

Sistemas LTI en el dominio de la frecuencia

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2019

La Función de Respuesta en Frecuencia

Respuesta en Frecuencia

La respuesta de un sistema LTI en reposo a una señal de entrada $x(n)$ es

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Con la respuesta impulsional $h(n)$. El sistema responde a una entrada exponencial compleja $x_1(n) = Ae^{j\omega n}$:

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Ae^{j\omega(n-k)} = Ae^{j\omega n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \right] = AH(\omega)e^{j\omega n}$$

Respuesta en Frecuencia

- $H(\omega)$ existe si el sistema es estable, pues $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$.
- La magnitud cambia de acuerdo a $|H(\omega)|$ y la fase de acuerdo a $\angle H(\omega)$.

Ejemplo

(1)

Determine la secuencia de salida del sistema con respuesta al impulso $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, cuando la entrada es $x(n) = Ae^{j\frac{\pi}{2}n}$, $-\infty < n < \infty$.

Ejemplo

(2)

Calculando la respuesta en frecuencia $H(\omega)$

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad \longleftrightarrow \quad H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \longleftrightarrow \quad H(\omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Evaluando en la frecuencia de $\omega = \pi/2$

$$H\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{2}} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}j = \frac{2\sqrt{5}}{5} \angle -26,56^\circ$$

Ejemplo

(3)

Por lo tanto la salida:

$$y(n) = A \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26,56^\circ} \right) e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$$y(n) = \frac{2A}{\sqrt{5}} e^{j\left(\frac{\pi}{2}n - 26,56^\circ\right)}$$

Respuesta en Frecuencia

Puesto que $h(n)$ es discreta, entonces $H(\omega) \longleftrightarrow h(n)$ es periódica con periodo 2π y se cumple que:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Respuesta en Frecuencia

Si el sistema es LTI con respuesta al impulso real:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)[\cos(-\omega k) + j \sin(-\omega k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cos(\omega k) - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sin(\omega k) \\ &= H_R(\omega) + jH_I(\omega) \end{aligned}$$

Respuesta en Frecuencia

Componente real del espectro (función par)

$$H_R(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cos(\omega k)$$

Componente imaginaria del espectro (función impar)

$$H_I(\omega) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sin(\omega k)$$

Módulo del espectro (función par)

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}$$

Fase del espectro (función impar)

$$\angle H(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \right)$$

Ejemplo

(1)

Determine el módulo y la fase de $H(\omega)$ para un sistema de media móvil (MA: moving average) de tres puntos. Grafíquelos para $0 \leq \omega \leq \pi$.

Ejemplo

(2)

Solución:

La salida de un MA está dada por:

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$



$$3Y(z) = zX(z) + X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$3Y(z) = X(z)[z + 1 + z^{-1}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}$$

Ejemplo

(3)

Aplicando el cambio $z = e^{j\omega}$:

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H(\omega) = \frac{1}{3} e^{j\omega} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-j\omega}$$

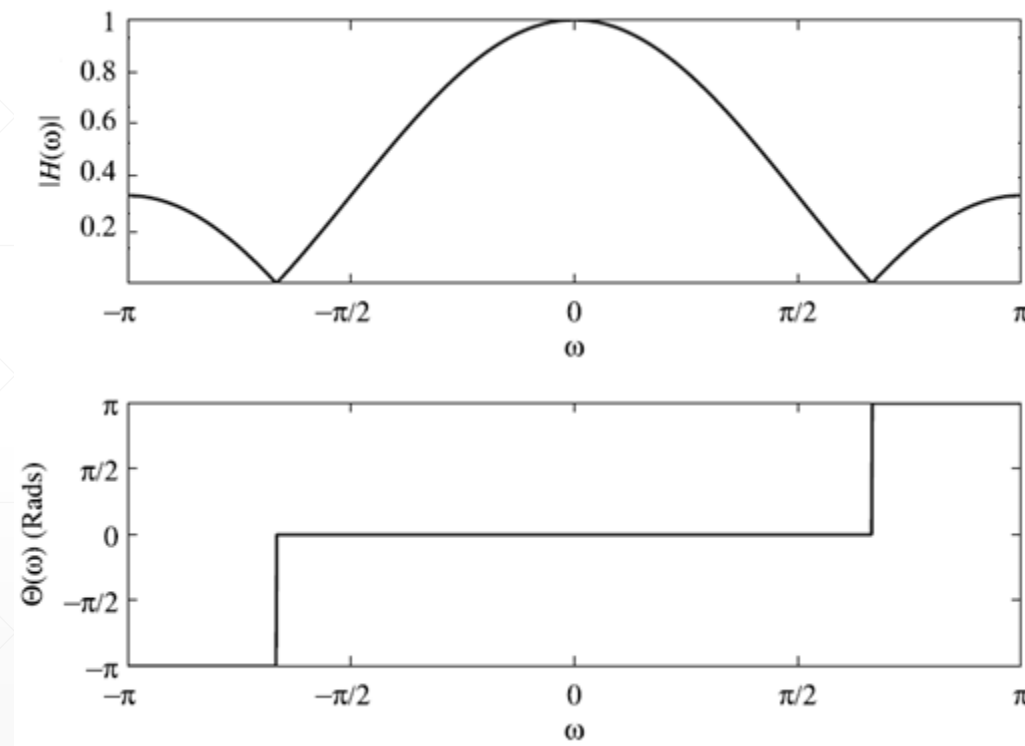
$$H(\omega) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cos(\omega) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(\omega))$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{3} |1 + 2 \cos(\omega)|$$

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3} \\ \pi & \frac{2\pi}{3} < \omega < \pi \end{cases}$$

Ejemplo

(4)



Respuesta en Frecuencia

Al colocar en la entrada del sistema la entrada $x_2(n) = Ae^{-j\omega n}$

$$y_2(n) = A|H(-\omega)|e^{j\angle H(-\omega)}e^{-j\omega n}$$

Asumiendo condiciones de simetría para $H(\omega)$

$$y_2(n) = A|H(\omega)|e^{-j\angle H(\omega)}e^{-j\omega n}$$

Aplicando superposición al sistema para una entrada dada por:

$$x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = \frac{A}{2}e^{j\omega n} + \frac{A}{2}e^{-j\omega n} = A \cos(\omega n)$$

Se tiene una salida:

$$y(n) = \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] = A|H(\omega)| \cos(\omega n + \angle H(\omega))$$

Determine la respuesta del sistema $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ para una entrada dada por $x(n) = 10 - 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 20\cos(\pi n)$.

Ejemplo

(2)

Solución:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

1. Para $x_1(n) = 10$ ($\omega = 0$) $\rightarrow H(0) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

2. Para $x_2(n) = -5\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ ($\omega = \frac{\pi}{2}$) $\rightarrow H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26,57^\circ}$

3. Para $x_3(n) = 20\cos(\pi n)$ ($\omega = \pi$) $\rightarrow H(\pi) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{2}{3}$

La respuesta del sistema $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ esta dada por:

$$y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{\pi}{2}n - 26,56^\circ\right) + \frac{40}{3}\cos(\pi n)$$

Ejemplo: Diseño simple de un filtro

(1)

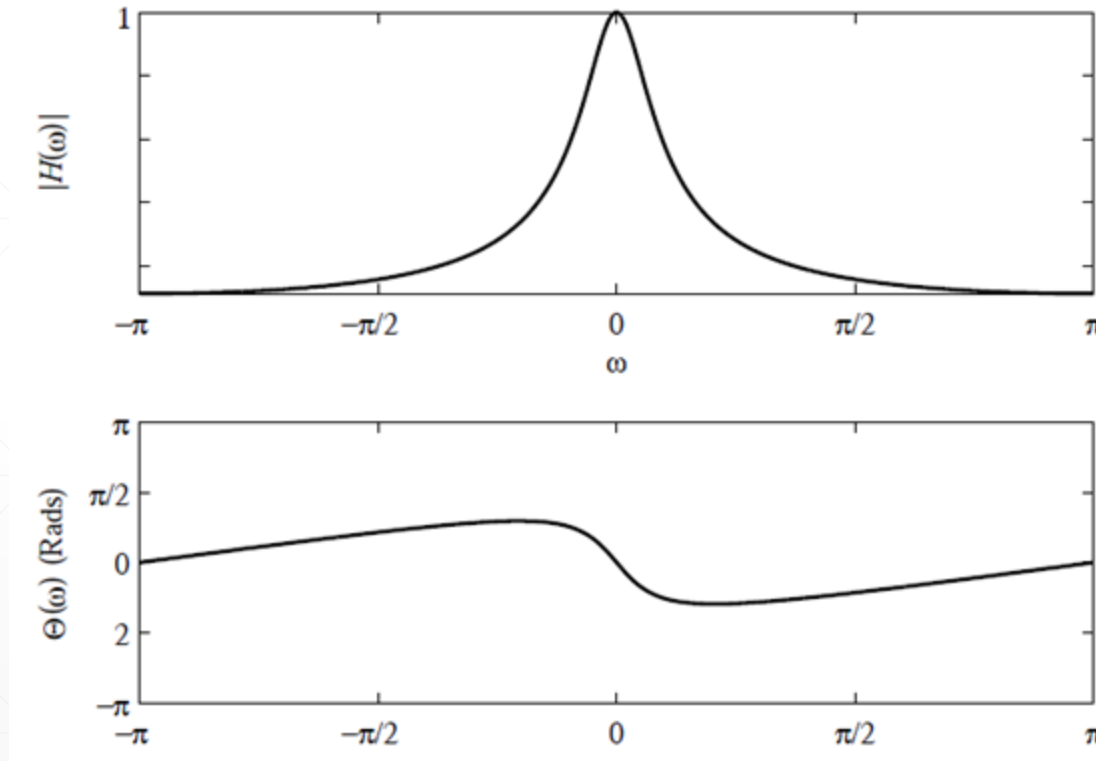
Para el sistema descrito por la ecuación:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n), \quad 0 < a < 1; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Determine la respuesta en frecuencia del sistema.
2. Seleccione el parámetro b de modo que el valor máximo de $|H(\omega)|$ sea 1 y grafique $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$ para $a = 0,9$.
3. Determine la salida del sistema para la señal de entrada $x(n) = 5 + 12 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 20 \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$.

Ejemplo: Diseño simple de un filtro

(2)



Respuesta transitoria y en régimen permanente a señales de entrada sinusoidales

Respuesta transitoria y permanente a sinusoides

- En la sección anterior, la respuesta a una entrada exponencial compleja se definió como entrada eterna, o sea aplicada desde $n = -\infty$.
- Todo sistema LTI estable BIBO excitado por una señal exponencial compleja en $n = 0$ u otro tiempo finito, tendrá una respuesta transitoria que tiende a cero conforme $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo: Respuesta transitoria y permanente a sinusoides (1)

Determine las respuestas transitoria y de estado permanente para el sistema $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ para una entrada $x(n) = Ae^{j\omega n}u(n)$.

Ejemplo: Respuesta transitoria y permanente a sinusoides (2)

Solución:

Anteriormente, se ha visto que la respuesta de este sistema a una entrada $x(n)$ a partir de $n = 0$ está dada por:

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^n a^k x(n-k), \quad n \geq 0$$

Suponiendo una entrada $x(n) = Ae^{j\omega n}u(n)$:

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + A \sum_{k=0}^n a^k e^{j\omega(n-k)}$$

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + A \left[\sum_{k=0}^n (ae^{-j\omega})^k \right] e^{j\omega n}$$

Ejemplo: Respuesta transitoria y permanente a sinusoides (3)

$$\begin{aligned}y(n) &= a^{n+1}y(-1) + A \left[\frac{1 - (ae^{-j\omega})^{n+1}}{1 - ae^{-j\omega}} \right] e^{j\omega n} \\&= a^{n+1}y(-1) - \frac{Aa^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\omega}} e^{j\omega n} + \frac{Ae^{j\omega n}}{1 - ae^{-j\omega}}\end{aligned}$$

Recordando que el sistema $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ es estable si $|a| < 1$

$$y_{ss}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{Ae^{j\omega n}}{1 - ae^{-j\omega}} = \left[\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right] Ae^{j\omega n} = H(\omega)Ae^{j\omega n}$$

Respuesta en régimen permanente a señales de entrada periódicas

Respuesta permanente a señales periódicas (1)

Sea $x(n)$ periódica con periodo N , con $-\infty < n < \infty$. Al tomar a $x(n)$ como la señal de entrada a un sistema LTI estable, se puede analizar el comportamiento de la salida del sistema representando la entrada por medio de una serie de Fourier:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

Respuesta permanente a señales periódicas (2)

Puesto que la entrada a $x_k(n) = c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$ es:

$$y_k(n) = c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Así, utilizando linealidad del sistema se obtiene:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

Con $d_k = c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$

Respuesta permanente a señales periódicas (3)

La respuesta tiene entonces el mismo periodo de la entrada, pero otra forma de señal, debido a los cambios de amplitud y fase aportados por los coeficientes d_k .

Respuesta en régimen permanente a señales de entrada aperiódicas

Respuesta permanente a señales aperiódicas (1)

Puesto que la salida de un sistema LTI en tiempo es:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Se obtiene en el dominio de la frecuencia:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Donde se deriva:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$$

$$\angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega)$$

La respuesta en magnitud $|H(\omega)|$ indica cuáles frecuencias se amplifican y cuáles se atenúan.

Respuesta permanente a señales aperiódicas (2)

Un sistema LTI no puede generar frecuencias que no estén en la entrada.

Únicamente sistemas **no lineales o variantes en el tiempo** pueden generar frecuencias no presentes en la entrada.

Respuesta permanente a señales aperiódicas (3)

A pesar de que la salida $y(n)$ se puede obtener de la respuesta en frecuencia:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

No es usual emplear la transformada inversa de Fourier por ser relativamente más simple y general el tratamiento con la transformada z (es capaz de analizar sistemas inestables).

Respuesta permanente a señales aperiódicas (4)

La relación entre las densidades espectrales de la entrada $S_{xx}(\omega)$ y de la salida $S_{yy}(\omega)$ se obtiene fácilmente con:

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2$$

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$$

La energía de la salida es entonces:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) d\omega$$

Relación entre $H(z)$ y $H(\omega)$

Relación entre $H(z)$ y $H(\omega)$

(1)

Si la ROC de la función de transferencia contiene a la circunferencia unitaria, entonces:

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

Relación entre $H(z)$ y $H(\omega)$

(2)

Si $H(z)$ es racional, $H(z) = B(z)/A(z)$ y asumiendo que $h(n)$ es real, entonces:

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})}$$

Con los coeficientes reales $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$, y los ceros $\{z_k\}$ y polos $\{p_k\}$ que pueden ser complejos.

Relación entre $H(z)$ y $H(\omega)$

(3)

Si $h(n)$ es real, entonces $H(-\omega) = H^*(\omega)$ y así:

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega) = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \mathcal{Z}\{r_{hh}(n)\} \Big|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned}$$

Lo que confirma el teorema de Wiener-Khinchin $|H(\omega)|^2 \longleftrightarrow r_{hh}(n)$

Relación entre $H(z)$ y $H(\omega)$

(4)

Sea

$$\begin{aligned} D(z) &= B(z)B(z^{-1}) \quad \bullet \text{---} \circ \quad b(n) * b(-n) \\ C(z) &= A(z)A(z^{-1}) \quad \bullet \text{---} \circ \quad a(n) * a(-n) \end{aligned}$$

Se cumple que:

$$d(n) = \sum_{k=0}^{M-|n|} b(k)b(k+n), \quad -M \leq n \leq M, \quad b(k) = b_k$$

$$c(n) = \sum_{k=0}^{N-|n|} a(k)a(k+n), \quad -N \leq n \leq N, \quad a(k) = a_k$$

Relación entre $H(z)$ y $H(\omega)$

(5)

Que corresponden a la autocorrelación de $a(n)$ y $b(n)$, los coeficientes del denominador y numerador de la función de transferencia.

Relación entre $H(z)$ y $H(\omega)$ (6)

Puesto que $A(\omega) = \sum_{k=0}^N a(k)e^{-j\omega k}$ y $B(\omega) = \sum_{k=0}^M b(k)e^{-j\omega k}$, $c_k = c_{-k}$ y $d_k = d_{-k}$:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{d_0 + 2 \sum_{k=1}^M d_k \cos(k\omega)}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \cos(k\omega)}$$

Donde con $\cos(k\omega) = \sum_{m=0}^k \beta_m (\cos(\omega))^m$, entonces $|H(\omega)|^2$ es una función racional de polinomios de $\cos(\omega)$.

Esto implica que la densidad espectral de energía es continua, suave y si se indefine, o se hace cero, lo hace en puntos finitos aislados.

Ejemplo

Determine $|H(\omega)|^2$ para el sistema

$$y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

Cálculo de la respuesta en frecuencia

Cálculo de la respuesta en frecuencia (1)

Para evaluar el efecto de los polos y ceros de la función de transferencia en la respuesta en frecuencia, evalúese entonces:

$$H(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})} = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)}$$

Con:

$$\begin{aligned} e^{j\omega} - z_k &= V_k(\omega) e^{j\theta_k(\omega)} \\ V_k(\omega) &= |e^{j\omega} - z_k| \\ \theta_k(\omega) &= \angle(e^{j\omega} - z_k) \end{aligned}$$

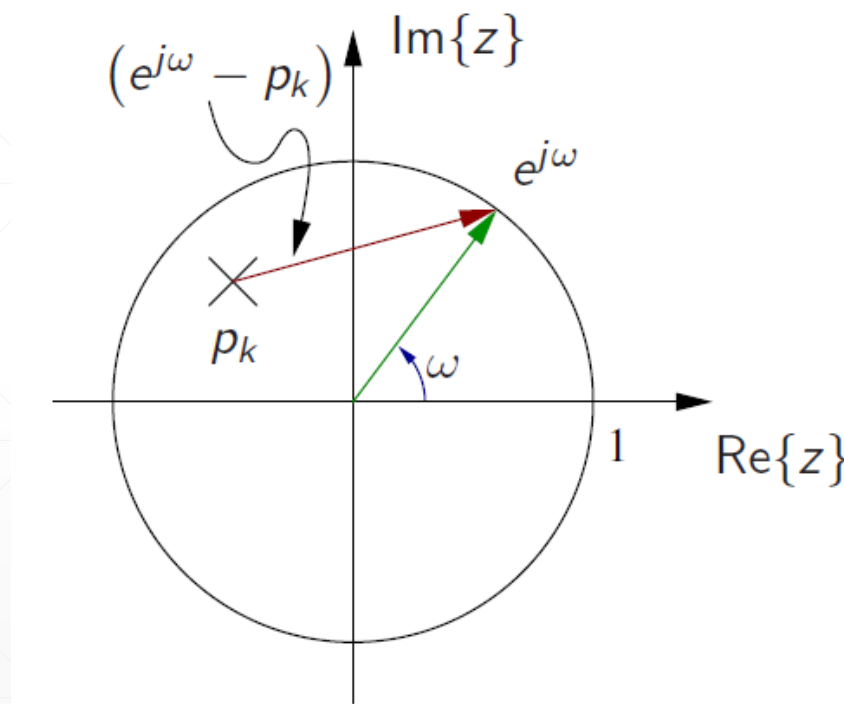
$$\begin{aligned} e^{j\omega} - p_k &= U_k(\omega) e^{j\phi_k(\omega)} \\ U_k(\omega) &= |e^{j\omega} - p_k| \\ \phi_k(\omega) &= \angle(e^{j\omega} - p_k) \end{aligned}$$

$(e^{j\omega} - p_k)$: fasor que va del polo p_k al punto $e^{j\omega}$.

$(e^{j\omega} - z_k)$: fasor que va del polo z_k al punto $e^{j\omega}$

Cálculo de la respuesta en frecuencia

(2)



Cálculo de la respuesta en frecuencia

(3)

$$|H(\omega)| = |b_0| \frac{V_1(\omega) \dots V_M(\omega)}{U_1(\omega) \dots U_N(\omega)}$$

$$\begin{aligned} \angle H(\omega) \\ = \angle b_0 + \omega(N - M) + \theta_1(\omega) + \dots + \theta_M(\omega) - [\phi_1(\omega) + \dots + \phi_N(\omega)] \end{aligned}$$

Para evaluar el efecto de los polos y ceros de la función de transferencia en la respuesta en frecuencia, evalúese entonces:

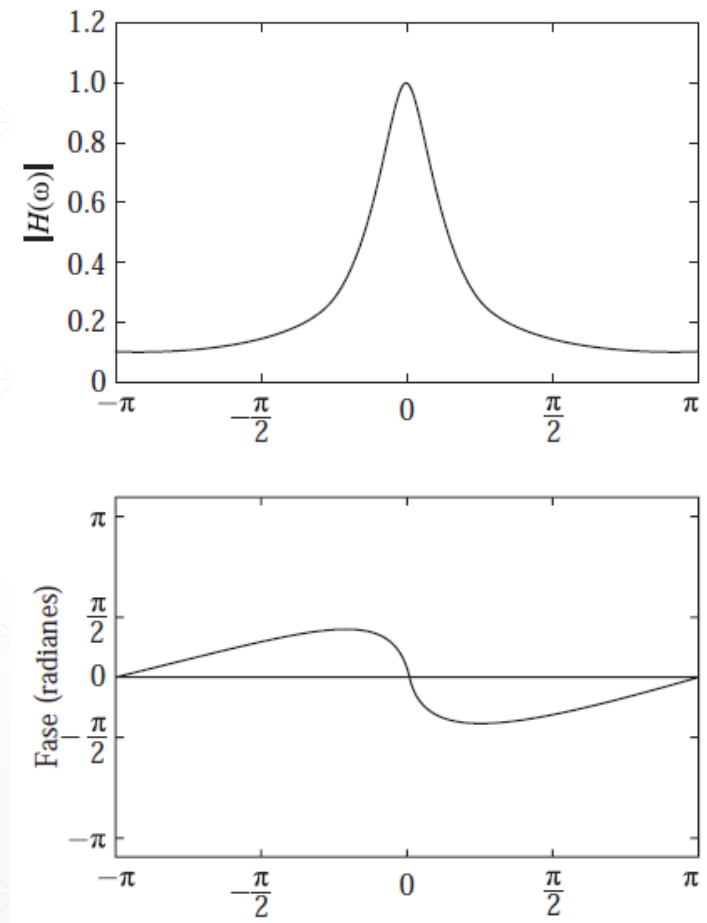
La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se hará muy pequeña si $z = e^{j\omega}$ pasa cerca de un cero, o se hará muy grande si pasa cerca de un polo.

Ejemplo

Determinen la respuesta en frecuencia del sistema descrito por la función:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Ejemplo



Sistemas LTI como filtros selectivos en frecuencia

Sistema LTI: Filtro

La salida de sistema LTI se analiza en el dominio de la frecuencia a partir de la ecuación:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Un Filtro es un caso particular de sistema que discrimina algún atributo de señales aplicadas a su entrada, y permite o suprime el paso de las señales si y solo si estas presentan este atributo.

Algunos filtros sirven como eliminadores de ruido, detección de señales en radar y sonar, análisis espectral, etc.

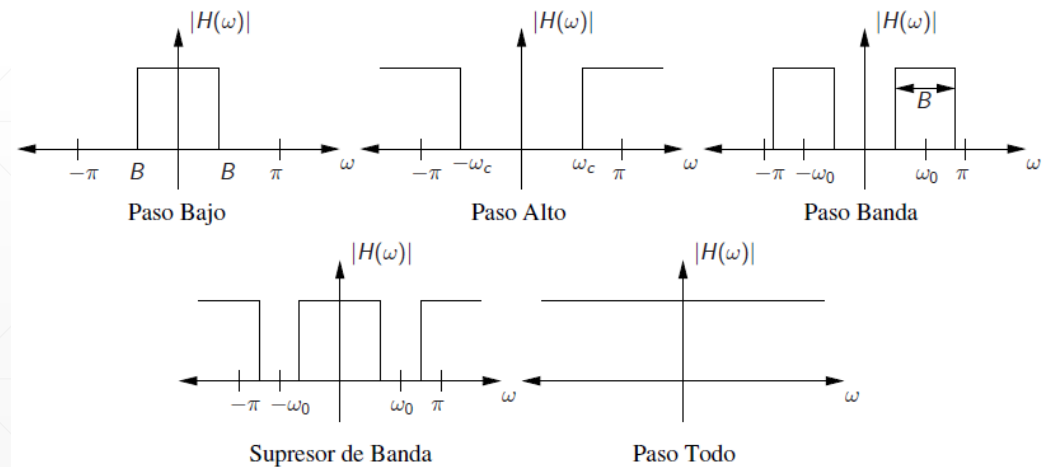
Filtros ideales

Como filtro ideal se conoce un sistema LTI con respuesta en frecuencia dada por:

$$H(\omega) = \begin{cases} C e^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Los filtros se caracterizan de acuerdo a su comportamiento en el dominio de la frecuencia en:

- Paso bajos
- Paso altos
- Pasa banda
- Elimina banda
- Pasa todo



Filtros ideales: respuesta en fase lineal

Para una señal $x(n)$ con componentes confinados en el rango de frecuencias $\omega_1 < \omega < \omega_2$, al pasar a través de un filtro cuya respuesta en frecuencia sea:

$$H(\omega) = \begin{cases} C e^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La señal de salida del filtro presenta un espectro dado por:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ Y(\omega) &= CX(\omega)e^{-j\omega n_0}, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de cambio de escala y desplazamiento temporal de la Transformada de Fourier:

$$y(n) = Cx(n - n_0)$$

Filtros ideales: respuesta en fase lineal

Por lo tanto, una respuesta de fase lineal permite que las señales de entrada con componentes frecuenciales confinadas en el intervalo $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ sean simplemente escaladas y trasladadas en el tiempo.

- Un retardo puro es tolerable y no se considera como una distorsión de la señal.
- Tampoco se considera que el cambio de escala de la amplitud sea una distorsión.

Así, los filtros ideales presentan una característica de fase en su banda de paso igual a:

$$\Theta(\omega) = -\omega n_0$$

Filtros ideales: respuesta en fase lineal

La derivada de la fase con respecto a la frecuencia tiene unidades de retardo. Por tanto, podemos definir el retardo de la señal como una función de la frecuencia de la siguiente forma:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega}, \quad \Theta(\omega) = \angle H(\omega)$$

Conocida como **retardo de envolvente** o **retardo de grupo**.

Filtros ideales: respuesta en fase lineal

Interpretamos a $\tau_g(\omega)$ como el retardo temporal que una componente de la señal de frecuencia ω sufre al pasar de la entrada a la salida del sistema. Cuando $\Theta(\omega)$ presenta una respuesta en fase lineal, el retardo de grupo $\tau_g(\omega)$ es constante, lo que significa que todas las componentes de frecuencia de la señal de entrada sufren el mismo retardo de tiempo.

En resumen: los filtros ideales tienen módulo constante y fase lineal en su banda de paso.

Filtros ideales: respuesta en fase lineal

En todos los casos, los filtros ideales **no son realizables**.

Por ejemplo, la respuesta impulsional del filtro paso bajo es:

$$h_{lp}(n) = \frac{\text{sen}(\omega_c \pi n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

Que es **anticausal**, **infinita** y no es absolutamente sumable, por lo que el sistema es **inestable**.

Diseño básico de filtros

Técnica básica de diseño

Ubicar los polos cerca de los puntos de la circunferencia unidad correspondientes a las frecuencias que se desean acentuar y los ceros cerca de las frecuencias que se desean atenuar.

Restricciones:

- Todos los polos tienen que colocarse dentro de la circunferencia unidad con el fin de que el filtro sea estable. Sin embargo, los ceros pueden colocarse en cualquier punto del plano z .
- Todos los ceros y polos complejos tienen que aparecer como pares complejos conjugados con el fin de que los coeficientes del filtro sean reales.

Técnica básica de diseño

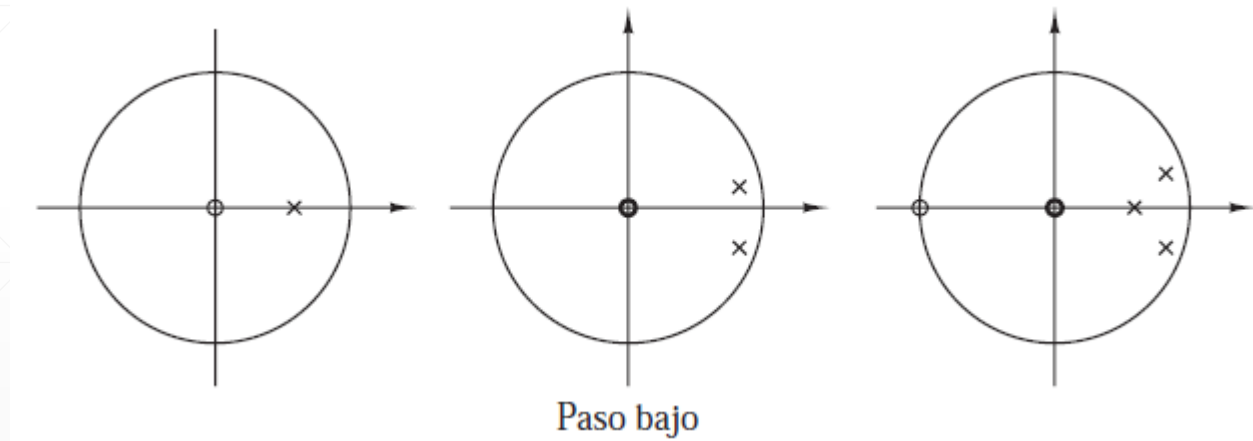
$H(z)$ puede expresarse como:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

- Normalmente se debe cumplir $N \geq M$.
- b_0 es una ganancia constante seleccionada para normalizar la respuesta en frecuencia en una frecuencia específica. $|H(\omega_0)| = 1$, donde ω_0 es una frecuencia de la banda de paso del filtro.

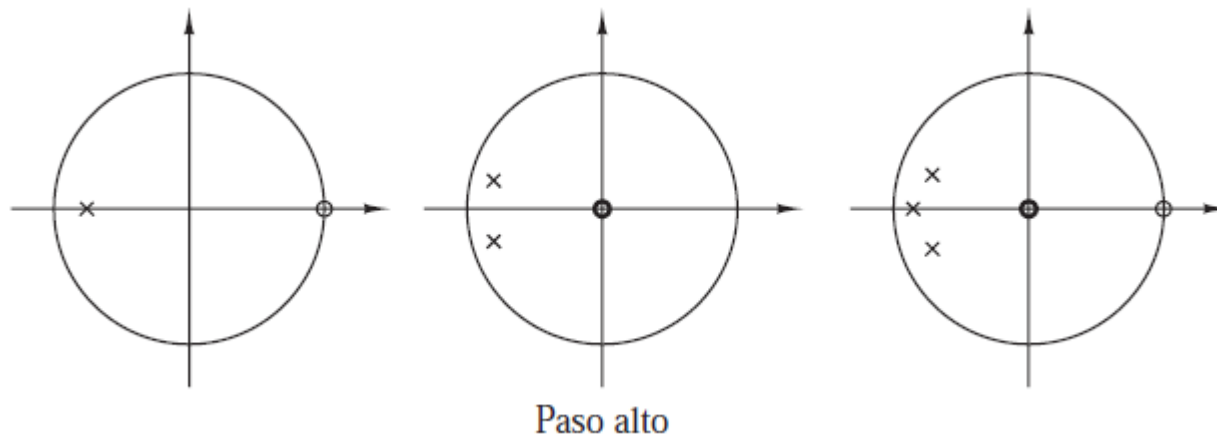
Filtros paso bajo

- Polos cerca de 1 ($\omega = 0$).
- Ceros cerca de -1 ($\omega = \pi$).



Filtros paso alto

- Polos cerca de -1 ($\omega = \pi$).
- Ceros cerca de 1 ($\omega = 0$).



Ejemplo: Filtro paso bajo

(1)

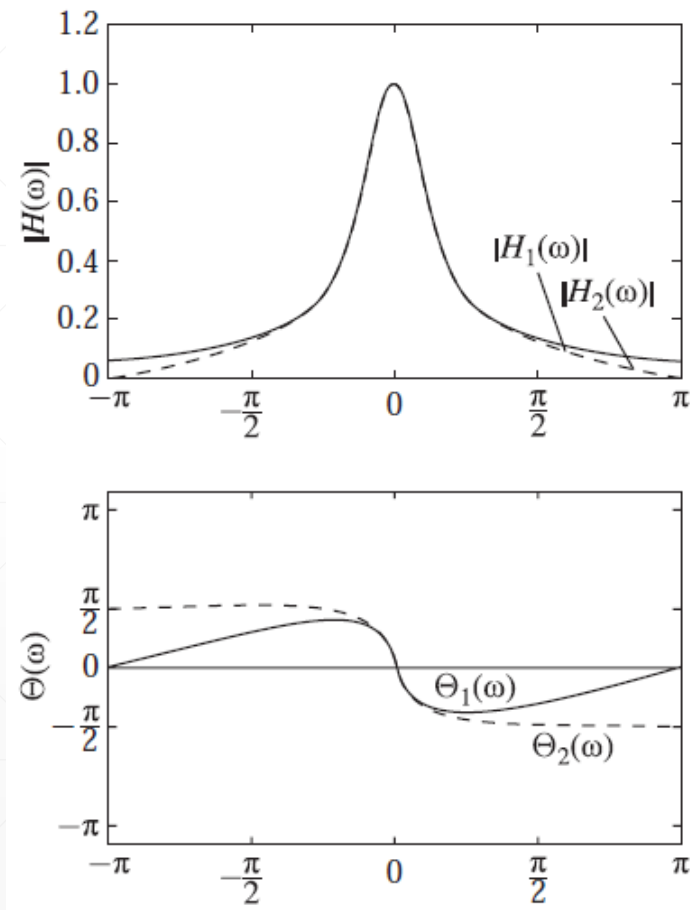
Diseñe un filtro paso bajo con $|H(0)| = 1$ para:

- Un solo polo en $p_1 = 0,9$.
- Un polo y un cero en $p_1 = 0,9$ y $z_1 = -1$.

Ejemplo: filtro paso bajo

(2)

Solución:



Ejemplo: Filtro paso alto

(1)

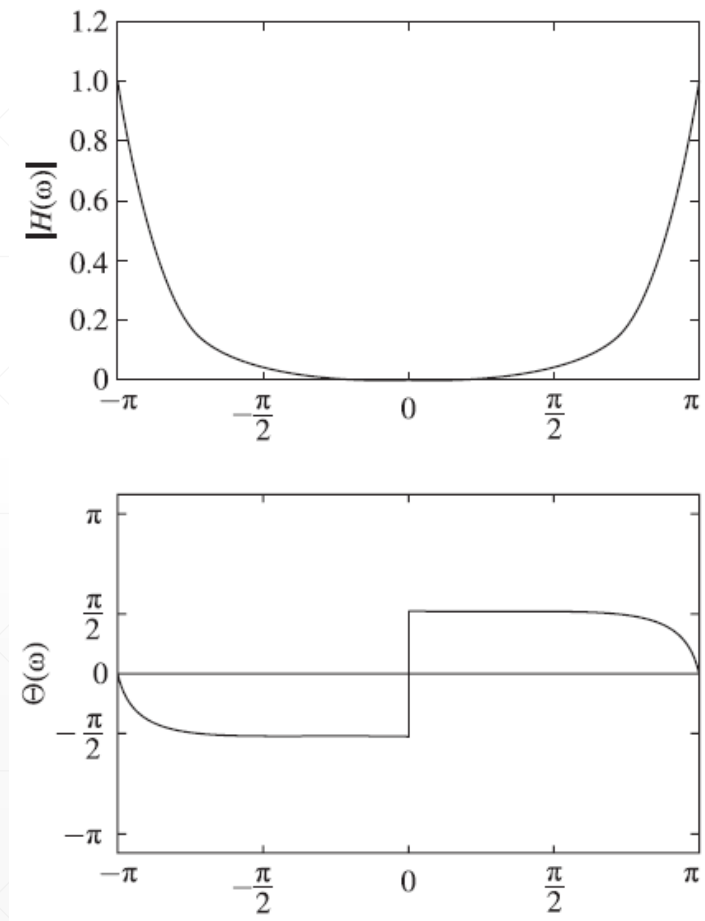
Diseñe un filtro paso altas con $|H(\pi)| = 1$ para:

- Un solo polo en $p_1 = -0,9$.
- Un polo y un cero en $p_1 = -0,9$ y $z_1 = 1$.

Ejemplo: Filtro paso alto

(2)

Solución:



Ejemplo: Filtro paso bajo de dos polos

(1)

Para un filtro paso bajos de dos polos dado por la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2}$$

Determine los valores de b_0 y p tal que la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ satisfaga las condiciones de:

$$H(0) = 1$$

$$\left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Filtros pasa banda

Los mismos principios se pueden aplicar al diseño de filtros pasa banda. Básicamente, el filtro pasa banda debe contener uno o más pares de polos complejos conjugados próximos a la circunferencia unidad, en las vecindades de la banda de frecuencias que define la banda de paso del filtro.

Ejemplo: Filtros pasa banda

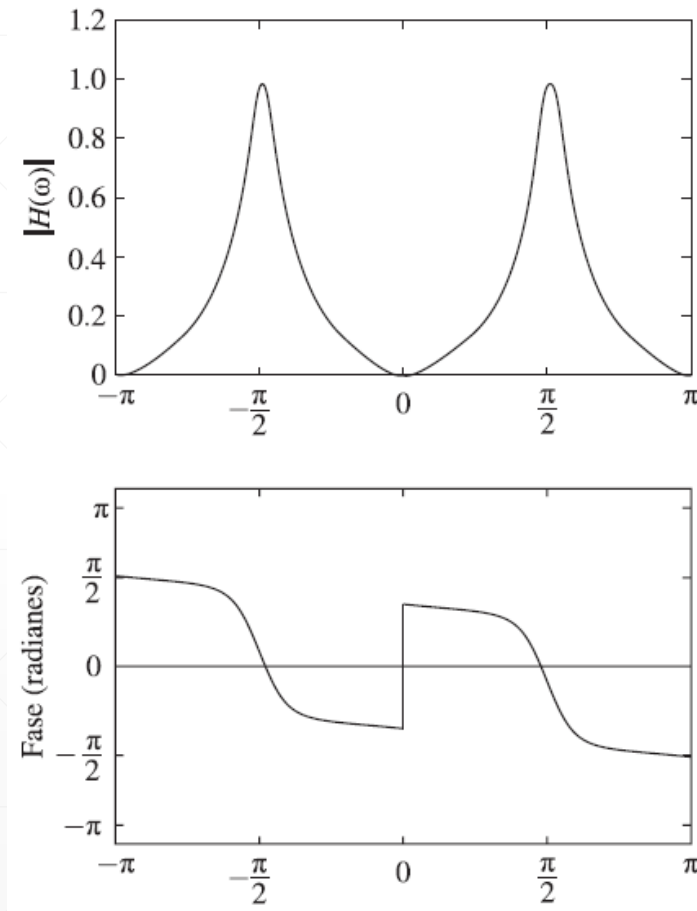
(1)

Diseñe un filtro pasa banda de dos polos que tenga el centro de la banda de paso en $\omega = \frac{\pi}{2}$, cuya respuesta en frecuencia en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ sea cero, y cuyo módulo sea igual a $1/\sqrt{2}$ en $\omega = \frac{4\pi}{9}$.

Ejemplo: Filtros pasa banda

(2)

Solución:



Finalmente

Es preciso resaltar que el propósito principal de la metodología anterior para diseño de filtros digitales simples mediante la colocación de los polos y los ceros es mostrar la influencia que tienen los mismos en la respuesta en frecuencia de los sistemas.

Transformación de un filtro paso bajo en paso alto (1)

Utilizando la propiedad de traslación en frecuencia de la transformada de Fourier, es posible convertir un filtro prototipo paso bajo en un filtro paso alto y viceversa.

Se tiene que un filtro paso bajo tiene una respuesta al impulso dada por $h_{lp}(n)$ con una respuesta en frecuencia $H_{lp}(\omega)$. Para obtener un filtro paso alto se procede a trasladar $H_{lp}(\omega)$ π radianes (reemplazar ω por $\omega - \pi$). Así:

$$H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi)$$

Transformando al tiempo para obtener $h_{hp}(n)$ se tiene:

$$h_{hp}(n) = (e^{j\pi})^n h_{lp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$$

Transformación de un filtro paso bajo en paso alto (2)

Por tanto, la respuesta al impulso del filtro paso alto se obtiene simplemente a partir de la respuesta al impulso del filtro paso bajo cambiando los signos de las muestras impares de $h_{lp}(n)$ y viceversa.

$$h_{lp}(n) = (-1)^n h_{hp}(n)$$

Transformación de un filtro paso bajo en paso alto (3)

Si el filtro paso bajo se describe mediante la ecuación de diferencias:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Su respuesta en frecuencia es:

$$H_{lp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

Si ahora reemplazamos ω por $\omega - \pi$, se tiene:

$$H_{hp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j(\omega-\pi)k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j(\omega-\pi)k}} = H_{lp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k} (e^{j\pi})^k}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k} (e^{j\pi})^k}$$

Transformación de un filtro paso bajo en paso alto (4)

$$H_{lp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M (-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k e^{-j\omega k}}$$

Que corresponde con la ecuación de diferencias:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x(n-k)$$

Ejemplo:

Convierta el filtro paso bajo descrito por la ecuación de diferencias $y(n) = 0,9y(n - 1) + 0,1x(n)$ en un filtro paso alto.

Resonadores Digitales

Resonador digital

(1)

Es un filtro pasa banda especial de dos polos complejos conjugados posicionados en las proximidades del círculo unitario.

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}, \quad 0 < r < 1$$

Caso1: colocar los ceros en el origen

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Puesto que $|H(\omega)|$ tiene su pico en las proximidades de ω_0 . Se selecciona la ganancia b_0 de modo que $|H(\omega_0)| = 1$.

Resonador digital

(2)

Así, la respuesta en frecuencia de un resonador es:

$$H(\omega) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\omega_0}e^{-j\omega})}$$

$$H(\omega_0) = \frac{b_0}{(1 - r)(1 - re^{-j2\omega_0})}$$

$$|H(\omega_0)| = \frac{b_0}{(1 - r)\sqrt{1 - 2r \cos(2\omega_0) + r^2}} = 1$$

$$b_0 = (1 - r)\sqrt{1 - 2r \cos(2\omega_0) + r^2}$$

Resonador digital

(3)

La respuesta en frecuencia del resonador puede expresarse como:

$$|H(\omega)| = \frac{b_0}{U_1(\omega)U_2(\omega)}$$

$$\Theta(\omega) = 2\omega - \Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega)$$

Donde $U_1(\omega)$ y $U_2(\omega)$ son los módulos de los vectores que van desde p_1 y p_2 al punto ω situado en la circunferencia unidad. $\Phi_1(\omega)$ y $\Phi_2(\omega)$ son los correspondientes ángulos de dichos vectores.

$$\begin{aligned}(1 - p_1 z^{-1}) &= (1 - r e^{j\omega_0} z^{-1}) \rightarrow U_1(\omega) e^{j\Phi_1(\omega)} \\ (1 - p_2 z^{-1}) &= (1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1}) \rightarrow U_2(\omega) e^{j\Phi_2(\omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_1(\omega) &= \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega_0 - \omega)} \\ U_2(\omega) &= \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega_0 + \omega)}\end{aligned}$$

U_1 alcanza su mínimo en $\omega = \omega_0$ ($U_1(\omega_0) = 1 - r$) y U_2 en $\omega = -\omega_0$ ($U_2(-\omega_0) = 1 - r$).

Resonador digital

(4)

El producto $U_1(\omega)U_2(\omega)$ alcanza un valor mínimo en la frecuencia:

$$\omega_r = \cos^{-1} \left(\frac{1 + r^2}{2r} \cos(\omega_0) \right)$$

ω_r define de forma precisa la frecuencia de resonancia del filtro. Cuando r tiende a 1 $\omega_r \approx \omega_0$.

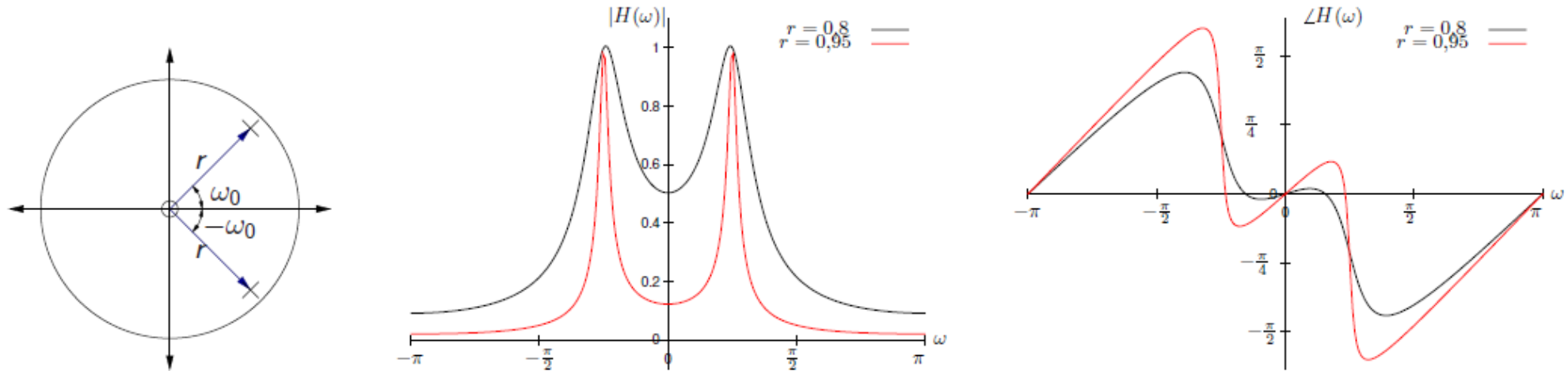
Cuando r tiende a 1, el pico de resonancia se hace más abrupto porque $U_1(\omega)$ varía más rápidamente en tamaño relativo en las vecindades de ω_0 . El ancho de banda a $-3dB$ $\Delta\omega$ del filtro proporciona una medida cuantitativa de lo abrupto que es el pico de resonancia del filtro. Para de r próximos a la unidad:

$$\Delta\omega \approx 2(1 - r)$$

Resonador digital

(5)

Se tiene la respuesta de un resonador para una frecuencia de resonancia de $\omega_0 = \pi/3$.



Resonador digital

(6)

Si los ceros del resonador se colocan en $z = 1$ y $z = -1$, el resonador tendría la función de transferencia dada por:

$$H(z) = G \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})}$$

$$H(z) = G \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Y su respuesta en frecuencia es:

$$H(\omega) = G \frac{1 - e^{-j2\omega}}{(1 - re^{j(\omega_0 - \omega)})(1 - re^{-j(\omega_0 + \omega)})}$$

Resonador digital

(7)

Los ceros en $z = \pm 1$ afectan tanto el módulo y la fase de la respuesta del resonador. Así:

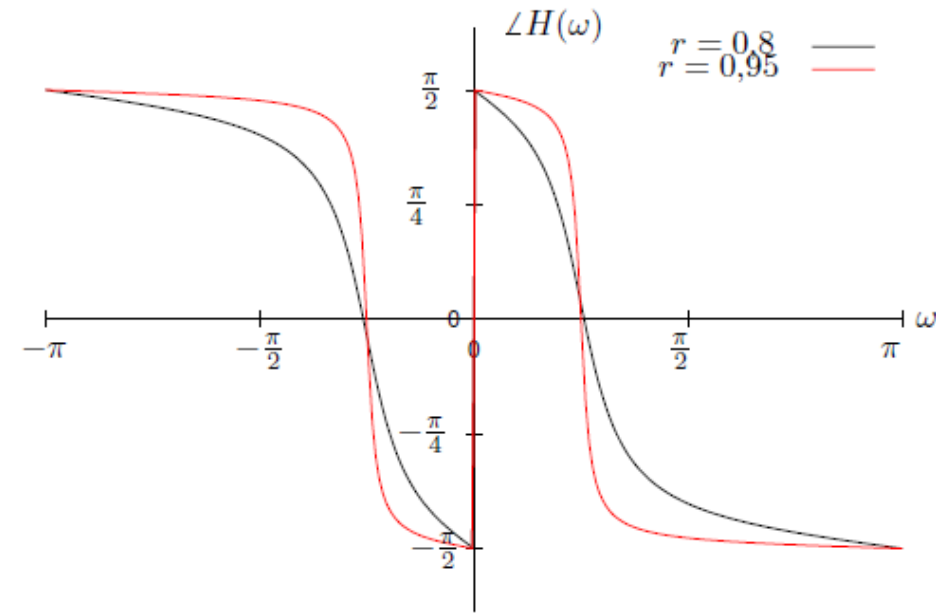
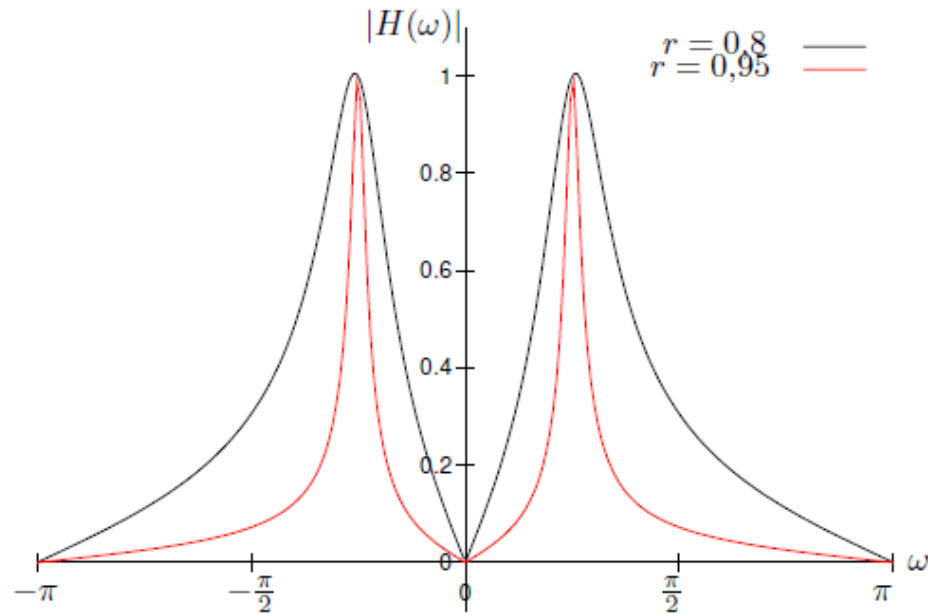
$$|H(\omega)| = \frac{GN(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)}$$

Donde $N(\omega)$:

$$N(\omega) = \sqrt{2 - 2\cos(2\omega)}$$

Debido a la presencia del cero, la frecuencia de resonancia no es la dada anteriormente (caso anterior). También el ancho de banda del filtro se ve modificado. Usualmente la frecuencia de resonancia es más cercana a ω_0 y su ancho de banda disminuye.

Resonador digital



$$\omega_0 = \pi/3$$

Filtros ranuras

Filtros Ranura

(1)

Contiene una o más hendiduras pronunciadas o idealmente nulos perfectos en su respuesta en frecuencia.

Para ello, se introduce un par de ceros complejos conjugados sobre la circunferencia unitaria en el ángulo ω_0 deseado.

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$

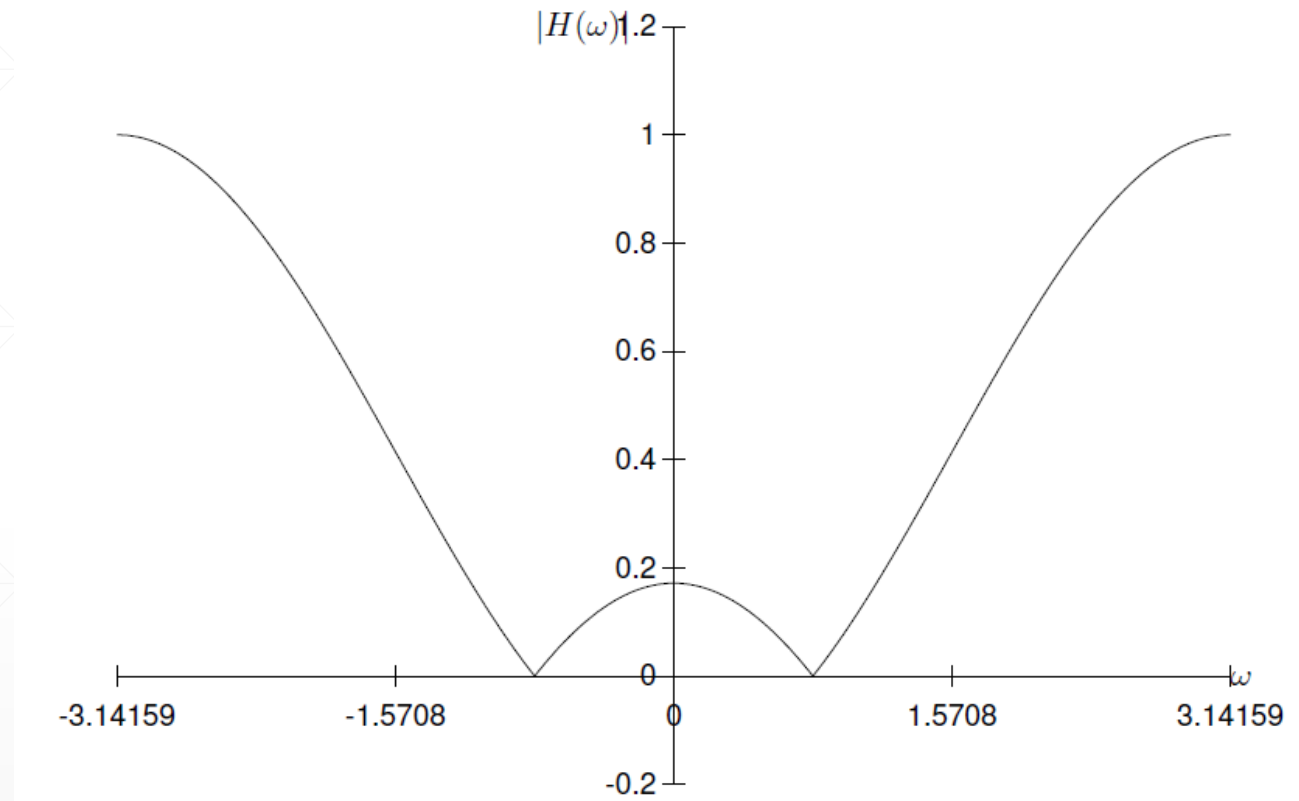
Por lo tanto, la función del sistema para un filtro FIR hendidura es:

$$H(z) = b_0(1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1})$$

$$H(z) = b_0(1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2})$$

Filtros Ranura

(2)

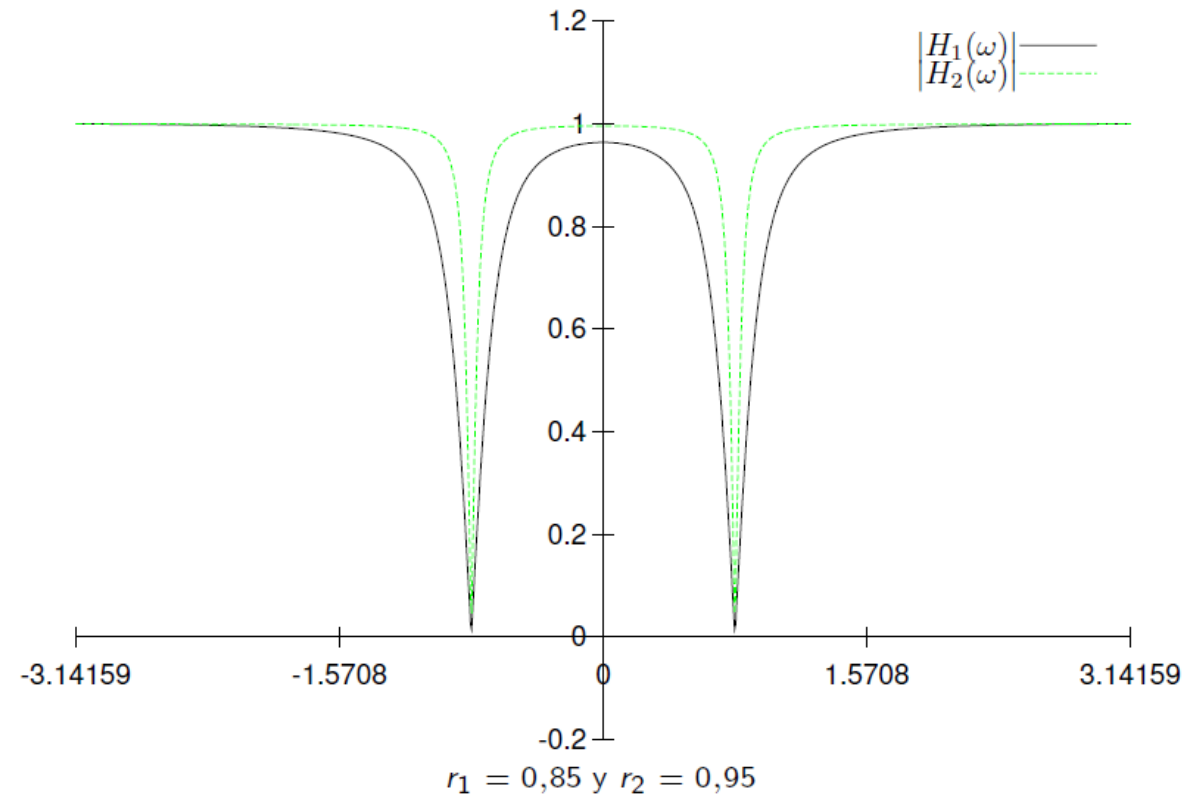


El problema con el filtro FIR de hendidura es que este tiene un ancho de banda relativamente grande que significa que las restantes frecuencias que se encuentran alrededor del nulo deseado se verán severamente atenuadas.

Para reducir el ancho de banda del nulo, podemos recurrir a un filtro FIR más grande y complejo.

Alternativamente, se puede mejorar el ancho de banda colocando polos complejos $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$, los cuales introducen resonancia cerca de los ceros, reduciendo el ancho de banda.

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



Filtros peine

Filtro peine

(1)

Puede verse como un filtro ranura en el que los ceros aparecen periódicamente en toda la banda de frecuencias.

Una forma simple de un filtro peine es un filtro de media móvil (FIR) dado por:

$$y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x(n-k)$$

La función del sistema de este filtro FIR es:

$$H(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{1}{M+1} \left[\frac{1 - z^{-(M+1)}}{1 - z^{-1}} \right]$$

Filtro peine

(2)

Y su respuesta en frecuencia es:

$$H(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{M+1} \frac{e^{-j\frac{\omega(M+1)}{2}} (e^{j\frac{\omega(M+1)}{2}} - e^{-j\frac{\omega(M+1)}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})}$$

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\frac{\omega M}{2}} \sin\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{M+1 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

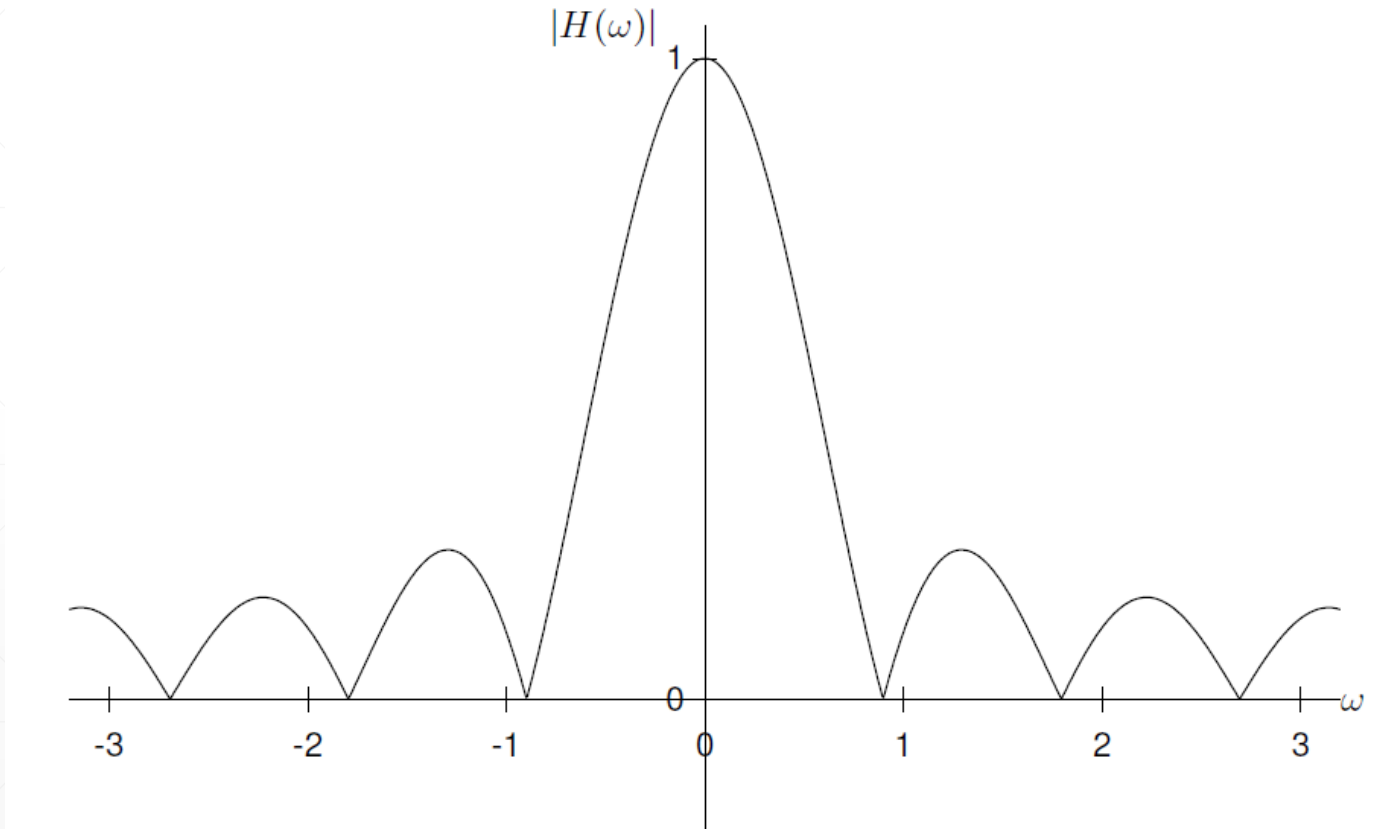
El filtro tiene ceros sobre la circunferencia unidad en $z = e^{j\frac{2\pi k}{M+1}}, k = 0, 1, \dots, M$.

