Repaso de Álgebra Lineal

Lección 03

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE5506 Introducción al reconocimiento de patrones
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

II Semestre, 2019

Contenido

Matriz

Matriz de $n \times m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- m: filas
- n: columnas
- En notación a_{ij} primer subíndice i es la fila y segundo j la columna

Vector columna

Vector de m dimensiones $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Vector fila

Vector de n dimensiones $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{\mathbf{x}}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Matriz en vectores

Matriz $m \times n$ $\mathbf{A}$ se compone de m vectores fila

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1,:}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2,:}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{m,:}^T \end{bmatrix}$$

o n vectores columna.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{:,1} & \underline{\mathbf{a}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{:,n} \end{bmatrix}$$

Vectores como matrices

- Observe que todo vector es un tipo particular de matriz
  - Vector fila: matriz de dimensión $1 \times n$
  - Vector columna: matriz de dimensión $m \times 1$
- Propiedades de matrices aplicarán a vectores

Matriz transpuesta (1)

- Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces su transpuesta es

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- En otras palabras, si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ entonces $b_{ij} = a_{ji}$
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

Matriz transpuesta (2)

- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Simetría y anti-simetría (1)

- Matriz es **simétrica** si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  es decir $a_{ij} = a_{ji}$.
- La matriz es anti-simétrica si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$
- Para cualquier matriz cuadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumple
  - $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ es simétrica
  - $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ es anti-simétrica
  - $\mathbf{A} = \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_o = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$
- $\mathbb{S}^n$: conjunto de todas las matrices simétricas $n \times n$

Matriz diagonal

Matriz es **diagonal** si todos los elementos son cero excepto aquellos en la diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se utiliza la notación $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

Matriz identidad

- Matriz es diagonal con todos sus elementos no nulos iguales a uno

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Se cumple $\mathbf{AI} = \mathbf{A} = \mathbf{IA}$ ($\mathbf{I}$ es el elemento neutro del producto matricial).
- $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)$

Operaciones con matrices y vectores

Producto escalar-matriz

El producto $s\mathbf{A}$ es otra matriz con todos los componentes escalados

$$s\mathbf{A} = s\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \cdots & sa_{mn} \end{bmatrix}$$

Suma de matrices

Suma definida para dos matrices de idéntico tamaño:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Combinación lineal

- Una matriz $\underline{\mathbf{A}}$ es la **combinación lineal** de un conjunto de m matrices si
$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} s_i \mathbf{B}_i$$
con s_i los coeficientes de la combinación.
- El conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{B}_i \mid i = 1 \dots m\}$ **engendra** un espacio lineal $\mathbb{V}$ compuesto de todas las combinaciones lineales posibles de las matrices en $\mathcal{B}$.
- Se dice que $\mathcal{B}$ **engendra** a $\mathbb{V}$.

Producto punto entre vectores

- El producto punto está definido para dos **vectores** de dimension n, y es un valor **escalar** calculado con:

$$\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{y}} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- El producto punto es un tipo de producto *interno* y por tanto se puede denotar también como $\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle$
- Para **matrices**, el producto interno de Frobenius se define como:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Ángulo entre dos vectores

- El ángulo α entre dos vectores $\underline{\mathbf{x}}$ e $\underline{\mathbf{y}}$ está dado por

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{y}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{y}}\|}\right)$$

- La proyección ortogonal de $\underline{\mathbf{y}}$ sobre $\underline{\mathbf{x}}$ está dada por

$$y_{\underline{\mathbf{x}}} = \frac{\underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{y}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|}$$

- Si $\underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{y}} = 0$ ambos vectores son **ortogonales**
- Si $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 1$ se dice que $\underline{\mathbf{x}}$ está **normalizado**
- Vectores son ortonormales si son ortogonales y normalizados

Producto externo entre vectores

El producto **externo** está definido para dos vectores y es una **matriz** de dimensiones $m \times n$ con m el tamaño del primer vector y n el tamaño del segundo vector:

$$\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & x_m y_2 & \cdots & x_m y_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Uso de operaciones aritméticas (1)

Ejemplo

Dado el vector columna m-dimensional $\underline{\mathbf{x}}$, ¿con qué operaciones puede expresarse la réplica de ese vector en n columnas de una matriz? y ¿con qué operaciones puede expresarse la réplica de un vector fila n-dimensional $\underline{\mathbf{x}}$ en m filas de una matriz?

Ejemplo: Uso de operaciones aritméticas (2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{x}} & \cdots & \underline{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{1}}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & x_m & \cdots & x_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Uso de operaciones aritméticas (3)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^T \\ \underline{\mathbf{x}}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}^T \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{1}\mathbf{x}}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Producto matricial

El producto entre una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $m \times n$ por otra matriz $\mathbf{B}$ de dimension $n \times l$ es la matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1,:}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2,:}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{m,:}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_{:,1} & \underline{\mathbf{b}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{b}}_{:,l} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,1} & \underline{\mathbf{a}}_{1,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{1,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,l} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,1} & \underline{\mathbf{a}}_{2,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{2,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{m,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,1} & \underline{\mathbf{a}}_{m,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{m,:} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{:,l} \end{bmatrix}$$

que es una matriz de $n \times l$.
Note la similitud con el producto externo de vectores.

Propiedades del producto matricial

- El producto matricial **NO** es conmutativo

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

- Si las dimensiones lo permiten, el producto matricial **sí** es asociativo

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

- Si las dimensiones lo permiten, el producto matricial es distributivo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

Interpretaciones del producto

Interpretaciones del producto matricial (1)

- Obsérvese primero el producto matriz-vector

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{m:}^T \end{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1:} \cdot \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2:} \cdot \underline{\mathbf{b}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{m:} \cdot \underline{\mathbf{b}} \end{bmatrix}$$

- En el producto matriz-matriz $\mathbf{AB}$, si $\underline{\mathbf{b}}_{:,j}$ es la j-ésima columna de $\mathbf{B}$, entonces el patrón anterior se cumple para la j-ésima columna del resultado.

Producto como combinación lineal de columnas (1)

- Otra forma de ver el producto matriz-vector es como combinación lineal de los vectores columna:

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{:,1} & \underline{\mathbf{a}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{:,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= b_1\underline{\mathbf{a}}_{:,1} + b_2\underline{\mathbf{a}}_{:,2} + \cdots + b_m\underline{\mathbf{a}}_{:,m}$$

- Observe la similitud con el producto punto.
- El espacio engendrado por las columnas de **A** se denomina espacio columna de **A**
- El espacio columna se conoce también como el alcance columna de **A** (*range*)

Producto como combinación lineal de columnas (2)

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ \frac{5}{2}\\ 3\end{bmatrix}$$

(representación gráfica en gnuplot)

Producto vector-matriz

- Observese ahora el producto vector-matriz

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{c}}^T = \underline{\mathbf{b}}^T\mathbf{A} &= \underline{\mathbf{b}}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{:,1} & \underline{\mathbf{a}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{:,n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{:,1} & \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{:,2} & \cdots & \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{:,n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- En el producto matriz-matriz $\mathbf{AB}$, si $\underline{\mathbf{a}}_{j,:}$ es la j-ésima fila de $\mathbf{A}$ entonces el patrón anterior se cumple para la j-ésima fila del resultado.

Producto como combinación lineal de filas (1)

- Otra forma de ver el producto vector-matriz es como combinación lineal de los vectores fila:

$$\underline{\mathbf{c}}^T = \underline{\mathbf{b}}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1,:} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2,:} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n,:} \end{bmatrix}$$

$$= b_1 \underline{\mathbf{a}}_{1,:} + b_2 \underline{\mathbf{a}}_{2,:} + \cdots + b_n \underline{\mathbf{a}}_{n,:}$$

- Observe de nuevo la similitud con el producto punto.

Producto como combinación lineal de filas (2)

Dos posibles interpretaciones

Lo anterior implica que el producto de dos matrices puede intepretarse como combinaciones lineales de las columnas de la primera matriz, o de las filas de la segunda matriz.

Resumen

1. Vectores y matrices
   - Definiciones
2. Operaciones matriciales
   - Definiciones
   - Interpretaciones

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux