Repaso de Álgebra Lineal 2

Lección 04

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE5506 Introducción al reconocimiento de patrones
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre, 2019

Contenido

Inversa de una matriz

- Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es **invertible** (o no singular) si existe otra matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

  $\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.
- Caso contrario, la matriz se dice **singular** (o no invertible)
- Una matriz es **ortogonal** si se cumple $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$, es decir, si sus vectores (fila y columna) son ortonormales entre sí.
- Una matriz ortogonal no cambia la norma ℓ_2 de un vector: $\|\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}\|_2 = \|\underline{\mathbf{x}}\|_2$

Propiedades de la inversión de matrices

Para las matrices invertibles cuadradas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se cumple:

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{-1})^{T} = (\mathbf{A}^{T})^{-1}$ lo que se denota con $\mathbf{A}^{-T}$

Determinante de una matriz (1)

- La determinante de una matriz cuadrada es un valor escalar denotado como $|\mathbf{A}|$ o $\det \mathbf{A}$
- **Interpretación**: Sea $\underline{\alpha}$ un vector con $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Todos los vectores que cumplen esta condición conforman un hipercubo en el espacio n dimensional. La determinande indica el volumen de ese hipercubo transformado por la matriz $\mathbf{A}$ (Ver vídeo de 3Blue1Brown)
- La determinante de una matriz 2×2 se calcula con

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de una matriz (2)

- Para una matriz de mayor orden la determinante es

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{fj} |\mathbf{A}_{fj}|$$

donde $\mathbf{A}_{fj}$ es la matriz adjunta de a_{fj} dada por $(-1)^{f+j}\mathbf{M}_{fj}$, y $\mathbf{M}_{fj}$ es el menor complementario de a_{fj}, es decir, una matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtenida eliminando la fila f y la columna j de la matriz $\mathbf{A}$.

Propiedades de la determinante

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de $n \times n$

- $|s\mathbf{A}| = s^n|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{I}| = 1$
- Distributividad: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
- $|\mathbf{I}| = 1 = |\mathbf{AA}^{-1}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| \Rightarrow |\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$
- $|\mathbf{A}| = \underline{\mathbf{0}}$ solo si $\mathbf{A}$ es singular

Traza de una matriz

- La traza de una matriz **cuadrada** es la suma de los elementos en su diagonal
$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
- Un escalar s (matriz 1×1) tiene $\operatorname{tr} s = s$
- $\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr} \mathbf{A} + \operatorname{tr} \mathbf{B}$
- $\operatorname{tr}(c\mathbf{A}) = c \operatorname{tr} \mathbf{A}$
- $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} \mathbf{A}^T$
- Si $\mathbf{AB}$ es cuadrada entonces $\operatorname{tr} \mathbf{AB} = \operatorname{tr} \mathbf{BA}$

Normas

- Informalmente, la norma $\|\underline{\mathbf{x}}\|$ es una medida de la *longitud* del vector $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$.
- Formalmente, la norma es un operador $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface 4 propiedades:
  1. $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{\mathbf{x}}\| \geq 0$ (no negatividad)
  2. $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ (definitud)
  3. $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$, $\|a\underline{\mathbf{x}}\| = |a|\|\underline{\mathbf{x}}\|$ (homogeneidad)
  4. $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|$ (desigualdad de Minkowski)

Ejemplos de normas

- Normas ℓ_p, de Minkowski o normas p para vectores $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Casos particulares:

  - Norma ℓ_2 o euclidiana: $\|\underline{\mathbf{x}}\|_2 = \sqrt{\underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{x}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
  - Norma ℓ_1 o de bloques de ciudad: $\|\underline{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  - Norma ℓ_∞: $\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$

- Norma de Frobenius para matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right)}$$

Independencia lineal

- El conjunto $\{\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es **(linealmente) independiente** si ningún vector puede expresarse como combinación lineal de los otros vectores. Este es el caso solo si

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{\mathbf{x}}_i = \underline{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

- Caso contrario se dice que los vectores son (linealmente) dependientes:

$$\underline{\mathbf{x}}_j = \sum_{i=1 \ldots m, i \neq j} \alpha_i \underline{\mathbf{x}}_i$$

Ejemplo (1)

Ejemplo (Ejemplo de independencia lineal)

¿Dependientes o independientes?

$$\underline{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (2)

$$\underline{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix}$$

Dependientes, pues: $\underline{\mathbf{x}}_3 = -2\underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{x}}_2$

Bases

- Si $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de un espacio lineal $\mathbb{V}$, $\mathcal{B}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si y solo si todos sus vectores son linealmente independientes.
- El número de vectores en la base $n = |\mathcal{B}|$ es igual a la dimensión de $\mathbb{V}$
- Un conjunto generador de $\mathbb{V}$ requiere al menos n vectores
- Un conjunto generador linealmente independiente puede tener a lo sumo n vectores.

