Implementación de sistemas discretos

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2019

Introducción

- Hasta ahora
  - Análisis de sistemas LTI descritos mediante ecuaciones de diferencias lineales de coeficientes constantes.
  - Análisis por convolución, en el dominio del tiempo discreto.
  - Análisis en el dominio de la frecuencia
- En la práctica: diseño e implementación de sistemas digitales se tratan conjuntamente, y se deben considerar aspectos de costo, tamaño, hardware, potencia, etc.
- Algunos esquemas básicos de implementación se revisarán aquí.

Número de condición

Número de condición (1)

- Sistemas de procesamiento digital se implementan en computadores digitales.
- Se utilizan representaciones numéricas de precisión limitada.
- Limitaciones afectan el desempeño de los sistemas por lo que debe revisarse su comportamiento numérico.
- En análisis numérico, el **número de condición** de una función con respecto a un argumento indica, para el peor caso posible, cuánto puede cambiar el valor de la función con respecto a un cambio dado del argumento.
- Un problema es **mal condicionado** (*ill-conditioned*) si el número de condición es alto, es decir, si una pequeña perturbación del argumento produce cambios grandes en la salida.

Número de condición (2)

- Si el número de condición es pequeño (cercano a uno) entonces el problema es bien condicionado (*well-conditioned*).
- Número de condición es una propiedad de cada problema particular.
- Un problema puede ser **inherentemente** bien o mal condicionado.

Número de condición (3)

- **Ejemplo: Pronóstico del tiempo**

Pronóstico del tiempo es un problema inherentemente mal condicionado al depender no solo de un elevado número de variables en tiempo y espacio (presión atmosférica, humedad relativa, temperatura, velocidades de viento, etc.), sino que el resultado es sensible a cambios leves en los valores de dichas variables.

Número de condición (4)

- **Ejemplo: Sistema de ecuaciones lineales**

La solución de un sistema de ecuaciones lineales expresado como el sistema matricial $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de $N\mathrm{x}N$, $\underline{\mathbf{x}}$ y $\underline{\mathbf{b}}$ son vectores de N dimensiones, tiene un número de condición dependiente de la matriz $\mathbf{A}$ que determina cuánto afecta un error en los vectores $\underline{\mathbf{b}}$ los valores encontrados para $\underline{\mathbf{x}}$. Si el determinante de $\mathbf{A}$ es un número pequeño, entonces el problema es mal condicionado.

Número de condición (5)

- No solo el problema es bien o mal condicionado, sino también el algoritmo particular desarrollado para dar solución al problema.
- Si un problema es mal condicionado, ningún algoritmo podrá cambiar esa condición.
- Pero, un algoritmo mal condicionado puedo producir errores considerables en la solución de problemas inherentemente bien condicionados.
- Para el caso de algoritmos, el número de condición se redefine entonces como la razón de salida/entrada pero utilizando el algoritmo concreto.

Número de condición (6)

- **Ejemplo: Solución de sistemas lineales de ecuaciones**

Por ejemplo, en la solución de sistemas lineales de ecuaciones se utilizan algoritmos como la eliminación gaussiana (mal condicionado), la eliminación de Gauss-Jordan, descomposición de valores singulares (SVD), o la descomposición QR (bien condicionados), entre otros.

Problema mal condicionado (1)

- El problema que compete ahora es encontrar las raíces z_i de un polinomio expresado a través de sus coeficientes c_i:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{N} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_N z^N$$

Es decir, encontrar los valores z_i para los que se cumple $P(z_i) = 0$, para poder expresar al polinomio de la forma:

$$P(z) = \prod_{i=1}^{N} (z - z_i) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_N)$$

Problema mal condicionado (2)

- Este problema es en general mal condicionado, en el sentido de que pequeños cambios en los valores de c_i pueden producir grandes cambios en la posición de las raíces z_i.
- Este hecho que empeora conforme aumenta el orden del polinomio.

Problema mal condicionado (3)

- Las consecuencias del mal condicionamiento de éste problema en el procesamiento digital tienen que ver con el posicionamiento de polos y ceros en la implementación de un sistema utilizando ecuaciones de diferencias que tratan ya sea:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{N} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_N z^N$$

$$P(z) = \prod_{i=1}^{N} (z - z_i) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_N)$$

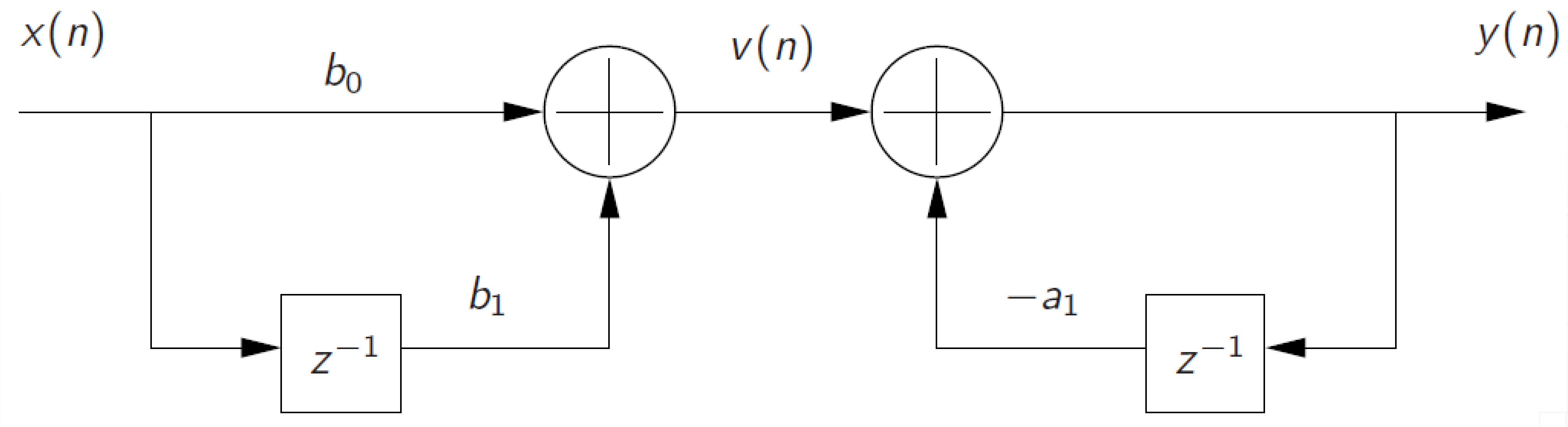
Estructuras de implementación

Estructuras directas

Considérese el sistema de primer orden:

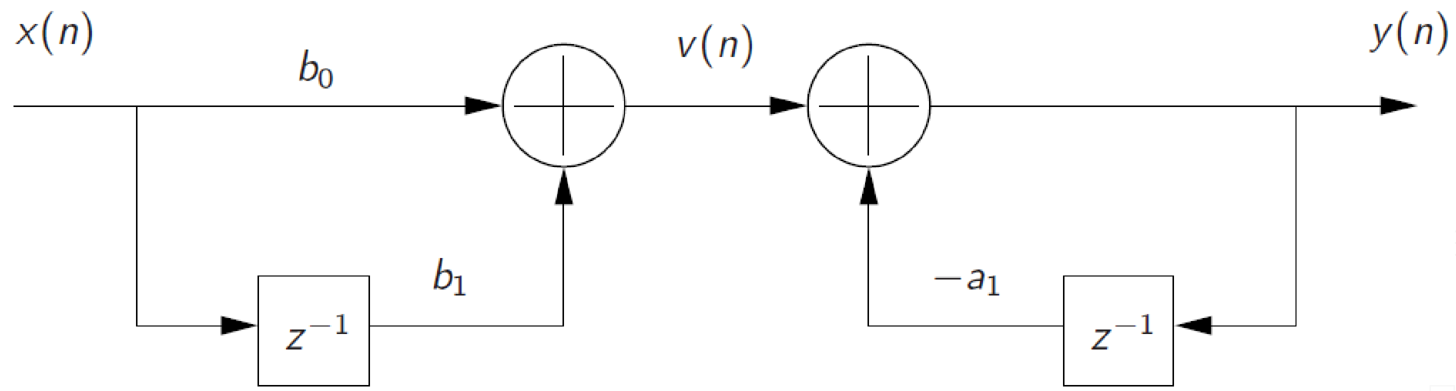
$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Y su “realización directa” o **forma directa I**



Interpretación como cascada de sistemas

Dicho sistema



Se interpreta como la serie de dos sistemas LTI:

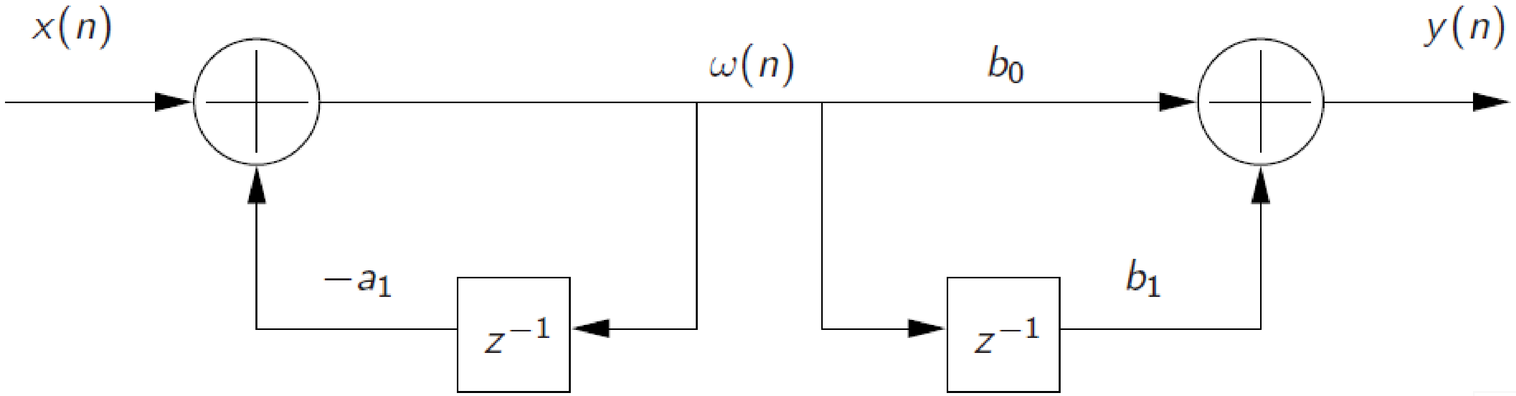
$$v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Y

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n)$$

Conmutatividad de estructura

Como la conexión en serie de sistemas LTI es conmutativa, se puede reemplazar el sistema anterior por:



Donde se cumplen las ecuaciones:

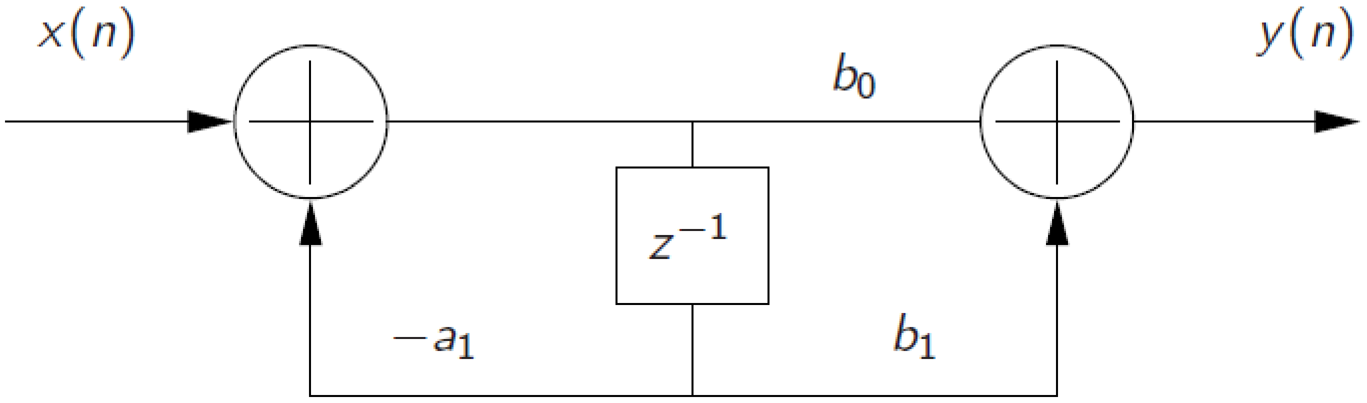
$$\omega(n) = x(n) - a_1\omega(n-1)$$

Y

$$y(n) = b_0\omega(n) + b_1\omega(n-1)$$

Forma Directa II

Los retardadores tienen la misma entrada $\omega(n)$ y por lo tanto la misma salida $\omega(n-1)$, y se pueden agrupar en uno solo:



A esta estructura se le denomina **forma directa II** y utiliza sólo un elemento retardador, en lugar de los dos utilizados en la **forma directa I**.