Como $z = 1$ es un cero, este cancela el polo que tiene este filtro en ese punto. Así, este filtro no tiene ningún polo.

Filtro peine

(3)

Se tiene que para un $M = 6$, la respuesta en frecuencia del filtro de media móvil es:



Filtro peine

(4)

En términos generales, se puede crear un filtro peine utilizando un filtro FIR cuya función de sistema sea:

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k}$$

Y reemplazando z por z^L , donde L es un entero positivo, se tiene:

$$H_L(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-kL}$$

Donde, la respuesta en frecuencia es:

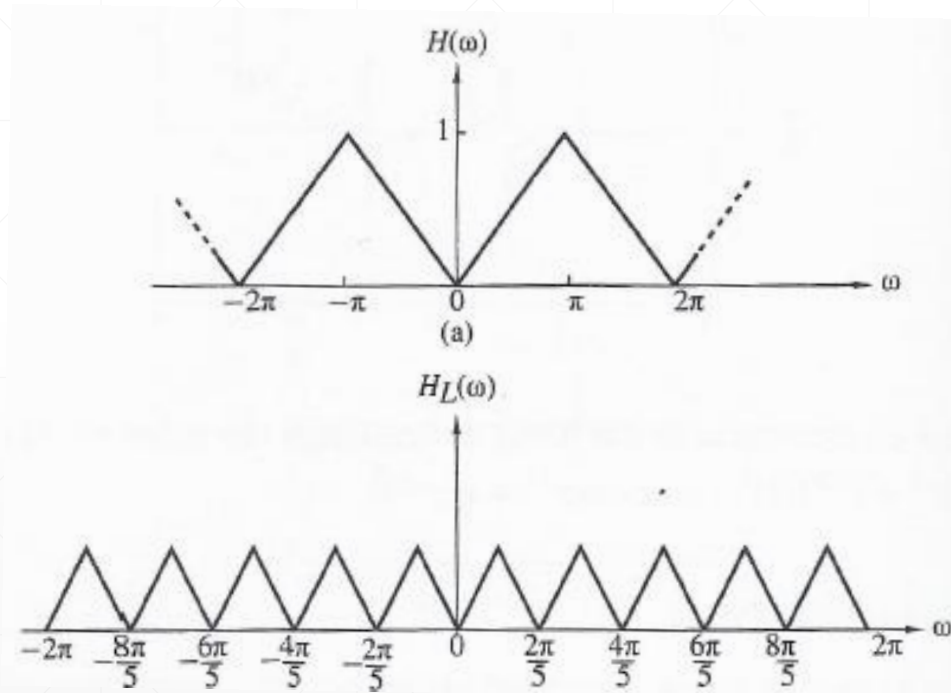
$$H_L(\omega) = \sum_{k=0}^M h(k)e^{-jkL\omega} = H(L\omega)$$

Filtro peine

(5)

Por tanto, la respuesta en frecuencia $H_L(\omega)$ es simplemente una repetición de orden L de $H(\omega)$ en el rango de $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Este ejemplo ilustra la relación entre $H_L(\omega)$ y $H(\omega)$ para $L = 5$.



Si se tiene que el filtro FIR original con una función de transferencia $H(z)$ tiene un nulo espectral (es decir un cero), en una frecuencia ω_0 dada. Se puede generar un sistema $H_L(z)$ que tendrá nulos igualmente espaciados en:

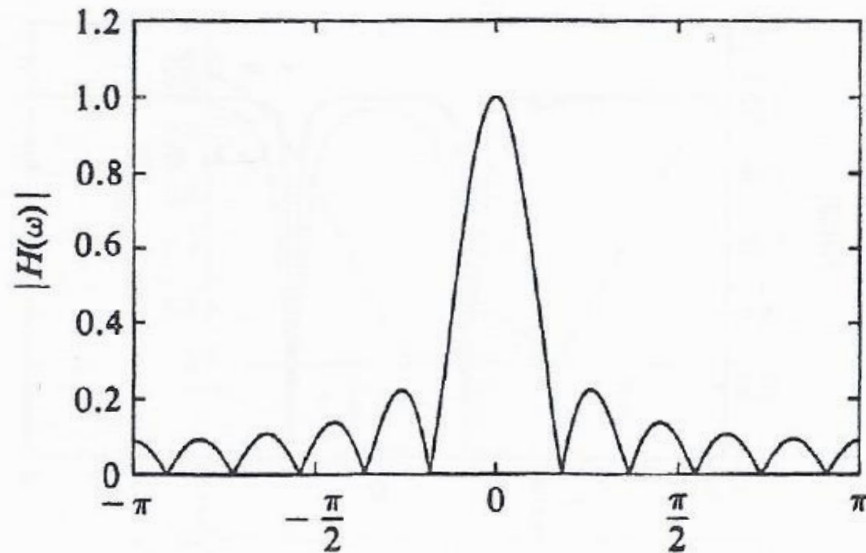
$$\omega_k = \omega_0 + \frac{2\pi k}{L}, k = 0, 1, \dots, L - 1$$

Filtro peine

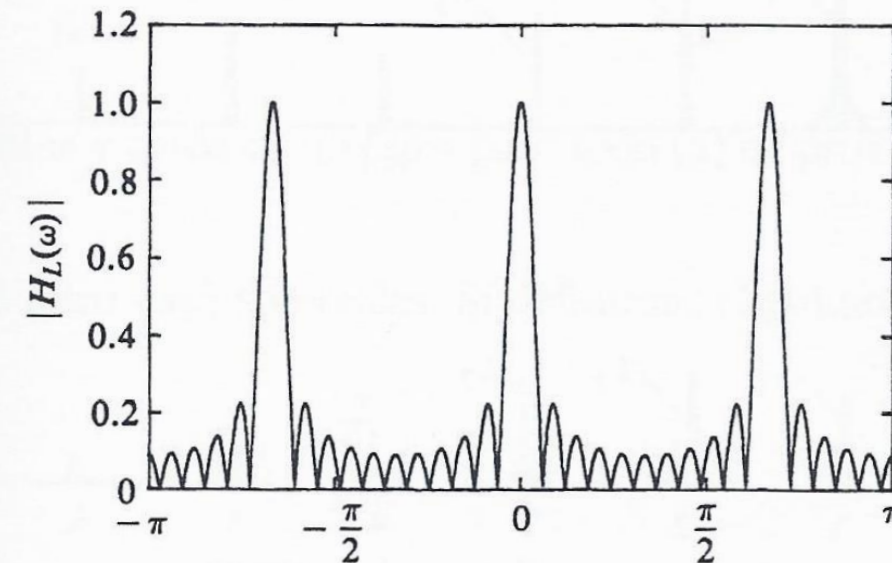
(7)

Filtro FIR de media móvil $M = 10$ para una implementación tipo peine para $L = 3$.

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\frac{\omega M}{2}}}{M+1} \frac{\sin\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



$$H_L(\omega) = \frac{e^{-j\frac{L\omega M}{2}}}{M+1} \frac{\sin\left(\frac{L\omega(M+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{L\omega}{2}\right)}$$



Filtro peine: Ejemplo

(1)

Diseñe un filtro peine a partir de un filtro FIR

$$y(n) = \frac{1}{2} (x(n) + x(n - 1))$$

tal que suprima las frecuencias $\omega_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Filtro peine: Ejemplo

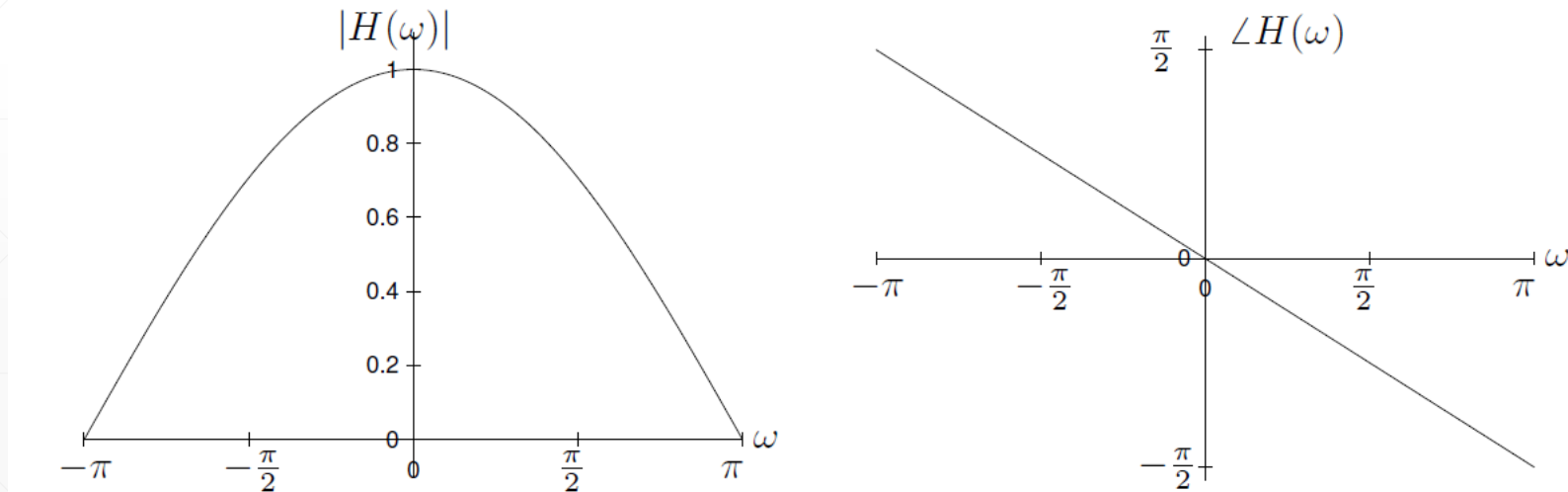
(2)

Solución:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

Por lo tanto

$$H(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{2} = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

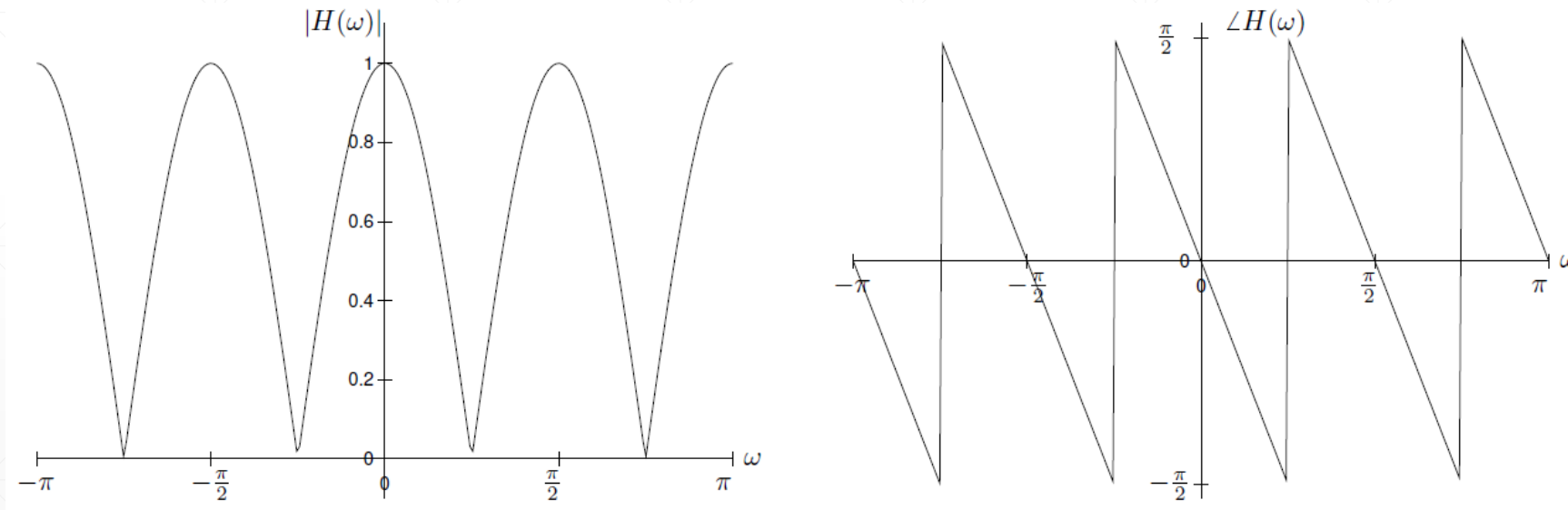


Filtro peine: Ejemplo

(3)

Utilizando $L = 4$ se obtiene:

$$H(\omega) = e^{-j\frac{4\omega}{2}} \cos\left(\frac{4\omega}{2}\right) = e^{-j2\omega} \cos(2\omega)$$



Filtros paso todo

Filtros pasa todo

(1)

Se define como un sistema cuyo módulo de su respuesta es constante para todas las frecuencias.

$$|H(\omega)| = 1 \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

Un ejemplo sencillo de un filtro paso todo es un sistema de retardo puro:

$$H(z) = z^{-k}$$

El filtro anterior presenta una respuesta de fase lineal y módulo unitario.

