

Исследование прецессии уравновешенного гироскопа (1.2.5)

Моргулёв Илья

Октябрь 28, 2023

1 Введение

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующий на ось гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Оборудование: гироскоп в кардановом подвесе (см. Рис. (2)), секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

2 Теоретические сведения

В этой работе исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа подвешиваются грузы. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемому секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует преподнять на 5-6 градусов. Опять надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

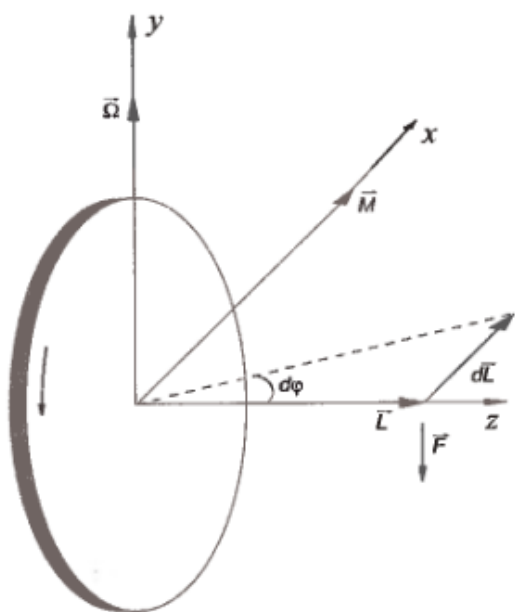


Рис. 1. Маховик

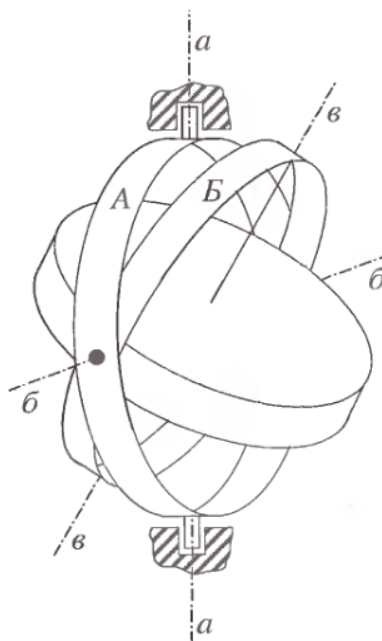


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (1)$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа, I_z – момент инерции гироскопа по его главной оси вращения. ω_0 – частота его вращения относительно главной оси, Ω – частота прецессии.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на десткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}. \quad (2)$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (3)$$

Здесь $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

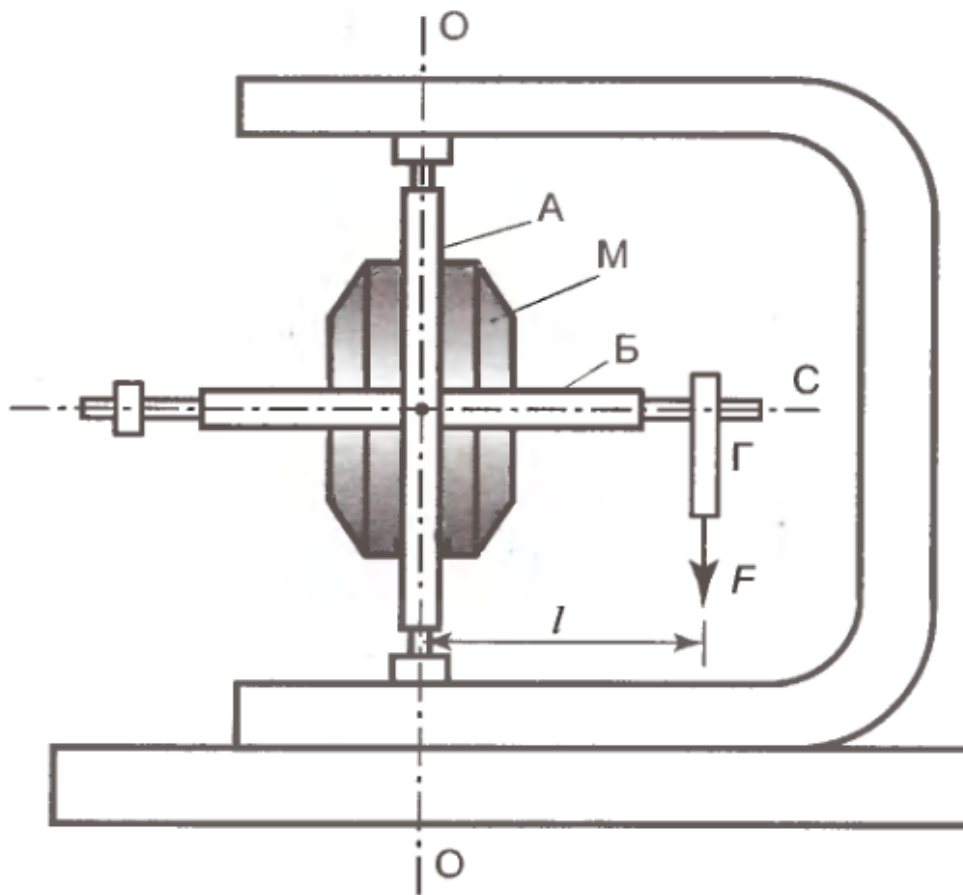


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую – для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой – переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

3 Ход работы

Данные для частоты прецессии и опускания гироскопа: $\Omega = \frac{2\pi N}{t}$

Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$
$m = 141,6 \text{ г}$	219,29	3	$8,59 \cdot 10^{-2}$
	220,43	3	$8,56 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$
$m = 173 \text{ г}$	240	4	$10,47 \cdot 10^{-2}$
	240,70	4	$10,44 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$
$m = 214,6 \text{ г}$	192,44	4	$13,06 \cdot 10^{-2}$
	193,60	4	$12,98 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$
$m = 269,4 \text{ г}$	191,92	5	$16,37 \cdot 10^{-2}$
	192,35	5	$16,33 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$
$m = 333,9 \text{ г}$	155,17	5	$20,25 \cdot 10^{-2}$
	156,11	5	$20,12 \cdot 10^{-2}$

Каждый раз рычаг опускался на 10° , что равняется $\frac{\pi}{18}$. Для каждой массы посчитаем угловую скорость опускания рычага по формуле: $\omega = \frac{\pi/18}{T}$, и момент $M = mgl$, где $l = 121 \text{ мм}$:

- $m = 141,6 \text{ г}$, $\omega = 7,92 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 16,79 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 173 \text{ г}$, $\omega = 7,25 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 20,51 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 214,6 \text{ г}$, $\omega = 9,07 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 25,45 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 269,4 \text{ г}$, $\omega = 9,09 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 31,95 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 333,9 \text{ г}$, $\omega = 11,25 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 39,59 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$

Построим график зависимости $\Omega(M)$: (см. Рис. 1)

Далее найдем момент инерции ротора гироскопа по формуле (3), для этого посчитаем момент инерции цилиндра, с известной нам массой ($M = 1616,6 \text{ г}$) и диаметром ($D = 78,0 \text{ мм}$): $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}mr^2 \approx 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, а периоды: $T_0 = 3,18 \text{ с}$ и $T_{\text{ц}} = 4,03 \text{ с}$. Тогда $I_0 \approx 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

4 Погрешности Ω и I_0

$$\sigma_{\Omega} = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \quad \sigma_{\Omega}^{\text{сист}} = \Omega \varepsilon_T \quad \sigma_{\Omega}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Omega_i - \bar{\Omega})^2} \quad (4)$$

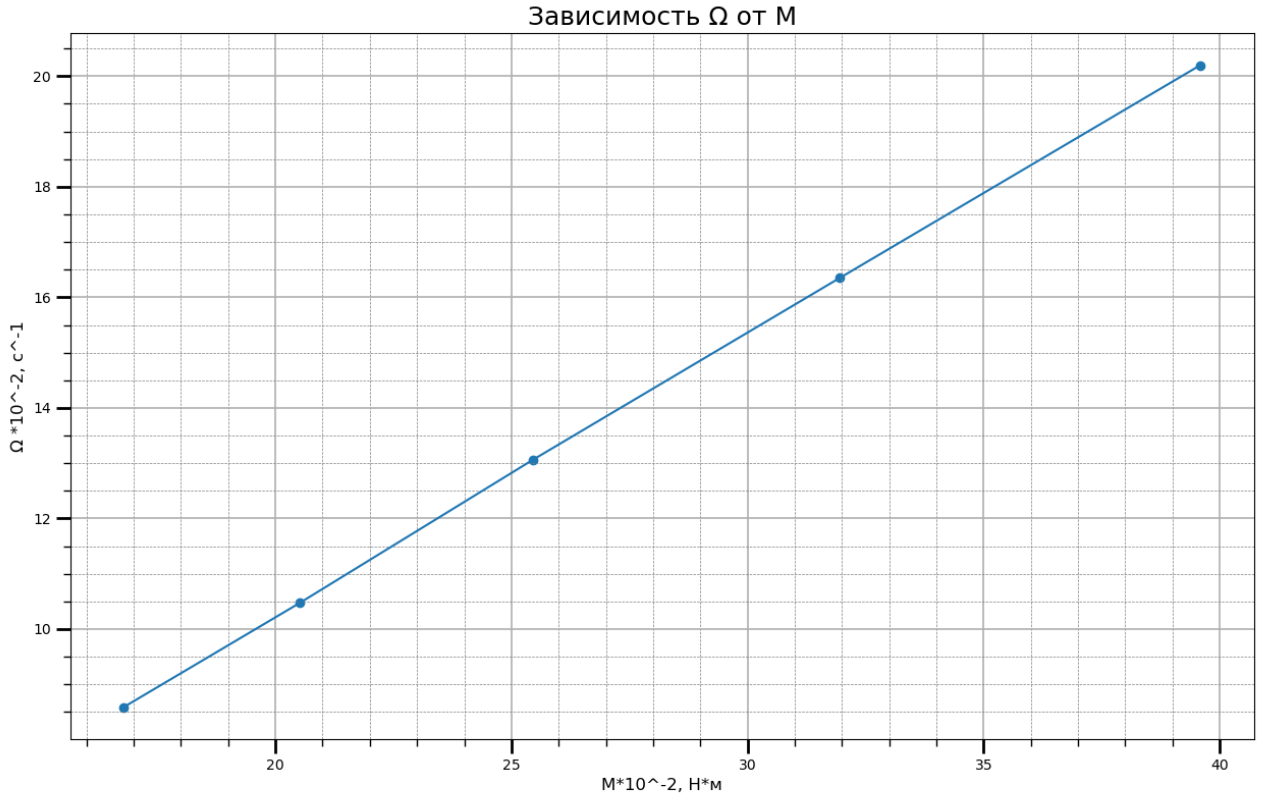


Рис. 1: Зависимость Ω от M

Каждая частота Ω с учетом погрешностей:

- $\Omega = (8,58 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (10,46 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (13,02 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (16,35 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (20,19 \pm 0,07) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$

Погрешность $\sigma_{I_0} = I_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_{\text{ц}}}^2 + 4\varepsilon_{T_0}^2 + 4\varepsilon_{T_{\text{ц}}}^2} \approx 0,03 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, значит $I_0 = (0,81 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

5 Определение частоты вращения ротора гироскопа

Определить частоту вращения ротора можно по формуле $\omega_0 = \frac{1}{kI_0}$, где k – коэффициент наклона графика зависимости $\Omega(M)$.

График построен по МНК, а значит:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,658 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}} \quad (5)$$

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,002 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}} \quad (6)$$

Тогда $\omega_0 = 2354,05 \text{ с}^{-1}$, а $\sigma_{\omega_0} = \omega_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_0}^2 + \varepsilon_k^2} \approx 88,72 \text{ с}^{-1}$

Используя полученную угловую скорость можно определить частоту вращения ротора гироскопа:
 $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 374,7 \text{ Гц}$, а $\sigma_\nu = \nu \varepsilon_{\omega_0} \approx 14,1 \text{ Гц}$

Таким образом получаем: $\nu = (374,7 \pm 14,1) \text{ Гц}$, что с учетом сигмы попадает в значение полученное с помощью осциллографа $\nu_0 = 388,6 \text{ Гц}$

6 Момент силы трения

Оценить момент силы трения мы можем по формуле: $M = \omega I_0 \omega_0$, а $\sigma_M = M \cdot \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_k^2}$. Для каждой массы момент силы трения будет свой:

- $m = 141,6 \text{ г}$, $\omega = 7,92 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (1,49 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 173 \text{ г}$, $\omega = 7,25 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (1,37 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 214,5 \text{ г}$, $\omega = 9,07 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (1,70 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 269,4 \text{ г}$, $\omega = 9,09 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (1,71 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 333,9 \text{ г}$, $\omega = 11,25 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (2,12 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$