

# Diseño de Filtros Digitales

---

Ing. José Miguel Barboza Retana  
Escuela de Ingeniería Electrónica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2019

# Introducción al diseño de filtros digitales

---

# Introducción al diseño de filtros digitales

- Usualmente “filtro digital” implica LTI
- Con “filtro no lineal” se hace referencia explícita a no linealidad.

# Pasos en el diseño de un filtro

(1)

El diseño de filtros se compone de cuatro fases:

1. Especificación
2. Dimensionamiento
3. Realización
4. Implementación

# Pasos en el diseño de un filtro

(2)

1. **Especificación:** Evaluación de la aplicación concreta y levantamiento de requisitos que debe cumplir el filtro, como factores de ganancia, frecuencias de corte, bandas pasantes, rizado en las bandas pasantes y de rechazo, etc.

- 2. Dimensionamiento:** De acuerdo a las especificaciones se dimensiona el filtro, seleccionando orden y tipo de filtro, el dominio de diseño (analógico con transformación o directamente digital, por optimización, etc), decisión si utilizar FIR o IIR, consideraciones de las implicaciones de causalidad, etc.

- 3. Realización:** Establecimiento de la estructura a utilizar, forma directa I o II, estructura en cascada, en paralelo, así como optimizaciones algorítmicas permitidas por la aplicación específica.

- 4. Implementación:** Se ocupa de aspectos de lenguaje de programación (C, ensamblador, etc.), plataforma de prototipado (Matlab, LabVIEW), sistemas integrados de desarrollo (p.ej. Code Composer Studio), sistemas empuotrados, etc. En ciertas aplicaciones es necesario el desarrollo de circuitos para hardware reconfigurable (FPGA, CPLD, etc.) o incluso el diseño de ASIC, si las restricciones de velocidad o potencia lo hacen necesario).



# Diseño de respuestas en fase y magnitud

- En general, el diseño de filtros digital se centra en satisfacer requisitos de respuesta en magnitud.
- Respuesta en fase queda sujeta a factores de estabilidad (particularmente en filtros IIR), o fase lineal (en filtros FIR), buscando por lo general los menores retardos posibles.

# Complejidad de las fases de diseño

- Complejidad de dimensionamiento+realización por un lado y de implementación por otro son similares en complejidad.
- Tiempos de diseño dependen de nivel de abstracción: mientras más alto, menor el tiempo de diseño pero menor será el control en los tiempos de ejecución.
- En el mercado de PDS: es usual encontrar trabajo de implementación en C o Ensamblador, incluso FPGA, para optimizar tiempos de ejecución.
- Lo anterior requiere mayores tiempos de implementación lo que incrementa su costo.
- Estas implementaciones “a la medida” son por lo general menos flexibles a cambios.

# Causalidad y sus implicaciones

---

# Causalidad y sus implicaciones

(1)

- Sea  $h(n)$  la respuesta impulsional de un filtro paso bajo ideal con respuesta en frecuencia:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$



$$h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\omega_c n} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que obviamente no es causal y por tanto no realizable.

- ¿Cómo debe ser  $H(\omega)$  para que  $h(n)$  sea causal?

# Causalidad y sus implicaciones

(2)

- Respuesta: **Teorema de Paley-Wiener:**

Si  $h(n)$  tiene energía finita y es causal entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln(|H(\omega)|)| d\omega < \infty$$

- Si esto se cumple para  $|H(\omega)|$  entonces existe una respuesta de fase  $\Theta(\omega)$  asociada tal que  $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}$  corresponde a una señal causal.
- De acuerdo a este teorema,  $|H(\omega)|$  puede ser cero solo en frecuencias puntuales aisladas.
- Por tanto, ningún filtro ideal es causal.

# Transformada de Hilbert

(1)

- Puesto que  $h(n)$  se puede separar en componentes par e impar:

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n)$$

$$h_e(n) = \frac{1}{2} [h(n) + h(-n)]$$

$$h_o(n) = \frac{1}{2} [h(n) - h(-n)]$$

Si  $h(n)$  es causal entonces

$$h(n) = 2h_e(n)u(n) - h_e(0)\delta(n) = 2h_o(n)u(n) + h(0)\delta(n)$$

$$h_e(n) = h_o(n), \quad n > 0$$

# Transformada de Hilbert

(2)

- Si  $h(n)$  es absolutamente sumable (estable BIBO) entonces:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

- Puesto que  $h(n)$  es causal y real entonces:

$$h_e(n) \text{ --- } H_R(\omega)$$

$$h_o(n) \text{ --- } H_I(\omega)$$

con lo que se deduce que  $H_R(\omega)$  es suficiente para establecer  $H(\omega)$ .

- En otras palabras  $H_R(\omega)$  y  $H_I(\omega)$  son **interdependientes** y no se pueden especificar libremente para sistemas **causales**.

# Transformada de Hilbert

(3)

- La relación entre las partes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia se plantea utilizando el teorema del enventanado:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) = \mathcal{F}\{2h_e(n)u(n) - h_e(0)\delta(n)\}$$

$$= 2[H_R(\omega) * U(\omega)] - h_e(0)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) U(\omega - \lambda) d\lambda - h_e(0)$$

que con

$$u(n) \circ \bullet U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad -\pi < \omega < \pi$$



# Transformada de Hilbert

(4)

es equivalente a:

$$H(\omega) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \pi \delta(\omega - \lambda) d\lambda}_{H_R(\omega)} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \frac{1}{2} d\lambda}_{h_e(0)} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \frac{j}{2} \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda - h_e(0)$$

y puesto que

$$H_R(\omega) + jH_I(\omega) = H_R(\omega) - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda$$
$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda$$

# Transformada de Hilbert

(5)

- A este operador integral:

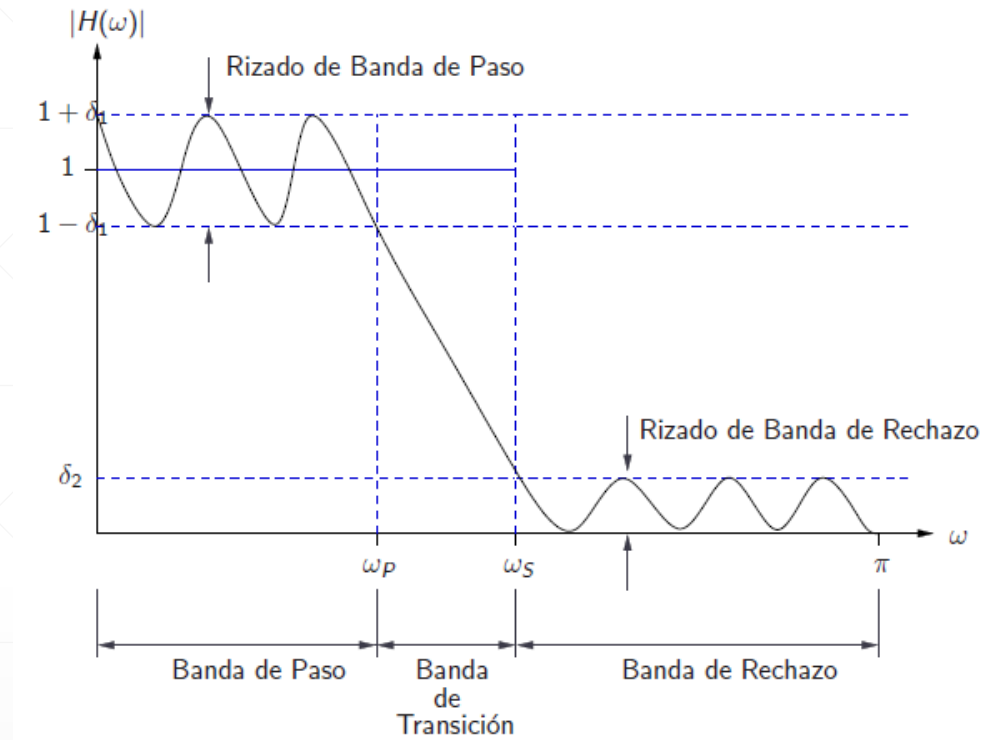
$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot\left(\frac{\omega - \lambda}{2}\right) d\lambda$$

se le denomina **Transformada de Hilbert discreta** de  $H_R(\omega)$

# Consecuencias adicionales de la causalidad (1)

- La causalidad tiene otras consecuencias aquí no demostradas:
- $|H(\omega)|$  no puede ser constante en ningún rango finito de frecuencias.
- La transición de la banda de paso a la banda de rechazo no puede ser infinitamente abrupta.
- Por esto, las respuestas en magnitud de filtros reales solo pueden ser aproximaciones de las versiones ideales.

# Consecuencias adicionales de la causalidad (2)



- La frecuencia angular  $\omega_p$  define el límite superior de la banda de paso y así el ancho de banda del filtro.
- La frecuencia angular  $\omega_s$  indica el inicio de la banda de rechazo.

# Consecuencias adicionales de la causalidad (3)

- El ancho de banda de transición es  $\omega_S - \omega_P$ .
- Los rizados de las bandas de paso y rechazo son  $\delta_1$  y  $\delta_2$  respectivamente.

# Consecuencias adicionales de la causalidad (4)

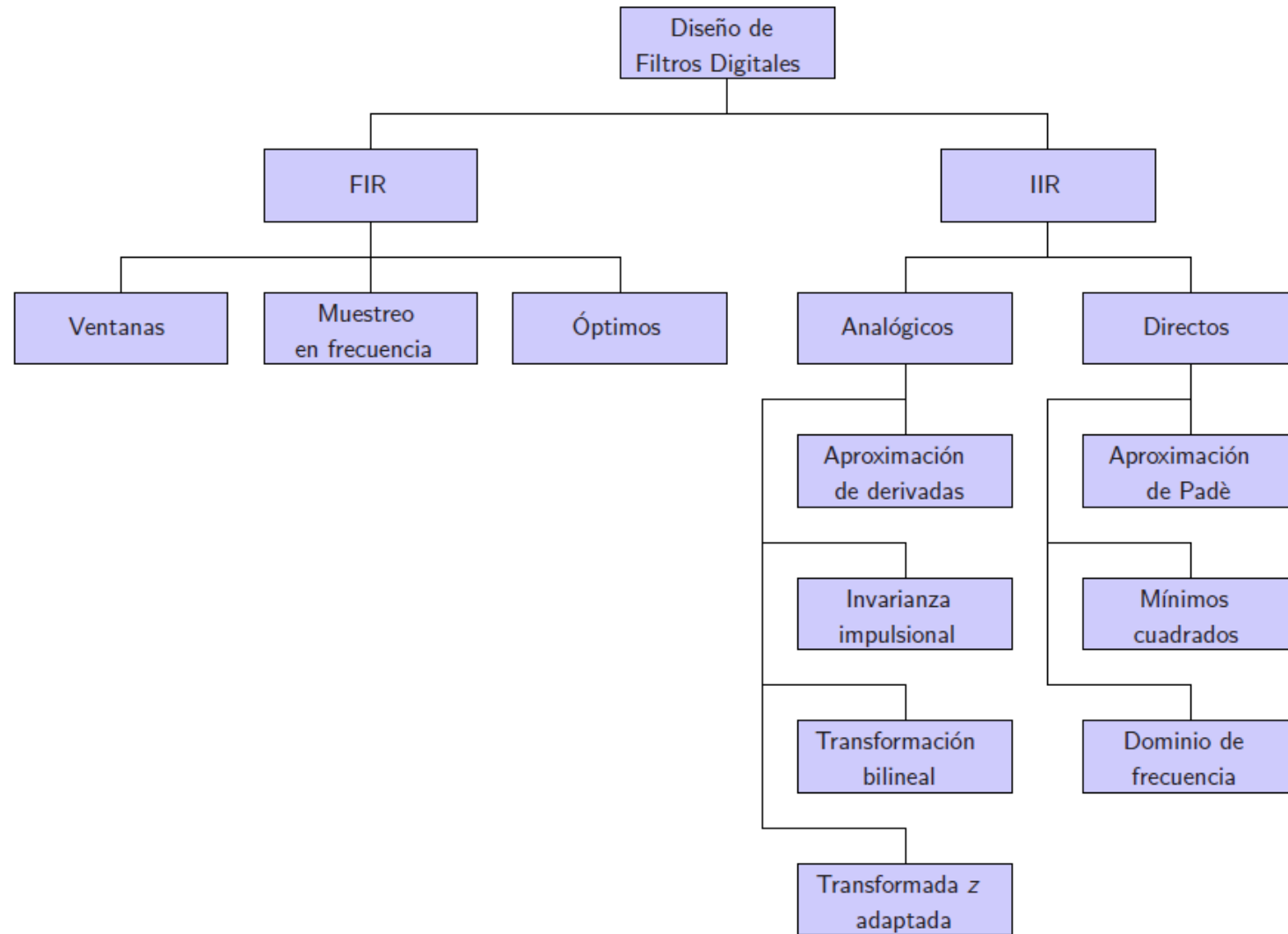
En aplicaciones reales se debe especificar entonces antes de diseñar el filtro:

1. Máximo rizado permitido en la banda de paso  $\delta_1$ .
2. Máximo rizado permitido en la banda de rechazo  $\delta_2$ .
3. Frecuencia de corte de la banda de paso  $\omega_p$ .
4. Frecuencia de corte de la banda de rechazo  $\omega_s$ .

# Consecuencias adicionales de la causalidad (5)

- El grado en que  $H(\omega)$  cumple las especificaciones depende en parte de los criterios utilizados para seleccionar  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$ , así como del número de polos y ceros utilizados.
- Generalmente el diseño de filtros se concentra en el tipo pasa bajos, para lo que existen gran variedad de técnicas.

# Consecuencias adicionales de la causalidad (6)





# Consecuencias adicionales de la causalidad (7)

- Existen métodos para transformar los filtros pasa bajos a otros tipos como paso altos, o paso banda.

# Filtros FIR

---

# Filtros FIR

(1)

- Para un filtro FIR de longitud  $M$  la relación de entrada-salida está dada por la convolución y es

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k)$$

con función de transferencia:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k} = \frac{1}{z^{M-1}} \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{M-1-k}$$

cuyas raíces son los ceros del filtro.

- Este filtro tiene **fase lineal** si su respuesta impulsional satisface las simetrías:

$$h(n) = \pm h(M - 1 - n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

- Estas simetrías tienen implicaciones para la función de transferencia  $H(z)$ , que se describen a continuación.

# Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud par (1)

- Para  $M$  par:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) \left[ z^{\frac{M-1-2k}{2}} \pm z^{-\frac{M-1-2k}{2}} \right]$$

## Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud par (2)

- Con  $z = e^{j\omega}$  y asumiendo simetría circular par  $h(n) = h(M - 1 - n)$  entonces:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) \left[ e^{\frac{j\omega(M-1-2k)}{2}} + e^{\frac{-j\omega(M-1-2k)}{2}} \right] \frac{2}{2} \\ &= e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}} 2 \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) \cos\left(\frac{\omega}{2}(M-1-2k)\right) \\ &= e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}} H_r(\omega) \end{aligned}$$

donde  $H_r(\omega)$  es una función real por corresponder a una suma ponderada con coeficientes reales  $h(k)$  y términos cosenoidales con argumentos reales.

## Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud par (3)

- De forma equivalente, para el caso antisimétrico circular  $h(n) = -h(M-1-n)$ :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) \left[ e^{\frac{j\omega(M-1-2k)}{2}} - e^{-\frac{j\omega(M-1-2k)}{2}} \right] \frac{2j}{2j} \\ &= e^{-j\left(\frac{\omega(M-1)}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} 2 \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k) \operatorname{sen} \left( \frac{\omega}{2} (M-1-2k) \right) \\ &= e^{-j\left(\frac{\omega(M-1)}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} H_r(\omega) \end{aligned}$$

# Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud impar (1)

- Para  $M$  impar:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} h(k) \left[ z^{\frac{M-1-2k}{2}} \pm z^{-\frac{M-1-2k}{2}} \right] \right\}$$



## Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud impar (2)

- Con simetría circular impar  $h(n) = h(M - 1 - n)$  en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}} \left[ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} h(k) \cos\left(\frac{\omega}{2}(M-1-2k)\right) \right] \\ &= e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}} H_r(\omega) \end{aligned}$$

## Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud impar (3)

- Con antisimetría circular  $h(n) = -h(M - 1 - n)$ , que además implica  $h\left(\frac{M-1}{2}\right) = 0$ :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j\left(\omega\frac{M-1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} 2 \sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} h(k) \sin\left(\frac{\omega}{2}(M-1-2k)\right) \\ &= e^{-j\left(\omega\frac{M-1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} H_r(\omega) \end{aligned}$$

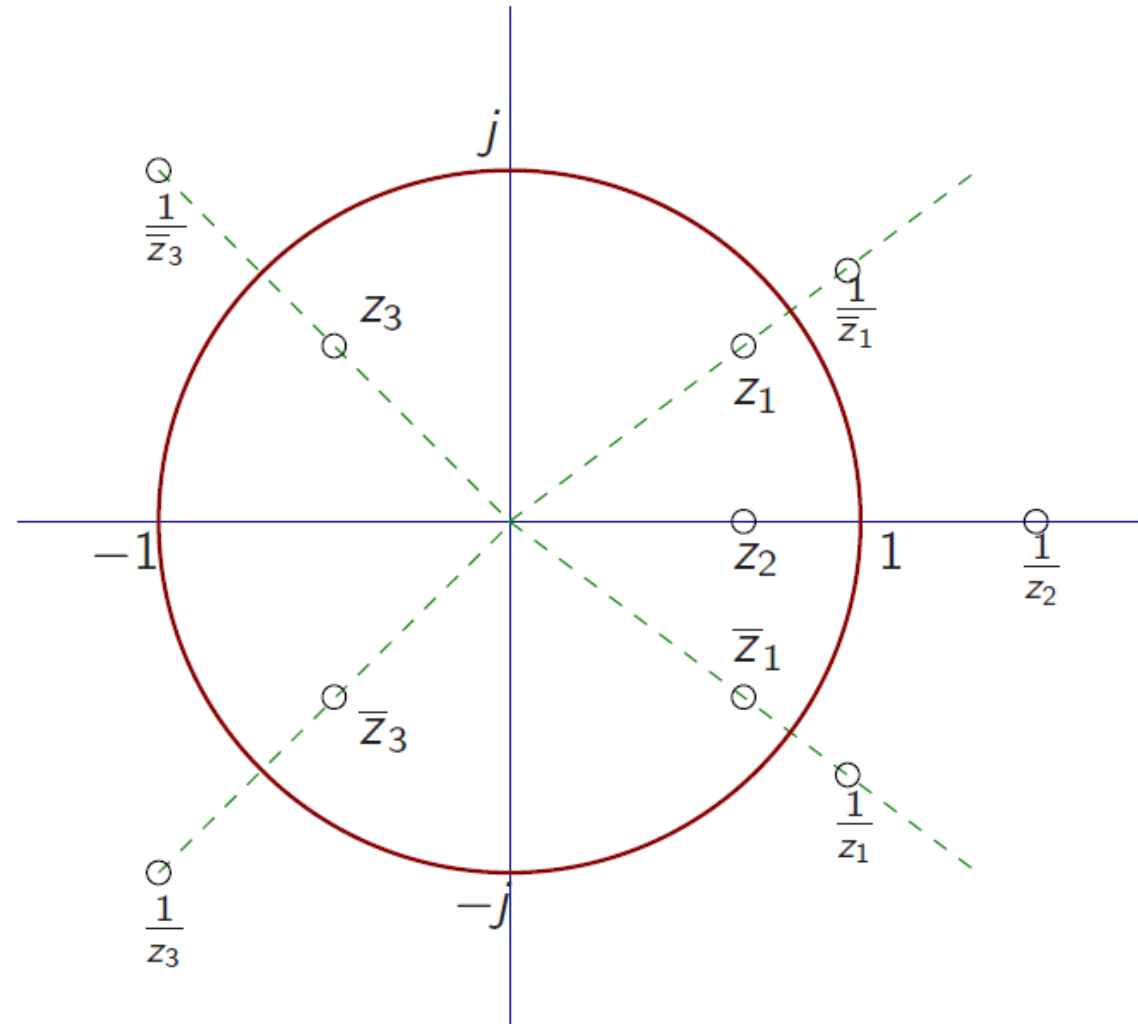
## Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud impar (4)

- Nótese que se cumple además:

$$z^{-(M-1)}H(z^{-1}) = \pm H(z)$$

Lo que implica que si  $z_k$  es un cero, entonces  $z_k^*$ ,  $1/z_k$  y  $1/z_k^*$  también lo son.

## Implicaciones de simetría de $h(n)$ finita: Caso de longitud impar (5)



# Resumen: Simetrías en filtros FIR de fase lineal

Simetría	Simétrica $h(n) = h(M - 1 - n)$	Antisimétrica $h(n) = -h(M - 1 - n)$
$M$ par	$H_r(0) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} h(k)$	$H_r(0) = 0$  no apto como filtro paso bajos
$M$ impar	$H_r(0) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} h(k)$	$H_r(0) = H_r(\pi) = 0$  no apto como filtro paso bajos o altos

# Filtros FIR: diseño por el método de ventana

---

# Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (1)

- El proceso de diseño de filtros FIR por el método de ventanas tiene los pasos:
  1. Planteo de respuesta en frecuencia deseada  $H_d(\omega)$ .
  2. Cálculo de la respuesta al impulso deseada con  $IDFT\{H_d(k)\} = h_d(n)$ .
  3. Enventanado en el tiempo de la respuesta impulsional con  $h(n) = h_d(n)w(n)$ .

## Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (2)

- Sea  $H_d(\omega)$  la respuesta en frecuencia deseada, que usualmente sigue la forma de un filtro ideal.
- En general, el filtro es IIR, con  $h_d(n) \longleftrightarrow H_d(\omega)$  dada por la transformada inversa de Fourier

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- El filtro FIR se obtiene truncando  $h_d(n)$  por medio de una ventana, como por ejemplo la ventana rectangular

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



# Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (3)

- Es decir:

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n) & n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

# Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (4)

- En el dominio de la frecuencia:

$$H(\omega) = H_d(\omega) * W(\omega)$$

donde

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-j\omega n}$$

- Puesto que  $W(\omega)$  tiene generalmente un lóbulo central y lóbulos laterales, el efecto de la convolución es suavizar la respuesta  $H_d(\omega)$ .
- Para reducir el efecto de los lóbulos **laterales** se utilizan ventanas diferentes a la rectangular, caracterizadas por no tener cambios abruptos en el dominio del tiempo, lo que conduce a lóbulos menores en el dominio de la frecuencia.

## Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (5)

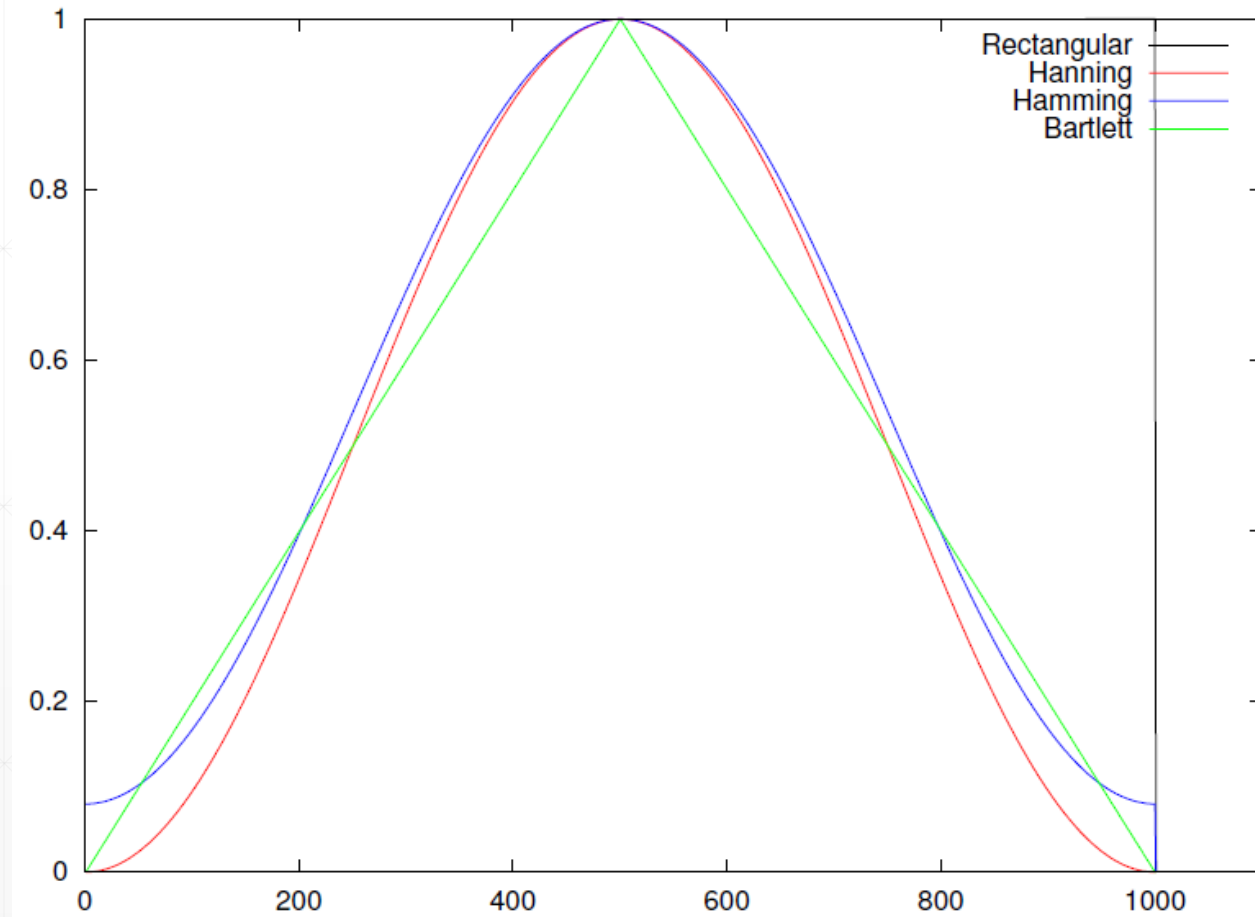
- Algunas ventanas típicas y sus características:

Ventana	$h(n), 0 \leq n \leq M - 1$	Ancho lobular	Pico lóbulo lateral [dB]
Rectangular	1	$4\pi/M$	-13
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 \left  n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$	$8\pi/M$	-27
Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$	$8\pi/M$	-32
Hanning	$\frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$	$8\pi/M$	-43

- La forma de la ventana afecta los lóbulos laterales y el lóbulo principal, mientras que el tamaño de la ventana afecta prácticamente únicamente al lóbulo principal.

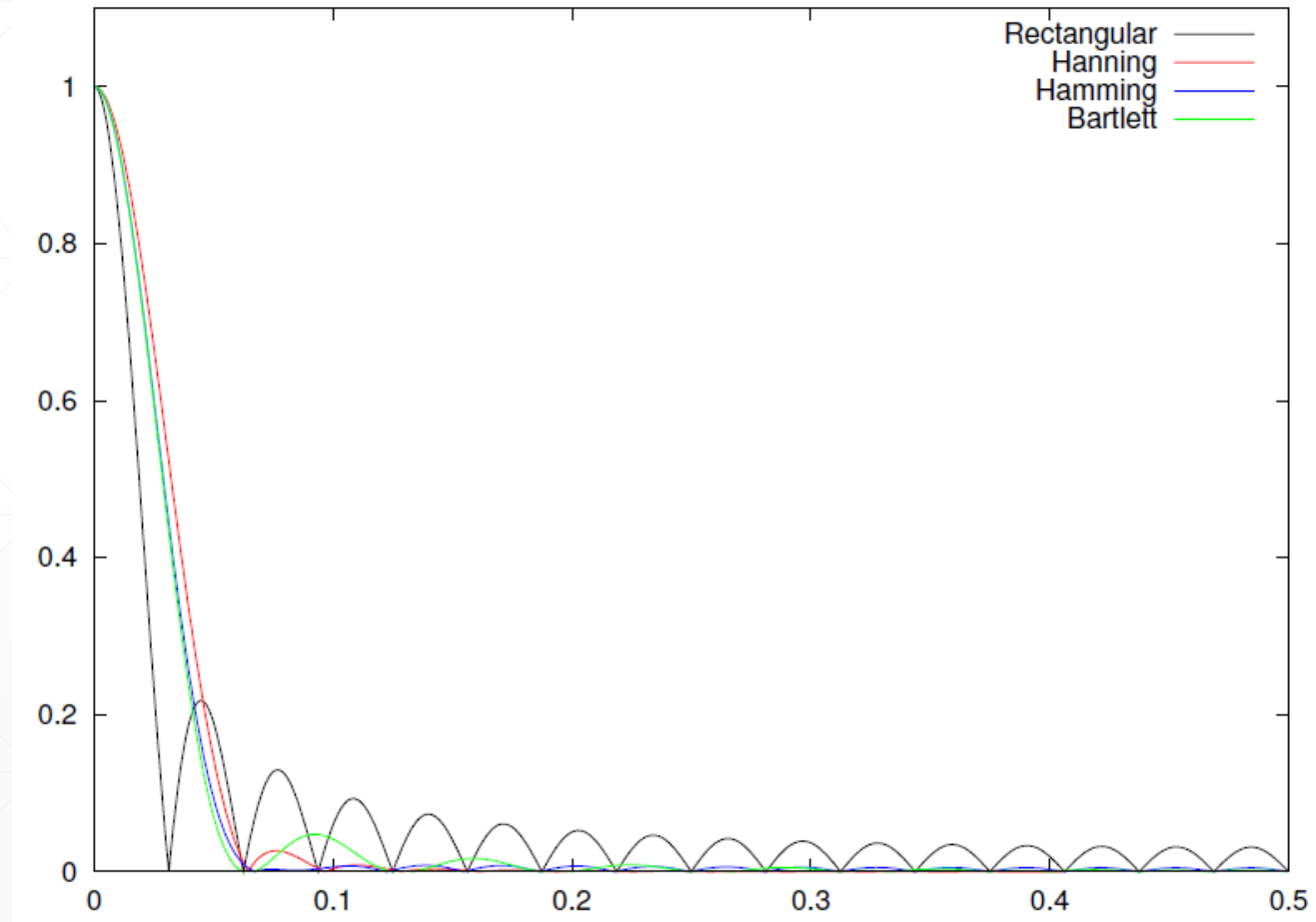
# Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (6)

- Ventanas en el dominio temporal



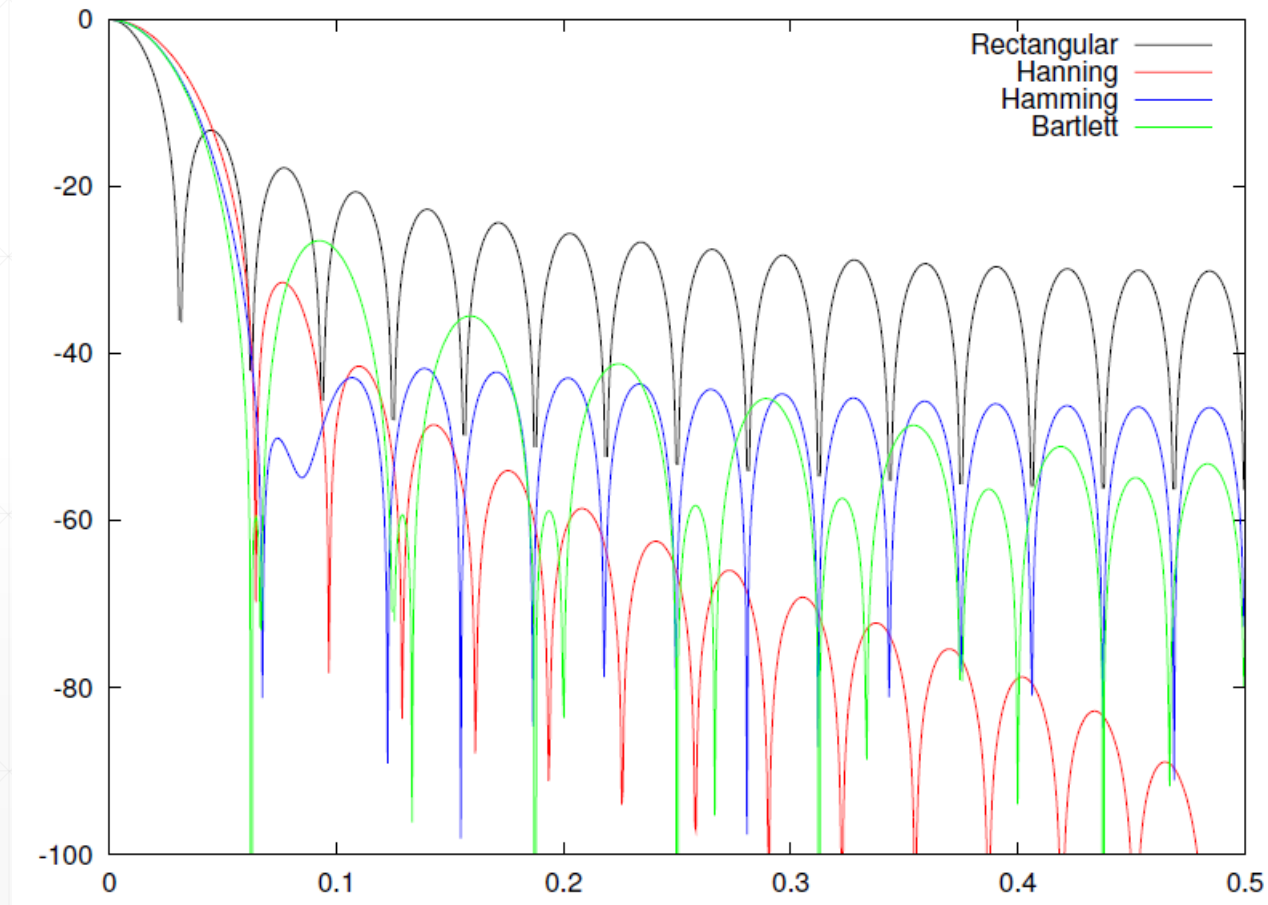
# Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (7)

- Ventanas en el dominio de la frecuencia (magnitud)



# Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (8)

- Ventanas en el dominio de la frecuencia (magnitud en dB)



## Diseño de filtros FIR por el método de ventanas (9)

- El truncamiento de  $h_d(n)$  conduce a un comportamiento oscilatorio cerca del límite de la banda de paso denominado **fenómeno de Gibbs**.
- Nótese que este método no permite mayor control sobre el valor de los parámetros  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\omega_S$ ,  $\omega_P$  resultantes.

