Sistemas en tiempo discreto

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2019

Descripción entrada-salida de sistemas

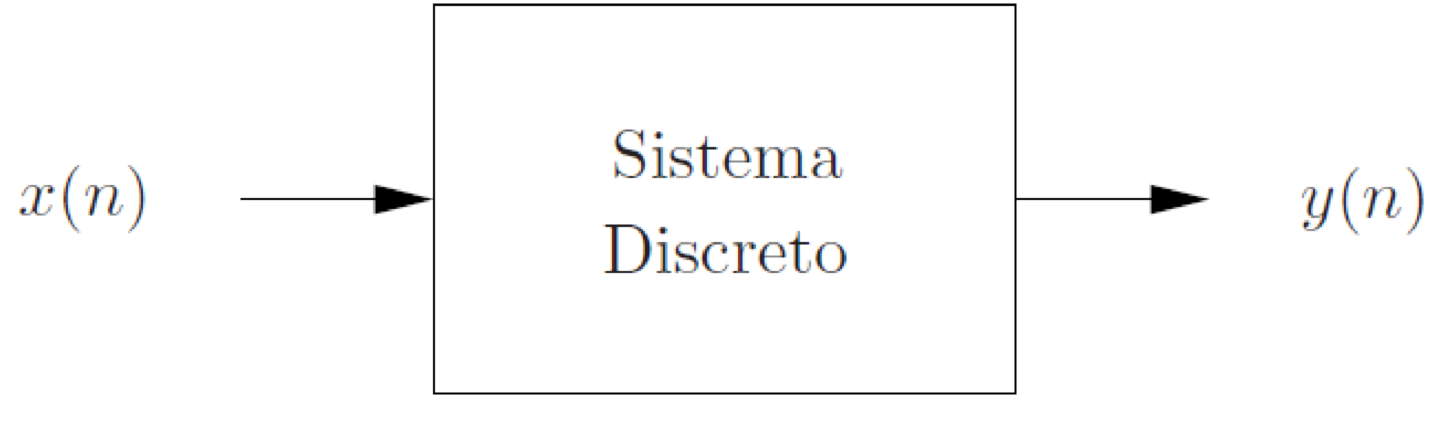
Sistemas en tiempo discreto

Los sistemas en tiempo discreto transforman una señal de entrada $x(n)$ en una señal de salida $y(n)$:

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$$

Descripción entrada-salida de sistemas

La descripción de entrada-salida define la relación entre $x(n)$ y $y(n)$. La estructura interna del sistema es desconocida o ignorada, es decir, el sistema se interpreta como una **caja negra**.



Ejemplo: Descripción entrada-salida (1)

Determine la salida de los siguientes sistemas para la entrada

$$x(n) = \begin{cases} 3 - |n| & \text{para } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

1. $y(n) = x(n)$
2. $y(n) = x(n-2)$
3. $y(n) = x(n+1)$
4. $y(n) = \frac{1}{3}(x(n+1) + x(n) + x(n-1))$
5. $y(n) = \max(x(n+1), x(n), x(n-1))$
6. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

Ejemplo: Descripción entrada-salida (2)

Solución:

1. Al sistema $y(n) = x(n)$ se le denomina identidad, pues su salida es idéntica a la entrada: $y(n) = \{1,2,\underbrace{3}_{\uparrow},2,1\}$
2. El sistema $y(n) = x(n-2)$ retarda la entrada dos unidades: $y(n) = \{\underbrace{1}_{\uparrow},2,3,2,1\}$.
3. El sistema $y(n) = x(n+1)$ adelanta la señal una unidad y solo puede ser realizado fuera de línea, por ser imposible en un sistema de tiempo real determinar el valor de la señal una muestra en el futuro: $y(n) = \{1,2,3,\underbrace{2}_{\uparrow},1\}$.
4. El filtro paso bajos $y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ calcula el promedio de tres muestras: $y(n) = \{1/3,1,2,\underbrace{7/3}_{\uparrow},2,1,1/3\}$.

Ejemplo: Descripción entrada-salida (3)

5. El filtro de rango $y(n) = \max\{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$ entrega el valor máximo de la muestra actual, la anterior y la futura: $y(n) = \{1,2,3, \underbrace{3}_{\uparrow}, 3,2,1\}$. Este filtro puede considerarse también como filtro paso bajos.

6. El acumulador $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ realiza la "**integración discreta**" de la entrada: $y(n) = \{1,3, \underbrace{6}_{\uparrow}, 8,9,9, \ldots\}$. Note que el acumulador puede reescribirse como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)}_{y(n-1)} + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

Dependencias de la salida

La salida $y(n)$ en el instante n puede depender de

1. Entrada actual $x(n)$
2. Entradas anteriores
3. Salidas anteriores

Por ejemplo, para un sistema

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

la salida depende de la **condición inicial** o **historia anterior** $y(n-1)$

Condiciones iniciales

- El cálculo de la secuencia de salida $y(n)$ para todo instante $n \geq n_0$ tiene como condición inicial al valor $y(n_0 - 1)$, que en cierta forma resume todo el pasado del sistema.
- El sistema está en reposo si $y(n_0 - 1) = 0$.
- Se asume que en $n_0 = -\infty$ todo sistema está en reposo.

IRC

- IRC = Initial Rest Conditions
- Condiciones de reposo iniciales
- Se asume $y(n) = 0$ y $x(n) = 0$ para $n < n_0$.

FRC

- FRC = Final Rest Conditions
- Condiciones de reposo finales
- Se asume $y(n) = 0$ y $x(n) = 0$ para $n > n_0$.

Ejemplo: Salida de sistema acumulador (1)

Determine la salida del sistema acumulador para la entrada $x(n) = nu(n)$ con condición inicial $y(-1) = \alpha$.

Ejemplo: Salida de sistema acumulador (2)

Solución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)}_{y(-1)=\alpha} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \alpha + \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde se utiliza

$$\begin{array}{rclcclcccc}
\sum_{k=0}^{n} k & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n \\
\sum_{k=0}^{n} k & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
2\sum_{k=0}^{n} k & = & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1
\end{array}$$

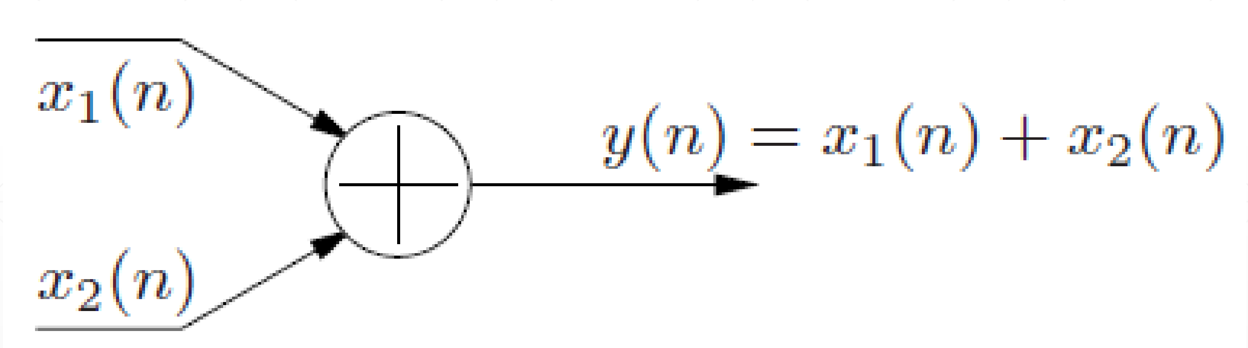
$$2\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Diagrama de Bloques

Sumador

El **sumador** es un bloque que realiza la adición entre dos señales, sumando las muestras en un instante dado y se representa como lo indica la figura:



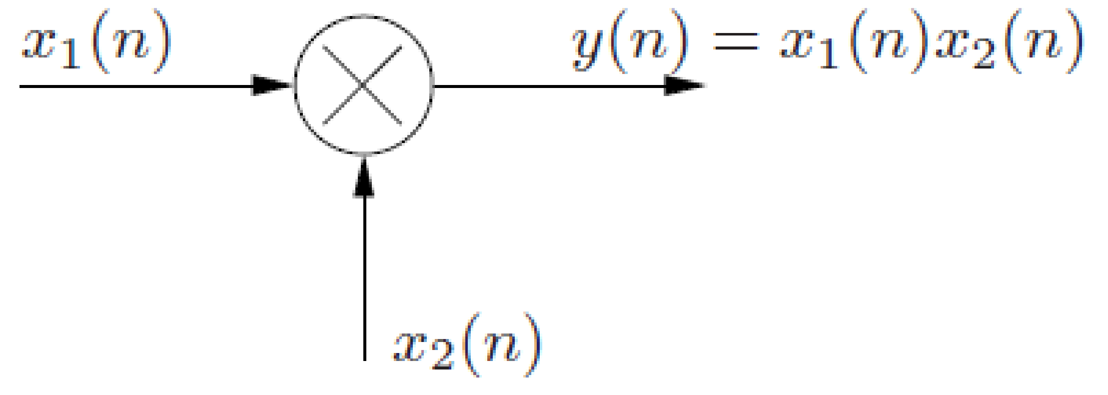
Multiplicador por constante

El **multiplicador** por constante es un bloque que escala la amplitud y cambia la fase de una señal.

$$x(n) \xrightarrow{\quad a \quad} y(n) = a x(n)$$

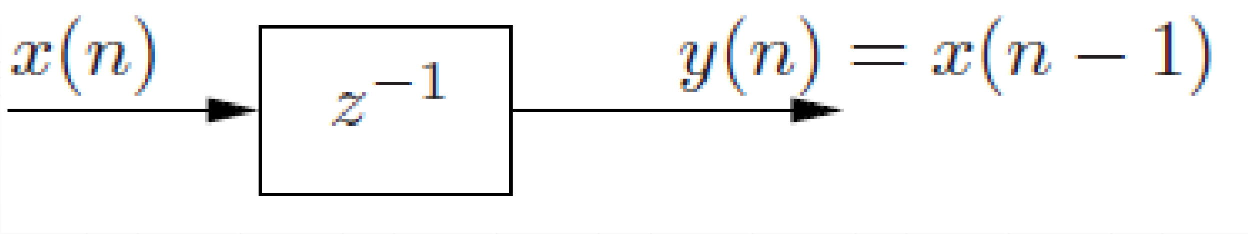
Multiplicador de señal

El **multiplicador** de señal es un bloque que multiplica en cada instante de tiempo sus diversas entradas.



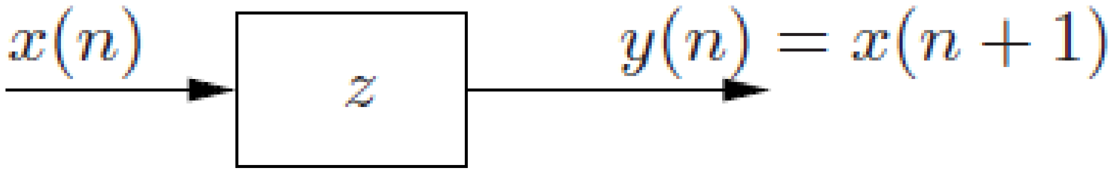
Retardador de un elemento

El **retardador** es un bloque que retrasa la señal de entrada en una unidad de tiempo. Este es utilizado principalmente en el análisis y modelado de sistemas discretos.



Adelantador de un elemento

El **adelantador** es un elemento que adelanta una señal una unidad de tiempo en el futuro. No es realizable físicamente y solo existe en sistemas discretos que operan “fuera de línea”.



Ejemplo: Diagrama de bloques (1)

Realice el diagrama de bloques para

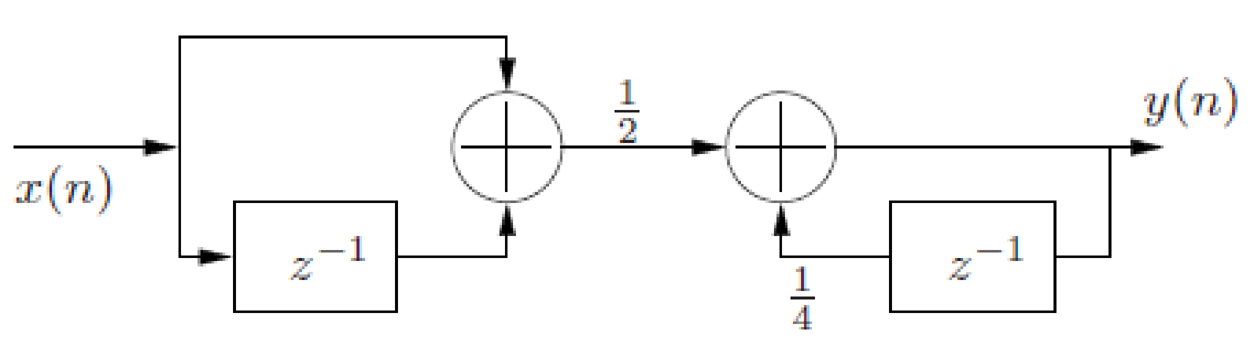
$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

Ejemplo: Diagrama de bloques (2)

Solución: Nótese primero que esta expresión puede reescribirse de la siguiente forma:

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$$

con lo que se deriva fácilmente el diagrama mostrado en la siguiente figura:



Clasificación de sistemas discretos

Clasificación de sistemas discretos

Propiedad	Clasificación	
Memoria	Sistema estático	Sistema dinámico
Varianza	S. variante en el tiempo	S. invariante en el tiempo
Linealidad	Sistema lineal	Sistema no lineal
Causalidad	Sistema causal	Sistema no causal
Estabilidad	Sistema estable	Sistema inestable

Sistemas estáticos y dinámicos

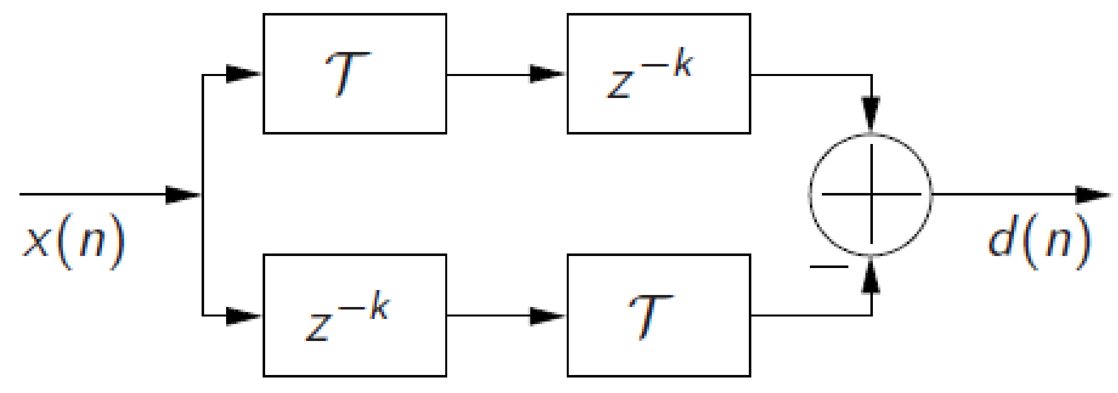
- **Estático:** Salida $y(n)$ depende solo de la entrada $x(n)$ en el mismo instante n
- **Dinámico**: El resto.
- Por ejemplo:
  - $y(n) = ax(n) + nx^2(n) + bx^3(n)$ representa un sistema estático.
  - $y(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x(n-k)$ es un sistema dinámico.

Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

Un sistema en reposo $\mathcal{T}$ es invariante en el tiempo o invariante al desplazamiento si y solo si

$$x(n) \overset{\mathcal{T}}{\overbrace{\rightarrow}} y(n) \quad \Rightarrow \quad x(n-k) \overset{\mathcal{T}}{\overbrace{\rightarrow}} y(n-k)$$

Lo cual implica que la salida $d(n)$ es cero para todas las entradas $x(n)$ y para todos los valores de retardo k.



Ejemplo: Invarianza en el tiempo (1)

Determine si los siguientes sistemas son o no invariantes en el tiempo:

1. $y(n) = x(n) - x(n-1)$
2. $\mathrm{y}(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$

Ejemplo: Invarianza en el tiempo (2)

Solución:

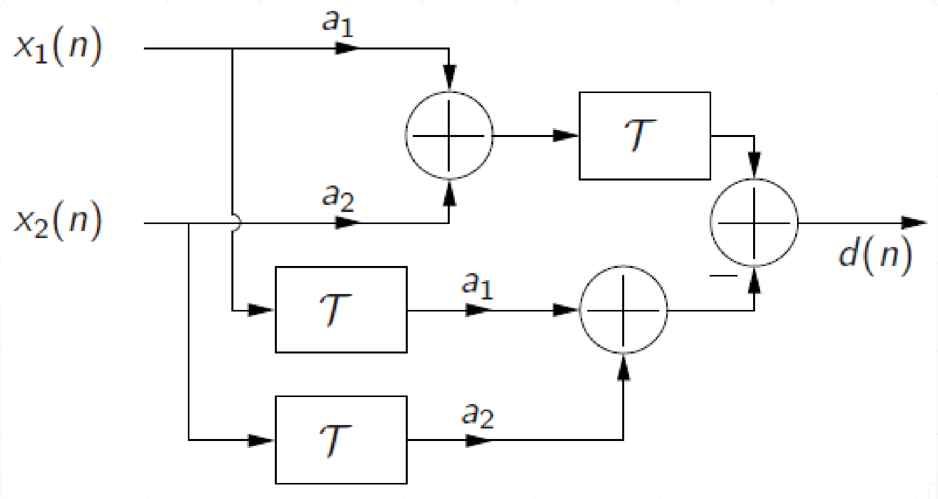
- El sistema $y(n) = x(n) + y(n-1)$ es invariante en el tiempo. Para demostrarlo se calcula la respuesta del sistema en reposo a la entrada desplazada $x(n-k)$, que resulta en $y_k(n) = x(n-k) - x(n-k-1)$. La respuesta a $x(n)$, retrasada k muestras es $y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1)$. Como $y(n-k) = y_k(n)$ el sistema es invariante en el tiempo.

- El sistema modulador $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$ es variante en el tiempo, puesto que su respuesta $y_k(n)$ a $x(n-k)$ es $y_k(n) = x(n-k)\cos(\omega_0 n)$, y la respuesta a $x(n)$, retardada k muestras es $y(n-k) = x(n-k)\cos(\omega_0(n-k))$ que es diferente a $y_k(n)$.

Sistemas lineales y no lineales

Un sistema es lineal si satisface el teorema de superposición, es decir para las constantes a_1, a_2 y para las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se cumple

$$\mathcal{T}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\mathcal{T}[x_1(n)] + a_2\mathcal{T}[x_2(n)]$$



Generalización a múltiples entradas

- Todo sistema lineal cumple la propiedad multiplicativa o de escalado

$$\mathcal{T}[a_1 x_1(n)] = a_1 \mathcal{T}[x_1(n)]$$

y la propiedad aditiva

$$\mathcal{T}[x_1(n) + x_2(n)] = \mathcal{T}[x_1(n)] + \mathcal{T}[x_2(n)]$$

- El principio de superposición con M entradas puede generalizarse como

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k x_k(n) \quad \overset{\mathcal{T}}{\rightarrow} \quad y(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k \mathcal{T}[x_k(n)]$$

- De la propiedad de escalado se deduce además que en un sistema lineal en reposo con entrada cero ($a_1 \neq 0$), entonces la salida debe ser cero.

Si para un sistema la propiedad de superposición no se cumple, entonces el sistema se dice ser **no lineal**.

Ejemplo: Sistemas Lineales (1)

Compruebe si los siguientes sistemas son lineales:

1. $y(n) = nx(n)$
2. $y(n) = x(n^2)$
3. $y(n) = x^2(n)$
4. $y(n) = Ax(n) + B$
5. $y(n) = e^{x(n)}$

Ejemplo: Sistemas Lineales (2)

Solución:

1. Para el sistema 1 se obtiene primero la respuesta del sistema a una entrada igual a la suma ponderada de dos señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$, es decir, para una entrada total $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ y se obtiene $y_T(n) = n(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$. Ahora, la suma ponderada de las salidas del sistema para $x_1(n)$ y $x_2(n)$ por separado es $y_s(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$, con $y_1(n) = nx_1(n)$ y $y_2(n) = nx_2(n)$. Como $y_T(n) = y_s(n)$ se puede afirmar que el sistema $y(n) = nx(n)$ es lineal.
2. Para $y(n) = x(n^2)$ las salidas $y_T(n) = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2)$ y $y_s(n) = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2)$ son idénticas y por tanto el sistema es lineal.

Ejemplo: Sistemas Lineales (3)

3. Para $y(n) = x^2(n)$ la salida $y_T(n) = (a_1x_1(n) + a_2x_2(n))^2 = a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n)$ y la salida $y_S(n) = a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n)$, donde evidentemente son diferentes y por tanto el sistema no es lineal.

4. Para $y(n) = Ax(n) + B$ la salida $y_T(n) = A(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) + B$ y la salida $y_S(n) = Aa_1x_1(n) + a_1B + Aa_2x_2(n) + a_2B$ difieren y por tanto el sistema, a pesar de su apariencia, no es lineal.

5. Para $y(n) = e^{x(n)}$ la salida $y_T(n) = e^{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)} = e^{a_1x_1(n)}e^{a_2x_2(n)}$ y la salida $y_S(n) = e^{a_1x_1(n)} + e^{a_2x_2(n)}$ son diferentes y por tanto el sistema tampoco es lineal.

Sistemas causales y no causales

- Un sistema es causal si $y(n)$ depende únicamente de las entradas presentes y pasadas $(x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots)$ y salidas pasadas $(y(n-1), y(n-2), \ldots)$, pero no de las entradas o salidas futuras $(x(n+1), x(n+2), \ldots; y(n+1), y(n+2))$.
- En caso contrario, el sistema es **no causal**.
- Causalidad es necesaria para sistemas de procesamiento de señales temporales **en línea**.
- A una señal $x(n)$ que es cero para $n \geq 0$ y diferente de cero para $n < 0$ se le considera **anticausal**.

Sistemas estables e inestables

- Un sistema arbitrario en reposo de denomina estable de entrada acotada – salida acotada (BIBO: *bounded input – bounded output*) si toda entrada acotada produce una salida acotada:

$$|x(n)| \leq M < \infty \quad \overset{\mathcal{T}}{\overbrace{\rightarrow}} \quad |y(n)| \leq M_y < \infty, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

- Basta con que alguna entrada acotada produzca una salida no acotada (infinita), para que el sistema sea **inestable**.

Interconexión de sistemas

Interconexión de sistemas

Hay dos maneras fundamentales de interconectar sistemas:

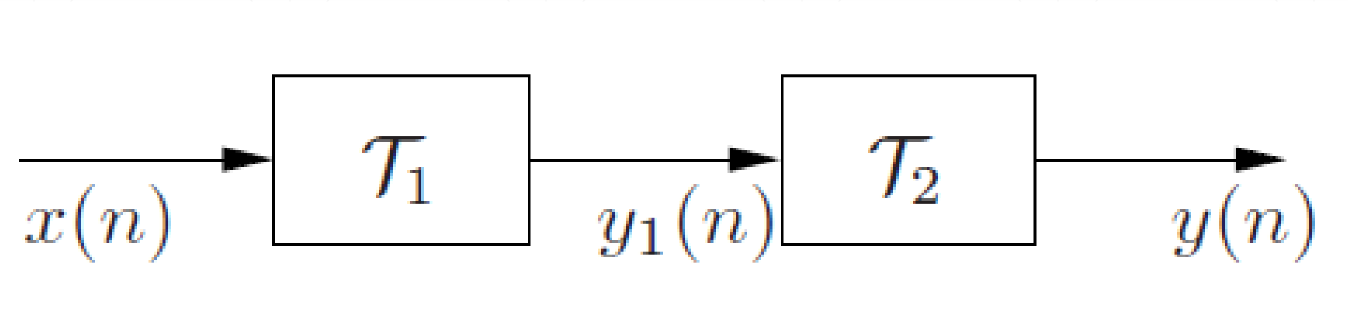
- Interconexión en cascada (serie)
- Interconexión paralela

Interconexión en Cascada

La interconexión en cascada se describe con sistemas de la forma:

$$y(n) = \mathcal{T}_1\left[\mathcal{T}_2[x(n)]\right] = \mathcal{T}_c[x(n)]$$

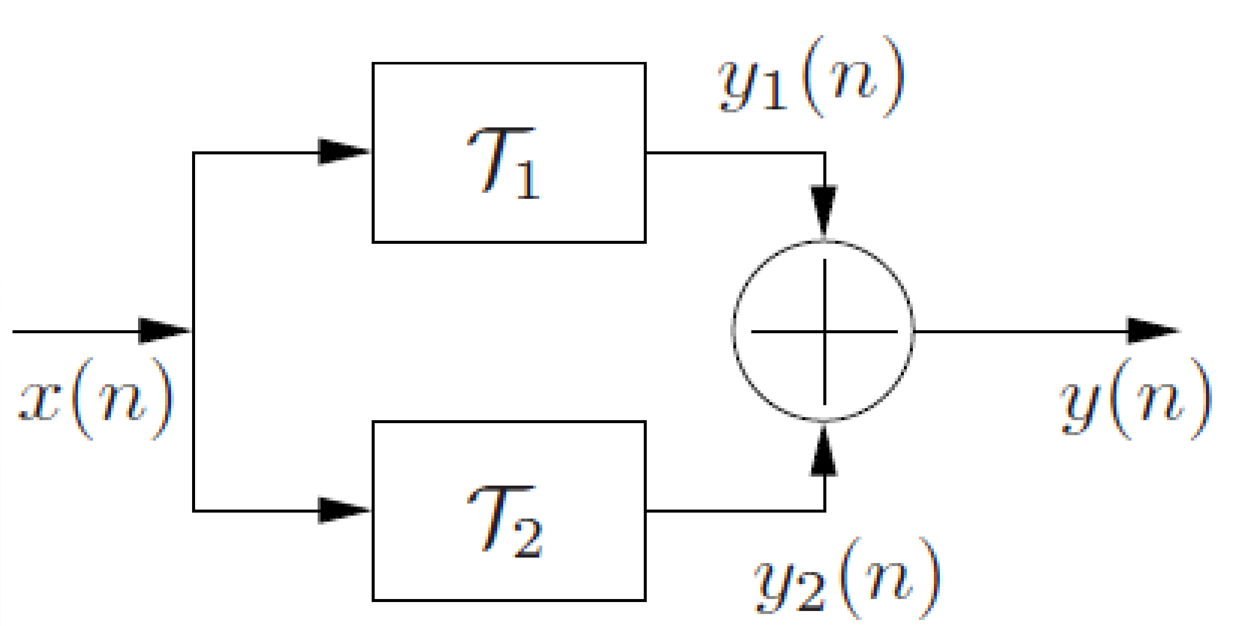
En general, para la conexión en cascada el orden de los bloques no es relevante. Si los sistemas son lineales e invariantes en el tiempo entonces $\mathcal{T}_c$ es invariante en el tiempo, y $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.



Interconexión en paralelo

La interconexión en paralelo se describe por:

$$y(n) = \mathcal{T}_1[x(n)] + \mathcal{T}_2[x(n)] = \mathcal{T}_p[x(n)]$$



Análisis de Sistemas LTI en tiempo discreto

Técnicas de análisis

Existen dos métodos básicos para el análisis del comportamiento de un sistema:

1. Descomposición de la señal de entrada en señales elementales para las que se conoce su respuesta.
2. Solución de la ***ecuación de diferencias***.

El análisis de sistemas, independientemente del método seleccionado, se simplifica enormemente si estos son lineales e invariantes en el tiempo (LTI: *Linear and Time Invariant*).

Análisis por descomposición en señales elementales

Sea

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$$

la descomposición de $x(n)$ donde c_k son los coeficientes de ponderación o pesos de la descomposición de la señal $x(n)$.

Uso de linealidad

Si la respuesta del sistema en reposo a $x_k(n)$ es $y_k(n)$, es decir

$$y_k(n) = \mathcal{T}[x_k(n)]$$

entonces con la propiedad de linealidad se obtiene

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] = \sum_k c_k \mathcal{T}[x_k(n)] = \sum_k c_k y_k(n)$$

Funciones elementales

Dos clases de funciones elementales son usuales:

- Impulsos $\delta(n-k)$, y
- Funciones exponenciales complejas $e^{j\omega_k n}$

Descomposición de una señal en impulsos

Utilizando como funciones elementales a los impulsos unitarios desplazados $\delta(n-k)$ es posible expresar cualquier función de variable discreta $x(n)$ como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Derivación de convolución

Si $h'(n,k)$ se utiliza para denotar la respuesta de un sistema lineal a un impulso desplazado k unidades $\delta(n-k)$

$$h'(n,k) = \mathcal{T}[\delta(n-k)]$$

entonces la salida del sistema puede calcularse con las respuestas elementales a los impulsos desplazados:

$$y(n) = \sum_k c_k y_k(n) = \sum_k x(k)\, h'(n,k)$$

Convolución

Si el sistema es además invariante en el tiempo, entonces con $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$ se tiene que $h'(n,k) = h(n-k)$ y por lo tanto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

que se denomina **suma de convolución**.

La respuesta del sistema $y(n)$ a la entrada $x(n)$ es igual a la convolución de $x(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$, para aquellos sistemas LTI.

En un sistema LTI en reposo su respuesta a cualquier entrada puede determinarse con solo conocer dicha entrada y la respuesta al impulso $h(n)$.

Pasos de la convolución

El cálculo de la suma de convolución $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ involucra cuatro pasos equivalentes a los estudiados para el caso de la integral de convolución:

1. **Reflexión** de $h(k)$ con respecto a $k = 0$ para producir $h(-k)$.

2. **Desplazamiento** de $h(-k)$ hacia el punto n que se desea calcular.

3. **Multiplicación** de $x(k)$ y $h(n-k)$ para obtener una secuencia producto $v_n(k) = x(k)h(n-k)$.

4. **Suma** de todos los valores de $v_n(k)$ para obtener $y(n)$.

Los pasos del 2 al 4 deben realizarse para todo instante n que se deseé calcular.

Ejemplo: Convolución (1)

Determine la respuesta a la señal de entrada

$$x(n) = \{\underbrace{1}_{\uparrow}, 2,3,1\}$$

de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso

$$h(n) = \{1, \underbrace{2}_{\uparrow}, 1, -1\}$$

Ejemplo: Convolución (2)

Solución: Siguiendo el procedimiento indicado, primero se calcula la reflexión de la respuesta al impulso $h(-k) = \{-1,1,\underset{\uparrow}{\underbrace{2}},1\}$. Los siguientes pasos se resumen en la siguiente tabla:

2. Desplazamiento	3. Multiplicación por $x(k) = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\}$	4. Suma
$h(-1-k)=\{-1,1,2,\underset{\uparrow}{1}\}$	$v_{-1}=\{0,0,0,\underset{\uparrow}{1},0,0,0\}$	$y_{-1}=1$
$h(0-k)=\{-1,1,\underset{\uparrow}{2},1\}$	$v_0=\{0,0,\underset{\uparrow}{2},2,0,0\}$	$y_0=4$
$h(1-k)=\{-1,\underset{\uparrow}{1},2,1\}$	$v_1=\{0,\underset{\uparrow}{1},4,3,0\}$	$y_1=8$
$h(2-k)=\{\underset{\uparrow}{-1},1,2,1\}$	$v_2=\{\underset{\uparrow}{-1},2,6,1\}$	$y_2=8$
$h(3-k)=\{\underset{\uparrow}{0},-1,1,2,1\}$	$v_3=\{\underset{\uparrow}{0},-2,3,2\}$	$y_3=3$
$h(4-k)=\{\underset{\uparrow}{0},0,-1,1,2,1\}$	$v_4=\{\underset{\uparrow}{0},0,-3,1\}$	$y_4=-2$
$h(5-k)=\{\underset{\uparrow}{0},0,0,-1,1,2,1\}$	$v_5=\{\underset{\uparrow}{0},0,0,-1\}$	$y_5=-1$

Ejemplo: Convolución (3)

Con lo que resulta la señal de salida en

$$y(n) = \{1, \underbrace{4}_{\uparrow}, 8,8,3, -2, -1\}$$

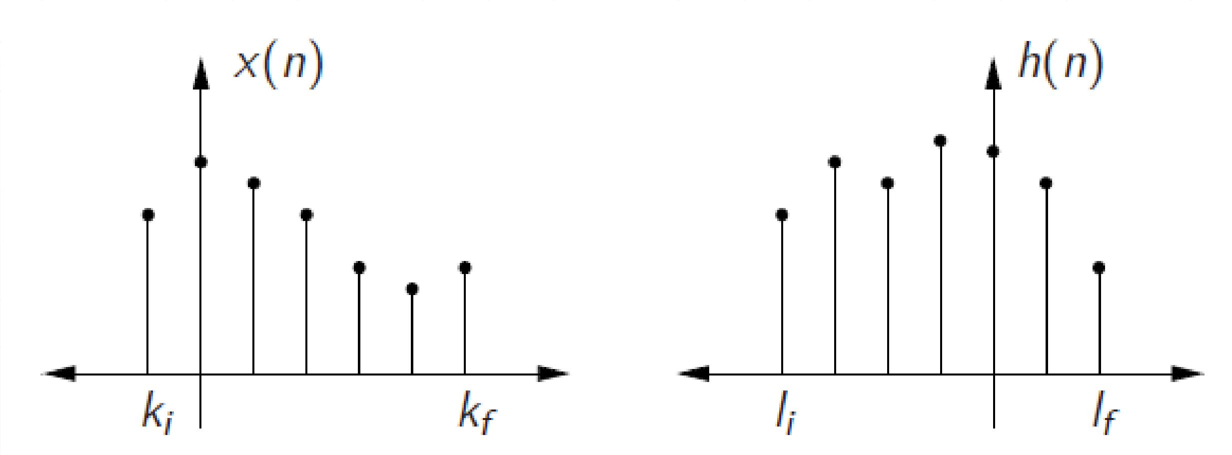
Ejemplo: Convolución de dos señales finitas (1)

Para el caso en que la entrada $x(n)$ y la respuesta impulsional $h(n)$ sean de longitud finita, calcule la longitud de la salida en términos de las longitudes de $x(n)$ y $h(n)$.

Ejemplo: Convolución de dos señales finitas (2)

Solución:

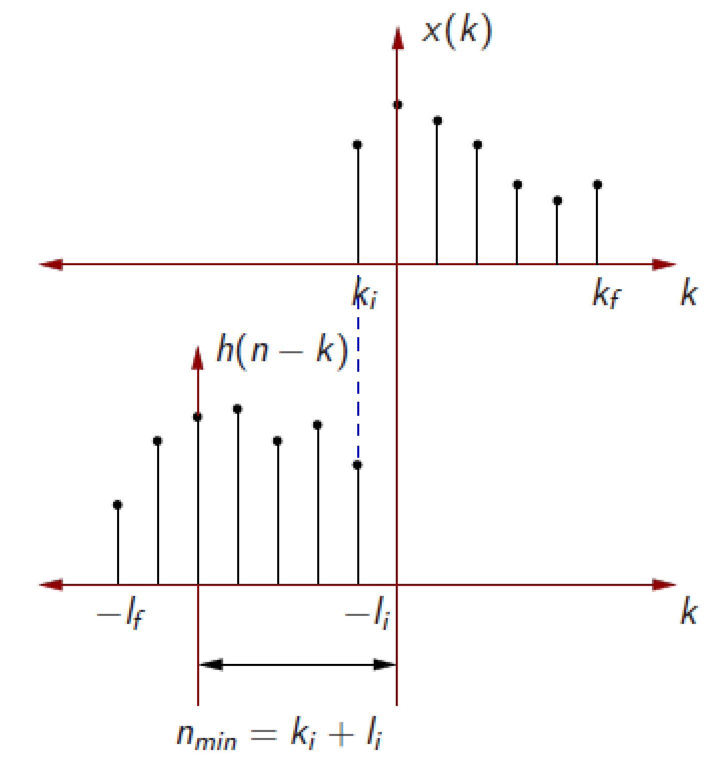
- Una señal finita tiene longitud N si el intervalo más pequeño con muestras diferentes de cero tiene N muestras.
- Asuma que los índices menor y mayor de la entrada $x(n)$ son k_i y k_f respectivamente, y los de la respuesta impulsional $h(n)$ son l_i y l_f.



Ejemplo: Convolución de dos señales finitas (3)

- La longitud de $x(n)$ es entonces $N_x = k_f - k_i + 1$, y la longitud de la respuesta impulsional es $N_h = l_f - l_i + 1$.
- El desplazamiento menor n_{min} para el que puede haber salida es:

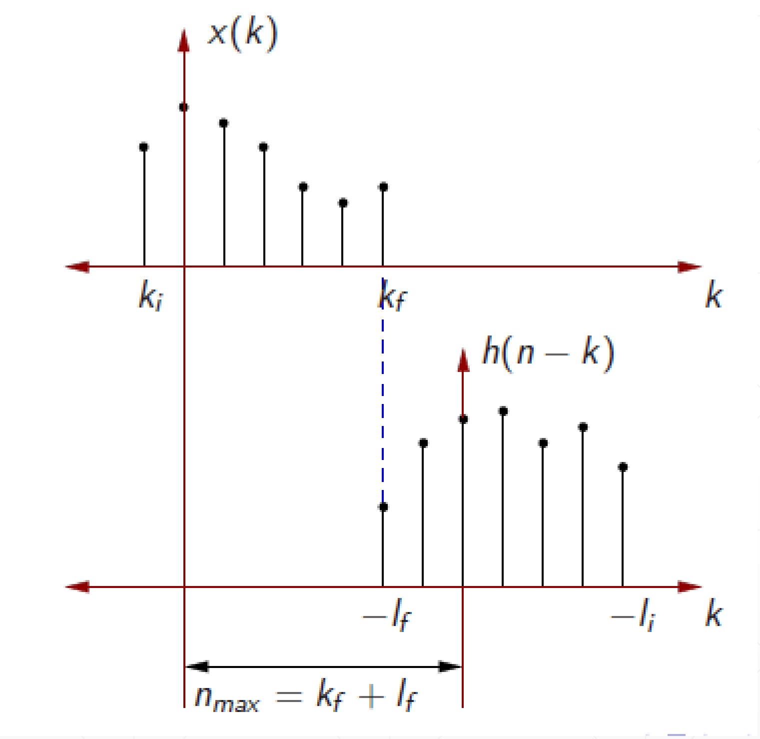
$$n_{min} = k_i + l_i$$



Ejemplo: Convolución de dos señales finitas (4)

- El desplazamiento mayor n_{max} para el que puede haber salida es:

$$n_{max} = k_f + l_f$$



Ejemplo: Convolución de dos señales finitas (5)

La longitud de la señal de salida es entonces

$$
\begin{aligned}
N_y &= n_{max} - n_{min} + 1 \\
&= \left(k_f + l_f\right) - (k_i + l_i) + 1 + (1 - 1) \\
&= \left(k_f - k_i + 1\right) + \left(l_f - l_i + 1\right) - 1 \\
&= N_x + N_h - 1
\end{aligned}
$$

El resultado de la convolución discreta tiene una longitud una muestra menor que la suma de las longitudes de las dos señales sobre las que ella opera.

Conmutatividad de la convolución

Con un cambio de variable es posible demostrar que la convolución es conmutativa:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

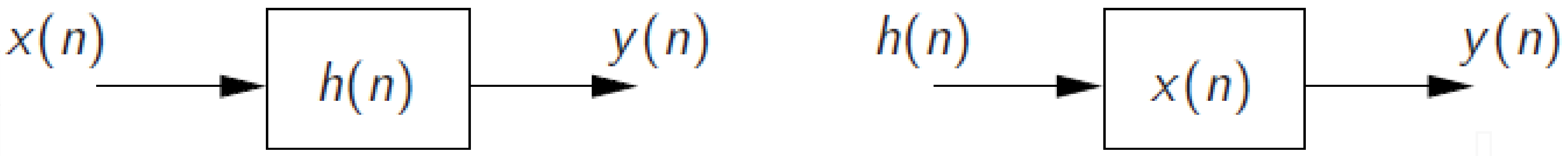
$$\underbrace{=}_{m=n-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$= h(n) * x(n)$$

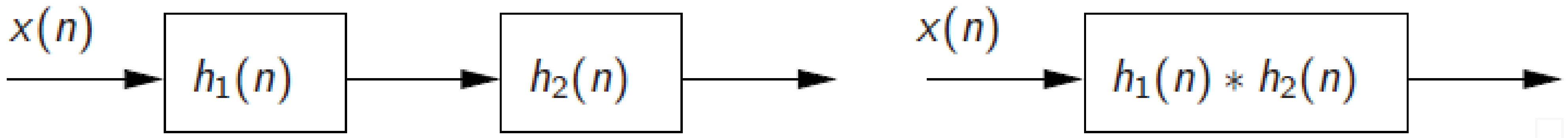
Conmutatividad

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$



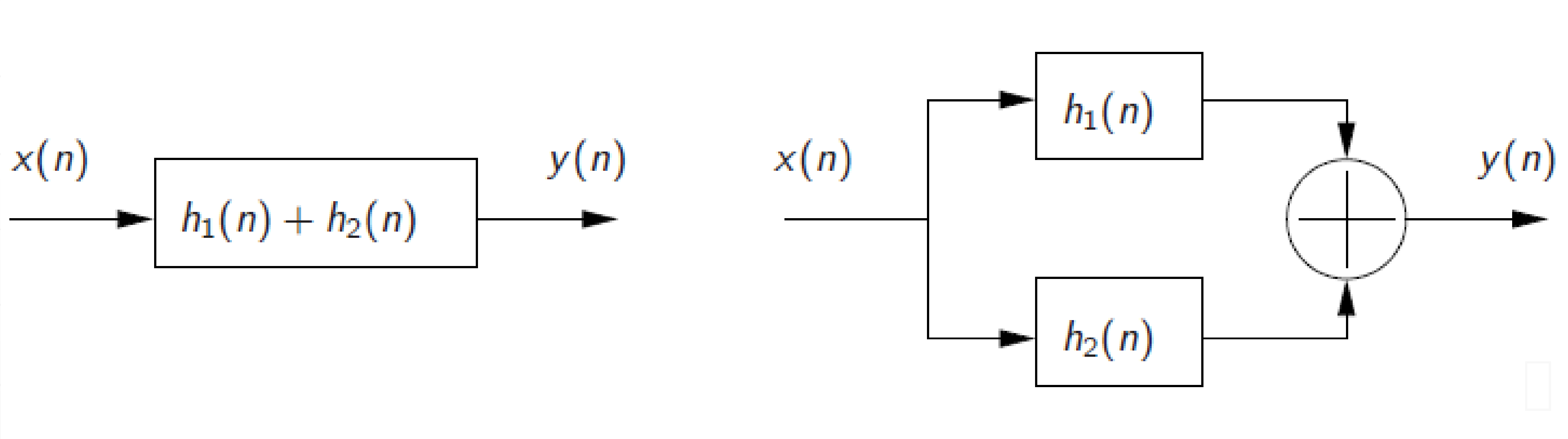
Asociatividad

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$



Distributividad

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$



Ejemplo: Sistemas con respuesta exponencial (1)

Encuentre a través de la convolución la respuesta de un sistema con respuesta exponencial al impulso:

$$h(n) = a^n u(n), \qquad |a| < 1$$

ante una entrada $x(n) = u(n)$.

Ejemplo: Convolución en un sistema exponencial (2)

Solución: Para determinar la salida $y(n)$ del sistema con la entrada escalón unitario $u(n)$ se utiliza la sumatoria de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k)h(k)$$

Para $n < 0$ el producto de $u(n-k)$ y $h(k)$ es siempre cero y por tanto $y(n) = 0$. Evaluando para algunos valores de n se obtiene:

$$y(0) = h(0) = 1$$
$$y(1) = h(0) + h(1) = 1 + a$$
$$y(2) = h(0) + h(1) + h(2) = 1 + a + a^2$$
$$\vdots$$
$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k) = \sum_{k=0}^{n} a^k$$

Ejemplo: Convolución en un sistema exponencial (3)

Puesto que

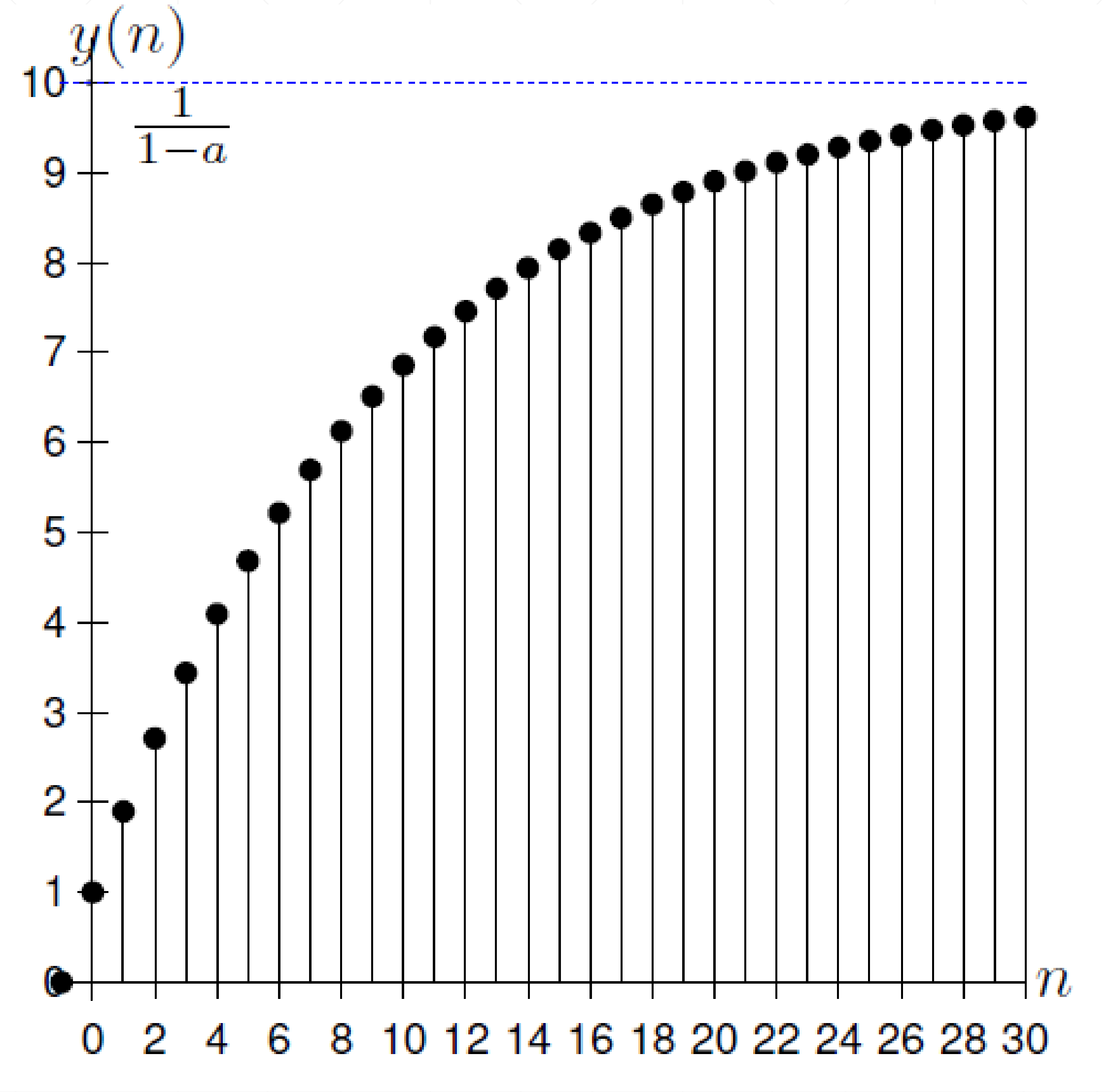
$$\begin{array}{rclllll}
\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 & +a & +a^2 & +\ldots & +a^n & \\
a\sum_{k=0}^{n} a^k & = & & a & +a^2 & +\ldots & +a^n & +a^{n+1} \\
\hline
(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1-a^{n+1} & & & & &
\end{array}$$

se deriva para $n \geq 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Si $|a| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ lo que implica que $y(\infty) = \frac{1}{1-a}$. La figura muestra un ejemplo de la respuesta para $a = 0{,}9$.

Ejemplo: Convolución en un sistema exponencial (4)



Sistemas LTI Causales

Sistemas LTI causales

En un sistema causal la salida en $n = n_0$ depende solo de valores de entrada $x(n)$ para $n \leq n_0$, es decir, de valores pasados. Como

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \underbrace{x(n_0 - k)}_{\substack{Muestras \\ pasadas\ y \\ actual}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k) \underbrace{x(n_0 - k)}_{\substack{Muestras \\ futuras}}$$

se deriva que $h(k) = 0$ para todo $k \leq -1$, pues solo así la salida podrá ser independiente de entradas futuras.

Simetrías por causalidad

Para un sistema causal la convolución se simplifica en

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

Si la entrada $x(n)$ y la respuesta impulsional son causales, la convolución se simplifica en:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

Nótese que esta respuesta es a su vez causal, es decir, $y(n) = 0$ para todo $n < 0$.

Estabilidad de sistemas LTI

Estabilidad de sistemas LTI

Un sistema arbitrario en reposo se dice ser estable de entrada acotada-salida acotada (*BIBO: bounded input – bounded output*) si toda entrada acotada produce una salida acotada:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \overset{\mathcal{T}}{\rightsquigarrow} |y(n)| \leq M_y < \infty, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Si para alguna entrada acotada se produce una salida no acotada (infinita), el sistema se dice ser inestable.

Condición de estabilidad (1)

Dada la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

se cumple para su valor absoluto

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|M_x \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Lo que implica que $|y(n)|$ es acotada solo si

$$S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \infty$$

Condición de estabilidad (2)

En consecuencia un sistema LTI es **estable** si su respuesta al impulso es **absolutamente sumable**.

Esta condición es **necesaria** y **suficiente**.

Ejemplo: Estabilidad y convergencia (1)

Determine el rango del parámetro a para que el sistema LTI de respuesta al impulso $h(n) = a^n u(n)$ sea estable.

Ejemplo: Estabilidad y convergencia (2)

Solución:

El sistema es estable si la suma S_h converge.

$$S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \cdots$$

Esto ocurre si y solo si $|a| < 1$ y esta suma converge a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|}$$

Ejemplo: Estabilidad y convergencia (1)

Determine el rango de valores de a y b para los cuales el sistema LTI de respuesta al impulso $h(n)$ es estable.

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Estabilidad y convergencia (2)

Solución:

La condición de estabilidad es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |b^n| + \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=1}^{n} \left|\frac{1}{b}\right|^n + \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

El sistema es estable si $|a| < 1$ y si $|b| > 1$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{|b| - 1} + \frac{1}{1 - |a|}$$

Sistemas LTI de respuesta al impulso finita e infinita

Sistemas FIR e IIR

Los sistemas se pueden distinguir entre aquellos que poseen:

- Respuesta **finita** al impulso (FIR: *Finite Impulse Response*)
- Respuesta **infinita** al impulse (IIR: *Infinite Impulse Response*)

Sistemas causales FIR

- Para los sistemas causales FIR la convolución se reduce a:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k), \qquad h(k) = 0, k < 0 \wedge k \geq M$$

- El sistema se comporta como una "ventana" que solo permite ver M muestras para calcular la salida.
- Se dice que el sistema FIR tiene memoria finita de M muestras.

Sistemas discretos descritos por ecuaciones de diferencias

- La convolución es implementable ***directamente*** solo para sistemas FIR:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Por otro lado, existen algunos sistemas IIR que pueden ser implementados a través de ***ecuaciones de diferencias***.

Sistemas discretos recursivos y no recursivos

- **Sistemas recursivos**: la salida depende de salidas anteriores y entradas presente y/o anteriores.

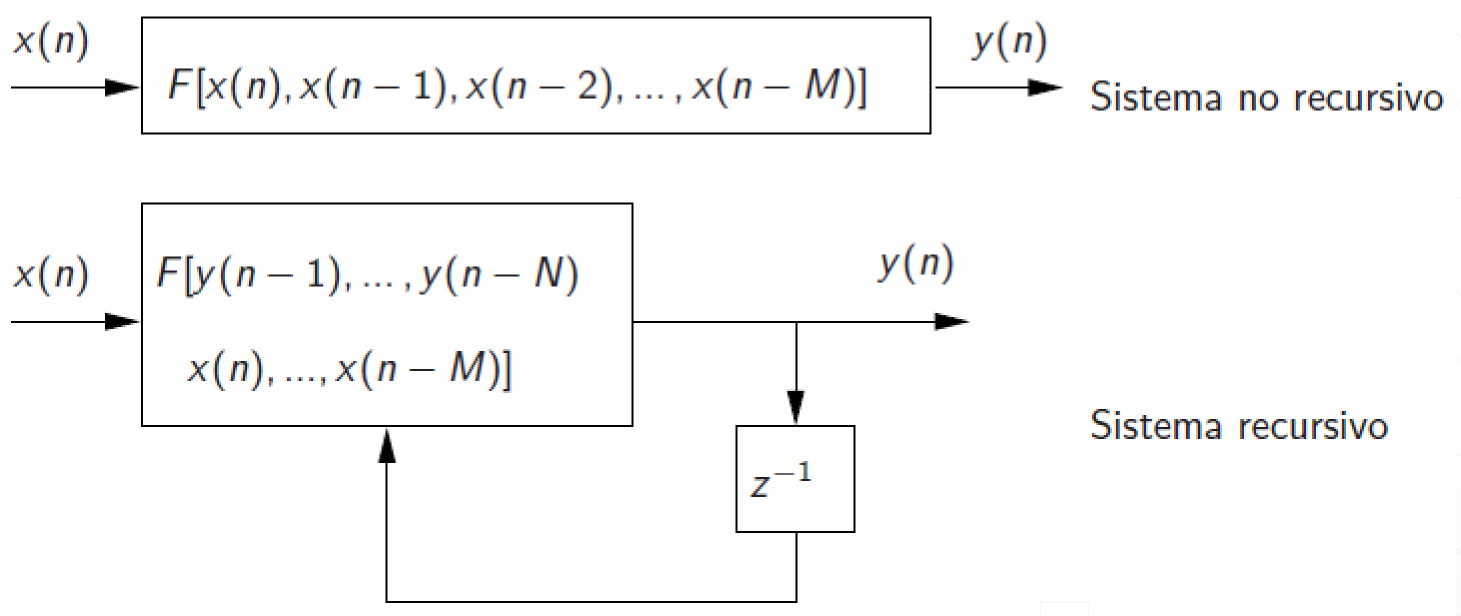
$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

- **Sistemas no recursivos**: la salida depende de las entradas presentes y pasadas, mas no de salidas pasadas.

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

Recursividad de sistemas FIR

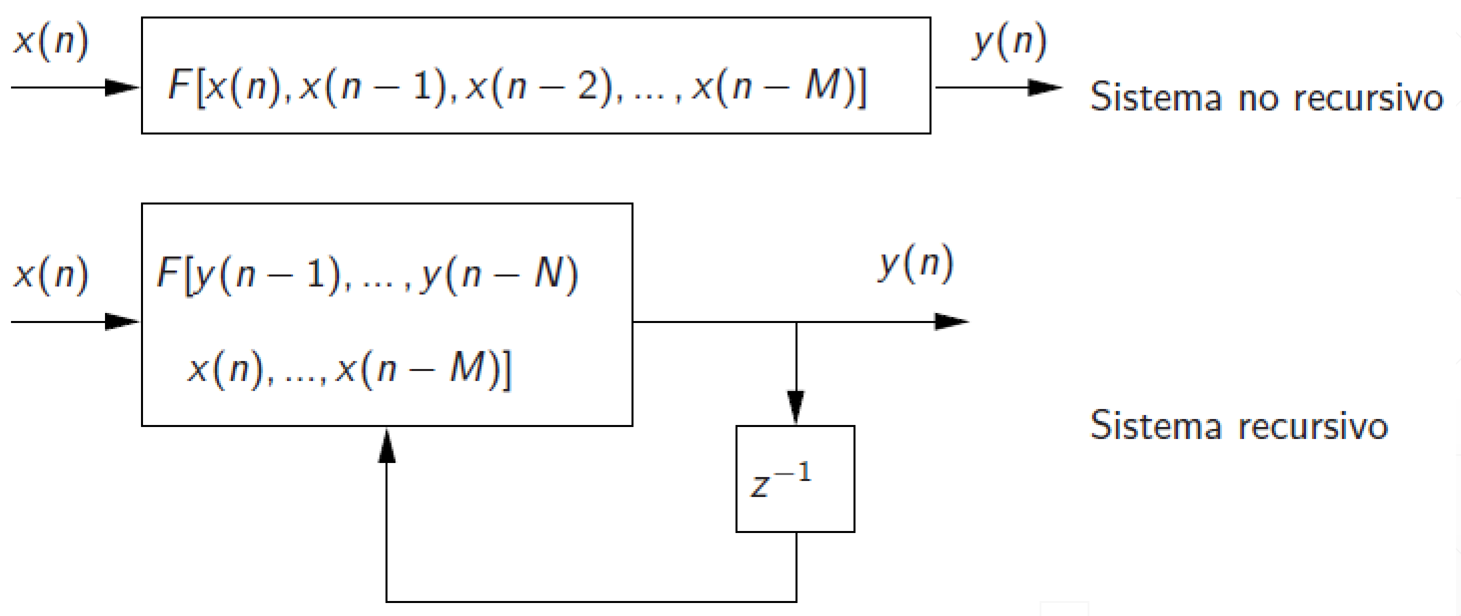
Un Sistema FIR no es recursivo.



La salida de un sistema recursivo debe calcularse en orden.

