Ressource R2.09

Méthodes numériques

Cours n^{o} 1 : L'interpolation polynomiale

C. Marteau

1 Description du problème

Étant donnés $(n+1)$ points dans le plan, d'abscisses distinctes :

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad \cdots \quad (x_n, y_n)$$

Le problème de l'**interpolation** consiste à chercher une fonction p *simple* et *facile à évaluer* dont la courbe passe par ces points :

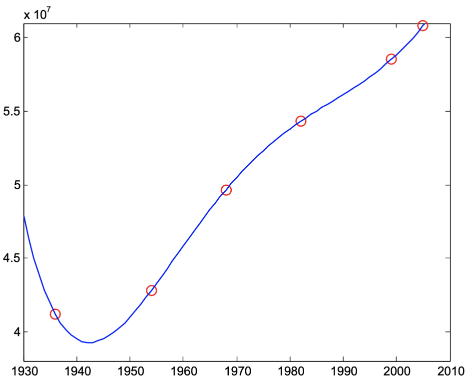
$$\forall i = 0..n, \quad p(x_i) = y_i$$

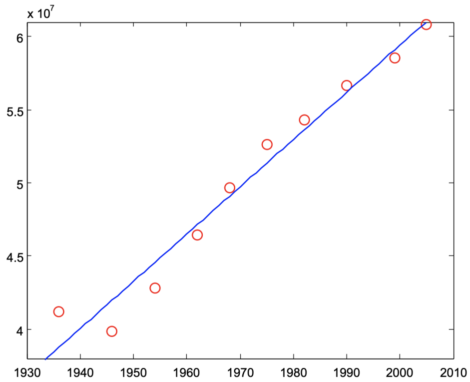
On parle d'**interpolation polynomiale** lorsque la fonction recherchée est un polynôme.

Exemples de contexte :

1. Ces points peuvent être issus de mesures expérimentales ou de données statistiques. On cherche une représentation ou un modèle pour estimer des valeurs manquantes par exemple.
2. Les valeurs y_i peuvent être obtenues en évaluant une fonction f aux points x_i : $y_i = f(x_i)$. La fonction f est connue mais difficile à manipuler (évaluation, dérivation, intégration, ...) et on cherche à remplacer f par une fonction plus simple.

Remarque : une autre réponse à ces situations est l'**approximation** des points ou de la fonction f : contrairement à l'interpolation, l'approximation ne demande pas que la courbe recherchée passe par les points (x_i, y_i) mais passe *au plus près* selon un critère d'approximation choisi (méthode des moindres carrées par exemple) :





2 Existence d'un polynôme d'interpolation

Étant donnés $(n+1)$ points dans le plan, d'abscisses distinctes :

$$(x_0, y_0) \quad (x_1, y_1) \quad \cdots \quad (x_n, y_n)$$

Existe-t-il un polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$ de degré m tel que :

$$\forall i = 0..n, \quad p(x_i) = y_i$$

En écrivant ces égalités pour chaque i, on obtient le système linéaire suivant d'inconnues les coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_m$:

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ p(x_1) = y_1 \\ \quad \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_m x_0^m = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_m x_1^m = y_1 \\ \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_m x_n^m = y_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On admettra le résultat suivant concernant la résolution de ce système :

Théorème 1 : (admis)

- si $m < n$: Il n'existe pas toujours de polynôme de degré $< n$ qui interpole $(n+1)$ points
- si $m > n$: Il peut exister une infinité de polynômes de degré $> n$ qui interpole $(n+1)$ points.
- si $m = n$: Il existe tujours un unique polynôme de degré n qui interpole $(n+1)$ points.

Dans la suite, on cherche donc ce polynôme d'interpolation de degré n :

Une première méthode consiste à résoudre le système précédent pour $m = n$ mais cette résolution est souvent trop couteuse pour des grandes valeurs de n.

Les mathématiciens Joseph-Louis Lagrange et Edward Waring ont découvert une expression de ce polynôme de degré n, **la forme de Lagrange** du polynôme d'interpolation.

3 Forme de Lagrange du polynôme d'interpolation

3.1 Exemple avec l'interpolation de 3 points

Exercice 1 :

Soit $n = 2$. On considère les 3 points :

$$(x_0, y_0) = (0, 11) \quad (x_1, y_1) = (1, -2) \quad (x_2, y_2) = (2, 6)$$

On définit les 3 polynômes $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ suivants :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \qquad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

1. Simplifier les expressions des polynômes $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ en remplaçant x_0, x_1, x_2 par leur valeur.
2. De quel degré sont ces polynômes ?
3. Évaluer ces polynômes pour $x = x_0$, $x = x_1$ et $x = x_2$.

On définit le polynôme $p(x)$ par :

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

4. De quel degré est le polynôme $p(x)$?
5. Évaluer ce polynôme pour $x = x_0$, $x = x_1$ et $x = x_2$. Conclure.

3.2 Cas général

Soit $(n+1)$ points $(x_0, y), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ (d'abscisses distinctes).
La forme de Lagrange du polynôme d'interpolation $p(x)$ de ces points s'écrit :

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

où les polynômes $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$ sont définis par :

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

L'écriture du polynôme sous la forme de Lagrange est intéressante de point de vue théorique mais assez peu de point de vue pratique. En effet, si nous ajoutons un nouveau point d'interpolation aux points déjà existants, tous les polynômes $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$ changent.

Il existe d'autres formes d'expression du polynôme d'interpolation comme la forme de Newton que nous n'aborderons pas dans ce cours.

4 Erreur d'interpolation et phénomène de Runge

Supposons que les $(n+1)$ points $(x_0, y), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ soient sur le graphe d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$f(x_i) = y_i \quad \forall i = 0..n$$

alors la différence $f(x) - p(x)$ mesure l'erreur de l'interpolation.

Pour certaines fonctions ou pour des n de plus en plus grands, le polynôme d'interpolation oscille rapidement *entre* les points d'interpolation. Ce phénomène est connu sous le nom de **phénomène de Runge**.

Pour observer ce phénomène, on considère la fonction f suivante sur l'intervalle $[-5, 5]$: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On observe la courbe de f (courbe noire), le polynôme d'interpolation de degré 5 (courbe bleue) et le polynôme d'interpolation de degré 9 (courbe rouge) :