

Dispense di Elettromagnetismo

Mario Trigiante

12 gennaio 2020

Indice

1 Elettrostatica nel vuoto	7
1.1 Introduzione	7
1.2 Isolanti e Conduttori	10
1.3 Natura Microscopica delle Sostanze Portatrici	10
1.4 Definizione Operativa della Carica Elettrica	12
1.5 Legge di Coulomb	14
1.6 Esperimento di Coulomb	17
1.7 Interazione tra un sistema di cariche in quiete	17
1.8 “Azione a distanza” Vs “Azione a contatto”	24
1.9 Forza e campo elettrostatico dovuti a distribuzione continua di carica	26
1.10 Esempio 1	28
1.11 Esercizi su forza e campo elettrostatici	30
2 Lavoro ed energia potenziale	43
2.1 Il campo elettrostatico è conservativo	48
2.2 Conservazione dell’energia totale	52
2.3 Potenziale elettrostatico ed energia potenziale come gradiente	53
2.3.1 Proprietà del gradiente	60
2.4 Campo conservativo come campo irrotazionale	61
2.4.1 Alcune proprietà del rotore	67
2.5 Il Dipolo Elettrico	67
2.6 Sviluppo del potenziale in multipoli (non richiesto)	70
2.7 Moto di un dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme	73
2.8 Esercizi	76
3 Legge di Gauss	85
3.1 Legge di Gauss	85
3.1.1 Parentesi matematica: misura dell’angolo solido	89
3.2 Caratterizzazione del campo elettrostatico	90
3.3 Forma locale della legge di Gauss e la divergenza	92
3.3.1 Regola di Faraday	99
3.4 Campi solenoidali	102
3.4.1 Altre proprietà del rotore	104

3.5 Approfondimento matematico: teorema di esistenza ed unicità per l'equazione di Poisson (non richiesto)	105
Esercizi sulla legge di Gauss	109
4 Proprietà elettrostatiche dei conduttori	119
4.1 Induzione elettrostatica	122
4.2 Conduttore cavo.	125
4.3 Condensatori	128
4.4 Carica di un condensatore ed energia del campo elettrostatico	132
Esercizi sulle proprietà elettrostatiche dei conduttori	137
5 Proprietà elettrostatiche dei dielettrici	143
5.1 Analisi quantitativa	147
5.2 Polarizzazione per orientamento	158
6 La corrente elettrica	163
6.1 Equazione di continuità	171
6.2 Legge di Ohm	175
6.3 Potenza erogata ed effetto Joule	178
6.4 Modello classico di conduzione nei metalli	179
6.5 Legge di Ohm generalizzata	182
6.6 Resistenze in serie ed in parallelo	183
6.7 Rete elettrica	185
6.8 Ponte di Wheatstone	189
6.9 Carica e scarica di un condensatore	190
7 Magnetostatica nel vuoto	197
7.1 Interazione magnetica	197
7.2 Campo magnetico e correnti	200
7.3 Forza di Lorentz	202
7.4 Moto di una spira rettangolare in un campo magnetico uniforme	205
7.5 Effetto Hall	209
7.6 Moto di una carica all'interno di un campo magnetico uniforme	213
7.7 Prima legge di Laplace	215
7.8 Il campo magnetico è solenoidale	221
7.8.1 Il vettore potenziale magnetico	223
7.9 Campo generato da una spira circolare percorsa da corrente	225
7.10 Campo magnetico generato da un solenoide	229
7.11 Interazione tra due fili percorsi da corrente	231
7.12 Legge di Ampère	234
7.12.1 Limite della validità della legge di Ampère alle correnti stazionarie . .	247

<i>INDICE</i>	5
8 Proprietà magnetiche della materia	251
8.1 Natura microscopica delle correnti amperiane	257
8.2 Dimostrazione della (10.1.15) [parte non richiesta]	259
8.3 Modello microscopico per le sostanze paramagnetiche	261
8.4 Definizione microscopica del vettore magnetizzazione	263
8.5 Legame tra B , H , M e le correnti	265
9 Induzione elettromagnetica	271
9.1 Corrente alternata	277
9.2 Effetto della corrente i e legge di Lenz.	285
9.3 Induzione elettrostatica e circuiti elettrici	285
9.3.1 Autoinduzione	286
9.3.2 Mutua induzione	292
10 Equazioni di Maxwell	295
10.1 Corrente di spostamento ed equazione di Ampère-Maxwell	295
10.1.1 Applicazione della legge di Ampère-Maxwell ad un circuito RC	299
10.2 Equazioni di Maxwell	304
Index	307

Capitolo 1

Elettrostatica nel vuoto

1.1 Introduzione

L'obiettivo di questo corso è di introdurre alla fenomenologia del campo elettromagnetico ed alla sua descrizione matematica.

I fenomeni attribuibili al campo elettromagnetico in tutte le sue manifestazioni sono molto vari: come interazione elettrostatica esso è responsabile della coesione interna della materia; il campo elettromagnetico si può manifestare, inoltre, come onde luminose, ed è quindi responsabile dei *fenomeni ottici*, ovvero fenomeni legati alla propagazione della luce.

L'interazione elettromagnetica è una delle 4 interazioni fondamentali presenti in natura:

- **L'interazione gravitazionale**, che è stata storicamente la prima ad essere studiata perché i fenomeni ad essa legati sono più vicini alla nostra vita quotidiana. Ad essa è dovuta la forza che ci tiene sulla terra o che determina le caratteristiche del moto dei corpi celesti. La legge fondamentale della gravitazione la si deve a I. Newton: due corpi di massa m_1, m_2 posti ad una distanza r molto maggiore delle loro dimensioni esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva \vec{F} , diretta lungo la loro congiungente, in modulo data da:

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.1.1)$$

essendo G la “costante di Newton”:

$$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} N \frac{m^2}{Kg^2}. \quad (1.1.2)$$

- **Interazioni nucleari deboli e forti**, che a differenza di quelle elettromagnetiche o gravitazionali, sono a “corto raggio”, ovvero si manifestano a distanze non superiori al diametro del nucleo atomico ($\sim 10^{-15} m$). Per questa loro caratteristica, esse sono state le ultime ad essere studiate.

Iniziamo con l'analisi dei fenomeni legati ad una particolare manifestazione dell'interazione elettromagnetica: la forza elettrostatica.

Era noto sin dall'antichità che alcuni oggetti opportunamente trattati, come, ad esempio, una bacchetta di vetro strofinata con un panno di lana, acquistano la capacità di attrarre piccoli corpi, come pezzettini di carta. Questo tipo di forza è detto *forza elettrica* e la capacità di esercitare o subire la forza elettrica si definisce *carica elettrica*. Un oggetto privo di carica elettrica si chiama *neutro*. Il processo in seguito al quale un corpo neutro acquista carica elettrica è detto *elettrizzazione*. Per esempio, il fenomeno per cui una bacchetta di vetro diventa carica per effetto dello strofinamento è detto elettrizzazione per strofinio. Il primo studio quantitativo di questi fenomeni lo si deve a Gilbert nel 1600.

Iniziamo con il considerare l'interazione tra sistemi di cariche fisse, detta interazione elettrostatica. Da osservazioni elementari possiamo dedurre alcune proprietà fondamentali di questa forza.

1. Esistono due tipi di cariche elettriche.

Se prendiamo due bacchette, una di ambra e l'altra di vetro, entrambe strofinite con un panno di lana, e le avviciniamo, esse esercitano l'una sull'altra una forza attrattiva. Invece, bacchette dello stesso materiale, elettrizzate per strofinio con uno stesso materiale, si respingono. Questo si spiega supponendo che esistano due tipi di cariche: la carica “positiva”, che si sviluppa per esempio sul vetro strofinato con un panno di lana, e la carica “negativa”, che per esempio si produce su un oggetto di ambra trattato allo stesso modo. Cariche dello stesso tipo o “segno” si respingono, cariche di segno opposto si attraggono.

2. Le cariche elettriche sono attribuibili a sostanze che possono essere trasmesse da un corpo ad un altro.

Se si elettrizza una bacchetta di vetro per strofinio con un panno di lana e la si mette in contatto con un'altra bacchetta di vetro neutra, quest'ultima si elettrizzerà allo stesso modo. Questo si spiega supponendo che la carica elettrica positiva presente sulla prima bacchetta elettrizzata, si sia trasmessa in parte sulla seconda per contatto e, come conseguenza, che quest'ultima si sia elettrizzata anch'essa positivamente (vedi Figura 1.1). Se una bacchetta di vetro, inizialmente neutra, viene strofinata con un panno di lana, anch'esso inizialmente neutro, la prima si caricherà positivamente, mentre il panno si caricherà negativamente, in modo che, rimettendoli a contatto, i due oggetti torneranno neutri (vedi Figura 1.2). Questo si spiega supponendo che le cariche siano attribuibili a “sostanze” portatrici presenti nella materia ordinaria, che è neutra, nella stessa quantità, in modo che l'una neutralizzi l'effetto dell'altra fino a scale di grandezza che ora sappiamo essere dell'ordine del diametro atomico (il raggio dell'atomo di idrogeno misura circa $R_o \simeq 0.53 \times 10^{-10} m$). In questo modo la materia ordinaria appare neutra su scale superiori a quella atomica. In seguito allo strofinamento della bacchetta di vetro con il panno di lana, parte della sostanza carica negativamente nel vetro, ed inizialmente presente in ugual misura della sostanza carica positivamente, viene trasferita sul panno. Di conseguenza sul vetro, nella regione in cui esso è venuto in contatto con la lana, si viene a creare un “eccesso di carica” positiva, che ne determina lo stato di elettrizzazione, mentre sulla lana si crea un corrispondente eccesso

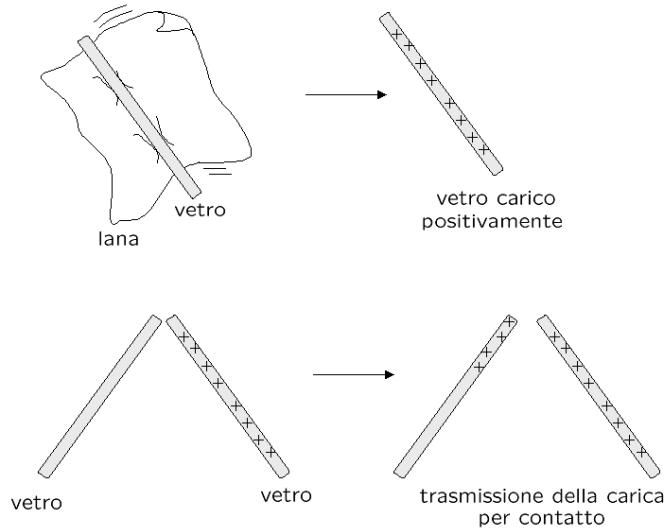


Figura 1.1: Elettrizzazione per strofinamento.

di carica negativa. Quando i due oggetti sono rimessi a contatto, l'eccesso di carica negativa sulla lana si redistribuisce in modo da riportare la bacchetta ed il panno allo stato neutro. Il fatto che gli eccessi di carica che si vengono a creare su due materiali inizialmente neutri, per strofinio, siano uguali ed opposti, indica una proprietà fondamentale della carica elettrica, ossia la sua conservazione.

*Principio fondamentale
della natura . →*

La conservazione della carica elettrica è stata finora osservata in tutti i processi fisici senza alcuna eccezione, sia su scala macroscopica che su scala microscopica.

Millikan, nei suoi esperimenti condotti tra il 1909 e il 1917, mostrò che la carica elettrica si manifesta in natura e viene trasmessa sempre in quantità multiple intere di un valore elementare, detto carica elettrica elementare:

$$q = n e, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1.3)$$

Egli dimostrò, in altre parole, che la carica elettrica è quantizzata.

3. Strofinando due oggetti di diverso materiale, essi si elettrizzano in seguito alla creazione su di essi di eccessi di carica uguali ed opposti, la cui natura dipende dalle proprietà relative dei due materiali. È possibile ordinare i diversi materiali in modo che ognuno di essi si carichi positivamente se strofinato con uno successivo e negativamente se strofinato con uno che lo precede:

...pelle di coniglio, vetro, mica, lana, seta, legno, ambra, etc...

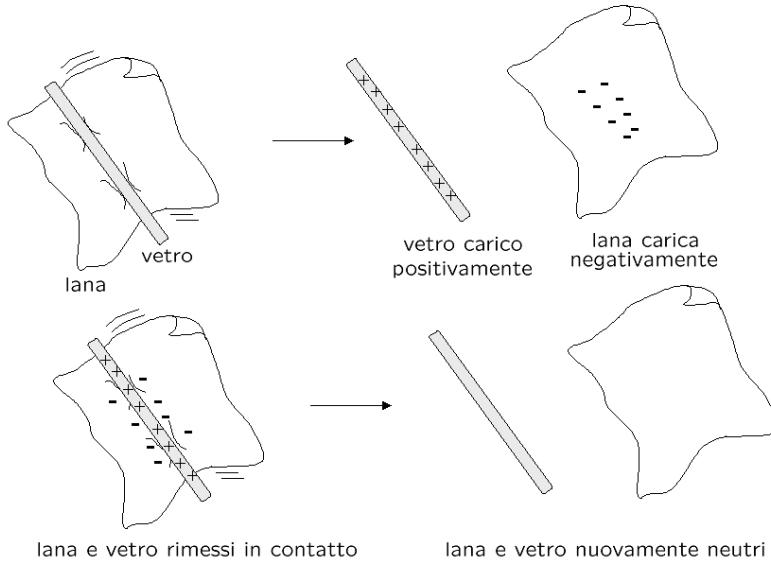


Figura 1.2: La carica positiva e negativa è presente nella materia neutra nella stessa quantità.

1.2 Isolanti e Conduttori

I materiali considerati fino a questo punto, sono materiali caratterizzati dalla proprietà che un eventuale eccesso di carica che si viene a creare per strofinio, rimane localizzato nel punto in cui è prodotto e non è libero di spostarsi all'interno del materiale stesso. Queste sostanze sono dette *isolanti* o *dielettrici*. Esiste un'altra classe di materiali, come, per es. i metalli, nei quali eccessi di carica che si vengono a creare nel loro interno sono liberi di muoversi e tendono a distribuirsi secondo una configurazione di equilibrio. Questi materiali sono detti *conduttori*. Se si tiene in mano una bacchetta di metallo e la si cerca di elettrizzare per strofinio, non si riesce. Se invece la bacchetta viene tenuta per un manico di plastica e la si strofina con un panno, essa si elettrizza. Sia il metallo che il corpo umano sono conduttori. Tenendo la bacchetta direttamente in mano, l'eccesso di carica che si viene a creare su di essa, essendo libero di muoversi, si distribuisce su tutto il conduttore costituito dalla bacchetta e dal corpo umano, disperdendosi. Il manico di plastica, essendo isolante, non consente all'eccesso di carica di trasmettersi al corpo dell'osservatore e lo mantiene sulla bacchetta.

1.3 Natura Microscopica delle Sostanze Portatrici

Oggi è nota la natura microscopica della sostanza portatrice della carica elettrica nella materia. Essa è costituita da particelle elementari, ciascuna portatrice di una carica elettrica

elementare; i protoni portano la carica elettrica elementare positiva $+e$ e si indicano con p^+ , gli elettroni portano la carica elettrica elementare negativa $-e$ e si indicano con e^- . Protoni ed elettroni sono presenti in ugual numero all'interno degli atomi, che quindi sono globalmente neutri. Un atomo è costituito da un nucleo centrale contenente un numero Z di protoni (ed un numero circa uguale di particelle neutre dette *neutroni*) e quindi con carica positiva $+Ze$, circondato da una nube costituita da Z elettroni, che orbitano intorno al nucleo, e la cui carica negativa $-Ze$ scherma quella uguale ed opposta del nucleo stesso.

Essendo il protone ed il neutrone circa 2000 volte più pesanti dell'elettrone, si può considerare la massa dell'atomo tutta concentrata nel suo nucleo. La dimensione tipica del nucleo è dell'ordine di $10^{-15} m$, mentre l'ordine di grandezza del diametro atomico è di $10^{-10} m$ (vedi Figura 1.3). In termini microscopici il processo di elettrizzazione per strofinio si descrive

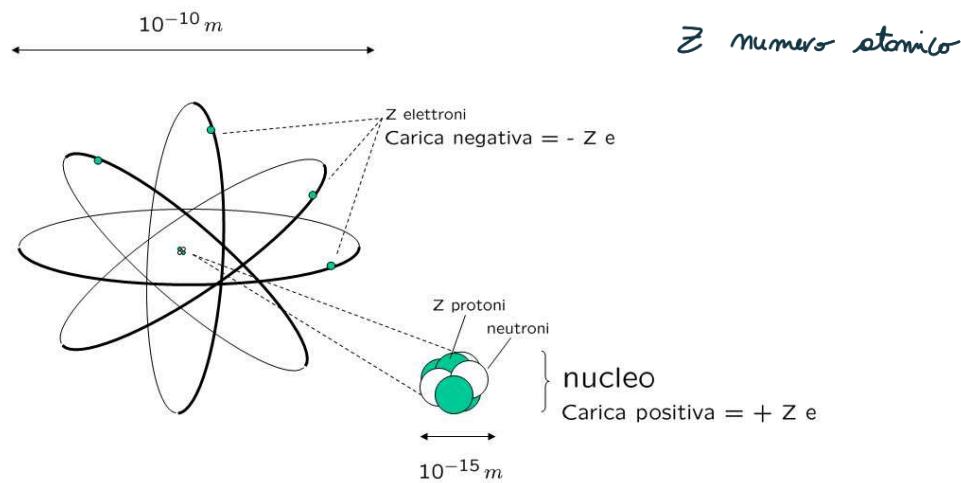


Figura 1.3: L'Atomo.

come il processo meccanico in seguito al quale alcuni elettroni negli atomi presenti nel punto di contatto dei due oggetti vengono strappati ai propri atomi in uno dei due materiali e passano all'altro. Come conseguenza di questo, nell'oggetto privato degli elettroni si viene a creare un eccesso di carica positiva dovuta ai protoni non più completamente schermati, mentre sull'altro materiale si viene a creare un corrispondente eccesso di carica negativa.

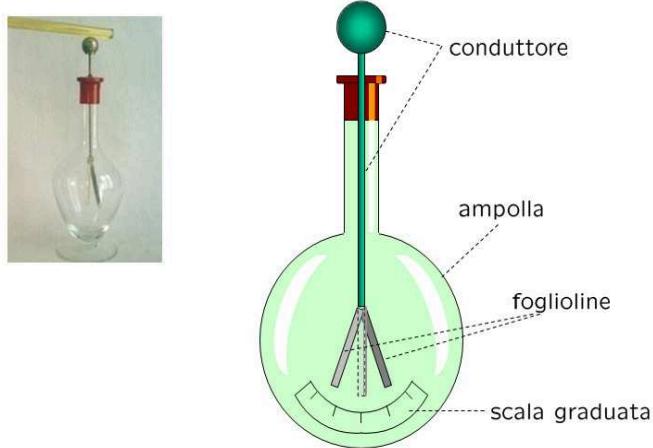


Figura 1.4: Elettroscopio a foglioline.

1.4 Definizione Operativa della Carica Elettrica

Fin qui la nostra trattazione dei fenomeni elettrostatici è stata qualitativa. Per procedere ad una trattazione quantitativa è necessario dare una *definizione operativa* di carica elettrica, ovvero definire un procedimento sperimentale per misurarla. Lo strumento storicamente utilizzato è l'*elettroscopio a foglioline*, illustrato in figura 1.4. Questo strumento consente di determinare lo stato di elettrizzazione relativo di due oggetti carichi, ovvero se un oggetto ha più o meno carica rispetto ad un altro. Due foglioline leggere metalliche (tipicamente d'oro) sono unite per una estremità all'estremo di un cilindro conduttore. Parte del cilindro, assieme alle foglioline, è contenuto all'interno di una ampolla in cui è praticato il vuoto. Il cilindro è sostenuto all'imboccatura dell'ampolla da un tappo isolante e termina fuori dall'ampolla con una sfera metallica. Le foglioline hanno l'estremo inferiore libero e possono ruotare intorno all'estremo superiore dal quale sono sospese.

Quando l'elettroscopio, ovvero il conduttore costituito dalla sferetta esterna, dal cilindro e dalle foglioline, è scarico, ed è lontano da qualsiasi oggetto carico, le foglioline sono unite. Quando un oggetto carico (per es. una bacchetta di vetro elettrizzata) viene posto a contatto con la sferetta, una frazione piccola della sua carica viene trasferita sul conduttore dell'elettroscopio e si distribuisce in parte anche sulle foglioline che acquistano una carica uguale e proporzionale alla carica totale dell'oggetto stesso. L'effetto della repulsione elettrostatica fa in modo che le due foglioline si divarichino in modo simmetrico fino a raggiungere una posizione di equilibrio nella quale la forza elettrostatica è compensata dalla forza gravitazionale su ciascuna fogliolina, che tende invece a riportarle unite. Gli estremi delle due foglioline sono proiettati su una scala graduata che permette di misurare l'angolo di divaricazione delle foglioline stesse (vedi Figura 1.5). Questo angolo è tanto più grande quanto maggiore è la

*ci permette di
conduttori
la carica
s'è
s'è*

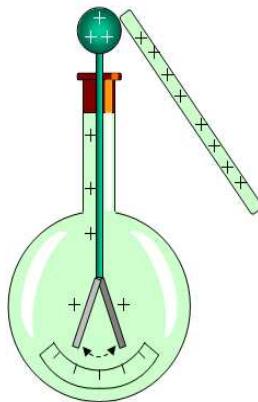


Figura 1.5: Divaricazione delle foglioline per effetto di una carica.

carica dell'oggetto con il quale l'elettroscopio è venuto a contatto.

Due oggetti hanno la stessa quantità di carica se, messi a contatto con un elettroscopio scarico, determino lo stesso angolo di divaricazione delle foglioline. Questo, però, non dà informazioni sul segno relativo delle due cariche. Per determinare il segno relativo basta mettere un elettroscopio prima in contatto con uno dei due oggetti, per es. quello carico positivamente. Quindi l'elettroscopio caricato positivamente va messo a contatto con il secondo oggetto. Se la carica di quest'ultimo è negativa, parte di essa viene trasferita sull'elettroscopio neutralizzando, in parte, la carica positiva presente sulle foglioline e quindi riducendone la divaricazione. Se i due oggetti hanno carica uguale ed opposta, alla fine le foglioline si richiuderanno completamente.

Per definire operativamente la carica elettrica occorre:

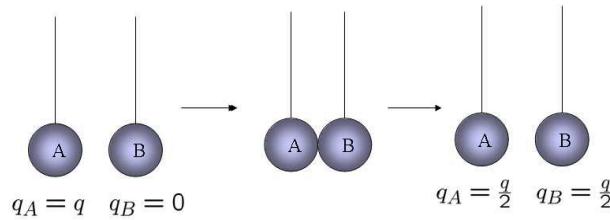
1. definire un procedimento sperimentalmente realizzabile per poter stabilire se due cariche sono uguali ed inoltre per poter dividere una carica in più parti uguali;
2. definire un procedimento sperimentale per realizzare con la massima precisione un campione di carica (unità di misura) rispetto al quale misurare le altre cariche.

Storicamente il procedimento di misura è stato realizzato con l'uso dell'elettroscopio a foglioline. Esso, come abbiamo visto, permette infatti di stabilire se due oggetti hanno la stessa carica.

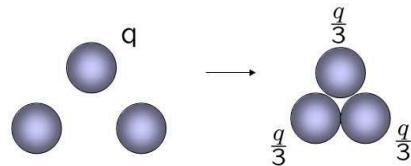
Per dividere una carica q in due o più parti uguali si procede nel seguente modo.

Consideriamo una sfera metallica A carica con carica q e sospesa ad un filo isolante. Mettiamola a contatto con una sfera B , identica, ma inizialmente neutra. Verifichiamo alla fine, con l'ausilio dell'elettroscopio, che le due sferette hanno la stessa carica.

Per la conservazione della carica, esse dovranno avere ciascuna una carica pari a $\frac{q}{2}$ (vedi Figura 1.6.a).



a) Divisione di una carica in due parti uguali



b) Divisione di una carica in tre parti uguali

Figura 1.6: Divisione di una carica in più parti uguali.

Per dividere una carica q in 3 parti uguali basta mettere una sferetta metallica con carica q in contatto con altre due sferette identiche secondo una configurazione simmetrica (vedi Figura 1.6.b). Il procedimento si può generalizzare per dividere una carica q in n parti uguali $\frac{q}{n}$. Questo permette, fissata una carica campione q_0 , di esprimere una qualsiasi carica q come:

$$q = hq_0, \quad (1.4.1)$$

ove h è un numero reale che rappresenta la misura di q in unità q_0 . L'unità di carica q_0 è presa positiva. Se q è una carica positiva, la sua misura h è un numero positivo, se q è negativa, $h < 0$ (questa convenzione è motivata dalla Legge di Coulomb).

Nel S.I. l'unità di carica q_0 è il Coulomb (C):

$$q_0 = 1C. \quad (1.4.2)$$

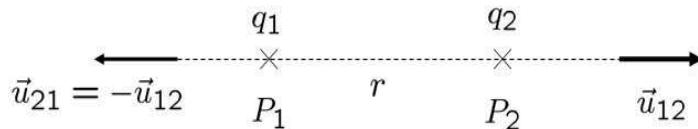
Per motivi di precisione, nella sua determinazione il Coulomb viene definito in termini dell'unità di misura dell'intensità di corrente, ovvero l'Ampère, che è determinabile con maggiore precisione: 1 Coulomb è la quantità di carica che circola in un circuito percorso da una corrente di intensità pari ad un Ampère (A) in un secondo:

$$1C = 1A \times 1sec. \quad (1.4.3)$$

1.5 Legge di Coulomb

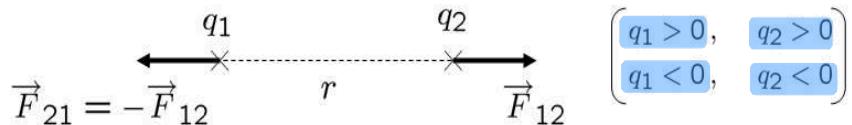
La legge che governa l'interazione tra sistemi di cariche in quiete è stata formulata da Coulomb nel 1785.

Siano dati due oggetti carichi con cariche q_1, q_2 , posti a distanza r molto maggiore della loro dimensione (approssimazione di carica puntiforme), in modo che ai fini dello studio della loro interazione, essi possano essere descritti pensando le loro cariche concentrate nei rispettivi baricentri posti nei punti P_1, P_2 . Pensiamo alle due cariche poste nel vuoto (vedi Figura 1.7.a). Sia \vec{u}_{12} il versore diretto lungo la direzione congiungente P_1 con P_2 nel verso

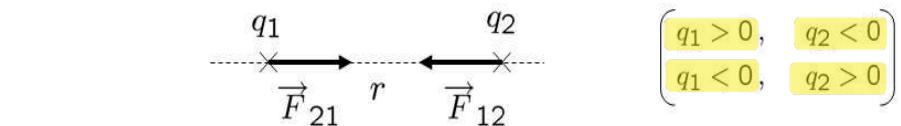


- a) Direzione congiungente due cariche puntiformi e i due versori associati

FORZA REPULSIVA



- b) Forze repulsive su cariche con lo stesso segno ($q_1 q_2 > 0$).



- c) Forze attrattive su cariche con segno opposto ($q_1 q_2 < 0$).

Figura 1.7: Interazione tra due cariche puntiformi.

che va da P_1 a P_2 , mentre \vec{u}_{21} definisce sulla stessa direzione il verso che va da P_2 a P_1 , e quindi $\vec{u}_{21} = -\vec{u}_{12}$.

La Legge di Coulomb afferma che la forza \vec{F}_{12} che q_1 esercita su q_2 è:

1. diretta lungo la congiungente le due cariche;
2. è attrattiva se le due cariche hanno segno opposto ($q_1 > 0, q_2 < 0$, oppure $q_1 < 0, q_2 > 0$, ovvero se $q_1 q_2 < 0$, vedi Figura 1.7.c) e repulsiva se hanno lo stesso segno ($q_1 q_2 > 0$, vedi Figura 1.7.b);

3. il suo modulo è proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza:

$$|\vec{F}_{12}| = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \text{ ove } k \text{ è una costante positiva.} \quad (1.5.1)$$

Possiamo rappresentare quindi \vec{F}_{12} come un vettore applicato a P_2 , pari a:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}. \quad (1.5.2)$$

La componente di \vec{F}_{12} lungo \vec{u}_{12} è $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$. Essa quindi è positiva se $q_1 q_2 > 0$, ovvero se le cariche hanno lo stesso segno. In tal caso \vec{F}_{12} è diretta nello stesso verso di \vec{u}_{12} e quindi è *repulsiva*. Se le due cariche $q_1 q_2$ hanno segno opposto, la componente di \vec{F}_{12} lungo \vec{u}_{12} è negativa e quindi \vec{F}_{12} è diretta in verso opposto a \vec{u}_{12} , ovvero è *attrattiva*. Per il principio di azionereazione, la forza che q_2 esercita su q_1 è descritta da un vettore \vec{F}_{21} applicato a P_1 uguale ed opposto ad \vec{F}_{12} .

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{21}. \quad (1.5.3)$$

La costante k viene spesso espressa come:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.5.4)$$

ove ϵ_0 è detta *costante dielettrica del vuoto*. I valori di k ed ϵ_0 sono:

$$k \cong 8.9875 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}, \quad (1.5.5)$$

$$\epsilon_0 \cong 8.8542 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (1.5.6)$$

Usando la (1.5.4) la (1.5.2) si riscrive:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}. \quad (1.5.7)$$

Abbiamo visto che la carica elettrica è presente in natura in quantità multiple della carica elettrica elementare e , la cui misura in Coulomb è:

$$e \cong 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}. \quad (1.5.8)$$

La carica di 1 Coulomb non è realizzabile in laboratorio. Infatti, due cariche pari ad 1 C poste ad una distanza di 1 m, subirebbero una forza dell'ordine di

$$F \simeq 10^{10} \text{ N}, \quad (1.5.9)$$

che è estremamente elevato, tenendo conto che la forza gravitazionale agente su un peso di 1 Kg sulla superficie terrestre è dell'ordine di 10 N. Gli eccessi di carica che si producono per strofinio sono tipicamente dell'ordine di:

$$\Delta q \simeq 10^{-7} \text{ C}. \quad (1.5.10)$$

1.6 Esperimento di Coulomb

Nel 1785 C.A. Coulomb condusse un esperimento per studiare le caratteristiche della forza elettrica tra cariche in quiete, da cui dedusse la sua legge. Egli utilizzò la *bilancia di torsione* da lui stesso ideata (vedi Figura 1.8).

La bilancia di torsione consiste in un'asta di materiale isolante, ad un estremo della quale è collegata una sfera carica con carica q_2 e sospesa per il suo baricentro ad un filo di quarzo con costante elastica di torsione k_0 nota. Se si pone una sfera carica con carica q_1 in un

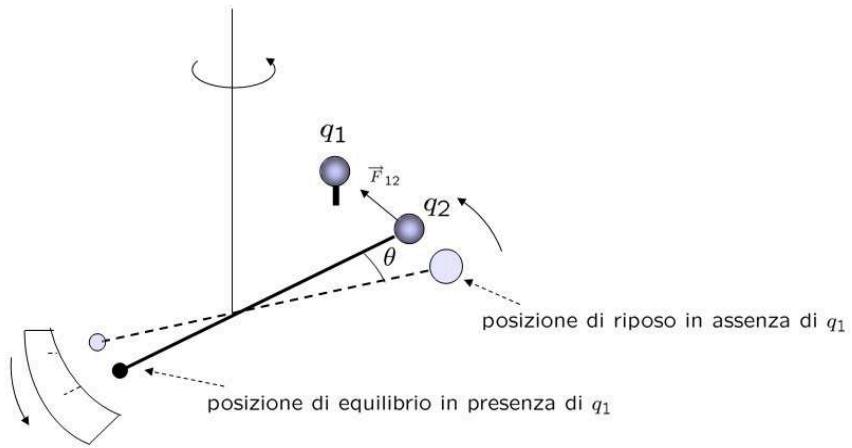


Figura 1.8: Bilancia di torsione.

punto sul piano di rotazione dell'asta a distanza r da q_2 , per effetto della forza elettrica, l'asta ruota rispetto alla posizione di equilibrio prima che fosse introdotta q_1 , di un angolo θ . L'angolo θ è definito da una nuova condizione di equilibrio in cui il momento della forza elettrica \vec{F}_{12} esercitata da q_1 su q_2 è compensato dal momento $M = k_0\theta$ elastico dovuto al filo che si oppone alla rotazione. Leggendo θ su una scala graduata è possibile misurare $|\vec{F}_{12}|$. Variando q_1 , q_2 , r è stato possibile dedurre la legge:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}. \quad (1.6.1)$$

1.7 Interazione tra un sistema di cariche in quiete

È utile, per descrivere un sistema di cariche puntiforme, riferirsi ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O e assi cartesiani di versori $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Le coordinate di un punto P sono le componenti del vettore $\vec{x} \equiv \overrightarrow{OP}$ (vedi Figura 1.9).

$$\vec{X} \equiv \overrightarrow{OP} \equiv x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \equiv (x, y, z). \quad (1.7.1)$$

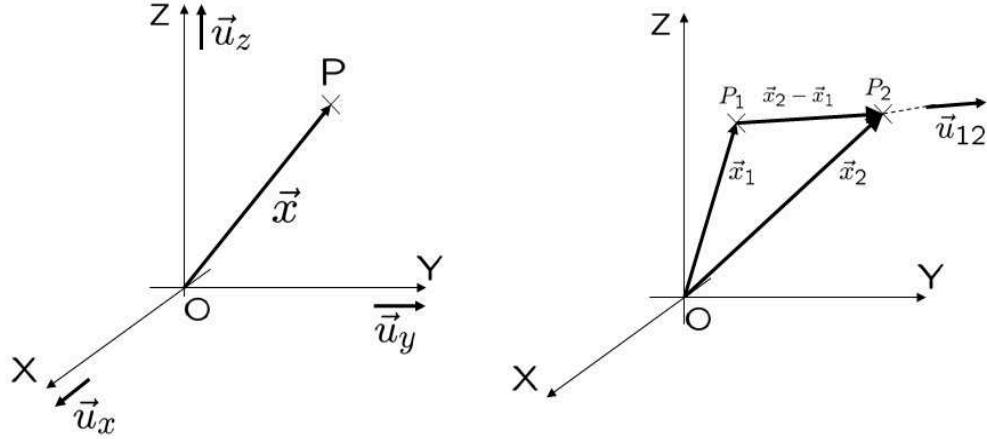


Figura 1.9: Vettore posizione relativa.

