

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса. (1.2.3)

Моргулёв Илья

Ноябрь 2023

1 Введение

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

2 Экспериментальная установка

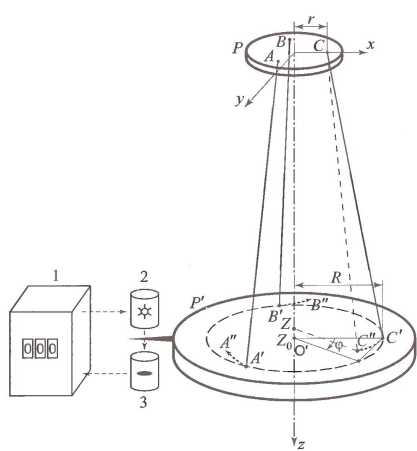


Рис. 1: Физический маятник

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

3 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (1)$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ . Первый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} (R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 &= L^2 \\ z^2 &= L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2 \\ z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0} \end{aligned}$$

Подставляя z в уравнение (1), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2z_0} = kT^2 \quad (2)$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2z_0}$ – величина, постоянная для данной установки.

4 Задание

4.1 Проверка установки

При возбуждении крутильных колебаний маятникообразных движений платформы не наблюдается – устройство функционирует нормально.

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T$$

Проверим данное условие. При отклонении на угол $\alpha \approx 5^\circ$ время, за которое амплитуда уменьшится в 2 раза, $\tau \approx 300$ с, а $T \approx 3,5$ с. Соотношение выполняется – установка пригодна для проведения эксперимента. Начальное отклонение было выбрано $\alpha \approx 5^\circ$.

4.2 Параметры установки и коэффициент k

Работа выполнялась на установке №6, ее параметры указаны в Таблице (1)

m , г	R , мм	r , мм	L , см	z_0 , см
983,2	114,6	30,5	215,2	215
σ_m , г	σ_R , мм	σ_r , мм	σ_L , см	σ_{z_0} , см
0,5	0,5	0,3	0,1	0,1

Таблица 1: Параметры установки

где σ_m , σ_R , σ_r , σ_L , σ_{z_0} – погрешности соответствующих величин.

По полученным данным вычислим постоянную для конструкции №6:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 4,12 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность же k будет равна:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0,044 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

4.3 Момент инерции платформы

Определить момент инерции платформы можно по формуле (2). Для этого нам необходимо определить период колебаний ненагруженной платформы. Измеряем период, получаем:

№	Количество полных колебаний	Время колебаний – t_n , с	Период колебаний – T с
1	20	87,245	4,3623
2		87,244	4,3622
3		87,251	4,3626

Тогда, средний период колебания платформы будет: $T_{\text{ср}} \approx 4,3624$ с

Давайте здесь же и определим погрешность времени:

$$\sigma_T^{\text{сист}} = 0,015 \text{ с}$$

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{изм}}(N_{\text{изм}} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{\text{изм}}} (T_{\text{ср}} - T_i)^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-4}, \text{ с}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \approx 0,015 \text{ с}$$

Значит $T_{\text{ср}} = (4,396 \pm 0,015) \text{ с}$. Теперь мы можем определить момент инерции платформы:

$$I_{\text{пл}} = kmT^2 \approx 7,71 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

Найдем погрешность найденного нами момента инерции платформы:

$$\varepsilon_I = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \approx 0,012$$

$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = \varepsilon_I \cdot I_{\text{пл}} \approx 0,098 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

Получаем, что с помощью данной конструкции мы можем определять момент инерции тела с погрешностью 1%, и $I_{\text{пл}} = (7,71 \pm 0,098) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$

4.4 Определение моментов инерции различных тел. Аддитивность моментов инерции

Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы, а именно – 3 измерения по 20 колебаний для каждого набора тел, получаем:

Набор тел	$t_0, \text{ с}$	$T_0, \text{ с}$	$m_0, \text{ г}$	Момент инерции, $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$
Платформа	87,244	4,3624	983,2	7,71
Платформа + диск	38,958	3,8958	1573	9,836
Платформа + кольцо	41,444	4,1444	1760,1	12,455
Платформа + кольцо + цилиндр	38,871	3,8871	2349,9	14,628

Таблица 2: Моменты инерции платформы с различными телами

Для подтверждения аддитивности необходимо показать, что выполняются условия:

$$I_{\text{пл+ц}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{ц}} \quad (3)$$

$$I_{\text{пл+к}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{к}} \quad (4)$$

$$I_{\text{пл+ц+к}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{ц}} + I_{\text{к}} \quad (5)$$

Из Таблицы (2) и формул (3), (4) мы можем найти момент инерции диска и кольца: $I_{\text{д}} = I_{\text{пл+д}} - I_{\text{пл}} = (2,126 \pm 0,122) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$, а $I_{\text{к}} = I_{\text{пл+к}} - I_{\text{пл}} = (4,745 \pm 0,161) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$.

Тогда, для доказательства аддитивности, проверим уравнение (5). Оно выполняется, следовательно моменты инерции аддитивны.

Теперь сравним полученные нами моменты инерции для тел, и их теоретические значения. Для диска момент инерции вычисляется следующим образом: $I_{\text{д}} = \frac{1}{2}m_{\text{д}}R_{\text{д}}^2$. Радиус данного диска $R_{\text{д}} = 8,46 \text{ см}$, тогда $I_{\text{д}} = 2,111 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$, что подтверждает экспериментальное значение.

Для кольца же: $I_{\text{к}} = m_{\text{к}}R_{\text{к}}^2$. Так как данное кольцо не идеально тонко, то $R_{\text{к}} = \frac{D_{\text{внут}} + h}{2}$, где $h = 0,32 \text{ см}$, а $D_{\text{внут}} = 14,29 \text{ см}$, тогда $R_{\text{к}} = 7,8 \text{ см}$. Получаем, что $I_{\text{к}} = 4,726 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$, что тоже совпадает с полученным экспериментальным значением.

4.5 Зависимость момента инерции системы тел от их расположения.

График зависимости $I(h^2)$

Определим зависимость момента инерции системы двух тел от их взаимного расположения. Для этого располагая грузы, как показано на рис. 2, получим зависимость от расстояния. Затем Используя формулу 2, определим зависимость $I(h^2)$.

Полученные результаты измерений занесем в таблицы (3),(4) соответственно. Основываясь на результатах таблицы (4), построим график зависимости $I(h^2)$ (Рис. 3).

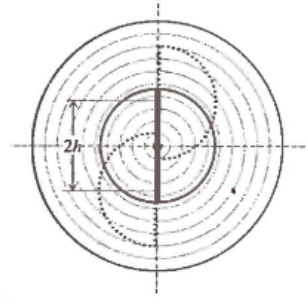


Рис. 2: Схема расположения грузов на платформе трифилярного подвеса.

№ изм.	T, с	h, см	№ изм.	T, с	h, см
1	3,055	0	8	3,336	3,5
2	3,063	0,5	9	3,417	4,0
3	3,078	1,0	10	3,511	5,5
4	3,113	1,5	11	3,607	5,0
5	3,154	2,0	12		
6	3,196	2,5	13		
7	3,267	3,0	14		

Таблица 3: Зависимость Периода колебаний от расстояния

№ изм.	I, кг · м ² · 10 ⁻³	h, см	№ изм.	I, кг · м ² · 10 ⁻³	h, см
1	9,327	0	8	11,123	3,5
2	9,377	0,5	9	11,669	4,0
3	9,467	1,0	10	12,320	5,5
4	9,685	1,5	11	13,003	5,0
5	9,942	2,0	12		
6	10,209	2,5	13		
7	10,667	3,0	14		

Таблица 4: Зависимость момента инерции системы от расстояния

По графику понятно, что $I = kh^2 + b$. Тогда b – момент инерции платформы + диска. Для вычисления коэффициентов k и b воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,1472 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{см}^2} \cdot 10^{-3},$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 9,3255 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3},$$

где $x = h^2$, $y = I$.

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{случ}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,0007 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{см}^2} \cdot 10^{-3},$$

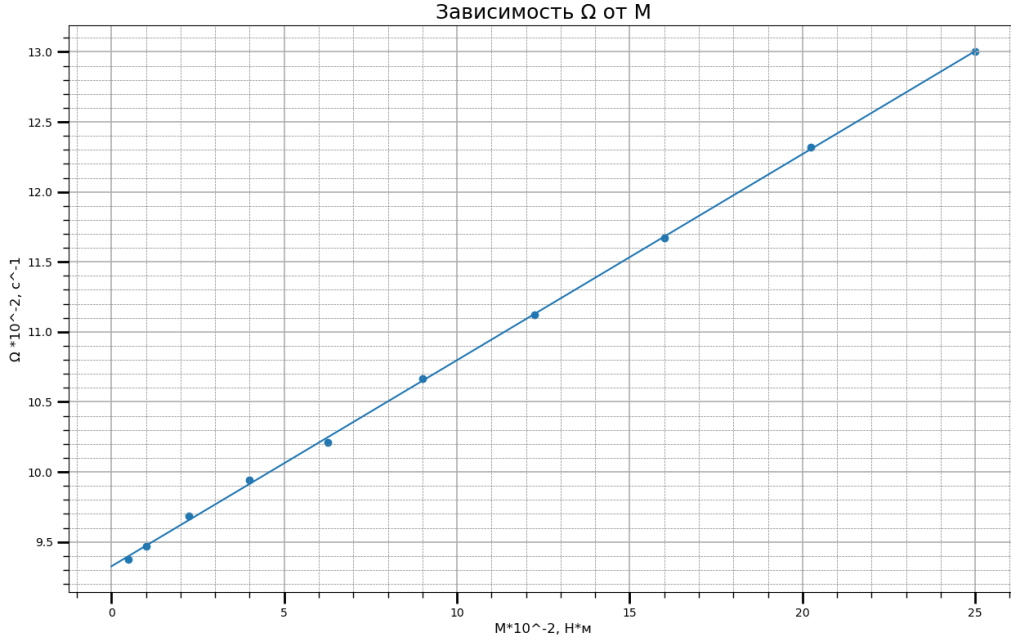


Рис. 3: График зависимости $I(h^2)$

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,006 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \sqrt{(\varepsilon_I)^2 + (\varepsilon_{h^2})^2} \approx b \cdot \varepsilon_I \approx 0,118 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0,118 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}.$$

Необходимый нам момент инерции можно найти при $h = 0$, тогда $b = I_{\text{пл+д}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}} = (9,327 \pm 0,118) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$. Так как момент инерции платформы уже извешен, и он равняется: $I_{\text{пл}} = (7,71 \pm 0,098) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$, то момент инерции диска $I_{\text{д}} = (1,617 \pm 0,141) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$.

Зная радиус диска $R_{\text{д}} = (0,0473 \pm 0,0001) \text{ м}$, мы можем определить его массу: $m_{\text{д}} = 2I_{\text{д}}/R_{\text{д}}^2 \approx 1,4455 \text{ кг}$, $\sigma_{m_{\text{д}}} = m_{\text{д}} \cdot \sqrt{\varepsilon_I^2 + (2\varepsilon_R)^2} \approx 0,126 \text{ кг}$. Значит, что экспериментальная масса диска $m_{\text{д}} = (1,4455 \pm 0,126) \text{ кг}$, что совпадает с реальной полной массой диска $m = (1442,6 \pm 0,1) \text{ г}$.

5 Вывод

С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции с достаточно большой точностью $\varepsilon \approx 1,3\%$. Такая точность обусловлена малой погрешностью измерения времени и условиями, при которых колебания подвеса можно считать слабозатухающими.

Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел и подтвердили действие теоремы Гюйгенса.

Полученная зависимость $I(h^2)$ аппроксимируется линейной зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ($I = I_c + Mh^2$, где I – момент инерции тела, I_c – момент инерции

тела относительно центра, M – масса тела, а h – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).