

Transformada Discreta de Fourier

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2019

Transformada Discreta de Fourier

Señales discretas aperiódicas $\circ \text{---} \bullet$ espectro periódico continuo.

Transformada Discreta de Fourier (TDF o DFT)

Señales discretas aperiódicas $\circ \text{---} \bullet$ espectro periódico discreto

DFT permite utilizar medios digitales para procesamiento espectral

Teorema del muestreo en la frecuencia

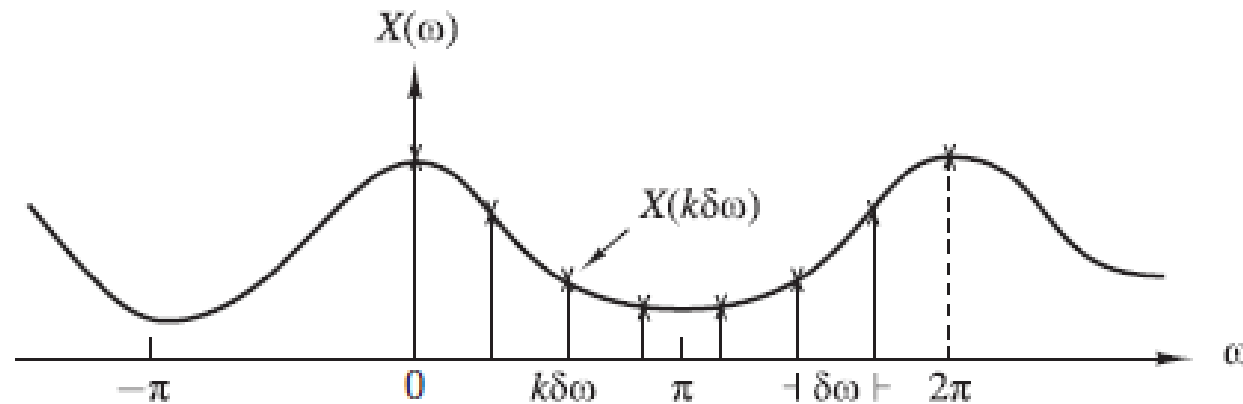
Muestreo en el dominio de la frecuencia (1)

Toda señal aperiódica $x(n)$ de energía finita tiene un espectro **continuo**.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (2)

Suponga que $X(j\omega)$ se muestrea periódicamente en frecuencias espaciadas $\delta\omega$ radianes entre muestras sucesivas. Como $X(j\omega)$ es periódica de periodo 2π , solo son necesarias las muestras que se encuentran dentro del rango de frecuencias fundamental. Por comodidad, se toma N muestras equidistantes en el intervalo $0 \leq \omega \leq 2\pi$ con un espaciado $\delta\omega = 2\pi/N$.



Muestreo en el dominio de la frecuencia (3)

Por lo tanto:

$$X(\omega) \Big|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{N}} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

La sumatoria anterior puede subdividirse en un número infinito de sumas parciales donde cada suma consta de N términos. Así:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} + \dots \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \end{aligned}$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (4)

Realizando un cambio de variable $n = n - lN$ e intercambiando el orden de las sumatorias:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n - lN) e^{-j\frac{2\pi k}{N}(n-lN)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} e^{j\frac{2\pi k}{N}lN} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \right] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_p(n) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \end{aligned}$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (5)

La señal $x_p(n)$ obtenida de la repetición periódica de $x(n)$ cada N muestras, es claramente periódica de periodo fundamental N .

En consecuencia puede expandirse en serie de Fourier como:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Con coeficientes de Fourier dados por:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (6)

Comparando la ecuación de los coeficientes de la serie con el espectro muestreado:

$$X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \right] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Se tiene que:

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (7)

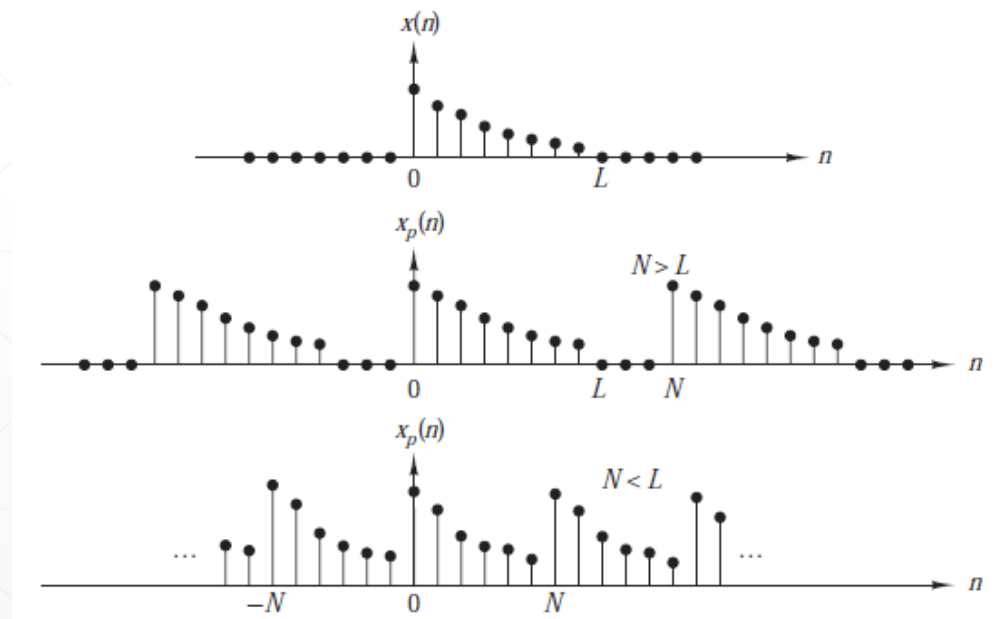
Por lo tanto:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

La relación anterior proporciona la reconstrucción de la señal periódica $x_p(n)$ a partir de las muestras del espectro $X(\omega)$. Sin embargo, no implica que podamos recuperar $X(\omega)$ o $x(n)$ a partir de las muestras. Para conseguir esto tenemos que considerar la relación entre $x_p(n)$ y $x(n)$.

Muestreo en el dominio de la frecuencia (8)

Dado que $x_p(n)$ es una extensión periódica de $x(n)$, es claro que $x(n)$ puede recuperarse a partir de $x_p(n)$ si no existe aliasing en el dominio del tiempo, es decir, si $x(n)$ está limitada en el tiempo por un periodo menor que N de $x_p(n)$.



Muestreo en el dominio de la frecuencia (9)

Cuando $N \gg L$, $x(n) = x_p(n)$, $0 \leq n \leq N - 1$.

De modo que $x(n)$ se puede recuperar a partir de $x_p(n)$ sin ambigüedades. Por el contrario, si $N < L$ no es posible recuperar $x(n)$ a partir de su extensión periódica debido al aliasing en el dominio del tiempo. Por tanto se concluye que el espectro de una señal discreta aperiódica con duración finita L puede recuperarse de forma exacta a partir de sus muestras en las frecuencias $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, si $N \gg L$. El procedimiento consiste en calcular $x_p(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$:

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (10)

Como en el caso de señales continuas en el tiempo, es posible expresar el espectro $X(\omega)$ directamente en función de sus muestras $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Para obtener esta fórmula de interpolación para $X(\omega)$ se supone que $N \geq L$ y se utiliza:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Dado que $x(n) = x_p(n)$ para $0 \leq n \leq N - 1$:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (11)

Al tomar $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ y sustituir $x(n)$ según la ecuación anterior se tiene:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \right] e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)n} \right]$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (12)

Si se define:

$$P(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{N} \frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}} e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}} e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{\omega(N-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Así se tiene que:

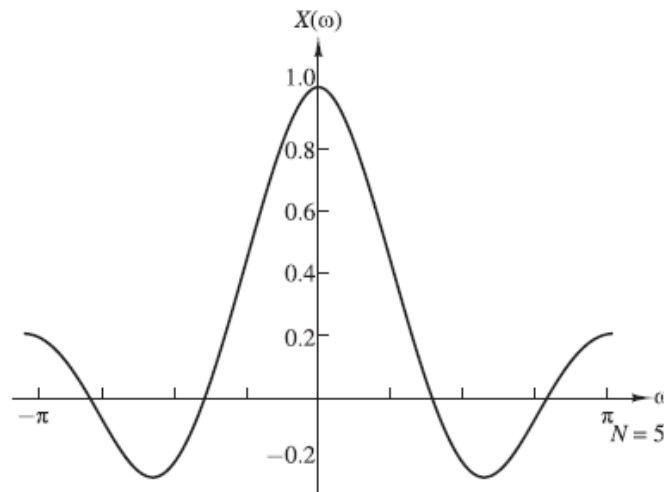
$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) P\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad N \geq L$$

Muestreo en el dominio de la frecuencia (13)

El desplazamiento de fase de $P(\omega)$ refleja el hecho de que la señal $x(n)$ es una secuencia causal de duración finita y longitud N .