Sistemas de ecuaciones en notación matricial (1)

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede expresar de la forma

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

que representa a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o en forma tradicional

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Sistemas de ecuaciones en notación matricial (2)

- Si $\underline{\mathbf{b}}$ está en el alcance columna de $\mathbf{A}$ entonces el sistema tiene solución:
$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\underline{\mathbf{b}}$$
- El rango columna de $\mathbf{A}$ (*rank*) es el máximo número de columnas linealmente independientes, y es igual a la dimensión del alcance columna (*range*) de $\mathbf{A}$.
- El **espacio nulo** de $\mathbf{A}$ es el conjunto de vectores $\underline{\mathbf{z}}$ tales que $\mathbf{A}\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{0}}$. Su dimensión se llama nulidad.
- La nulidad más el rango es igual al número de columnas de $\mathbf{A}$.
- De forma dual, para el sistema $\underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}$ se define el espacio fila como la combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$, que tiene su alcance y rango *fila*.

Sistemas de ecuaciones en notación matricial (3)

- Para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se cumple que el rango columna y el rango fila son siempre iguales, y se denota con $\operatorname{rg} \mathbf{A}$

Propiedades del rango

- Para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) \leq \text{mín}(m,n)$. Si $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \text{mín}(m,n)$ entonces se dice que $\mathbf{A}$ tiene **rango completo**.
- Solo las matrices de rango completo son invertibles
- $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}^T)$
- $\mathrm{rg}(\mathbf{AB}) \leq \text{mín}(\mathrm{rg}(\mathbf{A}), \mathrm{rg}(\mathbf{B}))$
- $\mathrm{rg}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \mathrm{rg}(\mathbf{A}) + \mathrm{rg}(\mathbf{B})$

Forma cuadrática y matrices (semi)definidas positivas

- La **forma cuadrática** es la expresión escalar $\underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}$, calculada con:

$$\underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}})_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

- Como la forma cuadrática es escalar y $s = s^T$ entonces

$$\underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}})^T = \underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}^T\underline{\mathbf{x}}$$

- Como los tres términos anteriores son iguales, entonces

$$\underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\left((\underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}})^T + \underline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}^T\underline{\mathbf{x}}\right) = \underline{\mathbf{x}}^T\left(\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\right)\underline{\mathbf{x}}$$

es decir, ¡valor solo depende de la componente simétrica de **A**!

Positividad o negatividad (semi)definida

La matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$ es

- **positiva definida** si $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \underline{\mathbf{0}} \quad \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}} > 0$.
  Notación: $\mathbf{A} \succ 0$ (o $\mathbf{A} > 0$)
  Todas las matrices positivas definidas: $\mathbb{S}^n_{++}$
- **positiva semidefinida** si $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}} \geq 0$.
  Notación: $\mathbf{A} \succeq 0$ (o $\mathbf{A} \geq 0$)
  Todas las matrices positivas definidas: $\mathbb{S}^n_{+}$
- **negativa definida** si $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \underline{\mathbf{0}} \quad \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}} < 0$.
  Notación: $\mathbf{A} \prec 0$ (o $\mathbf{A} < 0$)
  Todas las matrices negativas definidas: $\mathbb{S}^n_{--}$
- **negativa semidefinida** si $\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}} \leq 0$.
  Notación: $\mathbf{A} \preceq 0$ (o $\mathbf{A} \geq 0$)
  Todas las matrices positivas definidas: $\mathbb{S}^n_{-}$
- **indefinida** en cualquier otro caso

Características de matrices (semi)definidas

- Si $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n_{++}$ entonces $-\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n_{--}$
- Si $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n_{+}$ entonces $-\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n_{-}$
- Todas las matrices positivas (o negativas) definidas son de rango completo
- Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz cualquiera
  - $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ se denomina matriz de Gram
  - $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es siempre positiva semidefinida
  - si $m \geq n$ y $\mathbf{A}$ es de rango completo entonces $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es positiva definida

Eigensistemas

Eigenvalores y eigenvectores

- También llamados vectores propios, autovectores, o vectores característicos
- Dada un matriz cuadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$ y $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ es su correspondiente eigenvector si

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \lambda\underline{\mathbf{x}}, \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$$

