

Instituto Tecnológico de Costa Rica  
Área de Ingeniería en Computadores  
CE-3102 Análisis Numérico para Ingeniería  
Profesor: Dr. Pablo Alvarado Moya  
II Semestre, 2018  
**Examen Final**

Total de Puntos:	62
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: \_\_\_\_\_

Carné: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:**

- Resuelva el examen en forma ordenada y clara.
- No olvide indicar su nombre y carné en todos los archivos entregados.
- En todas las preguntas y problemas debe indicarse algún procedimiento o justificación clara para llegar a la solución.
- Se recomienda el uso de su procesador o levantador de textos preferido (LaTeX, LibreOffice, etc.) para responder las preguntas de naturaleza teórica, pero solo se acepta PDF como formato de archivo. Si lo desea, puede escribir sus soluciones a mano y entregarlas escaneadas en un archivo PDF.
- ¡Documente y estructure bien su código!
- No cambie los nombres de los archivos entregados para las soluciones.
- Debe subir su código de solución en el tecDigital. Utilice archivos comprimidos (.zip, .rar, o .tar.gz) nombrados con *examen\_nombre\_apellido* (ej. *examen\_juan\_perez.tar.gz*).
- Todo archivo que sea parte de su solución debe incluir un encabezado con su nombre y número de carné.
- Es permitido discutir el examen y posibles caminos de solución con otros estudiantes; sin embargo, la solución debe ser realizada y presentada individualmente. Soluciones muy similares o idénticas serán calificadas con cero.
- El no cumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

Problema 1	de 19
Problema 2	de 22
Problema 3	de 21

# Problemas

## **Problema 1** Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

**19 Pts**

En el curso vimos cómo resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden de la forma

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x)$$

con el campo de pendientes<sup>1</sup>  $f(t, x)$ .

Una EDO de mayor orden se puede transformar a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Como ejemplo, considere una partícula de masa  $m$  que se mueve en una dimensión. Si la posición de la partícula se denota con  $x(t)$ , su dinámica se expresa con la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{1}{m}F(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (1.1)$$

donde  $F$  es la fuerza total sobre la partícula,  $\dot{x}$  su velocidad y  $\ddot{x}$  su aceleración (recuérdese la segunda ley de Newton:  $F = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = F/m$ ). Note que la fuerza depende de  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ . Esas dependencias suelen provenir de potenciales estáticos dependientes de la posición (causado por ejemplo por un resorte), atenuaciones dependientes de la velocidad (como fricción), y fuerzas dependientes de la posición, pero pueden incluir otros factores como fricciones dependientes de la posición.

En este problema se usarán los conocimientos desarrollados en el curso para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

El punto de partida de solución convierte (1.1) en un sistema acoplado de ecuaciones de primer orden de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{m}F(x(t), v(t), t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Para poder resolver este sistema, se procede de forma similar a los métodos para una sola ecuación, en donde discretizamos el eje de tiempo en instantes  $t_i = i\Delta t$ , aunque ahora necesitamos dos condiciones iniciales  $x_0 = x(t_0)$  y  $v_0 = v(t_0)$ .

Al igual que para una única EDO de primer orden, podemos aplicar el método de Euler, que en este caso se expresa como:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n\Delta t \\ v_{n+1} &= v_n + a_n\Delta t \end{aligned} \quad (1.3)$$

con  $a_n = F(x_n, v_n, t_n)/m$  la aceleración, y las simplificaciones de notación  $x_n = x(t_n) = n\Delta t$ ,  $x_{n+1} = x(t_{n+1}) = (n+1)\Delta t$ . El método de Euler suele ser, en el caso de sistemas de ecuaciones, inestable.

Dentro de los métodos más estables para resolver este tipo de sistemas está el algoritmo de Runge-Kutta de 4to orden. El esquema RK más usado para dos ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(x, v, t) \\ \dot{v}(t) &= h(x, v, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Aquí se ha usado  $t$  y  $x$  en vez de  $x$  e  $y$  como en la clase, pero eso no altera en nada el concepto.

utiliza:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= g(x_n, v_n, t_n) \Delta t & l_1 &= h(x_n, v_n, t_n) \Delta t \\
 k_2 &= g(x_n + k_1/2, v_n + l_1/2, t_{n+1/2}) \Delta t & l_2 &= h(x_n + k_1/2, v_n + l_1/2, t_{n+1/2}) \Delta t \\
 k_3 &= g(x_n + k_2/2, v_n + l_2/2, t_{n+1/2}) \Delta t & l_3 &= h(x_n + k_2/2, v_n + l_2/2, t_{n+1/2}) \Delta t \\
 k_4 &= g(x_n + k_3, v_n + l_3, t_{n+1}) \Delta t & l_4 &= h(x_n + k_3, v_n + l_3, t_{n+1}) \Delta t \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)
 \end{aligned}$$

1.1. Considerando un sistema amortiguado de masa resorte con ecuación

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.5)$$

encuentre la función de fuerza  $F(x, v, t)$ .

3 Pts

1.2. Implemente el método de Euler (1.3) en el archivo `edosys.m` para el caso del sistema amortiguado de masa resorte.

2 Pts

1.3. Para el sistema en (1.5) indique a qué corresponden las funciones  $g(x, v, t)$  y  $h(x, v, t)$  de (1.4).

2 Pts

1.4. Utilice el método de RK para solucionar el mismo sistema de ecuaciones en el archivo `edosys.m`.

10 Pts

1.5. Explique qué comportamiento tienen las soluciones ante los distintos tamaños de paso y los dos métodos implementados.

2 Pts

**Problema 2** Trazadores cúbicos**22 Pts**

En este problema usted suavizará una curva cerrada que pasa por un conjunto dado de puntos, como se ilustra en la figura 2.1.

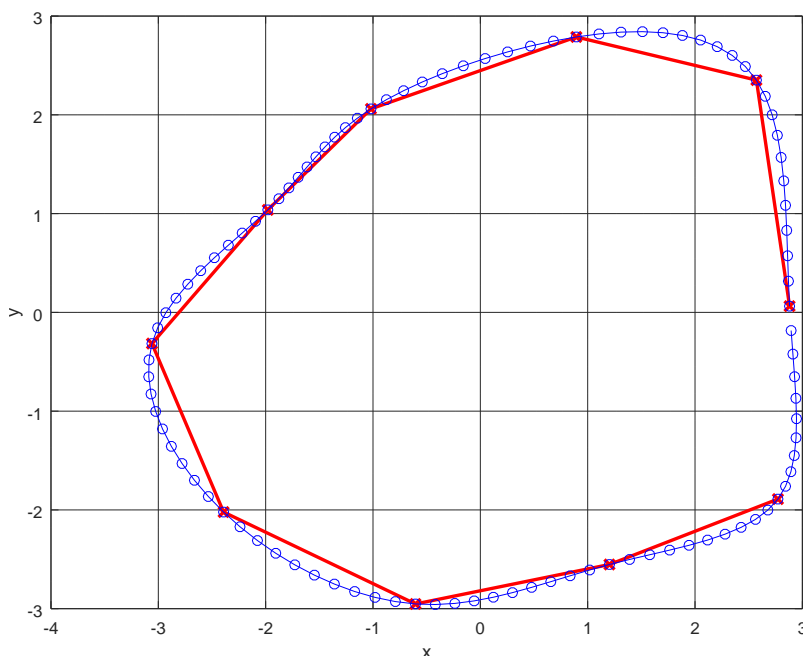


Figura 2.1: Ejemplo de interpolación de una curva bidimensional con un trazador cerrado suave. La línea roja corresponde a la interpolación lineal entre los puntos dados, marcados con ‘x’. La línea azul representa la interpolación con trazadores cúbicos.

Usted recibe una matriz  $\mathbf{D}$  con puntos bidimensionales en sus filas

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}$$

de modo que debe buscarse una curva suave cerrada que pase por todos los puntos  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, 1, \dots, n, 0$ . Nótese que la curva debe cerrar, por lo que debe pasar del último punto  $(x_n, y_n)$  a  $(x_0, y_0)$  de forma suave.

Para lograr esto, usted debe parametrizar dos funciones  $x(t)$  y  $y(t)$  por medio de trazadores cúbicos, donde  $t$  será el parámetro independiente, de tal modo que con  $t = i$  se pase por el punto  $(x_i, y_i)$ . Para lograr cerrar la curva,  $t$  deberá poder “llegar” hasta  $n + 1$ , y en este último punto la curva debe compartir sus derivadas de primer y segundo orden con aquellas en  $(x_0, y_0)$ . Note que esto es equivalente a decir que hay un nuevo subintervalo entre  $t = n$  y  $t = n + 1$ .