Dati due punti P_1 e P_2 descritti dai vettori posizione $\vec{x}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ e $\vec{x}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, vedi Figura 1.9, il vettore posizione relativo di P_2 rispetto a P_1 è:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \quad (1.7.2)$$

la distanza tra P_1 e P_2 è:

$$r = |\overrightarrow{P_1P_2}| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|, = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.7.3)$$

ed il versore \vec{u}_{12} di $\overrightarrow{P_1P_2}$ è dato da:

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{r}. \quad (1.7.4)$$

La forza che una carica q_1 in P_1 esercita su una carica q_2 in P_2 è data dalla (1.5.7) che, nelle nuove notazioni, possiamo riscrivere nel seguente modo (vedi Figura 1.10): .

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q_1 q_2) \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}. \quad (1.7.5)$$

Se abbiamo due cariche puntiformi q_1 e q_2 poste in P_1 e P_2 ed una carica puntiforme q_0 in P , la forza elettrica risultante agente su q_0 è la somma delle forze \vec{F}_{10} ed \vec{F}_{20} esercitate rispettivamente da q_1 e q_2 su q_0 . Se \vec{x}_1 , \vec{x}_2 ed \vec{x} sono i vettori posizione di P_1 , P_2 e P rispettivamente, usando la (1.7.5) per le coppie q_1, q_0 e q_2, q_0 troviamo:

$$\vec{F}_{10} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_0 \left(\frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} \right), \quad (1.7.6)$$

$$\vec{F}_{20} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 q_0 \left(\frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right). \quad (1.7.7)$$

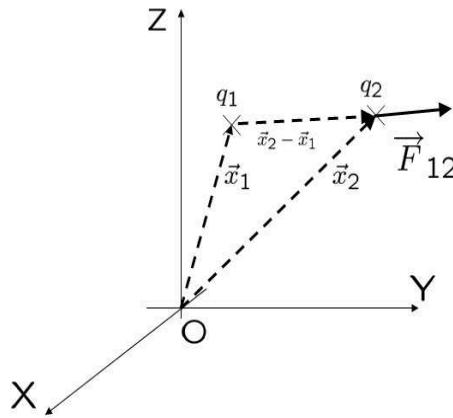


Figura 1.10: Forza tra due cariche puntiformi.

La forza risultante è (vedi Figura 1.11):

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1(\vec{x} - \vec{x}_1)}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} \right]. \quad (1.7.8)$$

Dato un sistema di cariche puntiformi \$(q_i) \equiv (q_1, q_2, \dots, q_n)\$ poste nei punti \$P_1, P_2, \dots, P_n\$ definiti dai vettori \$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\$ ed una carica \$q_0\$ posta in un punto \$P\$ definito da \$\vec{x}\$ la forza risultante \$\vec{F}_0\$ agente su \$q_0\$ è la risultante vettoriale delle forze \$\vec{F}_{i0}\$ che ciascuna carica \$q_i\$ esercita su \$q_0\$ (veci Figura 1.12):

$$\vec{F}_{i0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i q_0 \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.7.9)$$

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}. \quad (1.7.10)$$

Osserviamo che la forza risultante \$\vec{F}_0\$ che il sistema di cariche \$(q_i)\$ esercita sulla carica campione \$q_0\$ è proporzionale a \$q_0\$. Supponiamo di porre una carica campione \$q_0\$ in un punto \$\vec{x}\$ dello spazio circostante il sistema di cariche \$(q_i)\$ e che \$q_0\$ sia sufficientemente piccola da non modificare con la sua azione sulle cariche \$q_i\$ la loro configurazione. È utile descrivere l'azione delle cariche \$(q_i)\$ che chiameremo **cariche sorgente**, sulla carica \$q_0\$ posta in \$\vec{x}\$, in termini di una grandezza \$\vec{E}(\vec{x})\$ definita in ogni punto dello spazio da un vettore che dipende solo dal sistema di cariche sorgente ma non dalla carica campione \$q_0\$. Nel punto \$\vec{x}\$, \$\vec{E}(\vec{x})\$ è definito come:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}_0}{q_0}. \quad (1.7.11)$$

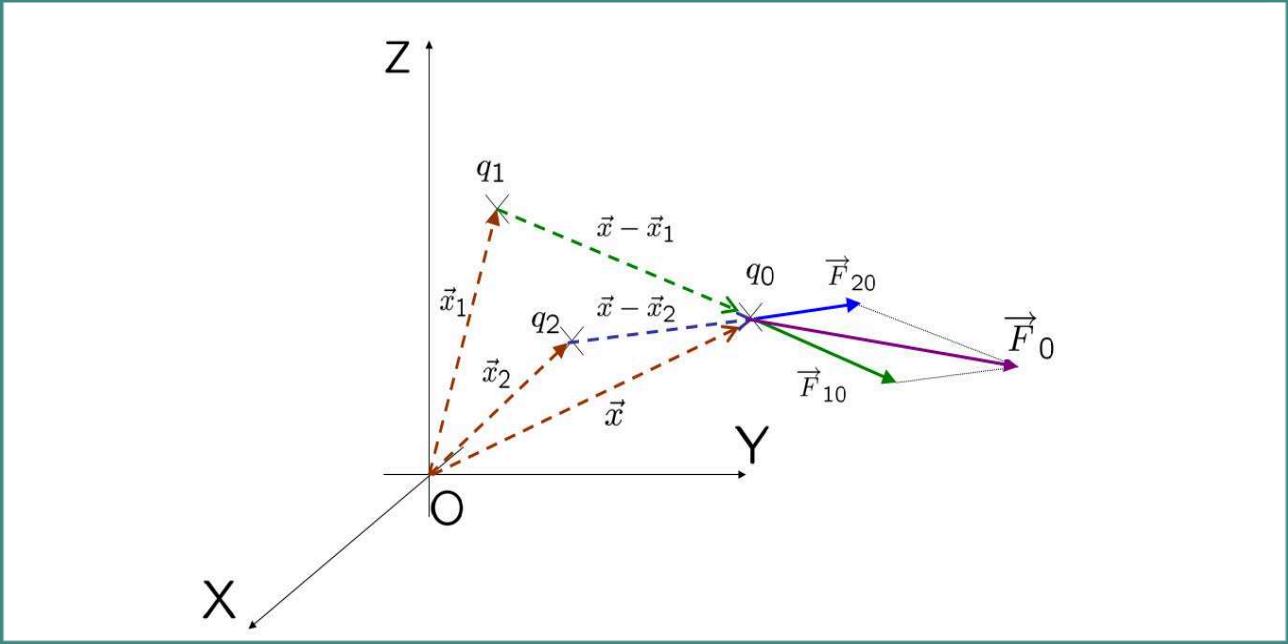


Figura 1.11: Forza risultante su una carica campione q_0 dovuta ad un sistema di due cariche q_1, q_2 .

Dalla (1.7.10) risulta, infatti, che \vec{E} non dipende da q_0 :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_{i0}}{q_0} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{x}). \quad (1.7.12)$$

Dalla (1.7.11) segue che l'azione di un sistema di cariche (q_i) su una carica campione (sufficientemente piccola) posta nel punto \vec{x} si esprime in termini del campo $\vec{E}(\vec{x})$ associato al sistema (q_i) nel seguente modo:

$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}(\vec{x}). \quad (1.7.13)$$

Dalla (1.7.12) osserviamo inoltre che questo campo, in ogni punto, è la somma dei campi $\vec{E}_i(\vec{x})$ associati a ciascuna carica del sistema.

Il campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ è un esempio di campo vettoriale, ovvero di una grandezza definita in ogni punto dello spazio \vec{x} da un vettore $\vec{E}(\vec{x})$. Esso si misura in $\frac{N}{C}$ ovvero forza per unità di carica. Direzione e verso di $\vec{E}(\vec{x})$ è la direzione e verso della forza esercitata su una carica campione positiva $q_0 > 0$ posta in \vec{x} . La consistenza di questa definizione del campo elettrico, come grandezza unicamente associata alla configurazione delle cariche q_i ,

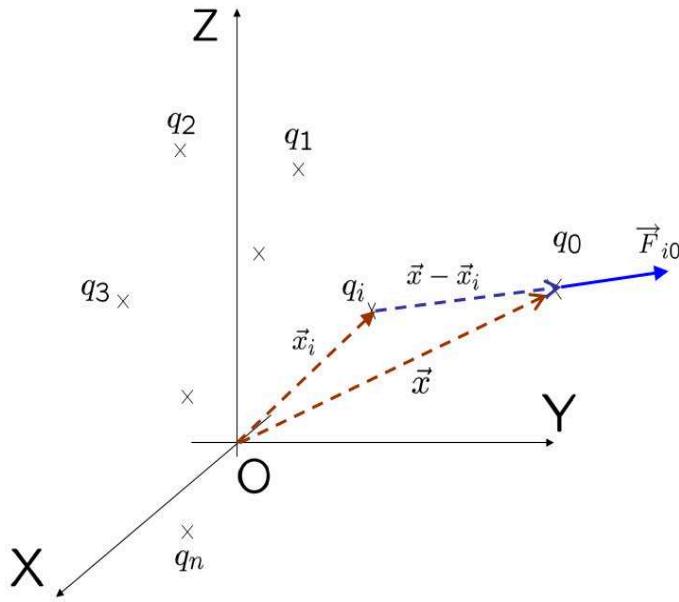


Figura 1.12: Azione di una generica carica q_i , in sistema di cariche q_1, q_2, \dots, q_n , su una carica campione q_0 .

richiede che la carica campione q_0 usata per misurarlo, sia sufficientemente piccola da non perturbare con la forza elettrica da essa esercitata sulle cariche q_i , la configurazione di queste ultime. Le cariche q_i sono chiamate *cariche sorgenti*.

Come esempio consideriamo il campo elettrico generato da una carica puntiforme q . Conviene posizionare q nell'origine di un sistema di riferimento (vedi Figura 1.13). Il campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ in un punto \vec{x} è dato dalla (1.7.12):

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \quad (1.7.14)$$

Il sistema ha simmetria sferica e quindi conviene descriverlo rispetto ad un sistema di coordinate polari centrato su O . In questo sistema $r = |\vec{x}|$ è la distanza del punto considerato dall'origine, ovvero dalla carica q e

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \Rightarrow \vec{x} = \vec{u}_r \cdot |\vec{x}| \quad (1.7.15)$$

è il versore radiale uscente. Il campo $\vec{E}(\vec{x})$ si riscrive quindi:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{u}_r}{r^2}. \quad (1.7.16)$$

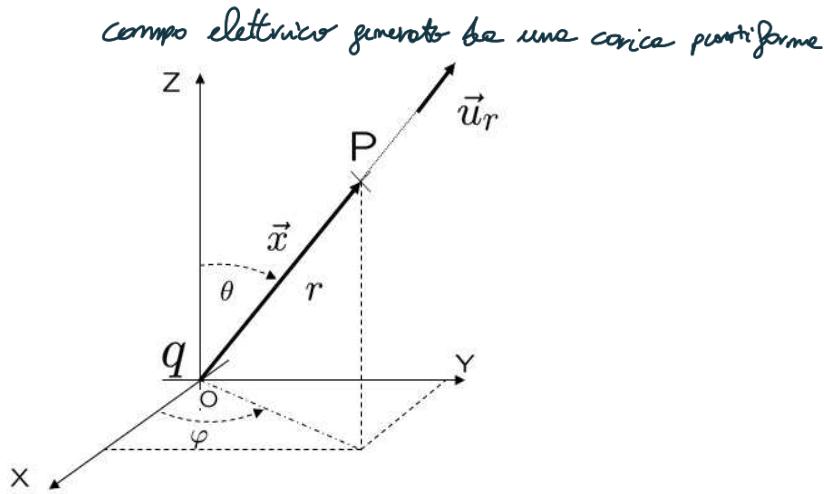


Figura 1.13: Sistema di coordinate polari centrato su una carica puntiforme q .

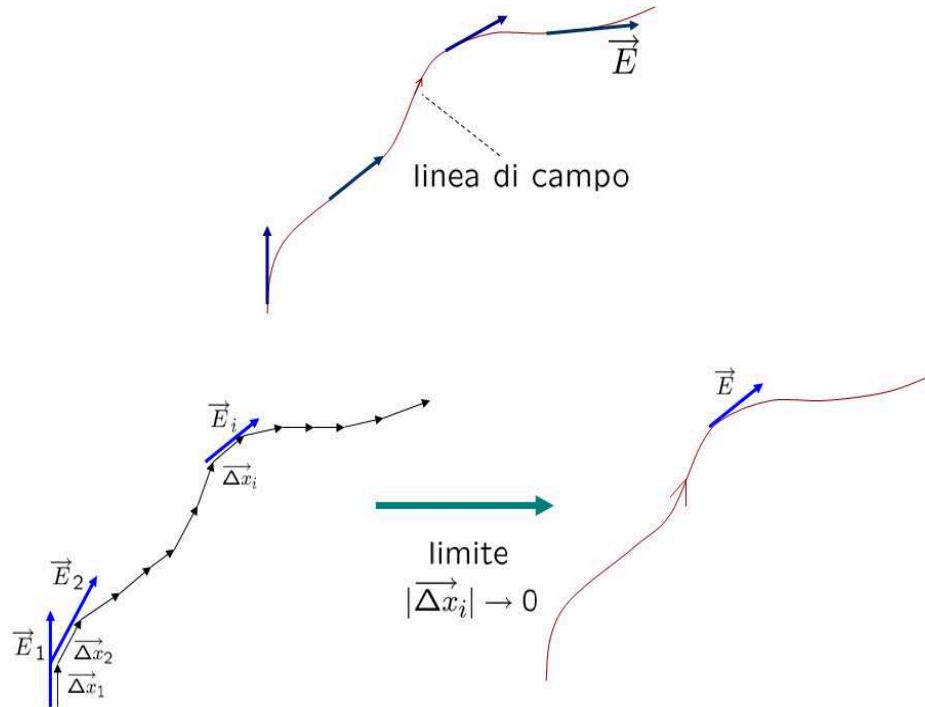
Esso è diretto lungo la direzione radiale in verso uscente (concorde ad \vec{u}_r) se $q > 0$, o entrante (discorde ad \vec{u}_r) se $q < 0$. La forza agente su una carica campione q_0 posta nel punto \vec{x} è:

$$\vec{F}_0 = E(\vec{x}) q_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q_0 \frac{\vec{u}_r}{r^2}. \quad (1.7.17)$$

È utile descrivere il campo $\vec{E}(\vec{x})$, come un qualsiasi campo vettoriale, attraverso le *linee di campo*, ovvero linee, opportunamente distribuite nello spazio, tangenti ad $\vec{E}(\vec{x})$ in ogni loro punto, ed orientate secondo il verso di $\vec{E}(\vec{x})$ (vedi Figura 1.14). Per tracciare una linea di campo possiamo partire da un punto \vec{x}_1 nell'intorno di un sistema di cariche e compiamo uno spostamento piccolo $\Delta\vec{x}_1$ nella direzione e verso di $\vec{E}(\vec{x}_1)$. A partire dal nuovo punto $\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \Delta\vec{x}_1$, spostiamoci nuovamente di un piccolo tratto $\Delta\vec{x}_2$ lungo la direzione e verso di $\vec{E}(\vec{x}_2)$. Iterando questo procedimento un numero indefinito di volte, la successione degli spostamenti elementari $\Delta\vec{x}_1, \Delta\vec{x}_2, \dots$, nel limite in cui ciascun $\Delta\vec{x}_i$ tende in lunghezza a zero, approssima una curva orientata nel verso degli spostamenti $\Delta\vec{x}_i$ e tangente al campo $\vec{E}(\vec{x})$ in ogni suo punto (vedi Figura 1.14). Si osservi che, per costruzione, la linea di campo che passa per un dato punto dello spazio è unica.

Nel caso di una carica puntiforme conviene rappresentare il campo su un piano contenente la carica. Le linee del campo elettrico generato da una carica puntiforme sono rappresentate in Figura 1.15 nel caso $q > 0$ ed in Figura 1.16 nel caso $q < 0$. Osserviamo che le linee del campo elettrico generato da una carica puntiforme sono sempre *radiali*, orientate in verso uscente se $q > 0$ (ovvero si originano sulla carica) o entrante se $q < 0$ (ovvero terminano sulla carica).

Le proprietà generali delle linee di campo sono:

Figura 1.14: Linea di campo associata al campo \vec{E} .

- Due linee di campo non possono intersecarsi. In tal caso, infatti, il campo elettrico nel punto di intersezione, essendo tangente ad entrambe le linee, non sarebbe unicamente definito.
- Come vedremo più avanti in dettaglio, si sceglie di tracciare le linee di campo in modo che esse si addensino nelle regioni in cui il campo $\vec{E}(\vec{x})$ è più intenso ed invece siano più rade nelle regioni in cui $\vec{E}(\vec{x})$ è meno intenso.
- Le linee di campo si originano all'infinito o nelle cariche positive e terminano all'infinito o sulle cariche negative.

Se prendiamo un sistema di due cariche uguali ed opposte $\pm q$ poste ad una certa distanza, tutte le linee di campo si originano su $+q$ e terminano su $-q$. Nessuna ha origine o termina all'infinito, vedi Figura 1.17.

Se, invece, la carica positiva $+q_1$ è in valore assoluto maggiore della carica negativa $-q_2$, ovvero:

$$q_1 - q_2 > 0 , \quad (1.7.18)$$

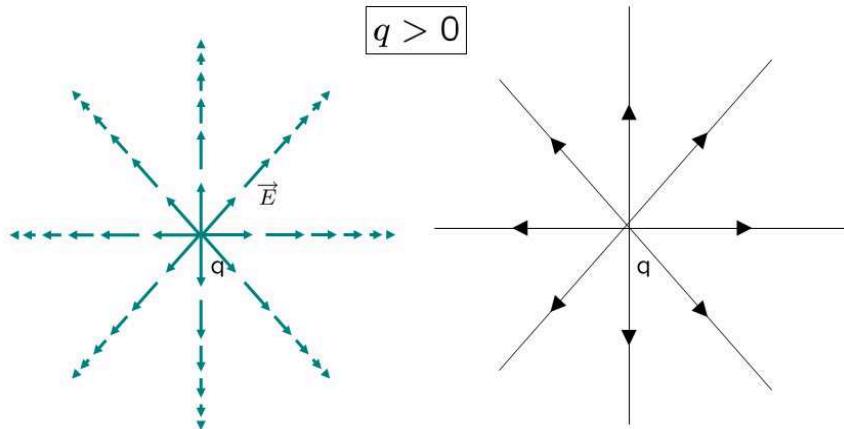


Figura 1.15: Descrizione tramite linee di campo del campo elettrico associato ad una carica q puntiforme positiva.

vi sono alcune linee di campo che si originano su $+q_1$ ma che terminano all'infinito, invece che su $-q_2$, vedi le linee blu in Figura 1.18. Viceversa, se $q_1 - q_2 < 0$, alcune linee si origineranno all'infinito invece che su $+q_1$ e termineranno tutte su $-q_2$.

La rappresentazione di un campo vettoriale attraverso linee di campo la si deve a M. Faraday. Torneremo più avanti a definire con precisione i criteri da seguire per realizzare questa rappresentazione.

1.8 “Azione a distanza” Vs “Azione a contatto”

I fenomeni elettrostatici si possono consistentemente descrivere in termini di “azione a distanza” di un sistema di cariche su un altro. In questa rappresentazione il campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ associato ad un sistema di cariche è solo un modo geometrico per descrivere l’azione a distanza del sistema di cariche su una carica campione q_0 attraverso una forza $\vec{F} = q_0 \vec{E}(\vec{x})$, che va pensata come *azione istantanea*. Nell’ambito dei fenomeni elettrodinamici, ovvero legati a cariche elettriche in rapido movimento, la rappresentazione dell’interazione in termini di azione a distanza risulta inadeguata. Se la configurazione di un sistema di cariche (q_i) viene fatta variare rapidamente, si osserva che la forza agente sulla carica campione q_0 varia

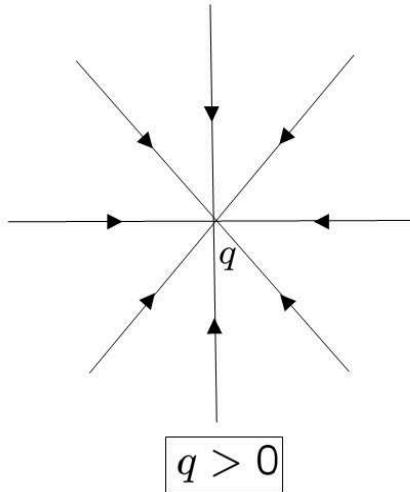


Figura 1.16: Descrizione tramite linee di campo del campo elettrico associato ad una carica q puntiforme negativa.

con un certo ritardo. Questo ritardo è tanto maggiore quanto più q_0 dista dal sistema di cariche (q_i) ed è incompatibile con l’idea di un’azione istantanea. Il modo più corretto per descrivere questi fenomeni è in termini di “azione a contatto”, ovvero l’interazione tra due cariche viene descritta in due momenti (vedi Figura 1.19):

1. Una carica q genera intorno a sé un campo $\vec{E}(\vec{x})$ che va pensato adesso come un’entità fisica vera e propria, portatrice di energia e quantità di moto;
2. Il campo \vec{E} agisce sulla carica campione q_0 posta al suo interno attraverso una forza $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}(\vec{x})$.

In questa rappresentazione, l’interazione avviene tra il campo \vec{E} associato a q e la carica campione q_0 ed è *localizzata* nel punto occupato da q_0 . Se la carica q viene rapidamente spostata in un certo istante, viene modificato il campo \vec{E} inizialmente nella regione prossima a q e questa perturbazione, che porta con sé l’informazione sulla nuova posizione di q , si propaga nello spazio a velocità finita, fino a raggiungere il punto occupato da q_0 dopo un certo tempo, ed a modificare conseguentemente l’azione del campo elettrico:

$$\vec{F}_0 \rightarrow \vec{F}'_0 = q_0 \vec{E}' . \quad (1.8.1)$$

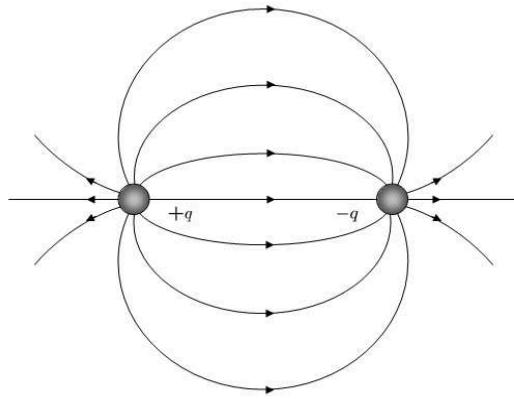


Figura 1.17: Descrizione tramite linee di campo del campo elettrico generato da due cariche uguali ed opposte (dipolo elettrico).

1.9 Forza e campo elettrostatico dovuti a distribuzione continua di carica

Il concetto di carica puntiforme è solo una approssimazione per descrivere oggetti carichi le cui dimensioni sono molto più piccole delle distanze in gioco. La situazione realistica è quella in cui più oggetti carichi con una certa estensione interagiscono tra di loro. Sappiamo che la carica elettrica ha una natura discreta, ovvero compare in multipli interi della carica elementare e portata dai protoni e dagli elettroni. La carica che tipicamente si viene a produrre per elettrizzazione su oggetti macroscopici è dell'ordine di $\Delta q \simeq 10^{-7} C$. Essa, quindi, conterrà un numero dell'ordine di:

$$\frac{\Delta q}{e} \simeq \frac{10^{-7}}{1.6 \times 10^{-19}} \simeq 10^{12} \gg 1, \quad (1.9.1)$$

di portatori di carica elementare. Benché quantizzata, la carica Δq sull'oggetto carico può pensarsi distribuita con continuità.

Consideriamo una carica q distribuita con continuità all'interno di un volume V , vedi Figura 1.20, con una densità di carica:

$$\rho(\vec{x}) = \frac{dq}{dV} : \int_V \rho(\vec{x}) \cdot dV = q. \quad (1.9.2)$$

Nelle nostre notazioni descriveremo un elemento di volume infinitesimo dV in coordinate cartesiane come un cubetto di lati dx, dy, dz , vedi Figura 1.20., Esso verrà anche indicato

1.9. FORZA E CAMPO ELETTROSTATICO DOVUTI A DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

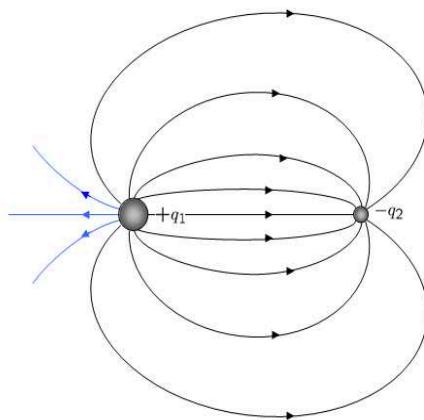


Figura 1.18: Campo elettrico generato da due cariche di segno opposto e valore assoluto diverso.

con:

$$d^3\vec{x} \equiv dV = dx dy dz . \quad (1.9.3)$$

Vogliamo studiare l'azione della carica q su una carica campione q_0 posta in un punto \vec{x} . Per farlo, suddividiamo il volume V in un numero infinito di volumetti infinitesimi di V , sufficientemente piccoli da poterli considerare puntiformi, ma abbastanza estesi da contenere un numero sufficientemente elevato di cariche elementari.

Se il volumetto è posizionato in un punto \vec{x}' all'interno di V , esso conterrà una carica dq pari a:

$$dq = \rho(\vec{x}') dV . \quad (1.9.4)$$

Per quanto detto la carica dq è approssimabile ad una carica puntiforme, come la carica campione q_0 . La forza esercitata da dq su q_0 si esprime, quindi, usando la legge di Coulomb:

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq q_0 \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} . \quad (1.9.5)$$

La forza \vec{F} risultante agente su q_0 sarà la somma (ovvero l'integrale) dei contributi $d\vec{F}$ dovuti a ciascun elemento di carica dq :

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq q_0 \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int_V d^3 \vec{x}' \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\vec{x}') q_0 \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] = q_0 \vec{E}(\vec{x}) . \quad (1.9.6)$$

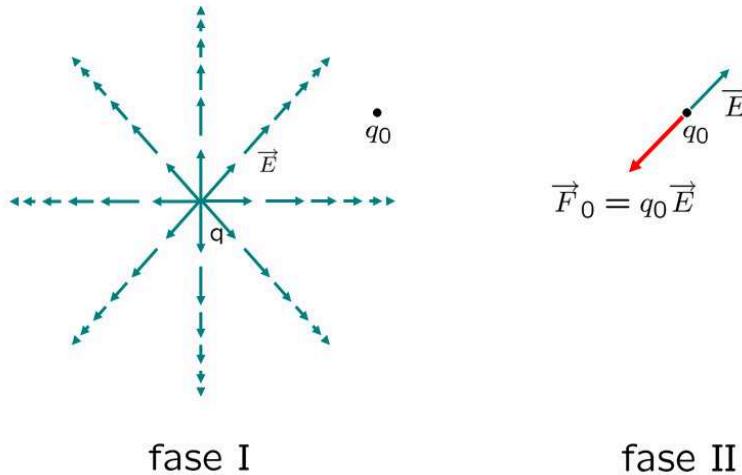


Figura 1.19: Rappresentazione dell’interazione tra due cariche q e q_0 come “azione a contatto” mediata dal campo elettrico: in una prima fase la carica q genera un campo elettrico \vec{E} nello spazio ad essa circostante; in una seconda fase il campo \vec{E} generato da q agisce su q_0 tramite una forza $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$. L’interazione coinvolge solo il campo \vec{E} e la carica q_0 ed è “localizzata” nel punto occupato da q_0 .

Il campo elettrico \vec{E} associato alla distribuzione continua di carica è dato da:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \left(\frac{\vec{F}}{q_0} \right) = \int_V d^3 \vec{x}' \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] = \int_V d\vec{E}. \quad (1.9.7)$$

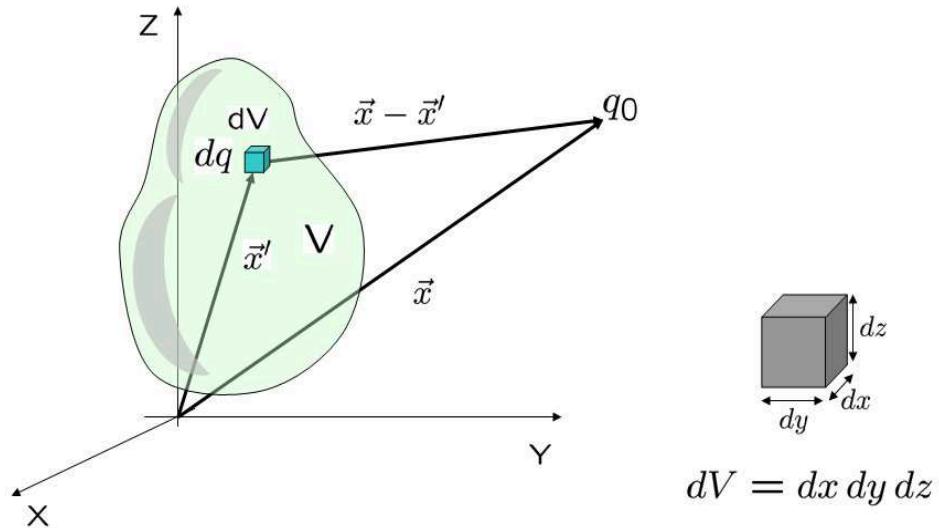
Esso è la somma vettoriale dei campi $d\vec{E}$ dovuti a ciascun elemento dq .

1.10 Esempio 1

Calcolare l’intensità di forza gravitazionale ed elettrica tra un protone ed un elettrone posti ad una distanza pari al raggio medio R_0 dell’atomo di idrogeno.

$$R_o \simeq 0.53 \times 10^{-10} m, \quad (1.10.1)$$

$$m_e \simeq 9.11 \times 10^{-31} Kg, \quad (1.10.2)$$

Figura 1.20: Azione di una distribuzione continua di carica su una carica compione q_0 .

$$m_p \simeq 1.67 \times 10^{-27} \text{ Kg}, \quad (1.10.3)$$

$$e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad (1.10.4)$$

$$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \frac{m^2}{\text{Kg}^2}, \quad (1.10.5)$$

$$k \simeq 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \frac{m^2}{\text{C}^2}, \quad (1.10.6)$$

$$(1.10.7)$$

$$|\vec{F}_G| = G \frac{m_p m_e}{R_o^2} \cong 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}, \quad (1.10.8)$$

$$|\vec{F}_e| = k \frac{e^2}{R_o^2} \cong 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}, \quad (1.10.9)$$

$$\frac{|\vec{F}_G|}{|\vec{F}_e|} \cong 4.4 \times 10^{-40} \text{ N}. \quad (1.10.10)$$

L'intensità della forza gravitazionale è $\sim 10^{-40}$ volte più piccola di quella elettrica. Per questo motivo l'interazione gravitazionale tra particelle elementari viene trascurata.

1.11 Esercizi su forza e campo elettrostatici

Esercizio 1.11.1 Due protoni in un nucleo di elio distano $d = 10^{-15} m$, vedi Figura 1.21 a). Determinare la forza elettrica che esercitano l'uno sull'altro.