# Ejemplo

(1)

Diseñe un filtro pasa bajos de longitud  $M$  que aproxime

$$H_d(\omega) = \begin{cases} e^{\frac{j\omega(M-1)}{2}} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



## Ejemplo

(2)

**Solución:** Se obtiene con la transformada inversa de Fourier

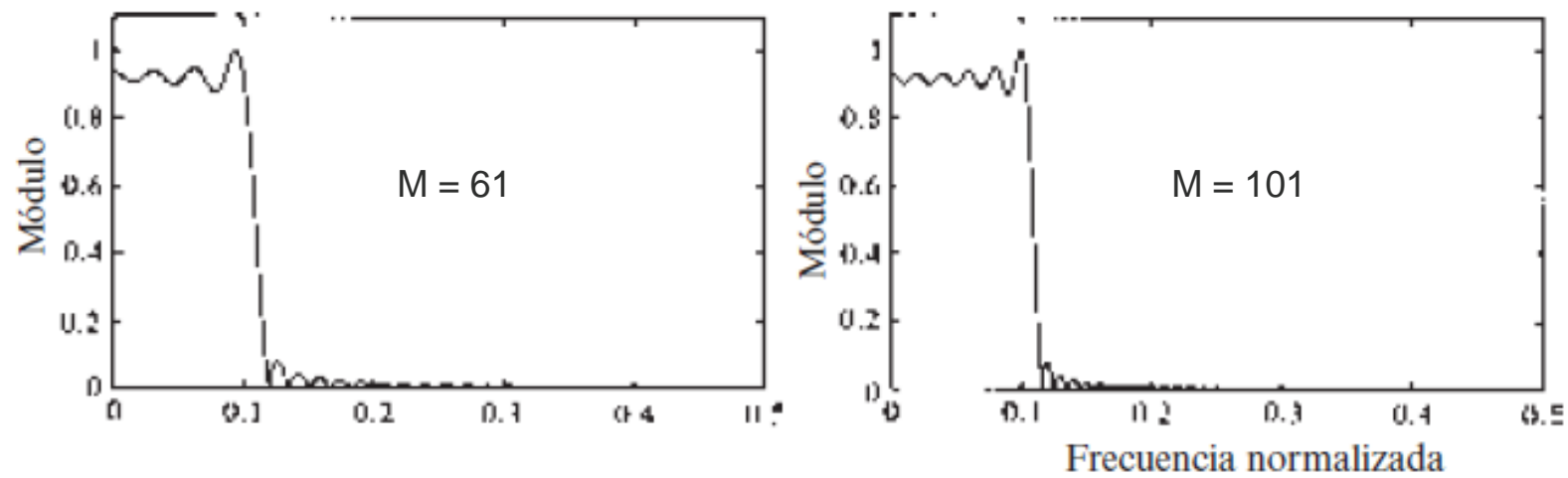
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} d\omega = \frac{\text{sen}\left(\omega_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$$

Para el filtro FIR se toman solo  $M$  muestras:

$$h(n) = \frac{\text{sen}\left(\omega_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}, \quad 0 \leq n \leq M-1$$

# Ejemplo

(3)



# Filtros FIR: diseño por el método de muestreo en frecuencia

---

# Diseño por el método de muestreo de frecuencia (1)

- Se muestrea la respuesta en frecuencia deseada en  $\left[\frac{M}{2}\right]$  para  $M$  par  $\left[\frac{M+1}{2}\right]$  para  $M$  impar y puntos equiespaciados

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M} (k + \alpha) \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} \quad M \text{ impar} \\ k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad M \text{ par} \\ \alpha = 0 \text{ ó } \frac{1}{2} \end{array}$$

y se calcula la respuesta impulsional  $h(n)$  correspondiente.

- Para reducir los lóbulos laterales se utilizan métodos numéricos de optimización que sitúan las muestras en la banda de transición.

## Diseño por el método de muestreo de frecuencia (2)

- Puesto que

$$H(k + \alpha) = H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right)$$
$$H(k + \alpha) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-\frac{j2\pi(k+\alpha)n}{M}}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

y con la ortogonalidad de la exponencial compleja se cumple:

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{\frac{j2\pi(k+\alpha)n}{M}}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

- Con  $\alpha = 0$  estas ecuaciones equivalen a la DFT e IDFT respectivamente.

## Diseño por el método de muestreo de frecuencia (3)

- Si  $h(n)$  es real, entonces

$$H(k + \alpha) = H^*(M - k - \alpha)$$

lo que justifica la utilización de  $\frac{M}{2}$  muestras en vez de  $M$ .

- Utilizando la simetría se obtiene

$$H(k + \alpha) = H_r \left( \frac{2\pi}{M} (k + \alpha) \right) e^{j \left[ \frac{\beta\pi}{2} - \frac{2\pi(k+\alpha)(M+1)}{2M} \right]}$$

donde  $\beta = 0$  si  $h(n)$  es simétrica y  $\beta = 1$  si  $h(n)$  es antisimétrica.

# Muestreo en frecuencia

Respuesta impulsional  $h(n) = h(M - 1 - n)$ : simetría circular

(1)

- $\alpha = 0$

$$H(k) = G(k)e^{j\frac{\pi k}{M}} \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \quad G(k) = -G(M - k)$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \left[ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} G(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad M \text{ impar}$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \left[ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} G(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad M \text{ par}$$

# Muestreo en frecuencia

Respuesta impulsional  $h(n) = h(M - 1 - n)$ : simetría circular

(2)

- $\alpha = \frac{1}{2}$

$$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{\frac{j\pi(2k+1)}{2M}}$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(M - k - \frac{1}{2}\right)$$

$$h(n) = \frac{2}{M} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad M \text{ impar}$$

$$h(n) = \frac{2}{M} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad M \text{ par}$$



# Muestreo en frecuencia

Respuesta impulsional  $h(n) = -h(M - 1 - n)$ : antisimetría circular

(1)

- $\alpha = 0$

$$H(k) = G(k)e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi k}{M}} \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \quad G(k) = G(M - k)$$

$$h(n) = -\frac{2}{M} \sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} G(k) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{M}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad M \text{ impar}$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \left[ (-1)^{n+1} G\left(\frac{M}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} G(k) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{M}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad M \text{ par}$$

# Muestreo en frecuencia

Respuesta impulsional  $h(n) = -h(M - 1 - n)$ : antisimetría circular (2)

- $\alpha = \frac{1}{2}$

$$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{j\pi(2k+1)}{2M}}$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$G\left(k + \frac{1}{2}\right) = -G\left(M - k - \frac{1}{2}\right), \quad G\left(\frac{M}{2}\right) = 0 \text{ para } M \text{ impar}$$

$$h(n) = \frac{2}{M} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad M \text{ impar}$$

$$h(n) = \frac{2}{M} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad M \text{ par}$$

# Ejemplo

(1)

Diseñe un filtro de longitud  $M = 15$  con respuesta impulsional  $h(n)$  simétrica y respuesta en frecuencia condicionada a:

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1 & k = 0,1,2,3 \\ 0,4 & k = 4 \\ 0 & k = 5,6,7 \end{cases}$$

## Ejemplo

(2)

**Solución:**  $h(n)$  es simétrica y en este caso  $\alpha = 0$ . Con  $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$  y las ecuaciones anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}h(0) = h(14) &= -0.014112893 \\h(1) = h(13) &= -0.001945309 \\h(2) = h(12) &= 0.040000004 \\h(3) = h(11) &= 0.01223454 \\h(4) = h(10) &= -0.09138802 \\h(5) = h(9) &= -0.01808986 \\h(6) = h(8) &= 0.3133176 \\h(7) &= 0.52\end{aligned}$$

# Filtros FIR: diseño por optimización

---

# Diseño de filtros óptimos

(1)

- El diseño de filtros se denomina óptimo si el error de aproximación entre la respuesta en frecuencia deseada y la actual se distribuye equitativamente a lo largo de las bandas de paso y rechazo.
- Dadas las frecuencias de corte para las bandas de paso y rechazo  $\omega_p$  y  $\omega_s$  respectivamente, el filtro debe satisfacer además:

$$1 - \delta_1 \leq H_r(\omega) \leq 1 + \delta_1 \quad |\omega| \leq \omega_p$$

$$-\delta_2 \leq H_r(\omega) \leq \delta_2 \quad |\omega| > \omega_s$$

por lo que  $\delta_1$  representa el rizado de la banda de paso y  $\delta_2$  la atenuación o rizado en la banda de rechazo.

- Utilizando los filtros simétricos y antisimétricos de fase lineal puede demostrarse que:

$$H_r(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$$

con  $Q(\omega)$  y  $P(\omega)$  dados en la tabla siguiente:

# Descomposición de filtros FIR en $P(\omega)$ y $Q(\omega)$

	Simétrico $h(n) = h(M-1-n)$	Antisimétrico $h(n) = -h(M-1-n)$
$M$ Impar	<p>Caso 1</p> $Q(\omega) = 1$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k) \cos \omega k$ $a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right) & k = 0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right) & k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \end{cases}$	<p>Caso 3</p> $Q(\omega) = \sin(\omega)$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-3)/2} \tilde{c}(k) \cos \omega k$ $\tilde{c}\left(\frac{M-3}{2}\right) = 2h(0)$ $\tilde{c}\left(\frac{M-5}{2}\right) = 4h(1)$ $\tilde{c}(k-1) - \tilde{c}(k+1) = 4h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), \quad 2 \leq k \leq \frac{M-5}{2}$ $\tilde{c}(0) + \frac{1}{2}\tilde{c}(2) = 2h\left(\frac{M-3}{2}\right)$
$M$ Par	<p>Caso 2</p> $Q(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \tilde{b}(k) \cos(\omega k)$ $\tilde{b}(0) = h\left(\frac{M}{2} - 1\right)$ $\tilde{b}(k) = 4h\left(\frac{M}{2} - k\right) - \tilde{b}(k-1), \quad 1 \leq k \leq \frac{M}{2} - 2$ $\tilde{b}\left(\frac{M}{2} - 1\right) = 4h(0)$	<p>Caso 4</p> $Q(\omega) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$ $P(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \tilde{d}(k) \cos(\omega k)$ $\tilde{d}\left(\frac{M}{2} - 1\right) = 4h(0)$ $\tilde{d}(k-1) - \tilde{d}(k) = 4h\left(\frac{M}{2} - k\right), \quad 2 \leq k \leq \frac{M}{2} - 1$ $\tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) = 2h\left(\frac{M}{2} - 1\right)$



# Error de aproximación

- El error de aproximación se define entonces como:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)] \\ &= W(\omega)[H_{dr}(\omega) - Q(\omega)P(\omega)] \\ &= W(\omega)Q(\omega) \left[ \frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right] \end{aligned}$$

- $W(\omega)$  es una función de ponderación de error que usualmente se define como:

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_1 & \omega \text{ en la banda de paso} \\ \delta_2 & \omega \text{ en la banda de rechazo} \\ 1 & \omega \text{ en la banda de rechazo} \end{cases}$$

- $H_{dr}(\omega)$  la respuesta ideal del filtro deseada que es 1 en la banda de paso y cero en la de rechazo.

