5. Booleovská algebra

Created	@April 26, 2025 7:11 PM
Tags	Done
Kdo vypracoval	Jirka

Co tu bylo dříve

nuly a jedličky

AND

NAND

OR

NOR

XOR

nulová funkce

jedničková funkce

---

komutativní z. = můžeme prohazovat sčítance a součinitele

asociativní z. = nezáleží na pořadí stejných operací

distributivní z. = rozčítání závorek

$$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$$

Agresivnost

Neutrálnost

Tautologie

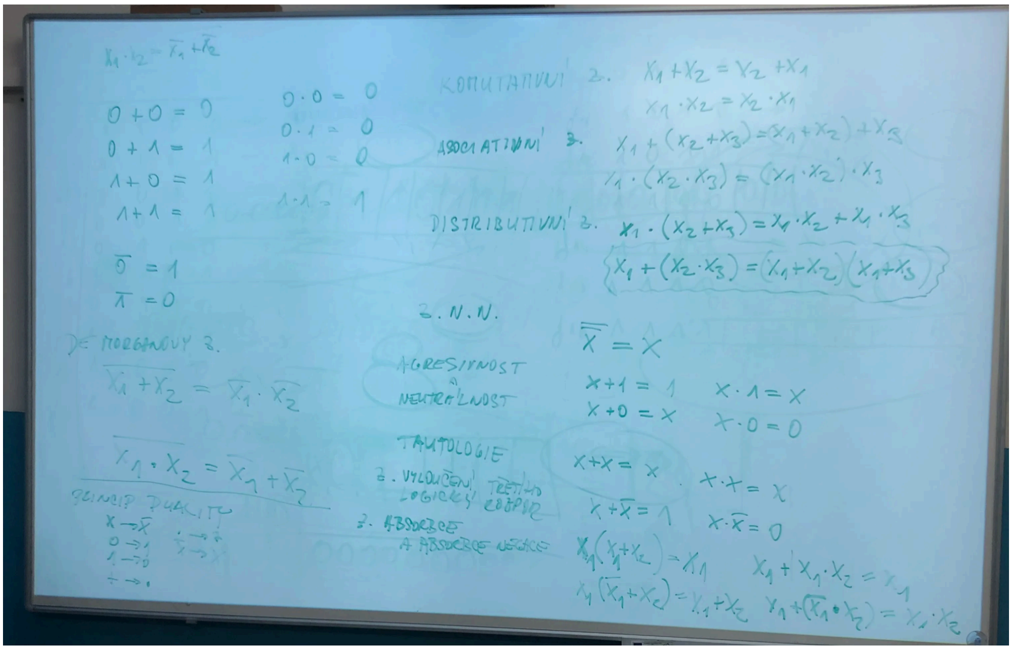
$$x \cdot x = x$$

$$x + x = x$$

De Morganovi zákony

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$



Tabule z hodiny co psal Jedlička 🌲 ⬆️

Jirkovy poznámky

Popíšu to, co psal Jednička. Pokusím se více popsat, jak postupovat při řešení a proč to je zrovna tak. Nebudu asi dávat více příkladů, pokud by jste nějaké chtěli, tak něco vymyslím.

Příklady máme z hodiny. Já se k jednomu vrátím a pokusím se ho rozebrat, ať víte, co se tam děje.

Obrázky jsou brány z poznámek od Jedličky.

Logické funkce a jejich vlastnosti

Činnost logických obvodů lze popsat pomocí symbolického jazyka, který vychází z výrokové logiky.

Výrokem rozumíme tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé nebo nepravdivé.

- Pravdivému výroku přiřazujeme hodnotu *logické jedničky*.
- Nepravdivému výroku přiřazujeme hodnotu *logické nuly*.
- Jednotlivé výroky jsou reprezentovány *logickými proměnnými*.

Logickou funkcí nazveme funkční přiřazení mezi nezávislými logickými proměnnými.

Logickou funkci lze vyjádřit:

- algebraickým výrazem
- pravdivostní tabulkou
- mapou logické funkce
- logickým schématem

Každou funkci lze vyjádřit prostřednictvím nějakého omezeného počtu vhodně vybraných funkcí, tzv. *úplného souboru funkcí*. V praxi se nejčastěji používá soubor tvořený funkcemi: *negace-konjunkce-disjunkce* a tvoří základ tzv. dvouhodnotové Booleovy algebry. Tento soubor není sice minimální, ale je jednoduchý a názorný. Zároveň fyzikální realizace booleovských funkcí je snadná.