Recursividad de sistemas FIR

Un Sistema FIR no es recursivo.



La salida de un sistema recursivo debe calcularse en orden.

Ejemplo: Sistemas discretos recursivos y no recursivos (1)

Determine la naturaleza recursiva del sistema de media acumulativa

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k)$$

Ejemplo: Sistemas discretos recursivos y no recursivos (2)

Solución: El sistema de media acumulativa es recursivo pues

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)$$

$$\Rightarrow ny(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)$$

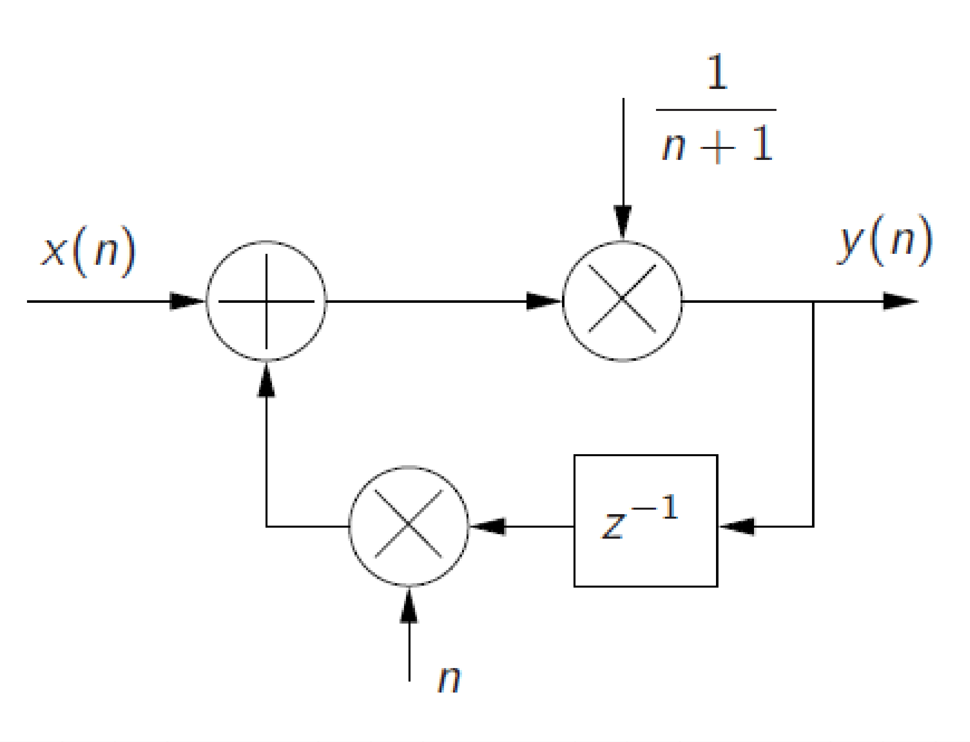
$$\Rightarrow \ (n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n)$$

Ejemplo: Sistemas discretos recursivos y no recursivos (3)

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$
$$= \frac{1}{n+1} \big(ny(n-1) + x(n) \big)$$

- Los coeficientes para la salida anterior $y(n-1)$ y la entrada actual $x(n)$ $\frac{n}{n+1}$ y $\frac{1}{n+1}$ no son constantes.
- Estos coeficientes producen un sistema variante en el tiempo.

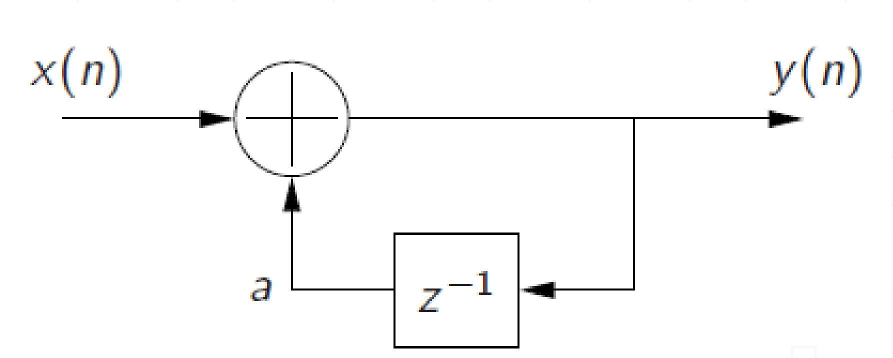
Ejemplo: Sistemas discretos recursivos y no recursivos (4)



Sistemas LTI y ecuaciones de diferencias

En comparación con el sistema anterior, la ecuación de diferencias descrita seguidamente de $y(n)$ representa un sistema donde el coeficiente a es constante, y por tanto el sistema es invariante en el tiempo.

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$



Respuesta ante una entrada $x(n)$

La respuesta del sistema $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ ante una entrada causal $x(n)$ con condición inicial $y(-1)$ es:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= ay(-1) + x(0) \\
y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1) \\
y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2)
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
y(n) &= a^{n+1}y(-1) + a^n x(0) + a^{n-1}x(1) + \cdots + a^0 x(n) \\
&= \underbrace{a^{n+1}y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)}, \qquad n \geq 0
\end{aligned}
$$

Respuesta ante una entrada $x(n)$

$$y(n) = \underbrace{a^{n+1}y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)}, \qquad n \geq 0$$

- El término $y_{zi}(n)$ es la respuesta de entrada cero, respuesta natural o respuesta libre. Depende de las condiciones iniciales del sistema.
- El término $y_{zs}(n)$ es la respuesta de estado cero o respuesta forzada, la cual se obtiene con una entrada $x(n)$ cuando el sistema está en reposo. En este caso puede interpretarse como la convolución de $x(n)$ con $h(n)$, donde:

$$h(n) = a^n u(n)$$

donde los índices son finitos debido a la causalidad de ambas señales $\mathrm{x}(n)$ y $h(n)$.

Caso general de ecuación de diferencias

El caso general se puede denotar como:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

o con $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

con N el **orden** de la ecuación de diferencias (o del sistema).

Evaluación de ecuaciones de diferencias (4)

- Las condiciones iniciales $y(-1), \ldots, y(-N)$ resumen toda la historia pasada del sistema, y son necesarias para efectuar el cálculo de las salidas presentes y futuras.
- Cualquier sistema recursivo descrito por una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes es un sistema de respuesta infinita al impulso, pero no todo sistema de respuesta infinita LTI puede ser descrito con estas ecuaciones.

Linealidad: Replanteamiento

Anteriormente el concepto de linealidad planteaba que si un sistema lineal tiene entrada cero, por escalado, la salida del sistema debe ser cero. Pero al definir la salida de un sistema como la composición de la respuesta forzada más la respuesta natural esta idea se debe replantear.

Así:

1. La respuesta total es igual a la suma de las respuestas forzada y natural ($y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$).
2. El principio de superposición se aplica a la respuesta en estado nulo (lineal en estado nulo).
3. El principio de superposición se aplica a la respuesta a la entrada nula (lineal a entrada nula).

Ejemplo: Linealidad de sistemas de primer orden (1)

Determine que un sistema descrito por la ecuación de diferencias de primer orden es lineal.

Ejemplo: Linealidad de sistemas de primer orden (2)

Solución:

1. Dada la ecuación de diferencias del sistema

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

Con la entrada cero se obtiene:

$$y_{zi}(n) = a^{n+1}y(-1)$$

Con estado inicial cero se obtiene:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \quad \Rightarrow \quad y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

Ejemplo: Linealidad de sistemas de primer orden (3)

2. Para $x_1(n)$

$$y_{zs_1}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x_1(n-k)$$

Para $x_2(n)$

$$y_{zs_2}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x_2(n-k)$$

$$y_{zs_1}(n) + y_{zs_2}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x_1(n-k) + \sum_{k=0}^{n} a^k x_2(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^k \left(x_1(n-k) + x_2(n-k)\right)$$

Lo que equivale a la respuesta del sistema a $x_1(n) + x_2(n)$ y, por lo tanto, el sistema es lineal en estado nulo.

Ejemplo: Linealidad de sistemas de primer orden (4)

3. Con $y_{zi_1}(n) = a^{n+1}y_1(-1)$ y $y_{zi_2}(n) = a^{n+1}y_2(-1)$, se obtiene

$$y_{zi_1}(n) + y_{zi_2}(n) = a^{n+1}y_1(-1) + a^{n+1}y_2(-1)$$

Que equivale a la respuesta de entrada cero del Sistema con condiciones iniciales $y(-1) = y_1(-1) + y_2(-1)$, por lo que el sistema es lineal a entrada nula.

Ejemplo: Linealidad de sistemas de primer orden (5)

- Todo sistema descrito por una ecuación de diferencias con coeficientes constantes es lineal.
- Estos sistemas son a su vez invariantes en el tiempo, al ser sus coeficientes constantes.
- El estudio de estabilidad en sistemas de orden mayor a 1, requiere de otras técnicas que serán estudiadas posteriormente.

Solución de ecuaciones de diferencias

Solución de ecuaciones de diferencias

- El objetivo de solucionar

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

es encontrar la salida $y(n)$ para una determinada entrada $x(n)$ dado un conjunto de condiciones iniciales (o finales).

- Se asume que el sistema es causal, o anticausal, al plantear la ecuación de $y(n)$ en términos de salidas anteriores o futuras, respectivamente.
- Aquí solo se definirá para **sistemas causales**.
- Si se tienen condiciones iniciales $y(-1) = \cdots = y(-N) = 0$, se asume que el sistema es causal.
- Condiciones de reposo finales $y(0) = y(1) = \cdots = y(N-1) = 0$ caracterizan a un sistema anticausal.

Solución de ecuaciones de diferencias: Método directo

Con el método directo se asume que la solución tiene dos partes:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

- $y_h(n)$ es la **solución homogénea** o complementaria.
- $y_p(n)$ es la **solución particular**.

Método directo: Solución homogénea (1)

Para solucionar

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

se asume primero una entrada nula $x(n) = 0$, para así resolver:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

Se asume que la solución es de forma exponencial:

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Método directo: Solución homogénea (2)

Sustituyendo se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{n-k} = 0$$

que se puede reescribir como:

$$\lambda^{n-N}\underbrace{(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \cdots + a_{N-1}\lambda + a_N)}_{\textit{polonomio característico}} = 0$$

Método directo: Solución homogénea (3)

- El polonomio característico tiene N raíces.
- Asumiendo que las raíces son distintas, la solución más general a la ecuación de diferencias homogénea es:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_N\lambda_N^n$$

con los coeficientes de ponderación C_k, que se calculan a partir de las condiciones iniciales especificadas para el sistema.

Ejemplo: Solución homogénea (1)

Determine la solución homogénea para la ecuación de diferencias de primer orden:

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$$

Ejemplo: Solución homogénea (2)

Solución:

Con $x(n) = 0$ y $y_h(n) = \lambda^n$ se obtiene:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} = 0$$

$$\lambda^{n-1}(\lambda + a_1) = 0 \;\; \Rightarrow \lambda = -a_1$$

Y la solución sería:

$$y_h(n) = C\lambda^n = C(-a_1)^n$$

Sustituyendo en $y(n) + a_1 y(-1) = x(n)$ para $n = 0$, junto con $x(n) = 0$, se obtiene:

$$y(0) + a_1 y(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(0) = -a_1 y(-1)$$

Ejemplo: Solución homogénea (3)

y con $y_h(0) = C = -a_1 y(-1)$

$$y_h(n) = -a_1 y(-1)(-a_1)^n = y(-1)(-a_1)^{n+1} = y_{zi}(n), \qquad n \geq 0$$

que corresponde además con la respuesta de entrada nula.

Ejemplo: Respuesta de entrada nula para sistemas de segundo orden (1)

Determine la respuesta a entrada nula del sistema descrito por la ecuación de diferencias homogénea de segundo orden

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0$$

Ejemplo: Respuesta de entrada nula para sistemas de segundo orden (2)

Solución:

Suponiendo $y_h(n) = \lambda^n$, se obtiene:

$$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = \lambda^{n-2}(\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

Por lo que la forma general de la solución homogénea es:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(-1)^n + C_2 4^n$$

Para la respuesta a entrada nula se plantea:

$$\begin{aligned} y(0) &= 3y(-1) + 4y(-2) = C_1 + C_2 \\ y(1) &= 3y(0) + 4y(-1) \\ &= 3\big(3y(-1) + 4y(-2)\big) + 4y(-1) \\ &= 13y(-1) + 12y(-2) = -C_1 + 4C_2 \end{aligned}$$

Ejemplo: Respuesta de entrada nula para sistemas de segundo orden (3)

Sumando $y(0)$ y $y(1)$ resulta en

$$C_2 = \frac{16y(-1) + 16y(-2)}{5}$$

y con $y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) = C_1 + C_2$ se deriva además

$$3y(-1) + 4y(-2) - C_2 = C_1$$

$$3y(-1) + 4y(-2) - \frac{16y(-1) + 16y(-2)}{5} = C_1$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{4y(-2) - y(-1)}{5}$$

Finalmente:

$$y_{zi}(n) = \frac{4y(-2) - y(-1)}{5}(-1)^n + \frac{16y(-1) + 16y(-2)}{5}4^n$$

Raíces de multiplicidad m

Si λ_1 es una raíz de multiplicidad m, entonces:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \cdots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n + C_{m+1}\lambda_2^n + \cdots$$

Ejemplo: Respuesta de entrada nula con raíz de multiplicidad 2 (1)

Repita el ejemplo anterior para:

$$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = 0$$

Ejemplo: Respuesta de entrada nula con raíz de multiplicidad 2 (2)

Solución:

Suponiendo $y_h(n) = \lambda^n$, resulta en el polinomio característico

$$\lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda^{n-2}(\lambda - 2)^2 = 0$$

por lo que la solución general es

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n, \qquad \lambda_1 = 2$$

Se deja como ejercicio al lector demostrar que

$$y_{zi}(n) = [y(-1) - y(-2)]2^{n+2} + [y(-1) - 2y(-2)]n2^{n+1}$$

Método directo: Solución particular

La solución particular $y_p(n)$ debe satisfacer:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \qquad a_0 = 1$$

lo que generalmente depende de la forma de $x(n)$.

Ejemplo: Solución particular (1)

Determine la solución particular de

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n), \qquad |a_1| < 1$$

para $x(n) = u(n)$.

Ejemplo: Solución particular (2)

Solución:

Como $x(n)$ es constante para $n \geq 0$, se asume que la solución también es constante para $n \geq 0$. La solución particular es entonces:

$$y_p(n) = Ku(n)$$

Sustituyendo esto en la ecuación de diferencias se obtiene:

$$Ku(n) + a_1 Ku(n-1) = u(n)$$

y para $n \geq 1$ esto equivale a:

$$K + a_1 K = 1$$
$$K(1 + a_1) = 1$$
$$K = \frac{1}{1 + a_1}$$

Ejemplo: Solución particular (3)

Lo que implica que la solución particular es:

$$y_p(n) = \frac{1}{1 + a_1} u(n)$$

Solución particular de ecuaciones de diferencias

Se asume $y_p(n)$ con la misma forma de la entrada:

Señal de entrada $x(n)$	Solucion particular $y_p(n)$
$\delta(n)$	0
$A(\text{cte})$	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M)$
$\left\{\begin{array}{c} A\cos\omega_0 n \\ A\sin\omega_0 n \end{array}\right\}$	$K_1 \cos\omega_0 n + K_2 \sin\omega_0 n$

Solución total de ecuaciones de diferencias

- Por linealidad la solución total es la suma de las soluciones homogénea y particular.
- Las constantes $\{C_k\}$, de la solución homogénea, deben de recalcularse para poder satisfacer las condiciones iniciales.

Ejemplo: Solución total de ecuaciones de diferencias (1)

Determine la solución total $y(n)$, $n \geq 0$ de la ecuación de diferencias $y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$, con $x(n) = u(n)$ y condición inicial $y(-1)$.

Ejemplo: Solución total de ecuaciones de diferencias (2)

Solución:

De los ejemplos anteriores se tiene:

$$y_h(n) = C(-a_1)^n, \qquad y_p(n) = \frac{1}{1+a_1}u(n)$$

$$y(n) = C(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}u(n)$$

Con $n = 0$ se obtiene

$$y(0) = C + \frac{1}{1+a_1}$$

De la ecuación de diferencias en $n = 0$ se obtiene

$$y(0) + a_1 y(-1) = 1 \Rightarrow y(0) = 1 - a_1 y(-1)$$

y por lo tanto:

$$C + \frac{1}{1+a_1} = 1 - a_1 y(-1)$$

Ejemplo: Solución total de ecuaciones de diferencias (3)

Igualando ambas respuestas en el tiempo $n = 0$ se tiene:

$$1 - a_1 y(-1) = C + \frac{1}{1 + a_1}$$

Así la constante C es:

$$C = -a_1 y(-1) + \frac{a_1}{1 + a_1}$$

Por ultimo, se sustituye C en la ecuación de salida y se tiene:

$$y(n) = y(n) = \left\{-a_1 y(-1) + \frac{a_1}{1 + a_1}\right\}(-a_1)^n + \frac{1}{1 + a_1} u(n)$$

Ejemplo: Solución total de ecuaciones de diferencias (4)

Nótese que el valor de C depende no sólo de las condiciones iniciales, sino también de la entrada.

Respuesta impulsional de un sistema recursivo LTI

Respuesta impulsional de un sistema recursivo LTI

- La respuesta impulsional $h(n)$ en sistemas recursivos es igual a la respuesta de estado cero del sistema cuando la entrada es $x(n) = \delta(n)$.
- Es decir, para la respuesta impulsional siempre se considera que el sistema está inicialmente en reposo.

Respuesta impulsional de un sistema recursivo LTI:
caso general

En el caso general de sistemas recursivos LTI (considerados causales), la respuesta de estado cero en términos de convolución con una entrada causal se expresa como:

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n), \qquad n \geq 0$$

Si la entrada es un impulso, lo anterior se reduce a:

$$y_{zs}(n) = h(n) * \delta(n) = h(n)$$

Respuesta impulsional de un sistema recursivo LTI:
caso particular ante $\delta(n)$

- Con la entrada $\delta(n)$, la solución particular es cero, puesto que $x(n) = 0$ para $n > 0$.
- Consecuentemente, la **respuesta al impulso** del sistema consiste en la solución a la ecuación homogénea con los coeficientes C_k determinados para satisfacer las condiciones iniciales.

Ejemplo: Respuesta impulsional de un Sistema recursivo (1)

Determine la respuesta impulsional $h(n)$ del sistema recursivo LTI

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

Ejemplo: Respuesta impulsional de un Sistema recursivo (2)

Solución:

En un ejemplo anterior se obtuvo:

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2 4^n, \qquad n \geq 0$$

que corresponde también a la respuesta impulsional $h(n)$, debido a que para $x(n) = \delta(n)$, $y_p(n) = 0$. Sustituyendo y considerando que el sistema está en reposo ($y(-1) = y(-2) = 0$):

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2$$

$$y(1) - 3y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad y(1) = 5 = -C_1 + 4C_2$$

$$\Rightarrow \quad 5C_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{6}{5}, \qquad C_1 = \frac{-1}{5}$$

Ejemplo: Respuesta impulsional de un Sistema recursivo (3)

Y finalmente

$$h(n) = \left[-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}4^n \right] u(n)$$

Relación entre sistemas IIR y ecuaciones de diferencias

Cualquier sistema recursivo descrito por una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes es un sistema IIR, pero no todo sistema IIR LTI puede ser descrito con estas ecuaciones.

Respuesta de un sistema de orden N

La respuesta impulsional de un sistema de orden N, descrito por una ecuación de diferencias lineal de orden N:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

se obtiene a través de la solución homogénea:

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n = h(n)$$

Cuando las raíces del polonimio característico son **distintas**, donde los coeficientes $\{C_k\}$ se obtienen con las condiciones iniciales

$$y(-1) = y(-2) = \cdots = y(-N) = 0$$

Estabilidad y raíces del polinomio

- Con

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N} C_k\lambda_k^n\right| \leq \sum_{k=1}^{N}|C_k|\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_k|^n$$

Si $|\lambda_k| < 1$ para todo k, entonces $\sum_n^{\infty}|\lambda_k|^n < \infty$, y por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| < \infty$.

- Si $|\lambda_k| > 1$, para uno o más k entonces $h(n)$ no es absolutamente sumable y en consecuencia el sistema es inestable.
- $\Rightarrow$ un sistema IIR causal descrito por una ecuación de diferencias con coeficientes constantes, es estable si para todas las raíces del polinomio $|\lambda_k| < 1$.
- Esto es así aún con raíces de multiplicidad m.

Correlación

Correlación

Utilizada para medir similitud entre secuencias

Correlación cruzada

La correlación cruzada se define para señales de energía $x(n)$ e $y(n)$:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n)\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

O lo que es equivalente:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k+n)y(k)\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Conmutatividad y correlación

La correlación **no** es conmutativa:

$$r_{yx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k+n)x(k) = r_{xy}(-n)$$

La correlación es similar a la convolución

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$$

Autocorrelación

La autocorrelación se define para $y(n) = x(n)$:

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k+n)x(k)$$

Correlación, causalidad y longitud finita

Si $x(n)$ e $y(n)$ son causales y finitas de longitud N entonces se cumple:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=\text{máx}\{n,0\}}^{N+\text{mín}\{0,n\}-1} x(k)y(k-n)$$

Correlación y energía

Sean $x(n)$ y $y(n)$ dos señales de energía finita. La energía de:

$$w(k) = ax(k) + by(k-n)$$

es:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [ax(k) + by(k-n)]^2$$

$$= a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) + b^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} y^2(k-n) + 2ab \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n)$$

$$= a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab r_{xy}(n)$$

Correlación y energía

Donde:

- $r_{xx}(0) = E_x$ es la energía de la señal $x(n)$
- $r_{yy}(0) = E_y$ la energía de $y(n)$

Y en general debe ser positiva.

$$a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab r_{xy}(n) \geq 0$$

Y suponiendo que $b \neq 0$, se obtiene diviendo por b^2:

$$r_{xx}(0)\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2r_{xy}(n)\left(\frac{a}{b}\right) + r_{yy}(0) \geq 0$$

que es cuadrática en (a/b).

Correlación y energía

Para que sea no negativo su discriminante debe ser no positivo:

$$4[r_{xy}^2(n) - r_{xx}(0)r_{yy}(0)] \leq 0$$

$$|r_{xy}(n)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$$

y para $y(n) = x(n)$:

$$|r_{xx}(n)| \leq r_{xx}(0) = E_x$$

es decir:

La autocorrelación alcanza su valor **máximo** para el retardo cero, cuando la señal es idéntica a sí misma.

Correlaciones normalizadas y cruzadas

La autocorrelación normalizada se define como:

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}$$

y la correlación cruzada normalizada como:

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}}$$

Como $r_{xy}(n) = r_{yx}(-n)$, se cumple para la autocorrelación $r_{xx}(n) = r_{xx}(-n)$, es decir, es una función par.