Este sistema deja pasar todas las señales sin hacer modificación excepto un retardo de k muestras. Se trata de un sistema pasa todo trivial que tiene una respuesta de fase lineal.

$$H(\omega) = e^{-j\omega k}$$

Filtros pasa todo

(2)

Otro caso más interesante es el sistema dado por:

$$H(z) = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad a_0 = 1$$

Si se define $A(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}$, $a_0 = 1$:

$$H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

Filtros pasa todo

(3)

La respuesta en magnitud en frecuencia utilizando el teorema de Wiener-Kinchin es:

$$|H(\omega)|^2 = H(z) H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

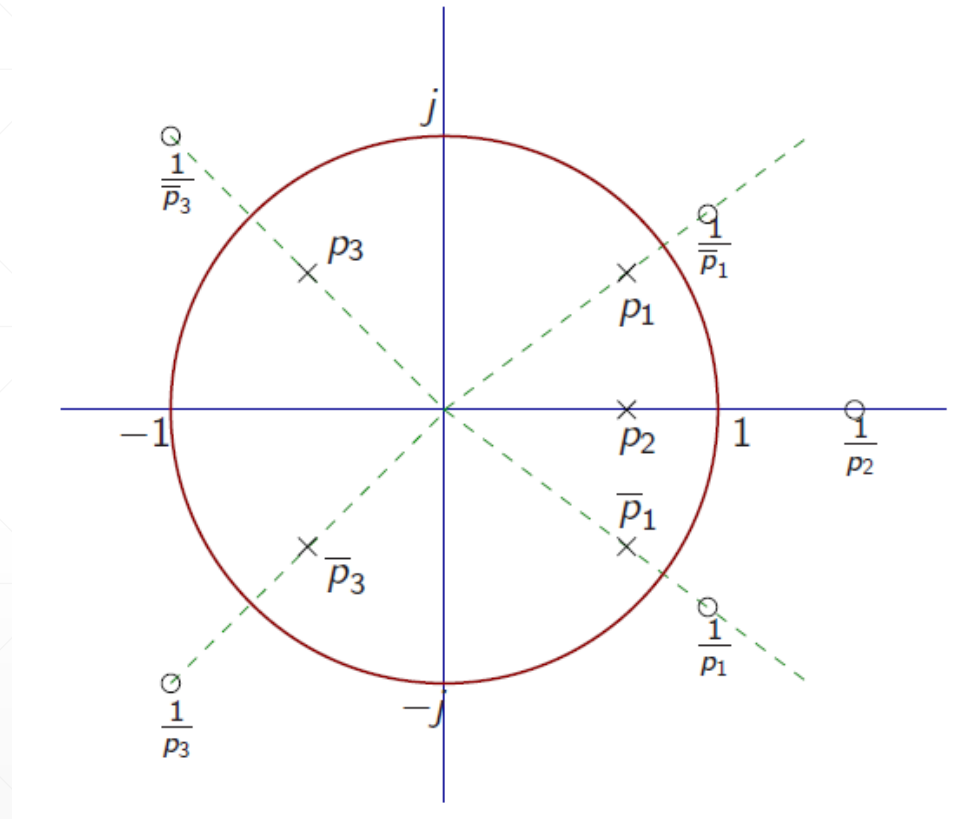
$$|H(\omega)|^2 = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} z^N \frac{A(z)}{A(z^{-1})}$$

$$|H(\omega)|^2 = 1$$

Si z_0 es un polo de $H(z)$, entonces z_0^{-1} es un cero de $H(z)$. Es decir los polos y los ceros son recíprocos entre si.

Filtros pasa todo

(4)



Filtros pasa todo

(5)

La forma más general de la función de sistema de un filtro paso todo con coeficientes reales, expresada en forma de factores definidos por los polos y ceros es:

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_C} \frac{(z^{-1} - \beta_k)(z^{-1} - \beta_k^*)}{(1 - \beta_k z^{-1})(1 - \beta_k^* z^{-1})}$$

N_R : número de polos y ceros reales

N_C : número de pares de polos y ceros complejos conjugados.

Para sistemas estables y causales se necesita que:

$$-1 < \alpha_k < 1 \text{ y } |\beta_k| < 1$$

Las expresiones para la fase de la respuesta y el retardo de grupo de los sistemas paso todo pueden obtenerse fácilmente.

Filtros pasa todo

(6)

Para un sistema paso todo de un solo polo y un cero:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \alpha_k^*}{1 - \alpha_k z^{-1}}$$

$$H_{ap}(\omega) = \frac{e^{-j\omega} - r e^{-j\theta}}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}}$$

$$H_{ap}(\omega) = e^{-j\omega} \frac{(1 - r e^{j(\omega - \theta)})}{1 - r e^{j(\theta - \omega)}}$$

$$H_{ap}(\omega) = e^{-j\omega} \frac{1 - r \cos(\omega - \theta) - jr \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\theta - \omega) - jr \sin(\theta - \omega)}$$

Filtros pasa todo

(7)

$$H_{ap}(\omega) = e^{-j\omega} \frac{1 - r \cos(\omega - \theta) - jr \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta) + jr \sin(\omega - \theta)}$$

$$\Theta_{ap}(\omega) = -\omega - 2 \tan^{-1} \left(\frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \right)$$

Con $\frac{\partial}{\partial x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ se obtiene para el retardo de grupo:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial \Theta_{ap}(\omega)}{d\omega}$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2}$$

Filtros pasa todo

(8)

$$\tau_g(\omega) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2}$$

Observe que un sistema causal y estable tiene $r < 1$ y por tanto $\tau_g(\omega) \geq 0$. Dado que el retardo de grupo de un sistema de polos y ceros de orden superior consta de una suma de términos positivos, el retardo de grupo siempre será positivo.

Los filtros paso todo se utilizan como “**igualadores de fase**”, colocándolos en cascada con un sistema de respuesta en fase no deseada, de tal modo que se compensa la fase total del sistema para obtener un comportamiento lineal.

Osciladores digitales

Osciladores sinusoidales digitales

(1)

Un oscilador sinusoidal digital puede interpretarse como una forma limitada de un resonador de dos polos para el que los polos complejos conjugados están sobre la circunferencia unitaria.

Si se tiene una sistema con una función de transferencia:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$a_1 = -2r \cos(\omega_0)$$

$$a_2 = r^2$$

Presenta polos complejos conjugados en:

$$z_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$$

Osciladores sinusoidales digitales

(2)

El sistema anterior presenta una respuesta al impulso unitario $\delta(n)$ igual a:

$$h(n) = \frac{b_0 r^n}{\sin(\omega_0)} \sin(\omega_0(n+1)) u(n)$$

Si los polos se colocan sobre la circunferencia unitaria ($r = 1$) y b_0 se hace igual a $A \sin(\omega_0)$, entonces:

$$h(n) = A \sin(\omega_0(n+1)) u(n)$$

Por tanto, la respuesta al impulso del sistema de segundo orden con polos complejos conjugados sobre el círculo unitario es un senoide y el sistema se denomina oscilador sinusoidal digital o generador sinusoidal digital.

Un generador sinusoidal digital es un componente básico de un sintetizador digital de frecuencias.

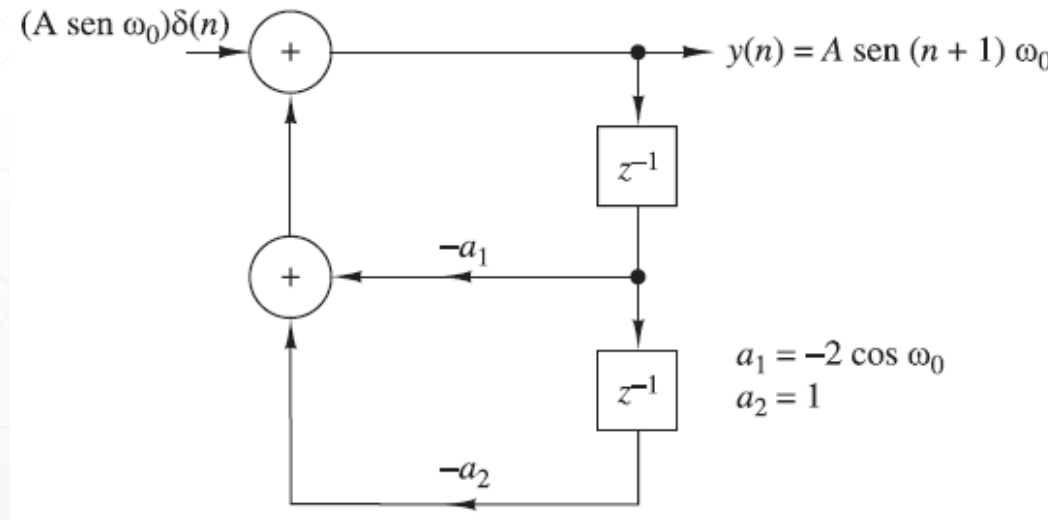
Osciladores sinusoidales digitales

(3)

Así:

$$H(z) = \frac{b_0}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

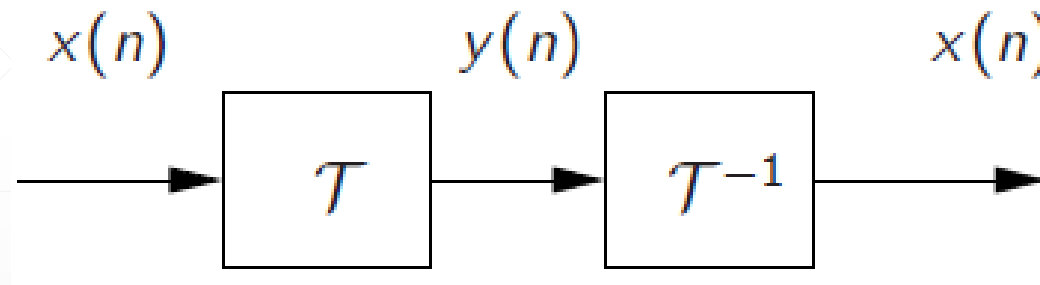
$$y(n] = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) + b_0x(n)$$



Sistemas Inversos

Sistemas inversos

- Son sistemas que transforman una señal $x(n)$ en la salida $y(n)$.
- Hay aplicaciones donde interesa recuperar $x(n)$ a partir de $y(n)$ (operación de **deconvolución**).
- Se busca entonces colocar un sistema \mathcal{T}^{-1} en cascada, denominado **sistema inverso**.



- Se debe conocer la respuesta impulsional $h(n)$ o la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ (se requiere **Identificación de Sistemas**).

Invertibilidad de sistemas LTI

- Un sistema es invertible si existe el sistema inverso \mathcal{T}^{-1} tal que:

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] \qquad x(n) = \mathcal{T}^{-1}[y(n)] = \mathcal{T}^{-1}[\mathcal{T}[x(n)]]$$

- Para sistemas LTI, asúmase que el sistema \mathcal{T} tiene una respuesta impulsional $h(n)$, y $h_I(n)$ es la respuesta del sistema inverso \mathcal{T}^{-1} .
- Se debe cumplir entonces que:

$$h(n) * h_I(n) = \delta(n) \quad \Leftrightarrow \quad H(z)H_I(z) = 1$$

De donde se obtiene:

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Invertibilidad de sistemas LTI

- Para un sistema con $H(z)$ racional, si:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

entonces

$$H_I(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

lo que quiere decir que los ceros de $H(z)$ se convierten en los polos de $H_I(z)$ y viceversa:

- Esto a su vez implica que si $H(z)$ es todo ceros (FIR), entonces $H_I(z)$ es todo polos (IIR) y viceversa.

Ejemplo: sistemas inversos

(1)

- Determine el sistema inverso de $h(n) = u(n)$

Ejemplo: sistemas inversos

(2)

Solución:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \rightarrow H_I(z) = 1 - z^{-1} \bullet \circ h_I(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)$$

Ejemplo: sistemas inversos

(1)

- Determine el sistema inverso del sistema con respuesta impulsional $h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$.

Ejemplo: sistemas inversos

(2)

Solución:

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \rightarrow H_I(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \bullet \circ h_I(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \end{cases}$$

Otra manera “algorítmica” de obtener la respuesta impulsional $h_I(n)$ se basa en la convolución.

Si se asume que $h(n)$ y su inverso son causales, entonces:

$$h(n) * h_I(n) = \sum_{k=0}^n h(k)h_I(n-k) = \delta(n)$$

Inversión Algorítmica

(2)

Para $n = 0$ se cumple $h(0)h_I(0) = 1 \rightarrow h_I(0) = \frac{1}{h(0)}$, y puesto que para $n > 0$:

$$\sum_{k=0}^n h(k)h_I(n-k) = h(0)h_I(n) + \sum_{k=1}^n h(k)h_I(n-k) = 0$$

$$h_I(n) = -\frac{\sum_{k=1}^n h(k)h_I(n-k)}{h(0)}$$

Lo que se puede programar directamente.

- Si $h(0)$ es cero, entonces debe introducirse un retardo en $h(n) * h_I(n) = \sum_{k=0}^n h(k)h_I(n-k) = \delta(n)$ sustituyendo $\delta(n)$ por $\delta(n-m)$, donde para $n = m$, $h(n) \neq 0$ y $h(n) = 0$ si $n < m$.
- Este método tiene el problema de que conforme n crece, el error numérico acumulado crece.

Ejemplo: Inversión Algorítmica

(1)

- Determine el inverso causal del sistema de respuesta impulsional $h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n - 1)$.

Ejemplo: Inversión Algorítmica

(2)

Solución:

Con $h(0) = 1$, $h(1) = -\alpha$ y $h(n) = 0$ para $n \geq 2$, entonces:

$$h_I(0) = \frac{1}{h(0)} = 1$$

$$h_I(1) = -\frac{h(1)h_I(0)}{h(0)} = \alpha$$

$$h_I(2) = -\frac{h(1)h_I(1) + h(2)h_I(0)}{h(0)} = -(-\alpha\alpha) = \alpha^2$$

$$h_I(3) = -\frac{h(1)h_I(2) + h(2)h_I(1) + h(3)h_I(0)}{h(0)} = -(-\alpha\alpha^2) = \alpha^3$$

$$\vdots$$
$$h_I(n) = \alpha^n$$

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (1)

La invertibilidad de un sistema LTI está íntimamente relacionada con las características de la función espectral de fase del sistema. Para ilustrar esta cuestión, se considerará dos sistemas FIR:

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \text{ y } H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1}$$

$H_1(z)$ tiene un cero en $z = -\frac{1}{2}$ y $H_2(z)$ en $z = -2$.

Puede demostrarse que:

$$|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)| = \sqrt{5/4 + \cos(\omega)}$$

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (2)

Para la fase de $H_1(\omega)$ se tiene que:

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = z^{-1} \left(z + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \angle H_1(\omega) = \arg \left(e^{-j\omega} \left(e^{j\omega} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

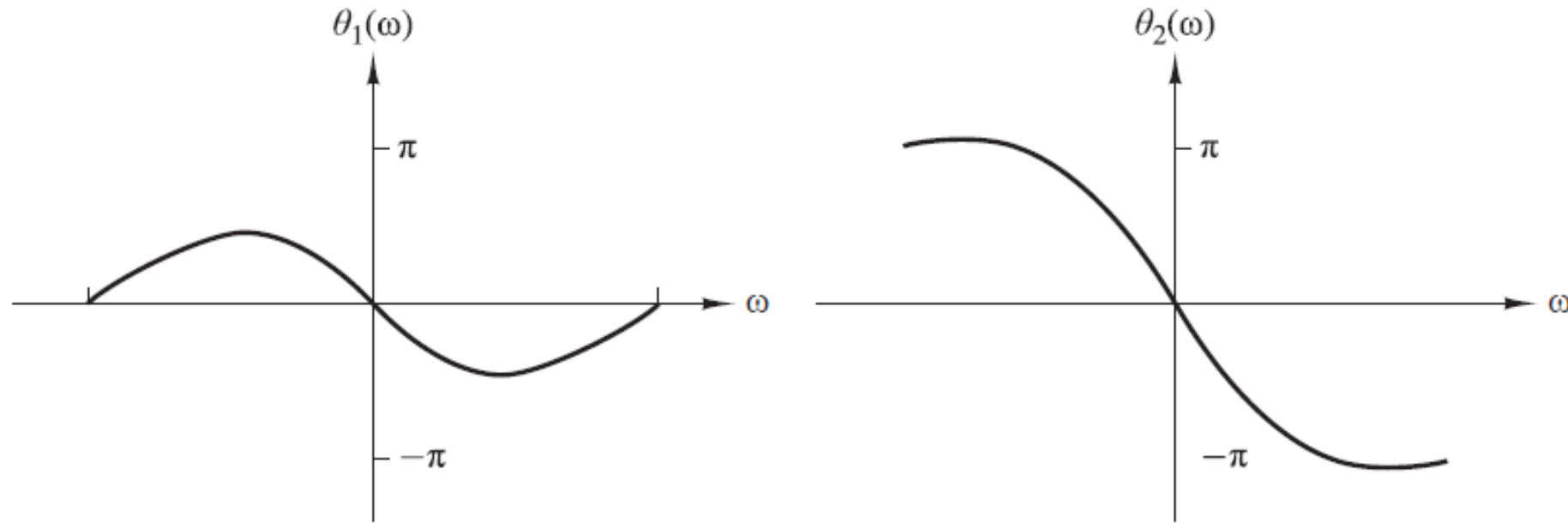
$$\angle H_1(\omega) = -\omega + \arctan \left(\frac{\sin(\omega)}{\frac{1}{2} + \cos(\omega)} \right)$$

Y para $\angle H_2(\omega)$ se tiene que:

$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1} \left(\frac{1}{2}z + 1 \right) \Rightarrow \angle H_2(\omega) = \arg \left(e^{-j\omega} \left(\frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 \right) \right)$$

$$\angle H_2(\omega) = -\omega + \arctan \left(\frac{\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)} \right) = -\omega + \arctan \left(\frac{\sin(\omega)}{2 + \cos(\omega)} \right)$$

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (3)



Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (4)

El término $\arctan\left(\frac{\sin(\omega)}{\alpha + \cos(\omega)}\right)$ se comporta de la siguiente manera:

$$\arctan\left(\frac{\sin(\omega)}{\alpha + \cos(\omega)}\right) \approx \begin{cases} \omega & \text{si } \alpha \rightarrow 0 \\ \frac{\omega}{2} & \text{si } \alpha \rightarrow 1 \\ \frac{\sin(\omega)}{\alpha} & \text{si } \alpha \gg 1 \end{cases}$$

Si $\alpha < 1$: $\theta_1(\pi) - \theta_1(0) = 0 \Rightarrow$ sistema de fase mínima

Si $\alpha > 1$: $\theta_1(\pi) - \theta_1(0) = \pi \Rightarrow$ sistema de fase máxima

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (5)

Un sistema FIR de longitud $M + 1$ tiene M ceros y su respuesta en frecuencia se puede expresar como:

$$H(\omega) = b_0(1 - z_1 e^{-j\omega})(1 - z_2 e^{-j\omega}) \dots (1 - z_M e^{-j\omega})$$

- **Sistema de fase mínima:** todos los ceros dentro del círculo unitario. Cambio neto de fase $\angle H(\pi) - \angle H(0) = 0$.
- **Sistema de fase máxima:** todos los ceros fuera del círculo unitario. Cambio neto de fase $\angle H(\pi) - \angle H(0) = M\pi$.
- **Sistema de fase mixta:** algunos ceros dentro y otros fuera del círculo unitario. Cambio neto de fase $\angle H(\pi) - \angle H(0) = M\pi$.

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (6)

Derivada de fase representa retardo:

- Sistema de fase mínima: retardo mínimo
- Sistema de fase máxima: retardo máximo

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (7)

▪ Ejemplo:

Indique para cada uno de los siguientes sistemas FIR si son sistemas de fase mínima, fase máxima o fase mixta.

1. $H_1(z) = 6 + z^{-1} - z^{-2}$

2. $H_1(z) = 1 - z^{-1} - 6z^{-2}$

3. $H_1(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2}$

4. $H_1(z) = 1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}$

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (8)

▪ Ejemplo: Solución

1. $H_1(z) = 6 + z^{-1} - z^{-2} \rightarrow$ fase mínima

2. $H_1(z) = 1 - z^{-1} - 6z^{-2} \rightarrow$ fase máxima

3. $H_1(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} \rightarrow$ fase mixta

4. $H_1(z) = 1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} \rightarrow$ fase mixta

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (9)

- Un sistema IIR descrito por la función de transferencia racional

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

se denomina de fase mínima si todos sus polos y ceros se encuentran dentro de la circunferencia unitaria, lo que implica además que el sistema es estable y causal.

- Si en un sistema causal y estable todos los ceros están fuera de $|z| = 1$, entonces el sistema es de fase máxima.
- Si sólo algunos de sus ceros están fuera de $|z| = 1$, entonces el sistema es de fase mixta.

Sistemas de fase mínima, fase máxima y fase mixta (10)

- Puesto que el inverso de $H(z)$ es $H^{-1}(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, entonces se deduce de lo anterior que el inverso de un sistema de fase mínima estable es también un sistema de fase mínima.
- En general, la fase mínima de $H(z)$ asegura la estabilidad de su sistema inverso $H^{-1}(z)$, y la estabilidad de $H(z)$ asegura la fase mínima de $H^{-1}(z)$.
- Los sistemas de fase mixta o máxima tienen entonces sistemas inversos inestables.

Descomposición de sistemas

- Cualquier sistema de función de transferencia racional y de fase no mínima puede descomponerse en la cascada de un sistema de fase mínima y un filtro pasa todos:

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

Descomposición para inversión estable

(1)

- Sea $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$
- El numerador $B(z)$ se factoriza con $B(z) = B_1(z)B_2(z)$:
 - $B_1(z)$ tiene todas sus raíces dentro de $|z| = 1$.
 - $B_2(z)$ todas sus raíces fuera.
- Esto implica que $B_2(z^{-1})$ tiene todas sus raíces dentro de $|z| = 1$.

- De esta forma:

$$H_{min}(z) = \frac{B_1(z)B_2(z^{-1})}{A(z)}, \quad H_{ap}(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1})}$$

- $H_{ap}(z)$ es estable puesto que todos los polos de $B_2(z^{-1})$ se encuentran dentro de la circunferencia unitaria.

Descomposición para inversión estable (2)

- Además, $H_{ap}(z)$ es un filtro paso todo como los descritos anteriormente, y es de fase máxima al estar todos sus ceros fuera de la circunferencia unitaria.
- Este sistema $H(z)$ de fase no mínima tiene el retardo de grupo

$$\tau_g(\omega) = \tau_g^{min}(\omega) + \tau_g^{ap}(\omega)$$

- Puesto que $\tau_g^{ap}(\omega) \geq 0$ para $0 \leq \omega \leq \pi$, entonces se puede concluir que entre todos los sistemas con igual respuesta en magnitud, el menor retardo de grupo lo tiene el sistema de fase mínima.

Identificación de sistemas

Identificación de sistemas

(1)

Problema de identificación de sistema: Dados $y(n)$ y $x(n)$, encontrar $h(n)$

Identificación de sistemas

(2)

Si existen formas cerradas en el dominio z para $x(n)$ y $y(n)$, entonces $h(n)$ se obtiene fácilmente con

$$h(n) \longleftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Identificación de sistemas

(3)

Otro método trata directamente la convolución en el dominio del tiempo, asumiendo que $h(n)$ es causal:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k), \quad n \geq 0$$

$$y(0) = h(0)x(0) \quad \rightarrow \quad h(0) = \frac{y(0)}{x(0)}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} h(k)x(n-k) + h(n)x(0)$$

$$h(n) = \frac{y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h(k)x(n-k)}{x(0)}, \quad n \geq 1$$

Aquí se ha asumido que $x(0) \neq 0$. El problema se torna numéricamente inestable para $n \gg 1$.

Identificación de sistemas

(4)

Un tercer método utiliza la correlación cruzada entrada-salida:

$$r_{yx}(n) = y(n) * x(-n) = h(n) * x(n) * x(-n) = h(n) * r_{xx}(n)$$

$$r_{yx}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) r_{xx}(n - k)$$

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega) = H(\omega) |X(\omega)|^2$$

$$H(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{yx}(\omega)}{|X(\omega)|^2}$$

Se aplica entonces la fórmula de deconvolución para determinar $h(n)$ o la transformada inversa de Fourier de $H(\omega)$.

Este método tiene la ventaja de que el uso de las correlaciones elimina términos de ruido en la identificación, que podrían alterar los resultados de los otros métodos.

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.