Minimální soubor funkcí je takový úplný soubor funkcí, v němž již nelze jednu funkci ze souboru nahradit kombinací ostatních funkcí souboru. Minimální soubory jsou například: *negace-konjunkce*, *negace-disjunkce*.

Toto je tabulka logických funkcí, Je zadáno co vyjde pro každou možnost dosazovaných hodnot. Každá z těchto funkcí má dvě vstupní hodnoty.

Podle mě má smysl si zapamatovat jen některé funkce, já doporučuji: 0, 1, 6, 7, 8, 9, 13, 15. Čísla značí, kolikátá je to funkce. Alternativní zápisy jsou podle mě jen pro zajímavost.

Logické funkce dvou proměnných

Funkce	A_1	A_2	B_1	B_2	Minimální tvar	Zápis (alternativní)	Název
A	0	0	1	1			Vstupní proměnná A
B	0	1	0	1			Vstupní proměnná B
f_0	0	0	0	0	0	0	Nulová funkce
f_1	0	0	0	1	$A \cdot B$	$A \cdot B; A \wedge B$	Logický součin, konjunkce (AND)
f_2	0	0	1	0	$A \cdot \overline{B}$	$A \not\leftarrow B$	Inhibice
f_3	0	0	1	1	A	A	Aserce; Projekce A
f_4	0	1	0	0	$\overline{A} \cdot B$	$A \not\rightarrow B$	Inhibice
f_5	0	1	0	1	B	B	Aserce; Projekce B
f_6	0	1	1	0	$\overline{A \cdot B} \cdot (A + B)$	$A \oplus B; A \not\equiv B$	Antivalence, Exkluzivní disjunkce (XOR)
f_7	0	1	1	1	$A + B$	$A + B; A \vee B$	Logický součet, disjunkce (OR)
f_8	1	0	0	0	$\overline{A + B}$	$A \downarrow B$	Pierceova funkce (NOR)
f_9	1	0	0	1	$A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$	$A \equiv B$	Ekvivalence
f_{10}	1	0	1	0	$\overline{B}$	$\overline{B}$	Negace B
f_{11}	1	0	1	1	$A + \overline{B}$	$A \leftarrow B$	Implikace
f_{12}	1	1	0	0	$\overline{A}$	$\overline{A}$	Negace A
f_{13}	1	1	0	1	$\overline{A} + B$	$A \rightarrow B$	Implikace
f_{14}	1	1	1	0	$\overline{A \cdot B}$	$A \uparrow B$	Schefferova funkce (NAND)
f_{15}	1	1	1	1	1	1	Jednotková funkce

Booleova algebra

Přidávám vlastní doplnění

Booleova algebra je odvětví matematické logiky, které se zabývá operacemi s logickými hodnotami a funkcemi. Základy této algebry položil George Boole v polovině 19. století.

Booleova algebra je algebra s obrem hodnot { 0,1 } a třídou operací { +,·,— }.

Logický součit, součet a negace jsou definovány takto:

- 0+0=0 (lež a lež je ve výsledku pořád lež.
- 0+1=1+0=1+1=1 (pokud vám jeden člověk řekne pravdu a jeden lež nebo oba pravdu, tak pořád víte pravdu, dvě pravdy jsou pořád jen pravda)
- 1·1=1
- 1·0=0·1=0·0=0

Jako klasické násobení, můžeme, ale brát jako, že k výslednému tvrzení potřebujete vědět dvě různé věci od dvou lidí, pokud vám oba řeknou pravdu, tak jste schopni zjistit jaká je vlastně pravda, ale pokud jen jeden člověk lže, tak už nejste schopni dát příběh dohromady.

Příklad: Policie vyslechne dva svědky, pokud oba řeknou pravdu, tak policie usvědčí pachatele a zjistí pravdu o případu, pokud jen jeden lže, tak policie nemůžou zjistit nic.

