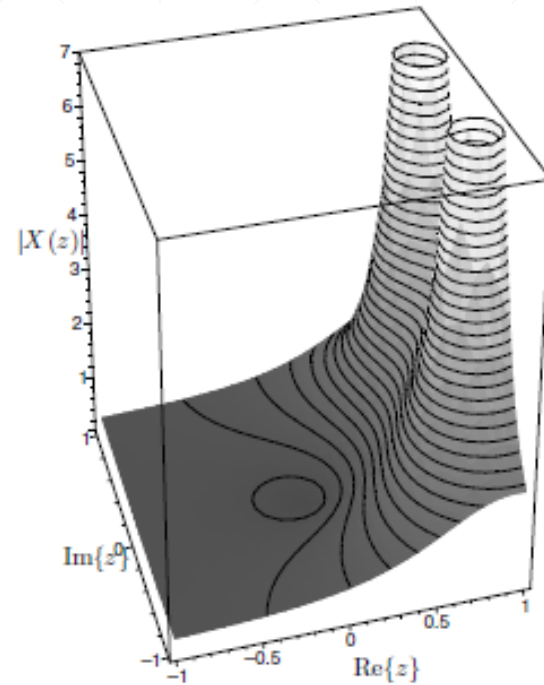
Expresando z como $z = re^{j\omega}$ ($r = |z|$, $\omega = \angle z$), entonces

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n}$$

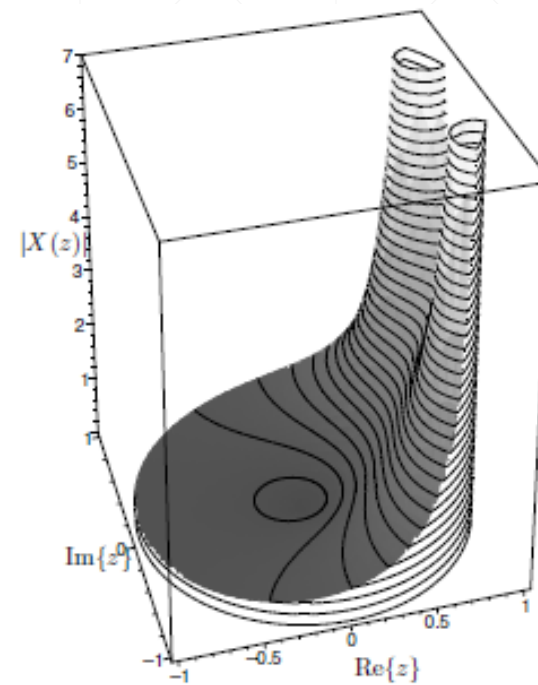
Que equivale a la transformada de Fourier de la secuencia $x(n)r^{-n}$. Para el caso especial de $r = 1$ se obtiene:

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Relación entre las transformadas de Fourier y z (2)



$|X(z)|$



$|X(z)|$ para $|z| < 1$

Función con par de polos complejos conjugados en $z = 0,95e^{\pm j30^\circ}$ y un cero en $z = 0$.

Relación entre las transformadas de Fourier y z (3)

Si $X(z)$ no converge en $|z| = 1$ entonces la transformada de Fourier no existe.

Relación entre las transformadas de Fourier y z (4)

Por otro lado, existen funciones con transformada de Fourier, que no tienen transformada z . Por ejemplo, $x(n) = \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}$ tiene transformada de Fourier

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

mas no posee transformada z , puesto que para la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n} z^{-n}$ no existe ninguna región de convergencia.

Relación entre las transformadas de Fourier y z (5)

Algunas secuencias con polos en $|z| = 1$ en su transformada z pueden tener una transformada de Fourier si se extiende la definición de transformada para utilizar impulsos de Dirac

$$\delta(\omega) = \begin{cases} \infty & \omega = 0 \\ 0 & \omega \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$$

Ejemplo: Transformada discreta de Fourier (1)

Determine la transformada de Fourier de las señales

1. $x_1(n) = u(n)$

2. $x_2(n) = (-1)^n u(n)$

3. $x_3(n) = \cos(\omega_0 n) u(n)$

Ejemplo: Transformada discreta de Fourier (2)

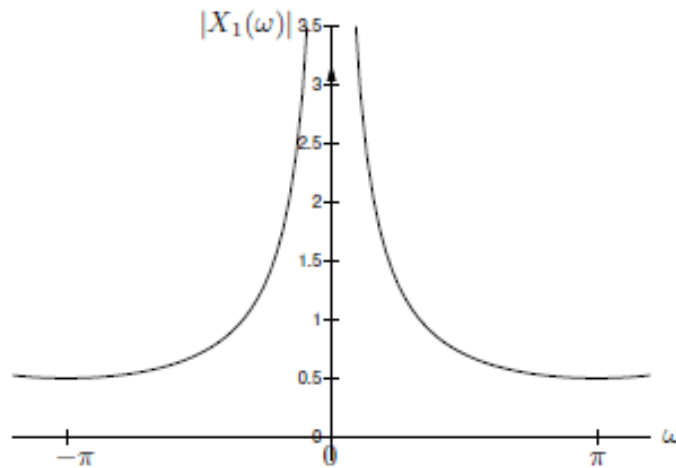
Solución:

1. La transformada de $x_1(n)$ es $X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ con una ROC $|z| > 1$, pues tiene un polo en $z = 1$. Con $z = e^{j\omega}$ se obtiene:

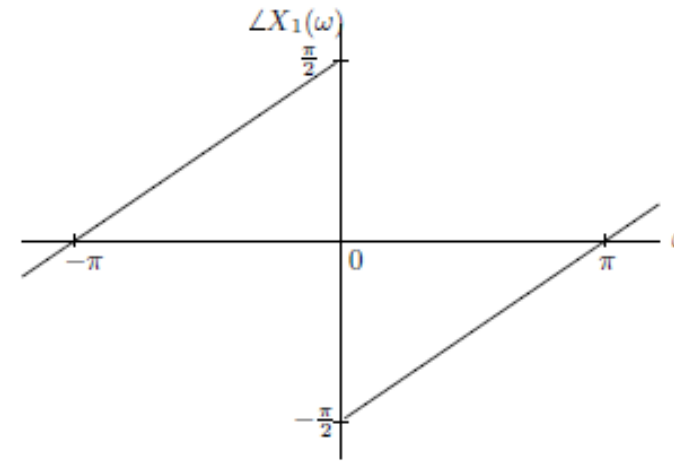
$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1} = \frac{e^{j\omega/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{1}{2\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{j\frac{\omega-\pi}{2}}; \quad \omega \neq 2\pi k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cuya magnitud y fase se muestran a continuación:

Ejemplo: Transformada discreta de Fourier (3)



Espectro de magnitud

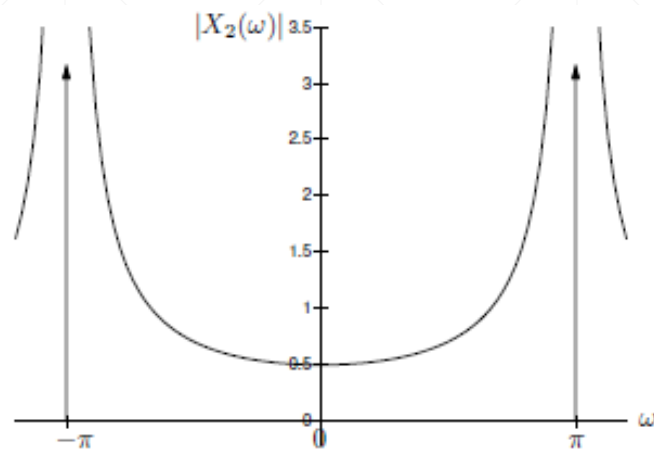


Espectro de fase

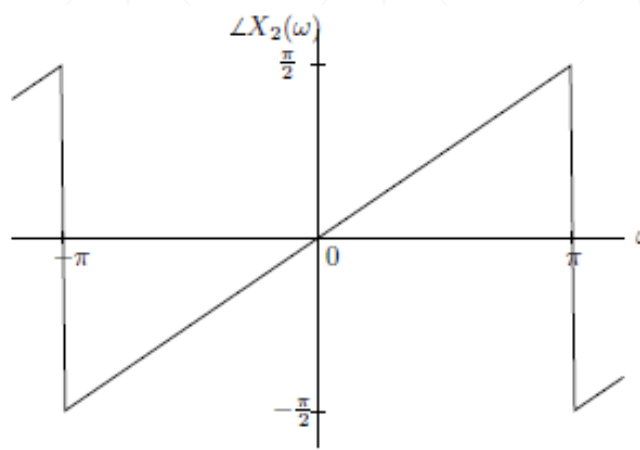
El término $\pi\delta(\omega)$ en el dominio de la frecuencia introduce el nivel CD faltante.

Ejemplo: Transformada discreta de Fourier (4)

2. $X_2(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$ con un polo en $z = -1 = e^{j\pi}$. La transformada de Fourier es entonces $X_2(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{2\cos(\omega/2)}$, con $\omega \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Se agregan impulsos en $\omega = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (recuérdese la periodicidad espectral)