- Interpretación: transformación de eigenvector $\underline{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{A}$ solo cambia su magnitud con un factor $\underline{\mathbf{x}}$
(Ver vídeo de 3Blue1Brown)
- Cualquier escalamiento de un eigenvector es también eigenvector:

$$\mathbf{A}(c\underline{\mathbf{x}}) = c(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}) = c\lambda\underline{\mathbf{x}} = \lambda(c\underline{\mathbf{x}})$$

$\Rightarrow$ se usan eigenvectores normalizados ($\|\underline{\mathbf{x}}\|_2 = 1$)

Eigenvalores (1)

- Multiplicando por matriz identidad no modifica nada:

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{I}\underline{\mathbf{x}}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

  que tiene la solución trivial $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.
- Otras soluciones con $\underline{\mathbf{x}} \neq 0$ posibles solo si $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ es singular (tiene nulidad mayor que cero), por lo que

$$\det |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Eigenvalores (2)

- Puesto que

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

Eigenvalores (3)

- La ecuación $\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \underline{\mathbf{0}}$ es entonces

$$\det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \underline{\mathbf{0}}$$

  que produce un **polinomio** de orden n en términos de λ.
- Existen por tanto n soluciones (posiblemente complejas)
- Problema: ecuación mal condicionada (se usan otros métodos de cálculo de λ)

Eigenvalores (4)

- Para cada uno de los eigenvalores λ_i se plantea un sistema de ecuaciones para encontrar el eigenvector correspondiente

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\underline{\mathbf{x}}_i = \underline{\mathbf{0}}$$

- Nótese que soluciones λ pueden ser complejas o tener multiplicidad mayor a 1. Esto implica que puede que
  - no existan eigenvectores
  - existan menos eigenvectores que la dimensión del espacio
  - nunca van a existir más eigenvectores que la dimensión del espacio

Propiedades de eigenvalores y eigenvectores

- $\operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_i^n \lambda_i$
- $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
- $\operatorname{rg}\mathbf{A} = |\{\lambda \mid \lambda \neq 0\}|$
- Si $\exists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_i = (1/\lambda_i)\underline{\mathbf{x}}_i$
- Los eigenvalores de $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ son $\lambda_i = d_i$

Expresión simultánea

- Todos los eigenvectores se expresan simultáneamente con

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X\Lambda}$$

con

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 & \cdots & \underline{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Diagonalización

- Si los eigenvectores de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes, entonces $\mathbf{X}$ es invertible. En ese caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \mathbf{X\Lambda} \\ \mathbf{AXX}^{-1} &= \mathbf{X\Lambda X}^{-1} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{X\Lambda X}^{-1} \end{aligned}$$

- En ese caso, la matriz se denomina **diagonalizable**:

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \mathbf{X\Lambda} \\ \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X\Lambda} \\ \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} &= \mathbf{\Lambda} \end{aligned}$$

Eigensistemas con matrices simétricas (1)

Con matrices **simétricas** $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$:

- Todos los eigenvalores son **reales**
- Los eigenvectores de $\mathbf{A}$ son ortonormales, y por tanto $\mathbf{X}$ es ortogonal, esto es $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$
(en este caso denotamos esta matrix de eigenvectores con $\mathbf{U}$)
- Se cumple entonces $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$
- Nótese para la forma cuadrática que

$$\underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}^T \mathbf{\Lambda} \underline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

con $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^T \underline{\mathbf{x}}$

Eigensistemas con matrices simétricas (2)

- Lo anterior implica que la definitud de **A** depende solo de los signos de λ_i:
  - Si $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ **A** es definida positiva
  - Si $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow$ **A** es semidefinida positiva
  - Si $\lambda_i < 0 \Rightarrow$ **A** es definida negativa
  - Si $\lambda_i \leq 0 \Rightarrow$ **A** es semidefinida negativa

Optimización de términos cuadráticos

- Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n$. Si buscamos

$$\max_{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}}, \qquad \text{sujeto a } \|\underline{\mathbf{x}}\|_2^2 = 1$$

- Si los eigenvalores están ordenados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, la solución es el eigenvector $\underline{\mathbf{x}}_1$ y el valor máximo de la forma cuadrática es λ_1
- Si buscamos

$$\min_{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} \underline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \underline{\mathbf{x}}, \qquad \text{sujeto a } \|\underline{\mathbf{x}}\|_2^2 = 1$$

- Si los eigenvalores están ordenados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, la solución es el eigenvector $\underline{\mathbf{x}}_n$ y el valor mínimo de la forma cuadrática es λ_n

Resumen

1. Otras operaciones
2. Conceptos avanzados
   - Independencia Lineal
   - Sistemas de ecuaciones y espacios de la matriz
   - Forma cuadrática
   - Eigensistemas

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux