Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL-5805 Procesamiento Digital de Señales
Prof.: Ing. José Miguel Barboza Retana, MSc.

I Semestre 2019

Solución

Examen Corto #5. (38 puntos)

Nombre: José Miguel Barboza Retana Carné: —

1. (8 puntos) Calcule la DFT de la siguiente secuencia

$$a(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 1 \right\}$$

2. (20 puntos) Sea un filtro FIR con respuesta al impulso dada por la secuencia $h(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, -2, 3, -1, 0, -3, 1, 2, 0 \right\}$. Si por el filtro se hace pasar la señal $x(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{2}, 1 \right\}$, determine la respuesta del sistema $y(n)$ utilizando DFT e IDFT. *Sugerencia: Puede aplicar la convolución lineal para verificar si su respuesta es correcta.*

3. (10 puntos) Considere las secuencias

$$x_1(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4 \right\} \qquad x_2(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 0, 0 \right\} \qquad s(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0, 0 \right\}$$

y sus DFT de cinco puntos.

a. (5 puntos) Determine una secuencia $y(n)$ de modo que $Y(k) = X_1(k)X_2(k)$.
b. (5 puntos) ¿Existe una secuencia $x_3(n)$ tal que $S(k) = X_1(k)X_3(k)$? Si su respuesta es que sí, calcule dicha señal. Si su respuesta es que no, justifique la razón.

Examen corto #5 - DSP

1S-2019

Pregunta #1 (8pts)

$a(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 1\} \rightarrow L = 8$

$N = 8 \qquad W_8 = e^{-j\frac{2\pi}{8}}$

$A(k) = \underline{W_8}\, \underline{a}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) & -j & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) & j & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) & j & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) & -j & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) & -j & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) & j & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) & j & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) & -j & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -\sqrt{2} \\ -4 \\ \sqrt{2} \\ -2 \\ \sqrt{2} \\ -4 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A(k) = [10, -\sqrt{2}, -4, \sqrt{2}, -2, \sqrt{2}, -4, -\sqrt{2}]}$$

Examen corto #5 - DSP
1S-2019

Pregunta #2 (20pts)

$h(n)=\{\underbrace{\underset{\uparrow}{1},-2,3}_{①},\underbrace{-1,0,-3}_{②},\underbrace{1,2,0}_{③}\}$ $x(n)=\{\underset{\uparrow}{2},1\}$

$M=8$
$L=2$

$N \geq 8+2-1 \geq 9 \rightarrow$ muy grande.

Utilizando método de solapamiento y almacenamiento

$N=4=L+M-1 = 2-1+M = 1+M \longrightarrow M=3$ (tamaño de bloques)

Bloques de 3 muestras

3pts

$x(n)=\{2,1,0,0\} \overset{4}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(k)$ 1pt

$h_1(n)=\{0,1,-2,3\} \overset{4}{\circ\!\!-\!\!\bullet} H_1(k)$ 1pt

$h_2(n)=\{3,-1,0,-3\} \circ\!\!-\!\!\bullet H_2(k)$ 1pt

$h_3(n)=\{-3,1,2,0\} \circ\!\!-\!\!\bullet H_3(k)$ 1pt

$$W_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}$$

$$X(k)=\underline{W_4}\cdot\underline{x}(n)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2-j\\1\\2+j\end{bmatrix}$$ 1pt

$$H_1(k)=\underline{W_4}\cdot\underline{h_1}(n)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2+2j\\-6\\2-2j\end{bmatrix}$$ 1pt

Examen corto #5 - DSP
1S-2019

$$H_2(K) = \underline{W_4} \cdot \underline{h_2}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3-2j \\ 7 \\ 3+2j \end{bmatrix}$$ 1pt

$$H_3(K) = \underline{W_4}\, \underline{h_3}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5-j \\ -2 \\ -5+j \end{bmatrix}$$ 1pt

$Y_1(K) = H_1(K).X(K) = [6, 6+2j, -6, 6-2j]^T$ 1pt

$Y_2(K) = H_2(K)X(K) = [-3, 4-7j, 7, 4+j7]^T$ 1pt

$Y_3(K) = H_3(K)X(K) = [0, -11+3j, -2, -11-3j]^T$ 1pt

$$\underline{W_4}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

$$y_1(n) = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 6+2j \\ -6 \\ 6-2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ 1pt

$$y_2(n) = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4-7j \\ 7 \\ 4+7j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$ 1pt

Examen corto #5 - DSP
1S-2019

$$y_3(n) = \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -11+3j \\ -2 \\ -11-3j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$ 1pt

$\{\cancel{3}, 2, -3, 4\}$

$\{\cancel{8}, 1, -1, -6\}$

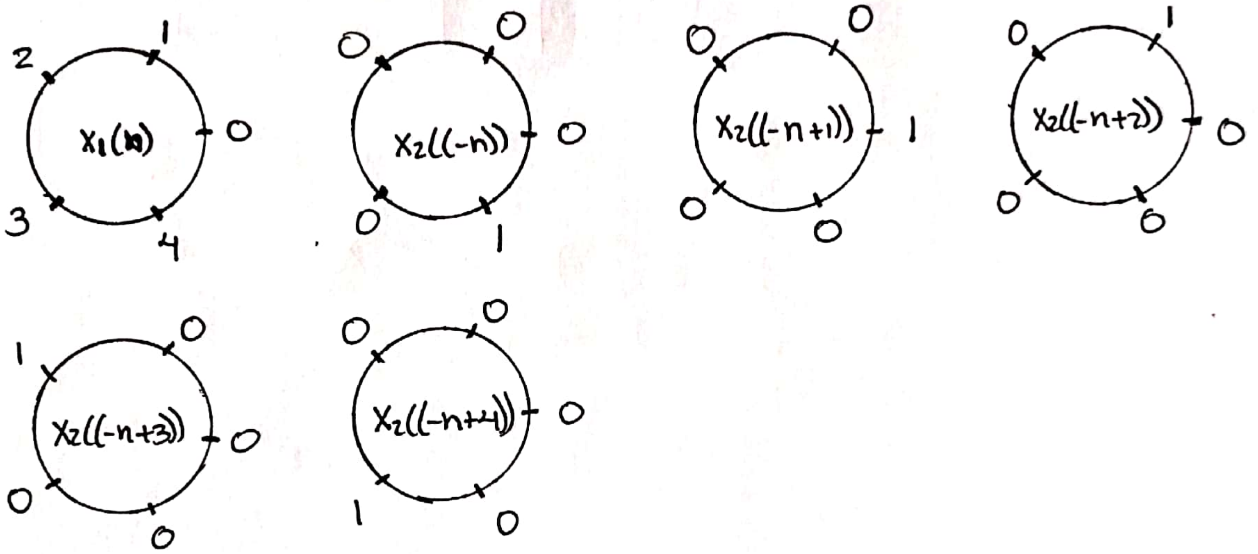
$\{-\cancel{6}, -1, 5, 2\}$

$$\boxed{y(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, -3, 4, 1, -1, -6, -1, 5, 2\}}$$ 3pts

Examen corto #5 - DSP
IS-2019

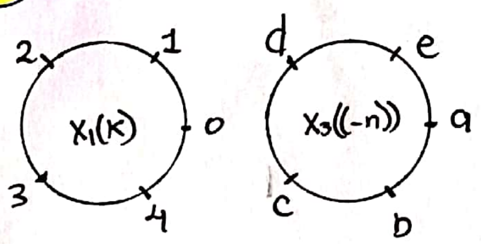
Pregunta #3 10pts

(a) 5pts $y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$ $\qquad x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$ $\qquad x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 0, 0\}$



$$\boxed{y(n) = \{\underset{\uparrow}{4}, 0, 1, 2, 3\}}$$

(b) 5pts $s(n) = x_1(n) \circledast x_3(n)$ $\qquad x_3(n) = \{a, b, c, d, e\}$



$$1 = a \cdot 0 + e + 2d + 3c + 4b$$
$$0 = 0b + a + 2e + 3d + 4c$$
$$0 = 0 \cdot c + b + 2a + 3e + 4d$$
$$0 = 0d + c + 2b + 3a + 4e$$
$$0 = 0e + d + 2c + 3b + 4a$$

$s(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0, 0\}$

$\boxed{\text{Si existe una secuencia } x_3(n)}$

Examen Corto #5 - DSP
1S-2019

Tomando la última ecuación

$\rightarrow d = -2c - 3b - 4a$ (evaluar en todas las demás)

$A \rightarrow \quad 1 = e + \cancel{+2(-2c-3b-4a)} \cancel{+3c} + \cancel{4b}$

$1 = -8a - 2b - c + e$

$B \rightarrow \quad 0 = \cancel{a} + 2e + 3(\cancel{-2c-3b-4a}) \cancel{+4e}$

$0 = -11a - 9b - 2c + 2e$

$C \rightarrow \quad 0 = \cancel{b} \cancel{+2a} + 3e + 4(\cancel{-2c-3b-4a})$

$0 = -14a - 11b - 8c + 3e$

$D \rightarrow \quad 0 = c + 2b + 3a + 4e$

Armando el nuevo sistema de 4 ecuaciones

$1 = -8a - 2b - c + e$ $\qquad a = -0{,}18$

$0 = -11a - 9b - 2c + 2e$ $\qquad b = 0{,}22$

$0 = -14a - 11b - 8c + 3e$ $\qquad c = 0{,}02$

$0 = 3a + 2b + c + 4e$ $\qquad d = 0{,}02$

$e = 0{,}02$

$$\boxed{x_3(n) = \{ \underset{\uparrow}{-0{,}18}, 0{,}22, 0.02, 0.02, 0.02 \}}$$