Espectro de magnitud



Espectro de fase

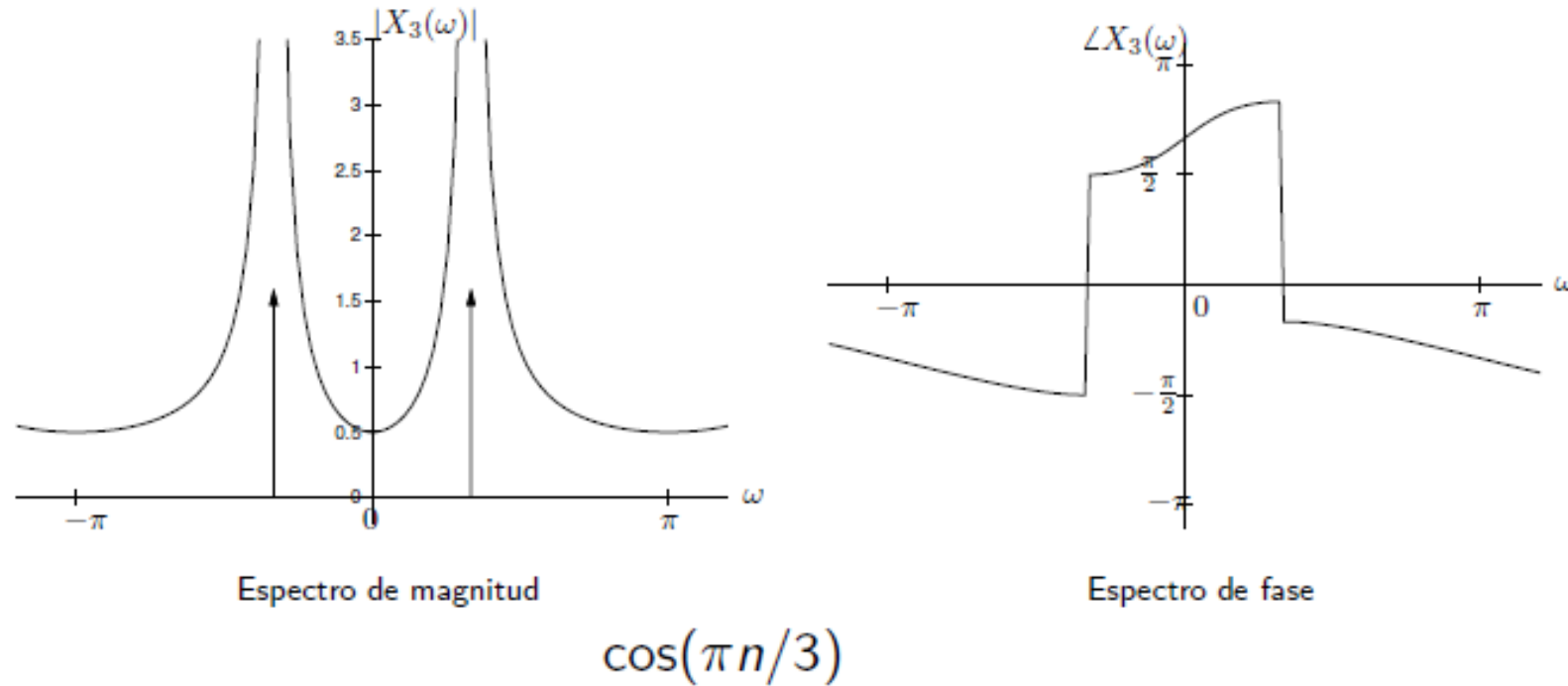
Ejemplo: Transformada discreta de Fourier (5)

3. $X_3(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$, ROC $|z| > 1$ puesto que tiene dos polos complejos conjugados en $e^{\pm j\omega_0}$. Por lo tanto, la transformada de Fourier es:

$$X_3(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega} \cos(\omega_0)}{(1 - e^{-j(\omega - \omega_0)})(1 - e^{-j(\omega + \omega_0)})}$$

Con $\omega \neq \pm\omega_0 + 2\pi k$.

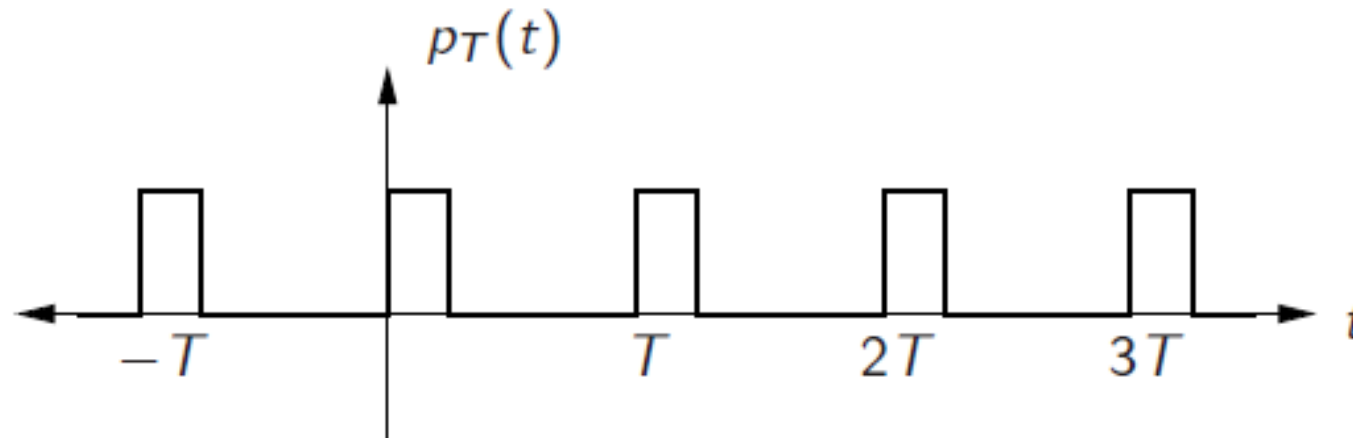
Ejemplo: Transformada discreta de Fourier (6)



