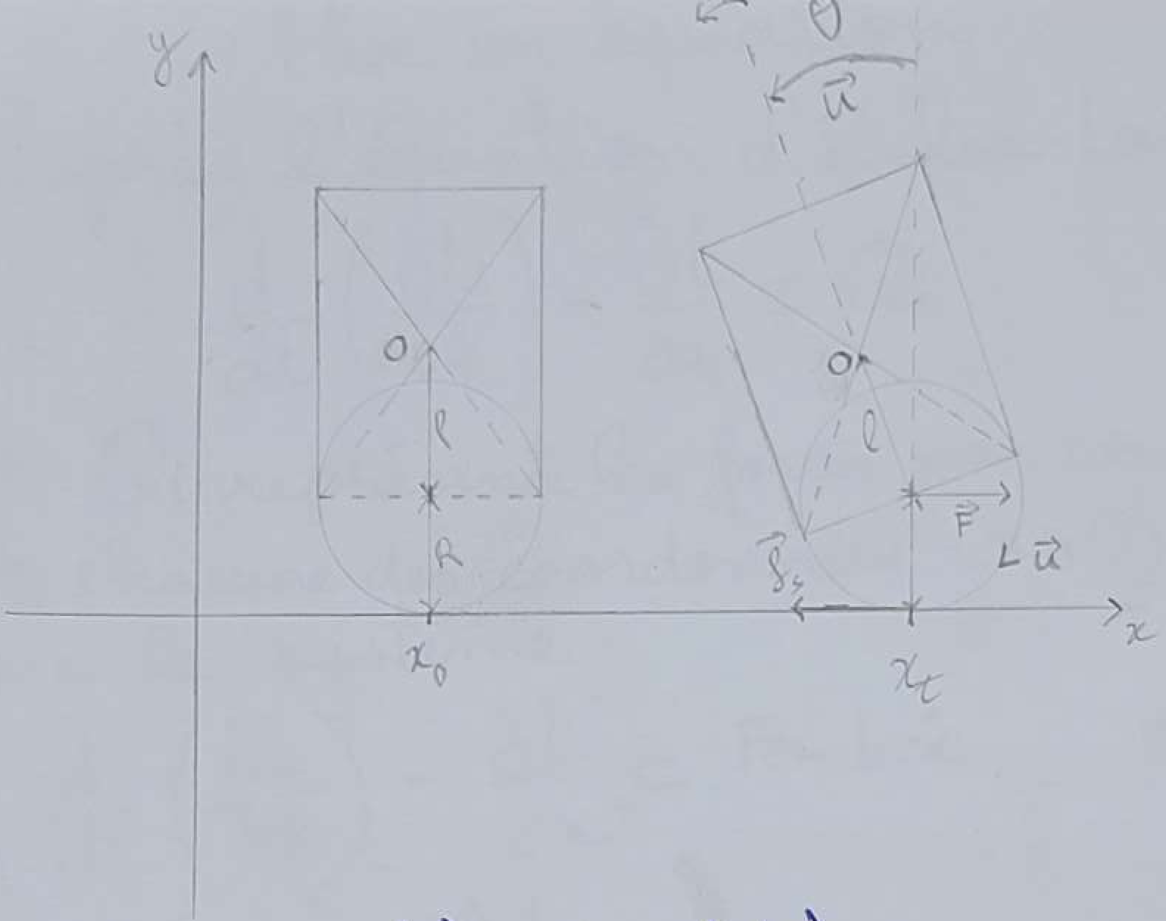
① Modélisation Mathématiques



Variables: $x(t)$ et $\theta(t)$

Constantes: M - masse chariot (roues)

m - masse pendule

l - longeur au centre de masse O

I - moment d'inertie pendule

J - moment d'inertie roue

R - Rayon roue

Forces :

- Poids $\vec{P}$ du sytème } inactif
- Réaction $\vec{R}$ du sol
- Force moteur $\vec{F}$ avec $\frac{u}{R} = F$ } forces non conservatives
- Réaction moteur $\vec{R_m}$ $R_m = u$
- frottement sol $\vec{f_s}$ avec $f_s = b.\dot{x}$
- frottement moteur $\vec{f_m}$ négligé

Mise en équation

D'après l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

où Q_i représente les forces non conservatives et q_i chacune des coordonnées (x, θ) on a donc le système

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = F - b.\dot{x} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -u \end{cases}$$

Déterminons le Lagrangien L

$$L = E_c - E_p$$

$$E_c = E_{c_R} + E_{c_p}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} M \dot{x}^2}_{\text{Translation chariot}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \omega_R^2}_{\text{Rotation Roues}}}_{E_{c_R}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} m v_p^2}_{\text{Translation Pendule}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2}_{\text{Rotation Pendule}}}_{E_{c_p}}$$

Or $\omega_R = \dfrac{\dot{x}}{R}$

et

$$v_p^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2$$

$$v_p^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$x_0 = x + l\sin\theta \qquad y_0 = R + l\cos\theta$

$\dot{x}_0 = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y}_0 = -l\dot{\theta}\sin\theta$

$\dot{x}_0^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + (l\dot{\theta}\cos\theta)^2 \qquad \dot{y}_0^2 = (l\dot{\theta}\sin\theta)^2$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(M+m+\frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(I+m\ell^2\right)\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

en posant :

- $M_{eq} = M + m + \frac{J}{R^2}$

et

- $I_{eq} = I + m\ell^2$

On a

$$E_c = \frac{1}{2}M_{eq}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{eq}\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$E_p = \underbrace{M.g.R}_{E_{p\,\text{roues}}} + \underbrace{mg(R+\ell\cos\theta)}_{E_{p\,\text{pendule}}}$$

$$E_p = (M+m)gR + mg\ell\cos\theta$$

On a ainsi

$$L = \frac{1}{2}M_{eq}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{eq}\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - (M+m)gR - mg\ell\cos\theta$$

Passons maintenant au calcul des dérivés

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M_{eq}\dot{x} + m\ell\dot{\theta}\cos\theta$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M_{eq}\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta$
- $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_{eq}\,\dot{\theta} + m l\,\dot{x}\cos\theta$
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = I_{eq}\,\ddot{\theta} + m l\,\ddot{x}\cos\theta - m l\,\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -m l\,\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + m g l\sin\theta$

On a donc

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = F - b.\dot{x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_{eq}\,\ddot{x} + m l\,\ddot{\theta}\cos\theta - m l\,\dot{\theta}^2\sin\theta = F - b.\dot{x} \\ I_{eq}\,\ddot{\theta} + m l\,\ddot{x}\cos\theta + m g l\sin\theta = -u \end{cases}$$

avec

- $M_{eq} = M + m + \dfrac{J}{R^2}$

et

- $I_{eq} = I + m l^2$