Soluzione:

$$|\vec{F}| = k \frac{e^2}{d^2} \simeq 9.10^9 \times (1.6)^2 \times 10^{-38} \times 10^{30} = 230.4 N. \quad (1.11.1)$$

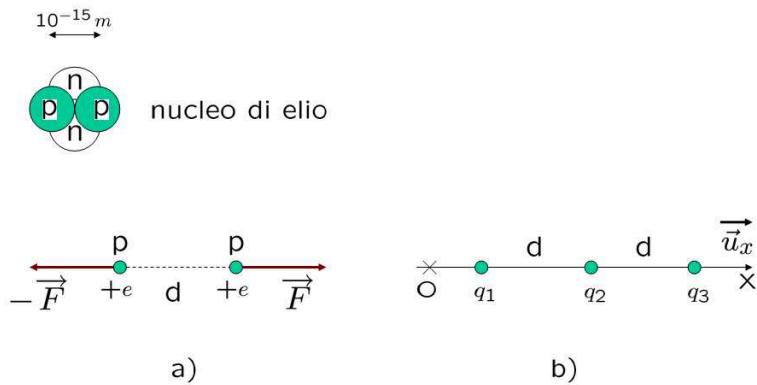


Figura 1.21: Esercizi 1.11.1, 1.11.2

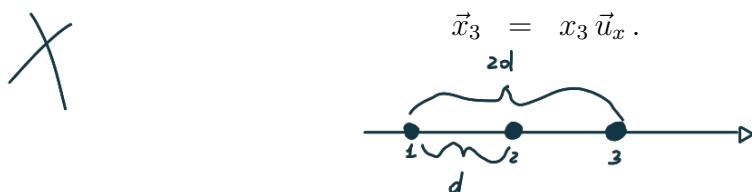
Esercizio 1.11.2 Tre particelle caricate sono poste lungo una retta a distanza d l'una dall'altra, vedi Figura 1.21 b). Le cariche $q_1 q_2$ sono tenute fisse, la carica q_3 è libera di muoversi e si trova in una situazione di equilibrio rispetto alle forze elettriche. Si determini la relazione tra q_1 e q_2 .

Soluzione: facciamo coincidere l'asse x con versore \vec{u}_x con la retta congiungente le tre cariche come in figura e fissiamo arbitrariamente un'origine 0. Siano $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, i vettori posizione di q_1, q_2, q_3 rispettivamente.

$$\vec{x}_1 = x_1 \vec{u}_x, \quad (1.11.2)$$

$$\vec{x}_2 = x_2 \vec{u}_x, \quad (1.11.3)$$

$$\vec{x}_3 = x_3 \vec{u}_x. \quad (1.11.4)$$



$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(2d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{4d^2}$$

condizione di equilibrio

$$F_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{d^2} \rightarrow F_{13} + F_{23} = 0 \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{4d^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{d^2} = 0 \rightarrow \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(\frac{q_1}{4} + q_2 \right) = 0 \rightarrow q_1 = -4q_2$$

1.11. ESERCIZI SU FORZA E CAMPO ELETTROSTATICI

31

Denotiamo con \vec{F}_{13} ed \vec{F}_{23} , le forze che q_1 e q_2 esercitano su q_3 rispettivamente. Per la legge di Coulomb esse sono date da:

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_3 \frac{(\vec{x}_3 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_3 \frac{(x_3 - x_1)}{|x_3 - x_1|^3} \vec{u}_x, \quad (1.11.5)$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 q_3 \frac{(\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 q_3 \frac{(x_3 - x_2)}{|x_3 - x_2|^3} \vec{u}_x. \quad (1.11.6)$$

Essendo $x_3 - x_1 = 2d$ ed $x_3 - x_2 = d$ possiamo scrivere:

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_3 \frac{1}{4d^2} \vec{u}_x, \quad (1.11.7)$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 q_3 \frac{1}{d^2} \vec{u}_x. \quad (1.11.8)$$

La condizione di equilibrio è che la forza risultante su q_3 sia nulla.

$$0 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{d^2} \left(\frac{q_1}{4} + q_2 \right) \vec{u}_x \Rightarrow q_1 = -4q_2. \quad (1.11.9)$$

Esercizio 1.11.3 Consideriamo due piccole sfere caricate con cariche q_1 e q_2 e masse m_1 e m_2 . Esse sono sospese a due fili di lunghezza l fissati per l'estremità superiore ad uno stesso punto di una parete orizzontale. Le cariche q_1 e q_2 hanno lo stesso segno e all'equilibrio i rispettivi fili formano angoli θ_1 e θ_2 con la verticale, vedi Figura 1.22. Determinare il rapporto tra $\sin(\theta_1)$ e $\sin(\theta_2)$ e, nel caso in cui $m_1 = m_2$, $\sin(\theta_1)$ e $\sin(\theta_2)$ per cariche molto piccole.

Soluzione: consideriamo la condizione di equilibrio tra forza elettrica e gravitazionale sulla carica q_1 . La forza gravitazionale $\vec{F}_{G,1}$ è diretta lungo la verticale verso il basso, mentre la forza elettrica esercitata da q_2 , $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ è diretta lungo la congiungente le due cariche ed è repulsiva. All'equilibrio le proiezioni delle due forze sulla direzione perpendicolare al filo si annullano, mentre la condizione di equilibrio lungo la direzione del filo coinvolgerà la tensione del filo e non ci interessa. Sulla direzione perpendicolare al filo:

$$|\vec{F}_{G,1}| \sin(\theta_1) = |\vec{F}_{2,1}| \cos \theta = |\vec{F}_{1,2}| \cos \theta, \quad (1.11.10)$$

essendo $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$.

L'analogia condizione di equilibrio su m_2, q_2 si scrive:

$$|\vec{F}_{G,2}| \sin(\theta_2) = |\vec{F}_{1,2}| \cos \theta. \quad (1.11.11)$$

I moduli delle forze sono:

$$|\vec{F}_{G,1}| = m_1 g; |\vec{F}_{G,2}| = m_2 g, \quad (1.11.12)$$

$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.11.13)$$

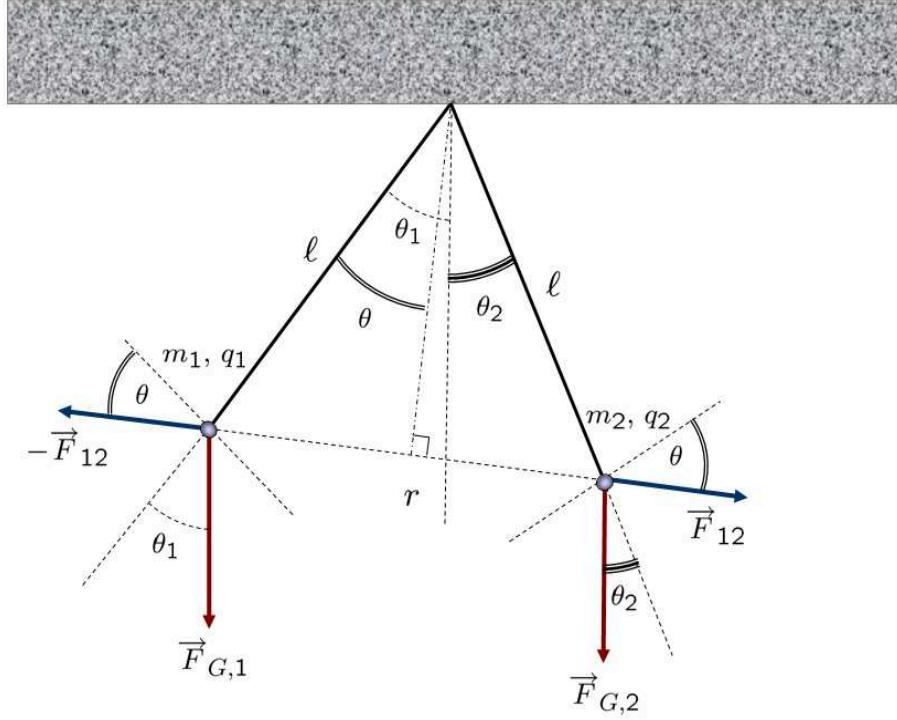


Figura 1.22: Esercizio 1.11.3

ove $r = 2l \sin \theta$.

Dividendo la (1.11.10) per la (1.11.11) membro a membro, troviamo:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (1.11.14)$$

In particolare, se $m = m_1 = m_2$ troviamo che $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. In questo caso, usando la (1.11.13) e la (1.11.10) otteniamo:

$$\frac{\sin^3 \theta}{\cos(\theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4l^2 mg}. \quad (1.11.15)$$

Se le cariche sono molto piccole, anche θ lo sarà e possiamo approssimare al 1.. ordine:

$$\cos(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{2} + \dots \simeq 1, \quad (1.11.16)$$

$$\sin(\theta) \simeq \theta, \quad (1.11.17)$$

per cui:

$$\theta \simeq \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4l^2 mg} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.11.18)$$

Questo sistema di cariche può essere considerato come una descrizione approssimata delle foglioline di un elettroscopio a foglioline carico e la (1.11.18) è, in prima approssimazione, la relazione tra l'angolo di divaricazione delle foglioline θ e la carica $q = q_1 = q_2$ su di esse.

Esercizio 1.11.4 Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R , vedi Figura 1.23. Calcolare il campo elettrico lungo l'asse.

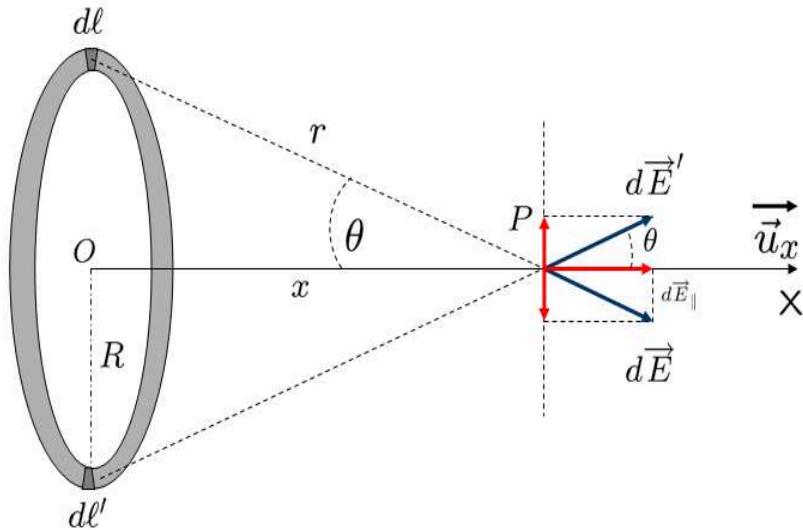


Figura 1.23: Esercizio 4

Soluzione: La carica q è distribuita uniformemente lungo l'anello. Avendo questo uno spessore trascurabile, possiamo descrivere questa distribuzione in termini di una densità lineare:

$$q = \int_{\text{anello}} dq = \int_{\text{anello}} \lambda dl = \lambda \int_{\text{anello}} dl = 2\pi R \lambda. \quad (1.11.19)$$

Fissiamo l'asse x lungo l'asse dell'anello, come in Figura 1.23, e consideriamo l'origine sul piano dell'anello. Vogliamo calcolare il campo elettrico \vec{E} in un punto P di ascissa x sull'asse.

Per farlo, dividiamo l'anello in infiniti elementi infinitesimi di lunghezza dl che contengono una carica $dq = \lambda dl$. Calcoliamo \vec{E} come la somma vettoriale dei contributi infinitesimi $d\vec{E}$ dovuti a ciascun elemento di carica dq approssimabile con una carica puntiforme:

$$\vec{E} = \int_{\text{anello}} d\vec{E}. \quad (1.11.20)$$

Se consideriamo i contributi $d\vec{E}$ e $d\vec{E}'$ dovuti ad elementini dl e dl' diametralmente opposti, osserviamo che le loro componenti sul piano dell'anello sono uguali ed opposti e quindi si elidono nella somma. Alla somma vettoriale contribuisce solo la componente di $d\vec{E}$ lungo l'asse x :

$$d\vec{E}_{||} = |d\vec{E}| \cos\theta \vec{u}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\theta \vec{u}_x, \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \vec{u}_x \quad (1.11.21)$$

ove $\cos\theta = \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$ ed $r = (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$.

*CARICO MASSICCIO
IPOTENSA*

*= $\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_x$
non dipende dall'anello > escono dall'integrale*

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_{\text{anello}} d\vec{E}_{||} = \int_{\text{anello}} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{u}_x = \int_{\text{anello}} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dl \vec{u}_x = ? \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R \vec{u}_x = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda x R}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x. \end{aligned} \quad (1.11.22)$$

Se $\lambda > 0$ il campo \vec{E} è diretto in verso opposto rispetto all'anello.

Nel limite in cui $x \gg R$, nel quale l'anello è assimilabile ad una carica puntiforme, abbiamo:

~~$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (2\pi R \lambda) \frac{x}{|x|^3} \vec{u}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} \vec{u}_x.$$~~

*(> guardiamo l'anello
da molto lontano)*

*de lontano
l'anello assomiglia ad
un punto*

bidimensionale

$$(1.11.23)$$

Ritroviamo l'espressione del campo associato ad una carica puntiforme q .

Esercizio 1.11.5 *Sia data una carica q distribuita uniformemente su un disco di raggio R_0 , vedi Figura 1.24. Determinare il campo \vec{E} in un punto dell'asse.*

Soluzione: La distribuzione di carica è superficiale, e quindi descrivibile attraverso una densità superficiale:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \begin{matrix} \text{carica per unità} \\ \text{di superficie} \end{matrix} \quad (1.11.24)$$

essendo dS un elemento infinitesimo di superficie. Nel nostro caso σ è uniforme sul disco e la carica q è la somma degli elementi di carica $dq = \sigma ds$ contenuti in ciascun elemento ds :

$$q = \int_{\text{disco}} dq = \int_{\text{disco}} \sigma ds = \pi R_0^2 \sigma. \quad (1.11.25)$$

$\sigma \int ds$

$$\int ds = \pi R_0^2 \Rightarrow \sigma = \frac{q}{\pi R_0^2}$$

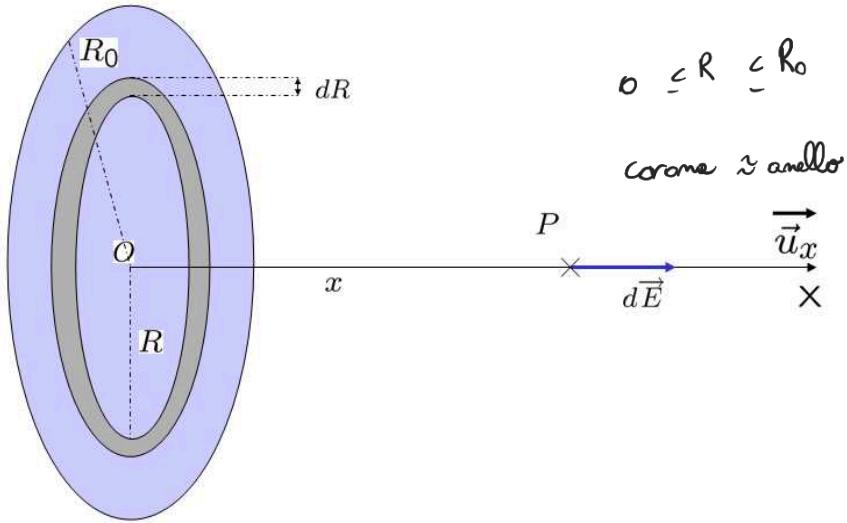


Figura 1.24: Esercizio 1.11.5

Dividiamo il disco in infiniti anelli concentrici di spessore infinitesimo compresi tra un raggio R ed un raggio $R + dR$, con R che varia da 0 ad R_0 , vedi Figura 1.24. Scriviamo il campo elettrico totale \vec{E} come somma dei contributi $d\vec{E}$ dovuti a ciascun anello:

$$\vec{E} = \int_{disco} d\vec{E}_{anello} \quad (1.11.26)$$

Il campo $d\vec{E}$ dovuto a ciascun anello è stato calcolato nell'esercizio precedente e vale:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x, \quad \begin{array}{l} \text{trovata} \\ \text{nel caso dell'anello} \\ \text{come la carica} \\ \text{dq presente nell'anello} \end{array} \quad (1.11.27)$$

essendo dq la carica contenuta nell'anello:

$$dq = \sigma dS \quad (1.11.28)$$

$$dq = \sigma 2\pi R dR.$$

Troviamo, quindi, che:

$$R \rightarrow y(r) = x^2 + r^2$$

$$dS = \pi (R + dr)^2 - \pi R^2 = 2\pi R dr$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_0^{R_0} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{xR}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dR \right] \vec{u}_x = \frac{x\sigma}{4\epsilon_0} \left(\int_{x^2}^{R_0^2 + x^2} \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{u}_x = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right) \vec{u}_x. \end{aligned} \quad (1.11.29)$$

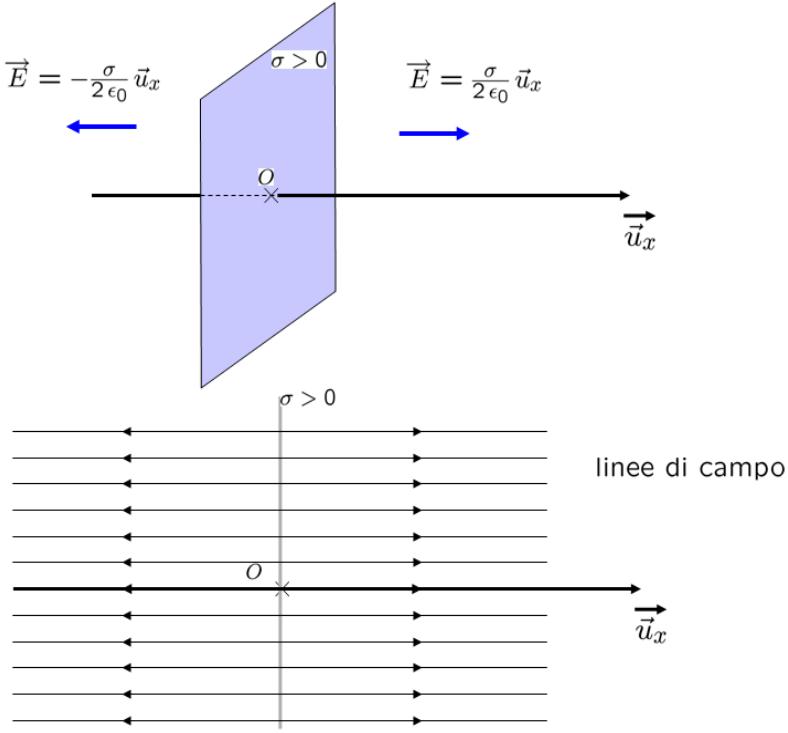


Figura 1.25: Campo elettrico dovuto ad una distribuzione piana, infinita ed uniforme di carica.

Se $\sigma > 0$ ed $x > 0$, \vec{E} è diretto nel verso di \vec{u}_x , mentre se $x < 0$, \vec{E} è diretto in verso opposto ad \vec{u}_x . Consideriamo il limite per $R_0 \gg x$, ovvero il disco sufficientemente esteso rispetto alla distanza x da esso, da poter essere approssimato ad un piano. Nel limite $R_0 \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \vec{u}_x .} \quad \begin{matrix} \text{distribuzione piana, infinita, omogenea di carica} \\ \text{con densità } \sigma \end{matrix} \quad (1.11.30)$$

Abbiamo, quindi, calcolato il campo generato da una distribuzione piana uniforme indefinita di carica con densità σ . Nei due semispazi $x > 0$ e $x < 0$, \vec{E} è uniforme in modulo pari a:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} . \quad (1.11.31)$$

\vec{E} è perpendicolare al piano in verso uscente rispetto ad esso se $\sigma > 0$, entrante se $\sigma < 0$, vedi Figura 1.25. Le linee di campo di \vec{E} saranno quindi parallele ed equidistanti (essendo

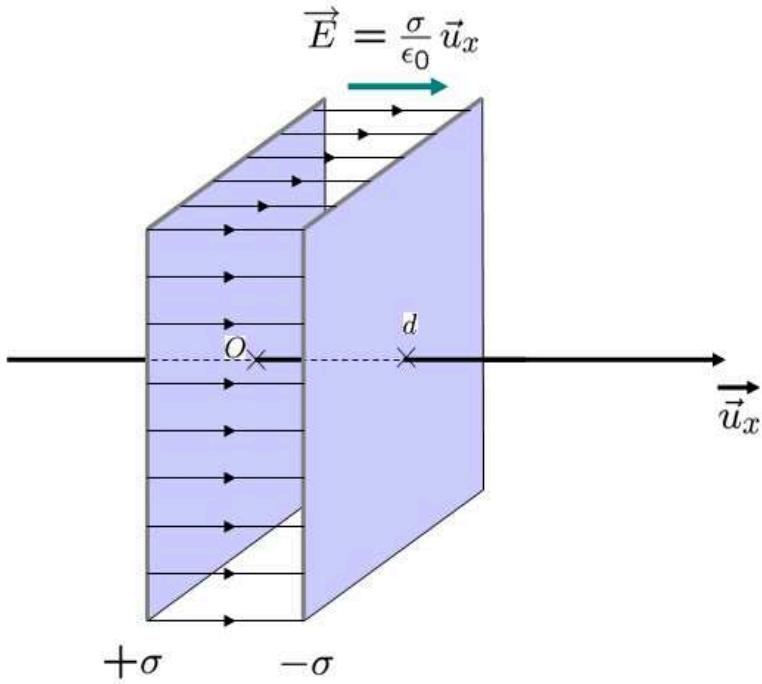
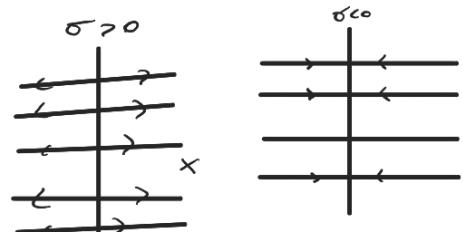


Figura 1.26: Campo elettrico dovuto a due distribuzioni piane, parallele, infinite, uniformi, con carica opposta.

$|\vec{E}|$ uniforme).

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & x < 0 \end{cases}. \quad (1.11.32)$$



Nel passare attraverso la distribuzione di carica, il campo ha una *discontinuità*:

$$\Delta \vec{E} = \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \right] \vec{u}_x = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \vec{u}_x. \quad (1.11.33)$$

Consideriamo due distribuzioni di carica su due piani paralleli, con carica opposta e densità uniforme $\pm\sigma$ ($\sigma > 0$), vedi Figura 1.26. Sia d la distanza tra i due piani e fissiamo come asse X l'asse perpendicolare ad entrambi, diretto dalla carica positiva alla carica negativa, ed avente origine O sul piano carico positivamente.

Denotiamo con \vec{E}_+ ed \vec{E}_- i campi associati a ciascuna distribuzione e determiniamo in ogni punto il campo totale:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \quad (1.11.34)$$

$$\vec{E}_+ = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & x < 0 \end{cases}; \quad \vec{E}_- = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & x > d \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x & x < d \end{cases},$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & x < 0; x > d \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 < x < d \end{cases} \quad (1.11.35)$$

Esercizio 1.11.6 Date tre cariche:

$$q_1 = 2 \times 10^{-8} C; q_2 = 3 \times 10^{-8} C; q_3 = -10^{-8} C, \quad (1.11.36)$$

disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $a = 1.2 \text{ cm}$, vedi Figura 1.27, determinare il vettore forza \vec{F}_2 agente sulla carica q_2 .

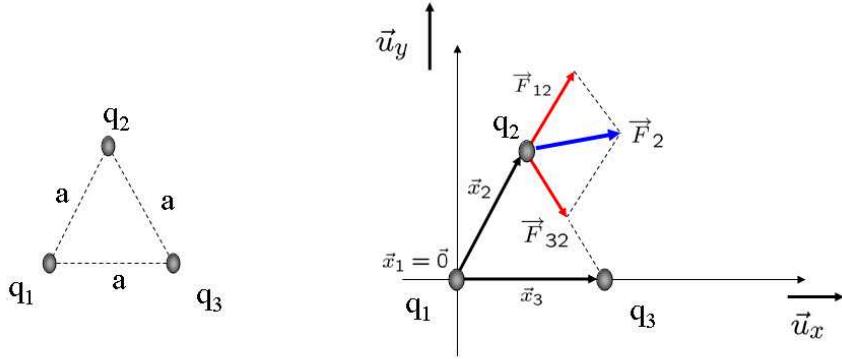


Figura 1.27: Esercizio 1.11.6.

Soluzione: riferiamoci ad un sistema di versori ortogonali \vec{u}_x, \vec{u}_y .

La forza risultante \vec{F}_2 è la somma delle forze esercitate su q_2 da q_1 e q_3 , rispettivamente \vec{F}_{12} , \vec{F}_{32} . Collochiamo q_1 nell'origine $\vec{x}_1 \equiv (0, 0, 0)$ e siano \vec{x}_2, \vec{x}_3 i vettori posizione di q_2 e q_3 .

$$\vec{x}_2 = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) \equiv \frac{a}{2} \vec{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} a \vec{u}_y, \quad (1.11.37)$$

$$\vec{x}_3 = (a, 0) \equiv a \vec{u}_x. \quad (1.11.38)$$

Scriviamo:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}, \quad (1.11.39)$$

ove:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{x}_2}{a^3}, \quad (1.11.40)$$

$$\vec{F}_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 q_2 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{a^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{a^2} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (1.11.41)$$

ove:

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_3 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a \right). \quad (1.11.42)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{a^3} [q_1 \vec{x}_2 + q_3 (\vec{x}_2 - \vec{x}_3)] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{a^3} \left[\left(q_1 \frac{a}{2}, q_1 \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) + \left(-q_3 \frac{a}{2}, q_3 \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{a^2} \left(\frac{q_1 - q_3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} (q_1 + q_3) \right) = \\ &\cong (0.028 N) \vec{u}_x + (0.016 N) \vec{u}_y. \end{aligned} \quad (1.11.43)$$

Esercizio 1.11.7 Sia data una bacchetta a forma di semicirconferenza di raggio R e centrata nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane come in Figura 1.28. Sulla bacchetta di spessore trascurabile è distribuita una carica q con densità lineare uniforme

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{cost.}$$

Determinare il campo elettrico in O .

Soluzione: La carica totale si può scrivere come

$$q = \int_{\text{barra}} dq = \int_{\text{barra}} \lambda dl = \lambda \pi R,$$

avendo pensato la barra suddivisa in infiniti elementi di lunghezza dl con carica $dq = \lambda dl$. Individuiamo il singolo elemento dl con l'angolo θ come in figura. Sia $d\vec{E}$ il contributo al campo \vec{E} della corrispondente carica dq . In termini di θ , $dl = R d\theta$, essendo $d\theta$ l'angolo sotteso a dl . Scriviamo $d\vec{E}$ in componenti cartesiane ortogonali:

$$d\vec{E} = dE_x \vec{u}_x + dE_y \vec{u}_y.$$

Sia \vec{R} il vettore che si origina in dl e termina in O e sia $R = |\vec{R}|$ il suo modulo. Il vettore \vec{R} si scrive, in componenti cartesiane,

$$\vec{R} = R \sin(\theta) \vec{u}_x - R \cos(\theta) \vec{u}_y.$$

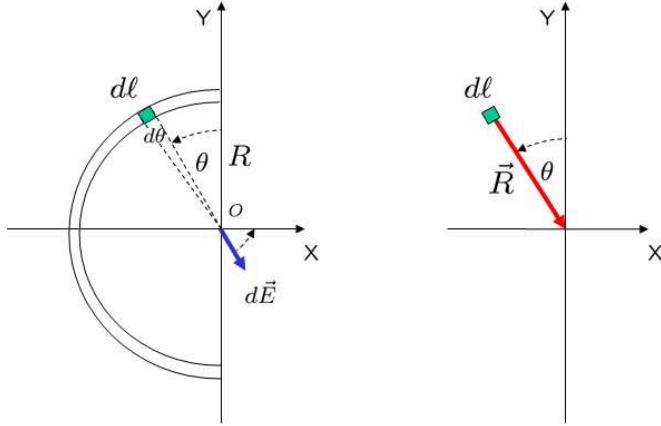


Figura 1.28: Esercizio 1.11.7.

Il campo $d\vec{E}$ dovuto a dq , in O , si scrive:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} (\sin(\theta) \vec{u}_x - \cos(\theta) \vec{u}_y).$$

Integrando questi contributi infinitesimi al variare dell'elementino lungo la sbarra, possiamo calcolare il campo totale \vec{E} in O :

$$\vec{E} = \int_{\text{barra}} d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\int_0^\pi \sin(\theta) \vec{u}_x - \int_0^\pi \cos(\theta) \vec{u}_y \right) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \vec{u}_x = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \pi R} \vec{u}_x.$$

Se $q = 5 \times 10^{-9} C$, $R = 20 cm$,

$$\vec{E} = 9 \times 10^9 \frac{2}{4\pi} 5 \times 10^{-9} \times 10^2 \vec{u}_x \approx 716.2 \left[\frac{N}{C} \right] \vec{u}_x$$

Esercizio 1.11.8 Una carica q è distribuita uniformemente su una bacchetta rettilinea di lunghezza L con densità lineare $\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{cost}$. Determinare il campo elettrico \vec{E} in un punto sul piano mediano distante x dalla sbarra.

Soluzione: Disponiamo la barra lungo l'asse Y in modo simmetrico rispetto all'origine e dividiamola in elementi infinitesimi dy con carica $dq = \lambda dy$:

$$q = \int_{\text{barra}} dq = \lambda L.$$

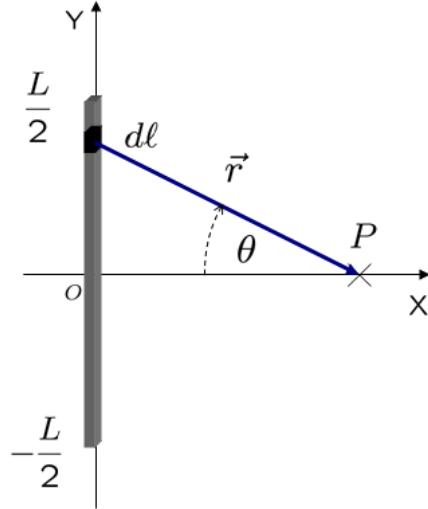


Figura 1.29: Esercizio 1.11.8.

Sia \vec{r} il vettore posizione del punto P rispetto a dy e θ l'angolo tra \vec{r} ed \vec{u}_x , orientato come in Figura 1.29. La posizione y di dy lungo la barra è $y = x \tan(\theta)$ così che, quando y varia da $-\frac{L}{2}$ ad $\frac{L}{2}$, θ varia da $-\theta_0 \rightarrow \theta_0$ con $\tan(\theta_0) = L/(2x)$. Possiamo scrivere

$$\vec{r} = -r \sin(\theta) \vec{u}_y + r \cos(\theta) \vec{u}_x .$$

Il contributo $d\vec{E}$, dovuto alla carica elementare dq , si scrive

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \frac{dy}{r^2} (-\sin(\theta) \vec{u}_y + \cos(\theta) \vec{u}_x) .$$

Conviene scrivere

$$r^2 = x^2 + y^2 , \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \quad \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Il contributo $d\vec{E}$ si riscrive nel seguente modo:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{u}_x - \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{u}_y \right] ;$$

Il campo \vec{E} in P si ottiene quindi integrando i contributi infinitesimi al variare dell'elementino di carica lungo la barra. Osserviamo che l'integrale della componente dE_y , per y che varia da

$-L/2$ a $L/2$, è nullo, per cui ad \vec{E} contribuiscono solo le componenti elementari dE_x lungo l'asse X:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\vec{E} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{u}_x = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{u}_x = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \vec{u}_x = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 x} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \vec{u}_x.\end{aligned}\quad (1.11.44)$$

Nel limite $x \gg L$, \vec{E} si approssima al campo dovuto ad una carica q puntiforme posta nell'origine:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} \vec{u}_x.$$

Se invece $L \rightarrow \infty$, ovvero consideriamo il limite $L \gg x$ in cui un osservatore in x vede la barra come un *filo rettilineo infinito*, troviamo

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \vec{u}_x.$$

In questo limite conviene introdurre un sistema di coordinate cilindriche con asse Z coincidente con il filo,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r},$$

essendo \vec{u}_r il versore della direzione perpendicolare all'asse Z uscente.

Capitolo 2

Lavoro ed energia potenziale

Abbiamo considerato finora interazioni di tipo elettrostatico. Possiamo generalizzare il concetto di forza elettrica come una forza che agisce su un oggetto in quanto portatore di carica elettrica. Forze elettriche non sono solo di tipo elettrostatico, ovvero esercitate da cariche fisse. In generale, una forza elettrica risulta sempre proporzionale alla carica q su cui agisce, per cui essa si può descrivere in termini di un campo elettrico \vec{E} indipendente da q :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (2.0.1)$$

La forza \vec{F} va quindi interpretata come azione del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ sulla carica q posta nel suo interno. A differenza di quello elettrostatico, un campo elettrico generico può dipendere anche dal tempo.

L'interazione elettrica comporta uno scambio di energia tra il campo elettrico \vec{E} e la carica su cui esso agisce. Questo scambio di energia è descritto in termini di lavoro compiuto dalla forza elettrica agente su una carica quando questa viene spostata all'interno di \vec{E} .