Teorema del muestreo

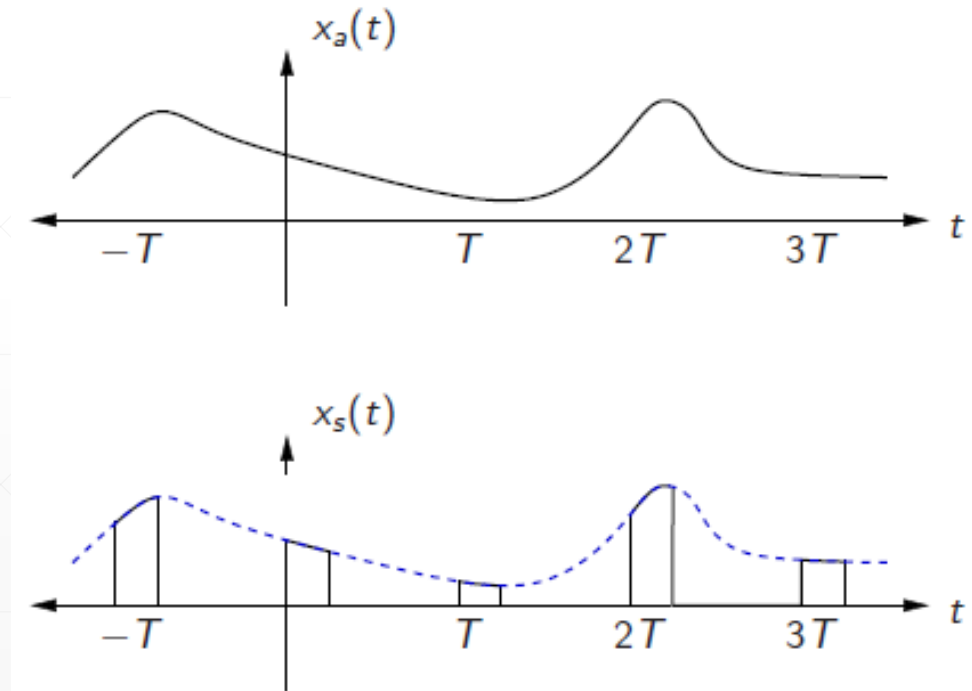
Función puente de muestreo

La función puente $p_T(t)$ modela la toma de muestras cada T de $x_a(t)$.



Señal muestreada

Señal muestreada $x_s(t)$ dada por $x_s(t) = x_a(t)p_T(t)$



Espectro de la señal muestreada

Dado que $p_T(t)$ es periódica se expresa por serie de Fourier

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$$

De modo que se cumple

$$x_s(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\Omega_0 t}$$

Replicación espectral

Transformando a ambos lados y con propiedad de linealidad:

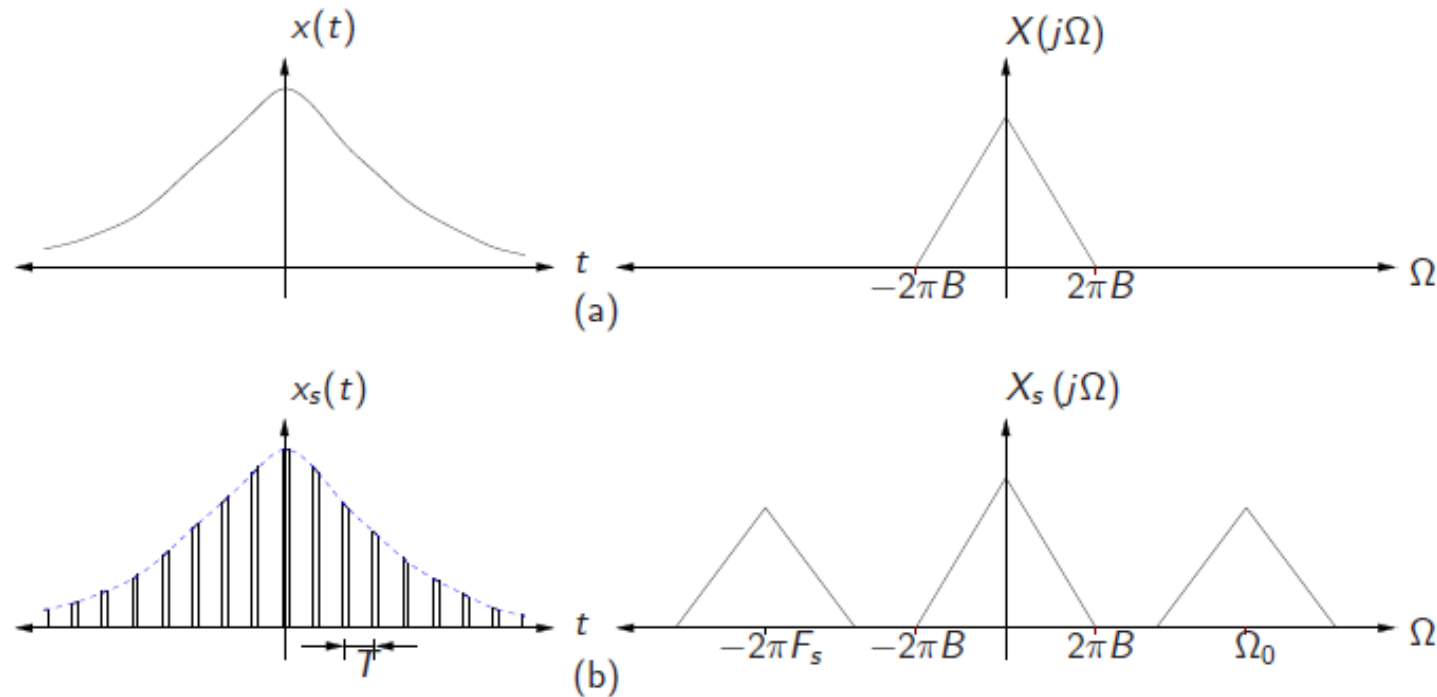
$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\left\{x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\Omega_0 t}\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \mathcal{F}\{x_a(t) e^{jn\Omega_0 t}\} \end{aligned}$$