Generalización de Forma Directa I (1)

Lo anterior se generaliza para la ecuación de diferencias:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

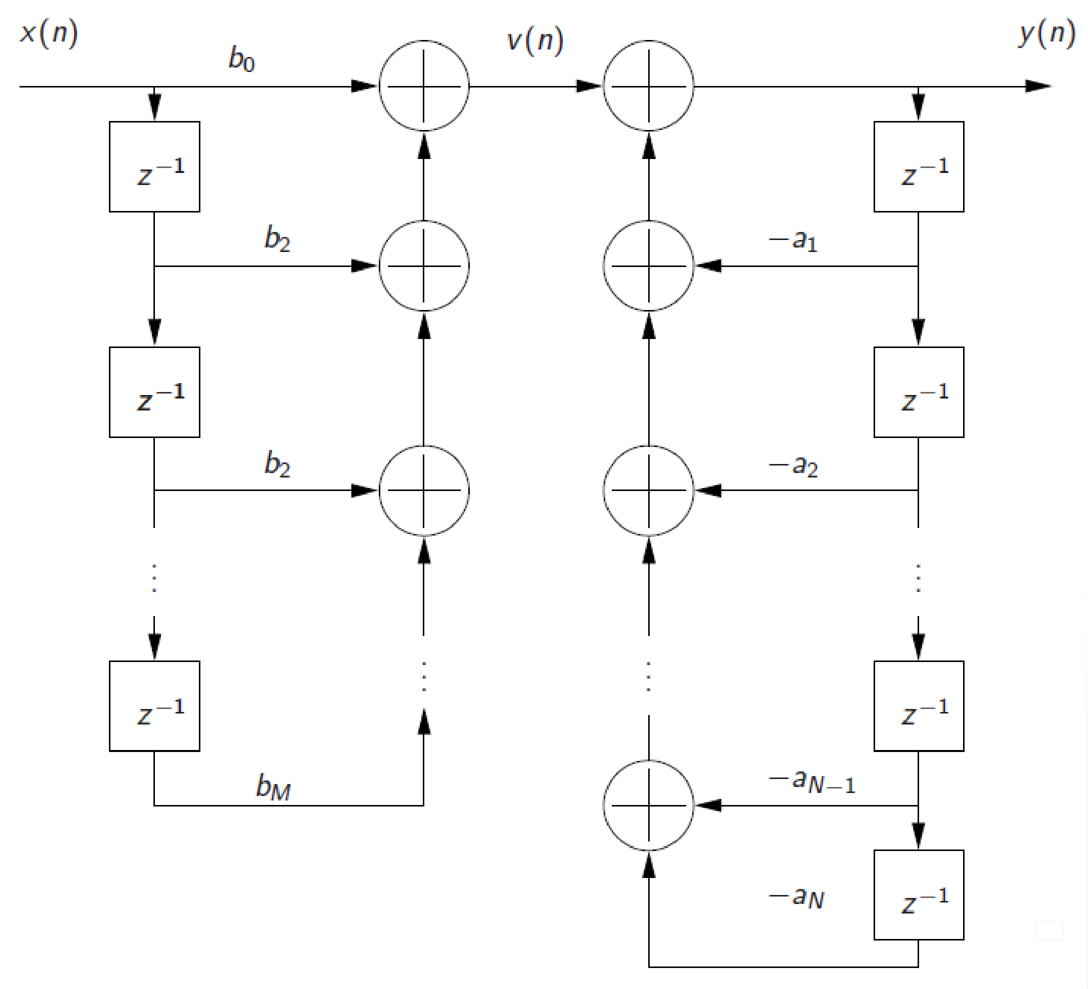
Compuesta de un sistema no recursivo:

$$v(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Y un sistema recursivo:

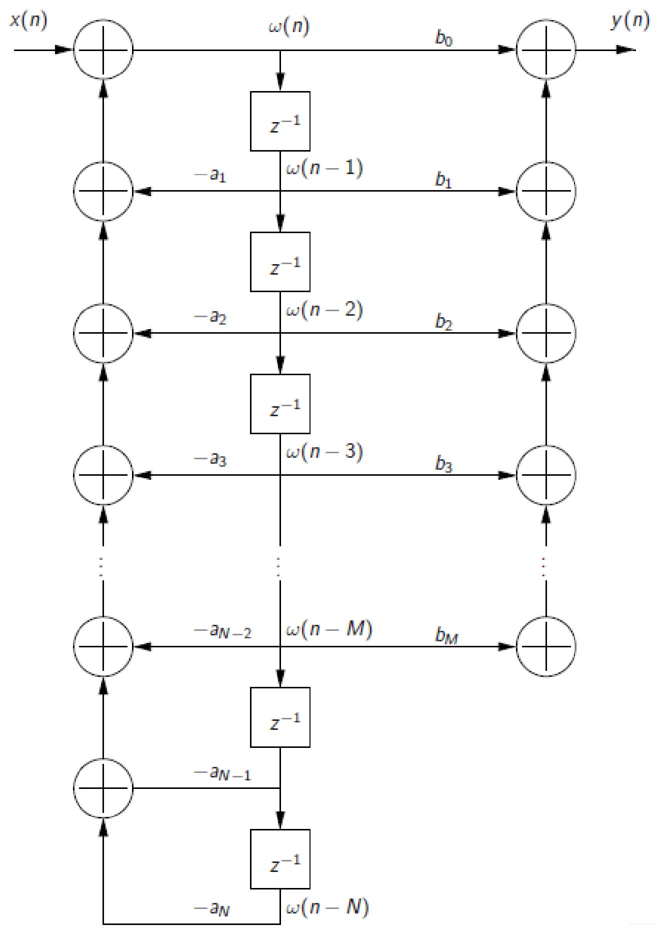
$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + v(n)$$

Generalización de Forma Directa I (2)



Generalización de Forma Directa II

Invirtiendo el orden y combinando los retardadores se obtiene:



Retardadores y multiplicaciones

- Forma Directa II requiere $\text{máx}\{N, M\}$ retardadores.
- Forma Directa I, requiere $N + M$ retardadores.
- Ambos utilizan $M + N + 1$ multiplicaciones.
- Forma Directa II, por poseer el mínimo de retardadores, se denomina también **forma canónica**.

Media móvil ponderada

Al caso especial no recursivo con $a_k = 0,\, k = 1, \dots, N$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Se le denomina **sistema de media ponderada móvil** o sistema MWA (*moving weighted average*), que es un sistema FIR de respuesta impulsional:

$$h(k) = \begin{cases} b_k & 0 \le k \le M \\ 0 & en\, el\, resto \end{cases}$$

Sistema puramente recursivo

- Con $M = 0$, el sistema

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Se torna puramente recursivo:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + b_0 x(n)$$

- Calcula la combinación lineal de las últimas N salidas y la entrada actual.

