

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL-5805 Procesamiento Digital de Señales
Prof.: Ing. José Miguel Barboza Rotana, MSc.

I Semestre 2019

Examen Corto #4. (65 puntos)

Nombre: José Miguel Barboza Rotana Carné: —

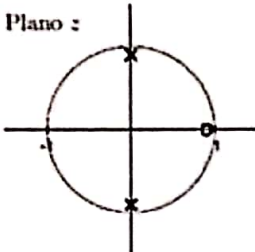
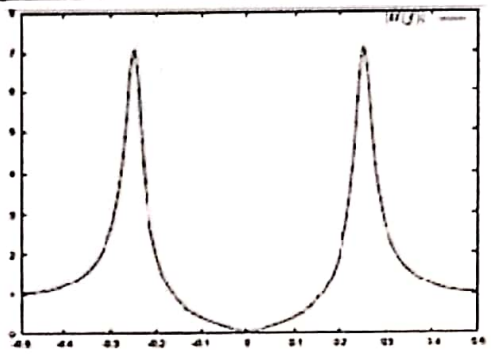
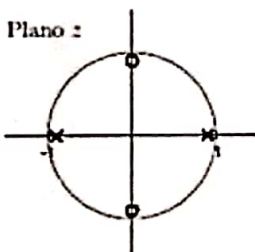
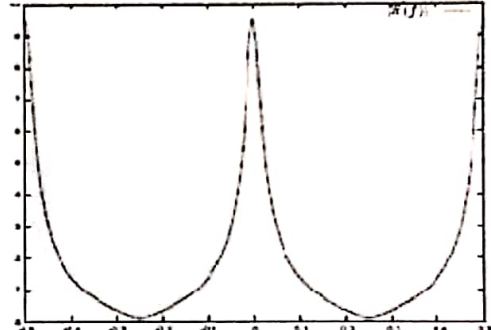
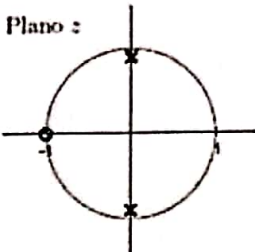
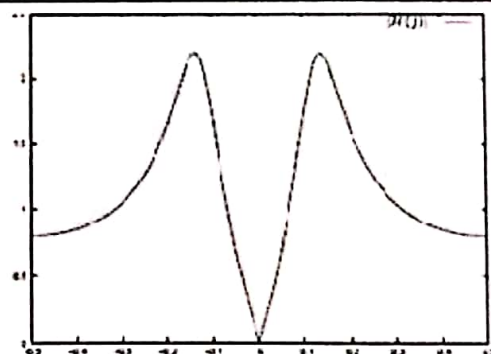
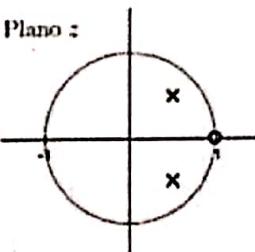
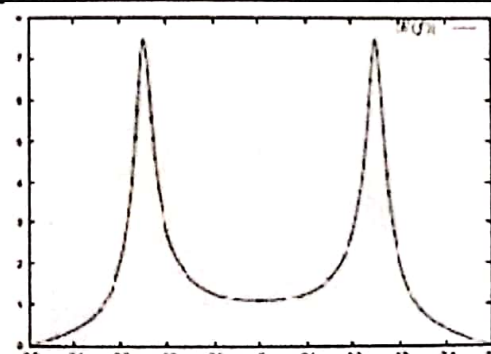
1. Si una señal continua posee espectro no periódico, se cumple que: (2 pts.)
 - a) La señal también es periódica y su espectro es continuo.
 - b) La señal también es no periódica y su espectro es discreto.
 - c) La señal también es periódica y su espectro es discreto.
 - d) La señal también es no periódica y su espectro es continuo.
 - e) La señal también es periódica y su espectro es no periódico.
 - f) La señal también es periódica y su espectro es periódico.
 - ☒ Ninguna de las anteriores.

2. Una señal con espectro discreto y periódico, en el tiempo la señal es: (2 pts.)
 - a) Continua y periódica.
 - b) Continua y no se sabe si es periódica o no periódica.
 - c) Continua y no periódica.
 - d) Discreta y no periódica.
 - e) Discreta y no se sabe si es periódica o no periódica.
 - ☒ Discreta y periódica.
 - g) Ninguna de las anteriores.

