Transformada Z

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2019

Transformada z Bilateral

La transformada z

- La **transformada** z es a los sistemas discretos lo que la transformada de Laplace es a los sistemas continuos.
- Ambas representan herramientas para el análisis de propiedades de las señales, que en el dominio del tiempo sólo pueden ser evaluadas con una mayor complejidad.

Transformada z bilateral directa

La **transformada z directa** de una señal $x(n)$ se define como la serie de potencias:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Que mapea la señal $x(n)$ en el dominio del tiempo discreto n a la función $X(z)$ en el dominio z, lo que se denota como:

$$X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

$$x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(z) \quad \text{ó} \quad x(n) \overset{z}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(z)$$

Región de convergencia

- La transformada z es una serie infinita de potencias de z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- La serie converge únicamente para algunos valores de z.
- La **región de convergencia** (ROC) es el conjunto de valores de z donde $X(z)$ es finita.

Límites circulares de la ROC

Si se expresa z en su forma polar $z = re^{j\varphi}$, con $r = |z|$ y $\varphi = \angle z$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\varphi n}$$

Dentro de la ROC de $X(z)$, se debe cumplir que $|X(z)| < \infty$, por lo que:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\varphi n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}|$$

es decir, $|X(z)|$ es finita si y sólo si $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable.

Forma de la ROC

La suma anterior

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

puede reescribirse como:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^{n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

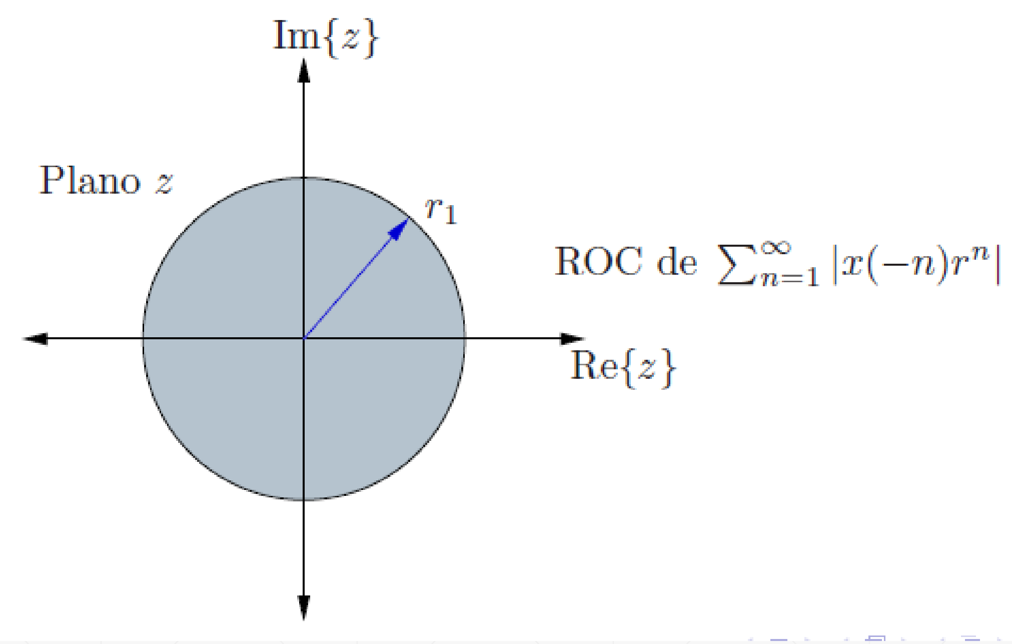
y ambas sumatorias deben converger si $|X(z)|$ debe ser finito.

Convergencia para señal izquierda

Para la primera suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n|$$

deben existir valores de r suficientemente pequeños para que $x(-n)r^n$ sea absolutamente sumable ($r < r_1$).

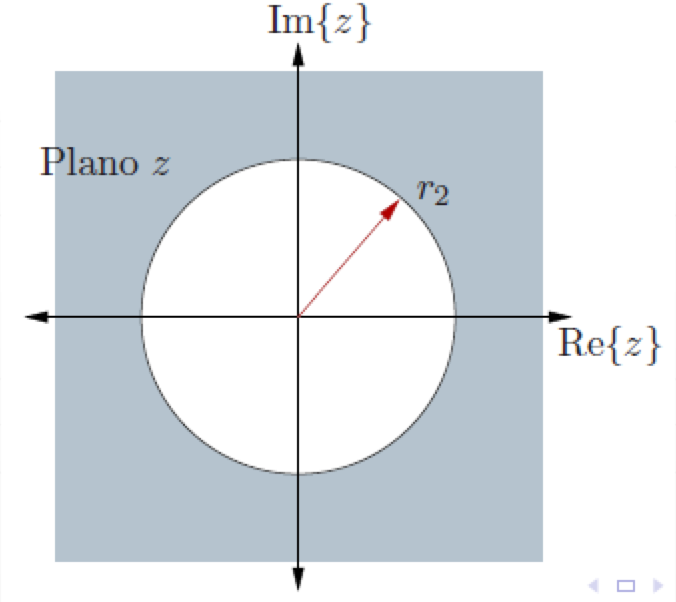


Convergencia para señal derecha

Para que la segunda suma

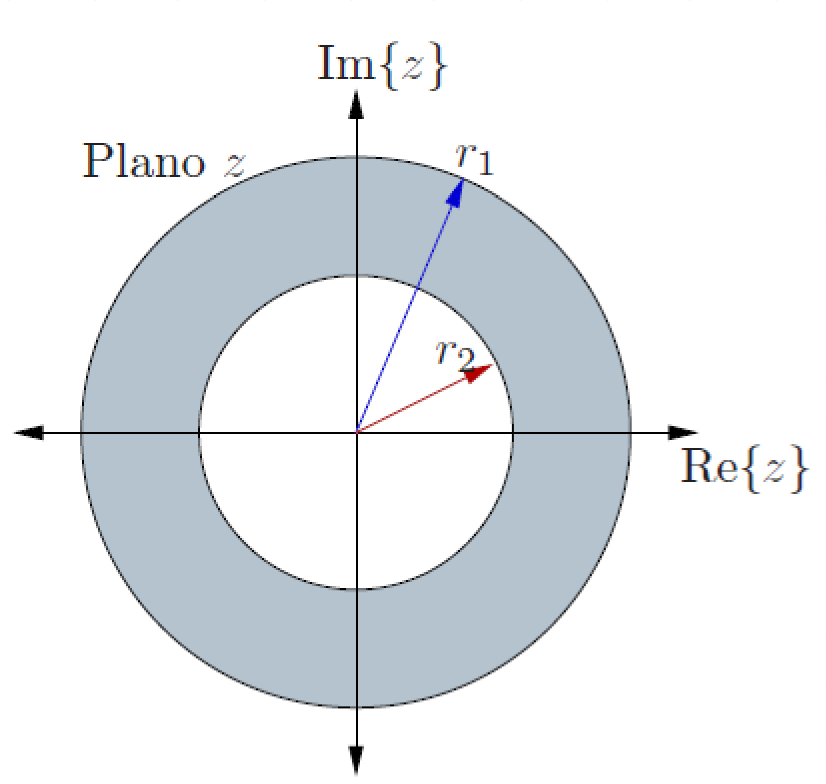
$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

Converja, se necesitan valores de r suficientemente grandes para que $x(n)r^{-n}$ sea absolutamente sumable. Por ello, la **ROC** serán los puntos fuera de una circunferencia $r > r_2$.

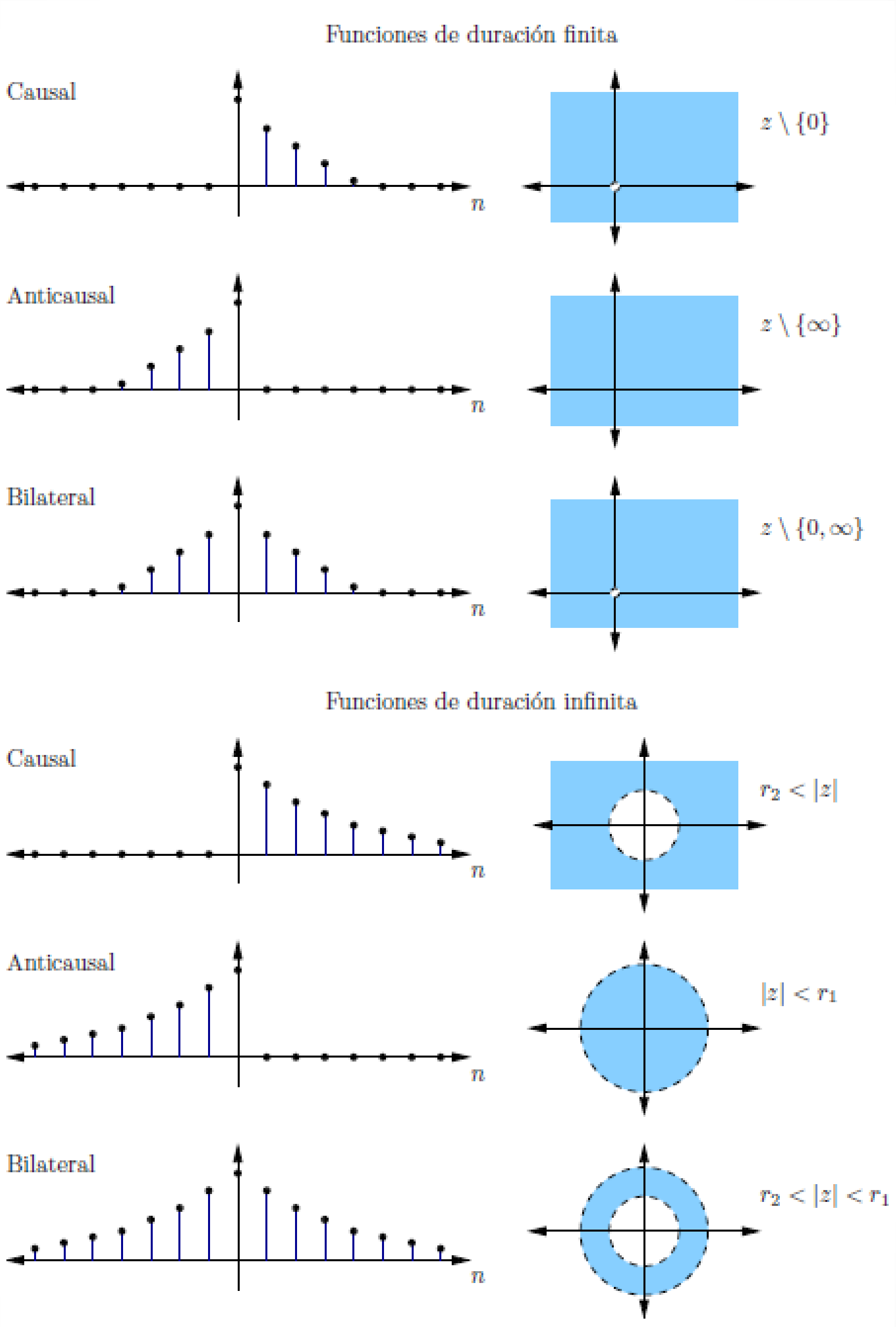


Convergencia de señal bilateral

Como ambas sumas deben converger la ROC de $X(z)$ es la región anular del plano z, $r_2 < \mathrm{r} < r_1$.