Como en el problema actual se desea encontrar una curva cerrada y suave, las condiciones

$$x''(t_0) = 0 \quad x''(t_n) = 0 \quad y''(t_0) = 0 \quad y''(t_n) = 0$$

supuestas en la clase, aquí son inválidas. Usted debe entonces modificar el método derivado en la

clase para manejar estas nuevas condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_0) & y(t_{n+1}) &= y(t_0) \\ x'(t_{n+1}) &= x'(t_0) & y'(t_{n+1}) &= y'(t_0) \\ x''(t_{n+1}) &= x''(t_0) & y''(t_{n+1}) &= y''(t_0) \end{aligned}$$

Si bien es cierto hay muchas formas de derivar estos trazadores cúbicos para curvas suaves y cerradas, en este problema se evalúa su capacidad de manipular un método particular y por ello la única solución aceptada debe utilizar el método que despeja primero los valores de las segundas derivadas en cada punto de soporte y luego a partir de estas derivadas realiza la interpolación.

Primero usted deberá derivar el interpolador para una función  $f(t)$  considerando las nuevas condiciones de frontera, como se ejemplifica en la figura 2.2. Este interpolador se aplicará luego a cada

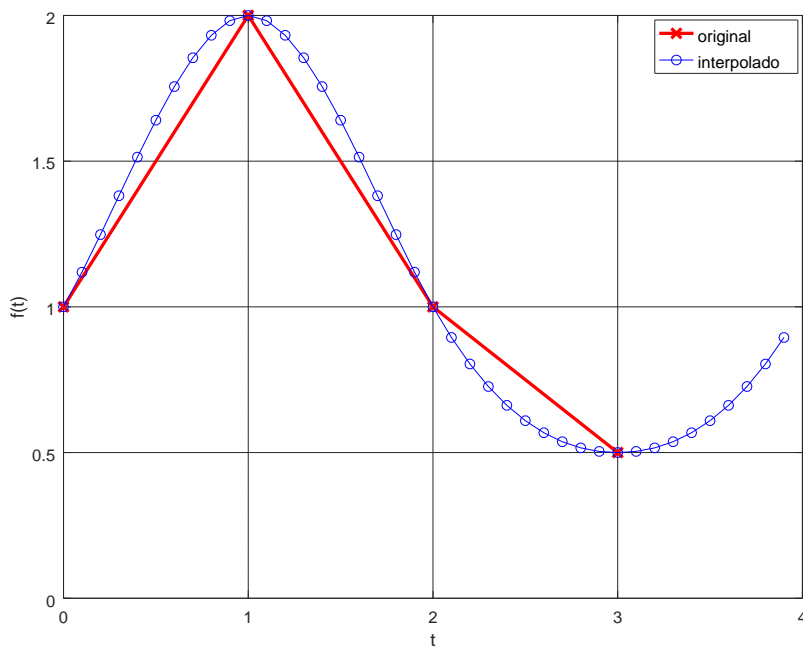


Figura 2.2: Trazador para  $f(t)$  donde se han dado cuatro puntos  $(t, f(t))$ , y se ha supuesto un cuarto subintervalo que se interpola para cerrar suavemente.

componente  $x(t)$  y  $y(t)$  por separado, para producir la curva completa.

- 2.1. Explique detalladamente cómo debe modificarse el método optimizado descrito en el curso para el cálculo de las segundas derivadas  $f''(t_i)$  en cada uno de los puntos  $t_i$  dados. 5 Pts
- 2.2. Plantee el sistema de ecuaciones lineales a resolver, para encontrar las segundas derivadas. 3 Pts
- 2.3. Indique si este sistema aun puede o no utilizar el algoritmo de Thomas para ser resuelto. 1 Pt
- 2.4. Construya dentro de la función `findDerivs` en el archivo `spline2d.m` el sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo utilizando las herramientas de solución de sistemas de ecuaciones lineales que ya provee GNU/Octave. 5 Pts

- 2.5. Implemente la función `interpole(t,f,ts)` en el mismo archivo `spline2d.m` que recibe como entrada los puntos de soporte  $t_i$  en el vector `t`, los valores de la función  $f(t_i)$  en el vector `f`, y los valores `ts` en donde se quiere encontrar el valor de la función interpolada. 7 Pts
- 2.6. Corrija el código entregado, para que el gráfico cierre la curva. 1 Pt

**Problema 3** Descomposición de valores singulares**21 Pts**

Se desea estimar la posición tridimensional de un objeto en un espacio, en el cual se han instalado  $n$  emisores en posiciones  $\underline{\mathbf{e}}_i$  conocidas, con  $i = 1 \dots n$ . El objeto tiene instalados sensores que indican la distancia a cada emisor.

Para este problema concreto se cuenta con 5 emisores. Se simulará además tener 3 o 4 emisores ignorando dos o uno de los 5 emisores disponibles, respectivamente.

