Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника (1.4.2)

Моргулёв Илья

Октябрь 28, 2023

Цель работы: с помощью оборотного маятника измерить величину ускорения свободного падения.
В работе используются: оборотный маятник с двумя подвесными призмами и двумя грузами (чечевицами); электронный счётчик времени и числа колебаний; подставка с остриём для определения центра масс маятника; закреплённая на стене консоль для подвешивания маятника; металлическике линейки, штангенциркуль длиной 1 метр.

1 Введение

Теоретическая сводка:
Для малых колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \tag{1}$$

Где J - момент инерции маятника относительно оси качания, l - расстояние от оси качания до центра масс маятника.
Сравнивая эту формулу с уже известной всем из школьной программы $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

$$l_{pr} = \frac{J}{ml} \tag{2}$$

Где l_{pr} - привеённая длина физического маятника.
Смысл приведённой длины в том, что при длине математичсекого маятника, равной l_{pr}, его период колебаний совпадает с периодом колебаний физического маятника.
Теорема Гюйгенса об оборотном маятнике
Пусть O_1 — точка подвеса физического маятника, а C — его центр масс. Отложим отрезок длиной l_{pr} вдоль линии O_1C, и обозначим соответствующую точку как O_2 — эту точку называют центром качания физического маятника. Заметим, что приведённая длина всегда больше расстояния до центра масс ($l_{pr} > l$), поэтому точка O_2 лежит по другую сторону от центра масс.
Точки O_1 и O_2 обладают свойством взаимности: если перевернуть маятник и подвесить его за точку O_2, то его период малых колебаний останется таким же, как и при подвешивании за точку O_1 (теорема Гюйгенса). На этом свойстве — «оборотности» — и основан довольно точный метод определения ускорения свободного падения, применяемый в данной работе. Рисунок к работе теоремы гюйгенса приведён здесь: (1)

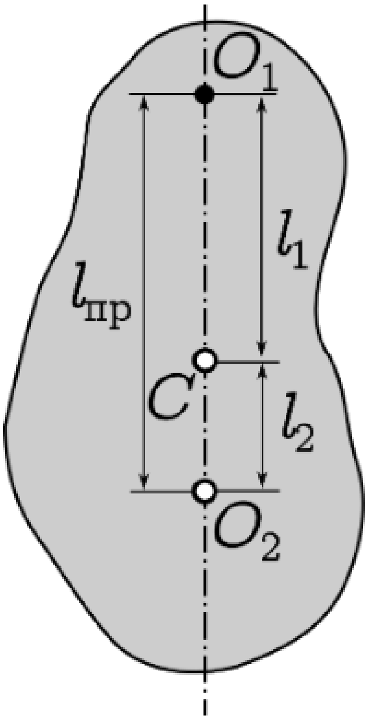

Рис. 1: К теореме гюйгенса

Докажем теорему Гюйгенса об оборотном маятнике. Пусть O_1 и O_2 — две точки подвеса физического маятника, лежащие на одной прямой с точкой C по разные стороны от неё. Тогда периоды колебаний маятника равны соответственно:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}} \tag{3}$$

По теореме Гюйгенса—Штейнера имеем:

$$J_1 = J_c + ml_1^2; \qquad J_2 = J_c + ml_2^2 \tag{4}$$

где J_c — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качания.

Пусть периоды колебаний одинаковы: $T_1 = T_2$. Тогда одинаковы должны быть и приведённые длины:

$$l_{pr} = \frac{J_1}{ml_1} = \frac{J_2}{ml_2}$$

С учётом (4) имеем:

$$l_{pr} = \frac{J_c}{ml_1} + l_1 = \frac{J_c}{ml_2} + l_2 \tag{5}$$

откуда следует, что при $l_1 \neq l_2$ справедливо равенство:

$$J_c = ml_1l_2 \tag{6}$$

Наконец, подставляя (6) обратно в (5), получим:

$$l_{pr} = l_1 + l_2 \tag{7}$$

Таким образом, если периоды колебаний при подвешивании маятника в точках O_1 и O_2 равны, то расстояние между точками подвеса равно приведённой длине маятника. Нетрудно видеть, что и обратное утверждение также верно. Заметим также, что период колебаний маятника (3), рассматриваемый как функция от l_1,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_c + ml_1^2}{mgl_1}}$$

имеет *минимум* при $l_{1min} = \sqrt{J_c/m}$. Из (6) видно, что в этой точке $l_2 = l_1 = l_{pr}/2$, то есть центр масс находится посередине между сопряжёнными точками O_1 и O_2 . График зависимости $T(l_1)$ схематично представлен на 2

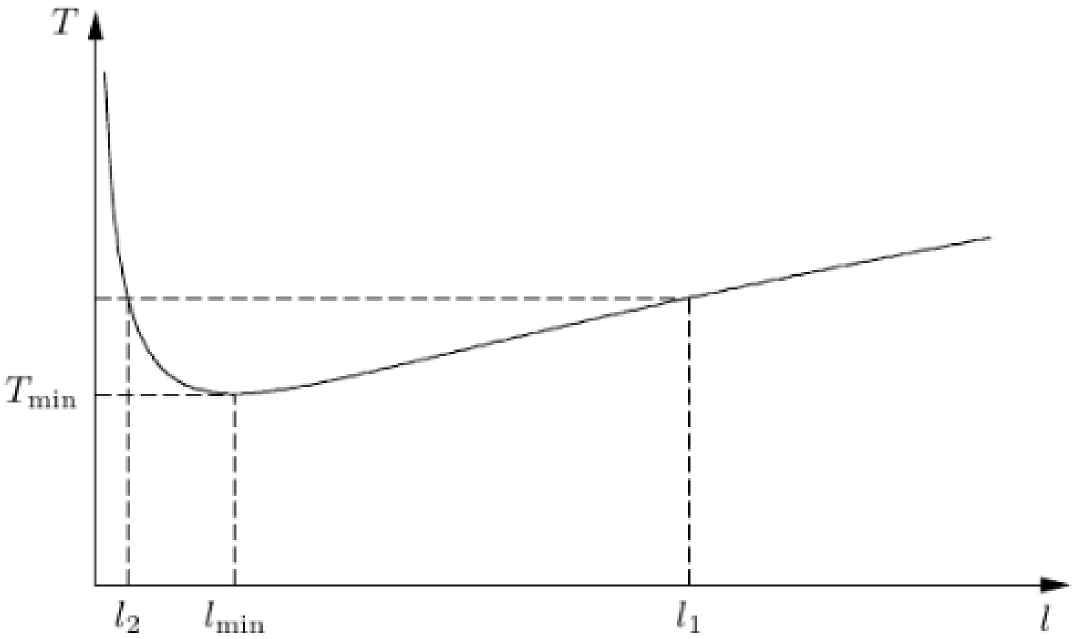

Рис. 2: Зависимость периода колебаний от положения центра масс относительно оси качания

Измерение g Пусть $L \equiv \overline{O_1O_2} = l_1 + l_2$ — расстояние между двумя «сопряжёнными» точками подвеса физического маятника. Если соответствующие периоды малых колебаний равны, $T_1 = T_2 = T$, то по теореме Гюйгенса $L = l_{pr}$. То- гда из (1) и (2) находим ускорение свободного падения:

$$g_0 = (2\pi)^2 \frac{L}{T^2} \tag{8}$$

Точного совпадения $T_1 = T_2$ на опыте добиться, конечно, невозможно. Поэтому получим формулу для определения ускорения свободного падения g, если измеренные периоды незначительно различаются: $T_1 = T$, $T_2 = T + \delta T$. Из системы (3) и (4) получаем:

$$g_0 = (2\pi)^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2} \tag{9}$$

Отсюда следует, что l_1/l_2 желательно чтобы было не особенно близко к единице. На практике соблюдается следующее соотношение (желательно чтобы соблюдалось, в нашем эксперименте мы будем этого придерживаться):

$$l_1 > 2{,}5 l_2 \tag{10}$$

Экспериментальная установка

Применяемые в работе маятники представляет собой стержни цилиндрического или прямоугольного сечения длиной ≈1 м и массой ≈ 1/1,5 кг. Маятник подвешивается с помощью небольших треугольных призм (П1 и П2), острым основанием опирающихся на закреплённую на стене консоль. Ребро призмы задаёт ось качания маятника. На стержне закрепляются два дополнительных груза в форме «чечевицы» (Г1 и Г2). Для выполнения условия $L_1 > L_2$ внешнюю чечевицу Г2 следует крепить за призмой П2, а чечевицу Г1 (внутреннюю) — между призмами П1 и П2 (см. 3)

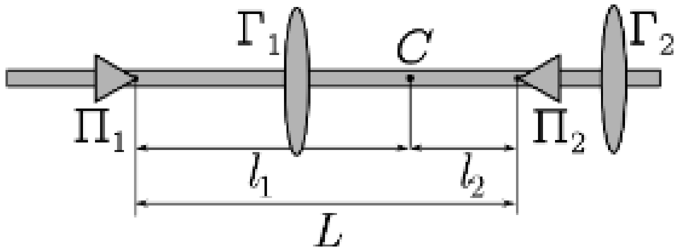

Рис. 3: Маятник с двумя грузами

Регистрация времени колебаний проводится с помощью электронных счётчиков. Расстояния между точками установки маятников на консоли до электронных счётчиков фиксировано. Это накладывает ограничения на расположение призм и грузов на стержне. Призмы крепятся *симметрично* на равном расстоянии от концов стержней так, чтобы маятник при колебаниях пересекал фотоприёмники счётчика, не задевая оправу счётчика.

Фиксированное положение призм однозначно задаёт приведённую длину оборотного маятника $l_{pr} = L$. Изменять в опыте можно только положения грузов на стрежне. Главная задача опыта — подобрать такое положение грузов, при котором периоды колебаний при перевороте маятника совпадали бы с достаточно высокой точностью, а для положения центра масс маятника выполнялось при этом условие (10).

Предварительный расчёт положения грузов

Если первоначально расположить грузы на стержне произвольным образом, то для достижения равенства периодов колебаний потребуется исследовать зависимости периодов колебаний T_1 и T_2 при перемещении поочерёдно обоих грузов по штанге. При этом всякий раз необходимо при перестановке призм переворачивать тяжёлый маятник. Такая методика требует много времени и не всегда приводит к нужному результату.

Существенно облегчить и ускорить поиск нужного положения грузов можно, если провести *предварительные расчёты*. При этом для грубой оценки достаточно использовать максимально упрощённую модель, например, считать маятник *тонким стержнем* с закреплёнными на нём точечными массами. После установки грузов согласно предварительным расчётам, их положение может быть уже уточнено экспериментально.

Пусть призмы П1 и П2 задают сопряжённые точки подвеса, то есть период колебаний при перевороте маятника не изменяется. Тогда по теореме Гюйгенса расстояние между призмами L — это приведённая длина маятника. Это условие может быть записано либо в форме (2):

$$J_p = MLl_2, \tag{11}$$

где J_p — момент инерции маятника относительно призмы П2 , либо в форме (5):

$$J_c = Ml_1l_2 \tag{12}$$

где J_c — момент инерции маятника относительно его *центра масс*. Здесь M — полная масса маятника. Как J_p, так и J_c являются функциями положений грузов b_1 и b_2 относительно соответствующих призм П1 и П2 (см. Рис. 5). Задание длины l_1 (или l_2) определяет положение центра масс маятника. Это позволяет, во-первых, рассчитать правые части (11) или (12), и, во-вторых, накладывает дополнительную связь на расстояния b_1 и b_2 (при известных массах всех элементов маятника). Тогда соотношения (11) или (12) превращаются в уравнение с одной неизвестной, например, b_2. Корень этого уравнения можно приближённо найти графически, например, с помощью электронных таблиц. Дополнительные сведения о методике подбора положения грузов приведены в 4.

Оценка погрешностей Оценим влияние погрешностей измерений на точность расчётов по формуле (9). Пусть все периоды измерены с одинаковой погрешностью σ_T , расстояние L между точками подвеса с погрешностью σ_L , расстояния $l_{1,2}$ до центра масс с погрешностью σ_l Погрешность определения величины g_0 (по формуле (8)) равна:

$$\frac{\sigma_{g_0}}{g_0} = \sqrt{(\frac{\sigma_L}{L})^2 + (\frac{\sigma_T}{T})^2}. \tag{13}$$

Это — основная погрешность опыта. Видно, что для её минимизации необходимо максимально точно измерить расстояние между точками повеса L и период колебаний маятника T.

Проанализируем влияние поправки $g = g_0 + \Delta g$:

$$\Delta g \approx \frac{2l_2}{l_1 - l_2} \cdot \frac{\Delta T}{T} g_0.$$

Общая формула для погрешности (9) слишком громоздка, поэтому для наглядности анализа проведём вычисления приближённо. Достаточно учесть, что основной вклад в относительную погрешность Δg вносят вели- чины ΔT и $\Delta l = l_1 - l_2$, поскольку являются разностями двух близких величин. Поэтому

$$\frac{\Delta g}{g} \approx \frac{2(\frac{l_2}{l_1 - l_2})\Delta T}{T} \sqrt{(\frac{\sigma_{\Delta T}}{\Delta T})^2 + (\frac{\sigma_{\Delta l}}{\Delta l})^2}$$

(здесь мы для воспользовались формулой погрешности разности, которая даёт $\sigma_{\Delta l} = \sqrt{2}\sigma_l$ и $\sigma_{\Delta T} = \sqrt{2}\sigma_T$). Тогда для полной относительной погрешности получим

$$\frac{\sigma_g}{g} \approx \sqrt{(\frac{\sigma_L}{L})^2 + 4(\frac{\sigma_T}{T})^2 + 8(\beta\frac{\sigma_T}{T})^2 8(\beta\frac{\Delta T}{T}\frac{\sigma_l}{\Delta l})^2}. \tag{14}$$

Где β:

$$\beta = \frac{l_2}{l_1 - l_2}$$

Из этого результата можно сделать следующие выводы. Во-первых, при достаточно хорошем совпадении периодов ($\Delta T \ll T$) погрешность измерения длин l_1 и l_2 по отдельности практически *не влияет на погрешность конечного результата*, поскольку вклад последнего (4-го) слагаемого будет заведомо мал. И, во-вторых, итоговая погрешность *неограниченно возрастает* при $l_1 \hookrightarrow l_2$, т. е., когда центр масс маятника оказывается близок к геометрическому центру стержня. Проведём оценочные расчёты. Третье слагаемое в погрешности не превысит второе при $\sqrt{2}\beta < 1$, то есть

$$l_1 > (1 + \sqrt{2})l_2 \approx 2{,}4 l_2$$

График зависимости относительной величины β от l_1/l_2 приведён на Рис. 4.

Оценим вклад последнего (4-го) слагаемого в (14). Пусть погрешность измерения периода составляет $\frac{\sigma_T}{T} = \frac{0{,}01}{200} = 5 \cdot 10^-5$, а точность совпадения периодов при перевороте маятника равна $\Delta T/T \approx 10^-2$ (1%). Тогда для обеспечения заданной погрешности (4-е слагаемое не превышает остальные) длины $l_{1,2}$ достаточно измерять с относительной погрешностью $\sigma_l/l \approx 10^-2$ (1%). Такая точность измерения положения центра масс вполне достижима на практике. Наконец, отсюда же видно, что при относительной погрешности определения положения центра масс в 1% ($\sigma_l = 1$ мм при $l \approx 10$ см) нет необходимости добиваться совпадения периодов точнее, чем $\Delta T/T \approx 1\%$

2 Ход работы

1. Снимаем маятник с консоли и взвешиаем его. Снимаем грузы и призмы с маятника и взвешиваем все его элементы по отдельности (если элементы маятника являются несъёмными, соответствующие значения масс указаны на установке).

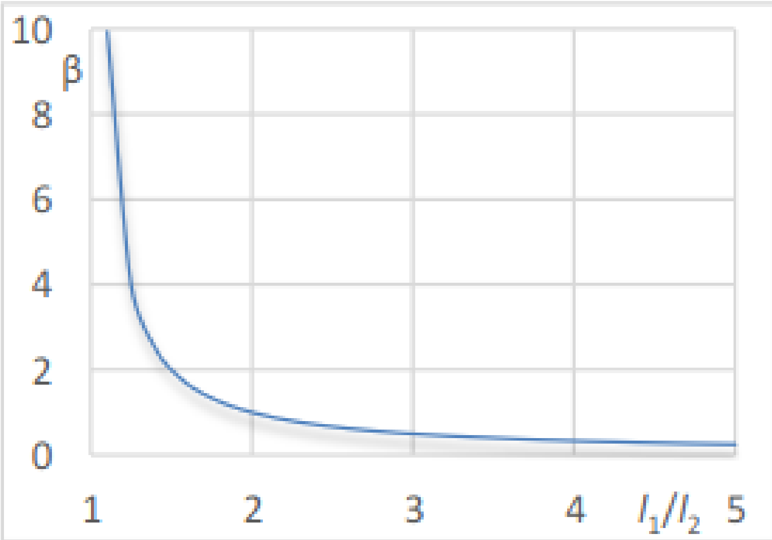

Рис. 4: Зависимость коэффициента β от положения центра масс

Масса стержня	868,2 г
Масса призмы 1	78,4 г
Масса призмы 2	79,7 г
Масса груза 1	1483,7 г
Масса груза 2	1507,9 г
Масса маятника (вычисленная)	4017,9 г
Масса маятника (измеренная)	4017,9 г
Длина стержня	100 см
Расстояние между призмами	59,6 см
Момент инерции стержня относительно призмы П2	0,176 кг*м^2
Момент инерции маятника относительно призмы П2	0,416 кг*м^2
L1/L2	$\approx$ 2,7
L1	44,2
L2	16,4

Оценим погрешность измерения масс.
Данные измерений занесены в таблицу 1. Оценим погрешность измерений:

$$\sigma_{sist} = 0{,}05; \qquad \sigma_{rz} = 0{,}045$$
$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_{sist}^2 + \sigma_{rz}^2} \approx 0{,}07$$

2. Закрепим подвесные призмы симметрично на стержне (положения призм указаны на установке). Убедимся, что ребра призм параллельны друг другу и «смотрят» в сторону центра маятника.

3. С помощью большого штангенциркуля максимально точно измерим расстояние L между призмами. В дальнейшем призмы должны оставаться закреплёнными на своих местах. Оценим погрешность измерения длины. В таблице (1) находятся данные измерений. Погрешность измерения длины с помощью штангенциркуля $\sigma_L = 0{,}1$ мм, случайная погрешность у штангенциркуля отсутствует, следовательно общая погрешность равна систематической, равна 0,1 мм.

t_1	t_2	t_3	t_4
31,06	31,04	31,03	31,04

Таблица 1: Измерения времени для $n = 20$

4. Зададимся значением $l_1/l_2 = 2{,}4$, удовлетворяющим условию (1), рассчитаем по методике, описанных в Приложении 1, положения грузов («чечевиц») на стержне.
   Результаты измерений занесены в таблицу, закрепим грузы на соответствующих местах.

5. С помощью $\perp$-образной подставки определим положение центра масс маятника с грузами. Измерим расстояния l_1 и l_2 : от центра масс до острия призм П1 и П2 соответственно. Внесём данные в таблицу 1 Убедимся, что условие 1) выполнено: $l_1/l_2 \approx 2{,}695 \approx 2{,}7$ - условие 1 выполнено. Внесём результат в 1.

6. Подвесим маятник на консоли на призме П2. Включаем электронный счётчик и убедимся в работоспособности системы (маятник при качании не касается элементов установки и не проскальзывает в подвесе, счётчик корректно считает количество колебаний и их время).
   Маятник работает корректно, никаких задеваний не происходит, колебания считаются корректно.

7. Проведём измерение времени n = 20 колебаний 3–4 раза, вязкий раз отклоняя маятник на малый угол $\alpha \approx 5°$.
   Убедимся, что значения времён совпадают в пределах погрешности секундомера.
   В пределах погрешности значения совпадают. Погрешность секундомера
   $\sigma_T = \sqrt{\sigma_{sl}^2 + \sigma_{sist}^2} = \sqrt{0{,}027^2 + 0{,}005^2} \approx 0{,}027$
   Рассчитаем период колебаний T_2.
   Для $n = 20$ $T_2 = 31{,}04/20 \approx 1{,}55$ с.

8. Перевернём маятник, подвесив его на призму 1 (при неизменном положении всех элементов на стержне). Проведём измерение периода T_1.
   Для $n = 20$ $T_1 = 31{,}15/20 \approx 1{,}56$ с.

9. Сравним значения T_1 и T_2. Если различие не превышает $\Delta T/T \approx 1\%$, переходим к следующему пункту.
   В противном случае, вернём маятник на призму 2, переместим груз 2 на небольшое расстояние (2–4 мм) и повторим измерения периодов по п. 7–8. При подборе положений грузов достаточно проводить каждый раз по одному измерению с n = 10 колебаний.
   $$\frac{\Delta T}{T} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-3}$$
   Это меньше 1% , следовательно идём дальше.

10. Проведём окончательное измерение периодов T_1 и T_2 с максимальной точностью. Количество колебаний n примем *100*.
    Для $n = 100$

$$T_1 = 148{,}57/100 \approx 1{,}486$$

$$\mathrm{T}_2 \approx 1{,}486$$

11. Снимем маятник с консоли.

12. Определим ускорение свободного падения g. Оценим погрешность конечного результата. Сравним результат с табличным.
    По формуле 9:
$$g_0 \approx 39{,}4 \cdot \frac{0{,}168}{0{,}658} \approx 10{,}183$$
    Тогда по формуле 14:
$$\beta \approx 1{,}59$$
$$\sigma_g \approx g_0 \sqrt{(\tfrac{0{,}0001}{59{,}6})^2 + 4(\tfrac{0{,}027}{1{,}486}^2) + 8(\tfrac{1{,}59 \cdot 0{,}027}{1{,}486})^2 + 8(\tfrac{1{,}59 \cdot 0{,}04}{1{,}486} \cdot \tfrac{0{,}0001}{0{,}278})^2} \approx 0{,}086.$$

3 Вывод

В ходе данной раоты мы научились измерять погрешности при работе с цифровыми секундомерами и весами. Так же научились измерять силу тяжести с помощью оборотного маятника, познакомились с его устройством. Научилисьь автоматизировать процесс рассчёта некоторых формул с помощью таблиц. Разобрались с практическим применением теоремы Гюйгенса-Френейля.
Так же рассчитали, что $g = (10{,}183 \pm 0{,}083)$ кг*м/с^2.

4 Приложение

Пусть b_1 — расстояние от груза Г1 до призмы П2, а b_2 — расстояние от груза Г2 до призмы П2 (см. Рис. 5). Массы элементов маятника: стержня — m_{st}, подвесных призм — m_{pr} и m_{pr2}, грузов — m_1 и m_2.

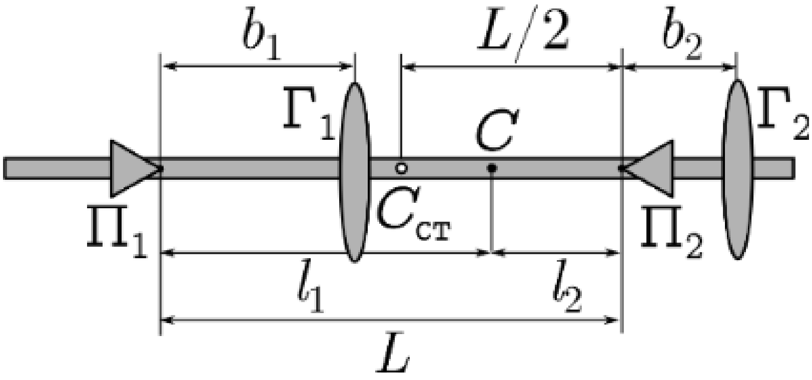

Рис. 5: Расположение грузов и призм на маятнике. С — центр масс маятника, C_{st} — центр масс стержня.

Будем считать положение центра масс маятника заданным. Тогда положения грузов b_2 и b_1 оказываются взаимно однозначно связаны соотношением:

$$Ml_1 = m_{st}\frac{L}{2} + m_{pr2}L + m_1 b_1 + m_2(b_2 + L) \tag{15}$$

где M — полная масса маятника, l_1 — расстояние от острия призмы П1 до центра масс маятника. Здесь мы считаем, что призмы расположены на стержне симметрично и центр масс стержня равноудалён на расстояние $L/2$ от призм. Все вычисления могут быть частично автоматизированы с помощью электронных таблиц.