Formulario

Procesamiento Digital de Señales

$$\sum_{n=0}^{M} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{M+1}}{1-\alpha} \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |a| < 1 \tag{2}$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) \pm \cos(A)\operatorname{sen}(B) \tag{3}$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) \tag{4}$$

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2A)) \tag{5}$$

$$\operatorname{sen}^2(A) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2A)) \tag{6}$$

$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right) \tag{7}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right) \tag{8}$$

$$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right) \tag{9}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos(A)\right)} \tag{10}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos(A)\right)} \tag{11}$$

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\operatorname{sen}(\omega) \tag{12}$$

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \tag{13}$$

$$\operatorname{sen}(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} \tag{14}$$

Cuadro 1: Transformada z de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$-n(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Cuadro 2: Propiedades de la transformada z

Propiedad	Dominio n	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	ROC: $r_2 < \|z\| < r_1$ ROC_1 ROC_2
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	por lo menos $\mathrm{ROC}_1 \cap \mathrm{ROC}_2$
Desplazamiento en n	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	como la de $X(z)$ excepto $z=0$ si $k>0$ y $z=\infty$ si $k<0$
Escalado en z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
Reflexión en n	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$\overline{x}(n)$	$\overline{X}(\overline{z})$	ROC
Parte real	$\mathrm{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}\left[X(z) + \overline{X}(\overline{z})\right]$	Incluye ROC
Parte imaginaria	$\mathrm{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}\left[X(z) - \overline{X}(\overline{z})\right]$	Incluye ROC
Derivación en z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Por lo menos $\mathrm{ROC}_1 \cap \mathrm{ROC}_2$
Correlación	$r_{x_1x_2}(n) = x_1(n) * x_2(-n)$	$R_{x_1x_2} = X_1(z)X_2(z^{-1})$	Por lo menos la intersección de ROC_1 y la de $X_2(z^{-1})$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv$	Por lo menos $r_{1l}r_{2l} < \|z\| < r_{1u}r_{2u}$
Relación de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\overline{x_2}(n) =$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)\overline{X_2}\left(\frac{1}{\overline{v}}\right)v^{-1}\,dv$	

Cuadro 3: Propiedades de la DFT

Propiedad	Dominio temporal	Dominio frecuencial
Notación	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
Periodicidad	$x(n) = x(n+N)$	$X(k) = X(k+N)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Reflexión temporal	$x(N-n)$	$X(N-k)$
Desplazamiento temporal circular	$x((n-l))_N$	$X(k)\, e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento frecuencial circular	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k-l))_N$
Conjugación compleja	$\overline{x}(n)$	$\overline{X}(N-k)$
Convolución circular	$x_1(n) \; Ⓝ \; x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
Correlación circular	$x(n) \; Ⓝ \; \overline{y}(-n)$	$X(k)\overline{Y}(k)$
Multiplicación de dos secuencias	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k) \; Ⓝ \; X_2(k)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\overline{y}(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\overline{Y}(k)$

Cuadro 4: Simetrías en filtros FIR de fase lineal

Simetría	Simétrica $h(n) = h(M-1-n)$	Antisimétrica $h(n) = -h(M-1-n)$
M par	$H_r(0) = 2\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k)$	$H_r(0) = 0$ no apto como filtro paso bajos
M impar	$H_r(0) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} h(k)$	$H_r(0) = H_r(\pi) = 0$ no apto como filtro paso bajos o altos

Cuadro 5: Funciones utilizadas como ventanas.

Ventana	$h(n), 0 \leq n \leq M-1$	Ancho lobular	Pico lóbulo lateral [dB]
Rectangular	1	$4\pi/M$	-13
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2\left\|n - \frac{M-1}{2}\right\|}{M-1}$	$8\pi/M$	-27
Hamming	$0{,}54 - 0{,}46\cos\frac{2\pi n}{M-1}$	$8\pi/M$	-32
Hanning	$\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n}{M-1}\right)$	$8\pi/M$	-43

Cuadro 6: Descomposición de filtros FIR en $P(\omega)$ y $Q(\omega)$.

	Simétrico $h(n) = h(M-1-n)$	Antisimétrico $h(n) = -h(M-1-n)$
M Impar	Caso 1 $Q(\omega) = 1$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k)\cos\omega k$ $a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right) & k=0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2}-k\right) & k=1,2,\ldots,\frac{M-1}{2} \end{cases}$	Caso 3 $Q(\omega) = \operatorname{sen}(\omega)$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-3)/2} \tilde{c}(k)\cos\omega k$ $\tilde{c}\left(\frac{M-3}{2}\right) = 2h(0)$ $\tilde{c}\left(\frac{M-5}{2}\right) = 4h(1)$ $\tilde{c}(k-1) - \tilde{c}(k+1) = 4h\left(\frac{M-1}{2}-k\right), \quad 2 \le k \le \frac{M-5}{2}$ $\tilde{c}(0) + \frac{1}{2}\tilde{c}(2) = 2h\left(\frac{M-3}{2}\right)$
M Par	Caso 2 $Q(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \tilde{b}(k)\cos(\omega k)$ $\tilde{b}(0) = h\left(\frac{M}{2}-1\right)$ $\tilde{b}(k) = 4h\left(\frac{M}{2}-k\right) - \tilde{b}(k-1), \quad 1 \le k \le \frac{M}{2}-2$ $\tilde{b}\left(\frac{M}{2}-1\right) = 4h(0)$	Caso 4 $Q(\omega) = \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \tilde{d}(k)\cos(\omega k)$ $\tilde{d}\left(\frac{M}{2}-1\right) = 4h(0)$ $\tilde{d}(k-1) - \tilde{d}(k) = 4h\left(\frac{M}{2}-k\right), \quad 2 \le k \le \frac{M}{2}-1$ $\tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) = 2h\left(\frac{M}{2}-1\right)$

Cuadro 7: Características de Filtros Paso Bajo Analógicos

Filtro	Función de Transferencia	Características
Butterworth (todo-polos)	$\lvert H(\Omega)\rvert^2 = \dfrac{1}{1+(\Omega/\Omega_C)^{2N}}$ Ω_C: frecuencia de corte	$\lvert H(\Omega)\rvert$ monótona en las bandas de paso y rechazo.
Chebyshev, Tipo I (todo-polos)	$\lvert H(\Omega)\rvert^2 = \dfrac{1}{1+\epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_P}\right)}$ T_N: polinomio de Chebyshev $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$	Rizado constante en la banda de paso y característica monótona en la banda de rechazo.
Chebyshev, Tipo II (polos y ceros)	$\lvert H(\Omega)\rvert^2 = \dfrac{1}{1+\epsilon^2\left[\frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_P}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega}\right)}\right]}$ T_N: polinomio de Chebyshev	Rizado constante en la banda de rechazo y característica monótona en la banda de paso.
Elíptico ó Cauer (polos y ceros)	$\lvert H(\Omega)\rvert^2 = \dfrac{1}{1+\epsilon^2 U_N\left(\frac{\Omega}{\Omega_P}\right)}$ U_N: función elíptica Jacobiana de orden N	Rizado constante tanto en la banda de paso como en la de rechazo.
Bessel (todo-polos)	$H(s) = \dfrac{1}{B_N(s)}$ $B_N(s)$: funciones de Bessel $B_0(s) = 1$ $B_1(s) = s+1$ $B_N(s) = (2N-1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$	Respuesta de fase lineal en la banda de paso (aunque se destruye en la conversión a digital).

Cuadro 8: Transformaciones de frecuencia para filtros analógicos.

Tipo de filtro deseado	Transformación	Nuevas frecuencias de corte
Paso bajo	$s \rightarrow \frac{\Omega_P}{\Omega'_P} s$	Ω'_P
Paso alto	$s \rightarrow \frac{\Omega_P \Omega'_P}{s}$	Ω'_P
Paso banda	$s \rightarrow \Omega_P \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_u, Ω_l
Supresor de banda	$s \rightarrow \Omega_P \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}$	Ω_u, Ω_l

Ω_P: frecuencia de corte del prototipo
Ω_l: frecuencia de corte inferior
Ω_u: frecuencia de corte superior

Cuadro 9: Transformaciones de frecuencia para filtros digitales.

Tipo de filtro deseado	Transformación	Constantes	Nuevas frecuencias de corte
Paso bajo	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	$a = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_P - \omega'_P}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_P + \omega'_P}{2}\right)}$	ω'_P
Paso alto	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	$a = \frac{\cos\left(\frac{\omega_P + \omega'_P}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_P - \omega'_P}{2}\right)}$	ω'_P
Paso banda	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$a_1 = -2\alpha \frac{K}{K+1}$ $a_2 = \frac{K-1}{K+1}$ $\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_u + \omega_l}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right)}$ $K = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_P}{2}$	ω_u, ω_l
Supresor de banda	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$a_1 = -2\alpha \frac{1}{K+1}$ $a_2 = \frac{1-K}{1+K}$ $\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_u + \omega_l}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right)}$ $K = \tan \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_P}{2}$	ω_u, ω_l

ω_P: frecuencia de corte normalizada del prototipo
ω_l: frecuencia de corte normalizada inferior
ω_u: frecuencia de corte normalizada superior