Consideriamo una carica q che viene spostata da un punto iniziale definito da \vec{x} ad un punto finale $\vec{x} + d\vec{l}$, essendo $d\vec{l}$ il vettore spostamento infinitesimo, sufficientemente piccolo da poter considerare il campo \vec{E} lungo esso, e quindi la forza \vec{F} agente su q , uniforme, vedi Figura 2.1.

Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonale:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{l} &= dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z, \\ \vec{F} &= F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y + F_z\vec{u}_z, \\ \vec{E} &= E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z, \\ \vec{E} &= \frac{\vec{F}}{q}. \end{aligned} \right. \quad (2.0.2)$$

Il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} lungo lo spostamento $d\vec{l}$ (vedi Figura 2.2)

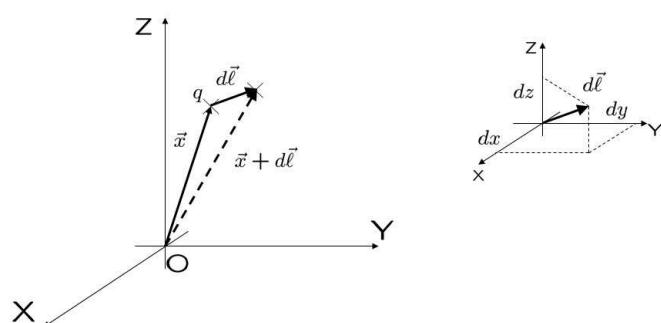


Figura 2.1: Spostamento infinitesimo $d\vec{l}$ in componenti Cartesiane ortogonali.

$$d\ell = \bar{x}^i - \bar{x} = (dx, dy, dz)$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\ell = |\vec{F}| |d\ell| \cos \theta = F_x dx + F_y dy + F_z dz = q \vec{E} \cdot d\ell. \quad (2.0.3)$$

Se la carica q viene spostata lungo un cammino di lunghezza finita da un punto iniziale P_1 ad un punto finale P_2 , conviene descrivere lo spostamento totale attraverso un cammino orientato, che denotiamo con $C_{P_1 \rightarrow P_2}$, definito dalla curva C seguita nello spostamento e da un verso di percorrenza che va da P_1 a P_2 , vedi Figura 2.2. Il campo \vec{E} e la forza \vec{F} su q non sono più uniformi lungo lo spostamento.

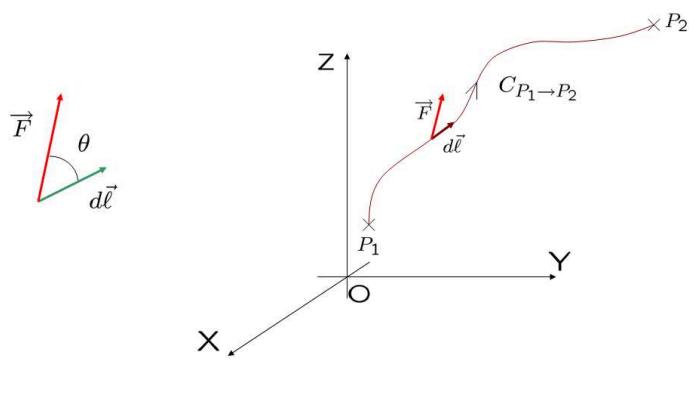


Figura 2.2: Lavoro elementare e lavoro lungo uno spostamento finito.

Il lavoro complessivo compiuto dalla forza \vec{F} su q , che denoteremo con $W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}$, si otterrà scomponendo il cammino in spostamenti infinitesimi $d\ell$, lungo i quali \vec{E} ed \vec{F} sono pressoché costanti e sommando i lavori elementari compiuti da \vec{F} su q lungo ciascun $d\ell$.

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\ell = q \vec{E} \cdot d\ell, \\ W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} &= \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} dW = \\ &= \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{F} \cdot d\ell = \\ &= q \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\ell. \end{aligned}$$

$W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}$, come $\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\ell$, sono esempi di integrali di cammino. Es-

si sono definiti specificando non solo la curva C lungo la quale sono calcolati, ma anche un verso di percorrenza su di essa, che fissa l'orientazione degli spostamenti elementari (nel nostro caso, il verso che va da P_1 a P_2).

Possiamo, in particolare, considerare il caso in cui P_1 e P_2 coincidono, ovvero il percorso orientato C è un cammino chiuso. In tal caso, il lavoro compiuto lungo questo percorso sulla carica q sarà dato dall'integrale di cammino (vedi Figura 2.3):

$$W_C = \oint_C \vec{F} \cdot d\ell = q \oint_C \vec{E} \cdot d\ell. \quad (2.0.4)$$

L'integrale di cammino di un campo vettoriale come \vec{E} lungo un percorso orientato chiuso è detto *circuitazione*. In particolare, la circuitazione del campo elettrico lungo un percorso chiuso C è detta “Forza

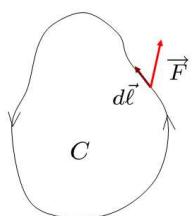


Figura 2.3: Spostamento lungo un cammino chiuso C .

elettromotrice): \mathcal{E} (\vec{F} elettromotrice) non è una forza
bisce guardare l'unità di misura

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\ell. \quad (2.0.5)$$

Consideriamo ora il caso in cui la forza elettrica non dipenda esplicitamente dal tempo ma solo dalla posizione della carica q su cui agisce. Anche il campo elettrico che la esercita sarà quindi indipendente dal tempo in ogni punto: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$. Immaginiamo di spostare la carica q da P_1 a P_2 lungo un percorso C e quindi di riportarla indietro da P_2 a P_1 lungo la stessa curva C . Il cammino orientato descritto al ritorno, che chiameremo $C_{P_2 \rightarrow P_1}$, avrà la stessa forma di quello iniziale $C_{P_1 \rightarrow P_2}$ ma verso di percorrenza opposto, vedi Figura 2.4.

Questo vuol dire che in uno stesso punto della curva C , gli spostamenti $d\vec{\ell}$ lungo $C_{P_1 \rightarrow P_2}$ e $d\vec{\ell}'$ lungo $C_{P_2 \rightarrow P_1}$ saranno uguali ed opposti:

$$d\vec{\ell}' = -d\vec{\ell}. \quad (2.0.6)$$

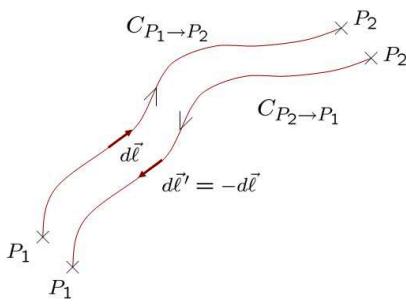


Figura 2.4: Spostamenti opposti.

Il lavoro compiuto da \vec{F} nel riportare indietro q da P_2 a P_1 sarà:

$$\begin{aligned} W_{C_{P_2 \rightarrow P_1}} &= \int_{C_{P_2 \rightarrow P_1}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}' = \\ &- \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}. \end{aligned}$$

Il lavoro compiuto dalla forza elettrica quando q viene spostato da P_1 a P_2 lungo C è uguale ed opposto al lavoro compiuto quando la carica compie il percorso inverso. Analogamente, per l'integrale di cammino di \vec{E} :

$$\int_{C_{P_2 \rightarrow P_1}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}' = - \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (2.0.7)$$

Una forza \vec{F} che dipende solo dalla posizione della particella su cui agisce è *conservativa* se e solo se il lavoro da essa compiuto sulla particella lungo uno spostamento dipende solo dal punto iniziale e finale, ma non dal particolare percorso seguito:

$$W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} = W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1 \rightarrow P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

POSSIAMO OMETTERE IL RIFERIMENTO
ALLA CURVA C LUNGO LA QUALE E' AVVENUTO LO SPOSTAMENTO

Se \vec{F} è conservativa, il lavoro da essa compiuto nello spostare la carica q da P_1 a P_2 , si può sempre scrivere come differenza del valore di una opportuna funzione del punto $U(\vec{x})$ tra la posizione iniziale e finale

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1 \rightarrow P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = U(P_1) - U(P_2). \quad (2.0.8)$$

Il motivo della differenza è che deve valere la proprietà:

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = -W_{P_2 \rightarrow P_1}. \quad (2.0.9)$$

La funzione $U(P)$ è detta *energia potenziale* della carica q nel campo \vec{E} .

Un campo vettoriale, come \vec{E} , è conservativo se e solo se il suo integrale di cammino lungo un percorso dipende solo dal punto iniziale e finale e non dal percorso seguito. Se quindi consideriamo due generici cammini che congiungono i medesimi punti P_1 e P_2 , come in figura 2.5, il campo \vec{E} è conservativo se e solo se:

$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\ell = \int_{C'_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\ell.$$

Essendo $\vec{F} = q\vec{E}$, se \vec{F} è conservativo, possiamo scrivere lungo due generici percorsi che congiungono i punti P_1 e P_2 :

$$\begin{aligned} \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\ell &= \frac{1}{q} \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{F} \cdot d\ell = \frac{1}{q} \int_{C'_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{F} \cdot d\ell = \\ &= \int_{C'_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\ell = \int_{P_1 \rightarrow P_2} \vec{E} \cdot d\ell, \end{aligned}$$

DATO CHE VALE PER UNA
QUALSIASI CURVA POSSO PASSARE AI PUNTI

e quindi anche \vec{E} è conservativo. In generale è immediato convincersi che \vec{F} è conservativo se e solo se \vec{E} lo è. Per quanto detto prima, possiamo introdurre una funzione del punto $V(P)$ in modo che, se \vec{E} è conservativo:

$$\int_{P_1 \rightarrow P_2} \vec{E} \cdot d\ell = V(P_1) - V(P_2).$$

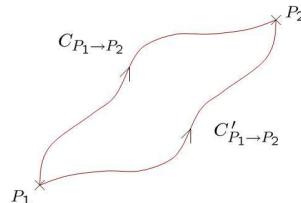


Figura 2.5: Due percorsi diversi che congiungono P_1 e P_2 .

$V(P)$ è un campo scalare, essendo definito in ogni punto dello spazio da un numero reale. Esso è detto “potenziale elettrico”. Se consideriamo il lavoro $W_{P_1 \rightarrow P_2}$ compiuto da una forza conservativa:

$$\begin{aligned} W_{P_1 \rightarrow P_2} &= U(P_1) - U(P_2) = \int_{P_1 \rightarrow P_2} \vec{F} \cdot d\ell = \\ &= q \int_{P_1 \rightarrow P_2} \vec{E} \cdot d\ell = q(V(P_1) - V(P_2)). \end{aligned}$$

Troviamo che l’energia potenziale U ed il campo potenziale elettrico V sono legati da:

$$U(P) = qV(P). \Rightarrow V(P) = \frac{U(P)}{q} \quad (2.0.10) \quad \text{ANALOGA} \quad F(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$$

Il potenziale elettrico ha quindi dimensione di un’energia diviso una carica e si misura del sistema internazionale in *Volt* (V) definito come: $1 \text{ V} = 1 \text{ Joule/C}$.

Proprietà: Un campo è conservativo se e solo se la sua circuitazione lungo un cammino chiuso è nulla.

Se la forza \vec{F} è conservativa, per definizione, il lavoro compiuto lungo uno spostamento dipende solo dai punti iniziali e finali e si esprime come differenza dei valori dell'energia potenziale tra i due punti. **Se il cammino descritto è chiuso, i punti iniziali e finali coincidono e quindi, dalla (2.0.8), concludiamo che il lavoro compiuto è nullo, essendo $U(P_1) = U(P_2)$.**

Viceversa si dimostra che se la circuitazione di \vec{F} lungo un qualsiasi cammino chiuso C è zero, \vec{F} è conservativo. Per farlo consideriamo due spostamenti generici $C_{P_1 \rightarrow P_2}$ e $C'_{P_1 \rightarrow P_2}$ che collegano P_1 a P_2 , come in Figura 2.6 b). La differenza dei lavori compiuti da \vec{F} lungo i due spostamenti si può scrivere come lavoro compiuto da \vec{F} lungo un cammino chiuso in Figura 2.6 a):

$$W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}(\vec{F}) - W_{C'_{P_1 \rightarrow P_2}}(\vec{F}) = W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}(\vec{F}) + W_{C'_{P_2 \rightarrow P_1}}(\vec{F}) = W_C(\vec{F}), \quad (2.0.11)$$

ove abbiamo di nuovo usato la proprietà $W_{C'_{P_2 \rightarrow P_1}} = -W_{C'_{P_1 \rightarrow P_2}}$. Essendo per ipotesi $W_C(\vec{F}) = 0$ lungo qualsiasi cammino chiuso C , concludiamo che

$$W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}(\vec{F}) = W_{C'_{P_1 \rightarrow P_2}}(\vec{F}), \quad (2.0.12)$$

ovvero che \vec{F} è conservativa. Quanto detto per una forza elettrica vale anche per il campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ ad essa associato. Vale quindi la proprietà che $\vec{E}(\vec{x})$ è conservativo se e solo se, per ogni percorso chiuso C :

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0. \quad (2.0.13)$$

Il campo potenziale $V(P)$ associato ad un campo \vec{E} conservativo, essendo definito attraverso la differenza dei suoi valori in due qualsiasi punti dello spazio, è determinato a meno di una costante additiva indipendente dal punto. Tale ambiguità è fissata una volta che sia scelto il valore del potenziale in un punto qualsiasi. Un modo per costruire $V(P)$ è quindi di fissare il valore di V in un qualsiasi punto P_0 in modo arbitrario:

$$V(P_0) = V_0, \quad (2.0.14)$$

e scrivere il valore di V in un punto P dello spazio come:

$$V(P) = V(P) - V(P_0) + V(P_0) = V_0 - \int_{P_0 \rightarrow P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (2.0.15)$$

Il campo $V(P)$ è ben definito, ovvero è unicamente definito in ogni punto (fissato il suo valore V_0 in P_0), poiché l'integrale $\int_{P_0 \rightarrow P} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, fissato il punto P_0 , dipende solo da P e non dal percorso lungo il quale è calcolato.

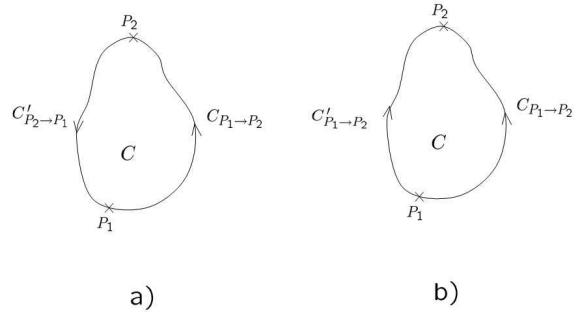


Figura 2.6: Lavoro compiuto lungo uno spostamento chiuso espresso come somma di due contributi

2.1 Il campo elettrostatico è conservativo

Mostriamo ora che il campo elettrostatico (che è solo un particolare tipo di campo elettrico), e quindi la forza elettrostatica, è conservativo.

Consideriamo un sistema di cariche puntiformi:

$$(q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (2.1.1)$$

ed una carica campione q_0 . La forza \vec{F} agente su q_0 è, come sappiamo, la somma delle forze \vec{F}_{i0} esercitate su q_0 dalle singole cariche q_i del sistema:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0}. \quad (2.1.2)$$

Analogamente, il campo elettrico \vec{E} nel punto occupato da q_0 è la somma dei campi elettrici dovuti a ciascuna carica:

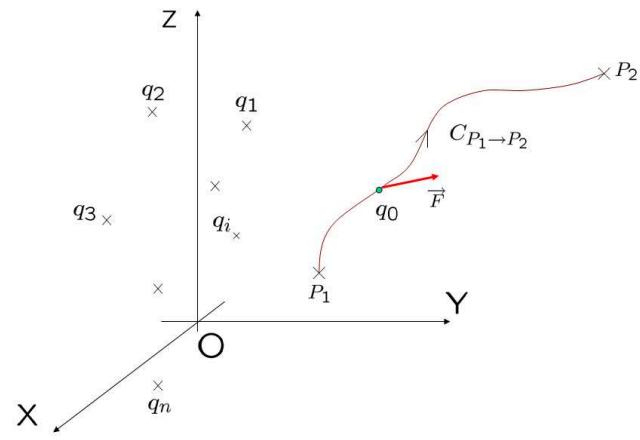


Figura 2.7: Lavoro compiuto dalla forza \vec{F} dovuta ad un sistema generico di cariche su una carica campione q_0 che viene spostata da P_1 a P_2 .

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (2.1.3)$$

Se si sposta q_0 lungo un percorso $C_{P_1 \rightarrow P_2}$, vedi Figura 2.7, il lavoro compiuto dalla forza complessiva su q_0 sarà:

LAVORO
DALLA FORZA RISULTANTE

$$W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} = \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{F} \cdot d\ell = \sum_{i=1}^n \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} ? \vec{F}_{i0} \cdot d\ell = \sum_{i=1}^n W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}^{(i)}.$$

Esso è la somma dei lavori $W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}^{(i)}$ compiuti dalle singole forze \vec{F}_{i0} . Se dimostriamo che $W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}^{(i)}$ non dipende dal percorso C seguito, ovvero che \vec{F}_{i0} dovuta a ciascuna carica puntiforme q_i è conservativa, avremo dimostrato che $W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}}^{(i)}$ non dipende da C . Analogamente:

$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\ell = \sum_{i=1}^n \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E}_i \cdot d\ell, \quad (2.1.4)$$

per cui se dimostriamo che \vec{E}_i è conservativo, seguirà che anche \vec{E} lo è.

Dimostriamo, quindi, che la forza elettrica \vec{F} esercitata da una singola carica puntiforme q su q_0 è conservativa. Calcoliamo a tale scopo il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} quando q_0 viene spostata da un punto P_1 ad un punto P_2 lungo una curva C . Per semplicità, consideriamo C giacente su un piano contenente q e descriviamo tale piano con un sistema di coordinate polari centrate su q : (r, θ) . Siano P_1 e P_2 di coordinate rispettivamente (r, θ_1) , (r, θ_2) .

È utile, a questo punto, esprimere uno spostamento infinitesimo $d\ell$ in coordinate polari. Consideriamo uno spostamento elementare $d\ell$ tra un punto $P(r, \theta)$ ed un punto $P'(r + dr, \theta + d\theta)$, vedi Figura 2.8.

Scomponiamo $d\ell$ lungo la direzione radiale uscente definita dal versore \vec{u}_r e la

direzione ad essa perpendicolare definita dal versore \vec{u}_θ diretto nel verso dell'angolo θ crescente. La componente di $d\ell$ lungo \vec{u}_r è dr , mentre la componente lungo \vec{u}_θ è approssimabile ad un arco di circonferenza di raggio r a cui è sotteso l'angolo $d\theta$, ovvero vale $rd\theta$. Possiamo, quindi, scrivere:

$$d\ell = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta. \quad (2.1.5)$$

Il campo elettrico generato da q è:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r, \quad (2.1.6)$$

e la forza su q_0 vale:

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \vec{u}_r. \quad (2.1.7)$$

Il lavoro lungo $C_{P_1 \rightarrow P_2}$ ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} &= \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \vec{u}_r \right) \cdot (dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta) = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} dr \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

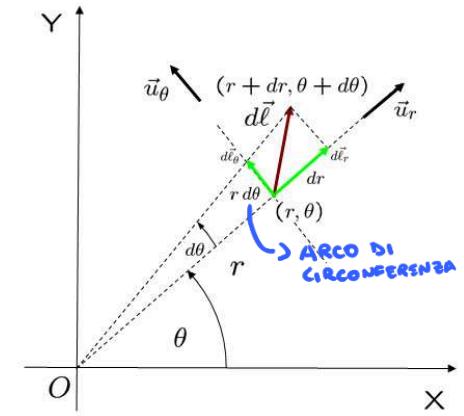


Figura 2.8: Spostamento piano descritto in coordinate polari.

Il lavoro, quindi, non dipende dal particolare percorso seguito, poiché lungo ogni spostamento elementare, la forza è sempre perpendicolare alla componente angolare dello spostamento e quindi al lavoro contribuiscono solo le componenti radiali dei singoli spostamenti, che sono

le stesse qualunque sia il percorso C seguito. $W_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} = W_{P_1 \rightarrow P_2}$ si esprime in termini di una energia potenziale $U(r)$, associata alla coppia di cariche q, q_0 e che dipende solo dalla loro distanza.

$$\begin{aligned} W_{P_1 \rightarrow P_2} &= U(r_1) - U(r_2), \\ U(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r} + \text{cost.} = q_0 V(r), \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{cost.} . \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Il campo scalare $V(r)$ è anch'esso dipendente dalla sola distanza del punto in cui esso è calcolato dalla carica sorgente q . Esso permette di calcolare gli integrali di cammino del campo elettrico \vec{E} :

$$\int_{P_1 \rightarrow P_2} \vec{E} \cdot d\ell = V(P_1) - V(P_2). \quad (2.1.10)$$

La forza o il campo elettrostatico associato ad una singola carica puntiforme è conservativo e, quindi, per quanto detto sopra, lo sarà in generale la forza elettrostatica dovuta ad un generico sistema di cariche. Nel caso di un sistema di cariche puntiformi $(q_i) = (q_1, \dots, q_n)$, il potenziale $V(\vec{x})$ complessivo, nel punto \vec{x} , sarà la somma dei potenziali $V_i(\vec{x})$ associati a ciascuna carica q_i :

$$V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n V_i(\vec{x}). \quad (2.1.11)$$

La costante (non fisica) nella definizione di U e di V viene tipicamente fissata richiedendo che l'energia potenziale di due cariche, nella configurazione in cui queste non sono interagenti, ovvero quando sono poste a distanza infinita, sia nullo:

$$\begin{aligned} 0 = U(r \rightarrow \infty) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r} + \text{cost.} = \text{cost.} \\ &\Downarrow \\ U(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r} ; \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$U(r)$ rappresenta il lavoro compiuto dalle forze elettriche quando le due cariche sono portate dalla distanza r a distanza infinita:

$$U(r) = U(r) - U(r \rightarrow \infty) = W_{(r \rightarrow \infty)}. \quad (2.1.13)$$

CARICHE LIBERE DI MUOVERSI Consideriamo un sistema di cariche $(q_i) = (q_1, \dots, q_n)$, la cui configurazione spaziale è definita, in un certo istante, dal valore delle loro distanze relative. Chiamiamo r_{ij} la distanza tra due generiche cariche q_i, q_j (vedi Figura 2.9). Sappiamo che alla coppia (q_i, q_j) è associata una energia potenziale:

$$U_{ij}(r_{ij}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} . \quad (2.1.14)$$

La configurazione del sistema di cariche (q_i) è definita dalle loro distanze relative:

$$\{r_{ij}\} = \{r_{12}, r_{13}, \dots, r_{n-1 n}\} .$$

Se il sistema di cariche evolve nello spazio e passa da una configurazione $\{r_{ij}\}$ iniziale, ad una finale $\{r'_{ij}\}$, essendo le forze elettriche conservative, ci aspettiamo che il lavoro compiuto dalle forze di interazione elettrostatiche dipenda solo dalle configurazioni iniziali e finali. Possiamo quindi definire una energia potenziale

$$U(\{r_{ij}\}) = U(r_{12}, r_{13}, \dots, r_{n-1 n}),$$

del sistema di cariche, funzione della solo loro configurazione spaziale, in modo che il lavoro W compiuto dalle forze di interazione nel passare da $\{r_{ij}\}$ a $\{r'_{ij}\}$, vedi Figura 2.10, si possa esprimere nel seguente modo:

$$W = U(\{r_{ij}\}) - U(\{r'_{ij}\}) . \quad (2.1.15)$$

Fissiamo la costante arbitraria nella definizione di U in modo che U sia zero nella configurazione in cui le cariche non sono interagenti, ovvero sono a distanza infinita ($r_{ij} \rightarrow \infty$) l'una dall'altra:

$$U(\{r_{ij} \rightarrow \infty\}) \equiv 0 . \quad (2.1.16)$$

In questo modo $U(\{r_{ij}\})$, calcolato su una certa configurazione $\{r_{ij}\}$, misura il lavoro che le forze elettrostatiche compirebbero se a partire da questa configurazione, le cariche venissero portate a distanza relativa infinita. Questo lavoro, sappiamo, non dipende dal modo in cui le cariche sono portate all'infinito, per cui possiamo calcolarlo portando una per volta le cariche del sistema all'infinito.

Consideriamo come esempio un sistema di tre cariche q_1, q_2, q_3 e siano $\{r_{ij}\} = \{r_{12}, r_{13}, r_{23}\}$ le loro distanze relative, vedi Figura 2.11. Iniziamo con il portare la carica q_2 all'infinito. Su q_2 agiscono le forze \vec{F}_{12} ed \vec{F}_{32} dovute alle cariche q_1 e q_3 . Il lavoro complessivo è la somma dei lavori compiuti da \vec{F}_{12} ed \vec{F}_{32} quando q_2 è portata all'infinito, ovvero quando r_{12} ed r_{32} sono portate all'infinito. Esso è quindi esprimibile come la somma delle energie potenziali associate alle coppie (q_1, q_2) e (q_3, q_2) :

$$U_{12}(r_{12}) + U_{23}(r_{23}) . \quad (2.1.17)$$

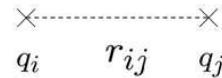


Figura 2.9: Coppia di cariche q_i, q_j a distanza r_{ij} .

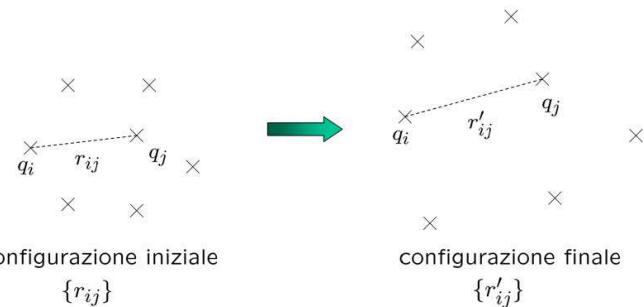


Figura 2.10: Evoluzione di un sistema di cariche puntiformi da una configurazione iniziale ad una finale.

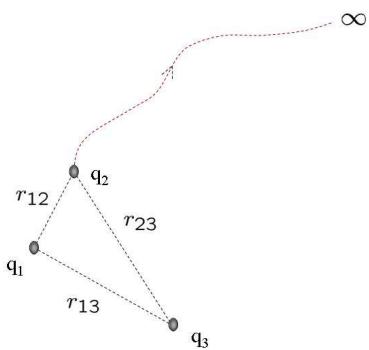


Figura 2.11: Sistema di tre cariche di cui una (q_2) viene portata a distanza infinita dalle altre due.

Una volta portata q_2 all'infinito, rimane la coppia (q_1, q_3) . Il lavoro totale compiuto dalle forze di interazione quando una per una le tre cariche sono portate all'infinito a partire dalla configurazione $\{r_{ij}\}$, dà il valore dell'energia potenziale $U(\{r_{ij}\}) = U(r_{12}, r_{13}, r_{23})$ del sistema nella configurazione $\{r_{ij}\}$ ed è quindi espresso dalla somma delle energie potenziali associate a ciascuna coppia q_i, q_j del sistema:

$$\begin{aligned} U(\{r_{ij}\}) &= U(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = \\ &= U_{12}(r_{12}) + U_{13}(r_{13}) + U_{23}(r_{23}) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) . \end{aligned}$$

In generale, per un sistema di n cariche vale la stessa regola: l'energia potenziale totale è data dalla somma delle energie potenziali di ciascuna coppia di cariche del sistema:

$$U(\{r_{ij}\}) = U_{12}(r_{12}) + U_{13}(r_{13}) + \dots + U_{n-1,n}(r_{n-1,n}) = \sum_{i < j} U_{ij}(r_{ij}) . \quad (2.1.18)$$

2.2 Conservazione dell'energia totale

Sia dato un sistema di cariche isolate, ovvero supponiamo che esse non siano soggette ad altra forza al di fuori della reciproca forza elettrostatica. Siano m_1, m_2, \dots, m_n le loro masse, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ le loro velocità e q_1, q_2, \dots, q_n le loro cariche. Supponiamo che esse evolvano nel tempo, da una configurazione iniziale al tempo t_1 , $\{r_{ij}; t_1\}$ ad una configurazione finale al tempo $t_2 > t_1$, $\{r_{ij}; t_2\}$. La variazione dell'energia cinetica totale E_k del sistema

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |\vec{v}_i|^2 , \quad (2.2.1)$$

è data dal lavoro compiuto dalle forze elettriche di interazione $W_{t_1 \rightarrow t_2}$:

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = E_k(t_2) - E_k(t_1) . \quad (2.2.2)$$

Questo lavoro si può esprimere come variazione dell'energia potenziale $U(\{r_{ij}\})$ del sistema, ovvero:

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = U(\{r_{ij}; t_1\}) - U(\{r_{ij}; t_2\}) . \quad (2.2.3)$$

Uguagliando i secondi membri delle due equazioni per $W_{t_1 \rightarrow t_2}$, deduciamo la legge di conservazione dell'energia meccanica totale:

$$E = E_k + U(\{r_{ij}\}) , \quad (2.2.4)$$

ovvero:

$$E(t_1) = E(t_2) , \quad (2.2.5)$$

qualsiasi siano t_1 e t_2 .

2.3 Potenziale elettrostatico ed energia potenziale come gradiente

La relazione fin qui studiata tra U ed \vec{F} o tra V ed \vec{E} è di tipo *non locale*. Il valore dell'energia potenziale U di una carica q in un campo \vec{E} , è espresso in termini dei valori di \vec{F} lungo tutta una traiettoria:

$$U(P) = U(P_0) - \int_{P_0 \rightarrow P} \vec{F} \cdot d\ell . \quad (2.3.1)$$

Analogamente, per V :

$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0 \rightarrow P} \vec{E} \cdot d\ell . \quad (2.3.2)$$

Vogliamo definire una relazione tra V ed \vec{E} , o equivalentemente tra U ed \vec{F} , che sia *locale*, ovvero che coinvolga l'andamento di queste quantità in un intorno comunque piccolo di ogni punto. Per farlo, introduciamo il concetto di *gradiente* di un campo scalare generico $\phi(\vec{x}) = \phi(x, y, z)$. Consideriamo due punti molto vicini $P(x, y, z)$ e $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ collegati da uno spostamento infinitesimo:

$$d\ell = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z . \quad (2.3.3)$$

La differenza dei valori di ϕ in P' e P è, per il *teorema del differenziale totale*, approssimabile con il differenziale $d\phi$ di ϕ (qui assumiamo, naturalmente, che ϕ ammetta derivate parziali in P e che queste siano continue), definito come:

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz , \quad d\phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) \quad (2.3.4)$$

e quindi possiamo scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\vec{x} + d\ell) - \phi(\vec{x}) = \phi(x + dx, y + dy, z + dz) - \phi(x, y, z) \simeq \\ \simeq d\phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz . \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

Definiamo il *gradiente* di $\phi(\vec{x})$ il campo vettoriale, che indichiamo con $\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, tale che:

$$d\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot d\ell , \quad (2.3.6)$$

e quindi:

$$\phi(\vec{x} + d\ell) - \phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot d\ell . \quad \text{teorema del differenziale totale} \quad (2.3.7)$$

Dall'espressione di $d\ell$ e di $d\phi(\vec{x})$ deduciamo che, in coordinate cartesiane, il gradiente è definito come il campo vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z \equiv \\ &\equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Il gradiente è un vettore che attraverso la sua direzione e verso ci indica dove le funz cresce

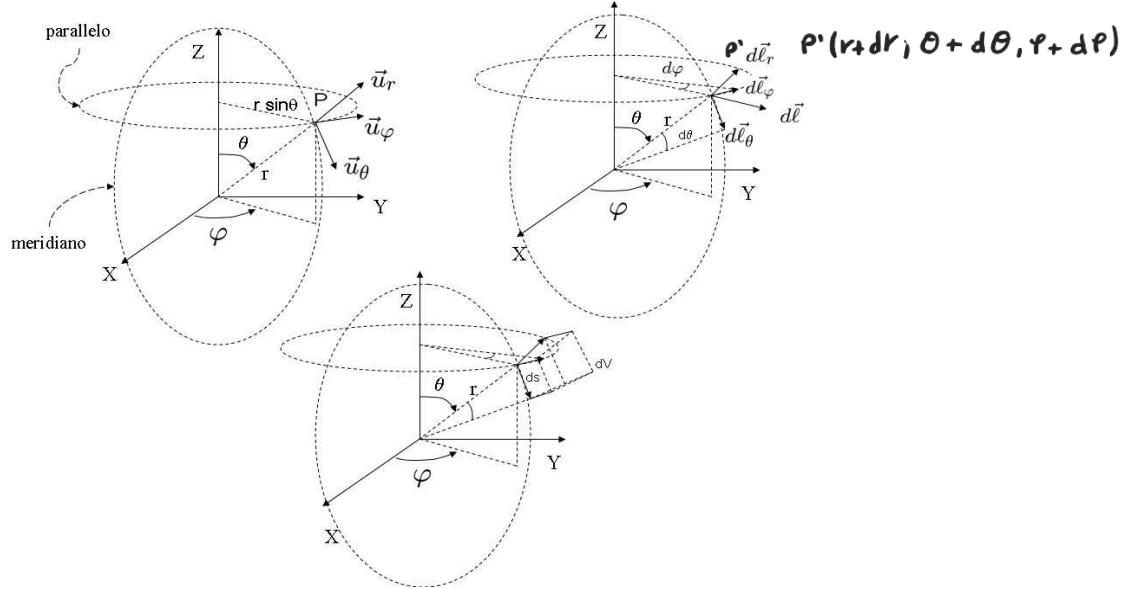


Figura 2.12: Sistema di coordinate polari sferiche.