ROC de Transformada *z*



Propiedades de la transformada z bilateral

Propiedad	Dominio n	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$	$X(z)$	$R = \{z \mid r_2 < \|z\| < r_1\}$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	por lo menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$R \setminus \{0\}$ si $k > 0$ y $R \setminus \{\infty\}$ si $k < 0$
Escalado en z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
Reflexión en n	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
Parte real	$\mathrm{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}\left[X(z) + X^*(z^*)\right]$	Incluye R
Parte imaginaria	$\mathrm{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}\left[X(z) - X^*(z^*)\right]$	Incluye R
Derivación en z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Por lo menos $R_1 \cap R_2$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$	

Transformada z bilateral de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$-n(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > a$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > a$

Transformadas z racionales

Sistemas con ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes tienen transformada z racional:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Polos y ceros

- **Ceros**: $X(z) = 0$
- **Polos**: $X(z) \to \infty$ (serie de Laurent con parte principal finita) Polos $\notin$ ROC.
- Como $X(z)$ es racional, entonces

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Caso de funciones racionales

Asumiendo $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ y factorizando $b_0 z^{-M}$ y $a_0 z^{-N}$ para eliminar las potencias negativas se obtiene:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \cdot \frac{z^M + \frac{b_1}{b_0} z^{M-1} + \cdots + \frac{b_M}{b_0}}{z^N + \frac{a_1}{a_0} z^{N-1} + \cdots + \frac{a_N}{a_0}}$$

Caso de funciones racionales

Puesto que $N(z)$ y $D(z)$ son polinomios en z, y debido al teorema fundamental del álgebra, $X(z)$ se puede expresar como:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - z_N)}$$

$$= G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

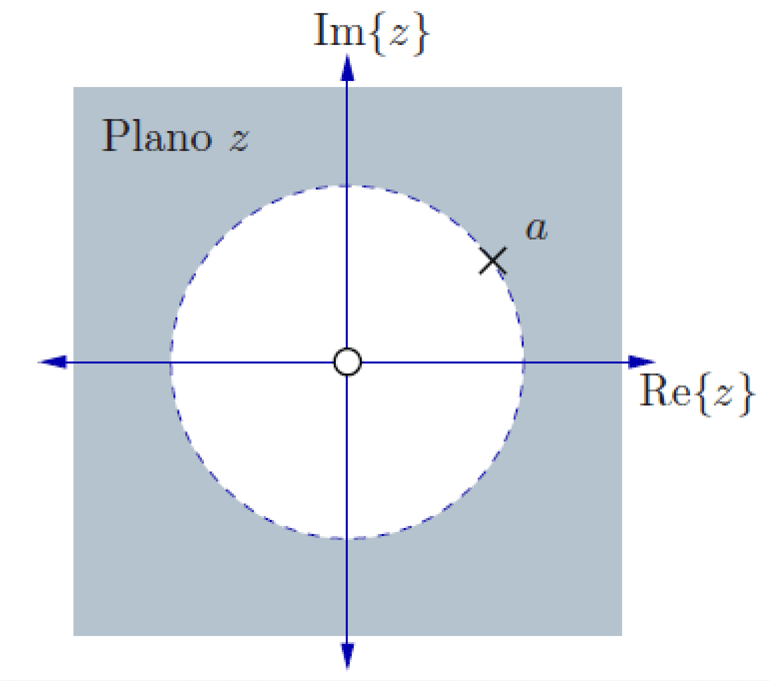
Hay polos y ceros en el origen dependiendo si $M > N$ o $M < N$.

Ejemplo: Diagrama de polos y ceros (1)

Determine el diagrama de polos y ceros de la señal $x(n) = a^n u(n)$ para a un número complejo.

Ejemplo: Diagrama de polos y ceros (2)

Solución: Con $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, ROC: $|z| > |a|$, se obtiene un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$.



Ejemplo: Transformada z de función finita (1)

Determine la transformada z de

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Con a real positivo

Ejemplo: Transformada z de función finita (2)

Solución:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n$$

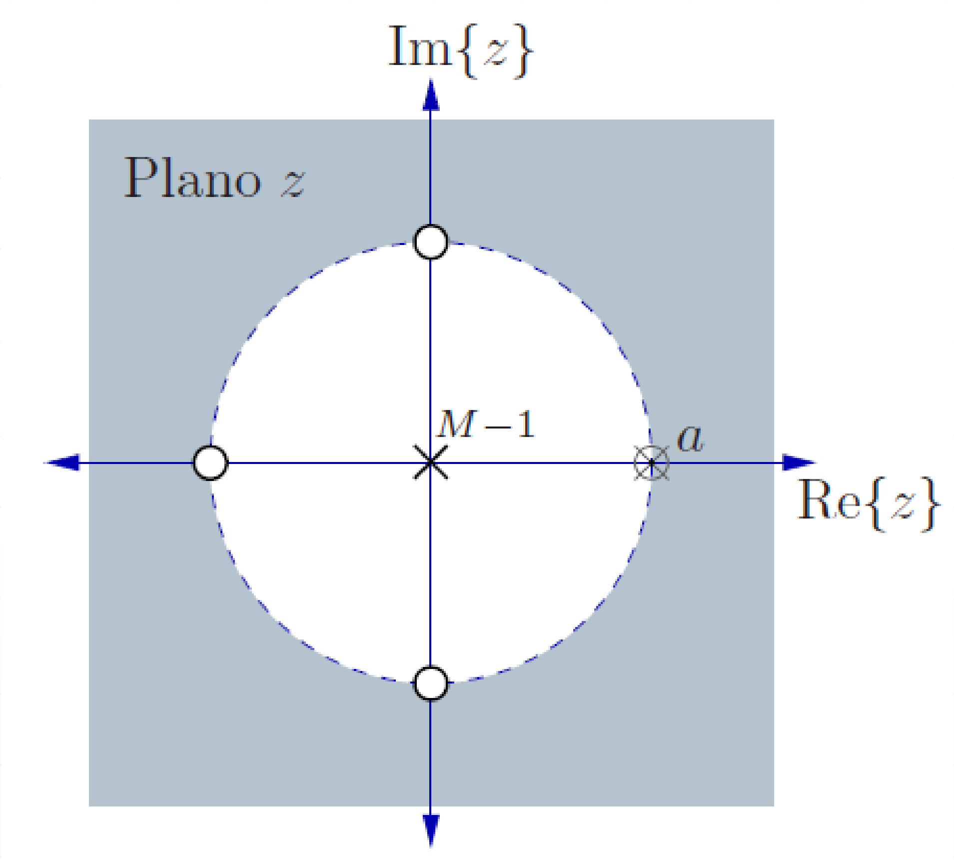
Puesto que $\sum_{n=0}^{M-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^M}{1-\alpha}$, entonces:

$$X(z) = \frac{1-(az^{-1})^M}{1-(az^{-1})} = \frac{1-\left(\frac{a}{z}\right)^M}{1-\frac{a}{z}} = \frac{\frac{z^M - a^M}{z^M}}{\frac{z-a}{z}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z-a)}$$

$z^M - a^M$ tiene M raíces $ae^{j2k\pi/M}$, $k = 0,1,\ldots,M-1$.