Estructuras directas para filtros FIR simétricos

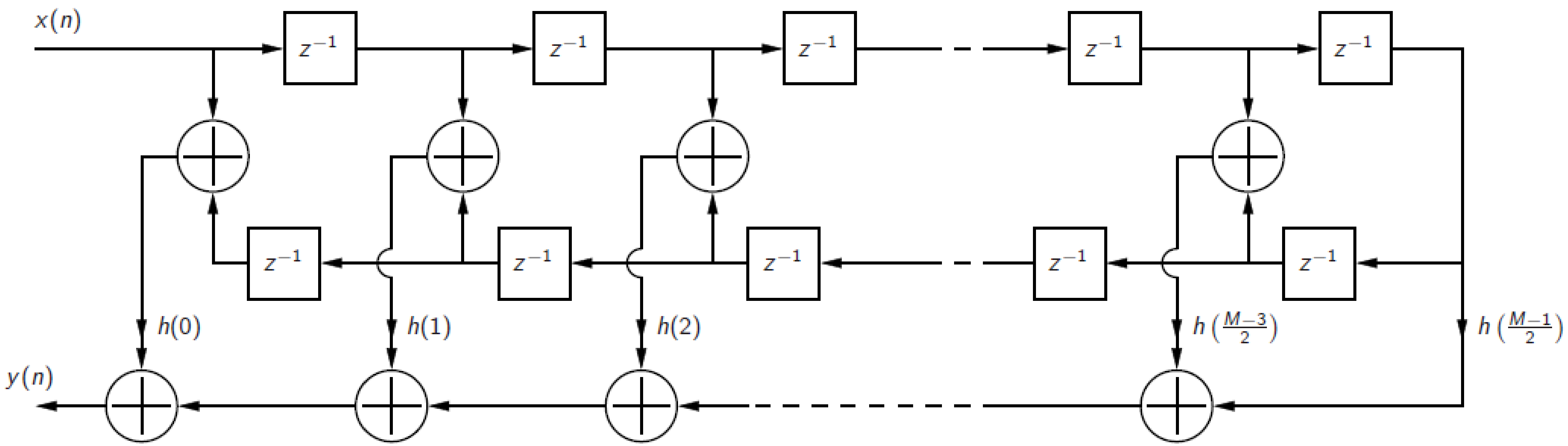
- El caso particular de filtros FIR de longitud M cuyos coeficientes presenten condiciones de simetría o antisimetría

$$h(n) = \pm h(M-1-n)$$

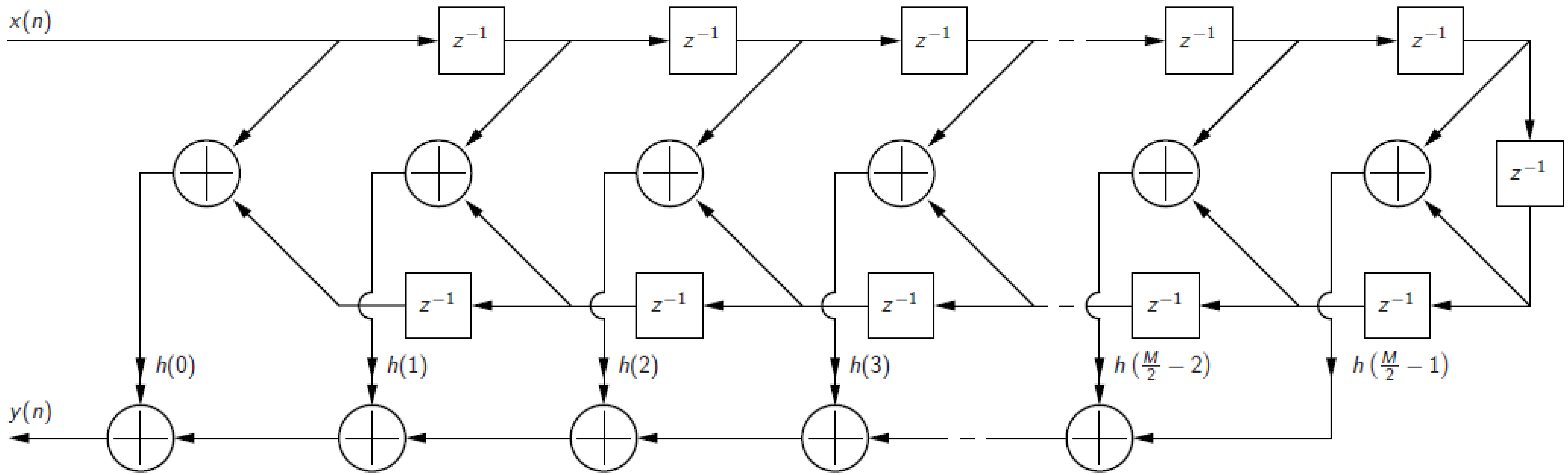
Se aplica particularmente a filtros de fase lineal.

- Este tipo de simetría permite reducir el número de productos requeridos de una implementación convencional de M a $M/2$ o a $(M-1)/2$ para m par o impar respectivamente.

Filtro FIR simétrico con M impar



Filtro FIR simétrico con M par

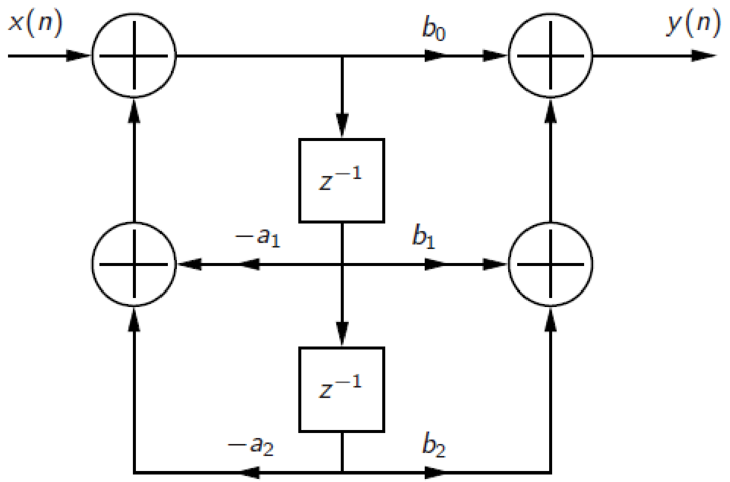


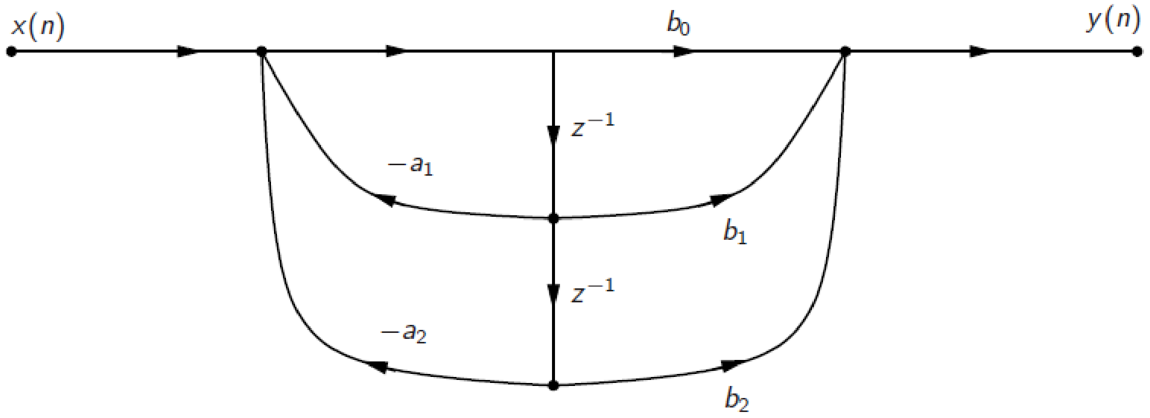
Grafos de flujo de señal y estructuras transpuestas