En este problema se utilizará la descomposición de valores singulares (DVS) para poder resolver sistemas sub- o sobredeterminados.

Nótese que si solo se tienen tres emisores  $\underline{\mathbf{e}}_i$  (con  $i = 1, 2$  ó  $3$ ) y las distancias  $d_i$  del objeto a cada uno de ellos, entonces existen dos posibles soluciones. Para entender por qué, note que todos los puntos a distancia  $d_i$  del emisor  $\underline{\mathbf{e}}_i$  conforman una esfera de radio  $d_i$  centrada en  $\underline{\mathbf{e}}_i$ . Si se consideran solo dos emisores, entonces las posibles posiciones que satisfacen las distancias conocidas corresponden a la intersección de las dos esferas; esto es, a un círculo. Si se agrega el tercer emisor, entonces su esfera cortará al círculo en uno o dos puntos. Con cuatro o más emisores, todas las esferas se intersecarán en un único punto.

Debido a errores de redondeo en las representaciones numéricas y ruido en las mediciones de distancia, las soluciones no son necesariamente exactas.

Supóngase que la posición del  $i$ -ésimo emisor es  $\underline{\mathbf{e}}_i = [e_{ix}, e_{iy}, e_{iz}]^T$  y que está a distancia  $d_i$  del objeto, que se encuentra en  $\underline{\mathbf{p}} = [x, y, z]^T$ . Entonces, se debe cumplir:

$$\|\underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{e}}_i\|_2^2 = d_i^2$$

lo que es equivalente a

$$(x - e_{ix})^2 + (y - e_{iy})^2 + (z - e_{iz})^2 = d_i^2 \quad .$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene

$$(x^2 - 2xe_{ix} + e_{ix}^2) + (y^2 - 2ye_{iy} + e_{iy}^2) + (z^2 - 2ze_{iz} + e_{iz}^2) = d_i^2 \quad .$$

Reagrupando y utilizando notación matricial se cumple entonces para el  $i$ -ésimo emisor

$$\begin{bmatrix} 1 & -2e_{ix} & -2e_{iy} & -2e_{iz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [d_i^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_i\|_2^2]$$

Nótese que tuvo que recurrirse a un planteo “especial” del vector solución, para poder expresar el problema con una expresión lineal: el primer elemento del vector solución es igual al cuadrado de la magnitud del vector tridimensional conformado por los últimos tres elementos  $[x, y, z]^T$ .

Para  $n$  emisores, se plantea el sistema de ecuaciones  $\underline{\mathbf{M}}\underline{\hat{\mathbf{p}}} = \underline{\mathbf{b}}$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2e_{1x} & -2e_{1y} & -2e_{1z} \\ 1 & -2e_{2x} & -2e_{2y} & -2e_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -2e_{nx} & -2e_{ny} & -2e_{nz} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{\mathbf{p}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_1\|_2^2 \\ d_2^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_2\|_2^2 \\ \vdots \\ d_n^2 - \|\underline{\mathbf{e}}_n\|_2^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} \quad (3.1)$$

que tiene solución exacta solo si el rango de  $\mathbf{M}$  es cuatro. Debido a que las distancias tienen error, es posible que exista espacio nulo para  $\mathbf{M}$ .

Para el caso particular con  $n = 3$  el sistema está subdeterminado y rango de la matriz  $\mathbf{M}$  es a lo sumo 3, y por tanto la nulidad de  $\mathbf{M}$  es 1 o más. Asumiendo que la nulidad es 1 (lo que ocurre si los tres emisores no están sobre una línea recta), entonces, si  $\underline{\mathbf{n}}$  es el vector que engendra el espacio nulo, las soluciones del sistema son

$$\underline{\tilde{\mathbf{p}}} = \underline{\hat{\mathbf{p}}} + \lambda \underline{\mathbf{n}}$$

donde  $\underline{\hat{\mathbf{p}}} = \mathbf{M}^\dagger \underline{\mathbf{b}}$ , y  $\mathbf{M}^\dagger$  es la pseudoinversa de  $\mathbf{M}$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Sea

$$\underline{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{\mathbf{p}}}} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{n}}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 + \lambda n_1 \\ \hat{x} + \lambda n_2 \\ \hat{y} + \lambda n_3 \\ \hat{z} + \lambda n_4 \end{bmatrix}$$

De todas esas posibles soluciones se buscan solo aquellas que satisfacen

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \\ \hat{p}_1 + \lambda n_1 &= (\hat{x} + \lambda n_2)^2 + (\hat{y} + \lambda n_3)^2 + (\hat{z} + \lambda n_4)^2 \end{aligned}$$

Con esto, se plantea una ecuación cuadrática de la forma

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.2}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  se plantean en términos de  $\hat{p}_1$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ , y  $n_i$ , con  $i = 1 \dots 4$ .