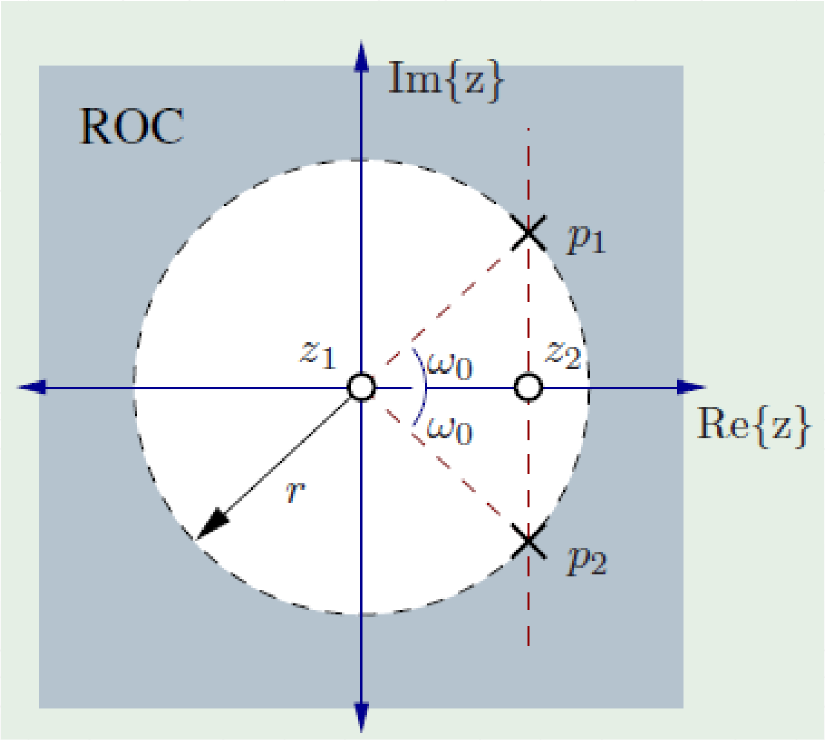
En resumen, $X(z)$ tiene un polo en $z = 0$ con multiplicidad $M-1$ y otro polo en $z = a$, que se cancela con el cero en a, y $M-1$ ceros distribuidos en un círculo de radio $|a|$.

Ejemplo: Transformada z de función finita (3)



Ejemplo: Diagrama de polos y ceros (1)

Determine la transformada z y la señal correspondiente al diagrama de polos y ceros de la siguiente figura:



Ejemplo: Diagrama de polos y ceros (2)

Solución:

La transformada tiene dos ceros y dos polos: $z_1 = 0,\ z_2 = r\cos(\omega_0)$, $p_1 = r\big(\cos(\omega_0) + j\text{sen}(\omega_0)\big) = re^{j\omega_0}$, $p_2 = r\big(\cos(\omega_0) - j\text{sen}(\omega_0)\big) = re^{-j\omega_0}$.

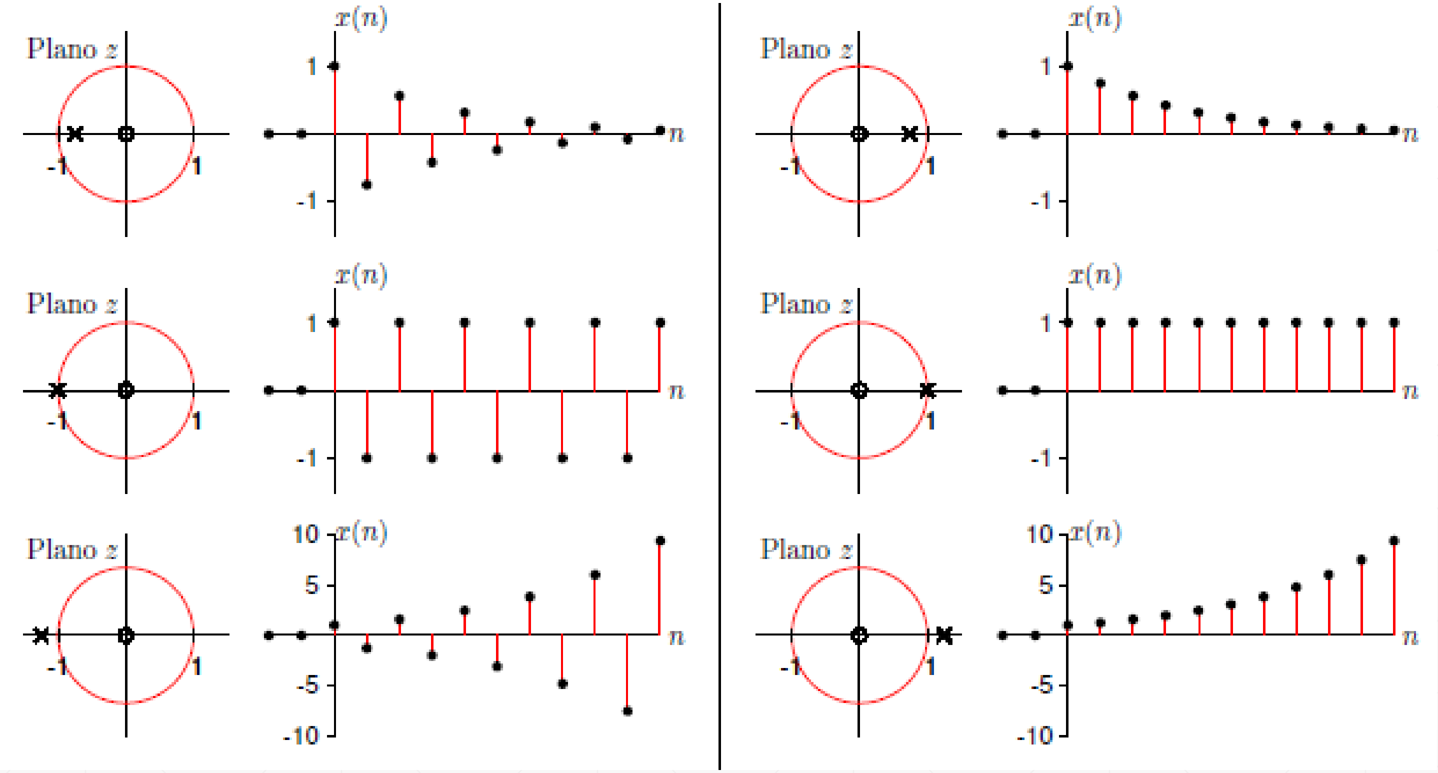
$$X(z) = G\,\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_1)} = G\,\frac{z(z - r\cos(\omega_0))}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})}$$

$$= G\,\frac{1 - rz^{-1}\cos(\omega_0)}{1 - 2r\cos(\omega_0)\,z^{-1} + r^2z^{-2}}, \qquad \text{ROC: } |z| > r$$

De la tabla se obtiene $x(n) = G(r^n\cos(\omega_0 n))u(n)$

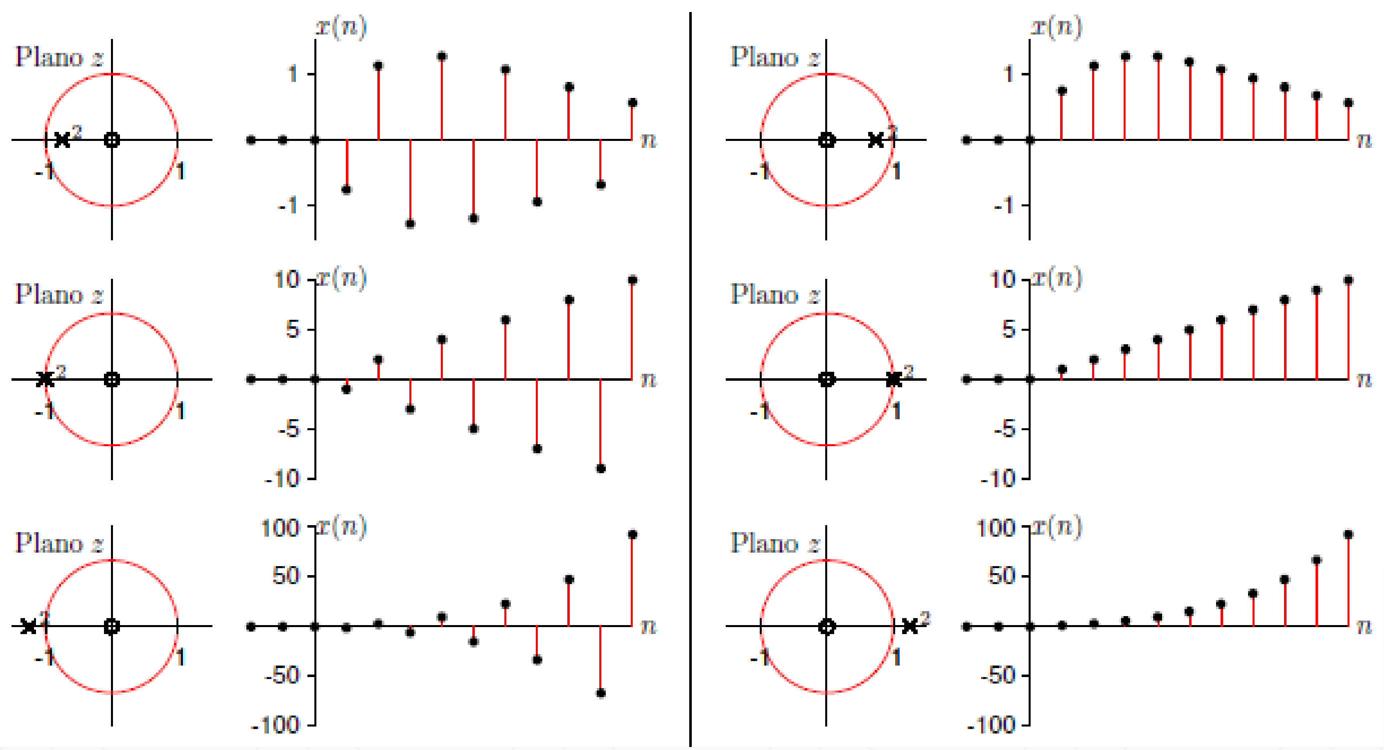
Señal real con un polo

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \text{ ROC: } |z| > |a| \bullet\!\!-\!\!\circ\; x(n) = a^n u(n)$$

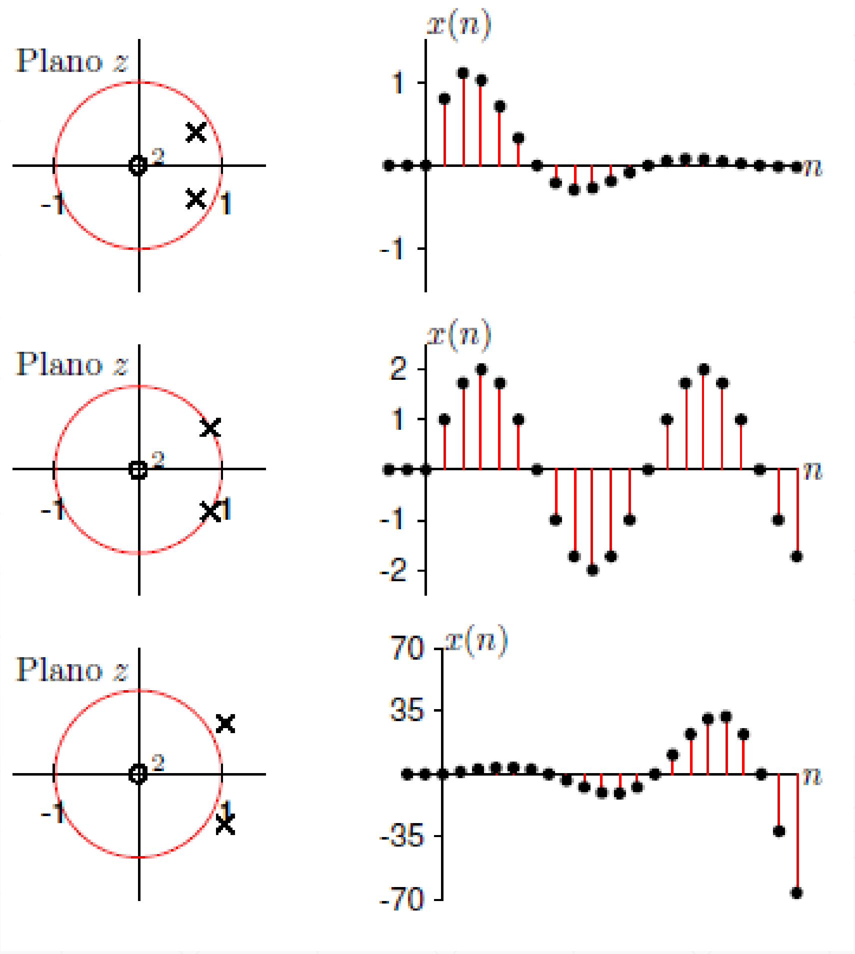


Comportamiento de polo de segundo orden

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az^{-1}}{z^{-2}(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \qquad x(n) = na^n u(n)$$



Efectos de par conjugado simple



Sistemas LTI en el dominio z

Respuesta de un sistema en el dominio z

La respuesta de un sistema ante la entrada $x(n)$ se calcula como

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$\updownarrow$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

de donde se deduce:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; h(n)$$

Ecuación de diferencias en dominio z

Con la ecuación de diferencias del sistema

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Se obtiene transformando al dominio z ambos lados:

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

$$= -Y(z) \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} + X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Respuesta de un Sistema en el dominio z

$$Y(z)\left(1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Que es **racional**.

Sistema todo ceros

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Si $a_k = 0$ para $k \in [1, N]$ (sistema no recursivo), entonces se obtiene un sistema **todo ceros** (excepto por M polos triviales)

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}$$

Un sistema de esta forma es **FIR** y se le denomina sistema de *media ponderada móvil*.

Sistema todo polos

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Si $b_k = 0$ para $k \in [1, M]$ se obtiene un sistema **todo polos**, recursivo e IIR:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}, \qquad a_0 = 1$$

Ejemplo: (1)

Determine la función de transferencia y la respuesta impulsional del sistema descrito por:

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + 2x(n)$$

Ejemplo: (2)

Solución:

$$Y(z) = \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + 2X(z)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = 2X(z)$$

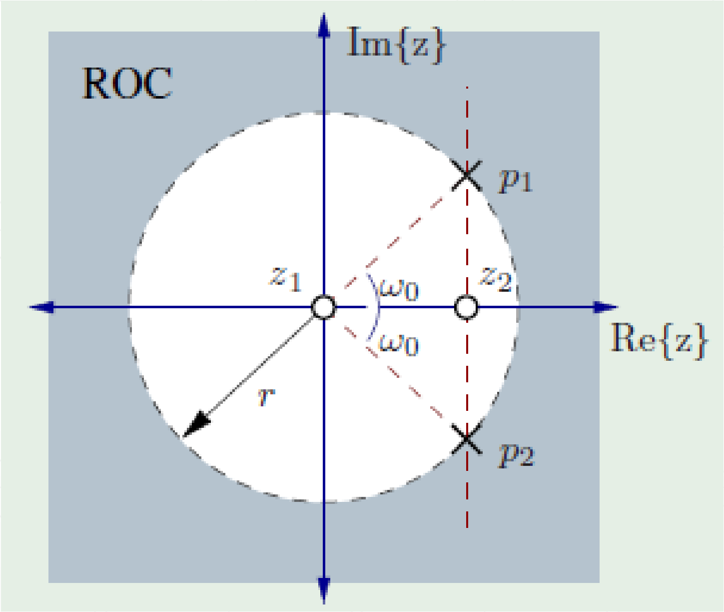
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z}{z - \frac{1}{2}}$$

Que tiene un polo en $z = \frac{1}{2}$ y un cero en $z = 0$. Utilizando la tabla de transformadas se obtiene:

$$H(z) \quad h(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$$

Ejemplo: (1)

Asúmase que un sistema se rige por el siguiente diagrama de polos y ceros:



Encuentre la ecuación de diferencias que lo describe.

Ejemplo: (2)

Solución:

En el diagrama se observa una región de convergencia externa al círculo de radio r, lo que implica que el sistema es causal. La función de transferencia equivalente al diagrama de polos y ceros corresponde a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G\,\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_1)}$$

$$= G \cdot \frac{1 - rz^{-1}\cos(\omega_0)}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \qquad \mathrm{ROC}\colon |z| > r$$

Ejemplo: (3)

Y por lo tanto:

$$Y(z)(1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}) = X(z)G(1 - rz^{-1}\cos(\omega_0))$$

$$\mathrm{Y}(z) - 2r\cos(\omega_0)Y(z)z^{-1} + r^2\mathrm{Y}(z) = GX(z) - Gr\cos(\omega_0)\,X(z)z^{-1}$$

$$y(n) - 2r\cos(\omega_0)\,y(n-1) + r^2y(n-2) = Gx(n) - Gr\cos(\omega_0)\,x(n-1)$$

$$y(n) = 2r\cos(\omega_0)\,y(n-1) - r^2y(n-2) + Gx(n) - Gr\cos(\omega_0)\,x(n-1)$$

Función de sistema racional

Sea un sistema dado por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Su función de transferencia $H(z)$ es

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Si el sistema está en reposo $y(-1) = y(-2) = \cdots = y(-N) = 0$ y se asume $X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)}$ entonces:

$$Y(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)}$$

Respuestas natural y forzada

Supóngase ahora que $A(z) = \prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})$, $Q(z) = \prod_{k=1}^{L}(1 - q_k z^{-1})$ y $p_k \neq q_k$, $\forall k, m$, y que ningún cero coincide con los polos, entonces se cumple que:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

y por lo tanto su transformada inversa será:

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n u(n)}_{\text{Respuesta natural}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k q_k^n u(n)}_{\text{Respuesta forzada}}$$

Respuestas natural y forzada

- La **respuesta natural** depende de los polos $\{p_k\}$ del sistema y es influenciada por la entrada $x(n)$ a través de los coeficientes $\{A_k\}$.
- La **respuesta forzada** depende de los polos de la entrada $\{q_k\}$ y es influenciada por el sistema a través de los coeficientes $\{Q_k\}$.