$P(\omega)$ tiene la propiedad: $P\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$

La función $\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ para $N = 5$ es similar a:



Ejemplo: Muestreo en frecuencia

(1)

Considere la señal $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$. Si el espectro se muestrea a las frecuencias $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Determine los espectros reconstruidos para $a = 0,8$ cuando $N = 5$ y $N = 50$.

Ejemplo: Muestreo en frecuencia

(2)

La transformada de Fourier de la secuencia es:

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Ahora se muestrea $X(\omega)$ en N frecuencias equidistantes $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Así:

$$X(\omega_k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{2\pi k}{N}}}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Ejemplo: Muestreo en frecuencia

(3)

La secuencia periódica $x_p(n)$, corresponde a las muestras de frecuencia $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ puede obtenerse como:

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) = \sum_{l=-\infty}^0 a^{n-lN}$$

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^0 a^n a^{-lN} = a^n \sum_{l=0}^{\infty} a^{lN}$$

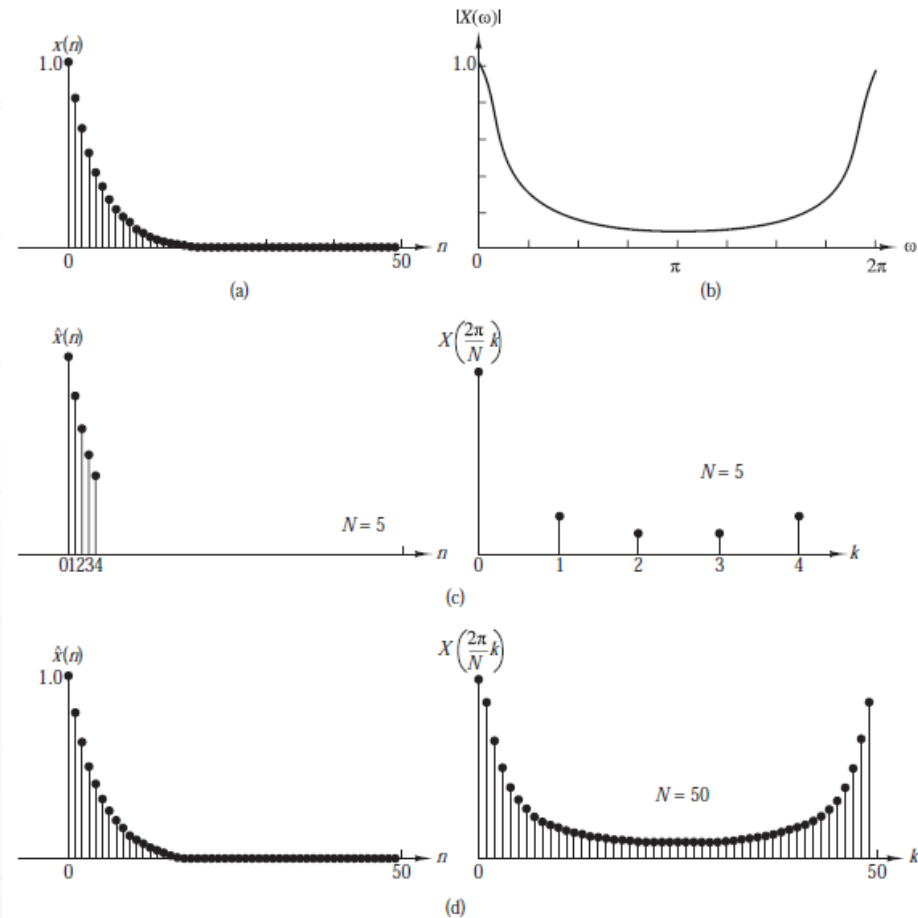
$$x_p(n) = a^n \left[\frac{1}{1 - a^N} \right]$$

Puesto que $0 < a < 1$, el error de aliasing tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$.

Ejemplo: Muestreo en frecuencia

(4)

Para $a = 0,8$ la secuencia $x(n)$ y su espectro $X(\omega)$ se muestran en la siguiente figura:



Ejemplo: Muestreo en frecuencia

(5)

Los efectos de Aliasing son despreciables para $N = 50$.

Si se define la secuencia de duración finita con aliasing $x(n)$ como:

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Así, la transformada de Fourier es:

$$\hat{X}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\omega n}$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{1 - a^N} \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a^N} \sum_{n=0}^{N-1} (a e^{-j\omega})^n$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{1 - a^N} \frac{1 - a^N e^{-j\omega N}}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Ejemplo: Muestreo en frecuencia

(6)

Aunque $X(\omega) \neq \hat{X}(\omega)$, los valores de muestras $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ son idénticos:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{1-a^N} \frac{1-a^N e^{-j\omega N}}{1-a e^{-j\omega}} \neq \frac{1}{1-a e^{-j\omega}} = X(\omega)$$

$$\hat{X}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1-a^N} \frac{1-a^N e^{-j\frac{2\pi k}{N}N}}{1-a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} \neq \frac{1}{1-a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$\hat{X}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1-a^N} \frac{1-a^N}{1-a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} \neq \frac{1}{1-a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$\hat{X}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1-a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = \frac{1}{1-a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La transformada discreta de Fourier

(1)

Espectro muestreado \rightarrow representa a $x_p(n)$ (extensión periódica de $x(n)$).

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

Si no hay **aliasing temporal**, entonces $x_p(n)$ es

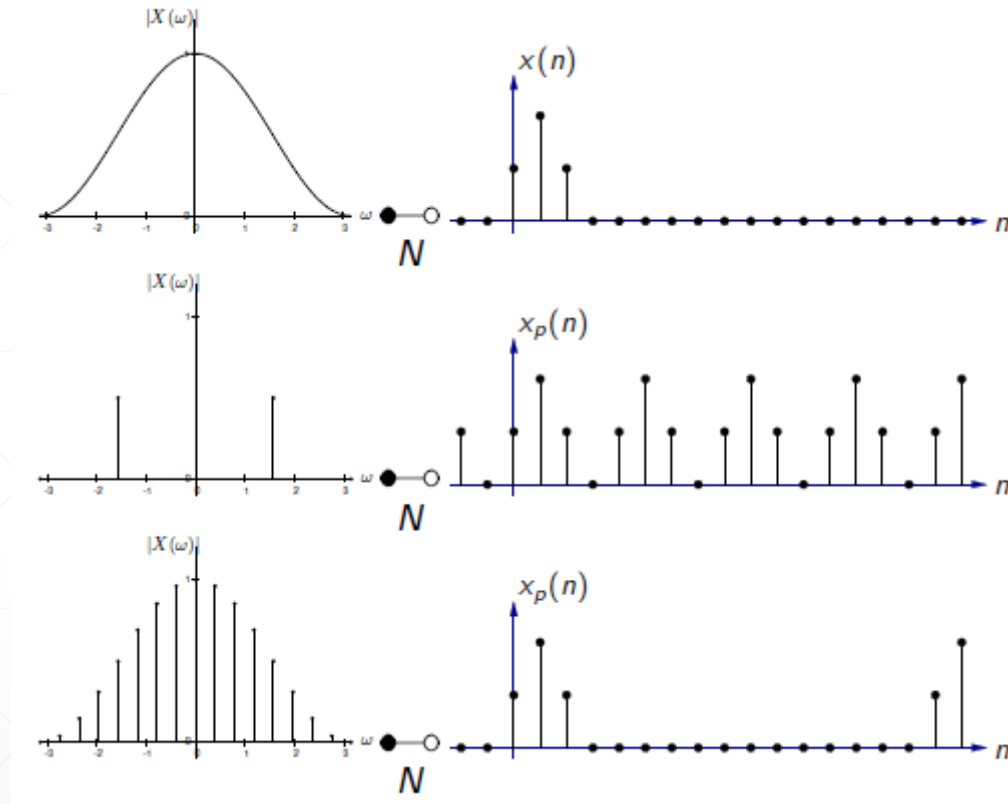
$$x_p(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & L \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