Grafos de flujo de señal

- Diagramas de flujo de señal son una representación alternativa de los diagramas de bloques
- Se caracterizan por ramas con transmitancias específicas y nodos en donde convergen y se distribuyen las señales.
- Los nodos
  - Suman todas las señales que convergen en ellos
  - Distribuyen la misma señal en todas las ramas que salen de ellos
- Un nodo que solo distribuye la misma señal (es decir, un nodo en el que no converge ninguna señal) recibe el nombre de **nodo fuente**.
- Un nodo a donde solo convergen señales (es decir, no sale ninguna señal) se denomina **nodo sumidero**.

Ejemplo de grafo de flujo de señal: Sistema de segundo orden

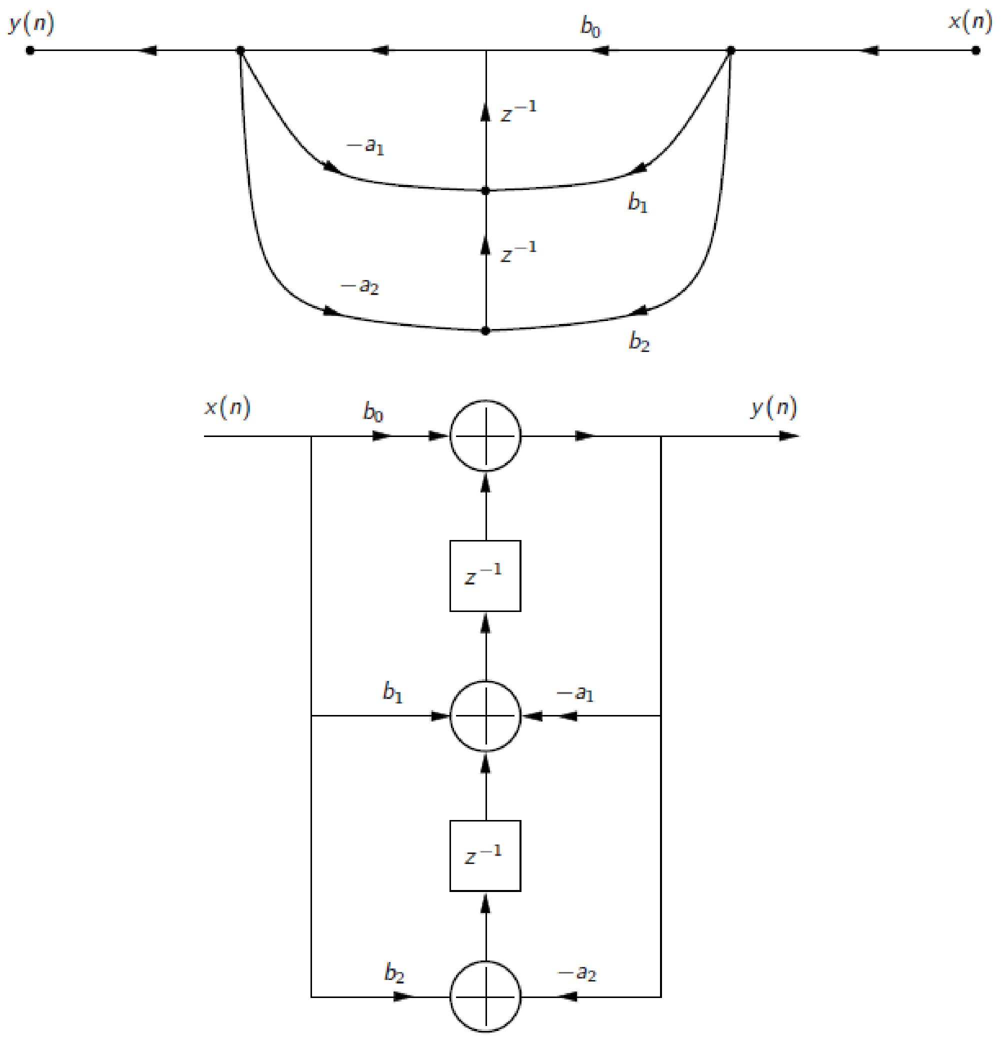




Teorema de transposición

- El **teorema de transposición** especifica una forma de transformar el grafo de flujo de señal de modo que la relación entre la entrada y la salida no cambie.
- Si se invierten las direcciones de todas las transmitancias de rama y se intercambia la entrada con la salida en el grafo, la función de transferencia del sistema no cambia.
- La transposición convierte a los nodos en sumadores y los sumadores en nodos.

Transposición de sistema de segundo orden



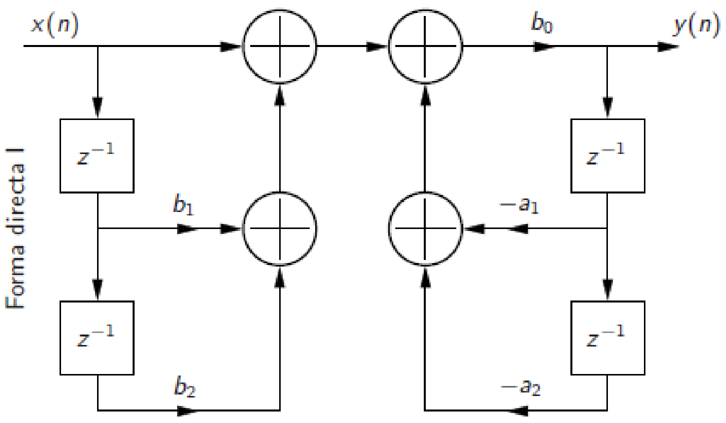
Ejemplo: Forma transpuesta (1)

- Encuentre las formas directa I, II y la forma transpuesta para el sistema

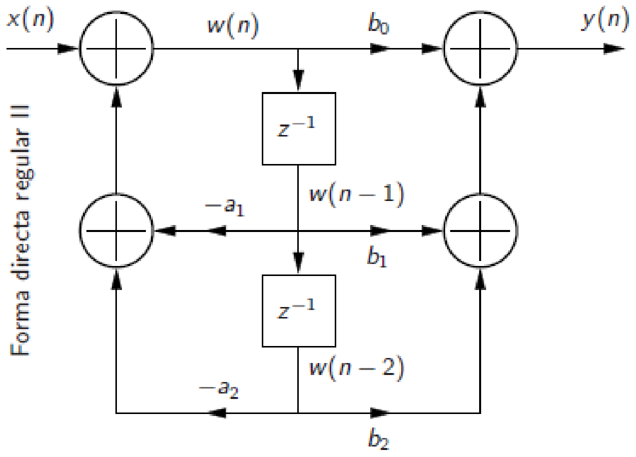
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Ejemplo: Forma transpuesta (2)

Solución:

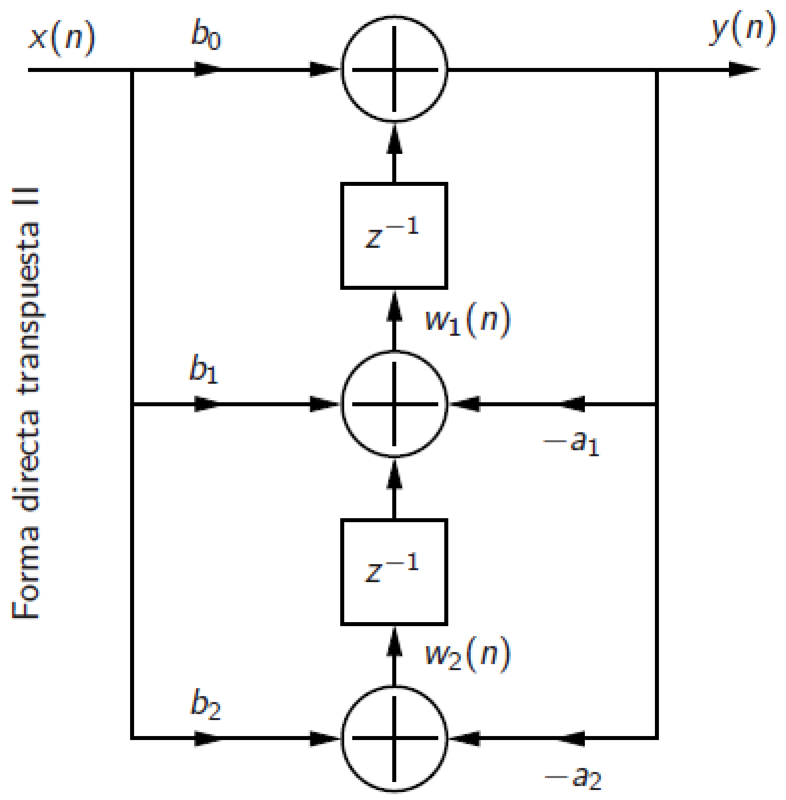


$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2)$$
$$-a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$



$$w(n) = -a_1w(n-1) - a_2w(n-2) + x(n)$$
$$y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1) + b_2w(n-2)$$

Ejemplo: Forma transpuesta (3)



$$y(n) = b_0 x(n) + w_1(n-1)$$
$$w_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + w_2(n-1)$$
$$w_2(n) = b_2 x(n) - a_2 y(n)$$

Muestreo en frecuencia

Muestreo en frecuencia (1)

- La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ está dada por la transformada de Fourier en tiempo discreto de la respuesta al impulso $h(n)$:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

- Dado un conjunto de frecuencias ω_k equiespaciadas

$$\omega_k = \frac{2\pi(k+\alpha)}{M}, \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{M-1}{2}, \qquad M\ impar$$

$$k = 0,1,\ldots,\frac{M}{2}-1, \qquad M\ par$$

$$\alpha = 0 \text{ ó } \frac{1}{2}$$

Muestreo en frecuencia (2)

- Los valores de $H(\omega)$ en las frecuencias ω_k son entonces:

$$H(k+\alpha) \stackrel{!}{=} H\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{\frac{-j2\pi(k+\alpha)n}{M}}, \qquad k = 0,1,2,\dots,M-1$$

- Utilizando la ortogonalidad de las exponenciales complejas armónicamente relacionadas se pueden demostrar además que:

$$h(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)e^{\frac{j2\pi(k+\alpha)n}{M}}, \qquad n = 0,1,2,\dots,M-1$$

Muestreo en frecuencia (3)

- Se sabe que la función de transferencia del filtro está dada por:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{-n}$$

Y sustituyendo la expresión anterior se obtiene:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{\frac{j2\pi(k+\alpha)n}{M}} \right] z^{-n}$$

Muestreo en frecuencia (4)

e intercambiando el orden de las sumatorias:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)\left[\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\left(e^{\frac{j2\pi(k+\alpha)}{M}}z^{-1}\right)^{n}\right]$$

$$= \frac{1 - z^{-M}e^{j2\pi\alpha}}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k+\alpha)}{1 - e^{\frac{j2\pi(k+\alpha)}{M}}z^{-1}}$$

que está expresada enteramente por las muestras del espectro $H(\omega)$.

Muestreo en frecuencia (5)

- Lo anterior es la cascada de dos sistemas: un filtro todo ceros del tipo peine caracterizado por:

$$H_1(z) = \frac{1}{M}\left(1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}\right)$$

con ceros equiespaciados sobre la circunferencia unitaria en

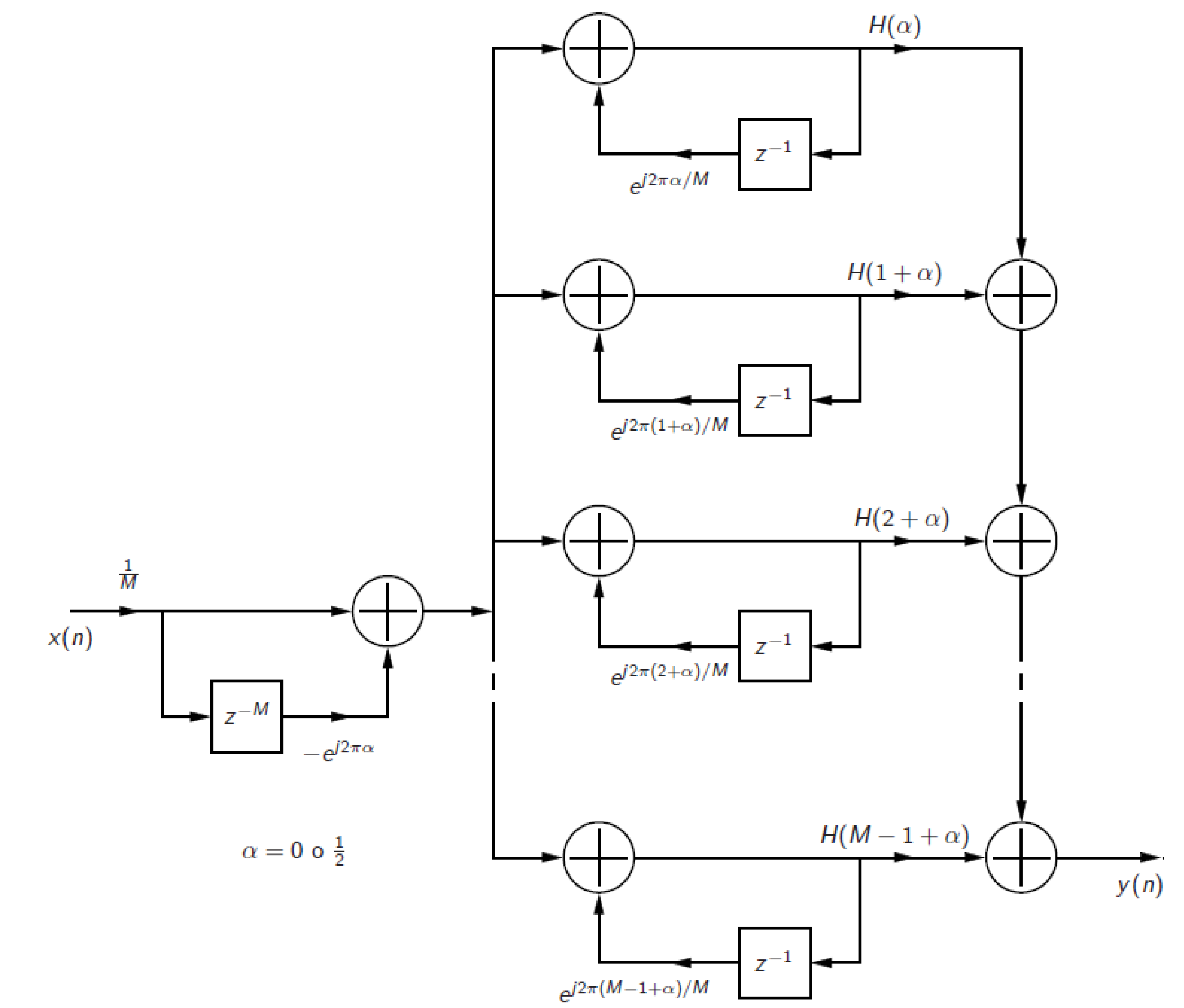
$$z_k = e^{\frac{j2\pi(k+\alpha)}{M}}, \qquad k = 0,1,\dots,M-1$$

- El otro elemento de la cascada es un banco de filtros de primer orden, cada uno con un solo polo en

$$p_k = e^{\frac{j2\pi(k+\alpha)}{M}}, \qquad k = 0,1,\dots,M-1$$

- Los polos coinciden en su posición con los ceros.

Muestreo en frecuencia (6)



Muestreo en frecuencia (7)

- Cuando la respuesta en frecuencia deseada es de banda angosta, la mayor parte de los coeficientes $H(\omega_k)$ son cero, y la estructura se simplifica.
- Si se requiere una respuesta impulsional deseada, entonces debido a la simetría hermítica de $H(\omega)$ la estructura se simplifica aun más combinando pares de filtros de primer orden en filtros de segundo orden.

Sistemas en cascada

Sistemas en cascada (1)

- Las formas directas I y II utilizan los coeficientes de los polinomio de la función de transferencia racional que implementan.
- El posicionamiento de las raíces polinomiales es un problema mal condicionado: los polos y ceros pueden variar considerablemente su posición cuando se limita la precisión numérica.
- Los sistemas en cascada persiguen una utilización directa de los valores de polos y ceros, que hacen más predecible el efecto de cuantificación en sus representaciones digitales.

Sistemas en cascada (2)

- Para ello se parte de una factorización de los polinomios en el numerador y el denominador de la función de transferencia del sistema:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= A \frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1 - f_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1 - c_k z^{-1})} \frac{\prod_{k=1}^{M_2}(1 - g_k z^{-1})(1 - {g^*}_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M_2}(1 - d_k z^{-1})(1 - {d^*}_k z^{-1})}$$

donde $M = M_1 + 2M_2$ y $N = N_1 + 2N_2$

- Si a_k y b_k son reales entonces f_k y c_k también lo son.
- g_k y d_k son complejos y aparecen junto a sus pares complejos conjugados g_k^* y d_k^*.

Sistemas en cascada (3)

- Usualmente se combinan pares de factores reales o complejos conjugados en estructuras de segundo orden, de modo que:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

con $N_s = [(N+1)/2]$

- Aquí se ha asumido que $M \leq N$.
- En caso de que hubiese un número impar de ceros (o polos) reales, entonces uno de los términos b_{2k} (o a_{2k}) será cero.
- Para cada uno de estos términos se utiliza la forma directa II.