La sua forma in coordinate polari è diversa. Per esempio, in coordinate polari bidimensionali:

$$\begin{aligned} \phi(r + dr, \theta + d\theta) - \phi(r, \theta) &\simeq d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \\ &= \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l}, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

ma $d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$, per cui:

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right). \quad (2.3.10)$$

Consideriamo, infine, coordinate polari tridimensionali (vedi Figura 2.12). Ad ogni punto $P(r, \theta, \varphi)$ possiamo associare una terna di versori ortonormali $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$, ove \vec{u}_r definisce la direzione radiale uscente, \vec{u}_θ la direzione tangente al meridiano per P nel verso di θ crescente ed \vec{u}_φ la direzione tangente al parallelo per P nel verso di φ crescente. Se prendiamo uno spostamento $d\vec{l}$ che collega il punto $P(r, \theta, \varphi)$ al punto $P'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$, la componente di $d\vec{l}$ lungo \vec{u}_r è pari a dr , la componente lungo \vec{u}_θ è approssimabile all'arco di circonferenza di raggio r a cui è sotteso l'angolo $d\theta$, ovvero è pari ad $rd\theta$ ed infine la componente lungo \vec{u}_φ è approssimabile all'arco di circonferenza di raggio $r \sin \theta$, sotteso all'angolo $d\varphi$, ovvero è pari ad $r \sin \theta d\varphi$. Troviamo, quindi, che:

$$d\vec{l} = d\vec{l}_r + d\vec{l}_\theta + d\vec{l}_\varphi = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi. \quad (2.3.11)$$

È utile a questo punto descrivere elementi infinitesimi di superficie e volume in coordinate polari. Un elemento infinitesimo di superficie dS su una sfera di raggio r , e.g. la sfera

che passa per P in Figura 2.12, possiamo pensarla come racchiuso da un rettangolo di lati $\ell_\theta, \ell_\varphi$, mentre definiamo un elemento di volume infinitesimo dV come quello racchiuso da un parallelepipedo di lati $\ell_r, \ell_\theta, \ell_\varphi$. Avremo quindi che:

$$dS = \ell_\theta \ell_\varphi = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi, \quad dV = \ell_r \ell_\theta \ell_\varphi = r^3 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi. \quad (2.3.12)$$

Possiamo ora derivare la forma del gradiente:

$$\begin{aligned}
 \phi(P') - \phi(P) &= \phi(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi) - \phi(r, \theta, \varphi) \simeq \\
 \text{Campo vettoriale} &\simeq d\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi = \\
 \text{conservativo} &= * \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{dl} \rightarrow \text{spostamento infinitesimo} \\
 \text{(funzione)} &\Downarrow \text{gradiente} \\
 &\Downarrow \text{com} \quad \vec{dl} = \vec{PP'} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + \\
 \vec{\nabla} \phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \equiv \\
 &\equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right). \quad (2.3.13)
 \end{aligned}$$

Il gradiente è, quindi, un campo vettoriale associato al campo scalare $\phi(\vec{x})$ che dà informazione su quanto rapidamente $\phi(\vec{x})$ varia nelle diverse direzioni nell'intorno di un certo punto. Più precisamente il gradiente di un campo scalare $\phi(\vec{x})$ in un punto \vec{x} è un vettore $\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$ che indica la direzione ed il verso in cui $\phi(\vec{x})$ aumenta più rapidamente.

Esempio. Calcoliamo il gradiente del campo $\phi(\vec{x})$ che associa ad ogni punto la sua distanza r dall'origine:

$$\phi(\vec{x}) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.3.14)$$

Calcolando le derivate parziali di questa funzione rispetto alle coordinate x, y, z troviamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{z}{r}, \quad (2.3.15)$$

e quindi il gradiente di r vale:

$$\vec{\nabla} r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{r} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{\vec{x}}{r} = \vec{u}_r. \quad (2.3.16)$$

Questo risultato è consistente con l'interpretazione data sopra del gradiente. Infatti il versore radiale indica in ogni punto la direzione ed il verso in cui la distanza r dall'origine aumenta più rapidamente.

Torniamo al problema di formulare in modo *locale* la relazione tra U ed \vec{F} o tra V ed \vec{E} . Se spostiamo una carica q all'interno di un campo conservativo \vec{E} di uno spostamento infinitesimo \vec{dl} da un punto $P(\vec{x})$ a $P'(\vec{x} + \vec{dl})$, il lavoro compiuto da \vec{F} è:

$$\begin{aligned}
 dW &= \vec{F} \cdot \vec{dl} = U(P) - U(P') = U(\vec{x}) - U(\vec{x} + \vec{dl}) \simeq \\
 &\simeq -dU(\vec{x}) \equiv -\vec{\nabla} U \cdot \vec{dl}.
 \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Questo vale per ogni spostamento $d\ell$, e quindi possiamo scrivere:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad . \quad (2.3.18)$$

L'analoga relazione vale tra V ed \vec{E} :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad . \quad (2.3.19)$$

Da questa relazione e dalla caratterizzazione del gradiente data sopra possiamo dire che un campo elettrico conservativo è diretto in ogni punto nella direzione e verso in cui il potenziale elettrico *diminuisce* più rapidamente.

Per esempio, in componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} ; \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} ; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} ; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad . \quad (2.3.20)$$

Queste relazioni sono locali, ovvero valgono punto per punto e permettono, nelle regioni in cui \vec{F} o \vec{E} sono continui e quindi U e V ammettono derivate parziali, di determinare U e V in termini di \vec{F} ed \vec{E} . Nel determinare $V(\vec{x})$, la condizione da imporre è che $V(\vec{x})$ sia *continua in tutto lo spazio*.

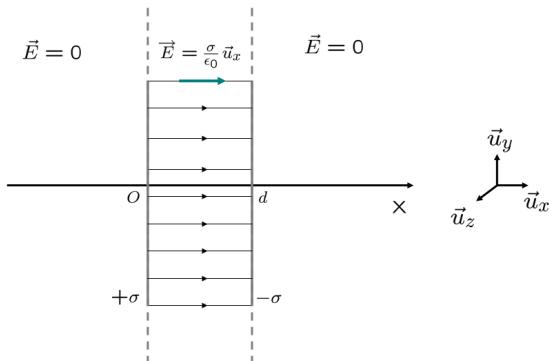


Figura 2.13: Campo generato da due distribuzioni piane uniformi di carica, infinite e parallele.

Consideriamo come esempio il potenziale V associato al campo \vec{E} prodotto da due distribuzioni piane uniformi, indefinite di carica su due piani paralleli a distanza d , con densità superficiale $+\sigma, -\sigma$ ($\sigma > 0$) rispettivamente, vedi Figura 2.13. Sappiamo che:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x & 0 < x < d \\ 0 & \begin{cases} x < 0 \\ x > d \end{cases} \end{cases} .$$

Dividiamo lo spazio nelle tre regioni all'interno delle quali \vec{E} è continuo: I ($x < 0$); II ($0 < x < d$); III ($x > d$). Risolviamo il sistema di equazioni:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad ,$$

nelle tre regioni separatamente:

$$(I) \quad \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow V = V_0^{(I)} = \text{cost.}$$

$$(II) \quad \vec{E} = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}, 0, 0 \right) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad V = V^{(II)}(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x + V_0^{(II)} \text{ (è funzione della sola } x \text{)}$$

essendo $V_0^{(II)}$ una costante

$$(III) \quad \vec{E} \equiv 0 \Rightarrow V = V_0^{(III)} = \text{cost.} \quad (2.3.21)$$

Richiediamo adesso che $V(\vec{x})$ sia *continua* in $x = 0$ ed $x = d$:

$$\begin{aligned} V(x=0^-) &= V(x=0^+) \iff V_0^{(I)} = V_0^{(II)} = V_0 \\ V(x=d^-) &= V(x=d^+) \iff -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d + V_0 = V_0^{(III)} . \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Il potenziale elettrico $V(\vec{x})$ è, quindi, una funzione della sola x e vale:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x + V_0 & 0 < x < d \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d + V_0 & x > d . \end{cases} \quad (2.3.23)$$

Esso è rappresentato graficamente in Figura 2.14. Osserviamo che, dopo aver imposto la condizione di continuità, la soluzione finale $V(\vec{x})$ dipende da *una sola* costante arbitraria.

Possiamo adesso dare una caratterizzazione *locale* di un campo \vec{E} conservativo. Mostriamo che le seguenti due posizioni sono equivalenti:

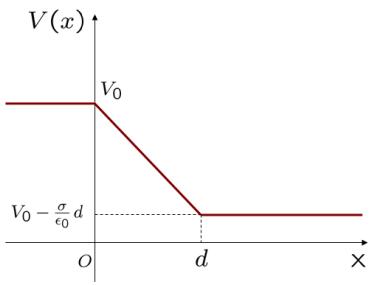


Figura 2.14: Andamento del potenziale elettrico $V(x)$.

1) $\vec{E}(\vec{x})$ è conservativo.
2) Esiste un campo scalare $V(\vec{x})$ per cui:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V .$$

1) \Rightarrow 2) è stato già dimostrato quando abbiamo scritto:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(\vec{x}) - V(\vec{x} + d\vec{\ell}) \simeq -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} , \quad (2.3.24)$$

per ogni $d\vec{\ell}$.

2) \Rightarrow 1) Consideriamo uno spostamento $C_{P_1 \rightarrow P_2}$ da P_1 a P_2 lungo una curva C e calcoliamo l'integrale:

$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} (-\vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell}) = \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} (V(\vec{x}) - V(\vec{x} + d\vec{\ell})) , \quad (2.3.25)$$

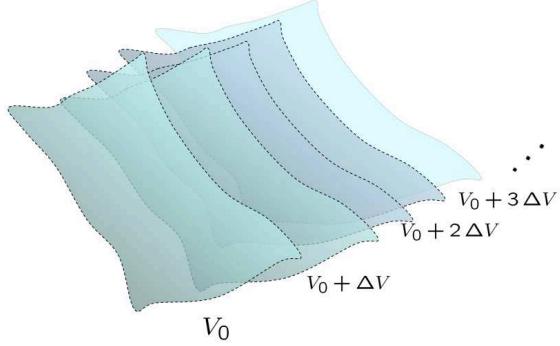


Figura 2.15: Successione di superfici equipotenziali, tracciate in modo tale che la differenza di potenziale tra due successive sia costante e pari a ΔV .

ove abbiamo usato la proprietà $\vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} = dV = V(\vec{x} + d\vec{\ell}) - V(\vec{x})$. L'integrale è la somma delle variazioni di V su ciascun intervallino infinitesimo $d\vec{\ell}$ e quindi il risultato è la differenza dei valori di V tra gli estremi P_1 e P_2 :

$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(P_1) - V(P_2) , \quad (2.3.26)$$

e, quindi, non dipende dal particolare percorso C , ovvero il campo \vec{E} è conservativo.

Da quanto detto sopra, deduciamo una importante proprietà del gradiente di un campo scalare: essendo esso un campo conservativo, la sua circuitazione lungo un qualsiasi percorso chiuso C è nulla:

$$\oint_c \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} = 0 . \quad (2.3.27)$$

È utile descrivere l'andamento di $V(\vec{x})$ nello spazio attraverso *superficie equipotenziali* ovvero luoghi di punti su cui $V(\vec{x})$ è costante. Una superficie equipotenziale è quindi definita dall'equazione:

$$V(\vec{x}) = V_0 , \quad (2.3.28)$$

essendo V_0 il valore del potenziale sulla superficie. Il campo $V(\vec{x})$ è descritto tracciando diverse superfici equipotenziali al variare di V_0 , con la convenzione che la differenza di potenziale tra una superficie e la successiva sia costante, vedi Figura 2.15. Prendiamo, ad esempio, il potenziale dovuto ad una carica puntiforme q in coordinate polari:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} .$$

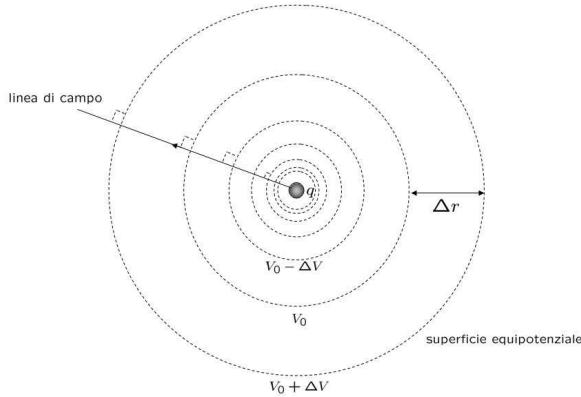


Figura 2.16: Superfici equipotenziali associate al potenziale elettrico di una carica puntiforme positiva.

Le superfici equipotenziali sono sfere centrate in q di raggio r_0 funzione di V_0 :

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0} = V_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow r_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{V_0}. \end{aligned}$$

La distanza tra due superfici successive con potenziale V_0 e $V_0 + \Delta V$ (ΔV indipendente da r) è data da:

$$V(r - \Delta r) - V(r) = \Delta V, \quad (2.3.29)$$

da cui deduciamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r - \Delta r} - \frac{1}{r} &= \frac{4\pi\epsilon_0}{q} \Delta V = cost. \\ \Downarrow \\ \Delta r &= \frac{cost. \times r^2}{1 + cost. \times r}, \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

e quindi al diminuire di r si riduce la distanza tra due superfici successive.¹ In generale si dimostra che le superfici equipotenziali si addensano nelle regioni in cui il campo \vec{E} è più intenso,
vedi Figura 2.16.

¹Lo studente può verificare che la costante $cost.$ nella espressione di Δr vale $\frac{4\pi\epsilon_0\Delta V}{q}$ ed è sempre positiva. Infatti se $q > 0$ il potenziale diminuisce all'aumentare di r e quindi anche ΔV , differenza tra $V(r - \Delta r)$ e $V(r)$, è positivo. Analogamente, se $q < 0$, $\Delta V < 0$.

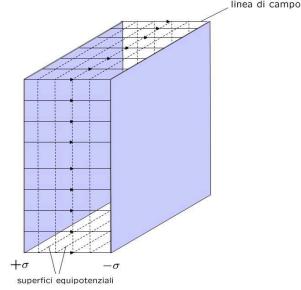


Figura 2.17: Superfici equipotenziali associate a distribuzioni piane parallele infinite di cariche uguali e opposte.

I piani sono, quindi, equidistanti.

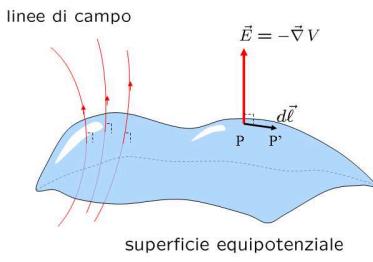


Figura 2.18: Un campo elettrico conservativo (gradiente del campo potenziale ad esso associato) è perpendicolare alle superfici equipotenziali in ogni punto.

come il differenziale di V in P :

LO POTENZIALE ELETTRICO

$$V(P) - V(P') = -dV = -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot d\vec{l} .$$

Da questo concludiamo che $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, ovvero che il campo \vec{E} è perpendicolare ad una qualsiasi direzione tangente alla superficie in P , ovvero è *normale* alla superficie in P . Di conseguenza, le linee di campo sono sempre perpendicolari alle superfici equipotenziali, vedi Figura 2.18.

Se consideriamo due distribuzioni piane indefinite e parallele, di cariche con densità uniforme $\pm\sigma$ ($\sigma > 0$), vedi Figura 2.17, al di fuori dei due piani carichi, V è uniforme, e quindi non è descritto da alcuna superficie equipotenziale. Tra i due piani, invece, ogni superficie è un piano parallelo ai due piani carichi e definito da un'ascissa x_0 legata al corrispondente potenziale da:

$$-\frac{\sigma}{\epsilon_0} x_0 = V_0, \quad \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta x = \Delta V . \quad (2.3.31)$$

Il campo elettrico \vec{E} è sempre normale ad una superficie equipotenziale in ogni suo punto. Prendiamo un punto P su una superficie equipotenziale e consideriamo uno spostamento $d\vec{l}$ infinitesimo a partire da P lungo una direzione tangente alla superficie in P . Essendo $d\vec{l}$ infinitesimo, possiamo considerare anche il punto di arrivo P' (infinitamente vicino a P), giacente sulla stessa superficie equipotenziale, ovvero:

$$V(P') = V(P) , \quad (2.3.32)$$

ma la differenza $V(P) - V(P')$ si può scrivere

2.3.1 Proprietà del gradiente

Lo studente può verificare, usando le proprietà delle derivate parziali, che per il gradiente vale la regola di Leibniz:

$$\vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla}(f)g + f\vec{\nabla}(g) , \quad (2.3.33)$$

ove $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ sono due funzioni qualsiasi.

Esercizio. Si calcoli il seguente gradiente:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right), \quad (2.3.34)$$

ove $\vec{x} = (x, y, z)$ e $\vec{x}' = (x', y', z')$. Le derivate parziali nella definizione del gradiente vanno pensate agire solo sulle coordinate x, y, z , per cui le coordinate x', y', z' vanno considerate, nel calcolo, delle costanti.

Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali della funzione considerata:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right) = \\ &= -\frac{(x - x')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(x - x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) &= -\frac{(y - y')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) &= -\frac{(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \end{aligned}$$

Da queste espressioni deriviamo l'espressione cercata del gradiente:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) &= - \left(\frac{(x - x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \frac{(y - y')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \frac{(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} (x - x', y - y', z - z') = \\ &= -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Usiamo questo risultato per verificare che del gradiente del potenziale elettrico generato da una carica puntiforme q localizzata nel punto \vec{x}' , con il segno meno, coincide con l'espressione nota del campo elettrostatico generato dalla carica stessa:

$$-\vec{\nabla} V(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{E}(\vec{x}). \quad (2.3.36)$$

Scegliendo $\vec{x}' = \vec{0}$ il risultato (2.3.35) si scrive nel seguente modo:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}. \quad (2.3.37)$$

2.4 Campo conservativo come campo irrotazionale

Introduciamo adesso due nuovi concetti matematici importanti che utilizzeremo ampiamente durante questo corso: il flusso ed il rotore di un campo vettoriale. Consideriamo una superficie dS infinitesima nell'intorno di un punto P e sia \vec{n} un versore normale a dS , vedi Figura 2.19. Sia $\vec{V}(\vec{x})$ un campo vettoriale. Definiamo il flusso di $\vec{V}(\vec{x})$ attraverso dS la quantità:

$$d\Phi = \vec{V}(P) \cdot \vec{n} dS = |\vec{V}(P)| \cos \theta dS .$$

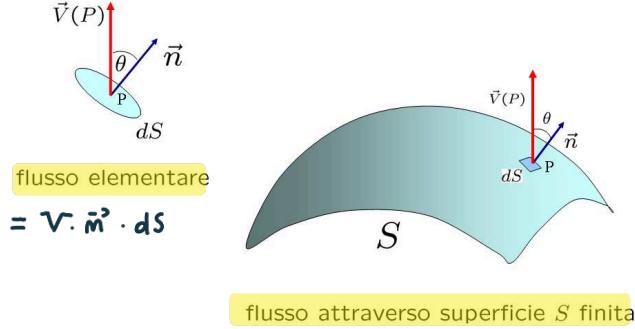


Figura 2.19: Flusso di un campo vettoriale $\vec{V}(P)$ attraverso una superficie infinitesima dS e attraverso una superficie finita S .

Data una superficie S orientata, ovvero su cui è definito un versore normale \vec{n} in ogni punto, possiamo dividerlo in elementi di superficie infinitesimi dS e per ciascuno di essi calcolare il flusso $d\Phi$ del campo \vec{V} , vedi Figura 2.19. Definiamo il flusso di \vec{V} attraverso S , e lo indichiamo con $\Phi_S(\vec{V})$, la somma dei flussi $d\Phi$ di \vec{V} attraverso ciascun elemento dS di superficie:

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{V}) &= \int_S d\Phi = \int_S \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS = \\ &= \int_S |\vec{V}(\vec{x})| \cos(\theta(\vec{x})) dS . \Rightarrow \text{Se } V \text{ è // ad } S \Rightarrow \Phi_S(\vec{V}) = 0\end{aligned}$$

Definiamo adesso il rotore di un campo vettoriale $\vec{V}(\vec{x})$, che indichiamo con $\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x})$. Esso è un campo vettoriale che si esprime in termini di $\vec{V}(\vec{x})$, in componenti cartesiane, nel seguente modo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \vec{u}_z . \quad (2.4.1)$$

È utile esprimere il rotore in termini del seguente determinante simbolico:

$$\text{Notate} \downarrow \quad (\vec{\nabla} \times \vec{V})(\vec{x}) \equiv \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} . \quad (2.4.2)$$

Il rotore descrive la *vorticosità* di un campo vettoriale \vec{V} . Pensiamo al campo vettoriale che descrive la velocità di un fluido, come l'acqua in un fiume. Spesso accade di osservare sulla superficie di un fiume mulinelli nell'intorno di un punto. Questi sono vortici caratterizzati dalla proprietà che le linee del campo delle velocità o si chiudono nell'intorno di un punto o, in

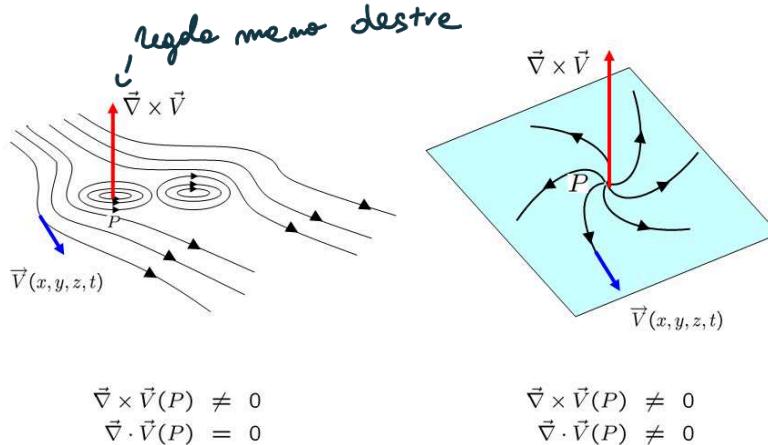


Figura 2.20: Esempi di campo vettoriale \vec{V} rotazionale, ovvero che presenta vorticità nell'intorno di un punto (P).

generale, hanno un andamento *rotazionale* (ovvero il campo vettoriale ha una componente angolare nell' intorno del punto orientata sempre nello stesso verso). Nella Figura 2.20 sono visualizzati due punti sulla superficie di un fluido in moto in cui $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ è diverso da zero, ovvero in cui il moto del fluido è vorticoso. In questi punti la direzione di $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ è perpendicolare al piano su cui avviene la rotazione del fluido (i.e. la superficie del fluido) ed il verso è legato al verso di rotazione dalla regola della mano destra.

Consideriamo un percorso chiuso orientato C ed una superficie S_c che poggia su C , sui cui punti è definito un versore normale \vec{n} il cui verso è legato al verso di percorrenza su C dalla regola della mano destra, vedi Figura 2.21. Enunciamo, senza dimostrarla, la legge di Stokes:

La circuitazione di un campo vettoriale $\vec{V}(\vec{x})$ lungo il percorso chiuso orientato C coincide con il flusso del rotore di \vec{V} attraverso una qualsiasi superficie S_c che poggia su C , ovvero:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\ell = \int_{S_c} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} ds. \quad (2.4.3)$$

Se avessimo scelto, per convenzione, il verso di \vec{n} opposto a quello definito dalla regola della mano destra in funzione del verso di C , la legge di Stokes (2.4.3) si sarebbe scritta con un segno “-” al secondo membro.

Da questa legge segue una proprietà importante del rotore:

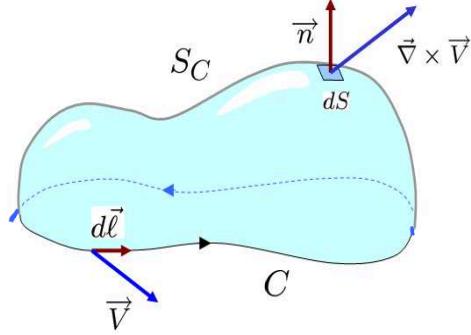


Figura 2.21: La legge di Stokes mette in relazione la circuitazione di un campo vettoriale \vec{V} lungo un cammino chiuso orientato C con il flusso del rotore $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ attraverso una qualsiasi superficie S_C che poggia su C .

il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

Consideriamo infatti una superficie S chiusa, sui cui punti, come per convenzione, è orientata la normale \vec{n} nel verso uscente. Tracciamo su S un percorso chiuso e orientato C che divide S in due superfici S_C ed S'_C che poggiano su C , vedi Figura 2.22. Il verso della normale \vec{n} ad S_C è legato al verso di C dalla regola della mano destra, mentre questo non è vero per la normale \vec{n} nei punti di S'_C . Scriviamo adesso il flusso del rotore di \vec{V} attraverso S come somma dei contributi attraverso S_C ed S'_C . Scriviamo quindi

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dS = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dS + \text{(PER REG MAN DESTRA +)} \\ + \int_{S'_C} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dS. \quad (" " -) \quad \text{= LA SOMMA FA O} \\ \text{FIOPPOSTI} \quad (2.4.4)$$

Applichiamo la legge di Stokes ai due integrali su S_C ed S'_C , tenendo conto che l'orientazione della normale su S_C è legata al verso di percorrenza di C dalla regola della mano destra, mentre quella su S'_C no. Abbiamo quindi che

$$\int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \\ = - \int_{S'_C} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dS.$$

Questa proprietà implica quindi che i due termini a secondo membro della (2.4.4) si cancellano a vicenda e quindi che

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (2.4.5)$$

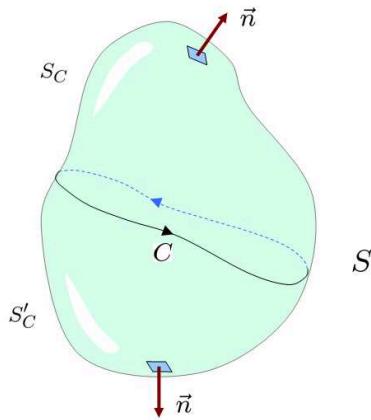


Figura 2.22: Una superficie chiusa S divisa da un cammino chiuso (orientato) C in due superfici (orientate) S_C ed S'_C che poggiano su C .

Usiamo la legge di Stokes per dare una ulteriore caratterizzazione di campo elettrico conservativo. Dimostriamo che le seguenti due proposizioni sono equivalenti:

1. \vec{E} è conservativo;
2. $\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv 0$ ovvero \vec{E} è irrotazionale.²

1 implica 2 SEMPRE

2 implica 1 solo se b vole in un dominio semplicemente connesso

² Questa seconda proprietà implica la prima, ovvero che il campo è conservativo, solo se assumiamo che la regione di spazio nel quale essa vale (ovvero l'annullarsi del rotore del campo vettoriale) sia *semplicemente connessa*, cosa che noi implicitamente faremo in questo corso. Ricordiamo per completezza che una regione di spazio è detta semplicemente connessa se una qualsiasi linea chiusa contenuta in essa può essere deformata con continuità fino ad essere ridotta ad un punto *senza mai uscire dalla regione stessa*. Equivalentemente possiamo caratterizzare una regione semplicemente connessa con la seguente proprietà: *preso un qualunque percorso chiuso C al suo interno, esiste una superficie S_C che poggia su esso e che è completamente contenuta nella regione stessa*. Un esempio di regione non semplicemente connessa è lo spazio esterno ad un cilindro di lunghezza infinita. Se prendiamo una curva esterna al cilindro ma *concatenata* ad esso, ovvero tale da non poter essere spostata a distanza infinita dal cilindro senza intersecarlo, è facile convincersi che, cercando di deformare tale curva per ridurla sempre di più in estensione, ad un certo punto essa sarebbe contenuta all'interno del cilindro e saremmo quindi usciti dalla nostra regione. Incontreremo, studiando il campo magnetico, che in presenza di un filo conduttore infinito percorso da una corrente elettrica, il campo magnetico da essa generato ha rotore nullo nello spazio *non semplicemente connesso* esterno al filo (perché fuori dal filo non c'è corrente). Questo per quanto detto non implica la conservatività del campo magnetico che sappiamo non essere conservativo: per la legge di Ampère, la circuitazione del campo magnetico lungo un cammino concatenato con il filo è non nulla ed è proporzionale all'intensità di corrente elettrica nel filo. La dimostrazione dell'implicazione 2) \Rightarrow 1) che faremo qui sotto in questo caso infatti non si applica: se calcolo la circuitazione del campo magnetico lungo un percorso chiuso C *concatenato* con la corrente (ovvero un cammino chiuso che non può essere portato a distanza infinita dal filo senza intersecarlo), lo studente si può convincere che qualsiasi superficie S_C che poggia su C interseca il filo, all'interno del quale il rotore del

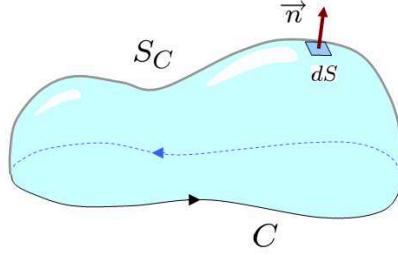


Figura 2.23: Un cammino chiuso C ed una superficie S_C che poggia su esso.

1) \Rightarrow 2) Prendiamo un qualsiasi contorno C chiuso orientato ed una superficie S_C che poggia su C , il cui orientamento è definito come sopra, vedi Figura 2.23. Essendo \vec{E} conservativo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\ell = 0 .$$

Per la legge di Stokes avremo quindi che per ogni C ed S_C :

$$\int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = 0 . \quad (2.4.6)$$

Possiamo in particolare prendere nell'intorno di un generico punto P un contorno molto piccolo C che delimita una superficie infinitesima dS_C (Figura 2.24). L'integrale del flusso (2.4.6) su dS_C si riduce quindi ad un solo termine e quindi la (2.4.6) implica:

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}(P)] \cdot \vec{n}(P) dS_C = 0 . \quad (2.4.7)$$

L'equazione (2.4.7) vale qualsiasi sia il contorno C e la sua orientazione (ovvero il vettore \vec{n}). Possiamo quindi applicarla a contorni C giacenti sui tre piani perpendicolari passanti per P : XY, XZ, YZ, a cui corrisponderanno versori \vec{n} lungo gli assi Z, Y ed X rispettivamente. L'equazione (2.4.7) implicherà che le tre corrispondenti componenti ortogonali del vettore $\vec{\nabla} \times \vec{E}(P)$ sono zero, ovvero che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(P) = 0 .$$

Essendo il punto P generico, concludiamo che

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv 0 , \quad (2.4.8)$$

campo magnetico è diverso da zero. Il flusso non nullo del rotore del campo magnetico attraverso la parte di S_C interna al filo, per la legge di Stokes, determina una circuitazione non nulla del campo magnetico lungo C .

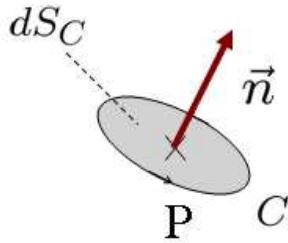


Figura 2.24: Un contorno orientato infinitesimo C nell'intorno di un punto P .

ovunque.

$2) \Rightarrow 1)$. Partiamo dall'assumere che $\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv 0$ in una regione di spazio \mathcal{D} semplicemente connessa (si veda la nota 2). Applicando la legge di Stokes ad un generico contorno C troviamo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (2.4.9)$$

ove come S_C abbiamo una superficie che poggia su C , che è completamente contenuta nella regione \mathcal{D} e sulla quale quindi il rotore del campo elettrico è nullo. Tale superficie esiste essendo \mathcal{D} semplicemente connessa (si veda la nota 2). L'equazione (2.4.9), valendo per un contorno orientato C generico, implica che \vec{E} è conservativo.

Riassumiamo quindi le proprietà di un campo elettrico \vec{E} conservativo. Abbiamo visto che sono equivalenti le seguenti proprietà:

1. \vec{E} è conservativo;
2. Esiste un campo *potenziale* V tale che $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$;
3. \vec{E} è *irrotazionale*, ovvero $\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv 0$

2.4.1 Alcune proprietà del rotore

2.5 Il Dipolo Elettrico

Un dipolo elettrico è un sistema di due cariche uguali ed opposte $\pm q$ ($q > 0$) poste ad una distanza fissa a . Definiamo \vec{a} il vettore che si origina sulla carica negativa $-q$ e termina sulla carica positiva $+q$ e definiamo inoltre il *momento di dipolo elettrico* \vec{p} la seguente quantità:

$$\vec{p} = q \vec{a}. \quad \text{IMPORTANTE} \quad (2.5.1)$$

Per studiare il campo elettrostatico generato da questo sistema di cariche, conviene fissare un sistema di coordinate polari sferiche, rispetto al quale il dipolo sia disposto lungo l'asse

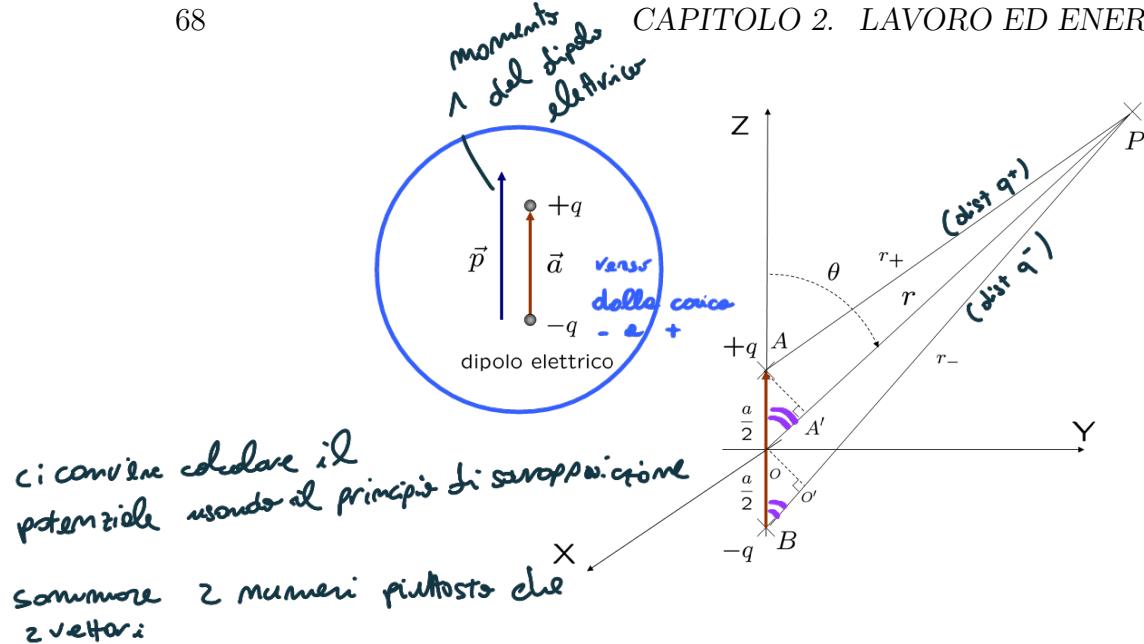


Figura 2.25: Un contorno orientato C nell'intorno di un punto P , sufficientemente piccolo da delimitare una superficie infinitesima dS_C .

Z , simmetricamente rispetto all'origine, in modo che le cariche $\pm q$ siano individuate dalle coordinate $z = \pm \frac{a}{2}$ (Figura 2.25). Iniziamo con l'osservare che il sistema ha simmetria cilindrica rispetto all'asse Z del dipolo. Questo implica che il campo elettrostatico da esso generato avrà lo stesso andamento su qualsiasi piano contenente l'asse Z e quindi possiamo limitarci a studiarne l'andamento su uno particolare di questi piani. Calcoliamo il potenziale elettrostatico $V(\vec{x})$ in un punto P distante r_+ dalla carica positiva, r_- da quella negativa ed r dall'origine O . Tale potenziale si esprimerà come la somma dei contributi al potenziale $V_{\pm}(r_{\pm})$ dovuti a ciascuna delle due cariche:

$$V(\vec{x}) = V_+(r_+) + V_-(r_-) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right). \quad (2.5.2)$$

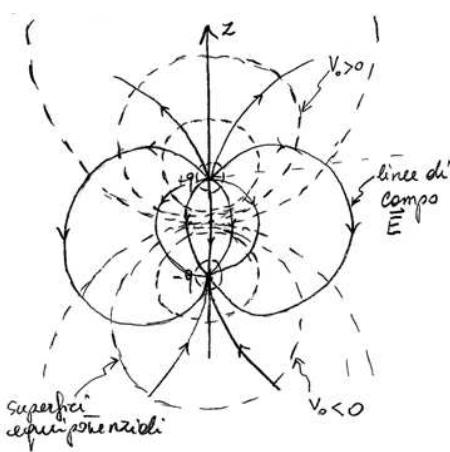


Figura 2.26: Superficie equipotenziali e linee di campo associate ad un dipolo elettrico.

Calcoleremo questo potenziale nell'*approssimazione di dipolo*, che consiste nel considerare il punto P molto lontano dal sistema di cariche, ovvero $r \gg a$, in modo da poter trascurare ordini in a/r superiori al primo. In questo limite, con riferimento alla Figura 2.25, possiamo considerare i segmenti AP , OP e BP in buona approssimazione paralleli e quindi l'angolo OBP circa uguale all'angolo $AOP = \theta$. Essendo, per costruzione, i segmenti AA' e OO' perpendicolari ad OP e BP rispettivamente, possiamo approssimare i triangoli $AA'P$ e $OO'P$ a triangoli isosceli, con angolo al vertice pressoché nullo e gli angoli alla base retti. Possiamo quindi scrivere:

$$|AP| \approx |A'P|, \quad |OP| \approx |O'P|, \quad (2.5.3)$$

linee campo iniziano in q^+ e finiscono in q^-
inoltre sono \perp alle superfici equipotenziali

2.5. IL DIPOLO ELETTRICO

e quindi:

Per me i termini $\frac{a^2}{r^2}$ sono approssimabili in quanto molto << 1. (appross. di dipolo)

69

$$\begin{aligned} r_+ &= |AP| \approx |A'P| = |OP| - |OA'| = r - \frac{a}{2} \cos(\theta) \\ r_- &= |BP| = |O'P| + |BO'| \approx |OP| + |BO'| = r + \frac{a}{2} \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

L'approssimazione di dipolo ci ha quindi permesso di esprimere r_{\pm} in funzione delle coordinate polari (r, θ) del punto P . Sostituendo queste espressioni nella formula (2.5.2) per $V(P)$, troviamo

$$\begin{aligned} V(p) &= V(r, \theta) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{a}{2} \cos(\theta)} - \frac{1}{r + \frac{a}{2} \cos(\theta)} \right) = \\ &= \frac{q a \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 - \frac{a^2}{4} \cos^2(\theta)} \approx \frac{q a \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} \cos^2(\theta) + \dots \right) \approx \\ &\approx \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato il termine proporzionale ad $\frac{a^2}{r^2}$ rispetto all'unità, in linea con l'approssimazione scelta. Nella formula per $V(r, \theta)$ inoltre abbiamo indicato con $p = q a$, il modulo del vettore \vec{p} . Osserviamo che, a causa della simmetria cilindrica del sistema, il potenziale V non dipende dalla coordinata angolare φ di P , ovvero dal particolare piano contenente l'asse Z su cui abbiamo scelto di descrivere il campo. Una superficie equipotenziale è il luogo dei punti (r, θ) in cui

$$V(r, \theta) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 = \text{cost.} \quad (2.5.6)$$

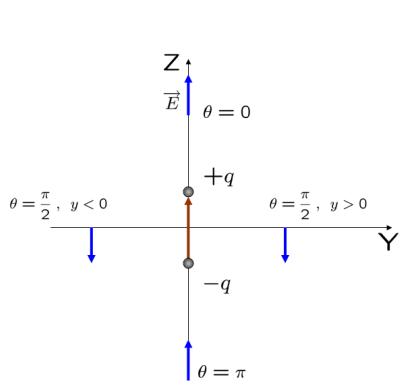
Consideriamo $V_0 > 0$. In questo caso i punti della superficie equipotenziale avranno $\cos(\theta) > 0$ e quindi la superficie sarà contenuta del semispazio $z > 0$, vedi Figura 2.26. Se facciamo diminuire θ da un valore $\theta_0 > 0$ a 0, $\cos(\theta)$ aumenterà da $\cos(\theta_0)$ ad 1 e, quindi, la coordinata r del corrispondente punto su una superficie equipotenziale aumenterà in modo da mantenere costante il valore del potenziale. La forma della superficie avrà simmetria di rotazione rispetto all'asse Z. Se invece $V_0 < 0$, la corrispondente superficie si estenderà nel semispazio $z < 0$.

Calcoliamo adesso il campo elettrostatico \vec{E} nell'approssimazione di dipolo, usando la relazione:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (2.5.7)$$

Ricordiamo che, in coordinate polari sferiche, il gradiente si scrive nel seguente modo:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (2.5.8)$$



Questo ci consente di scrivere le componenti polari di \vec{E} :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_\varphi \vec{u}_\varphi, \\ E_r &= -\frac{\partial}{\partial r} V = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \text{deriva solo comp r} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \text{deriva rispetto a } \theta \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} V = 0,\end{aligned}\quad (2.5.9)$$

ovvero

Figura 2.27: Campo elettrico nell'intorno di un dipolo.

$$\vec{E} = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta. \quad (2.5.10)$$

In Figura 2.27 è illustrato, sul piano ZY, il campo \vec{E} nel punto $\theta = 0$, nei punti $\theta = \frac{\pi}{2}$ con $y > 0$ e $y < 0$ e nel punto $\theta = \pi$.

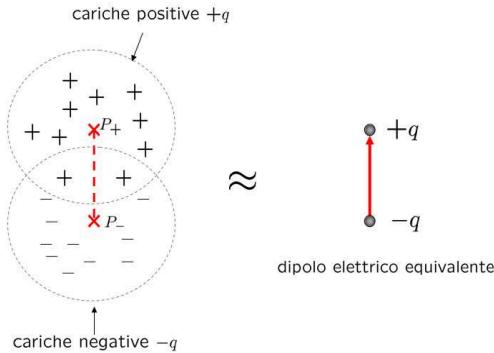
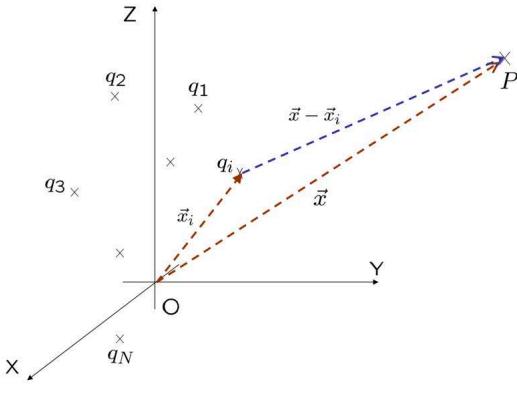


Figura 2.28: Descrizione attraverso un dipolo elettrico di un sistema di cariche.

Il dipolo elettrico è utile per descrivere sistemi di cariche elettriche, come atomi o molecole, globalmente neutri, ma in cui il baricentro delle cariche positive P_+ non coincide con quello delle cariche negative P_- . Se a è la distanza tra P_+ e P_- , visto da distanze molto maggiori di a , il sistema è approssimabile ad un dipolo elettrico ottenuto pensando alle cariche positive e negative concentrate nei rispettivi baricentri.

2.6 Sviluppo del potenziale in multipoli (non richiesto)

Figura 2.29: Sistema di N cariche.

Consideriamo adesso la situazione più generale di un sistema di N cariche puntiformi $(q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ dislocate nei punti $(\vec{x}_i) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$, Figura 2.29. Fissiamo come origine del sistema di riferimento un punto situato tra le cariche, la cui distanza da ciascuna carica sia dello stesso ordine di grandezza della distanza relativa tra le cariche stesse. Sia Q la carica totale del sistema:

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i.$$

Supponiamo che di queste N cariche N_+ siano positive ed N_- negative, con $N = N_+ + N_-$. Indichiamo le cariche positive e negative con i simboli $(q_k^{(+)}) = (q_1^{(+)}, q_2^{(+)}, \dots, q_{N_+}^{(+)})$ e $(q_\ell^{(-)}) = (q_1^{(-)}, q_2^{(-)}, \dots, q_{N_-}^{(-)})$, mentre $q^{(+)} > 0$ e $q^{(-)} < 0$ indicheranno la carica positiva e negativa totale:

$$q^{(+)} \equiv \sum_{k=1}^{N_+} q_k^{(+)} , \quad q^{(-)} \equiv \sum_{\ell=1}^{N_-} q_\ell^{(-)}. \quad (2.6.1)$$

Le posizioni \vec{x}_\pm dei baricentri (elettrici) delle cariche positive e negative sono definite nel seguente modo:

$$\vec{x}_+ \equiv \frac{1}{q^{(+)}} \sum_{k=1}^{N_+} q_k^{(+)} \vec{x}_k ; \quad \vec{x}_- \equiv \frac{1}{q^{(-)}} \sum_{\ell=1}^{N_-} q_\ell^{(-)} \vec{x}_\ell. \quad (2.6.2)$$

Vogliamo calcolare il potenziale elettrico associato al sistema di cariche in un punto P dello spazio, descritto da un vettore posizione \vec{x} , molto distante dal sistema stesso, in modo che

$$r = |\vec{x}| \gg |\vec{x}_i| = r_i. \quad (2.6.3)$$

Questa posizione ci consentirà di espandere il potenziale in termini di ordine crescente nei rapporti r_i/r . Il potenziale $V(P)$ è dato, al solito, dalla somma dei contributi dovuti a ciascuna carica del sistema:

$$V(P) = V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}. \quad (2.6.4)$$

La distanza $|\vec{x} - \vec{x}_i|$ di P da q_i può essere riscritta come segue:

$$|\vec{x} - \vec{x}_i| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i)} = \sqrt{r^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}_i + r_i^2} = r \sqrt{1 + \frac{r_i^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_i}{r^2}}. \quad (2.6.5)$$

Usando l'espansione di Taylor:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + O(z^2) , \quad |z| < 1 . \quad (2.6.6)$$

possiamo infine riscrivere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} &= \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2}}} = \frac{1}{r \left(1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_i}{r^2} + O\left(\frac{r_i^2}{r^2}\right)\right)} = \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_i}{r^2} + O\left(\frac{r_i^2}{r^2}\right)\right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}_i}{r^3} + \frac{1}{r} O\left(\frac{r_i^2}{r^2}\right) . \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Siamo ora in grado di riscrivere $V(P)$ come somma di termini di grado crescente nei rapporti r_i/r :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \vec{x}_i \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} O\left(\frac{r_i^2}{r^2}\right) . \quad (2.6.8)$$

È utile a questo punto definire il seguente vettore che generalizza il momento di dipolo introdotto nella sezione precedente:

$$\vec{p} \equiv \sum_{i=1}^N q_i \vec{x}_i = \sum_{k=1}^{N_+} q_k^{(+)} \vec{x}_k + \sum_{\ell=1}^{N_-} q_\ell^{(-)} \vec{x}_\ell = q^{(+)} \vec{x}_+ + q^{(-)} \vec{x}_- .$$

In termini di \vec{p} il potenziale in (2.6.8) si scrive:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} O\left(\frac{r_i^2}{r^2}\right) . \quad (2.6.9)$$

Supponiamo che il sistema sia globalmente carico, ovvero che $Q \neq 0$. In tal caso, osservando il sistema da lontano, la componente dominante del potenziale è rappresentata dal primo termine nell'espansione (2.6.9), detto componente di *monopolio*, che è il potenziale Coulombiano generato da una carica puntiforme Q posta nell'origine. In altre parole il sistema, visto da molto lontano, si comporta come se tutta la sua carica fosse concentrata in un punto al suo interno (in questo caso l'origine O). Il secondo termine nell'espansione (2.6.9) rappresenta la componente di dipolo e dipende da \vec{p} . Essa è dominante per i sistemi di cariche globalmente neutri, per cui il termine Coulombiano è nullo essendo $Q = 0$. In questo caso, $Q = 0$ implica che $q^{(+)} = -q^{(-)} = q$ ed il vettore \vec{p} si scrive nel seguente modo:

$$\vec{p} = q^{(+)} \vec{x}_+ + q^{(-)} \vec{x}_- = q (\vec{x}_+ - \vec{x}_-) = q \vec{a} , \quad (2.6.10)$$

essendo $\vec{a} \equiv \vec{x}_+ - \vec{x}_-$ il vettore posizione relativa del bericentro delle cariche positive rispetto a quello delle cariche negative. Il potenziale si riduce a

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} O\left(\frac{r_i^2}{r^2}\right) . \quad (2.6.11)$$

Riconosciamo nel primo termine il potenziale di un dipolo equivalente, con momento di dipolo \vec{p} , ottenuto concentrando le cariche positive e negative nei rispettivi baricentri (si confronti infatti il primo termine della (2.6.11) con l'ultimo membro della (2.5.5), dopo aver riscritto $\vec{p} \cdot \vec{x} = pr \cos(\theta)$, θ essendo l'angolo tra \vec{p} ed \vec{x} , e $p = |\vec{p}|$). Infine, se oltre che ad essere $Q = 0$, i baricentri delle cariche positive e negative coincidono, $\vec{p} = 0$ ed i termini dominanti nell'espansione (2.6.9) sono dell'ordine in r_i/r superiore al primo. Essi si chiamano componenti di *multipolo* del potenziale (quadrupolo, etc...). Lo sviluppo (2.6.9) del potenziale è del tutto generale ed è detto sviluppo in multipoli.

2.7 Moto di un dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme

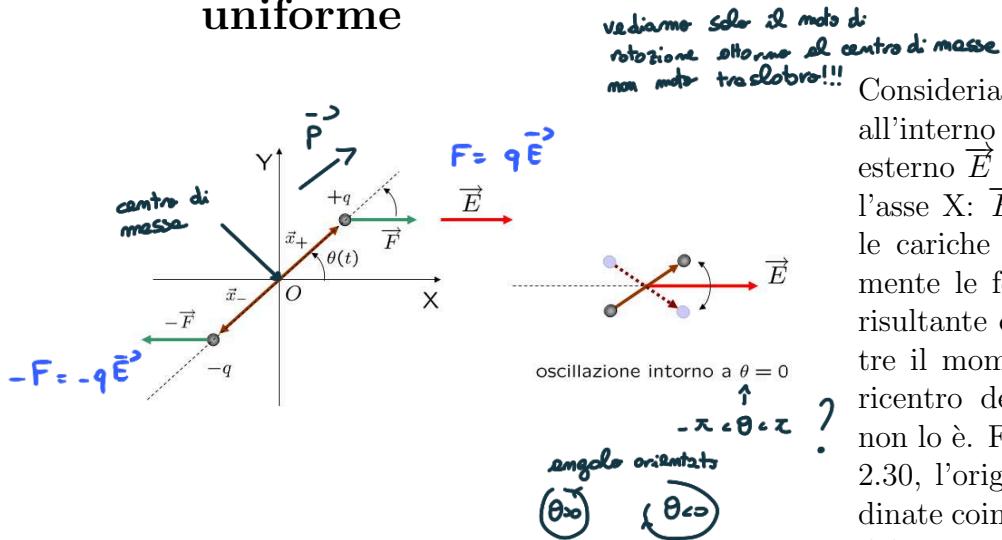


Figura 2.30: Dipolo in un campo elettrico uniforme.

momento \vec{M} si scrive nel seguente modo:

$$\vec{M} = \vec{x}_+ \times \vec{F} - \vec{x}_- \times \vec{F} = (\vec{x}_+ - \vec{x}_-) \times \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (2.7.1)$$

Descriviamo la posizione del dipolo, in ogni istante, attraverso l'angolo θ tra \vec{p} ed X (vedi Figura 2.30), avendo scelto come verso degli angoli crescenti quello antiorario (in figura l'angolo è positivo). Il momento \vec{M} sarà diretto lungo l'asse Z e si può scrivere in componenti

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = -p E \sin(\theta) \vec{u}_z, \quad (2.7.2)$$

ove ci si può convincere del segno “-” osservando che in Figura $\theta > 0$ ed \vec{M} è perpendicolare al piano del foglio in verso entrante, ovvero è discorde con l'asse Z. Se I è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse Z, $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare, possiamo scrivere il momento angolare \vec{L} del dipolo nella forma

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = I \omega \vec{u}_z; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.7.3)$$

Consideriamo un dipolo elettrico all'interno di un campo elettrico esterno \vec{E} uniforme e diretto lungo l'asse X: $\vec{E} = E \vec{u}_x$, $E > 0$. Sulle cariche $\pm q$ agiscono rispettivamente le forze $\pm \vec{F} = \pm q \vec{E}$. La risultante delle forze è nulla, mentre il momento \vec{M} rispetto al baricentro del sistema, in generale, non lo è. Fissiamo, come in Figura 2.30, l'origine del sistema di coordinate coincidente con il baricentro del sistema. Se \vec{x}_{\pm} sono i vettori posizione di $\pm q$ rispettivamente, il

$$q \cdot \vec{E}$$

(2.7.1)

regole del prodotto cartesiano

Se le due cariche hanno la stessa massa m , il momento di inerzia sarà: $I = m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = m\frac{a^2}{2}$. Essendo il moto puramente rotatorio intorno all'asse Z, l'equazione del moto ha la forma generale:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \xrightarrow{\text{I w } \vec{n}_z} = \vec{M}, = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.7.4)$$

che, proiettata lungo l'asse Z si scrive

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + p E \sin(\theta) = 0. \quad (2.7.5)$$

*Se ci fosse θ sarebbe armonico
ma c'è il $\sin(\theta)$ → oscillatore
(pendolo)*

Questa equazione ha la stessa forma dell'equazione di un pendolo fisico. Essa ha due punti di equilibrio, che sono i punti in cui $\vec{M} = 0$, ovvero $\sin(\theta) = 0$: $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Il primo corrisponde alla posizione in cui \vec{p} è parallelo concorde con \vec{E} ed è il punto di equilibrio **stabile** (se perturbato di poco da questa posizione, il dipolo oscillatorà in un piccolo intorno di essa con un'ampiezza tanto più ridotta, quanto minore è la perturbazione iniziale). La

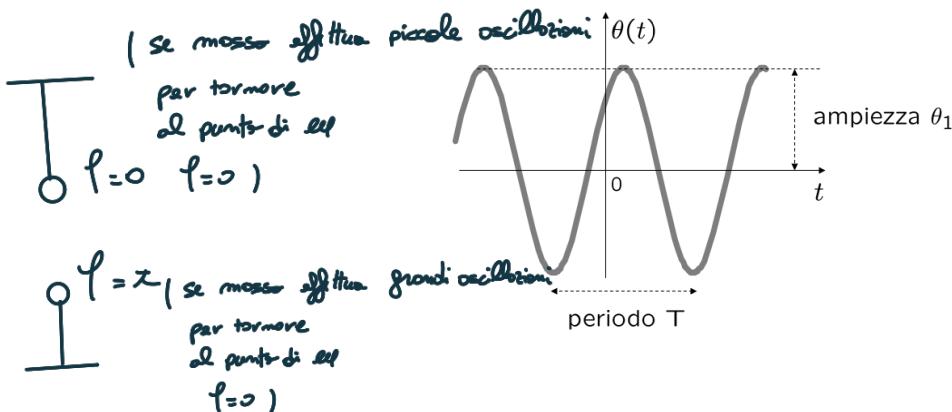


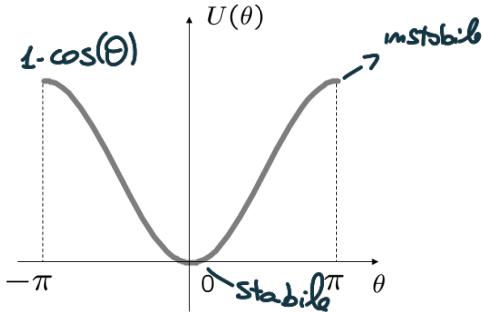
Figura 2.31: Moto armonico per piccole oscillazioni intorno a $\theta = 0$.

posizione $\theta = \pi$ è invece di equilibrio **instabile**. Scegliendo quindi l'angolo iniziale $\theta(t=0) = \theta_0$ sufficientemente piccolo, il moto descriverà piccole oscillazioni intorno alla direzione del campo elettrico: $\theta(t) \ll 1$. In questo limite possiamo approssimare nella (2.7.5) $\sin(\theta) \approx \theta$ e quindi riscrivere la (2.7.5) nella forma dell'equazione di un'oscillatore armonico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{oscillatore armonico di pulsazione } \omega \quad (2.7.6)$$

ove abbiamo indicato con $\omega_0^2 = \frac{p_E}{I}$ la pulsazione propria dell'oscillatore. La soluzione generale della (2.7.6) è nota potersi scrivere nel seguente modo

$$\theta(t) = \theta_1 \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (2.7.7)$$

Figura 2.32: Energia potenziale $U(\theta)$ del dipolo.

il dipolo ci fornisce le informazioni necessarie per trovare il campo elettrico. (come una sonda)

ove θ_1 e ϕ sono costanti fissate dalle condizioni iniziali (posizione e velocità angolare iniziale), Figura 2.31. Il periodo T per piccole oscillazioni si esprime in termini di ω_0 secondo la nota relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pE}} = 2\pi \sqrt{\frac{ma^2}{2pE}}. \quad (2.7.8)$$

In seguito ad una rotazione infinitesima da θ a $\theta + d\theta$, la coppia di forze agente sul dipolo compie un lavoro elementare pari a

$$dW = M d\theta = -pE \sin(\theta) d\theta. \quad (2.7.9)$$

In seguito ad una rotazione finita del dipolo da θ_0 a θ_1 il lavoro compiuto sarà quindi:

$$W_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} dW = \Theta \int_{\theta_0}^{\theta_1} pE \sin(\theta) d\theta = pE (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) = U(\theta_0) - U(\theta_1).$$

dipende solo da punti in 2 f.i. \Rightarrow Possiamo associare un'energia potenziale

Esso quindi è esprimibile come differenza dei valori di una energia potenziale:

$$U(\theta) = \Theta pE \cos(\theta) + cost. = -\vec{p} \cdot \vec{E} + cost. \quad (2.7.10)$$

tra la posizione iniziale e quella finale. Possiamo fissare la costante arbitraria nella definizione (2.7.10) attribuendo energia potenziale nulla alla posizione di equilibrio stabile del dipolo ($\theta = 0$):

$$U(\theta = 0) = 0 \Rightarrow -pE + cost. = 0 \Rightarrow U(\theta) = pE(1 - \cos(\theta)). \quad (2.7.11)$$

Il minimo assoluto di $U(\theta)$ è in $\theta = 0$ e corrisponde alla posizione di equilibrio stabile in cui \vec{p} è parallelo e concorde a \vec{E} , Figura 2.32.

L'energia meccanica totale del sistema è la somma dell'energia cinetica E_k e di quella potenziale e si conserva durante il moto del dipolo:

$$E_{mecc.} = E_k + U = \frac{1}{2} I \omega^2 + pE(1 - \cos(\theta)) = cost. \quad (2.7.12)$$

2.8 Esercizi

Esercizio 2.8.1 Date due cariche $q_1 = 8q$ e $q_2 = -2q$, ($q > 0$) a distanza $\ell = 20\text{ cm}$ (Figura 2.33) determinare il punto sull'asse congiungente le due cariche in cui $V = 0$, $\vec{E} = 0$.

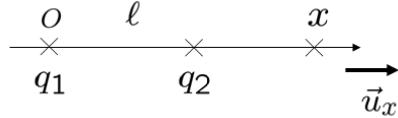


Figura 2.33: Esercizio 2.8.1.

Soluzione: fissiamo l'asse X lungo la congiungente q_1 a q_2 e scegliamo l'origine in q_1 . Nel punto x il potenziale è:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x - l|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{8}{|x|} - \frac{2}{|x - l|} \right),$$

da cui segue che:

$$V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|x|}{|x - l|} = -\frac{q_1}{q_2} = 4.$$

Vi sono i seguenti casi:

$$\begin{aligned} \underline{x < 0 :} \quad & x = 4(x - l) \Rightarrow x = \frac{4}{3}l > 0 \quad \text{nessuna soluzione ,} \\ \underline{0 < x < l :} \quad & x = 4(l - x) \Rightarrow x = \frac{4}{5}l \quad \text{una soluzione ,} \\ \underline{x > l :} \quad & x = 4(x - l) \Rightarrow x = \frac{4}{3}l \quad \text{una soluzione .} \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Calcoliamo il campo elettrico come somma dei contributi dovuti a ciascuna carica:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

ove

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{(\vec{x} - \vec{x}_1)}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3}$$

Rispetto al sistema di riferimento scelto i vettori posizione hanno le seguenti componenti:

$$\vec{x} = x \vec{u}_x \quad ; \quad \vec{x}_1 \equiv 0 \quad ; \quad \vec{x}_2 = l \vec{u}_x.$$

Possiamo quindi riscrivere il campo elettrico nella seguente forma:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q_1 \frac{x}{|x|^3} + q_2 \frac{(x-l)}{|x-l|^3} \right) \vec{u}_x .$$

Conviene distinguere i seguenti casi:

$x < 0$:

$$\frac{q_1}{x^2} = -\frac{q_2}{(x-l)^2} \Rightarrow \frac{x}{(x-l)} = \sqrt{-\frac{q_1}{q_2}} = 2 \Rightarrow x = 2l > 0$$

nessuna soluzione ,

$0 < x < l$:

$$\frac{x^2}{(x-l)^2} = \frac{q_1}{q_2} = -4 < 0 \quad \text{nessuna soluzione ,}$$

$x > l$:

$$\frac{x^2}{(x-l)^2} = -\frac{q_1}{q_2} = 4 > 0 \Rightarrow x = 2l > 0 \quad \text{una soluzione .}$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} V(x) = 0 : \quad & x = \frac{4}{5}l, \quad \frac{4}{3}l, \\ \vec{E}(x) = 0 : \quad & x = 2l . \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Esercizio 2.8.2 Date tre cariche:

$$q_1 = -4 \times 10^{-8} C \quad ; \quad q_2 = 3 \times 10^{-8} C \quad ; \quad q_3 = 2 \times 10^{-9} C , \tag{2.8.3}$$

disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $d = 60 \text{ cm}$, calcolare il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche quando q_3 viene portata all'infinito (Figura 2.34).

Soluzione: La configurazione iniziale è definita dai seguenti valori delle distanze relative:

$$\{r_{ij}\} = \{r_{12}, r_{13}, r_{23}\} = \{d, d, d\} .$$

Nella configurazione finale invece le distanze relative sono:

$$\{r'_{ij}\} = \{r'_{12}, r'_{13}, r'_{23}\} = \{d, \infty, \infty\} .$$

Il lavoro W compiuto dalle forze elettrostatiche si può esprimere come variazione dell'energia potenziale U del sistema tra la configurazione iniziale e quella finale:

$$W = U(\{r_{ij}\}) - U(\{r'_{ij}\}) ,$$

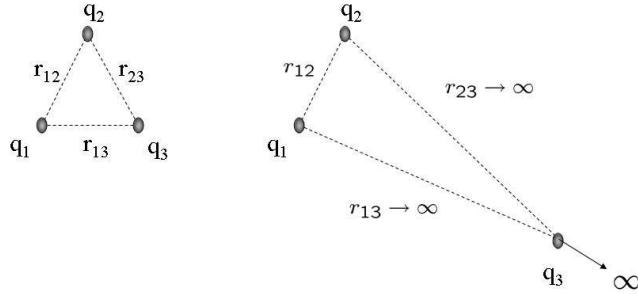


Figura 2.34: Esercizio 2.8.2.

Usiamo adesso la formula generale per l'energia potenziale di un sistema isolato di cariche (2.1.18):

$$U(\{r_{ij}\}) = U(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = U_{12}(r_{12}) + U_{13}(r_{13}) + U_{23}(r_{23}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right).$$

Nella configurazione iniziale abbiamo:

$$U(d, d, d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3),$$

mentre nella configurazione finale:

$$U(d, \infty, \infty) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}$$

Il lavoro totale ha la seguente forma:

$$W = U_{13}(d) + U_{23}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{d} (q_1 + q_2) \simeq 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-9}}{0.6} (-1 \times 10^{-8}) \simeq -3 \times 10^{-7} J.$$

Esercizio 2.8.3 Date due coppie di cariche, ciascuna consistente in due cariche dello stesso segno, a distanza $a = 5 \text{ cm}$, e poste a distanza infinita. Sapendo che in valore assoluto ciascuna carica vale $q = 10^{-9} \text{ C}$, calcolare il lavoro compiuto dalle forze elettriche quando esse sono portate in una nuova configurazione come descritto in Figura 2.35:

Soluzione : Una generica configurazione di quattro cariche è definita dalle distanze relative $\{r_{ij}\}$:

$$\{r_{ij}\} = \{r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}\}.$$

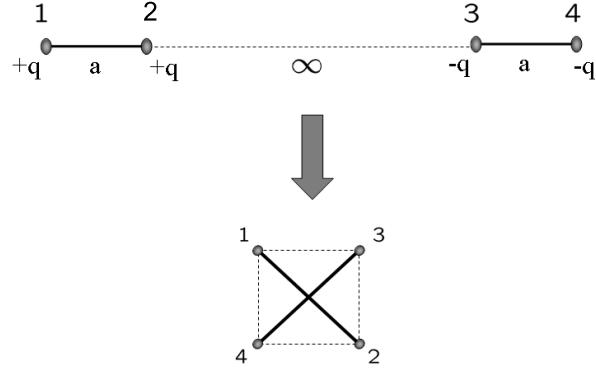


Figura 2.35: Esercizio 2.8.3.