# Replanteamiento del error de aproximación (1)

- Con:

$$\hat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega)$$

$$\hat{H}_{dr}(\omega) = \frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)}$$

el error se puede reescribir como:

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)]$$

- El diseño del filtro consiste en buscar los parámetros

$$\{\alpha(k)\} = \{a(k)\}, \{b(k)\}, \{c(k)\}, \{d(k)\}$$

## Replanteamiento del error de aproximación (2)

que conducen al menor valor máximo de  $|E(\omega)|$

$$\arg \min_{\{\alpha(k)\}} \left[ \max_{\omega \in S} |E(\omega)| \right] = \arg \min_{\{\alpha(k)\}} \left[ \max_{\omega \in S} \left| \hat{W}(\omega) \left[ \hat{H}_{dr} - \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(\omega k) \right] \right| \right]$$

- $S$  representa el conjunto (disjunto) de bandas sobre las que se realiza la optimización.
- Este problema de optimización requiere también métodos numéricos de optimización (por ejemplo el algoritmo de intercambio de Remez) basados en el teorema de la alternancia.

## Replanteamiento del error de aproximación (3)

- El teorema de alternancia establece que la función de error  $E(\omega)$  debe exhibir al menos  $L + 2$  frecuencias extremas en  $S$ , es decir, deben existir al menos  $L + 2$  frecuencias  $\{\omega_i\}$  en  $S$  tales que  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{L+2}$ ,  $E(\omega_i) = -E(\omega_{i-1})$  y  $|E(\omega_i)| = \underbrace{\max_{\omega \in S} |E(\omega)|}_{\omega \in S}$ ,  $i = 1, 2, \dots, L + 2$  para que  $P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(\omega k)$  sea la mejor y única aproximación ponderada de  $\hat{H}_{dr}(\omega)$ .
- El nombre del teorema se debe a la alternancia de signo entre dos extremos consecutivos.

# Diseño de filtros IIR: a partir de filtros analógicos

---

# Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos (1)

- El diseño de filtros analógicos es un campo maduro y bien desarrollado.
- Los filtros analógicos, descritos en el dominio de frecuencia compleja  $s = \sigma + j\Omega$  como:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

se transforman a filtros digitales utilizando algún mapeo adecuado entre las variables  $s$  y  $z$ .

## Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos (2)

- La función de transferencia  $H_a(s)$  se relaciona con la respuesta impulsional  $h(t)$  a través de la Transformada de Laplace:

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

que teniendo una forma racional está relacionada con la ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

donde  $x(t)$  representa la entrada del filtro y  $y(t)$  su salida.

## Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos (3)

- Puesto que el sistema descrito por  $H_a(s)$  es estable si sus polos se encuentran al lado izquierdo del eje  $\sigma = 0$  entonces el mapeo de  $s$  a  $z$  debe:

1. Transformar  $s = j\Omega$  en la circunferencia unitaria en el plano  $z$ .
2. El semiplano izquierdo (LHP) de  $s$  debe corresponder con el interior de la circunferencia unitaria.

- Un filtro tiene fase lineal si:

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

- Con filtros FIR esto se utiliza para ubicar los ceros, pero con filtros IIR esto implica que cada polo dentro de la circunferencia unitaria en  $z$  tiene otro polo correspondiente fuera de ella, lo que implica que el filtro será inestable.



## Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos (4)

- En otras palabras, si se requiere un filtro de fase lineal, debe utilizarse un filtro FIR como los tratados en la sección anterior.
- Con filtros IIR usualmente se enfoca el diseño a la respuesta en **magnitud**, dejando que las interrelaciones existentes entre fase y magnitud determinen la fase, según corresponda con la metodología de diseño utilizada.

# Diseño de filtros IIR: por aproximación de derivadas

---

# Diseño de filtros IIR por aproximación de derivadas (1)

- Si se cuenta con la ecuación diferencial del filtro:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

se pueden aproximar las derivadas haciendo uso de:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$

con el intervalo de muestreo  $T$ .

## Diseño de filtros IIR por aproximación de derivadas (2)

- Transformando al dominio  $s$  y  $z$  se tiene:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

- Puede deducirse de forma similar que la  $k$ -ésima derivada resulta en la relación:

$$s^k = \left( \frac{1 - z^{-1}}{T} \right)^k$$

por lo que la aproximación para el filtro IIR digital es

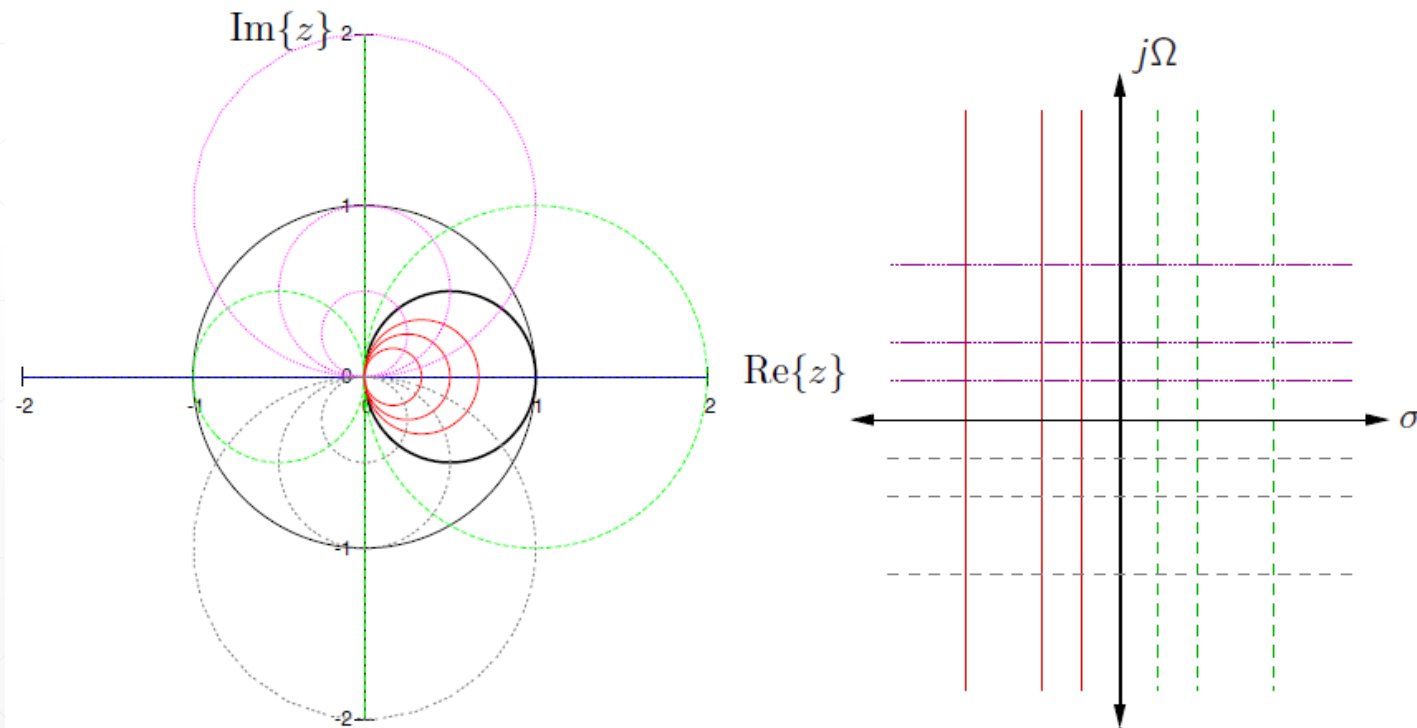
$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

## Diseño de filtros IIR por aproximación de derivadas (3)

- La equivalencia entre  $s$  y  $z$  se puede derivar de

$$z = \frac{1}{1 - sT}$$

mapeo que se ilustra en la siguiente figura



## Diseño de filtros IIR por aproximación de derivadas (4)

- Nótese que los polos del filtro digital solo se ubicarán en frecuencias pequeñas, lo que restringe la utilidad de este método a solo filtros paso bajo y paso banda con frecuencias resonantes relativamente bajas.

# Diseño de filtros IIR: por invarianza impulsional

---

# Diseño de filtros IIR por invarianza impulsional (1)

- Este método consiste en buscar una respuesta impulsional del filtro digital que corresponda a la respuesta impulsional muestreada del filtro analógico:

$$h(n) = h(t) \Big|_{t=nT}, \quad n = 0, 1, \dots$$

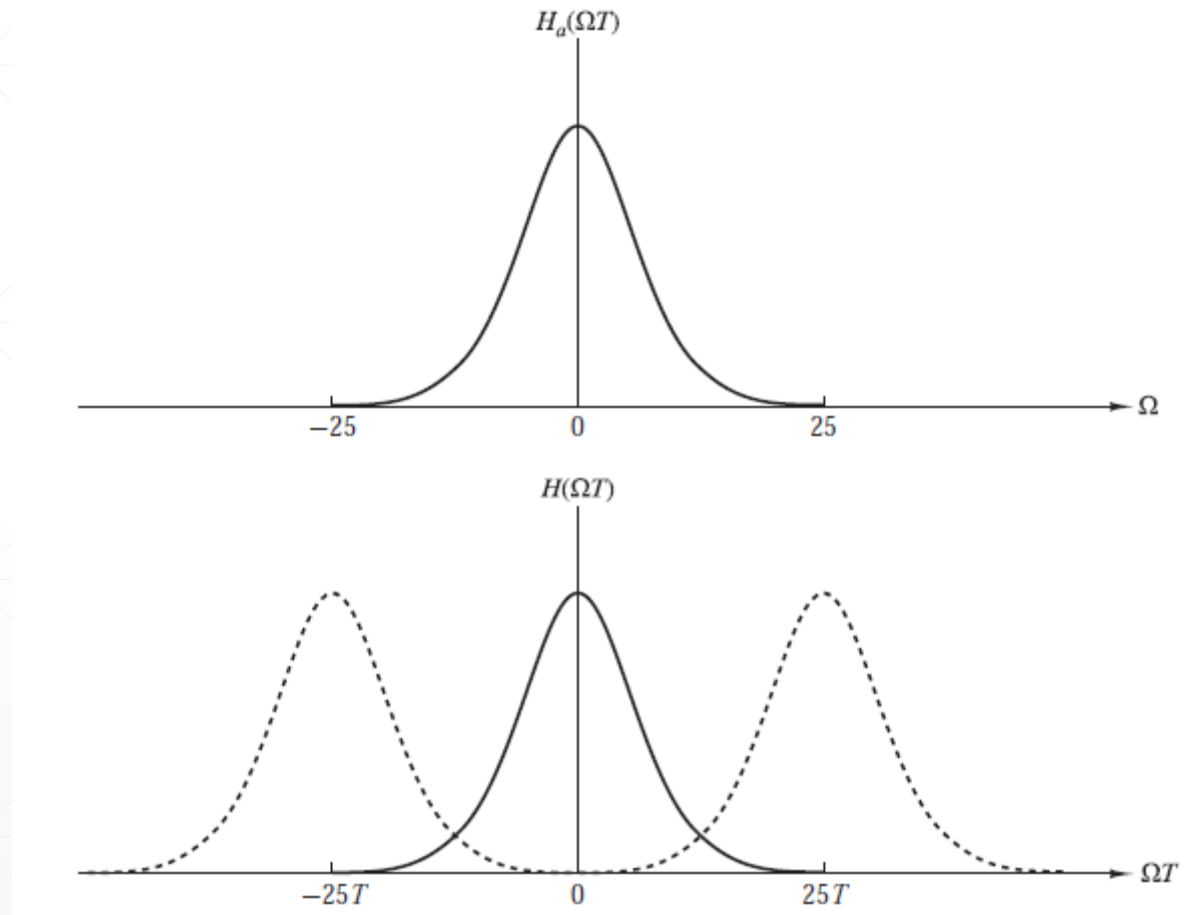
- El muestreo en el tiempo conduce a una extensión periódica aditiva:

$$H(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\omega F_s - 2\pi F_s k)$$

con la frecuencia de muestreo  $F_s = 1/T$ .



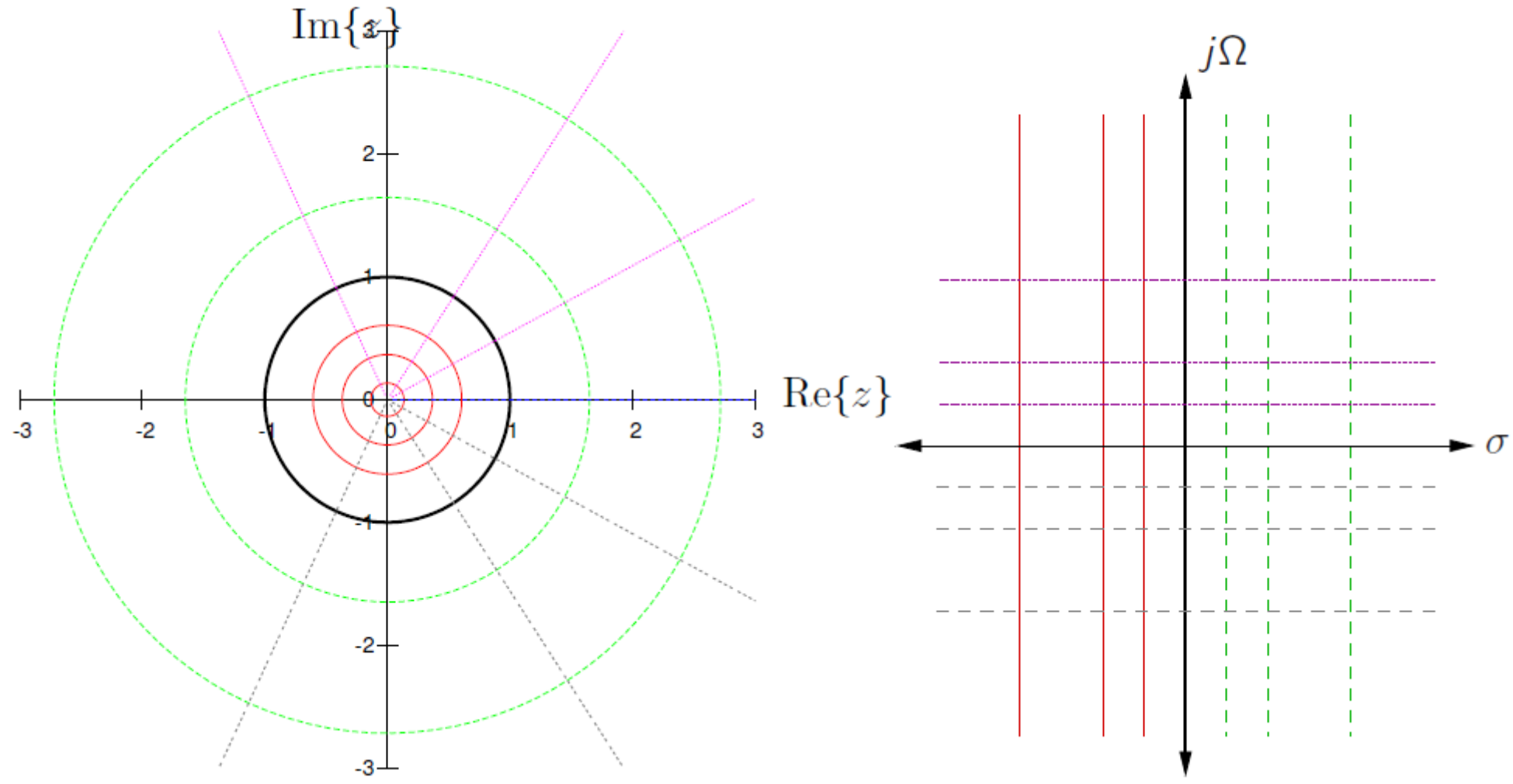
# Diseño de filtros IIR por invarianza impulsional (2)



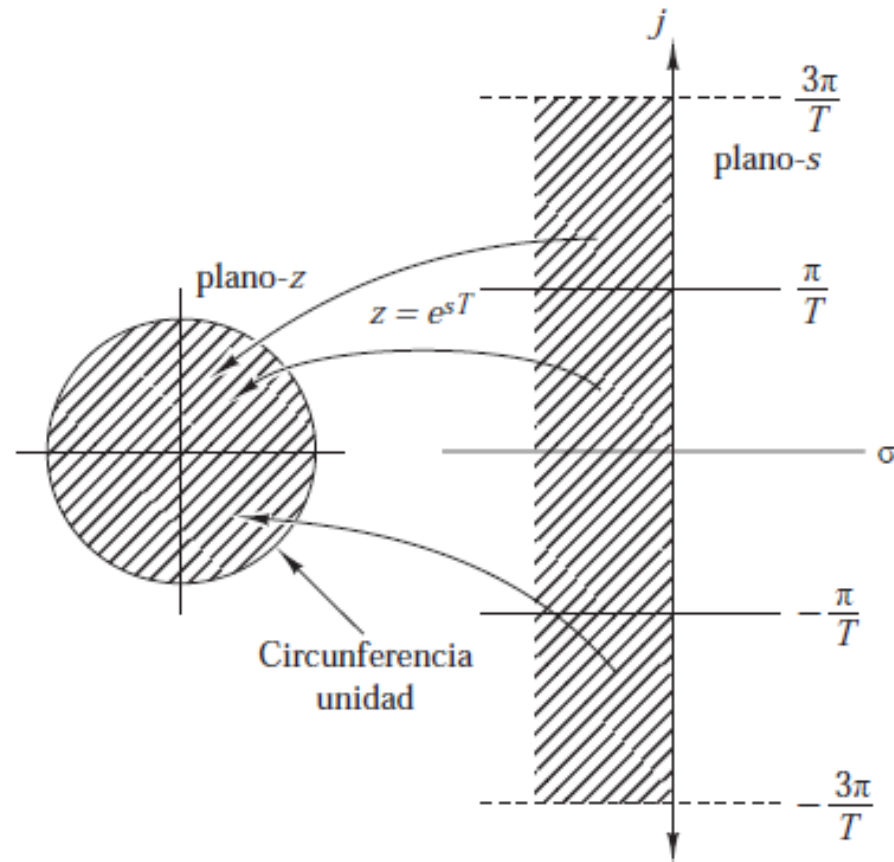
## Diseño de filtros IIR por invarianza impulsional (3)

- El aliasing que ocurre a altas frecuencias hace este método inapropiado para el diseño de filtros paso alto.
- En este caso puede demostrarse que la equivalencia entre los dos dominios es  $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} = r e^{j\omega}$  con  $r = e^{\sigma T}$  y  $\omega = \Omega T$ .
- El semiplano izquierdo (LHP) corresponde al interior de la circunferencia unitaria ( $r < 1$ ).
- Todos los intervalos de frecuencia  $(2k - 1)\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq (2k + 1)\frac{\pi}{T}$  se proyectan en la circunferencia, lo que hace de esta correspondencia una relación inyectiva que proviene del efecto de aliasing debido al muestreo.

# Diseño de filtros IIR por invarianza impulsional (4)



# Diseño de filtros IIR por invarianza impulsional (5)



# Diseño de filtros IIR por invarianza impulsional (6)

- Puede demostrarse que el filtro analógico

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^M \frac{c_k}{s - p_k} \text{ equivale a } H(z) = \sum_{k=1}^M \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

y aunque los polos siguen la relación  $z_k = e^{p_k T}$ , esto no se satisface para los ceros.

# Diseño de filtros IIR: por transformada $z$ adaptada

---

# Diseño de filtros IIR por transformada $z$ adaptada

- De forma similar al diseño por invarianza impulsional, se utiliza aquí el mapeo  $z = e^{sT}$ , pero tanto para polos como para ceros.
- La transformación  $z$  adaptada se le denomina a la equivalencia entre  $(s - a)$  y  $(1 - e^{aT} z^{-1})$ .
- De esta forma

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \text{ es equivalente a } H(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - e^{z_k T} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{p_k T} z^{-1})}$$

- Con este método debe seleccionarse  $T$  lo suficientemente pequeño para evitar el aliasing.

