Parte I

(1) $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \wedge \quad tr\,[s] = s$

$f(x) = tr\left(\frac{1}{2} x^T A x + b^T x\right)$

$\nabla_x f(x) = \nabla_x tr\left(1/2\, x^T A x + b^T x\right)$

$\nabla_x f(x) = \nabla_x tr\left(1/2\, x^T A x\right) + \nabla_x tr\left(b^T x\right)$

$\nabla_x f(x) = \frac{1}{2} \nabla_x tr\left(x^T A x\right) + b$

como $\nabla_{A^T} tr\, A B A^T C = B^T A^T C^T + B A^T C$

con $A = x^T \quad B = A \quad C = I$

$\nabla_x f(x) = \frac{1}{2}\left(A^T x I + A x I\right) + b$

$\frac{1}{2}\left(A^T x + A x\right) + b$

como $A = A^T$

$\nabla_x f(x) = A x + b$

(2) $\nabla_x^2 f(x) = \nabla_x (A x + b)$

$\nabla_x^2 f(x) = A$

③ $f(x) = g(h(x))$

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\nabla_x f(x) = g'(h(x)) \cdot \nabla_x h(x)$

④ $f(x) = g(\underline{a}^T \underline{x})$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}^n$

$\nabla f(x) = g'(\underline{a}^T \underline{x}) \cdot a$

$\frac{\partial}{\partial x} \underline{a}^T \underline{x} = a$

$\nabla^2 f(x) = g''(\underline{a}^T \underline{x})\, a^2$

Parte II

(1) $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$ $\quad A = z z^T$ $\quad$ positiva - semidefinida

$\hookrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^T A x \geq 0$

$\underline{x}^T A \underline{x}$

$\underline{x}^T \underline{z} \underline{z}^T \underline{x}$

$(\underline{x}^T \underline{z})(\underline{z}^T \underline{x})$

$\underline{k} \quad \underline{k}$

como $z^{\wedge} x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow z^T x = x^T z = k$

$\underline{k}^2 \rightarrow$ sólo puede ser ≥ 0

(2) $A = \underline{z}\,\underline{z}^T \qquad z \neq \underline{0}$

$A\underline{x} = 0$

$\underline{z}\,\underbrace{\underline{z}^T \underline{x}} = 0$

*Producto punto necesita ser 0

$\Rightarrow \underline{z}^T$ y $\underline{x}$ son ortogonales

$\underline{z} \cdot 0 = 0$

El rango es 1 ya que la columna 2 al ser dividida por x_1 y multiplicada por x_1, se obtiene la columna 1. Esto significa que todas las columnas son dependientes entre ellas, por lo que el espacio está compuesto de una columna de la cual se derivan las demás.