CONTRÔLE DE CONNAISSANCE N° 1

Outils mathématiques fondamentaux

Semestre 1

Durée : 0h45

Aucun document autorisé - Calculatrices et objets connectés interdits

Nom : **Prénom :** CORRECTION

Question 1 Combien de solutions admet le système linéaire suivant ?

$$\begin{cases} x - y - 2z = -2 \\ -y + 3z = 2 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Réponse : Le système est échelonné avec autant d'équations que d'inconnues donc il a une unique solution

Décrivez l'ensemble S de ses solutions :

Réponse :

$S = \{ (-4, -2, 0) \}$

Question 2 Combien de solutions admet le système linéaire suivant ?

$$\begin{cases} 2x - y - 3z + 2t = 1 \\ y + 2z - 3t = 1 \\ -t = 3 \end{cases}$$

Réponse : Le système a une infinité de solutions

Décrivez l'ensemble S de ses solutions :

Réponse :

$S = \{ (\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}, -2z - 8, z, -3) \ / \ z \in \mathbb{R} \}$

Question 3

Écrivez la matrice augmentée du système suivant ; $\begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x \quad - z + 3t = 9 \\ 3x + 3y + 2z \quad = 4 \end{cases}$

Réponse :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Question 4 On considère un système linéaire dont la matrice augmentée M a été transformée par l'algorithme de Gauss en la matrice M' suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \overset{Gauss}{\cdots} M' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \text{second membre} \end{matrix} \end{array}$$

Comment qualifie-t-on cette matrice M' ?

Réponse : M' est échelonnée et réduite

Citez les variables pivots et les variables libres du système ainsi échelonné (on supposera que les inconnues sont notées $x_1, , x_2, \cdots$) :

Réponse : La matrice augmentée M a 6 colonnes donc le système a 5 inconnues : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

— Variables pivots : (les inconnues correspondant aux pivots de M') : x_1, x_3, x_5

— Variables libres : (les autres inconnues) x_4, x_2

Donnez les expressions des variables pivot en fonction des variables libres :

Réponse : la ligne 1 de M' donne : $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ donc $x_1 = -2x_2 + x_4$

la ligne 2 de M' donne : $x_3 + 3x_4 = 1$ donc $x_3 = -3x_4 + 1$

la ligne 3 de M' donne : $x_5 = 2$

Question 5 En appliquant la méthode du pivot de Gauss ci-dessous, transformez le système suivant en un système échelonné. Vous indiquerez les opérations sur les lignes faites à chaque étape. *Il n'est pas demandé ensuite de résoudre le système échelonné obtenu.*

Réponse :

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ x + 2y + 2z - w = 4 \\ 3x + 5y + 4z - w = 12 \\ 2x - y + 3z \quad = 8 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ y + z - 2w = 1 \\ 2y + z - 4w = 3 \\ -3y + z - 2w = 2 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ y + z - 2w = 1 \\ -z = 1 \\ 4z - 8w = 5 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ y + z - 2w = 1 \\ -z = 1 \\ -8w = 9 \end{cases}$$

Question 6 Déterminez le nombre de solutions du système suivant en fonction de la valeur des paramètres a et b :
Vous donnerez votre réponse sous la forme d'une liste des différents cas ou d'un arbre de décision.

Réponse :

$$\begin{cases} 3x + y - 4z = 4 \\ 2y - 3z = b \\ \underbrace{(a-3)}_{?}z = b + a \end{cases}$$

le nombre de solutions dépend de la valeur de $a - 3$

- si $a - 3 = 0$, $a = 3$, la 3e équation est dégénérée :
  $0 = b + 3$
  le nombre de solutions dépend de la valeur de $b + 3$:
  - si $b + 3 = 0$, $b = -3$:
    L'équation dégénérée est : $0 = 0$
    On la supprime du système :
    $$\begin{cases} 3x + y - 4z = 4 \\ 2y - 3z = -3 \end{cases}$$
    il y a une infinité de solutions
  - si $b + 3 \neq 0$: $b \neq -3$
    l'équation dégénérée est impossible et le système n'a pas de solution
- si $a - 3 \neq 0$, $a \neq 3$:
  le système est triangulaire (pas d'équation dégénérée)
  il y a une unique solution quelque soit la valeur de $b \in \mathbb{R}$

Question 7 Récapitulez les différentes situations que l'on peut rencontrer à la résolution d'un système d'équations linéaires *homogène* en complétant le tableau suivant par « oui » ou « non ».

↳ au moins une solution : toutes les inconnues valent 0

	nb equa = nb inconnues	nb equa < nb inconnues	nb equa > nb inconnues
aucune solution	NON	NON	NON
unique solution	OUI	NON	OUI
infinité solution	OUI	OUI	OUI

Question 8 Complétez le théorème suivant :

Réponse :

Soit A la matrice des coefficients et B la colonne des second membres d'un système linéaire à n équations et n inconnues.

Le système admet une unique solution *si, et seulement si*, la matrice A est inversible