Negace, neumím tu čáru nad

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

Základní pravidla Booleovy algebry:

	Pravidlo	Název
1)	$x + y = y + x; \quad x \cdot y = y \cdot x$	komutativní zákon
2)	$x + (y + z) = (x + y) + z; \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	asociativní zákon
3)	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z; \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	distributivní zákon
4)	$\overline{\overline{x}} = x$	zákon negace negace
5)	$x + 1 = 1; \quad x \cdot 0 = 0$ $x + 0 = x; \quad x \cdot 1 = x$	zákon agresivnosti a neutrálnosti 0 a 1
6)	$x + x = x; \quad x \cdot x = x$	zákony tautologie
7)	$x + \overline{x} = 1; \quad x \cdot \overline{x} = 0$	zákon vyloučení třetího a logický rozpor
8)	$x(x + y) = x; \quad x + x \cdot y = x$ $x + (\overline{x} \cdot y) = x + y; \quad x(\overline{x} + y) = x \cdot y$	zákony absorbce a absorbce negace
9)	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}; \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	DeMorganovy zákony
10	výrazy se rovnají, pokud nahradíme všechna: $0 \to 1; \quad 1 \to 0$ $+ \to -; \quad - \to +$ $x \to \overline{x}; \quad \overline{x} \to x$	princip duality

Popisky proč platí tato pravidle (je to spíš pro zajímavost a k lepšímu pochopení, možná vám to pomůže) **Pokud něco nepochopíte nebo vás to zmate, tak zapomeňte, že jsem něco psal.**

1. Komutativnost násobení a sčítání - můžeme libovolně prohazovat
2. Asociativní zákon - vkládání závorky je libovolné a nemá vliv na výsledek, jako u normální matematiky
3. Distributivní zákon - roznásobení závorky, jako v matematice, ale lze provést i rozesčítání závorky, tyto vlastnosti plynou z agresivity a neutrálnosti jedniček a nul při sčítání a násobení
4. Dvojitá negace - můžeme ji odstranit, protože (pokud x=0) se stane z nuly jednička a při druhé negaci z jedničky nula, nebo obráceně (x=1) se stane z jedličky nula a při druhé negaci z nuly jednička
5. Agresivita a neutrálnost 0 a 1

a) Přičítám 0, nic se nestane

b) Přičítám 1, v booleovské algebře není 2, tak jak je jeden sčítanec 1, je hodnota součtu 1

c) Násobení jedničkou nic nezmění, je neutrální.

d) Násobení nulou okamžitě udělá z součinu nula a nezáleží na ostatních.

6. Tautologie - násobení dvou x můžeme vzít jako jen jedno x, (pokud je x=0, tak je výsledek násobení 0, stejně platí pro x=1), podobně platí i pro sčítání
7. Vyloučení třetího stavu - při sčítání x a negace x je jisté že jeden ze sčítanců je 0 a druhý 1, proto je součet určitě 1. Obráceně platí pro násobení, jeden činitel je určitě 0 a druhý 1, proto se součin 0.
8. Zákony absorbce

x (x+y)=x, nezáleží na y, mohou nastat dva případy

a. x = 0, tak je jeden z činitelů 0 a výsledek je 0
b. x = 1, tak je v závorka 1 (agresivita 1) a vznikne součin dvou jedniček - 1

x+xy=x, opět mohou nastat dva případy

a. x=0, součin xy je hodnoty 0 a výsledek je také 0
b. x=1 jeden ze sčítanců je 1 a součet tedy musí být také 1

$$x + (\overline{x} \cdot y) = x + y$$

Tady je taková malá finta. Pokud x=1, tak je výsledek 1, pokud x=0, tak vyjde jedna jen pokud je 1 výsledek závorky a k tomu musí být y=1, takže lze shrnout, že vyjde jedna pokud je alespoň jedna z neznámých 1 a to je případ logického sčítání

$$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

Tohle je taky veselí. Aby vyšla levá strana jedna tak musí nastat, že je x=1 a závorka má také hodnotu 1, ale my víme, že x musí být 1, tak je negace x rovna 0, a proto musí být y=1, jinak vyjde levá strana 0. Na pravé straně je jedna také pouze, pokud jsou obě neznámé 1.

9. DeMorganovy zákony

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

Levá strana rovnice vyjde 1, pokud je výraz pod negací 0 a to je, pokud jsou všechny sčítance 0, na prané straně pokud jsou všechny neznámé 0, tak jsou jejich negace 1 a součin je také jedna. !Tento vzorec platí i pokud je více neznámých.

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

Levá strana je 1 pokud je pod negací 0 a to je pokud je alespoň jeden z činitelů 0, v tomto případě je tedy i jedna z hodnot pod negací na pravé straně 0, a tak je v součtu jedna agresivní jednička, která udělá z výrazu 1.

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

10. Tohle je speciální vlastnost, kterou nám asi ani moc neříkal. Pokud máš rovnici, která platí a vyměníš všechny hodnoty za opačné a sčítání za násobení a naopak, tak rovnice pořád platí.