Rellenar con ceros $x(n) \Rightarrow$ muestreo más detallado

Para todo $N > L$ las muestras no proveen mayor información que el caso $N = L$.

La transformada discreta de Fourier

(2)



La transformada discreta de Fourier

(3)

La transformación de $x(n)$ hacia su espectro muestreado

$$X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Es la **transformada discreta de Fourier** DFT y

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Es la **transformada discreta de Fourier inversa** (IDFT)

Ejemplo

(1)

Una secuencia de duración finita de longitud L está dada por:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Determine la DFT de N puntos de esta secuencia para $N \geq L$.

Ejemplo

(2)

Solución:

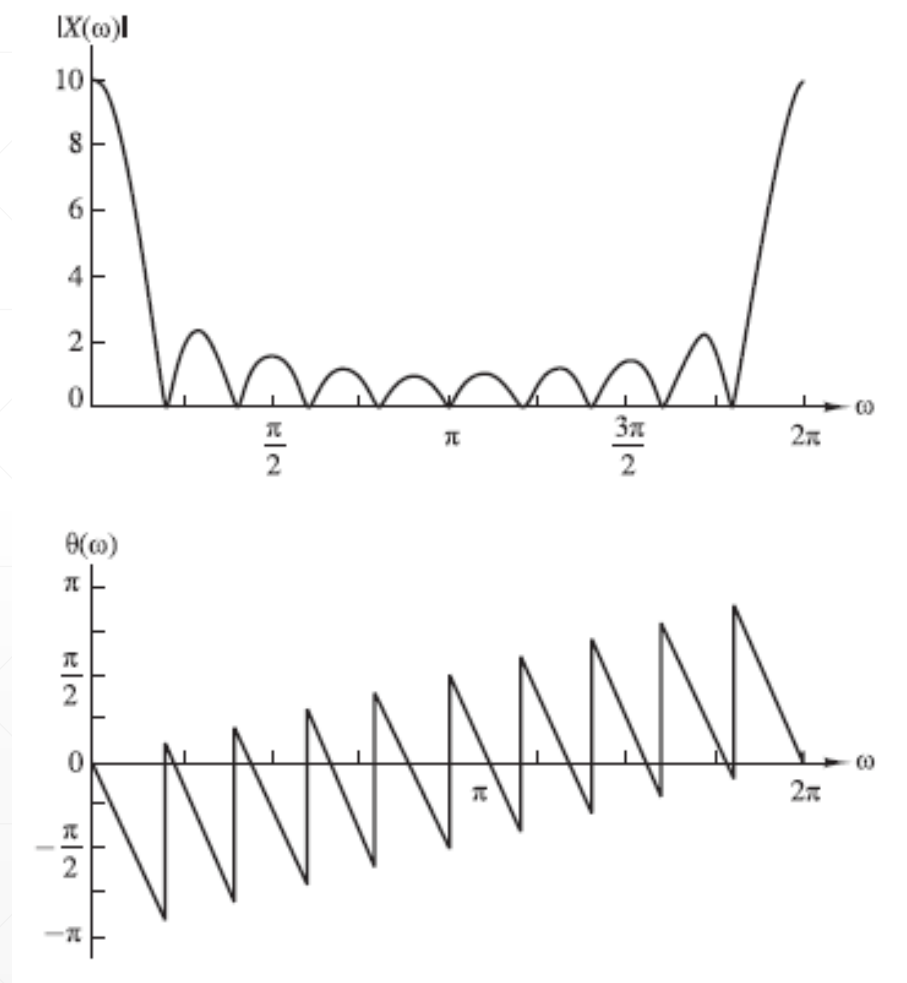
$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\frac{\omega(L-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Ejemplo

(3)

$$L = 10$$



Ejemplo

(4)

La DFT de N puntos de $x(n)$ es simplemente $X(\omega)$ evaluada en el conjunto de N frecuencias igualmente espaciadas en $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Por tanto:

$$X(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}L}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = e^{-j\frac{\pi k(L-1)}{N}} \frac{\sin\left(\frac{\pi kL}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$$

Si N se selecciona tal que $L = N$, entonces la DFT es:

$$X(k) = (-1)^k e^{j\frac{\pi k}{N}} \frac{\sin(\pi k)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$$

Ejemplo

(5)

Para $k = 0$:

$$X(0) = N$$

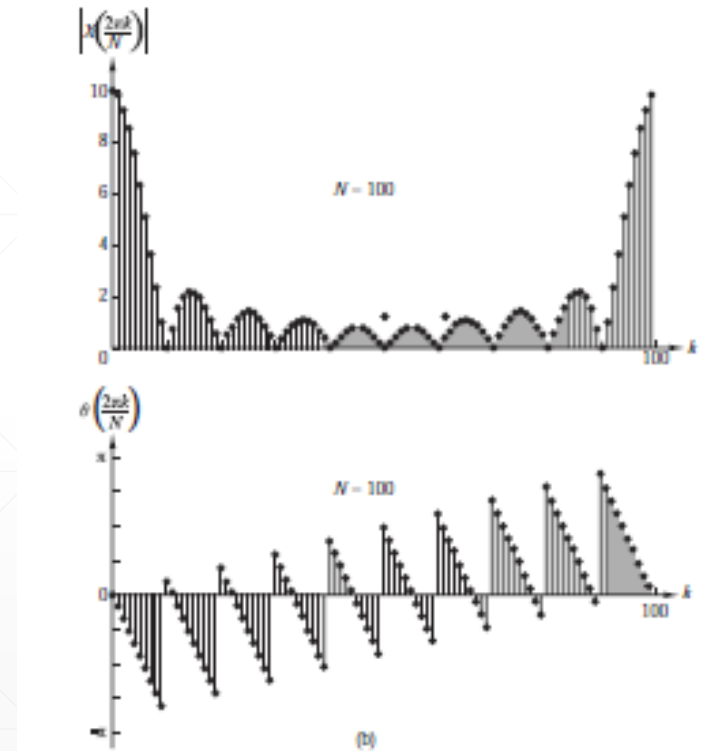
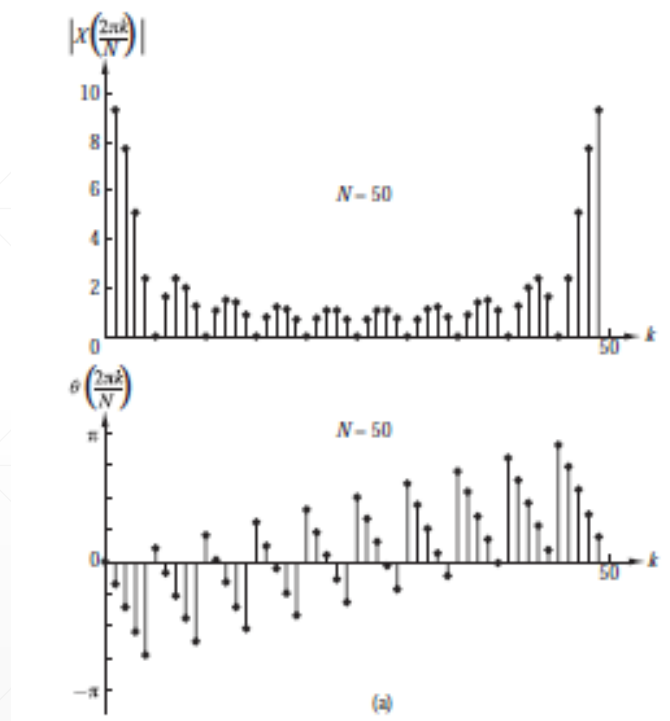
$$X(k) = \begin{cases} L & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Aunque la DFT de L puntos es suficiente para representar de forma unívoca la secuencia $x(n)$ en el dominio de la frecuencia, es evidente que no proporciona suficiente detalle como para obtener una buena representación de la característica espectral de $x(n)$. Si deseamos disponer de una imagen mejor, tendremos que evaluar una DFT con $N > L$. Lo anterior se interpreta como la incorporación de $N - L$ ceros en la secuencia de $x(n)$.

Ejemplo

(6)

DFT para una señal con $L = 10$ para $N = 50$ y $N = 100$.



La DFT como una transformación lineal

DFT como una transformación lineal

(1)

Las fórmulas para la DFT y la IDFT se pueden expresar como:

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k n / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k n / N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT como una transformación lineal

(2)

Donde por definición:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Observe que el cálculo de cada punto de la DFT se puede llevar a cabo realizando N multiplicaciones complejas y $(N - 1)$ sumas complejas. Luego los valores de la DFT de N puntos pueden calcularse realizando un total de N^2 multiplicaciones complejas y $N(N - 1)$ sumas complejas.

Es interesante ver la DFT y la IDFT como transformaciones lineales de las secuencias $x(n)$ y $X(k)$.

DFT como una transformación lineal (3)

Definamos un vector de N puntos \underline{x}_N de la secuencia $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, un vector de N puntos \underline{X}_N de muestras en frecuencia y una matriz $N \times N$ \underline{W}_N :

$$\underline{x}_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad \underline{X}_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \quad \underline{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \ddots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Con estas definiciones, la DFT de N puntos se puede expresar en forma matricial como:

$$\underline{X}_N = \underline{W}_N \underline{x}_N \quad \text{DFT}$$

Donde \underline{W}_N es la matriz de transformación lineal. \underline{W}_N es una matriz simétrica. Si se supone que existe la inversa de \underline{W}_N , \underline{W}_N^{-1} se tiene:

$$\underline{x}_N = \underline{W}_N^{-1} \underline{X}_N \quad \text{IDFT}$$

DFT como una transformación lineal

(4)

Otra forma de expresar la IDFT en forma matricial es:

$$\underline{x}_N = \frac{1}{N} \underline{W}_N^* \underline{X}_N$$

\underline{W}_N^* designa el conjugado complejo de \underline{W}_N

De lo anterior se puede concluir

$$\underline{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \underline{W}_N^*$$

$$\underline{W}_N \underline{W}_N^* = N \underline{I}_N$$

Donde \underline{I}_N es una matriz identidad $N \times N$. Por tanto, la matriz \underline{W}_N es ortogonal, por lo que su inversa existe.

Ejemplo

(1)

Calcule la DFT de la secuencia de cuatro puntos:

$$x(n) = \{0,1,2,3\}$$

Relación de la DFT con otras transformadas

Relación con Series de Fourier

La secuencia $x_p(n)$ por ser periódica con periodo N tiene una representación en series de Fourier

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad -\infty < n < \infty$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Si se comparan con las ecuaciones de la DFT y la IDFT

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Se observa que $X(k) = Nc_k$

Relación con la Transformada de Fourier de secuencias periódicas

Ya se verificó la relación entre la DFT $X(k)$ como muestras del espectro continuo $X(\omega)$

$$X(k) = X(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2\pi k}{N}}$$

que a su vez corresponden con los coeficientes de la serie de $x_p(n)$, la extensión periódica de $x(n)$.

Ambas secuencias son idénticas para $n = 0, 1, \dots, L - 1$ sino hay aliasing temporal, es decir, si $x(n)$ es finita de longitud L y $N \geq L$.

Relación con la Transformada z

(1)

Si la región de convergencia de la transformada z de $x(n)$ incluye la circunferencia unitaria, entonces

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

que representa al muestreo de la transformada z sobre el círculo unitario con ángulos distribuidos homogéneamente.

Relación con la Transformada z (2)

Sin aliasing temporal se cumple entonces, con $x(n)$ de longitud finita N

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \right] z^{-n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1} \right)^n$$

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}$$

que es la reconstrucción de $X(z)$ a partir de las muestras $X(k)$ de la DFT.

Relación con la Transformada z

(3)

Evalutando en la circunferencia unitaria se obtiene para la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)}}$$

que es otra forma de interpolación de las muestras $X(k)$ equivalente a la expresada anteriormente $P(\omega)$.

Propiedades de la DFT

Propiedades de la DFT

Sean $x(n)$ una secuencia de longitud $L < N$ y $X(k)$ su correspondiente DFT de longitud N .

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Con $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

La relación entre $x(n)$ y su DFT $X(k)$ se denota con

$$x(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X(k) \quad \text{ó} \quad x(n) \xleftrightarrow[N]{\bullet} X(k)$$

Periodicidad

Si $x(n)$ y $X(k)$ son una pareja de transformada DFT de N puntos, entonces:

$$\begin{aligned}x(n + N) &= x(n) && \text{para todo } n \\X(k + N) &= X(k) && \text{para todo } k\end{aligned}$$

Se debe recordar que la señal discreta que representa la función $X(k)$ es una replicación periódica de la señal original y ahí es donde se interpreta la periodicidad de la señal en el tiempo.

Por otro lado, debido a que el espectro $X(\omega)$ de señales discretas periódicas es periódico, se puede interpretar a la función $X(k)$ como una función periódica de periodo N , lo cual resulta ventajoso en algunas aplicaciones.

Linealidad

Si $x_1(n) \overset{N}{\circ\!\!\!\bullet} X_1(k)$ y $x_2(n) \overset{N}{\circ\!\!\!\bullet} X_2(k)$, entonces:

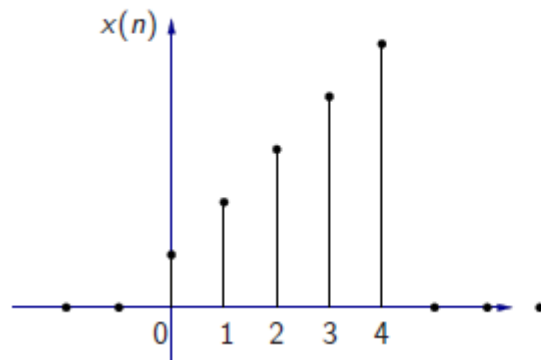
$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \overset{N}{\circ\!\!\!\bullet} a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

Simetría circular

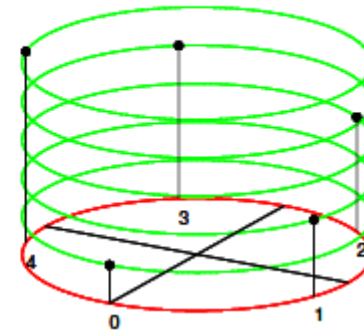
(1)

Puesto que la DFT de N puntos de una secuencia finita $x(n)$ de longitud $L \leq N$ es equivalente a la serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS) de N puntos de una secuencia periódica $x_p(n)$ de periodo N obtenida como

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$



es equivalente a



Simetría circular

(2)

Entonces un desplazamiento de $x_p(n)$ k unidades hacia la derecha equivale a un desplazamiento circular. Así se obtiene otra secuencia periódica:

$$x'_p(n) = x_p(n - k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - k - lN)$$

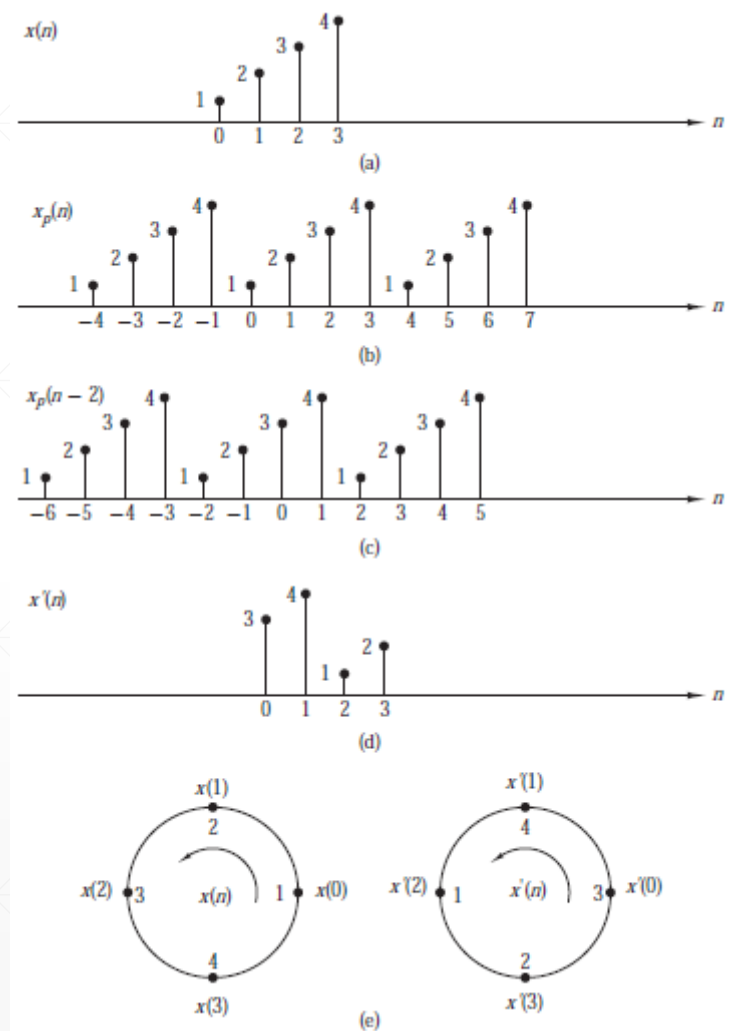
La secuencia de duración N :

$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Está relacionada con la secuencia original $x(n)$ por desplazamiento circular:

Simetría circular

(3)



Simetría circular: par e impar

(1)

La periodicidad inherente que resulta de la disposición de la secuencia de N puntos sobre la circunferencia impone una definición diferente a la simetría par e impar y la inversión temporal de una secuencia.

Simetría circular: par e impar

(2)

Una secuencia de N puntos se dice que es circularmente par si es simétrica respecto al punto cero de la circunferencia.

Esto implica que:

$$x(N - n) = x(n) \quad 1 \leq n \leq N - 1$$

Simetría circular: par e impar

(3)

Una secuencia de N puntos se dice que es circularmente impar si es antisimétrica respecto al punto cero de la circunferencia.

Esto implica que:

$$x(N - n) = -x(n) \quad 1 \leq n \leq N - 1$$

Simetría circular: inversión en el tiempo

Se consigue invirtiendo sus muestras respecto al punto cero de la circunferencia. Así la secuencia invertida queda determinada por:

$$x((-n))_N = x(N - n) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Esta inversión temporal es equivalente a representar $x(n)$ en el sentido horario sobre la circunferencia.

Simetría circular conjugada

Una definición equivalente para las secuencias par e impar de la secuencia periódica asociada $x_p(n)$ es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{par:} & x_p(n) = x_p(-n) = x_p(N - n) \\ \text{impar:} & x_p(n) = -x_p(-n) = -x_p(N - n) \end{array}$$

Si la secuencia periódica es compleja, se tiene que:

$$\begin{array}{ll} \text{par conjugada:} & x_p(n) = x_p^*(N - n) \\ \text{impar conjugada:} & x_p(n) = -x_p^*(N - n) \end{array}$$

Simetría circular conjugada

Estas relaciones sugieren la descomposición de la secuencia $x_p(n)$ como:

$$x_p(n) = x_{pe}(n) + x_{po}(n)$$

$$x_{pe}(n) = \frac{1}{2} [x_p(n) + x_p^*(N - n)]$$

$$x_{po}(n) = \frac{1}{2} [x_p(n) - x_p^*(N - n)]$$

Propiedades de simetría de la DFT

(1)

Suponga que la secuencia de N puntos $x(n)$ y su DFT son complejas. Entonces las secuencias se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}x(n) &= x_R(n) + jx_I(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\X(k) &= X_R(k) + jX_I(k) & 0 \leq k \leq N-1\end{aligned}$$

Sustituyendo $x(n)$ en la expresión para la DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_R(n) + jx_I(n)] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_R(n) + jx_I(n)] \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) - j \sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) \right]$$

Propiedades de simetría de la DFT

(2)

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) + x_I(n) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) \right]$$

$$X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_I(n) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) - x_R(n) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) \right]$$

Del mismo modo $X(k)$ se sustituye en la IDFT y se obtiene:

$$x_R(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) - X_I(k) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) \right]$$

$$x_I(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) + X_I(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right) \right]$$

Propiedades de simetría de la DFT: Secuencias reales

Si la secuencia $x(n)$ es real, se deduce directamente que:

$$X(N - k) = X^*(k) = X(-k)$$

En consecuencia, $|X(N - k)| = |X(k)|$ y $\angle X(N - k) = -\angle X(k)$.
Además, $x_I(n) = 0$ y por tanto, $x(n)$ se puede determinar a partir de:

$$x_R(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} n\right) - X_I(k) \sin\left(\frac{2\pi k}{N} n\right) \right]$$

Propiedades de simetría de la DFT: Secuencias reales pares

Si $x(n)$ es real y par, es decir:

$$x(n) = x(N - n) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Entonces $X_I(k) = 0$, por lo que la DFT se reduce a:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} n\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Además, como $X_I(k) = 0$, se tiene que:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} n\right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Propiedades de simetría de la DFT: Secuencias reales impares

Si $x(n)$ es real e impar, es decir:

$$x(n) = -x(N - k) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Entonces $X_R(k) = 0$, por lo que la DFT se reduce a:

$$X(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi k}{N} n \right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Además, como $X_R(k) = 0$, se tiene que:

$$x(n) = j \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi k}{N} n \right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Propiedades de simetría de la DFT: Secuencias imaginarias puras

En este caso, $x(n) = jx_I(n)$. Por tanto:

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi k}{N} n \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \cos \left(\frac{2\pi k}{N} n \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Donde $X_R(k)$ es impar y $X_I(k)$ es par.

Si $x_I(n)$ es impar, entonces $X_I(k) = 0$ y por tanto $X(k)$ es real pura.

Por el contrario, si $x_I(n)$ es par, entonces $X_R(k) = 0$, y por lo tanto $X(k)$ es imaginaria pura.

Propiedades de simetría de la DFT: resumen

Secuencia de N puntos $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$	DFT de N puntos
$x(n)$	$X(k)$
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
$x^*(N-n)$	$X^*(k)$
$x_R(n)$	$X_{ce}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$
$jX_I(n)$	$X_{co}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$	$jX_I(k)$
Señales reales	
Cualquier señal real	$X(k) = X^*(N-k)$
$x(n)$	$X_R(k) = X_R(N-k)$
	$X_I(k) = -X_I(N-k)$
	$ X(k) = X(N-k) $
	$\angle X(k) = -\angle X(N-k)$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(N-n)]$	$jX_I(k)$

Convolución circular

(1)

Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias de duración finita, ambas de longitud N , y sus respectivas **DFT** de N puntos:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Si se multiplican las dos **DFT**, se tiene una nueva **DFT** de una secuencia $x_3(n)$ de longitud N :

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Convolución circular

(2)

La IDFT de $X_3(k)$ es:

$$\begin{aligned}x_3(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k) e^{\frac{j2\pi km}{N}} \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k) X_2(k) e^{\frac{j2\pi km}{N}} \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) e^{-\frac{j2\pi lk}{N}} \right] e^{\frac{j2\pi km}{N}} \\&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi k(m-n-l)}{N}} \right]\end{aligned}$$

Convolución circular

(3)

Teniendo en cuenta:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & a = 1 \\ \frac{1 - a^N}{1 - a} & a \neq 1 \end{cases}$$

$$a = e^{\frac{j2\pi(m-l-n)}{N}}$$

Observe que $a = 1$ cuando $m - n - l$ es un múltiplo de N . Por otro lado $a^N = 1$ para cualquier valor de $a \neq 0$. Por lo que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N \\ 0 \end{cases}$$

$$l = m - n - PN \Rightarrow l = ((m - n))N$$

en otro caso

Convolución circular

(4)

Por lo que:

$$x_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((m-n))_N \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

El índice $((m-n))_N$ denomina una convolución circular. Por lo que la multiplicación de dos DFT de dos secuencias es equivalente a la convolución circular de las secuencias en el dominio del tiempo.

Ejemplo

(1)

Calcule la convolución circular de las secuencias siguientes:

$$x_1(n) = \{2,1,2,1\}$$

$$x_2(n) = \{1,2,3,4\}$$

Propiedades de la DFT

Propiedad	Dominio temporal	Dominio frecuencial
Notación	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
Periodicidad	$x(n) = x(n + N)$	$X(k) = X(k + N)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Reflexión temporal	$x(N - n)$	$X(N - k)$
Desplazamiento temporal circular	$x((n - l))_N$	$X(k) e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento frecuencial circular	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k - l))_N$
Conjugación compleja	$x^*(n)$	$X^*(N - k)$
Convolución circular	$x_1(n) \circledast x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
Correlación circular	$x(n) \circledast y^*(-n)$	$X(k)Y^*(k)$
Multiplicación de dos secuencias	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k) \circledast X_2(k)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$

Filtrado lineal basado en la DFT

Filtrado lineal basado en la DFT

(1)

FFT (Fast Fourier Transform)

Algoritmos eficientes para calcular la DFT

Filtrado lineal basado la DFT

(2)

Sea la entrada $x(n)$ de longitud L y un filtro FIR con respuesta impulsional $h(n)$ de longitud M .

Asúmase además que ambas secuencias son causales, es decir:

$$\begin{aligned} x(n) &= 0, & n < 0, n \geq L \\ h(n) &= 0, & n < 0, n \geq M \end{aligned}$$

La salida del filtro puede calcularse en el dominio del tiempo con la convolución:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n)$$

Que por la naturaleza finita de $x(n)$ y $h(n)$, la salida también es finita.

Filtrado lineal basado en el DFT

(3)

En el dominio de la frecuencia la salida es

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Si se desea representar $y(n)$ a través de muestras de $Y(\omega)$ se necesitan entonces al menos $N \geq M + L - 1$ muestras para evitar así el aliasing temporal.

Filtrado lineal basado en el DFT

(4)

Con la **DFT** se obtiene:

$$Y(k) = Y(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = X(\omega)H(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = X(k)H(k)$$

Donde $X(k)$ y $H(k)$ representan entonces la **DFT** de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ que han sido extendidas con ceros para alcanzar la longitud N .

La compensación de longitud de $x(n)$ y $y(n)$ logra que la convolución circular sea equivalente a la convolución lineal.

Ejemplo:

(1)

Calcule la respuesta del filtro con respuesta impulsional $h(n) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$ ante la $x(n) = \{4, 2, 2, 4\}$.

Ejemplo:

(2)

Solución:

La longitud de $x(n)$ es $L = 4$ y la de $h(n)$ es $M = 3$, por lo que la salida necesita al menos $L + M - 1 = 6$ muestras. Se utilizará $N = 8$ por simplicidad y porque los algoritmos de **FFT** usualmente requieren $N = 2^k$ muestras, $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

(3)

Así,

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j2\pi kn/8} \\ &= x(0) + x(1)e^{-j\frac{\pi}{4}k} + x(2)e^{-j\frac{\pi}{2}k} + x(3)e^{-j\frac{3\pi}{4}k} \\ &= 4\left(1 + e^{-j\frac{3\pi}{4}k}\right) + 2\left(e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo:

(4)

Desarrollando se obtiene,

$$X(0) = 12$$

$$X(1) = 4 - \sqrt{2} - j(2 + 3\sqrt{2})$$

$$X(2) = 2 + j2$$

$$X(3) = 4 + \sqrt{2} + j(2 - 3\sqrt{2})$$

$$X(4) = 0$$

$$X(5) = 4 + \sqrt{2} - j(2 - 3\sqrt{2}) = X^*(3)$$

$$X(6) = 2 - j2 = X^*(2)$$

$$X(7) = 4 - \sqrt{2} - j(2 + 3\sqrt{2}) = X^*(1)$$

Ejemplo:

(5)

De forma similar,

$$\begin{aligned} H(k) &= \sum_{n=0}^7 h(n) e^{-j2\pi kn/8} \\ &= h(0) + h(1) e^{-j\frac{\pi}{4}k} + h(2) e^{-j\frac{\pi}{2}k} \\ &= \frac{1}{4} (1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k}) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}k} \end{aligned}$$

Ejemplo:

(6)

Desarrollando se obtiene,

$$H(0) = 1$$

$$H(1) = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} - j \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

$$H(2) = \frac{j}{2}$$

$$H(3) = \frac{1 - \sqrt{2}}{4} + j \frac{1 - \sqrt{2}}{4}$$

$$H(4) = 0$$

$$H(5) = \frac{1 - \sqrt{2}}{4} - j \frac{1 - \sqrt{2}}{4} = H^*(3)$$

$$H(6) = -\frac{j}{2} = H^*(2)$$

$$H(7) = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} + j \frac{1 + \sqrt{2}}{4} = H^*(1)$$

Ejemplo:

(7)

El producto de ambas secuencias es:

$$Y(0) = 12$$

$$Y(1) = -\frac{3 + \sqrt{2}}{2} - j\frac{5 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$Y(2) = 1 - j$$

$$Y(3) = \frac{\sqrt{2} - 3}{2} + j\frac{5 - 2\sqrt{2}}{2}$$

$$Y(4) = 0$$

$$Y(5) = \frac{\sqrt{2} - 3}{2} - j\frac{5 - 2\sqrt{2}}{2} = Y^*(3)$$

$$Y(6) = 1 + j = Y^*(2)$$

$$Y(7) = -\frac{3 + \sqrt{2}}{2} + j\frac{5 + 2\sqrt{2}}{2} = Y^*(1)$$

Ejemplo:

(8)

Con la **IDFT** se obtiene finalmente:

$$y(n) = \sum_{k=0}^7 Y(k) e^{\frac{j2\pi kn}{8}}, \quad n = 0, 1, \dots, 7$$
$$= \left\{ 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, 0, 0 \right\}$$

Filtrado en aplicaciones reales

Filtrado en aplicaciones reales

Limitaciones de aplicaciones reales:

- Secuencia de entrada de longitud impredecible
- Limitaciones de espacio de memoria
- Limitaciones de retardo de respuesta (latencia).



Procesamiento en frecuencia requiere separación en bloques.

Filtrado de secuencias de larga duración

Asúmase:

- Señal de entrada se parte en bloque de longitud L .
- Filtro $h(n)$ de longitud M .
- $L \gg M$.

Dos métodos de análisis:

1. Método de solapamiento y almacenamiento.
2. Método de solapamiento y suma.

Método de solapamiento y almacenamiento (1)

- La entrada se separa en bloques de $N = L + M - 1$ muestras.
- Cada bloque contiene $M - 1$ muestras del bloque de entrada anterior seguidas por L muestras nuevas.
- $h(n)$ se completa con $L - 1$ ceros para alcanzar longitud N .

Método de solapamiento y almacenamiento (2)

Puesto que la entrada tiene longitud N y el filtro longitud M , su convolución tiene $N + M - 1$ muestras.

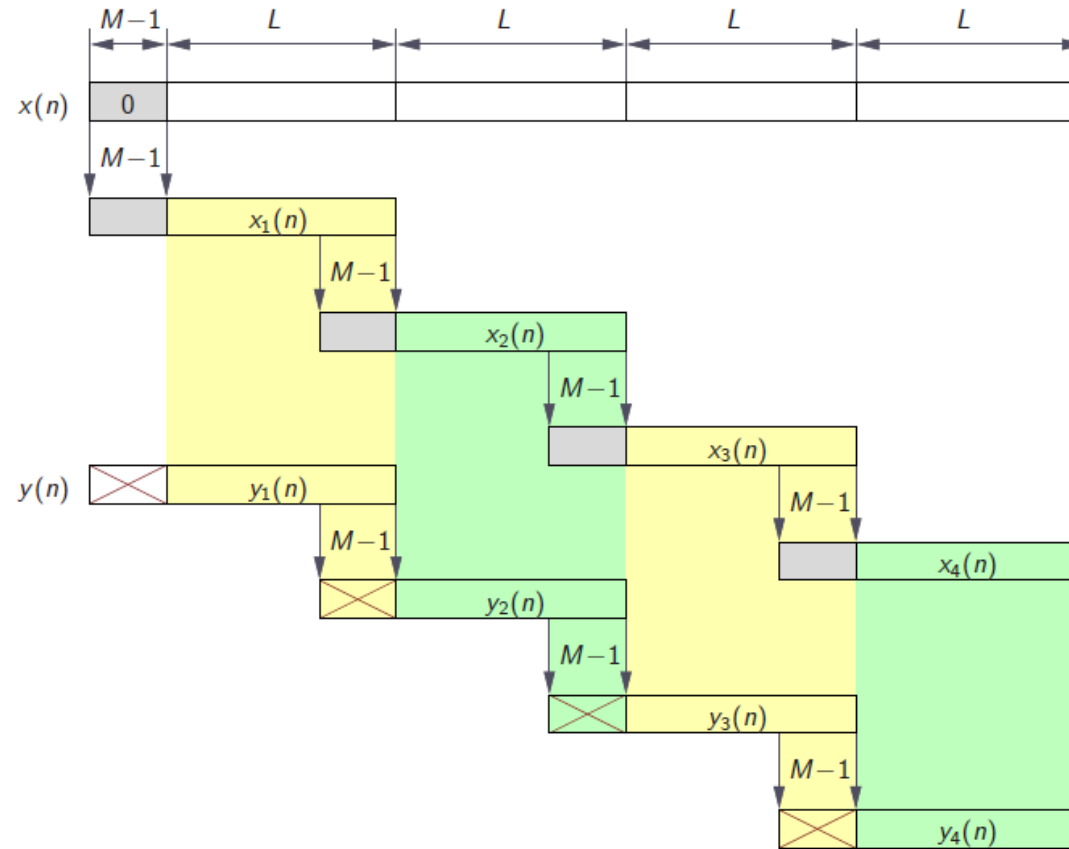
Las primeras $M - 1$ muestras de la salida están distorsionadas por aliasing.

Método de solapamiento y almacenamiento (3)

La salida para el m -ésimo bloque se obtiene con

$$\hat{y}_m(n) \overset{N}{\circ\!\!\!\bullet} \hat{Y}_m(k) = H(k)X_m(k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Método de solapamiento y almacenamiento (4)



La salida total se obtiene concatenando las últimas L muestras de cada bloque de salida.

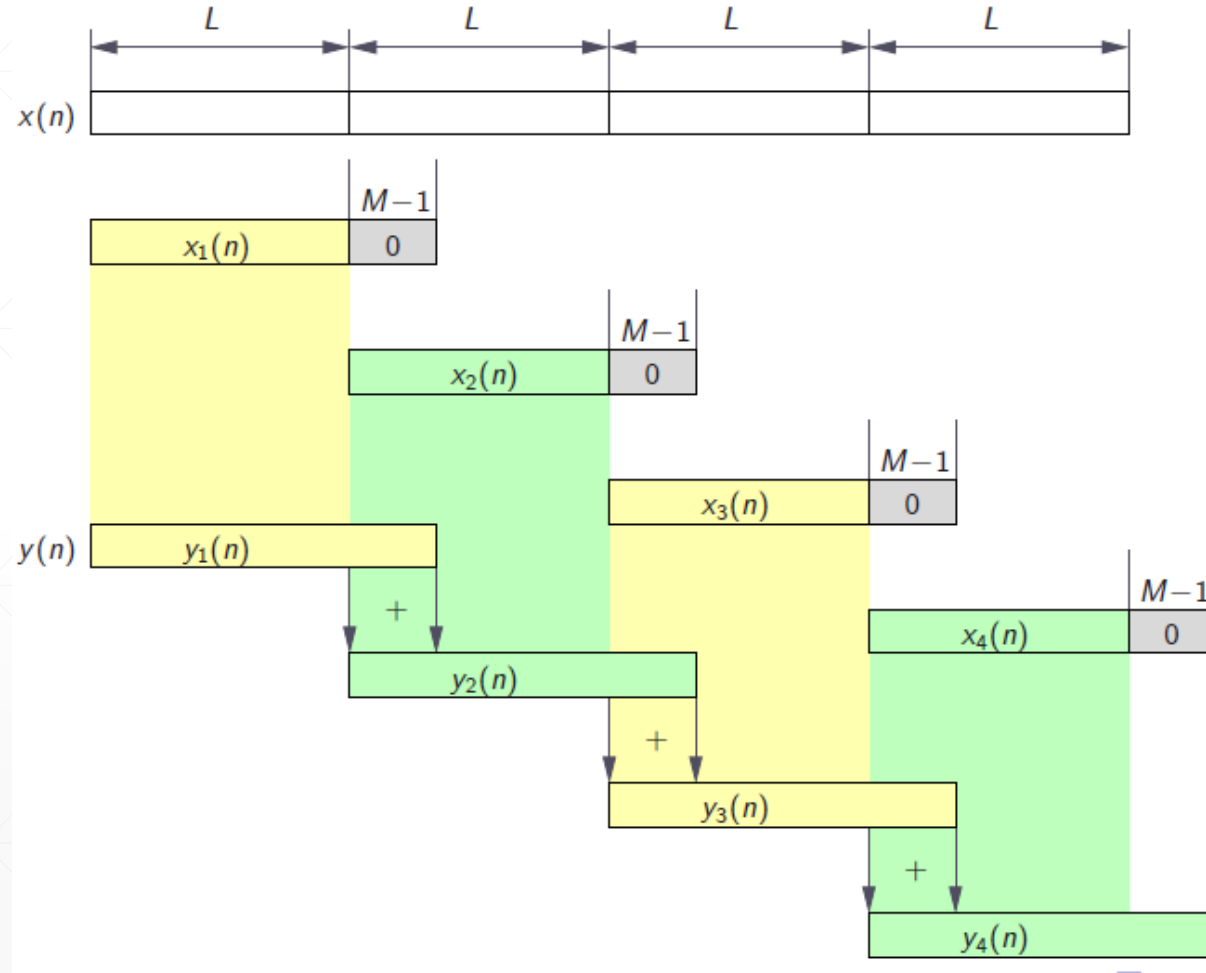
Método de solapamiento y suma

(1)

- A L muestras de la entrada se concatenan $M - 1$ ceros.
- Se aplica la **DFT** y se multiplica por la **DFT** del filtro.
- Los bloques de salida deben entonces de traslaparse y sumarse.

Método de solapamiento y suma

(2)



Análisis espectral de señales usando la DFT

Análisis espectral de señales usando la DFT (1)

Estimación del espectro requiere a todo el tiempo $t \in] - \infty, \infty[$

Aplicaciones reales estiman espectro para intervalos finitos de tiempo.

Análisis espectral de una señal analógica $x_a(t)$

- Limitar ancho de banda B con filtro antialias.
- Muestreo con tasa $F_s \geq 2B$.
- Limitar longitud temporal a L muestras ($T_0 = LT$ es la duración del bloque de señal analizado).

Análisis espectral de señales usando la DFT (2)

No se estudia entonces la señal $x(n)$ sino otra obtenida por enventanado:

$$\hat{x}(n) = x(n)w(n)$$

Con la ventana de longitud L

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Análisis espectral de señales usando la DFT (3)

Para el caso particular de una componente espectral $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ con espectro $X(\omega) = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ la señal enventanada tendrá espectro:

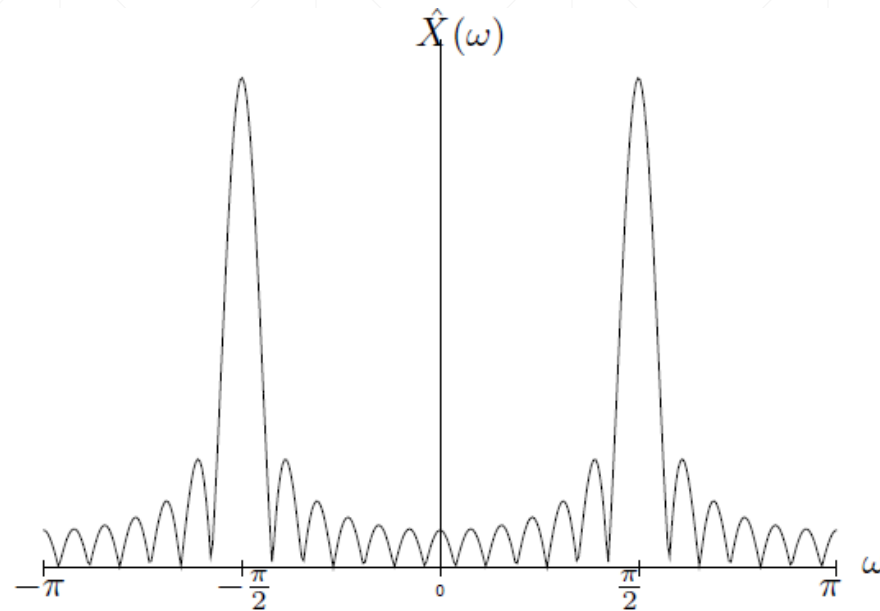
$$\hat{x}(n) \circ \bullet \hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)]$$

Donde $W(\omega)$ es el espectro de la ventana.

Análisis espectral de señales usando la DFT (4)

Para el caso de la ventana rectangular es

$$W(\omega) = \frac{\text{sen}\left(\omega \frac{L}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$



Espectro del producto de una señal cosenoidal de frecuencia $\omega = \pi/2$ con una ventana rectangular de longitud $L = 25$.

Análisis espectral de señales usando la DFT (5)

El espectro no se concentra en $\pm\omega_0$ como originalmente, sino que su energía se ha **derramado** o **fugado** a un intervalo.

Este derrame impide además distinguir líneas espectrales que se encuentren muy cerca.

Análisis espectral de señales usando la DFT (6)

Para comprender el problema de la resolución espectral, se puede considerar la siguiente señal conformada por dos componentes de frecuencia:

$$x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$$

Cuando la secuencia se trunca a L muestras en el rango $0 \leq n \leq L - 1$, el espectro que se obtiene después de aplicar la ventana es:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_1) + W(\omega - \omega_2) + W(\omega + \omega_1) + W(\omega + \omega_2)]$$

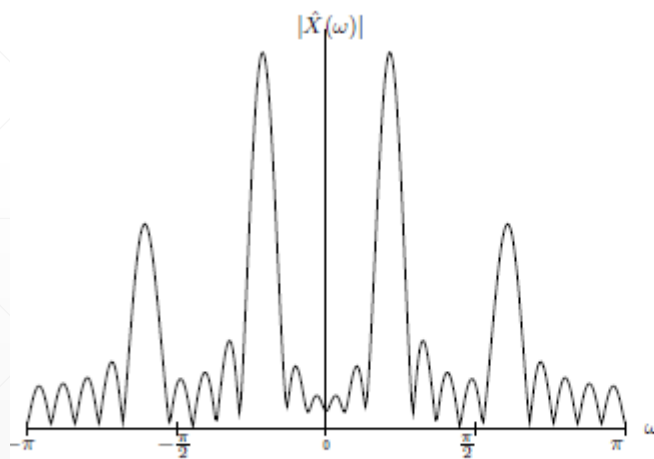
El espectro $W(\omega)$ de la secuencia de ventana rectangular presenta su primer paso por cero en $\omega = 2\pi/L$, las dos funciones de ventana $W(\omega - \omega_1)$ y $W(\omega - \omega_2)$ se solapan y, en consecuencia las dos líneas espectrales de $x(n)$. Sólo si $(\omega_1 - \omega_2) \geq 2\pi/L$ se verán dos lóbulos separados en el espectro $\hat{X}(\omega)$. Así la capacidad para obtener líneas espectrales depende de la anchura del lóbulo principal.

Análisis espectral de señales usando la DFT (7)

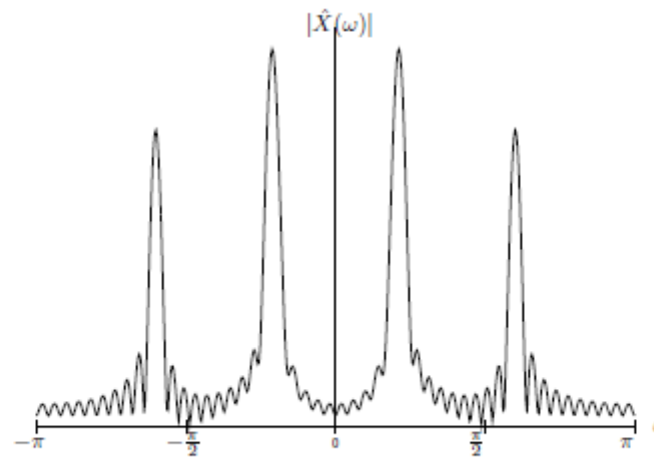
Por ejemplo:

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) + \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$$

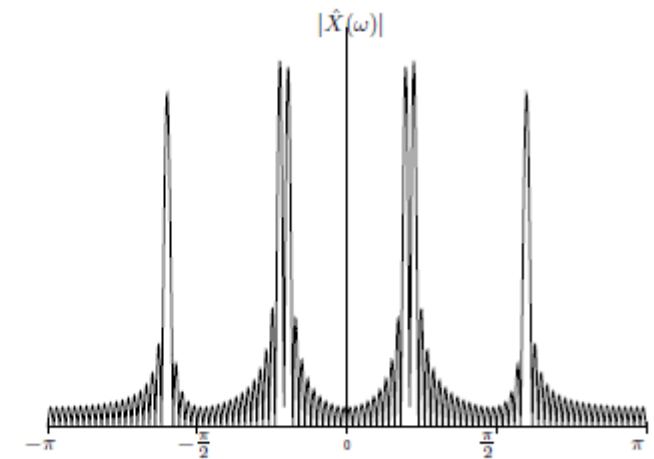
Y $\omega_0 = 0,2\pi$, $\omega_1 = 0,22\pi$ y $\omega_2 = 0,6\pi$ se obtienen las respuestas en magnitud:



$L = 25$



$L = 50$



$L = 100$

Análisis espectral de señales usando la DFT (8)

Los lóbulos laterales pueden reducirse utilizando otras ventanas diferentes a las rectangulares, como la Hanning:

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{L-1} n \right) \right) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

A costa del mayor ancho del lóbulo central.

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.