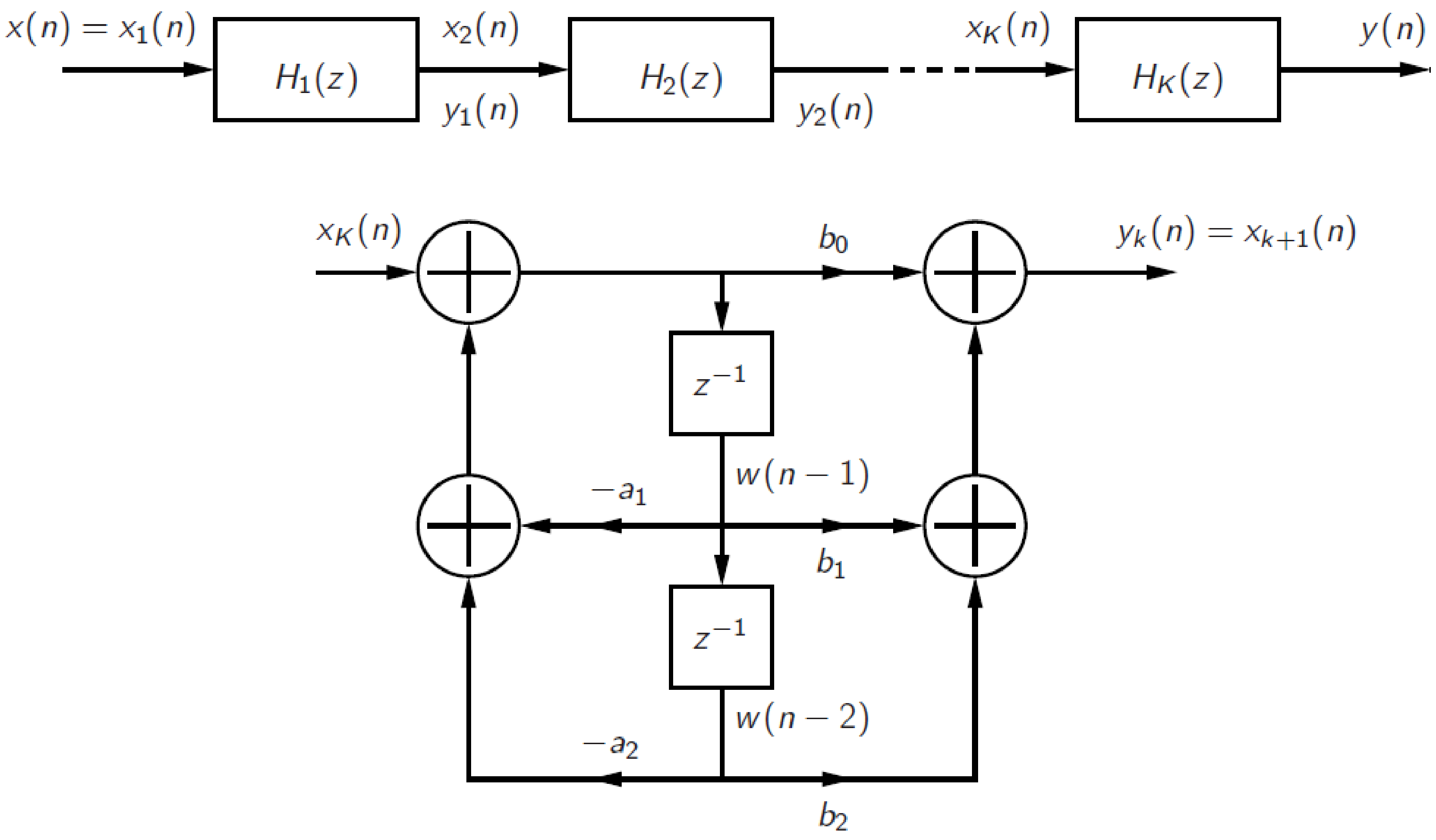
Sistemas en cascada (4)

- Se acostumbra utilizar una reducción en el número de multiplicadores necesarios utilizando la factorización:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + \tilde{b}_{1k} z^{-1} + \tilde{b}_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}$$

- La primera forma tiene sin embargo la ventaja sobre la segunda de que el valor de b_0 queda distribuido en todos los términos de la cascada, lo que es conveniente en implementaciones en punto fijo.

Sistemas en cascada (5)



Sistemas paralelos

Sistemas paralelos (1)

- De forma alternativa a la factorización en términos de segundo orden, utilizando descomposición en fracciones parciales es posible expresar la función de transferencia como:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

donde $N = N_1 + 2N_2$

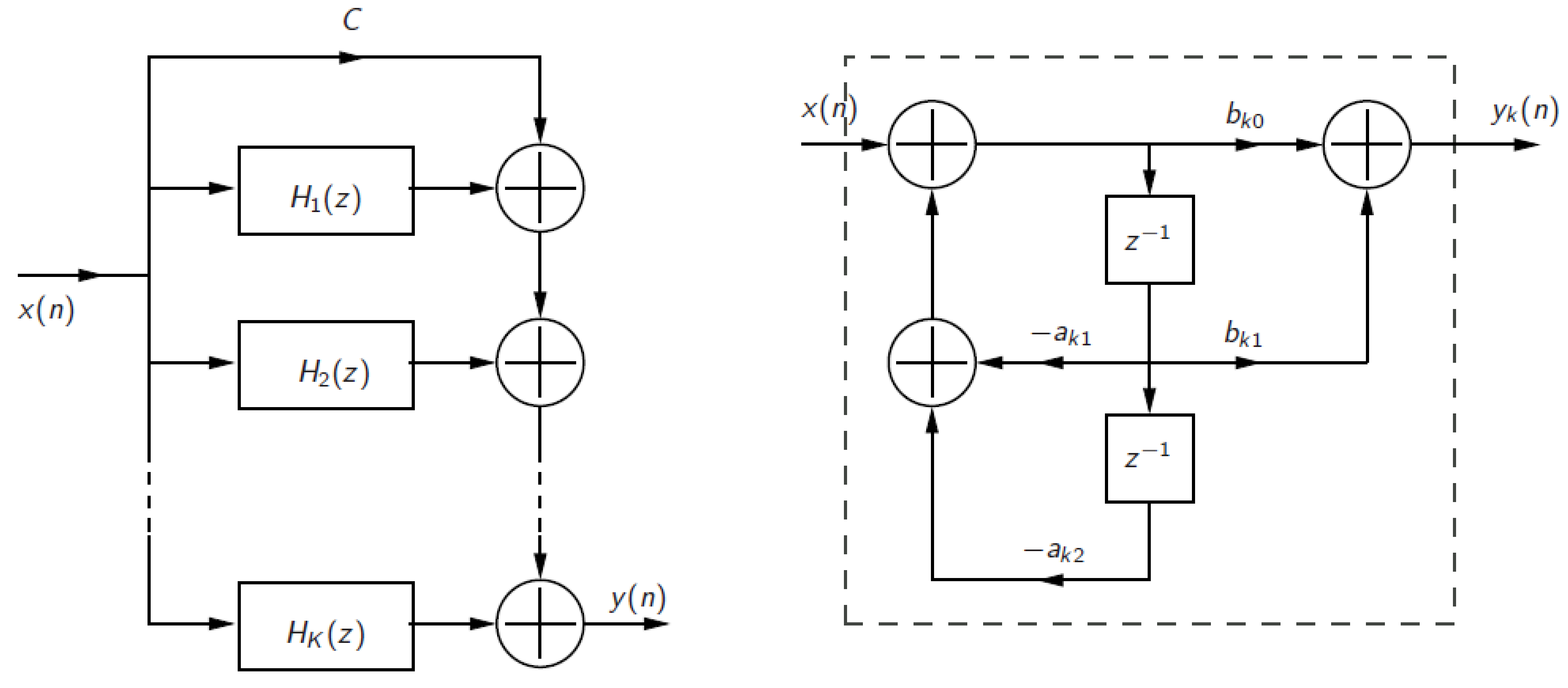
- El primer término está presente solo si $H(z)$ es una función racional impropia, es decir, si $M \geq N$ en cuyo caso $N_p = M - N$.
- Si los coeficientes a_k y b_k son reales, también lo son A_k, B_k, e_k y d_k.

Sistemas paralelos (2)

- Está expresión puede interpretarse como la combinación en paralelo de sistemas IIR de primer y segundo orden, más una cadena de N_p retardadores.
- Agrupando también los polos reales en pares, la función de transferencia se puede expresar como:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{e_{0k} - e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

Sistemas paralelos (3)



Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Procesamiento Digital de Señales. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2011.