Nel nostro caso la configurazione iniziale è caratterizzata da distanze infinite tra le cariche appartenenti a coppie diverse:

$$\{r_{ij}\} = \{r_{12} = a, r_{13} = \infty, r_{14} = \infty, r_{23} = \infty, r_{24} = \infty, r_{34} = a\} .$$

Nella configurazione finale invece abbiamo:

$$\{r'_{ij}\} = \left\{ r'_{12} = a, r'_{13} = \frac{a}{\sqrt{2}}, r'_{14} = \frac{a}{\sqrt{2}}, r'_{23} = \frac{a}{\sqrt{2}}, r'_{24} = \frac{a}{\sqrt{2}}, r'_{34} = a \right\} .$$

Calcoliamo il lavoro usando la solita formula:

$$W = U(\{r_{ij}\}) - U(\{r'_{ij}\}),$$

ove

$$U(\{r_{ij}\}) = U_{12}(r_{12}) + U_{13}(r_{13}) + U_{14}(r_{14}) + U_{23}(r_{23}) + U_{24}(r_{24}) + U_{34}(r_{34}) .$$

L'energia potenziale nella configurazione iniziale sarà quindi la somma delle energie potenziali associate a ciascuna coppia di cariche poiché le due coppie sono così lontane da non interagire tra loro:

$$U(\{r_{ij}\}) = U_{12}(a) + 0 + 0 + 0 + 0 + U_{34}(a) .$$

Nella configurazione finale invece abbiamo:

$$U(\{r'_{ij}\}) = U_{12}(a) + U_{13}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + U_{14}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + U_{23}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + U_{24}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + U_{34}(a) .$$

Siamo pronti ora per calcolare il lavoro complessivo:

$$\begin{aligned} W &= U(\{r_{ij}\}) - U(\{r'_{ij}\}) = - \left[U_{13} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) + U_{14} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) + U_{23} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) + U_{24} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) 4\sqrt{2} \frac{q^2}{a} \simeq 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 1.4 \times 10^{-18}}{5 \times 10^{-2}} = 10^{-6} J > 0. \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Osserviamo che il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche è positivo, ovvero che l'azione delle forze interne al sistema era *favorevole* al passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale. Questo si riflette nel fatto che l'energia del sistema (che in questo caso consiste nella sola energia potenziale) che compete alla configurazione finale è più bassa di quella associata alla configurazione iniziale. Si dice che la configurazione finale è più stabile di quella iniziale. Infatti se volessimo separare le due coppie di cariche e riportarle a distanza infinita dovremmo contrastare il lavoro negativo $-W$ compiuto dalle forze elettrostatiche che questa volta si opporrebbero allo spostamento, e quindi dovremmo trasferire energia al sistema che si trasformerà in energia potenziale immagazzinata nel campo elettrostatico.

Esercizio 2.8.4 Consideriamo un atomo di idrogeno costituito da un protone centrale che ne rappresenta il nucleo ed un elettrone che orbita intorno ad esso ad una distanza media (raggio di Bohr) $R_0 \simeq 0.53 \cdot 10^{-10} m$.

Calcolare l'energia totale del sistema e la velocità media dell'elettrone. Ricordiamo alcune grandezze fondamentali:

$$\begin{aligned} e &\approx 1.6 \times 10^{-19} C, \quad m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} Kg, \quad m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} Kg, \\ k &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 N m^2 C^{-2}. \end{aligned}$$

Soluzione: Essendo $m_p \gg m_e$, la massa ridotta del sistema è quasi uguale alla massa dell'elettrone

$$\mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \simeq m_e,$$

e il protone può considerarsi in quiete. Se approssimiamo il moto dell'elettrone con un moto circolare uniforme, vedi Figura 2.36, il modulo v della sua velocità \vec{v} ed R_0 sono legati dalla condizione che la forza elettrostatica \vec{F} funga da forza centripeta:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -k \frac{e^2}{R_0^2} \vec{u}_r, \\ \vec{F}_{centr} &= -m_e \frac{v^2}{R_0} \vec{u}_r, \end{aligned}$$

da cui, imponendo $\vec{F} = \vec{F}_{centr}$, troviamo:

$$m_e \frac{v^2}{R_0} = \frac{e^2}{R_0^2}, \quad (2.8.5)$$

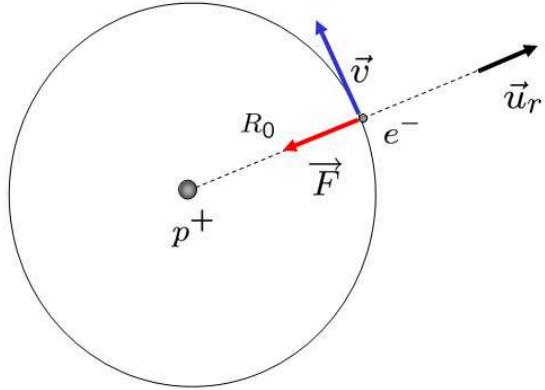


Figura 2.36: Esercizio 2.8.4.

ovvero che la velocità media dell'elettrone è

$$v = \sqrt{k \frac{e^2}{R_0 m_e}} \simeq 2.2 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Confrontiamo ora v con la velocità della luce $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$:

$$\frac{v}{c} \simeq 10^{-2} \ll 1.$$

Troviamo quindi che la velocità media dell'elettrone in un atomo di idrogeno (lo stesso vale per qualunque altro elemento non eccessivamente pesante) è molto più piccola della velocità della luce. Questo ci consente di trascurare gli effetti relativistici sul suo moto e giustifica, a posteriori, l'uso che abbiamo fatto delle leggi della meccanica newtoniana per descriverlo. L'energia potenziale della coppia protone-elettrone vale

$$U = -k \frac{e^2}{R_0} < 0.$$

Dalla (2.8.5) ricaviamo che l'energia cinetica è

$$E_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{k}{2} \frac{e^2}{R_0^2} = -\frac{U}{2},$$

mentre l'energia totale vale

$$E = E_k + U = \frac{U}{2} < 0,$$

ed è negativa. Vediamo cosa implica questa proprietà. Supponiamo di voler liberare il protone e l'elettrone dalla reciproca attrazione, ovvero di portarli a distanza infinita. La minima energia che dobbiamo conferire al sistema affinché questo accada è quella che consente al protone e all'elettrone di raggiungere distanza infinita a velocità zero, ovvero uno stato di energia totale

$$E' = E_k(v = 0) + U(r = \infty) = 0.$$

L'energia da trasmettere al sistema sarà quindi

$$\Delta E = E' - E = -E = -\frac{U}{2} = E_k > 0.$$

La quantità ΔE è detta *energia di legame*. Il sistema atomico è uno stato legato, ovvero caratterizzato da un'energia totale negativa, per cui è necessario conferire al sistema una minima energia per portare le sue componenti a distanza infinita. Calcoliamo ΔE :

$$\Delta E = -\frac{U}{2} = k \frac{e^2}{2R_0} = 2.2 \times 10^{-18} J.$$

Conviene usare, per descrivere l'energia nei processi atomici, l'unità di misura dell'*elettronvolt*, definita come l'energia che acquista un elettrone nell'attraversare una differenza di potenziale (ddp) pari ad 1 Volt:

$$1 \text{ eV} \equiv e \times 1 \text{ V} = 1.6 \times 10^{-19} J.$$

In questa unità, l'energia di legame dell'atomo di idrogeno, detta anche energia di ionizzazione, vale

$$\mathbb{R}_y \equiv \Delta E \approx 13.6 \text{ eV}.$$

Questo valore è detto Rydberg (\mathbb{R}_y) e fissa la scala di energia dei processi atomici.

Esercizio 2.8.5 *Calcolare il lavoro che un agente esterno deve compiere per disporre le quattro cariche $q_1 = q$, $q_2 = -q$, $q_3 = -q$, $q_4 = q$, a partire da una distanza reciproca infinita (configurazione non-interagente), ai quattro vertici di un quadrato di lato a secondo il seguente ordine: q_1, q_2, q_4, q_3 seguendo il perimetro del quadrato in verso orario.*

Soluzione: L'energia potenziale del sistema (U) è la somma delle energie potenziali di ciascuna coppia di cariche (q_i, q_j)

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34},$$

ove, al solito,

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}},$$

essendo r_{ij} la distanza tra q_i e q_j . Notare che abbiamo fissato $U_{ij}(r_{ij} \rightarrow \infty) = 0$. Abbiamo supposto che le quattro cariche sono inizialmente a distanza infinita e quindi $U_{iniz.} = 0$. Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche $W = U_{iniz.} - U_{finale} = -U_{finale}$ nella configurazione finale in cui $r_{12} = r_{13} = r_{24} = r_{34} = a$ $r_{23} = r_{14} = \sqrt{2}a$, è

$$U_{finale} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-4\frac{q^2}{a} + 2\frac{q^2}{a\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} (\sqrt{2} - 4) < 0$$

Le forze elettriche quindi compiono un lavoro positivo quando le cariche sono portate nella configurazione finale

$$W = -U_{finale} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} (4 - \sqrt{2}) > 0.$$

Capitolo 3

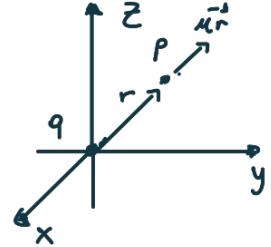
Legge di Gauss

3.1 Legge di Gauss

La proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo è legata al fatto che il campo elettrico generato da una carica puntiforme q è radiale, ovvero è diretto nella direzione radiale rispetto a q ed il suo modulo dipende solo dalla distanza r da q . Infatti, la dimostrazione che il campo \vec{E} dovuto a q è conservativo non dipende dal particolare andamento del suo modulo in funzione di r . Essa infatti si può ripetere anche per un campo radiale generico (con riferimento ad un sistema di coordinate polari centrato su q):

$$E(\vec{x}) = E(r)\vec{u}_r.$$

Infatti



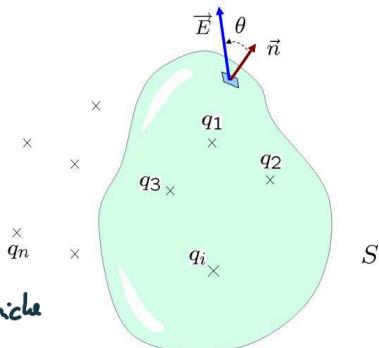
$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} E(r) \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = V(r_1) - V(r_2), \quad (3.1.1)$$

essendo

$$V(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr + V(r_0).$$

La legge di Coulomb non implica solo che il campo E generato da q sia radiale, ma anche che $|\vec{E}| \sim 1/r^2$.

La proprietà che il modulo del campo \vec{E} , dovuto ad una carica puntiforme, vada come $1/r^2$, è espressa invece dalla legge di Gauss. Supponiamo di avere un sistema di cariche $(q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ distribuite nello spazio ed una superficie chiusa S , vedi Figura 3.1.



Il campo elettrico dipende da tutte le cariche interne ed esterne ad S!!!

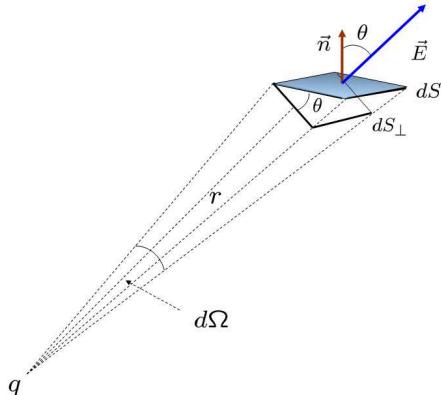
Il flusso dipende solo da quelle interne.

Figura 3.1: Distribuzione di n cariche puntiformi nello spazio e superficie chiusa S .

Convenzionalmente sceglieremo la normale \vec{n} in ogni punto di S diretta in verso uscente. La legge di Gauss afferma che il flusso del campo \vec{E} dovuto a tutte le cariche q_i attraverso S è $\frac{1}{\epsilon_0}$ per la somma delle cariche q_i interne a S :

$$\Phi_S(E) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{int} q_i.$$

Per dimostrare questa proprietà, consideriamo il campo elettrico generato da una singola



Ampliando porzione dello spazio racchiuso da tutte le semirette che si originano in O e passano in C. Figura 3.2: Flusso del campo elettrico attraverso un elemento di superficie dS .

carica puntiforme q e calcoliamo il flusso attraverso un elemento di superficie dS orientato con il versore normale \vec{n} , vedi Figura 3.2:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = |\vec{E}| \cos(\theta) dS = \begin{cases} +|\vec{E}| dS_\perp & \theta < \frac{\pi}{2} \\ -|\vec{E}| dS_\perp & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

flusso elementare

Angolo piano giro = 2π

$$\text{Angolo solido giro} = \Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

3.1. LEGGE DI GAUSS

87

ove $dS_{\perp} = dS|\cos(\theta)|$ è la proiezione di dS nel piano perpendicolare la congiungente dS con la carica q . Usando la legge di Coulomb, troviamo

$$d\Phi = \begin{cases} +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}|q|\frac{dS_{\perp}}{r^2} & \cos(\theta) > 0 \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}|q|\frac{dS_{\perp}}{r^2} & \cos(\theta) < 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Il rapporto $\frac{dS_{\perp}}{r^2}$ misura l'angolo solido sotto cui la carica q vede la superficie dS o dS_{\perp} in unità steradiani (si veda la parentesi matematica nella Sezione 3.1.1 per un richiamo delle nozioni relative all'angolo solido e della sua misura). Questo rapporto infatti non dipende da r , ma solo dall'angolo solido $d\Omega$, definito come regione di spazio delimitata dalle rette che collegano q ai punti del bordo di dS , o equivalentemente, dS_{\perp} . Possiamo quindi riscrivere

$$d\Phi = \begin{cases} +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}|q|d\Omega & \cos(\theta) > 0 \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}|q|d\Omega & \cos(\theta) < 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Il flusso $d\Phi$ non dipende dalla distanza di dS da q ma solo dall'angolo solido sotto cui q vede dS .

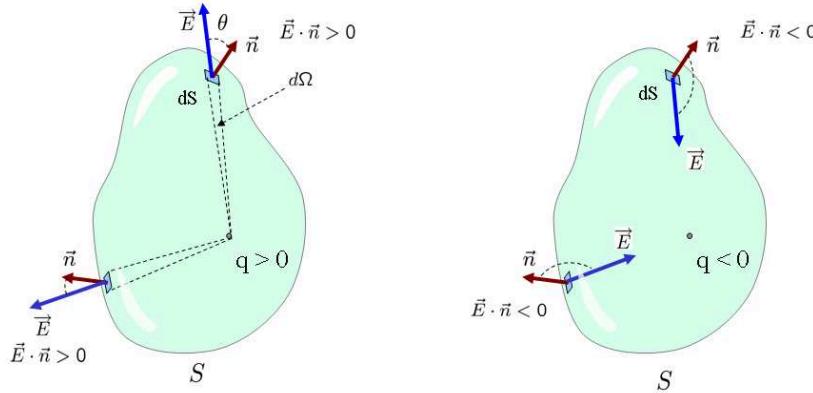


Figura 3.3: Carica q interna alla superficie chiusa S .

Consideriamo adesso una superficie chiusa S . Al solito la normale \vec{n} è fissata, in ogni suo punto, in verso uscente. Supponiamo che q sia all'interno di S , vedi Figura 3.3, e calcoliamo il flusso, attraverso S , del campo da essa generato come somma dei flussi elementari $d\Phi$ attraverso ciascun elemento di superficie dS in cui pensiamo sia suddivisa S :

$$\Phi_S(E) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS.$$

Osserviamo che

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}|q|d\Omega & q > 0 \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}|q|d\Omega & q < 0 \end{cases}, \quad (3.1.4)$$

e hanno lo stesso segno, qualsiasi sia dS , poiché se $q > 0$, \vec{E} ed \vec{n} hanno prodotto scalare positivo ($\cos(\theta) > 0$), mentre se $q < 0$, $\vec{E} \cdot \vec{n} = |E| \cos(\theta) < 0$. Possiamo scrivere quindi che, per ogni dS :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega, \quad (3.1.5)$$

per cui

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S q d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0},$$

essendo l'angolo solido giro $\int_S d\Omega = 4\pi$.

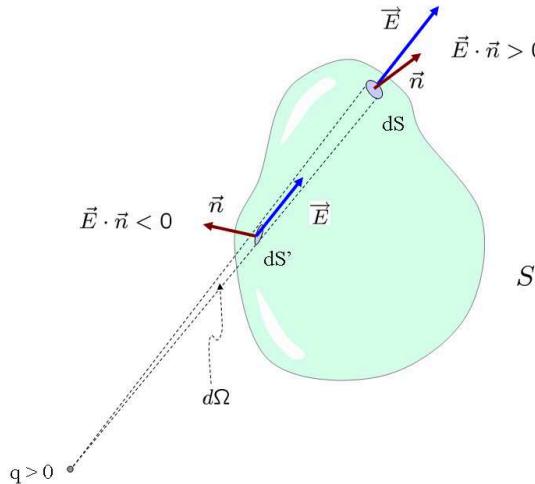


Figura 3.4: Carica q esterna alla superficie chiusa S .

Se invece q è esterna ad S , vedi Figura 3.4, ad ogni elemento della superficie dS attraverso cui il flusso è positivo ($\vec{E} \cdot \vec{n} > 0$)

$$d\Phi = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} d\Omega > 0,$$

esiste un elementino dS' visto da q sotto lo stesso angolo solido $d\Omega$ ma su cui $\vec{E} \cdot \vec{n} < 0$ e quindi

$$d\Phi' = -\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} d\Omega < 0.$$

Nella somma quindi i contributi elementari al flusso si elidono a due a due e si ottiene

$$\Phi_S(\vec{E}) = 0. \quad (3.1.6)$$

Se abbiamo un sistema $(q_i) = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ di cariche puntiformi, il campo totale \vec{E} è la somma dei campi \vec{E}_i dovuti a ciascuna carica q_i

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (3.1.7)$$

Il flusso di \vec{E} attraverso una superficie chiusa S

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS = \sum_{i=1}^n \Phi_S(\vec{E}_i) \quad (3.1.8)$$

è la somma dei flussi $\Phi_S(\vec{E}_i)$ che valgono $\frac{q_i}{\epsilon_0}$ se q_i è interna ad S e zero se q_i è esterna ad S . Troviamo quindi che

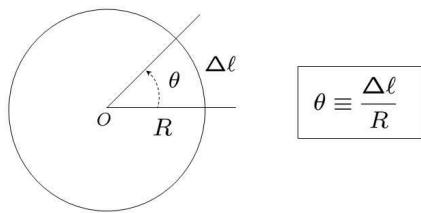
$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{int} q_i,$$

ove il simbolo \sum_{int} indica la somma sulle cariche interne ad S . Per la dimostrazione del teorema di Gauss è stato essenziale usare la proprietà che $|\vec{E}| \sim 1/r^2$ per una carica puntiforme, in modo che il flusso elementare $d\Phi$ si esprimesse in termini di $d\Omega$ e non dipendesse da r .

3.1.1 Parentesi matematica: misura dell'angolo solido

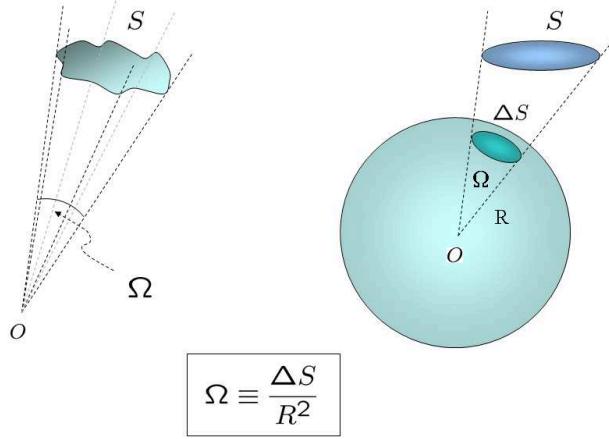
Un angolo solido è definito come la porzione di spazio delimitata dal fascio di rette che congiungono un punto O , detto vertice, con i punti sul bordo di una superficie S data, vedi Figura 3.6. In analogia con la misura di un angolo piano θ in radianti, come rapporto tra l'arco di una circonferenza di raggio R ed il raggio stesso,

si definisce la misura di un angolo solido Ω in *steradianti* il rapporto tra l'area ΔS della calotta sferica staccata da Ω su una sfera di raggio r , centrata sul vertice, ed r^2 , vedi Figura 3.6.



$$\Omega = \frac{\Delta S}{r^2}.$$

Figura 3.5: Misura di un angolo piano.
Questo rapporto si dimostra non dipendere da r , ma solo da Ω . Se l'angolo solido $d\Omega$ è infinitesimo, la superficie dS da esso staccata sulla sfera è infinitesima e perpendicolare alla direzione che la congiunge con il vertice O . $d\Omega$ quindi lo si può misurare come il rapporto tra una superficie dS a cui è sotteso $d\Omega$, perpendicolare alla congiungente dS con O , ed il quadrato r^2 della distanza r di dS da O . È utile esprimere dS elemento di superficie sferica in coordinate polari. Con riferimento alla Figura 2.12, descriviamo dS come un rettangolino intorno ad un punto della sfera di cui un lato è un arco di parallelo a cui è sotteso un angolo $d\phi$ e quindi di lunghezza $r \sin(\theta)d\phi$, mentre l'altro

Figura 3.6: Misura di un angolo solido Ω .

è un arco di meridiano a cui è sotteso l'angolo $d\theta$ e quindi ha lunghezza $rd\theta$. L'area della superficie dS vale:

$$dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi.$$

Per completezza diamo la forma di un elemento di volume dV in coordinate polari. dV è il volume di un parallelepipedo di base dS ed altezza dr . Esso quindi vale

$$dV = dS dr = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi.$$

L'angolo solido elementare $d\Omega$ in coordinate polari si scrive

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin(\theta) d\theta d\phi,$$

ed infatti non dipende da r . L'integrale di $d\Omega$ al variare di dS su S dà l'angolo solido giro pari a 4π

$$\int_S d\Omega = \int_S \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{r^2} \int_S dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$$

3.2 Caratterizzazione del campo elettrostatico

Possiamo ora riassumere le proprietà del campo elettrostatico finora discusse:

- a) \vec{E} è conservativo, per via del fatto che il campo generato da una singola carica puntiforme è radiale:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(r)\vec{u}_r;$$

- b) legge di Gauss, legata alla proprietà che il campo E di una singola carica puntiforme ha l'andamento:

$$|\vec{E}(\vec{x})| \propto \frac{1}{r^2}.$$

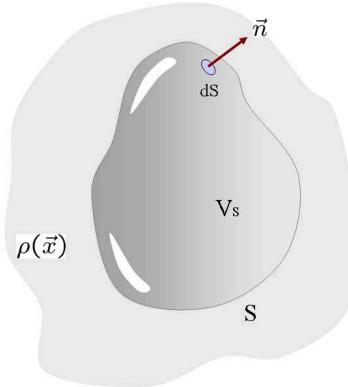


Figura 3.7: Superficie chiusa S all'interno di una distribuzione continua di cariche.

Tali proprietà, che noi abbiamo derivato a partire dalla legge di Coulomb, caratterizzano completamente il campo elettrostatico. Mostreremo infatti, nella prossima sezione, come da esse sia possibile derivare la legge di Coulomb.

Possiamo generalizzare la legge di Gauss al caso di una distribuzione continua di cariche con densità volumetrica $\rho(\vec{x})$. Il flusso di \vec{E} attraverso una superficie chiusa S dipende solo dalla carica q_{int} contenuta all'interno di S . Questa si esprime, in funzione di ρ , nel seguente modo:

$$q_{int} = \int_{V_S} \rho(\vec{x}) d^3\vec{x},$$

ove V_S è il volume racchiuso da S , vedi Figura 3.7. La legge di Gauss si scrive quindi:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_S} \rho(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (3.2.1)$$

3.3 Forma locale della legge di Gauss e la divergenza

3.3 Dimostriamo una proprietà matematica importante che lega il flusso di un campo vettoriale $\vec{V}(\vec{x})$ attraverso una superficie chiusa S , all'integrale, sul volume V_S racchiuso da S , di un campo scalare, detto divergenza di \vec{V} , associato a \vec{V} , che si indica con il simbolo $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ o anche $\operatorname{div} \vec{V}$. In un sistema di coordinate cartesiane si definisce

*definito
in ogni
punto dello
spazio
de un numero*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

*de campo vettoriale e
campo scalare*

operatori differenziali

Vale la seguente proprietà:

$$\int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_{V_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) dV.$$

integrale di Superficie integrale di Volume

lega i due integrali

Dimostriamo questa proprietà per la superficie di un cubo infinitesimo, di lati dx, dy, dz ,

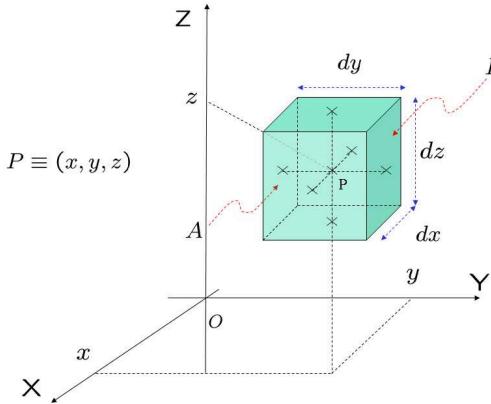


Figura 3.8: Superficie cubica infinitesima.

intorno ad un punto $\vec{x} \equiv (x, y, z)$, vedi Figura 3.8. Calcoliamo il flusso di V , attraverso la superficie S del cubo: $\Phi_S(\vec{V})$. È utile scrivere $\Phi_S(\vec{V})$ come somma dei flussi attraverso coppie di facce parallele. Prendiamo, per esempio, $\Phi_y(\vec{V})$ che denota il flusso attraverso le facce A e B perpendicolari ad y . Sulla faccia B , posizionata in $y + \frac{dy}{2}$, la normale $\vec{n}_B = \vec{u}_y$ ed il campo è uniforme è pari a $\vec{V}(x, y + \frac{dy}{2}, z)$ (la superficie della faccia B è infinitesima e ha area $dx dz$). Sulla faccia A , posizionata in $y - \frac{dy}{2}$, la normale è $\vec{n}_A = -\vec{u}_y$ ed il campo è uniforme, pari a $\vec{V}(x, y - \frac{dy}{2}, z)$, ovvero, il valore nel punto centrale di A . Il flusso attraverso la coppia di facce è

$$\begin{aligned}
 \Phi_y(\vec{V}) &= \Phi_A(\vec{V}) + \Phi_B(\vec{V}) = \\
 &= \vec{V}\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) \cdot (-\vec{u}_y) dx dz + \vec{V}\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) \cdot \vec{u}_y dx dz = \\
 &= \left[\vec{V}\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) - \vec{V}\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) \right] \cdot \vec{u}_y dx dz = \frac{\partial}{\partial y} V_y(x, y, z) dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che i flussi $\Phi_x(\vec{V})$ e $\Phi_z(\vec{V})$, attraverso le facce perpendicolari all'asse x e z rispettivamente, valgono

$$\Phi_x(\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x} V_x(x, y, z) dx dy dz; \quad \Phi_z(\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial y} V_z(x, y, z) dx dy dz. \quad (3.3.1)$$

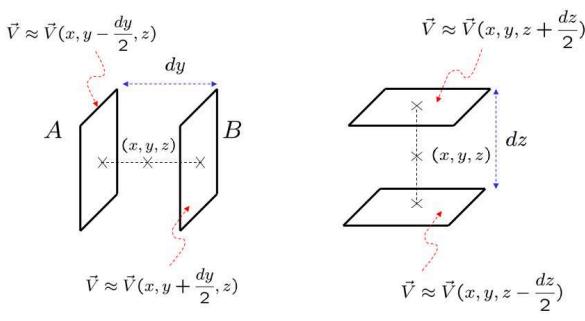


Figura 3.9: Flusso attraverso coppie di facce parallele.

Questo si dimostra, vedi Figura 3.9, sempre prendendo su ogni faccia il campo uniforme e pari al suo valore al centro della faccia. Il flusso totale attraverso S è dato da

$$\begin{aligned} \Phi_S(\vec{V}) &= \Phi_x(\vec{V}) + \Phi_y(\vec{V}) + \Phi_z(\vec{V}) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z \right) dx dy dz = \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x, y, z) d^3 \vec{x}. \end{aligned}$$

vedi Figura 3.10. Il flusso $d\Phi$ di V attraverso la superficie di un volumetto è

$$d\Phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})(\vec{x}) d^3 \vec{x}. \quad (3.3.2)$$

Se sommiamo il flusso $d\Phi$ attraverso la superficie di tutti i cubetti, i contributi ai flussi attraverso le facce in comune tra cubetti adiacenti si cancellano, perché calcolati con normali uguali ed opposte. Alla somma contribuiscono quindi solo i flussi attraverso le facce dei cubetti che giacciono sulla superficie S , ovvero:

$$\int_{V_S} d\Phi = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \Phi_S(\vec{V}),$$

ma, per la (3.3.2) possiamo anche scrivere:

$$\int_{V_S} d\Phi = \int_{V_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d^3 \vec{x}, \quad (3.3.3)$$

per cui troviamo che

$$\oint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_{V_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d^3 \vec{x}. \quad (3.3.4)$$

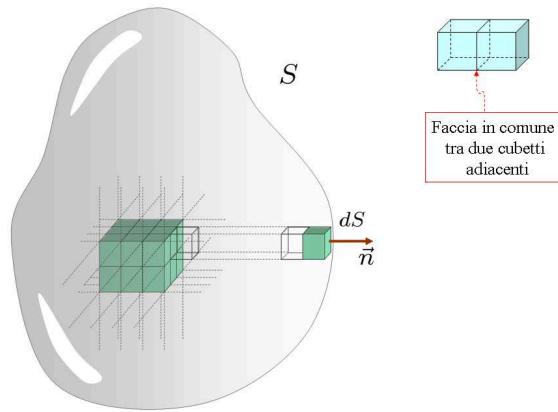


Figura 3.10: Approssimazione del volume delimitato da una superficie chiusa attraverso un numero infinitamente grande di cubetti infinitesimi.

Usiamo questa proprietà per riscrivere la legge di Gauss in forma locale. Data una carica distribuita nello spazio con densità volumetrica $\rho(\vec{x})$ e data una superficie chiusa S , per la legge di Gauss (3.2.1) abbiamo che

*teorema della
divergenza*

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_S} \rho(\vec{x}) d^3x. \quad (3.3.5)$$

La proprietà (3.3.4) ci consente di riscrivere questa equazione nella forma:

$$\oint_{V_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d^3x = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_S} \rho(\vec{x}) d^3x. \quad (3.3.6)$$

*equazione di due
integrali dello stesso
tipo*

L'equazione (3.3.6) vale qualsiasi sia la superficie S . In particolare, preso un generico punto \vec{x} , possiamo considerare, intorno ad esso, una superficie cubica infinitesima che racchiude il volume d^3x . Se applichiamo a tale superficie la (3.3.6), gli integrali in ambo i membri, essendo estesi su un volume infinitesimo, consistono in un solo termine, e l'equazione si può quindi riscrivere, nell'intorno di \vec{x} , nella forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}). \quad (3.3.7)$$

*legge di Gauss in forma locale
(punto per punto)*

Questa relazione esprime la legge di Gauss in forma locale e vale in ogni punto dello spazio.

Riassumiamo le due proprietà che caratterizzano univocamente il campo elettrostatico:

1) $\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv 0$ (\vec{E} conservativo)

*J -> eq di Maxwell per
un campo elettrostatico*

2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}).$

La 2) è l'equazione che lega il campo \vec{E} alle sue sorgenti (carica elettrica). La 1) è identicamente soddisfatta se scriviamo il campo \vec{E} conservativo in termini del suo potenziale V : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Infatti una proprietà generale è che il rotore del gradiente è sempre nullo:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = 0,$$

come si può dimostrare scrivendo $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V)$ componente per componente,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} V - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} V \right) \vec{u}_x + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} V - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} V \right) \vec{u}_y + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V \right) \vec{u}_z = 0,\end{aligned}\quad (3.3.8)$$

ove abbiamo utilizzato la proprietà che il risultato dell'azione di due derivate parziali successive su una stessa funzione non dipende dall'ordine in cui esse sono calcolate (questo si esprime dicendo che le due derivate parziali successive *commutano*).

In termini di $V(\vec{x})$ la 2) si scrive

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) \Leftrightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}).$$

incognita *termine noto*

(3.3.9)

Questa è detta equazione di Poisson e l'operatore ∇^2 è detto laplaciano:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V.$$

(3.3.10)

In assenza di cariche, $\rho = 0$, l'equazione di Poisson diventa:

$$\nabla^2 V = 0, \quad (3.3.11)$$

ed è detta equazione di Laplace. Le soluzioni dell'equazione di Laplace sono dette funzioni armoniche. Il lettore interessato può trovare nella sezione 3.5 un approfondimento matematico in cui sono discussi i teoremi di esistenza ed unicità per l'equazione di Poisson.

La legge di Gauss è utile per determinare il campo \vec{E} dovuto a sistemi di cariche che possiedono una certa simmetria. In questi casi infatti è possibile trovare superfici chiuse S sui cui punti \vec{E} è diretto lungo la normale \vec{n} , ovvero $\vec{E} = E \vec{n}$ ed E è uniforme su S . In questi casi possiamo scrivere

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E S = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

da cui

$$\vec{E} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0 S} \vec{n},$$

ipotesi volgono 1) e 2) CAPITOLO 3. LEGGE DI GAUSS
teo: ricavone legge di Coulomb

essendo q_{int} la carica contenuta all'interno di S .