Se adjunta con el enunciado un artículo científico de A. Norrdine, con más detalles de esta técnica.

En el archivo `posfromdist.m` se cargan en la matriz  $\mathbf{D}$  las distancias desde 5 emisores al objeto que se desea rastrear, en donde cada columna de la matriz contiene la distancia a un emisor, y cada fila corresponde a un instante de tiempo específico.

Además, se cargan en las columnas de la matriz  $\mathbf{E}$  las posiciones de los 5 emisores.

En este problema usted implementará la función `calcPosition`, que estima la posición del objeto a partir de las distancias

3.1. Construya la matriz  $\mathbf{M}$  de (3.1).

1 Pt

Debe considerar que `dim` contiene el número de sensores a utilizar.

3.2. Construya el vector  $\underline{\mathbf{b}}$  de (3.1).

2 Pts

3.3. Utilizando la descomposición de valores singulares (función `svd`) calcule la matriz pseudo-inversa de  $\mathbf{M}$ .

3 Pts

Note que las matrices de salida de `svd` en `octave` pueden tener otros tamaños a los revisados en clase, por lo que usted debe restaurar los tamaños correctos para poder calcular la matriz pseudo-inversa como se vió en clase. Para este punto puede emplear la función `resize`.

Puede utilizar la función `pinv` para invertir la matriz diagonal de valores singulares y para verificar que su pseudo-inversión es correcta.



3.4. Calcule la solución particular  $\hat{\mathbf{p}}$ .

1 Pt

3.5. Para el caso en que solo hayan 3 emisores, encuentre las dos posibles soluciones. Note que esto requiere encontrar el vector que engendra el espacio nulo.

5 Pts

El argumento `option` permite seleccionar cuál de las dos posiciones estimadas se debe retornar. Si `option` es 1, entonces se debe usar “+” en la cuadrática, y de otro modo se debe usar “-”.

3.6. Para el caso con 4 o más emisores, estime la posición del objeto.

1 Pt

3.7. Ahora usted debe implementar un seleccionador de cuál de las dos soluciones disponibles cuando hay 3 emisores debe tomarse, considerando la trayectoria que forman los puntos. Para ello, considere que la trayectoria  $\mathbf{p}(t)$  es suave, y que puede entonces aproximarse utilizando series de Taylor como

$$\mathbf{p}(t) \approx \mathbf{p}(t_i) + \frac{d\mathbf{p}(t_i)}{dt}(t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{p}(t_i)}{dt^2}(t - t_i)^2 + \dots$$

Los vectores de velocidad  $\frac{d\mathbf{p}(t_i)}{dt}$  y aceleración  $\frac{d^2\mathbf{p}(t_i)}{dt^2}$  usted los deberá estimar de los datos actual y anteriores para predecir con ello quién debería ser el punto siguiente. De las dos soluciones estimadas con la distancia, se elige la que esté más cerca a la predicción.

6 Pts

Este método se selecciona si el argumento `option` es 3.

Para este caso usted necesita conocer al menos una condición inicial, y puede suponer que en el primer instante de tiempo  $t_0$  el objeto se encuentra cerca de  $\mathbf{p}(t_0) = [2, 0, 1]$ . Usted desconoce cada cuánto tiempo se tiene una nueva medición de distancias, pero se sabe que las mediciones ocurren a intervalos constantes de tiempo (es decir, siguen un muestreo homogéneo).

Usted puede utilizar una estrategia similar a la sobrerelajación vista con el método de Liebmann para mejorar los estimadores de velocidad y aceleración. Para ello puede usar algo como:

$$\mathbf{v}^{\text{nuevo}} \leftarrow \lambda \mathbf{v}^{\text{nuevo}} + (1 - \lambda) \mathbf{v}^{\text{anterior}}$$

o el equivalente para la aceleración.

*Nota:* como este proceso se basa en una estimación, es siempre probable que la solución obtenida no sea perfecta.

3.8. Verifique que las posiciones calculadas para la trayectoria descrita a través de las distancias efectivamente se encuentran a esas distancias.

2 Pts

Para ello, implemente la función `calcDistances`, que calcula la distancia a cada emisor, dada la posición del objeto.