Příklad:

$$(1+0) \cdot 1 = 0 + (1 \cdot 1)$$

Pak platí obráceně:

$$(0 \cdot 1) + 0 = 1 \cdot (0+0)$$

Násobení jedničkou nebo přičtení 0. Je to fígl, který je někdy nutný. Kdy ho použít, si všimnete až po nějaké delší praxi. My ho použijeme, když nám ve vzorci přebývá člen oproti mapě, jinak to asi nenajdete.

Příklad: K-mapa nám řekla, že řešení je

$$\overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot c$$

My ale máme vypočítáno

$$\overline{a} \cdot c + \overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot c$$

Proto část našeho výrazu vynásobíme 0.

$$\overline{a} \cdot c \cdot (\overline{b} + b) + \overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot c = \overline{a} \cdot c \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot c \cdot b + \overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot c$$

Dále uplatníme vytýkání.

$$\overline{a} \cdot c \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot c \cdot b + \overline{a} \cdot b = \overline{b} \cdot c \cdot (1 + \overline{a}) + \overline{a} \cdot b(1 + c)$$

Pomocí agresivity 1 při sčítání lehce upravíme na hledané

$$\overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot c$$

Karnaughova mapa (K-map)

! Myslím, že je to pochopitelné z Jedličkovo poznámek, tak nechám jen ty, navíc jsme to dělali už několikrát ve škole. Pokud by chtěl někdo něco doplnit, tak napište.

je grafická metoda používaná k minimalizaci logických výrazů v Booleově algebře. Pomáhá jednoduchým a přehledným způsobem redukovat složité logické funkce na jejich nejjednodušší podobu. Tato metoda je zvláště užitečná při návrhu logických obvodů.

Struktura Karnaughovy mapy

Karnaughova mapa je tabulka, kde každé pole odpovídá určité kombinaci hodnot vstupních proměnných. Pole jsou uspořádána tak, aby se sousední pole lišila vždy pouze v jedné proměnné (Grayův kód). Pro n proměnných má mapa (2 na n) polí.

Postup minimalizace pomocí Karnaughovy mapy

- Nakreslení Karnaughovy mapy odpovídající počtu proměnných.
- Zapsání hodnot logické funkce (0 nebo 1) do příslušných polí mapy podle hodnot vstupních proměnných.
- Seskupení jedniček (1) do co největších obdélníkových nebo čtvercových bloků.
    - Bloky musí mít velikost mocniny čísla 2 (1, 2, 4, 8 atd.).
    - Bloky mohou být vodorovné nebo svislé (nikoliv diagonální).
    - Karnaughova mapa je nekonečná, což znamená, že levý a pravý okraj, stejně jako horní a dolní okraj, jsou spojeny.
    - Bloky se mohou (částečně) překrývat.
    - Každá jednička (1) musí být v nějakém bloku
    - Počet bloků musí být co nejmenší. (Bloky musí být co největší)
- Zapsání minimalizovaného výrazu na základě seskupených bloků.

> Poznámka: pokud seskupujeme do bloků jedničky (1), vzniká zápisem disjunktní normální forma (součet součinů).

> Můžeme rovněž seskupovat nuly (0), pak vzniká konjunktní normální forma (součin součtů).

Příklad od Jedličky, kde jsou i obě metody odvození podle K-mapy.

Příklad: Funkce zadána tabulkou:

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Řešení:

Sestrojíme tabulku:

		c	c	
			b	b
	1	1	1	0
a	1	0	0	0

Disjunktní normální forma: *(součet součinů)*

		c	c	
			b	b
	1	1	1	0
a	1	0	0	0

$f_1 = \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c$

Konjunktní normální forma: *(součin součtů)*

		c	c	
			b	b
	1	1	1	0
a	1	0	0	0

$f_0 = (\overline{b} + c) \cdot (\overline{a} + \overline{c})$

f_1 a f_0 jsou různým vyjádřením stejné funkce, lze dokázat:

$$f_0 = (\overline{b} + c) \cdot (\overline{a} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c =$$
$$= \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot (c + \overline{c}) + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c =$$
$$= \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot (\overline{a} + 1) + \overline{a} \cdot c(\overline{b} + 1) = \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c = f_1$$

Jak zpracovat příklad

1. Pravdivostní tabulka

2. Mapa a udělat smyčky + vzorec podle nich

3. Upravit vzorec, pokud ho máte zadaný

4. Porovnat výsledek z tabulky a výpočtu