3. La señal $x_a(t)$ es generada por la salida de un micrófono utilizada para detectar sonidos de motosierras y disparos en el bosque. Dicha señal posee una composición espectral definida entre dos rangos de frecuencia: 1-5 kHz y 10-20 kHz. Cada nodo de medición debe digitalizar la señal $x_a(t)$ con la ayuda de un ADC para luego ser transmitida a un nodo central en un formato binario. Además, la resolución del ADC es de 32 bits. ¿Cuál es el mínimo valor de frecuencia de muestreo F_s con la que debe ser programado el ADC para que la señal discreta $x(n) = x_a(n/F_s)$ puede ser utilizada posteriormente para reconstruir la información original de la señal $x_a(t)$? Justifique apropiadamente su respuesta. (3 pts.)

Respuesta: $F_s = 40 \text{ kHz}$

4. Asocie a cada respuesta en magnitud el diagrama de polos y ceros correspondiente: (4 pts.)

A	<p>Plano z</p> 	A	
B	<p>Plano z</p> 	B	
C	<p>Plano z</p> 	D	
D	<p>Plano z</p> 	C	

5. Asocie los términos en la columna de la izquierda con las características del sistema indicadas en la columna de la derecha. (9 pts.)

A	Sistema causal inestable.	I	Función $H(z)$ racional definida por la razón de dos polinomios lineales.
B	Retardo de grupo constante.	H	Sistema $H(z)$ posee polos dentro y fuera del círculo unitario
C	Sistema de fase mínima	C	Ceros de $H(z)$ dentro del círculo unitario
D	Sistema de fase máxima	E	Sistema $H(z)$ es de todos ceros
E	Respuesta al impulso finita	F ?	Polos de $H(z)$ fuera dentro del círculo unitario
F	Sistema causal estable	B	Si z_k es cero (o polo) entonces z_k^{-1} también es un cero (o polo)
G	Sistema solo polos IIR	G	Sistema $H(z)$ es puramente recursivo
H	Sistema no causal estable	D	Ceros de $H(z)$ fuera del círculo unitario
I	Sistema LTI	A	Polos de $H(z)$ fuera del círculo unitario

6. (21 pts.) Sea un filtro con respuesta al impulso $h(n) = n0,9^n u(n)$. Determine:
- La respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega)$. (2 pts.)
 - La respuesta de magnitud y fase del filtro. (4 pts.)
 - Un esbozo de las respuestas de magnitud y fase para $\omega \in [-\pi, \pi]$ (4 pts.).
 - Tipo de filtro de acuerdo al comportamiento en frecuencia. (1 pt.)
 - Estabilidad y causalidad del filtro (si o no y porqué) (2 pts.)
 - Ecuación de diferencias del filtro (2 pts.)
 - Orden del filtro (1 pt.)
 - Diagrama de bloques del filtro. (2 pts.)
 - La respuesta $y(n)$ del filtro si la entrada es $x(n) = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{10}n + \pi\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$. (3 pts.)

7. (24 pts.) Sea un filtro definido por la siguiente ecuación de diferencias:

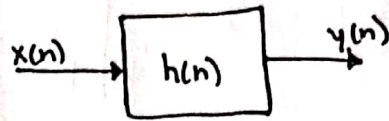
$$y(n) = -0,8y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

Determine:

- a) La respuesta en frecuencia del filtro $H(\omega)$. (2 pts.)
- b) La respuesta de magnitud y fase del filtro. (4 pts.)
- c) Un esbozo de las respuestas de magnitud y fase para $\omega \in [-\pi, \pi]$ (4 pts.).
- d) Tipo de filtro de acuerdo al comportamiento en frecuencia. (1 pt.)
- e) Estabilidad y causalidad del filtro (si o no y porqué) (2 pts.)
- f) Respuesta al impulso $h(n)$ (5 pts.)
- g) Orden del filtro (1 pt.)
- h) Diagrama de bloques del filtro. (2 pts.)
- i) La respuesta $y(n)$ del filtro si la entrada es $x(n) = 2 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \pi\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$. (3 pts.)

Pregunta # 6

a (2pts)



$$h(n) = n \cdot 0,9^n u(n)$$

De la tabla de transformaciones:

$$h(n) \longleftrightarrow H(z) = \frac{0,9z^{-1}}{(1-0,9z^{-1})^2}$$

Evaluando $z = e^{j\omega}$

$$H(\omega) = H(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H(\omega) = \frac{0,9e^{-j\omega}}{(1-0,9e^{-j\omega})^2}$$

b (2pts)

$$H(\omega) = \frac{0,9e^{-j\omega}}{(1-0,9\cos(\omega) + j0,9\sin(\omega))^2}$$

$$|H(\omega)| = \frac{0,9}{\left[\sqrt{(1-0,9\cos(\omega))^2 + (0,9\sin(\omega))^2} \right]^2}$$

$$|H(\omega)| = \frac{0,9}{1 - 1,8\cos(\omega) + 0,81\cos^2(\omega) + 0,81\sin^2(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{0,9}{1,81 - 1,8\cos(\omega)}$$

2pts
Respuesta de
magnitud

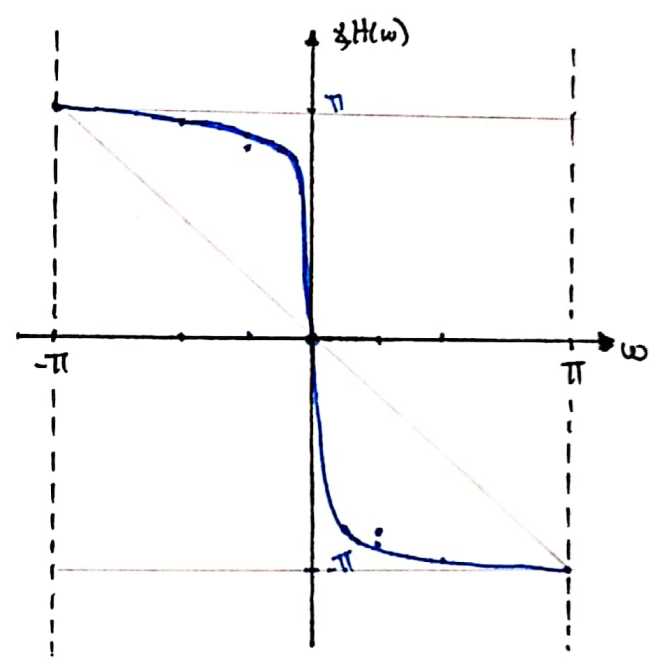
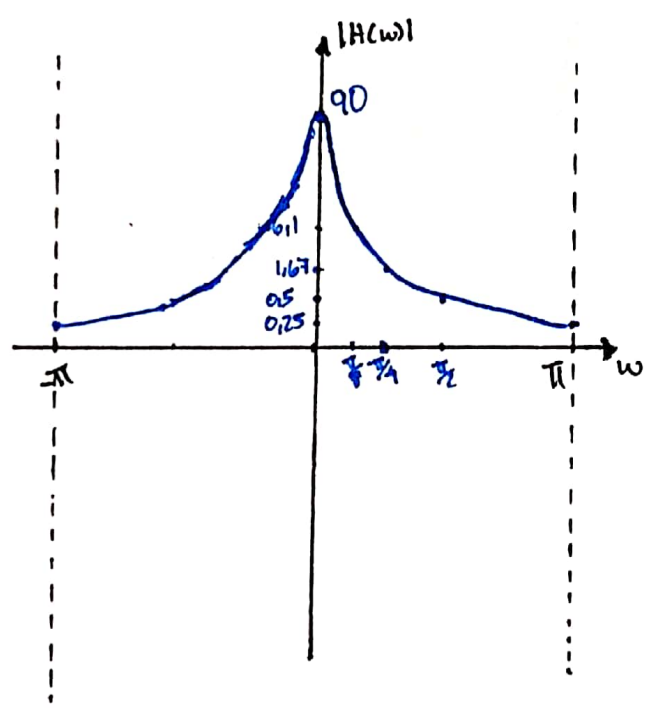
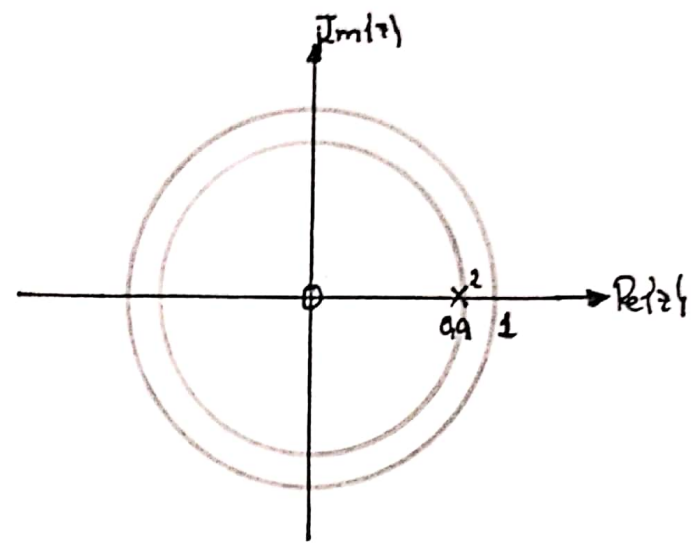
$$H(\omega) = \frac{0,9 e^{-j\omega}}{1 - 0,9 \cos(\omega) + j 0,9 \sin(\omega)}$$

$$\angle H(\omega) = -\omega - 2 \tan^{-1} \left(\frac{0,9 \sin(\omega)}{1 - 0,9 \cos(\omega)} \right)$$

Respuesta de fase 2pts

(c) (4pts)
Plano z

$$H(z) = \frac{0,9 z^{-1}}{(1 - 0,9 z^{-1})^2} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{0,9 z}{(z - 0,9)^2}$$



(d) (1pt) Según la respuesta de magnitud el filtro es pasabajas

(e) (2pt) • El filtro es causal ya que $h(n)=0, n < 0$.

• El filtro es estable ya que es causal y los polos del mismo se encuentran dentro del círculo unitario $|z|=1$.

(f) (2pts)
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.9z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})^2}$$

$$Y(z)[1-0.9z^{-1}]^2 = 0.9z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) \cdot [1 - 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2}] = 0.9z^{-1}X(z)$$

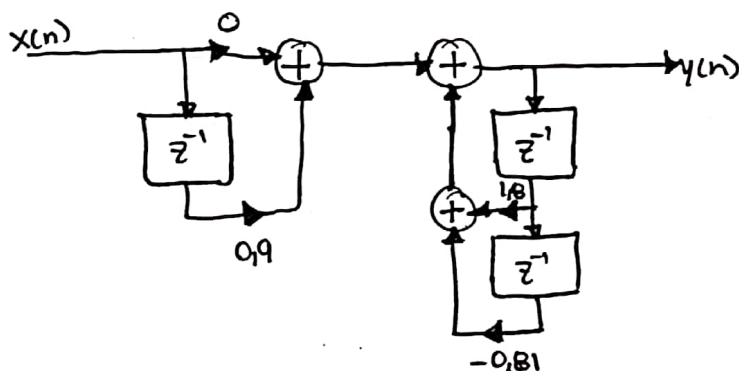
•

$$y(n) - 1.8y(n-1) + 0.81y(n-2) = 0.9x(n-1)$$

$$y(n) = 1.8y(n-1) - 0.81y(n-2) + 0.9x(n-1)$$

(g) (1pt) El filtro es de orden 2.

(h) 2pts



i) (3pts) $x(n) = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot n + \pi\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)$

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{10}$$

$$\omega_3 = \frac{\pi}{3}$$

$$H(\omega_1) = 90$$

$$H(\omega_2) = 9,17 \angle -2,5$$

$$H(\omega_3) = 0,99 \angle -2,96$$

$$y(n) = 2 \cdot 90 + \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot n + \pi - 2,5\right) \cdot 9,17 + 2 \cdot 0,99 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n - 2,96\right)$$

$$y(n) = 180 + 9,17 \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot n + 0,64\right) + 1,98 \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n - 2,96\right)$$

$$y(n) = 180 + 9,17 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot n + 36,67^\circ\right) + 1,98 \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n - 169,6^\circ\right)$$

15-2019

Pregunta #7

a

$$y(n) = -0,8y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

$$Y(z) = -0,8z^{-1}Y(z) + X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) \cdot [1 + 0,8z^{-1}] = X(z)[1 + z^{-1}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0,8z^{-1}}$$

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 + 0,8e^{-j\omega}}$$

$$H(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 + 0,8e^{-j\omega}}$$

b

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}})}{1 + 0,8[\cos(\omega) - j\sin(\omega)]} = \frac{1 + \cos(\omega) - j\sin(\omega)}{1 + 0,8\cos(\omega) - j0,8\sin(\omega)}$$

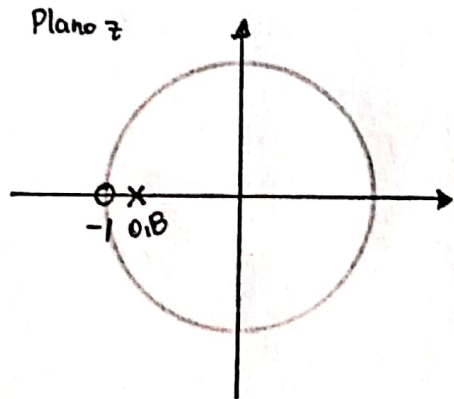
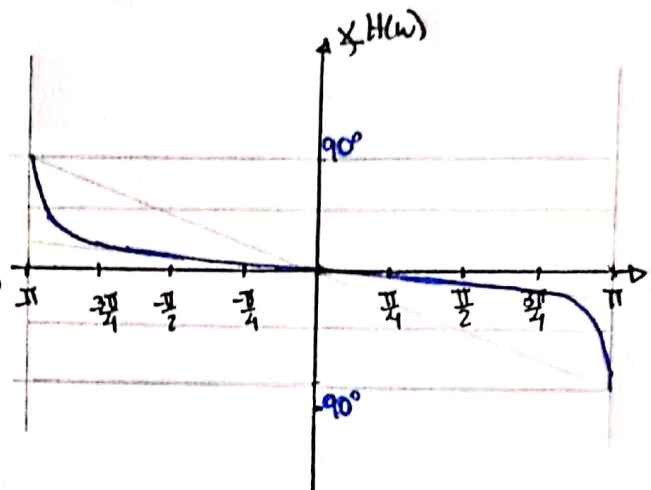
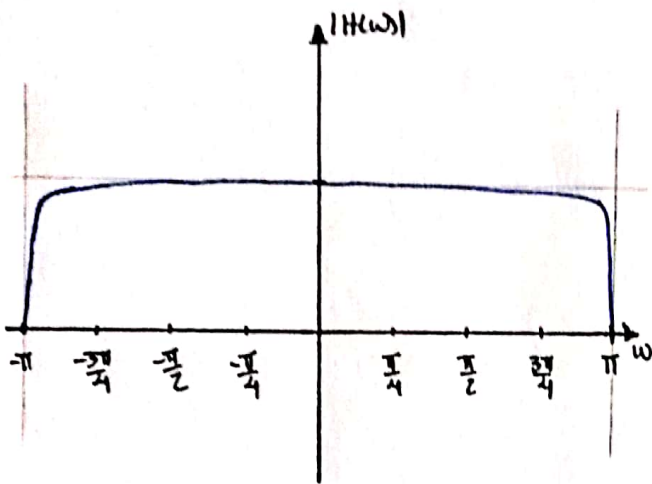
$$|H(\omega)|^2 = \frac{(1 + \cos(\omega))^2 + \sin^2(\omega)}{(1 + 0,8\cos(\omega))^2 + 0,8^2\sin^2(\omega)}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1 + 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)}{1 + 1,6\cos(\omega) + 0,64\cos^2(\omega) + 0,64\sin^2(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{2 + 2\cos(\omega)}{1,64 + 1,6\cos(\omega)}}$$

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\omega)}{1+\cos(\omega)}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{0,8 \sin(\omega)}{1+0,8 \cos(\omega)}\right)$$

c



ω	$ H(\omega) $	$\angle H(\omega)$	
0	1,111	0	0°
$\frac{\pi}{4}$	1,109	-0,04599	-2,64°
$\frac{\pi}{2}$	1,104	-0,11065	-6,34°
$\frac{3\pi}{4}$	1,073	-0,26207	-15,02°
π	0	0	0°
$\frac{7\pi}{8}$	0,97	-0,50941	-29,18°
$\frac{5\pi}{8}$	1,096	-0,16478	-9,44°

(d) Tiene un comportamiento de filtro muesca, ranura o notch.

- (e)
- 1- es causal ya que la salida depende de entradas actual y pasadas más salidas futuras únicamente.
 - 2- es estable ya que al ser causal, el polo está dentro del círculo unitario.

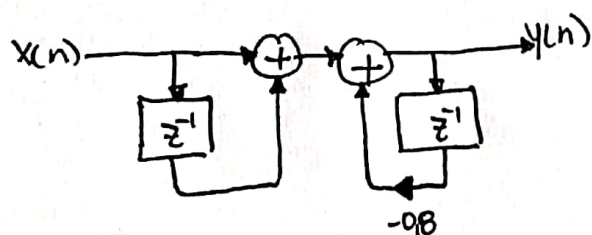
(f)

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.18z^{-1}} = \frac{1}{1 + 0.18z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 + 0.18z^{-1}}$$

$$h(n) = (0.8)^n u(n) + (0.18)^{n-1} u(n-1)$$

$$h(n) = \delta(n) + 0.2(0.8)^{n-1} u(n-1)$$

(g) El filtro es de orden 1



(i)

$$x(n) = 2 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \pi\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$\begin{aligned} \omega=0 &\rightarrow H(0) = 1.09 \\ \omega=\frac{4\pi}{5} &\rightarrow H\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1.05 \angle -0.3294 \\ \omega=\frac{\pi}{4} &\rightarrow H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.11 \angle -0.0499 \end{aligned}$$

$$y(n) = \frac{20}{9} + 1.05 \cos\left(\frac{4\pi}{5}n + 2.81\right) + 2.22 \sin\left(\frac{\pi}{4}n - 0.0499\right)$$