Ejemplo (1)

Calcule la autocorrelación de la señal:

$$x(n) = a^n u(n), \qquad 0 < a < 1$$

Ejemplo (2)

Solución:

Para $n \geq 0$:

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(k)x(k-n) = \sum_{k=n}^{\infty} a^k a^{k-n} = a^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} (a^2)^k$$

Y puesto que $\lim_{N \to \infty} \alpha^{N+1} = 0$ si $\alpha < 1$, entonces:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k = \lim_{N \to \infty} \frac{\alpha^n - \alpha^{N+1}}{1-\alpha} = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$r_{xx}(n) = a^{-n}\left(\frac{a^{2n}}{1-a^2}\right) = \frac{a^n}{1-a^2}$$

Ejemplo (3)

Para $n < 0$:

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)x(k-n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k a^{k-n} = a^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (a^2)^k$$
$$= \frac{a^{-n}}{1-a^2} = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}$$

Y combinando ambas partes se obtiene:

$$r_{xx}(n) = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}$$

que es, como se predijo, una función par $r_{xx}(n) = r_{xx}(-n)$. Con $r_{xx}(0) = \frac{1}{1-a^2}$ se obtiene la autocorrelación normalizada:

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)} = a^{|n|}$$

Correlación para señales de potencia

Definición anterior para señales de **energía**.

Para señales de **potencia** la correlación se redefine como:

$$r_{xy}(n) = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x(k)y(k-n)$$

y la autocorrelación de una señal de potencia como:

$$r_{xx}(n) = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x(k)x(k-n)$$

Correlación para señales periódicas

Si las señales son periódicas con periodo N, entonces este promedio puede calcularse en un solo periodo:

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(k-n)$$

En la práctica se utiliza la correlación para encontrar periodicidades en señales físicas alteradas por interferencias aleatorias.

Correlación y determinación de periodicidad (1)

Si $y(n) = x(n) + \omega(n)$, con $x(n)$ periódica y $\omega(n)$ aleatoria:

$$r_{yy}(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} y(k)y(k-n)$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} [x(k) + \omega(k)][x(k-n) + \omega(k-n)]$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} [x(k)x(k-n)] + [x(k)\omega(k-n)] + [\omega(k)x(k-n)] + [\omega(k)\omega(k-n)]$$

$$= r_{xx}(n) + r_{x\omega}(n) + r_{\omega x}(n) + r_{\omega\omega}(n)$$

Considerando sólo M muestras y asumiendo $y(n) = 0$ para $n < 0$, $n \geq M$.

Correlación y determinación de periodicidad (2)

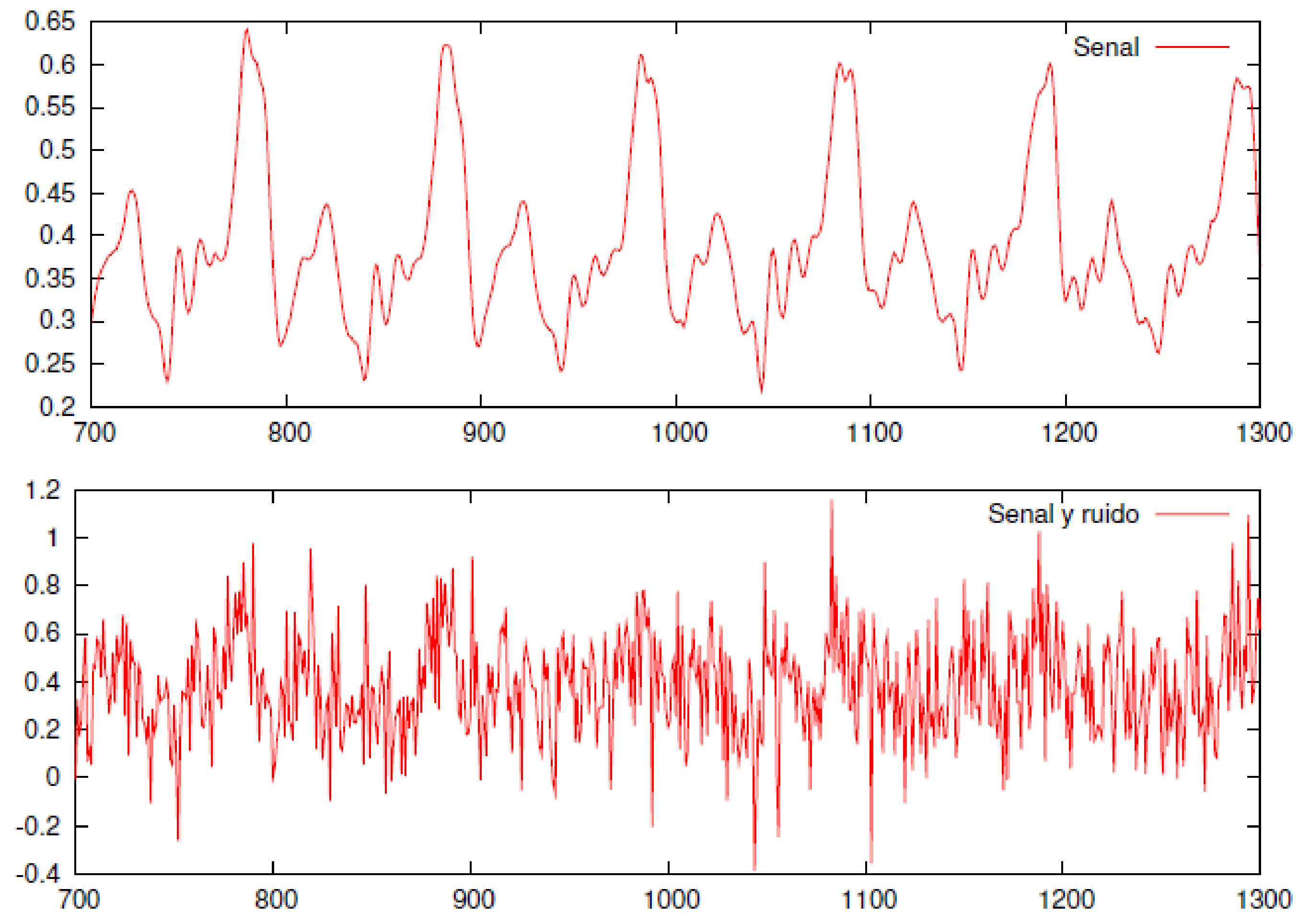
Si $x(n)$ tiene periodo N entonces $r_{xx}(n)$ también con picos en $n = 0, N, 2N \ldots$

Se debe elegir $M \gg N$ y n no debe evaluarse, como regla empírica, para $n > M/2$.

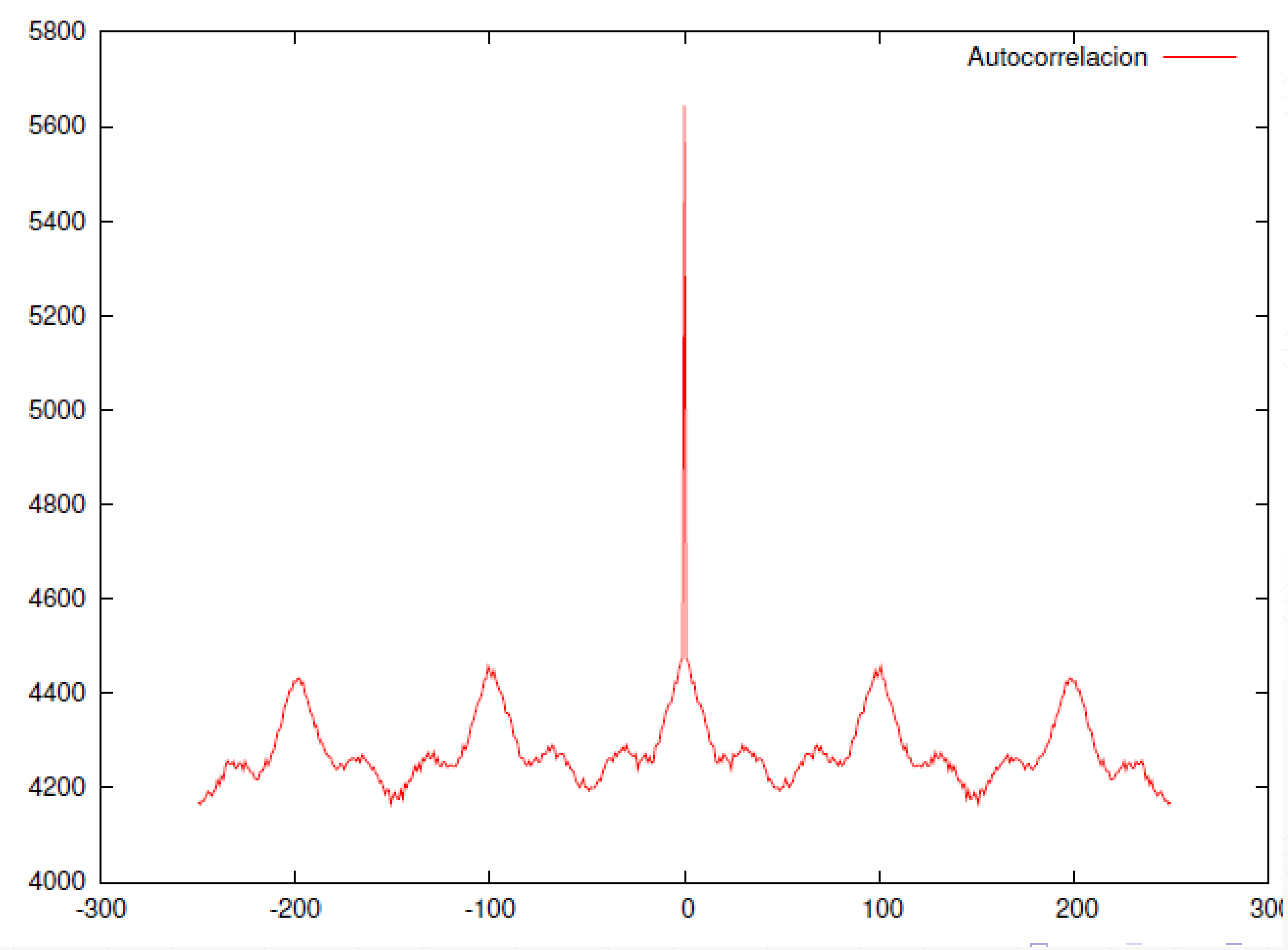
Si $\omega(n)$ es aleatoria puede asumirse que $r_{x\omega}(n)$ y $r_{\omega x}(n)$ son muy pequeñas, por no estar relacionada con $x(n)$.

Por la naturaleza aleatoria de $\omega(n)$ puede asumirse además que en $r_{\omega\omega}(n)$ dominará $r_{xx}(n)$, lo que permite detectar el periodo.

Correlación y determinación de periodicidad (3)



Correlación y determinación de periodicidad (4)



Correlación entre la salida y entrada de un sistema

Si se aplica la señal $x(n)$ con autocorrelación $r_{xx}(n)$ a un sistema con respuesta al impulso $h(n)$, entonces:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

La correlación entre la salida y la entrada es

$$\begin{aligned} r_{yx}(n) &= y(n) * x(-n) \\ &= [h(n) * x(n)] * x(-n) \\ &= h(n) * r_{xx}(n) \end{aligned}$$

que depende solo de la respuesta impulsional $h(n)$ y la autocorrelación de la entrada $r_{xx}(n)$.

Autocorrelación de la salida

La autocorrelación de la salida es:

$$\begin{aligned} r_{yy}(n) &= y(n) * y(-n) \\ &= [h(n) * x(n)] * [h(-n) * x(-n)] \\ &= [h(n) * h(-n)] * [x(n) * x(-n)] \\ &= r_{hh}(n) * r_{xx}(n) \end{aligned}$$

que equivale a la convolución de la autocorrelación de la respuesta impulsional $r_{hh}(n)$ con la autocorrelación de la entrada $r_{xx}(n)$.

Bibliografía

- [1] Procesamiento Digital de Señales. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2011.