Respuesta infinita

Si $X(z)$ ó $H(z)$ tienen polos múltiples o polos en común, entonces la respuesta $Y(z)$ tendrá términos de la forma $\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(1-p_k z^{-1})^l}$, donde m es el orden del polo, lo que conducirá a términos en $y(n)$ de la forma $n^{l-1} p_k^n u(n)$.

Condiciones iniciales no nulas

Se require la transformada z unilateral:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^{M} b_k x(n-k)$$

$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$$

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n\right] +$$
$$\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}\left[X^+(z) + \underbrace{\sum_{n=1}^{k} x(-n)z^n}_{=\,0 \text{ por causalidad}}\right]$$

Condiciones iniciales no nulas

Puesto que $x(n)$ es causal, entonces $X^+(z) = X(z)$, se tiene:

$$Y^+(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X^+(z)\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}$$

De donde se despeja

$$Y^+(z) = \frac{\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= \frac{B(z)}{A(z)} X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)}$$

$$= H(z)X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)}$$

Respuestas de estado y entrada nulas

La salida del sistema consta entonces de dos partes, la respuesta de estado nulo

$$Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$$

Y la respueta de entrada nula que depende de las condiciones iniciales:

$$Y_{zi}^{+}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)}$$

Puesto que $Y^{+}(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}^{+}(z) \overset{z_u}{\bullet\!\!-\!\!\circ}\ \mathrm{y}(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}\,(n)$

Equivalencia de polos

$A(z)$ aporta polos $\{p_k\}$ de $Y_{zi}^{+}(z)$. La respuesta a entrada nula es:

$$y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k p_k^n u(n)$$

Lo que puede añadirse a la respuesta natural y combinarse para dar:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k' p_k^n u(n) + \sum_{k=1L} Q_k q_k^n u(n)\,, \qquad A_k' = A_k + D_k$$

En resumen, las condiciones iniciales alteran la respuesta natural del sistema modificando los factores de escala $\{A_k\}$.

No se introducen nuevos polos ni se modifica la respuesta forzada.

Ejemplo: Respuesta ante escalón con IRC (1)

Determine la respuesta al escalón $u(n)$ del sistema dado por

$$y(n) = 0{,}9y(n-1) - 0{,}81y(n-2) + x(n)$$

Para las condiciones iniciales:

1. $y(-1) = y(-2) = 0$
2. $y(-1) = y(-2) = 1$

Ejemplo: Respuesta ante escalón con IRC (2)

Solución: La función de transferencia está dada por:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}9z^{-1} + 0{,}81z^{-2}}$$

Cuyos polos son complejos conjugados: $p_{1,2} = 0{,}9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$

$$x(n) = u(n) \qquad \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Con lo que se obtiene directamente:

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{\left(1 - 0{,}9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1 - 0{,}9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

$$= \frac{-0{,}049 - j0{,}542}{1 - 0{,}9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{-0{,}049 + j0{,}542}{1 - 0{,}9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{1{,}099}{1 - z^{-1}}$$

Ejemplo: Respuesta ante escalón con IRC (3)

Por lo que:

$$y_{zs}(n) = \left[1{,}099 + 1{,}088(0{,}9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 95{,}2^o\right)\right] u(n)$$

Así para el caso 1, $y(n) = y_{zs}(n)$.

Ejemplo: Respuesta ante escalón con IRC (4)

Para el caso 2, con las condiciones iniciales se obtiene:

$$N_0(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^n$$

$$= -(a_1 z^{-1}\{y(-1)z\} + a_2 z^{-2}\{y(-1)z + y(-2)z^2\})$$

$$= -(a_1 y(-1) + a_2 y(-1) z^{-1} + a_2 y(-2))$$

$$= -(-0{,}9 + 0{,}81 + 0{,}81 z^{-1})$$

$$= 0{,}09 - 0{,}81 z^{-1}$$

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0{,}09 - 0{,}81 z^{-1}}{1 - 0{,}9 z^{-1} + 0{,}81 z^{-2}}$$

$$= \frac{0{,}045 + j0{,}494}{1 - 0{,}9 e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1}} + \frac{0{,}045 - j0{,}494}{1 - 0{,}9 e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1}}$$

Ejemplo: Respuesta ante escalón con IRC (5)

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$$

$$Y(z) = \frac{1{,}099}{1 - z^{-1}} + \frac{-0{,}00445 - j0{,}0488}{1 - 0{,}9ze^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{-0{,}00445 + j0{,}0488}{1 - 0{,}9ze^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}$$

Que equivale a:

$$y(n) = 1{,}099u(n) + 0{,}096(0{,}9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 95{,}21^o\right)u(n)$$

Respuesta transitoria y en régimen permanente

- Si todos los polos $\{p_k\}$ cumplen $|p_k| < 1$ entonces la respuesta natural:

$$y_{nr}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k p_k^n u(n)$$

Decae si n tiende a infinito, y se le denomina **respuesta transitoria**.

- Su tasa de decaimiento dependerá de qué tan cerca estén los polos de la circunferencia $|z| = 1$.
- Si $\{q_k\}$ son los polos de la respuesta forzada con $|q_k| < 1 \implies$ respuesta a entrada decae.
- Si entrada sinusoidal $\implies$ polos sobre $|z| = 1 \implies$ respuesta forzada también tiene esos polos y por tanto es sinusoidal (**respuesta de estado permanente**)

Causalidad y Estabilidad

Un sistema es causal si $h(n) = 0$ para $n < 0$, lo que implica que su ROC es el exterior de una circunferencia.

Estabilidad

El sistema es estable si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Lo que ocurre sólo si $|z| = 1$ está dentro de la ROC, puesto que:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

Y evaluando en $|z| = 1$

$$|H(z)|_{|z|=1} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

Cancelación polo-cero

- Efectos de polo cancelables con ceros del sistema o de la entrada.
- Estabilizaciones con cancelación de polos con ceros **de la entrada** deben evitarse: posicionamiento de ceros y polos depende de presición numérica.

Polos sobre círculo unitario

Un sistema con polos en la circunferencia unitaria es **inestable** pues basta encontrar una entrada con un polo en el mismo sitio para producer una salida no acotada.

Ejemplo: Sistema Inestable (1)

Determine la respuesta al escalón de:

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

Ejemplo: Sistema Inestable (2)

Solución:

Con $H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ y $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ se obtiene:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(n) = (n+1)u(n+1)$$

Que contiene un polo doble en $z = 1$, y equivale a una rampa no acotada.

Esto se explica por el hecho de que si $Y(z)$ contiene polos múltiples, entonces $y(n)$ tendrá términos de la forma:

$$A_k n^b (p_k)^n u(n)$$

Que son acotadas sólo si $|p_k| < 1$.

Estabilidad de sistemas de segundo orden

Los sistemas de segundo orden (con dos polos) se utilizan como bloque básico para la construcción de sistemas de mayor orden, y por ello requieren de un poco de atención.

Considérese entonces el sistema:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

Con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Su función de transferencia es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$= \frac{b_0 z^2}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{b_0 z^2}{z^2 - (p_1 + p_2) z + p_1 p_2}$$

Este sistema tiene dos ceros en el origen y dos polos en

$$p_{1,2} = \frac{-a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}}$$

Estabilidad de sistemas de segundo orden

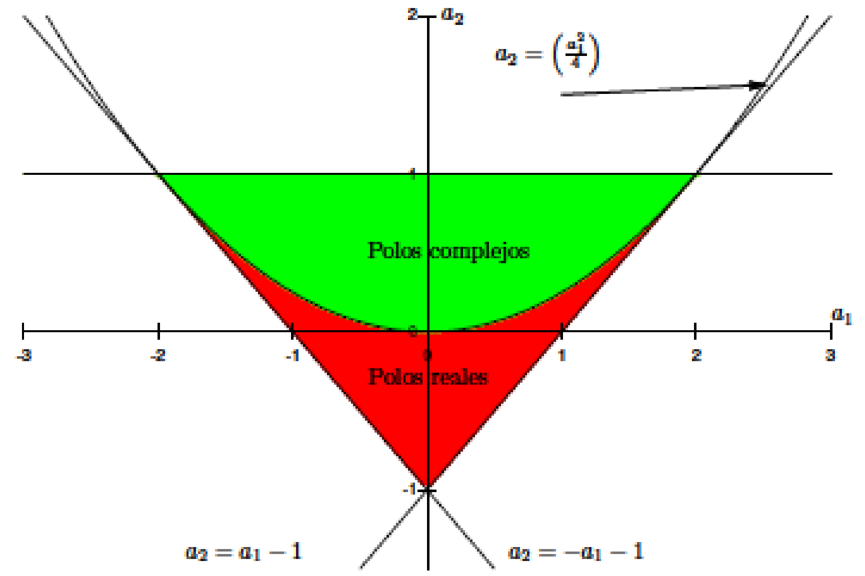
El sistema es estable BIBO si $|p_{1,2}| < 1$. Puesto que se cumple que $a_1 = -(p_1 + p_2)$ y $a_2 = p_1 p_2$, se debe cumplir que

$$|a_2| = |p_1 p_2| = |p_1||p_2| < 1$$

Y

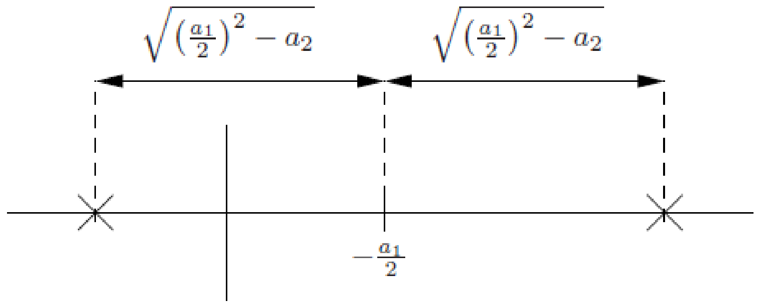
$$|a_1| < 1 + a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 > |a_1| - 1$$

En el plano a_1, a_2 estas inecuaciones delimitan una región triangular.



Estabilidad de sistemas de segundo orden: Polos reales

Se sabe $|p_{1,2}| < 1$. Asúmase $p_{1,2} \in \mathbb{R}$, es decir $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \geq a_2$



Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$1 - \frac{|a_1|}{2} > \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados y considerando que $a_1 \in \mathbb{R}$:

$$1 - |a_1| + \left(\frac{|a_1|}{2}\right)^2 > \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + a_2 > |a_1|$$

Estabilidad de sistemas de segundo orden: Polos complejos

En caso de que $p_{1,2}$ sean complejos (nótese que a_2 es positivo puesto que debe ser mayor que $(a_1/2)^2$), entonces:

$$|p_{1,2}|^2 = \left| -\frac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \right|^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = a_2$$

Y por tanto, para que $|p_{1,2}| < 1$, entonces $0 < a_2 < 1$, lo que confirma la anterior condición $|a_2| < 1$.

Funciones de transferencia de segundo orden

El sistema:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

Tiene función de transferencia

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

Funciones de transferencia de segundo orden

Polos	Condición	$H(z)$	$h(n)$
Reales y distintos	$a_1^2 > 4a_2$	$\frac{b_0}{p_1-p_2}\left(\frac{p_1}{1-p_1 z^{-1}} - \frac{p_2}{1-p_2 z^{-1}}\right)$	$\frac{b_0}{p_1-p_2}\left(p_1^{n+1} - p_2^{n+1}\right) u(n)$
Reales e iguales	$a_1^2 = 4a_2$	$\frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}$	$b_0(n+1)p^n u(n)$
Complejos conjugados	$a_1^2 < 4a_2$	$\frac{b_0}{j2\,\text{sen}\,\omega_0}\left(\frac{e^{j\omega_0}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{e^{-j\omega_0}}{1+re^{-j\omega_0}z^{-1}}\right)$	$\frac{b_0 r^n}{\text{sen}\,\omega_0}\,\text{sen}[(n+1)\omega_0]u(n)$

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Procesamiento Digital de Señales, 2011. Instituto Tecnológico de Costa Rica.