# Diseño de filtros IIR: por transformación bilineal

---



# Diseño de filtros IIR por transformación bilineal (1)

- En este método se utiliza la relación

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

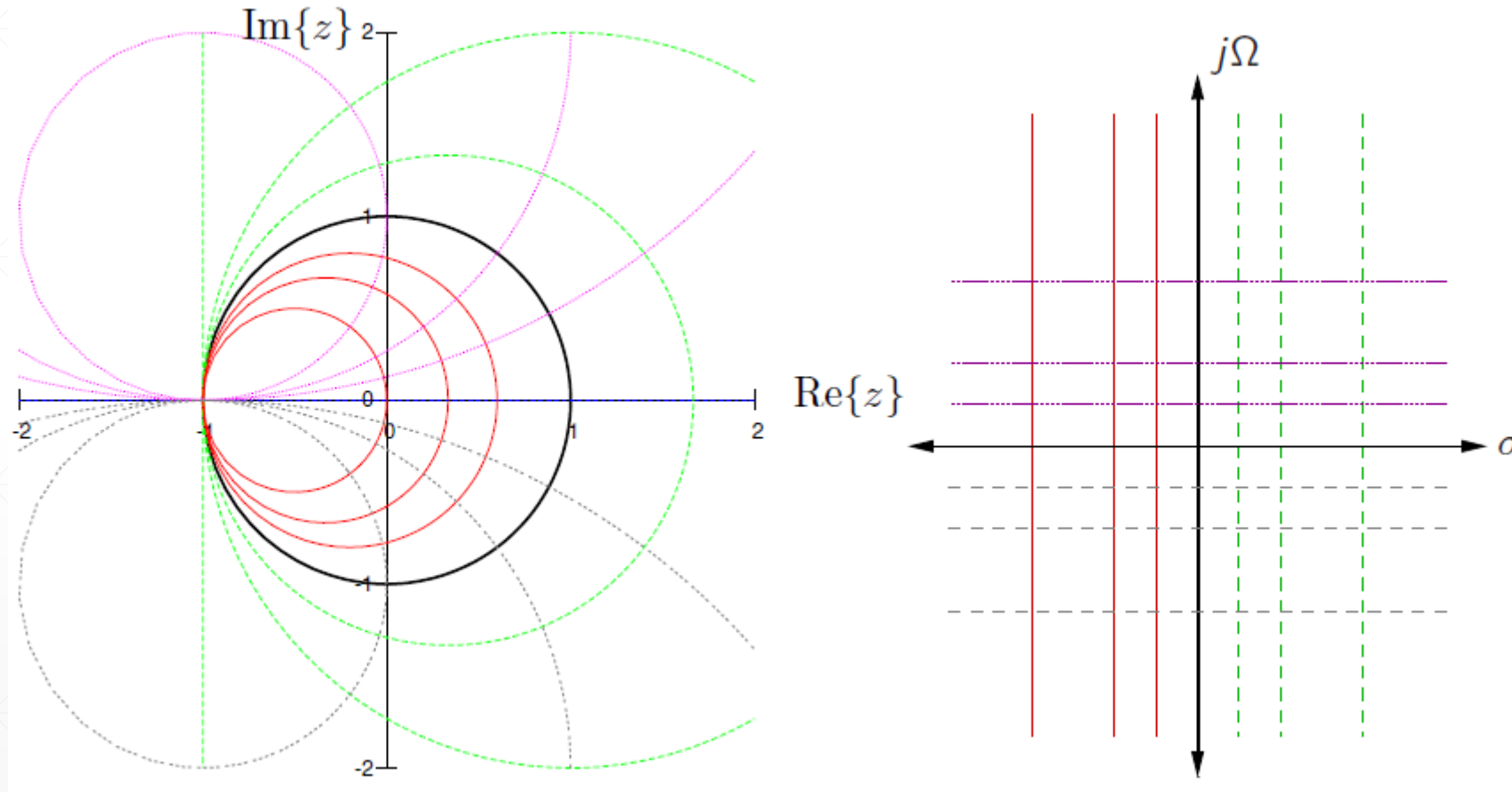
denominada relación bilineal y derivada de la fórmula trapezoidal para integración numérica.

- Este método es apto para transformar filtros paso alto y paso banda por tener una representación biyectiva entre  $\omega$  y  $\Omega$ .
- Con

$$z = -\frac{Ts + 2}{Ts - 2}$$

se obtiene el mapeo mostrado en la figura:

# Diseño de filtros IIR por transformación bilineal (2)



# Filtros analógicos

---

# Filtros analógicos

(1)

Las transformaciones anteriores pueden aplicarse para derivar filtros digitales, por ejemplo: filtros Butterworth, filtros Chebyshev (tipo I y II), filtros elípticos y filtros Bessel.

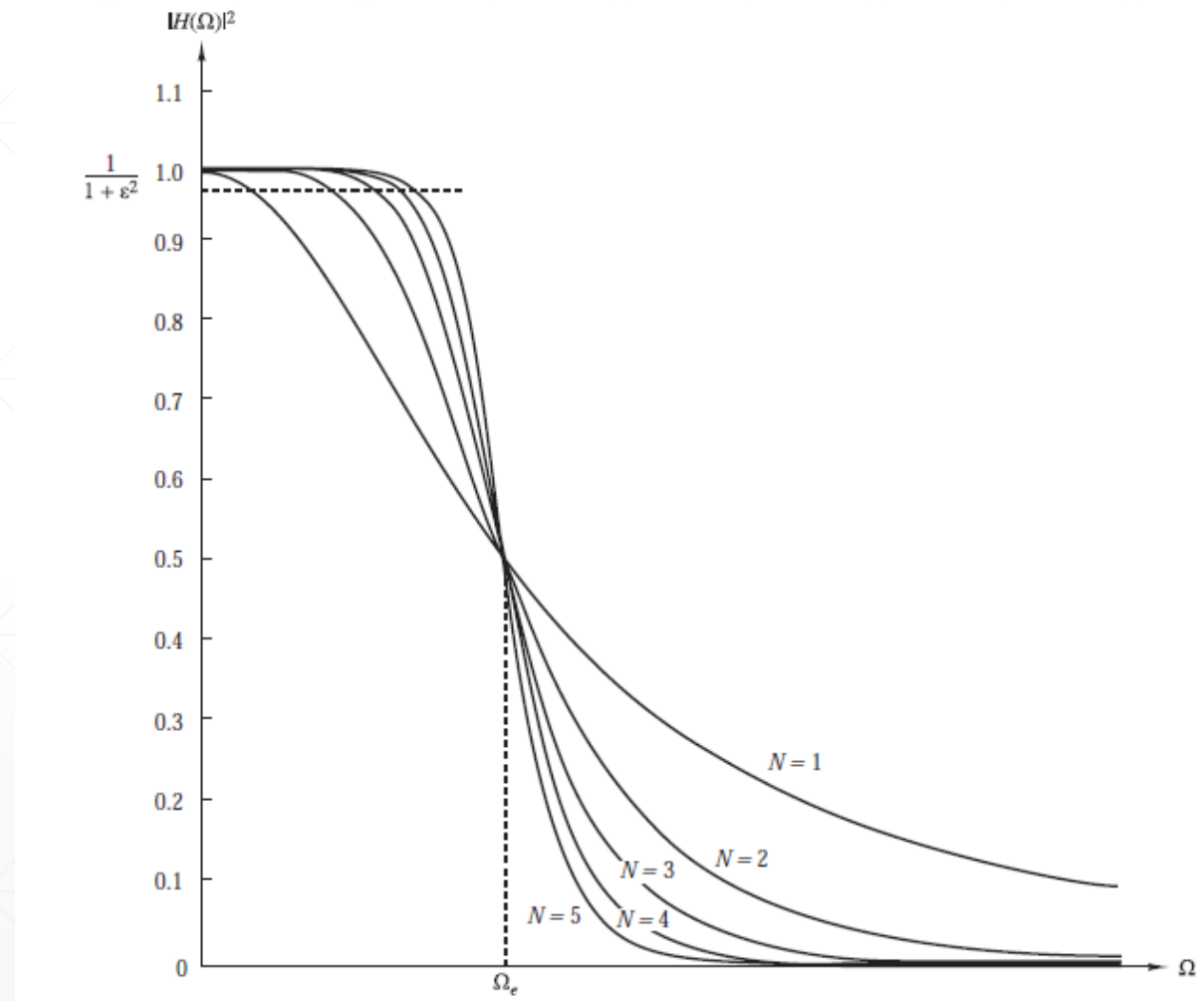
# Filtros analógicos

(2)

Filtro	Función de Transferencia	Características
Butterworth (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_C)^{2N}}$ $\Omega_C: \text{frecuencia de corte}$	$ H(\Omega) $ monótona en las bandas de paso y rechazo.
Chebyshev, Tipo I (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$ $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$	Rizado constante en la banda de paso y característica monótona en la banda de rechazo.
Chebyshev, Tipo II (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_p}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega}\right)} \right]}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$	Rizado constante en la banda de rechazo y característica monótona en la banda de paso.
Elíptico ó Cauer (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $U_N: \text{función elíptica Jacobiana de orden } N$	Rizado constante tanto en la banda de paso como en la de rechazo.
Bessel (todo-polos)	$H(s) = \frac{1}{B_N(s)}$ $B_N(s): \text{funciones de Bessel}$ $B_0(s) = 1$ $B_1(s) = s + 1$ $B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$	Respuesta de fase lineal en la banda de paso (aunque se destruye en la conversión a digital).

# Filtros analógicos: Butterworth

(3)



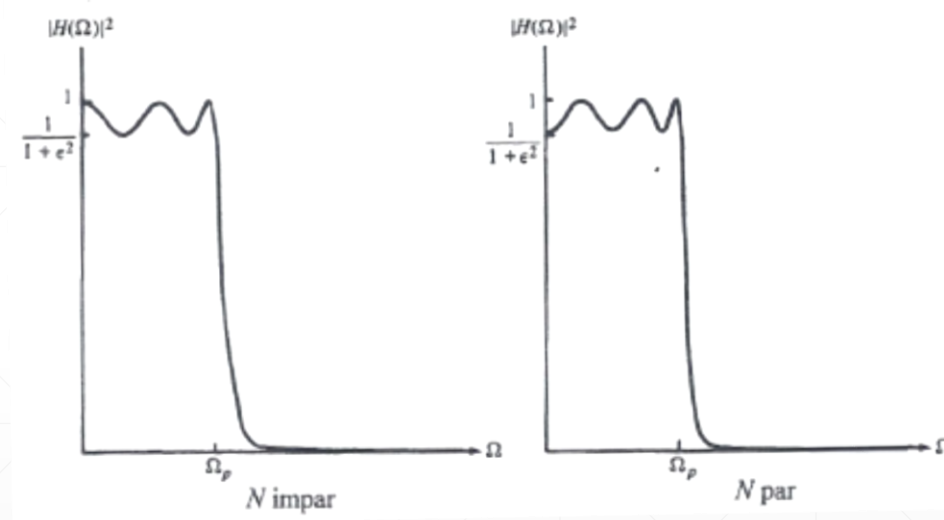
# Filtros analógicos

(4)

Filtro	Función de Transferencia	Características
Butterworth (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_C)^{2N}}$ $\Omega_C: \text{frecuencia de corte}$	$ H(\Omega) $ monótona en las bandas de paso y rechazo.
Chebyshev, Tipo I (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$ $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$	Rizado constante en la banda de paso y característica monótona en la banda de rechazo.
Chebyshev, Tipo II (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_p}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega}\right)} \right]}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$	Rizado constante en la banda de rechazo y característica monótona en la banda de paso.
Elíptico ó Cauer (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $U_N: \text{función elíptica Jacobiana de orden } N$	Rizado constante tanto en la banda de paso como en la de rechazo.
Bessel (todo-polos)	$H(s) = \frac{1}{B_N(s)}$ $B_N(s): \text{funciones de Bessel}$ $B_0(s) = 1$ $B_1(s) = s + 1$ $B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$	Respuesta de fase lineal en la banda de paso (aunque se destruye en la conversión a digital).

# Filtros analógicos: Chebyshev Tipo I

(5)





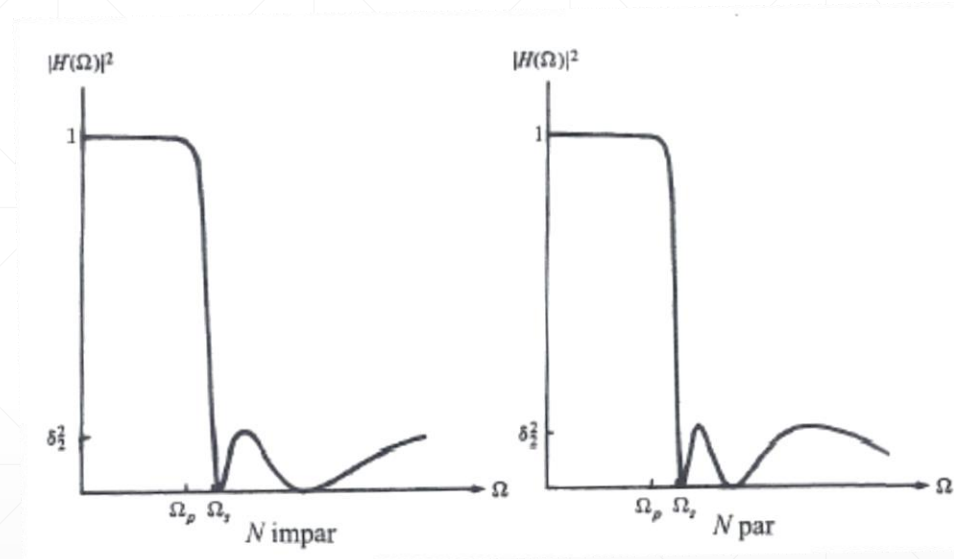
# Filtros analógicos

(6)

Filtro	Función de Transferencia	Características
Butterworth (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_C)^{2N}}$ $\Omega_C: \text{frecuencia de corte}$	$ H(\Omega) $ monótona en las bandas de paso y rechazo.
Chebyshev, Tipo I (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$ $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$	Rizado constante en la banda de paso y característica monótona en la banda de rechazo.
Chebyshev, Tipo II (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_p}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega}\right)} \right]}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$	Rizado constante en la banda de rechazo y característica monótona en la banda de paso.
Elíptico ó Cauer (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $U_N: \text{función elíptica Jacobiana de orden } N$	Rizado constante tanto en la banda de paso como en la de rechazo.
Bessel (todo-polos)	$H(s) = \frac{1}{B_N(s)}$ $B_N(s): \text{funciones de Bessel}$ $B_0(s) = 1$ $B_1(s) = s + 1$ $B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$	Respuesta de fase lineal en la banda de paso (aunque se destruye en la conversión a digital).

# Filtros analógicos: Chebyshev Tipo II

(7)



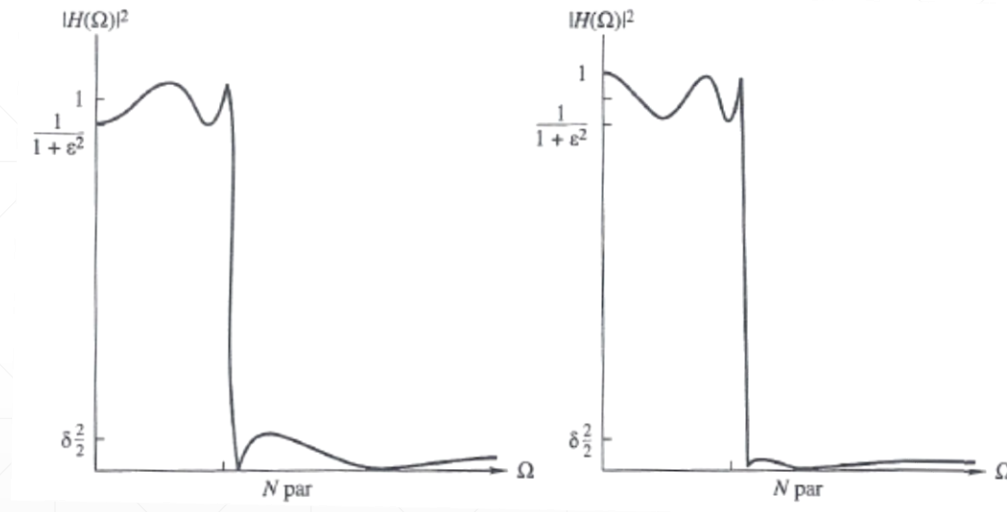
# Filtros analógicos

(8)

Filtro	Función de Transferencia	Características
Butterworth (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_C)^{2N}}$ $\Omega_C: \text{frecuencia de corte}$	$ H(\Omega) $ monótona en las bandas de paso y rechazo.
Chebyshev, Tipo I (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$ $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$	Rizado constante en la banda de paso y característica monótona en la banda de rechazo.
Chebyshev, Tipo II (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_p}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega}\right)} \right]}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$	Rizado constante en la banda de rechazo y característica monótona en la banda de paso.
Elíptico ó Cauer (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $U_N: \text{función elíptica Jacobiana de orden } N$	Rizado constante tanto en la banda de paso como en la de rechazo.
Bessel (todo-polos)	$H(s) = \frac{1}{B_N(s)}$ $B_N(s): \text{funciones de Bessel}$ $B_0(s) = 1$ $B_1(s) = s + 1$ $B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$	Respuesta de fase lineal en la banda de paso (aunque se destruye en la conversión a digital).

# Filtros analógicos: elíptico

(9)



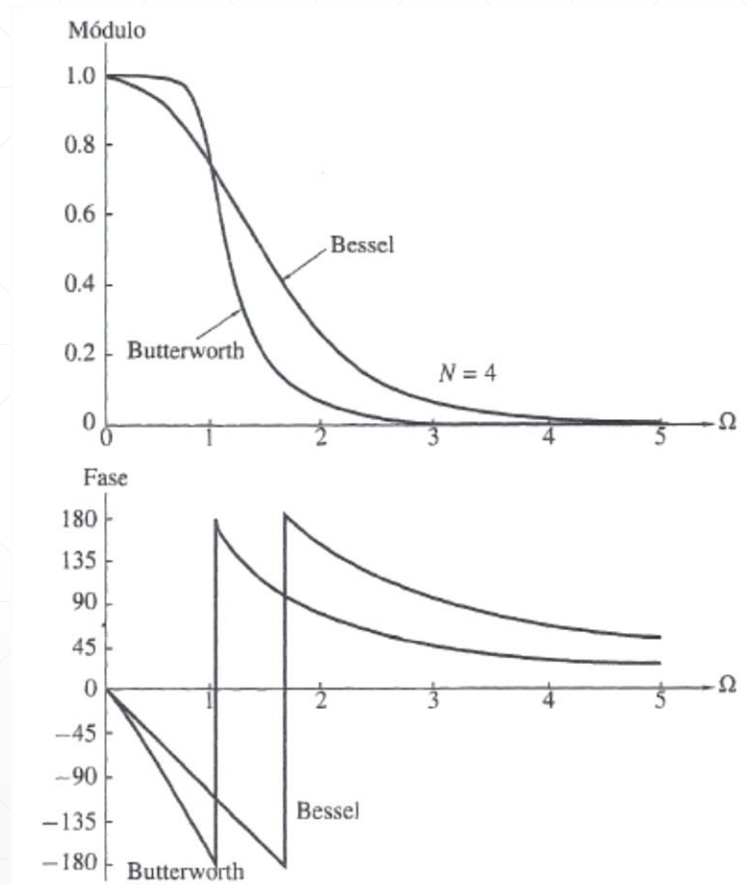
# Filtros analógicos

(10)

Filtro	Función de Transferencia	Características
Butterworth (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_C)^{2N}}$ $\Omega_C: \text{frecuencia de corte}$	$ H(\Omega) $ monótona en las bandas de paso y rechazo.
Chebyshev, Tipo I (todo-polos)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$ $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$	Rizado constante en la banda de paso y característica monótona en la banda de rechazo.
Chebyshev, Tipo II (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[ \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_p}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_S}{\Omega}\right)} \right]}$ $T_N: \text{polinomio de Chebyshev}$	Rizado constante en la banda de rechazo y característica monótona en la banda de paso.
Elíptico ó Cauer (polos y ceros)	$ H(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$ $U_N: \text{función elíptica Jacobiana de orden } N$	Rizado constante tanto en la banda de paso como en la de rechazo.
Bessel (todo-polos)	$H(s) = \frac{1}{B_N(s)}$ $B_N(s): \text{funciones de Bessel}$ $B_0(s) = 1$ $B_1(s) = s + 1$ $B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$	Respuesta de fase lineal en la banda de paso (aunque se destruye en la conversión a digital).

# Filtros analógicos: bessel

(11)



# Transformación de Frecuencia

---

# Transformación de Frecuencia

- Hay dos maneras de obtener un filtro digital paso bajo, paso alto, paso banda o supresor de banda a partir de un filtro paso bajo analógico:
  1. Transformar en el dominio analógico al filtro deseado, y luego usar uno de los mapeos de  $s$  a  $z$  presentados anteriormente para transformarlo al dominio digital.
  2. Transformar el filtro paso bajo a un equivalente paso bajo digital, para luego hacer la transformación al filtro deseado en el dominio digital.
- Para el primer caso se utilizan las transformaciones mostradas en la siguiente tabla.
- Para el segundo caso, se presentan las modificaciones en la subsiguiente tabla.



# Transformaciones de frecuencia para filtros analógicos

Tipo de filtro deseado	Transformación	Nuevas frecuencias de corte
Paso bajo	$s \rightarrow \frac{\Omega_P}{\Omega'_P} s$	$\Omega'_P$
Paso alto	$s \rightarrow \frac{\Omega_P \Omega'_P}{s}$	$\Omega'_P$
Paso banda	$s \rightarrow \Omega_P \frac{s^2 + \Omega_I \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_I)}$	$\Omega_u, \Omega_I$
Supresor de banda	$s \rightarrow \Omega_P \frac{s(\Omega_u - \Omega_I)}{s^2 + \Omega_I \Omega_u}$	$\Omega_u, \Omega_I$

$\Omega_P$ : frecuencia de corte del prototipo

$\Omega_I$ : frecuencia de corte inferior

$\Omega_u$ : frecuencia de corte superior

# Transformaciones de frecuencia para filtros digitales

Tipo de filtro deseado	Transformación	Constantes	Nuevas frecuencias de corte
Paso bajo	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	$a = \frac{\sin\left(\frac{\omega_p - \omega'_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_p + \omega'_p}{2}\right)}$	$\omega'_p$
Paso alto	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	$a = \frac{\cos\left(\frac{\omega_p + \omega'_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_p - \omega'_p}{2}\right)}$	$\omega'_p$
Paso banda	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$a_1 = -2\alpha \frac{K}{K+1}$ $a_2 = \frac{K-1}{K+1}$ $\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_u + \omega_l}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right)}$ $K = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2}$	$\omega_u, \omega_l$
Supresor de banda	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$a_1 = -2\alpha \frac{1}{K+1}$ $a_2 = \frac{1-K}{1+K}$ $\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_u + \omega_l}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right)}$ $K = \tan \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2}$	$\omega_u, \omega_l$
		$\omega_p$ : frecuencia de corte normalizada del prototipo $\omega_l$ : frecuencia de corte normalizada inferior $\omega_u$ : frecuencia de corte normalizada superior	

# Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Procesamiento Digital de Señales. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2011.