Y con la propiedad de desplazamiento en frecuencia:

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X_a(j\Omega - jn\Omega_0) \\ &= P_0 X_a(j\Omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} P_n X_a(j\Omega - jn\Omega_0) \end{aligned}$$

Replicación espectral

El muestreo produce **réplicas** del espectro $X_a(j\Omega)$ separadas por $\Omega_0 = 2\pi/T$ y sumadas.



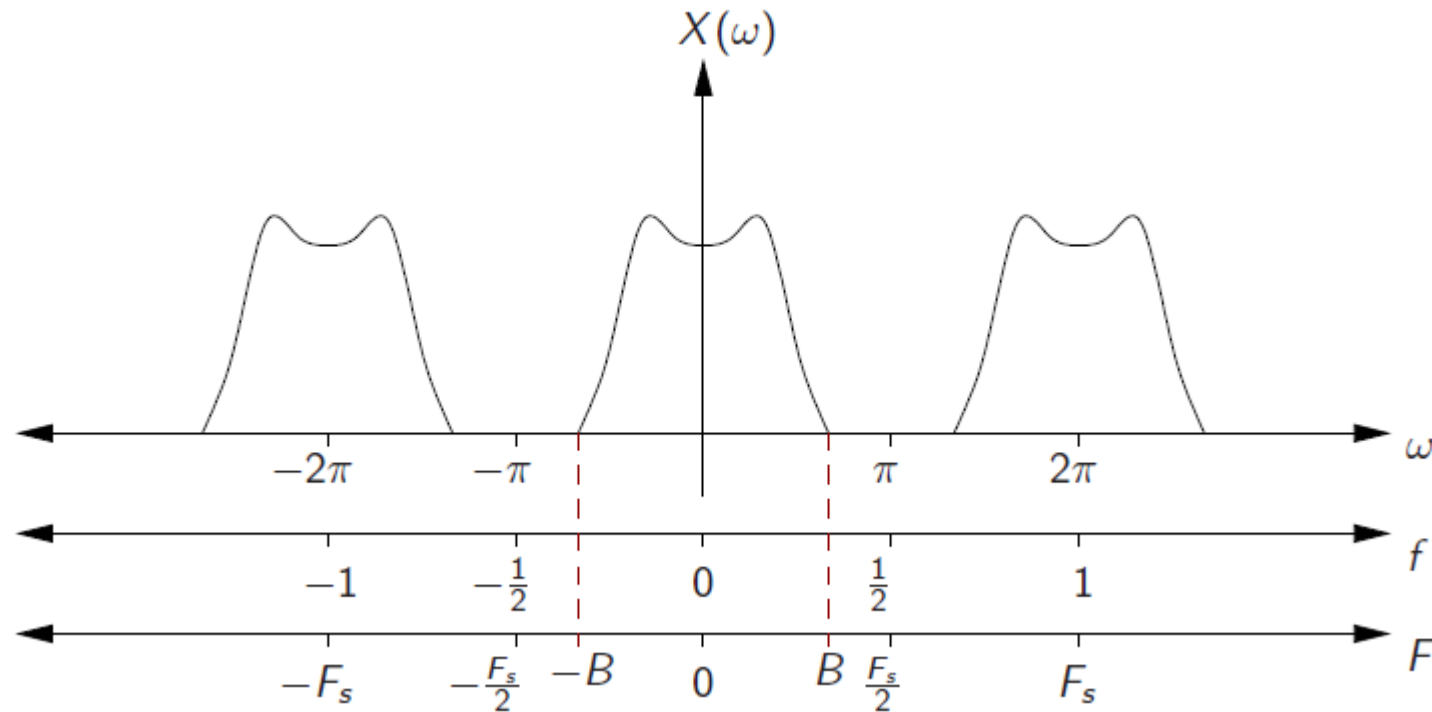
Derivación conceptual

- Máxima frecuencia normalizada representable $f_{max} = \frac{F_{max}}{F_s} = \frac{1}{2}$.
- Sea la representación de Fourier de la señal discreta

$$x(n) \bullet \circ X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \quad \omega \in]-\pi, \pi]$$

- La frecuencia mínima de muestreo F_s debe ser elegida de tal modo que sea al menos el doble de la frecuencia máxima de la señal.
- De otro modo: **ALIASING**.

Equivalencias entre ω , f y F



Derivación algebraica

(1)

Sea $x_a(t)$ la señal analógica muestreada con periodo T :

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

Si $x_a(t)$ es aperiódica de energía finita, entonces su espectro es:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad \longleftrightarrow \quad x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

En el dominio discreto se tiene:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} \quad \longleftrightarrow \quad x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi fn} df$$

Derivación algebraica

(2)

Puesto que para la señal muestreada

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

Entonces:

$$x(n) = x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn} df$$

Considerando que $f = F/F_s$ y $df = dF/F_s$ se obtiene entonces:

$$\frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X(F/F_s) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF$$

La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF$$

Se puede segmentar en bloques de ancho F_s de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF$$

Derivación algebraica

(4)

Con un cambio de variable $F' = F - kF_s$, $dF' = dF$, se obtiene un desplazamiento del k -ésimo bloque al intervalo $[-F_s/2, F_s/2]$:

$$\begin{aligned} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF &= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F' + kF_s) e^{j2\pi n \frac{F' + kF_s}{F_s}} dF' \\ &= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F + kF_s) e^{j2\pi nF/F_s} dF \end{aligned}$$

Derivación algebraica

(5)

Por lo que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X(F/F_s) e^{j2\pi nF/F_s} dF &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F + kF_s) e^{j2\pi nF/F_s} dF \\ &= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_s) \right] e^{j2\pi nF/F_s} dF\end{aligned}$$

Es decir:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_s)$$

Nótese que el espectro de la señal discreta $X(f)$ es igual a la repetición periódica con periodo F_s del espectro escalado $F_s X_a(F)$.

Solapamiento

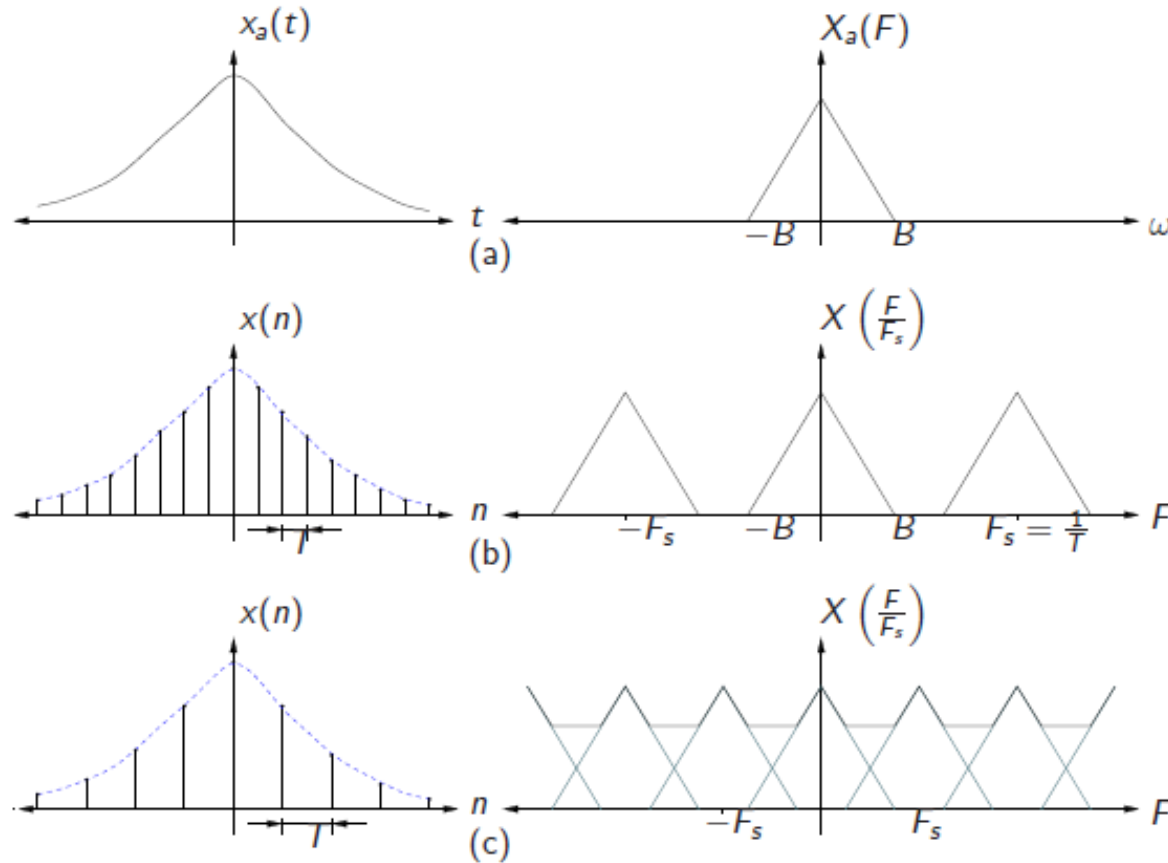
- Si el espectro de $x_a(t)$ es de banda limitada B , entonces si $F_s > 2B$ entonces para $|F| \leq F_s/2$:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s X_a(F), \quad |F| \leq F_s/2$$

donde no hay **aliasing**, y los espectros son idénticos excepto por el factor F_s .

- Si $F_s < 2B$ entonces el solapamiento espectral impide que la señal original pueda ser recuperada a partir de las muestras.

Solapamiento



Recuperación de la señal original

(1)

Si no hay solapamiento, entonces:

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) & |F| \leq F_s/2 \\ 0 & |F| > F_s/2 \end{cases}$$

Y puesto que:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi F n / F_s}$$

Y además:

$$x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF$$

Recuperación de la señal original

(2)

Se tiene que:

$$\begin{aligned}x_a(t) &= \frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-\frac{j2\pi F n}{F_s}} \right] e^{j2\pi F t} dF \\&= \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F \left(t - \frac{n}{F_s}\right)} dF\end{aligned}$$

Para $t = n/F_s$ se cumple:

$$\int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F \left(t - \frac{n}{F_s}\right)} dF = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} dF = F_s$$

Recuperación de la señal original

(3)

Y puesto que para $t \neq n/F_s$:

$$\begin{aligned}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F\left(t - \frac{n}{F_s}\right)} dF &= \frac{e^{j2\pi F\left(t - \frac{n}{F_s}\right)}}{j2\pi\left(t - \frac{n}{F_s}\right)} \Bigg|_{-F_s/2}^{F_s/2} \\&= \frac{e^{j\pi F_s\left(t - \frac{n}{F_s}\right)} - e^{-j\pi F_s\left(t - \frac{n}{F_s}\right)}}{j2\pi\left(t - \frac{n}{F_s}\right)} \\&= \frac{\operatorname{sen}\left(\pi F_s\left(t - \frac{n}{F_s}\right)\right)}{\pi\left(t - \frac{n}{F_s}\right)} = \frac{F_s \operatorname{sen}\left(\pi F_s\left(t - \frac{n}{F_s}\right)\right)}{\pi F_s\left(t - \frac{n}{F_s}\right)}\end{aligned}$$

Recuperación de la señal original

(4)

Se cumple para todo t :

$$\int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F\left(t - \frac{n}{F_s}\right)} dF = F_s \text{sinc}\left(\pi F_s \left(t - \frac{n}{F_s}\right)\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sinc}\left(\pi F_s \left(t - \frac{n}{F_s}\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \text{sinc}\left(\pi F_s \left(t - \frac{n}{F_s}\right)\right) \end{aligned}$$

Interpolación ideal

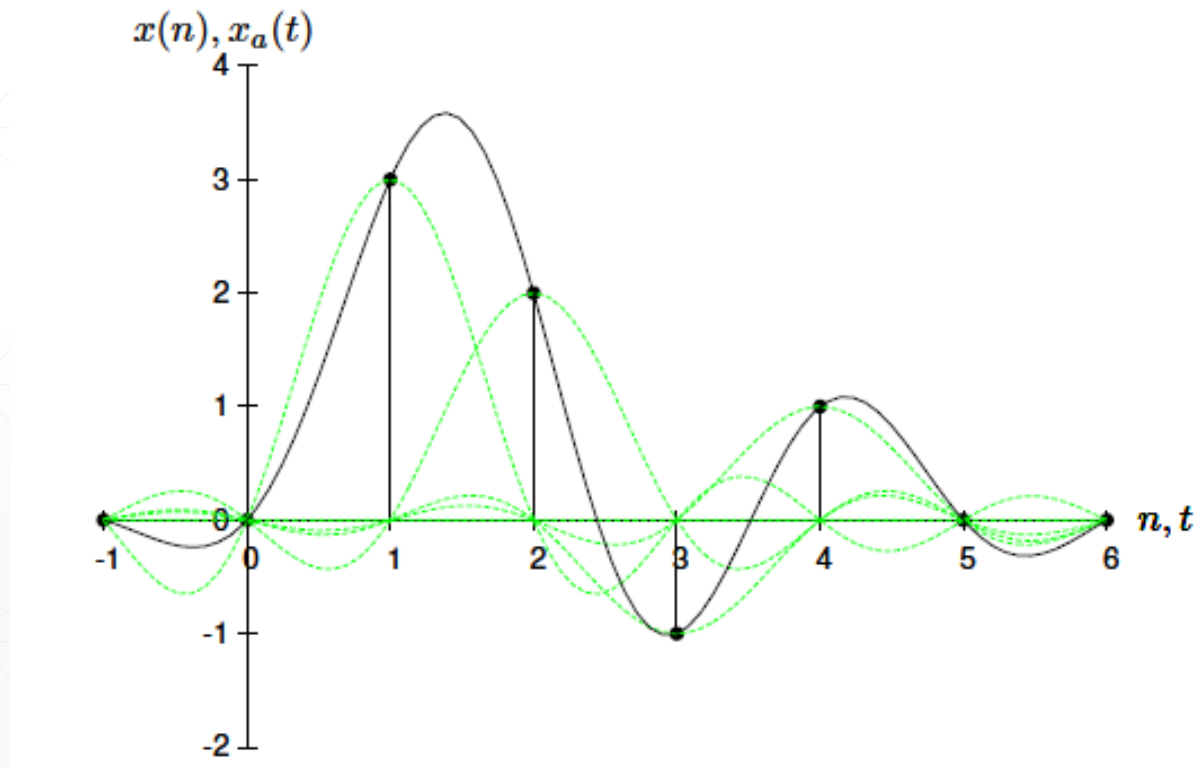
$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \operatorname{sinc} \left(\pi F_s \left(t - \frac{n}{F_s} \right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \operatorname{sinc}(\pi F_s(t - nT))$$

Es la interpolación de las muestras $x(n)$ utilizando el interpolador ideal:

$$g(t) = \frac{\operatorname{sinc} \left(\pi \frac{t}{T} \right)}{\pi \frac{t}{T}} = \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{t}{T} \right)$$

Interpolación ideal

Secuencia $x(n) = \{0, 3, 2, -1, 1, 0\}$



Propiedades de la transformada de Fourier de señales discretas

Simetría

$$x(n) = [x_R^e(n) + jx_I^e(n)] + [x_R^o(n) + jx_I^o(n)]$$



$$X(\omega) = [X_R^e(\omega) + jX_I^e(\omega)] + [jX_I^o(\omega) + X_R^o(\omega)]$$

Si $x(n)$ es real, entonces $X(-\omega) = X^*(\omega)$

Linealidad

Si $x_1(n) \circ\!\!\!\bullet X_1(\omega)$ y $x_2(n) \circ\!\!\!\bullet X_2(\omega)$, entonces:

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \circ\!\!\!\bullet a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$$

Desplazamiento temporal

$$x(n) \text{ --- } X(\omega) \Rightarrow x(n - k) \text{ --- } e^{-j\omega k} X(\omega)$$

Reflexión temporal

$$x(n) \text{ --- } X(\omega) \Rightarrow x(-n) \text{ --- } X(-\omega)$$

Teorema de la Convolución

Si $x_1(n) \circ \bullet X_1(\omega)$ y $x_2(n) \circ \bullet X_2(\omega)$, entonces:

$$x_1(n) * x_2(n) \circ \bullet X_1(\omega)X_2(\omega)$$

Teorema de la Correlación

Si $x_1(n) \circ \bullet X_1(\omega)$ y $x_2(n) \circ \bullet X_2(\omega)$, entonces:

$$r_{x_1x_2}(n) \circ \bullet S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$$

Si la señal es real, puesto que $X(-\omega) = X^*(\omega)$ entonces:

$$r_{xx}(n) \circ \bullet X(\omega)X(-\omega) = X(\omega)X^*(\omega) = |X(\omega)|^2 = S_{xx}(\omega)$$

Que se conoce como el teorema de **Wiener-Khinchin**

Desplazamiento frecuencial

$$x(n) \circ \bullet X(\omega) \Rightarrow e^{j\omega_0} x(n) \circ \bullet X(\omega - \omega_0)$$

Teorema de Modulación

$$x(n) \text{ --- } X(\omega) \Rightarrow x(n)\cos(\omega_0 n) \text{ --- } \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)]$$

Teorema de la Parseval

Si $x_1(n) \circ \bullet X_1(\omega)$ y $x_2(n) \circ \bullet X_2(\omega)$, entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$$

Para el caso $x_1(n) = x_2(n) = x(n) \circ \bullet X(\omega)$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega$$

Teorema del enventanado: Multiplicación de secuencias

Si $x_1(n) \circ \bullet X_1(\omega)$ y $x_2(n) \circ \bullet X_2(\omega)$, entonces:

$$x_3(n) = x_1(n)x_2(n) \circ \bullet X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda)d\lambda = X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Diferenciación en el dominio de la frecuencia

$$x(n) \circ \bullet X(\omega) \Rightarrow nx(n) \circ \bullet j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.