Per dimostrare che le proprietà a) e b) della sezione 3.2 o, equivalentemente, le proprietà 1) e 2) enunciate sopra forniscono una caratterizzazione del campo elettrostatico, mostriamo ora come, applicando la legge di Gauss, nell'ipotesi che il campo generato da una carica puntiforme sia centrale (e quindi conservativo), è possibile ricavare la legge di Coulomb, ovvero l'espressione del campo elettrostatico \vec{E} dovuto ad una carica puntiforme q . Usiamo solo la simmetria del problema e la proprietà che \vec{E} è un campo centrale, legata al fatto di essere conservativo o irrotazionale. Il problema ha simmetria sferica e la forma generale di \vec{E} come campo centrale sarà

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(r) \vec{u}_r .$$

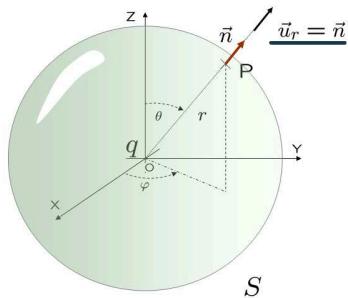


Figura 3.11: Superficie sferica centrata sulla carica q .

Prendiamo una superficie sferica S di raggio r e centrata sulla carica q , vedi Figura 3.11. Su ogni punto di S , la normale \vec{n} coincide con il versore radiale uscente, ovvero con la direzione di \vec{E} . Inoltre $E(r)$ è uniforme su S (r è costante su S). Scriviamo la legge di Gauss

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0},$$

ma

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \oint_S \vec{E} \cdot \vec{u}_r dS = \\ &= \oint_S E(r) dS = E(r) \oint_S dS = \\ &= 4\pi r^2 E(r), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\boxed{\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

e quindi

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r .$$

$$\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Da questa espressione segue la legge di Coulomb che descrive la forza $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$ esercitata da q su una carica q_0 .

Consideriamo adesso una distribuzione lineare di carica su un filo rettilineo, in modo uniforme con densità lineare $\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{cost.}$ lungo il filo. Conviene fissare un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) con asse coincidente con il filo carico, come in figura. La simmetria del sistema infatti è cilндrica rispetto al filo. La forma generale di \vec{E} , compatibile

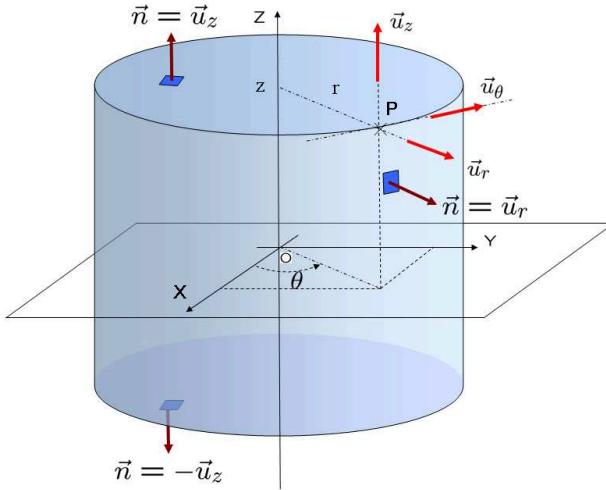


Figura 3.12: Superficie cilindrica coassiale alla distribuzione di carica.

con la simmetria del problema e con la sua proprietà di essere conservativo o irrotazionale, è:

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r, \quad (3.3.12)$$

ovvero \vec{E} è diretto, sul piano ortogonale al filo, nella direzione radiale. Consideriamo una superficie cilindrica S centrata sul filo, vedi Figura 3.12, di raggio di base r ed altezza d e calcoliamo il flusso di E attraverso S . Dividiamo a tale scopo il flusso nella somma del flusso di \vec{E} attraverso le due basi ed il flusso attraverso la superficie laterale di S

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\text{basi}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \oint_{\text{lat.}}^{\text{sup.}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS.$$

Sulla base superiore si ha $\vec{n} = \vec{u}_z$, mentre su quella inferiore si ha $\vec{n} = -\vec{u}_z$. Su entrambe le basi \vec{E} è ortogonale ad \vec{n} e quindi $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ed il flusso corrispondente è nullo. Sulla superficie laterale $\vec{n} = \vec{u}_r$ e quindi

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_{\text{lat.}}^{\text{sup.}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\text{lat.}}^{\text{sup.}} E(r) dS = 2\pi r d E(r).$$

Applichiamo la legge di Gauss sapendo che la carica interna ad S è $q_{int} = \lambda d$

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2\pi r d E(r) = \frac{\lambda d}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

ovvero

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r .$$

Calcoliamo infine il potenziale elettrico $V(\vec{x})$ usando la relazione

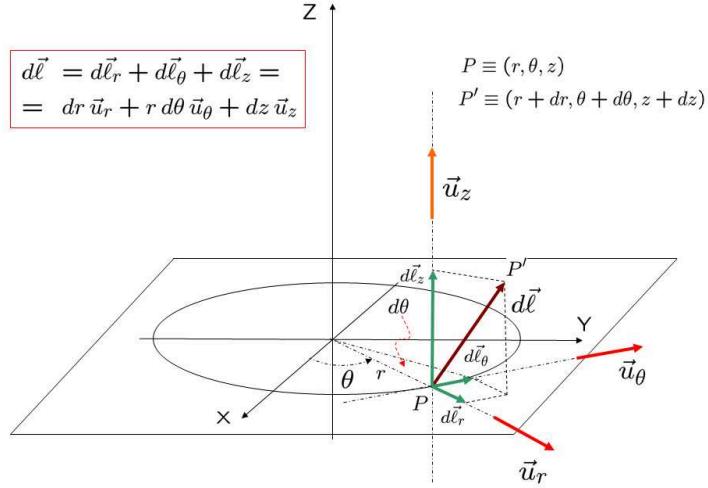


Figura 3.13: Spostamento infinitesimo in coordinate cilindriche.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V . \quad (3.3.13)$$

Per scrivere il gradiente $\vec{\nabla}V$ in coordinate cilindriche (r, θ, z) occorre esprimere, in queste coordinate, uno spostamento infinitesimo $d\vec{\ell}$ che congiunge un punto P di coordinate (r, θ, z) ad un punto P' , ad esso infinitamente vicino, di coordinate $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$. La componente di $d\vec{\ell}$ sul piano ortogonale all'asse z ha la stessa espressione che in coordinate polari piane, mentre la componente lungo \vec{u}_z è dz :

$$d\vec{\ell} = dr d\vec{u}_r + r d\theta d\vec{u}_\theta + dz d\vec{u}_z . \quad (3.3.14)$$

Il differenziale dV del potenziale elettrico, calcolato come la differenza $V(P') - V(P)$, si esprime nel seguente modo:

$$dV = V(r + dr, \theta + d\theta, z + dz) - V(r, \theta, z) = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} .$$

Per la genericità di $d\vec{\ell}$, questa uguaglianza implica:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z .$$

Essendo il campo elettrico radiale rispetto al filo, in virtù della (3.3.13), le componenti di $\vec{\nabla}V$ lungo \vec{u}_θ , \vec{u}_z sono nulle, ovvero che V dipende solo dalla coordinata r : $V = V(r)$. La componente lungo \vec{u}_r della (3.3.13) ci fornisce la seguente equazione differenziale in $V(r)$:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.3.15)$$

la cui soluzione generale è:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{cost.} \quad ?$$

Possiamo fissare la costante richiedendo che ad una certa distanza R , $V(R) = 0$:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right). \quad ?$$

3.3.1 Regola di Faraday

*rapporto
di lunghezza \Rightarrow dimensionale
na verso per la forza*

La regola di Faraday serve a rappresentare un campo vettoriale $\vec{V}(\vec{x})$ in termini di linee di campo. Consideriamo, nell'intorno di un punto P , una superficie dS perpendicolare al

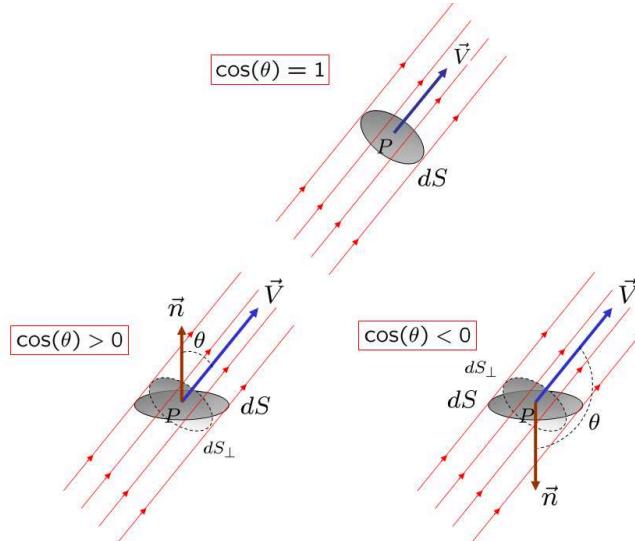


Figura 3.14: Flusso di un campo \vec{V} attraverso una superficie infinitesima dS .

vettore $\vec{V}(P)$ e sufficientemente piccola da poter considerare \vec{V} uniforme su di essa, vedi Figura 3.14. Tracciamo attraverso dS un numero di linee di campo ΔN tale che

$$u \Delta N = |\vec{V}| dS,$$

essendo u una unità (sempre positiva) uguale in ogni punto dello spazio con dimensione di flusso di \vec{V} (il valore di u determina quanto è dettagliata la rappresentazione di \vec{V} tramite

L_> non dipende dal punto

*u_V
ΔN deve ↑ \Rightarrow Rappresentazione + dettagliate*

linee di campo). Se dS è invece obliqua rispetto a \vec{V} con normale \vec{n} , vedi Figura 3.14, sceglieremo il numero ΔN di linee di flusso attraverso dS in modo che:

$$u \Delta N = |d\Phi| = |\vec{V} \cdot \vec{n}| dS = |\vec{V}| |\cos(\theta)| dS = |\vec{V}| dS_{\perp},$$

ove θ è l'angolo tra \vec{n} e $\vec{V}(P)$ e $dS_{\perp} \equiv |\cos(\theta)| dS$ è l'area della proiezione di dS sul piano perpendicolare a $\vec{V}(P)$. Dalla definizione di flusso elementare $d\Phi$ di \vec{V} attraverso dS troviamo che:

$$\begin{aligned} u \Delta N &= d\Phi \text{ se } \cos(\theta) > 0, \\ u \Delta N &= -d\Phi \text{ se } \cos(\theta) < 0. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

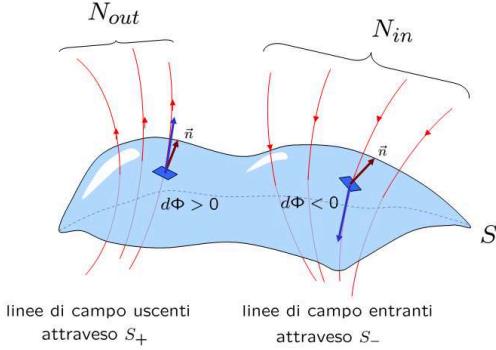


Figura 3.15: Flusso di un campo \vec{V} attraverso una superficie finita S .

nei punti nell'intorno dei quali il flusso di \vec{V} è uscente ($d\Phi > 0$) ed entrante ($d\Phi < 0$), vedi Figura 3.15. Il flusso di \vec{V} attraverso S si esprime quindi come la somma dei contributi positivi attraverso S_+ e negativi attraverso S_- :

$$\Phi_S(\vec{V}) = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_+} \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_-} \vec{V} \cdot \vec{n} dS.$$

Usiamo adesso la (3.3.16) per esprimere i flussi elementari (positivi e negativi) attraverso ciascuna superficie infinitesima dS in termini del numero di linee ΔN che l'attraversa:

$$\Phi_S(\vec{V}) = u \left(\sum_{S_+} \Delta N - \sum_{S_-} \Delta N \right) = u (N_{out} - N_{in}), \quad (3.3.17)$$

ove N_{out} ed N_{in} rappresentano rispettivamente il numero di linee di campo uscenti ed entranti in S . Analogamente il flusso di \vec{V} attraverso una superficie chiusa S , in unità u , si può misurare contando le linee uscenti N_{out} e le linee entranti N_{in} e scrivendo

$$\Phi_S(\vec{V}) = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = (N_{out} - N_{in}) u, \quad (3.3.18)$$

Quindi il numero di linee di campo che attraversano una superficie danno una misura, in unità u , del flusso del campo \vec{V} attraverso la superficie stessa, con un segno positivo se esse sono concordi con la normale \vec{n} e quindi il flusso è positivo (*flusso uscente*), o con un segno negativo se il flusso è negativo (*flusso entrante*), ovvero le linee sono discordi con la normale. Possiamo ora calcolare il flusso di \vec{V} attraverso una superficie finita S . La superficie S si divide in due parti, S_+ ed S_- , consistenti rispettivamente

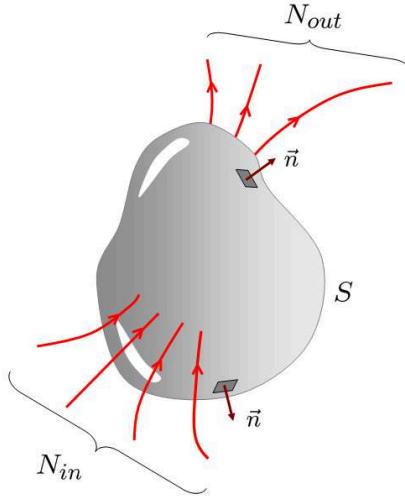


Figura 3.16: Flusso di \vec{V} attraverso una superficie chiusa.

ove $-u N_{in}$ misura il contributo negativo al flusso nei punti in cui $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$, mentre $u N_{out}$ il contributo positivo dovuto ai punti in cui le linee sono uscenti e $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$, vedi Figura 3.16.

Possiamo ora dimostrare la seguente proprietà

Le linee di campo si originano nei punti in cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} > 0$ e terminano nei punti in cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} < 0$.

Infatti, consideriamo un punto P in cui si originano un certo numero N_{out} di linee di campo ed una superficie dS nell'intorno di P sufficientemente piccola e chiusa da essere attraversata solo dalle linee di campo che si originano in P (vedi Figura 3.17)

$$\oint_{dS} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = u N_{out} > 0.$$

Se applichiamo il teorema della divergenza, chiamando dV il volumetto racchiuso da dS , troviamo che

$$\oint_{dS} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})(P) dV = u N_{out} > 0,$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(P) > 0.$$

Analogamente, se N_{in} linee di campo terminano in P :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(P) < 0.$$

Se \vec{V} è il campo elettrostatico \vec{E} , esso soddisfa la legge di Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

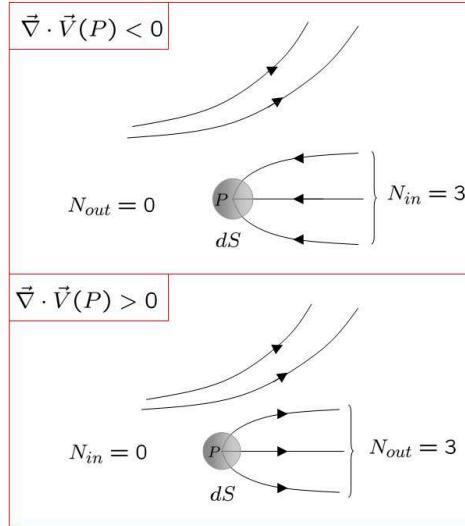


Figura 3.17: Punto P in cui si originano o terminano linee di campo.

ovvero $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} > 0$ nei punti in cui è presente una carica positiva, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} < 0$ sulle cariche negative. Per la proprietà appena dimostrata, concludiamo che

le linee di campo elettrostatico si originano su cariche positive e terminano su cariche negative.

In Figura 3.18 sono rappresentati esempi di campi vettoriali con alcune proprietà locali caratteristiche.

3.4 Campi solenoidali

Introduciamo qui un concetto matematico che sarà utile in seguito quando tratteremo le correnti stazionarie ed il campo magnetico.

Un campo vettoriale $\vec{V}(\vec{x})$ è detto *solenoidale* se una delle seguenti tre condizioni equivalenti è soddisfatta:

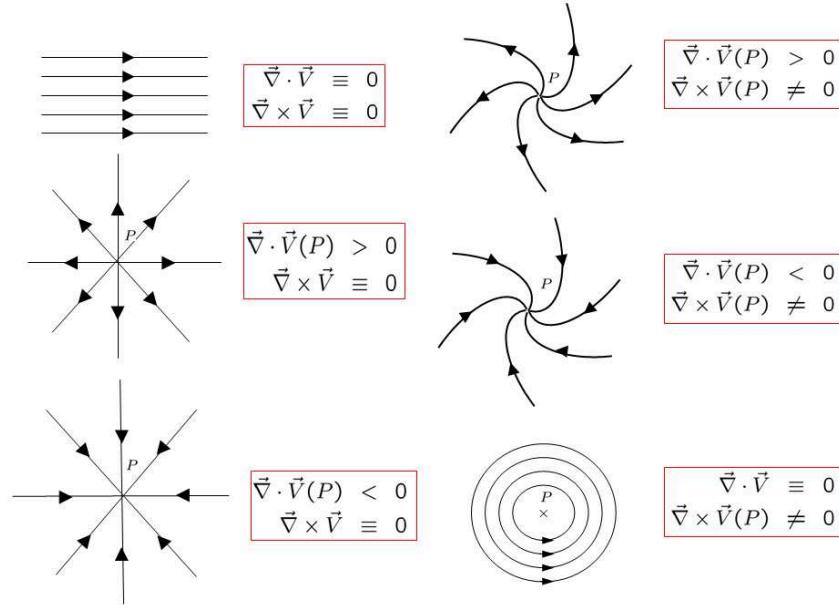


Figura 3.18: Esempi di campi vettoriali con valori caratteristici della divergenza e del rotore.

a) la divergenza di $\vec{V}(\vec{x})$ è nulla ovunque:¹

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = 0 , \quad \forall \vec{x}; \quad (3.4.1)$$

b) il flusso di $\vec{V}(\vec{x})$ attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è zero:

$$\oint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0 , \quad \forall S; \quad (3.4.2)$$

c) le linee di campo di $\vec{V}(\vec{x})$ sono continue e chiuse.

Dimostriamo l'equivalenza di queste tre proprietà.

a) \Rightarrow b) Usando il teorema della divergenza, possiamo scrivere il flusso del campo attraverso una generica superficie chiusa S come:

$$\oint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dV = 0 , \quad (3.4.3)$$

¹Per dimostrare l'implicazione a) \Rightarrow b), dobbiamo fare una ipotesi sulle proprietà geometriche dello spazio in cui vale a): il volume racchiuso da una superficie chiusa qualsiasi all'interno dello spazio è contenuto nello spazio stesso. Un esempio di spazio che non soddisfa questa proprietà è quello esterno ad una sfera S_0 . In questo caso infatti, presa una superficie chiusa S qualsiasi che contenga al suo interno la sfera S_0 , il volume V_S racchiuso da S contiene i punti interni alla sfera S_0 , che non appartengono al nostro spazio. Quindi V_S non è contenuto nello spazio considerato. Per questo tipo di spazi l'implicazione a) \Rightarrow b) non vale.

dove abbiamo usato l'ipotesi *a*).

b) $\Rightarrow c)$. Se le linee di campo non fossero chiuse, esisterebbero punti in cui alcune linee terminano o si originano. Se prendiamo una superficie chiusa sufficientemente piccola, intorno a questi punti, il flusso del campo attraverso essa, misurato come differenza tra il numero di linee uscenti ed entranti, sarebbe diverso da zero, negando così l'ipotesi *b*).

c) $\Rightarrow a)$. Se *a)* non fosse vera, esisterebbero punti in cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \neq 0$. Abbiamo imparato che in questi punti terminano o si originano linee di campo. Esisterebbero quindi linee di campo non chiuse, in negazione dell'ipotesi *c*).

Abbiamo già incontrato nel capitolo 2 un esempio di campo solenoidale: il rotore di un qualsiasi campo vettoriale $\vec{V}(\vec{x})$: $\vec{\nabla} \times \vec{V}$. Abbiamo infatti dimostrato nella sezione 2.4, usando il teorema di Stokes, che il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è zero. Essendo vera la *b*), sono vere anche la *a*) e la *c*). In particolare, il lettore può dimostrare che vale l'identità:²

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0. \quad (3.4.5)$$

Altri esempi di campi solenoidali, che incontreremo più avanti, sono il campo densità di corrente $\vec{j}(\vec{x})$ che descrive una corrente stazionaria, e il campo magnetico \vec{B} .

Il campo elettrostatico *non è solenoidale* in quanto le sue sorgenti (cariche elettriche) definiscono punti in cui la divergenza è diversa da zero.

3.4.1 Altre proprietà del rotore

Dati un campo scalare $f(\vec{x})$ ed uno vettoriale $\vec{V}(\vec{x})$ vale la seguente proprietà:

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{V}) = \vec{\nabla}(f) \times \vec{V} + f \vec{\nabla} \times \vec{V}, \quad (3.4.6)$$

ove il primo termine a secondo membro è il prodotto vettoriale tra il gradiente di $f(\vec{x})$ e $\vec{V}(\vec{x})$. Questa proprietà si dimostra applicando, nella definizione del rotore di $f \vec{V}$, regola di Leibniz alle derivate parziali delle sue componenti cartesiane $f V_x, f V_y, f V_z$.

Esercizio. Si calcoli il seguente rotore:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{r} \vec{V} \right), \quad (3.4.7)$$

ove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e \vec{V} è un vettore costante (ovvero non dipendente dalle x, y, z rispetto alla quale le derivate parziali, nella definizione del rotore, sono calcolate). Applichiamo ora la proprietà (3.4.6) tenendo conto che, essendo \vec{V} costante, il secondo termine a secondo

²Per dimostrare questa proprietà conviene scrivere la divergenza ed il rotore in coordinate cartesiane:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (3.4.4)$$

ed usare la proprietà che il risultato di due derivate parziali su una funzione non dipende dall'ordine con cui esse sono calcolate.

3.5. APPROFONDIMENTO MATEMATICO: TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ PER L'EQUAZIONE DI POISSON

membro, essendo proporzionale al rotore di \vec{V} , è nullo:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{r} \vec{V} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \times \vec{V}. \quad (3.4.8)$$

Usiamo adesso la proprietà (2.3.37) del paragrafo 2.3.1 per scrivere:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{r} \vec{V} \right) = -\frac{\vec{u}_r}{r^2} \times \vec{V} = \vec{V} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2}. \quad (3.4.9)$$

L'equazione (3.4.9) ci servirà nel capitolo 7 per scrivere il campo magnetico in termini del suo potenziale vettore.

3.5 Approfondimento matematico: teorema di esistenza ed unicità per l'equazione di Poisson (non richiesto)

Abbiamo imparato che il potenziale di un campo elettrostatico $V(\vec{x})$ all'interno di un volume V_S , in presenza di una carica ivi distribuita con densità volumetrica $\rho(\vec{x})$, soddisfa l'equazione di Poisson (3.3.9):³

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \quad \forall \vec{x} \in V_S. \quad (3.5.1)$$

Supponiamo che il volume V_S nel quale vogliamo risolvere l'equazione sia delimitato da una superficie chiusa S (contorno di V_S). Senza scendere in dettagli matematici i quali meriterebbero una trattazione approfondita che va oltre gli scopi di questo corso, vogliamo in questa sezione enunciare, motivandole, alcune importanti proprietà di questa equazione. In particolare ci concentreremo sui teoremi di esistenza ed unicità della soluzione per date condizioni al contorno rispondendo alla domanda: quali condizioni si possono porre su $V(\vec{x})$ e le sue derivate sulla superficie S affinché la soluzione dell'equazione di Poisson in V_S esista e sia unica?⁴ Si può dimostrare che le condizioni al contorno che garantiscono l'esistenza della soluzione e l'unicità del corrispondente campo elettrostatico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ sono di tre tipi:

1. **Condizioni di Dirichelet:** siano assegnati i valori di $V(\vec{x})$ nei punti del contorno:

$$V(\vec{x}) = V_0(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in S.$$

La soluzione dell'equazione di Poisson con condizioni al contorno di Dirichelet definisce il *problema di Dirichelet*;

³In questa sezione, per il potenziale elettrico e per il volume vengono usati due caratteri diversi (rispettivamente V e v) che non vanno confusi.

⁴Supporremo che la funzione $V(x, y, z)$ sia *regolare* in V_S , ovvero continua assieme alle sue derivate parziali e che le derivate (parziali) seconde siano finite.

2. **Condizioni di Neumann:** siano assegnati i valori della *derivata normale* di $V(\vec{x})$, definita come $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}V = -\vec{n} \cdot \vec{E}$, ove \vec{n} è il versone normale alla superficie S , nei punti di S :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}V(\vec{x}) = f(\vec{x}) , \quad \forall \vec{x} \in S .$$

La soluzione dell'equazione di Poisson con condizioni al contorno di Neumann definisce il *problema di Neumann*;

3. **Condizioni miste:** siano assegnati i valori di $V(\vec{x})$ in una parte del contorno S , e della sua derivata normale $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}V$ nella rimanente parte di S .

Osserviamo che le condizioni di Neumann corrispondono a specificare la componente $\vec{n} \cdot \vec{E}$ del campo elettrostatico normale alla superficie S in ogni punto della stessa. Esse non possono però essere scelte arbitrariamente. Infatti i valori di $\vec{n} \cdot \vec{E}$ nei punti di S devono comunque essere tali che sia soddisfatta la legge di Gauss, che si può pensare implicata dalla stessa equazione di Poisson⁵:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int} , \quad (3.5.3)$$

essendo q_{int} la carica contenuta nel volume V_S racchiuso da S :

$$q_{int} = \int_{V_S} \rho dV .$$

La legge di Gauss (3.5.3) è una condizione necessaria sulle condizioni al contorno di Neumann per l'esistenza della soluzione.

È importante sottolineare che il teorema di esistenza ed unicità si applica a ciascuna delle condizioni al contorno sopra definite *separatamente*: *imporre allo stesso tempo condizioni di Dirichelet e di Neumann (ovvero fissare indipendentemente i valori del potenziale e della sua derivata normale) su tutta la superficie S rende il problema sovradeterminato e la soluzione in generale non esistente*.

Nel caso delle condizioni di Dirichelet, la soluzione $V(\vec{x})$ dell'equazione di Poisson è unica, mentre se vengono imposte condizioni di Neumann la soluzione è unica a meno di una costante indipendente dal punto. In entrambi i casi il campo elettrostatico corrispondente $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ è univocamente determinato all'interno di V_S . Dimostriamo queste proprietà di unicità per i problemi di Dirichelet e Neumann.

⁵Noi abbiamo derivato l'equazione di Poisson dalla legge di Gauss. Possiamo viceversa mostrare che la legge di Gauss si può ricavare dall'equazione di Poisson. A tale scopo scriviamo il primo membro dell'equazione come $\nabla^2 V = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Integrando ambo i membri sul volume V_S ed applicando il teorema della divergenza, ricaviamo la legge di Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = - \oint_S \vec{\nabla}V \cdot \vec{n} dS = - \int_{V_S} \nabla^2 V dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_S} \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int} . \quad (3.5.2)$$

3.5. APPROFONDIMENTO MATEMATICO: TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE

Siano $V_1(\vec{x})$ e $V_2(\vec{x})$ due soluzioni dello *stesso problema* (di Neumann o di Dirichelet). Questo vuol dire che se la prima funzione soddisfa

$$\nabla^2 V_1(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \quad \forall \vec{x} \in V_S, \quad (3.5.4)$$

$$V_1(\vec{x}) = V_0(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Dirichelet}), \quad (3.5.5)$$

oppure

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} V_1(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Neumann}), \quad (3.5.6)$$

$V_2(\vec{x})$ soddisfa le stesse equazioni:

$$\nabla^2 V_2(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \quad \forall \vec{x} \in V_S, \quad (3.5.7)$$

$$V_2(\vec{x}) = V_0(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Dirichelet}), \quad (3.5.8)$$

oppure

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} V_2(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Neumann}). \quad (3.5.9)$$

Questo implica che la differenza $V(\vec{x}) = V_1(\vec{x}) - V_2(\vec{x})$ delle due funzioni soddisfa in V_S l'*equazione di Laplace*:

$$\nabla^2 V = \nabla^2(V_1 - V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0, \quad (3.5.10)$$

con le seguenti condizioni al contorno su S :

$$V(\vec{x}) = V_1(\vec{x}) - V_2(\vec{x}) = V_0(\vec{x}) - V_0(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Dirichelet}),$$

oppure

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}) = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} V_1(\vec{x}) - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} V_2(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Neumann}).$$

Nel derivare le equazioni per $V(\vec{x})$ abbiamo utilizzato le proprietà (linearità):

$$\nabla^2(V_1 - V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2, \quad \vec{\nabla}(V_1 - V_2) = \vec{\nabla} V_1 - \vec{\nabla} V_2, \quad (3.5.11)$$

che il lettore può facilmente verificare utilizzando le espressioni del laplaciano e del gradiente in coordinate cartesiane.

Riassumendo, la funzione $V(\vec{x})$ è soluzione dell'equazione di Laplace in V_S (ovvero è armonica):

$$\nabla^2 V = 0, \quad (3.5.12)$$

e soddisfa le condizioni al contorno:

$$V(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Dirichelet}) \quad (3.5.13)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in S \quad (\text{Neumann}). \quad (3.5.14)$$

Dimostriamo che la funzione armonica $V(\vec{x})$ che risolve il problema di Dirichelet è nulla in V_S , mentre essa è costante in V_S nel caso del problema di Neumann. A tale scopo calcoliamo

la divergenza del campo vettoriale $V \vec{\nabla}V(\vec{x})$. Dalla definizione di divergenza e di gradiente lo studente può facilmente verificare che:

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla}V) = \vec{\nabla}V \cdot \vec{\nabla}V + V \nabla^2V. \quad (3.5.15)$$

Integriamo ambo i membri di tale equazione sul volume V_S :

$$\int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla}V) dV = \int_{V_S} |\vec{\nabla}V|^2 dV + \int_{V_S} V \nabla^2V dV = \int_{V_S} |\vec{\nabla}V|^2 dV, \quad (3.5.16)$$

ove abbiamo riscritto $(\vec{\nabla}V) \cdot (\vec{\nabla}V)$ come $|\vec{\nabla}V|^2$ e abbiamo usato l'equazione di Laplace per mettere a zero $V \nabla^2V$. Ora applichiamo all'integrale al primo membro il teorema della divergenza:

$$\int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla}V) dV = \oint_S V \vec{\nabla}V \cdot \vec{n} dS. \quad (3.5.17)$$

L'equazione (3.5.16) si riscrive nel seguente modo:

$$\oint_S V \vec{\nabla}V \cdot \vec{n} dS = \int_{V_S} |\vec{\nabla}V|^2 dV. \quad (3.5.18)$$

Osserviamo che, sia che vengano usate condizioni al contorno di Dirichelet, sia che vengano usate quelle di Neumann, $V \vec{\nabla}V \cdot \vec{n}$ risulta essere nullo sulla superficie S , per cui l'integrale a primo membro è nullo. Da questo deriva che anche l'integrale a secondo membro deve annullarsi:

$$\int_{V_S} |\vec{\nabla}V|^2 dV = 0. \quad (3.5.19)$$

Essendo il primo membro l'integrale di una funzione non-negativa, il suo annullarsi implica l'annullarsi della funzione integranda $|\vec{\nabla}V|^2$ in ogni punto di V_S , e quindi che:

$$\vec{\nabla}V(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \forall \vec{x} \in V_S. \quad (3.5.20)$$

Da questo discende che:

$$V(\vec{x}) = C = \text{cost.}, \quad \forall \vec{x} \in V_S, \quad (3.5.21)$$

da cui deduciamo che le due funzioni V_1 e V_2 differiscono per una costante:

$$V_1 = V_2 + C. \quad (3.5.22)$$

Se le condizioni al contorno sono di Dirichelet, essendo $V_1 = V_2$ su S , la costante C è zero e quindi:

$$V_1 = V_2. \quad (3.5.23)$$

Nel caso del problema di Neumann, C non è fissata dalle condizioni al contorno e quindi rimane una costante arbitraria. In ogni caso i campi elettrostatici corrispondenti ai due potenziali $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}V_1$ e $\vec{E}_2 = -\vec{\nabla}V_2$ coincidono nel volume V_S :

$$\vec{E}_1(\vec{x}) = \vec{E}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in V_S. \quad (3.5.24)$$

Il lettore può facilmente verificare che la derivazione di cui sopra si applica anche alle condizioni al contorno miste, perché in tal caso $V \vec{\nabla}V \cdot \vec{n}$ continua ad essere nulla sul contorno S .

Esercizi sulla legge di Gauss

Esercizio 3.5.1 Siano date cariche puntiformi q_1, q_2, q_3 ed una superficie chiusa S che racchiude q_1 e q_2 (si veda la figura).

1. Il campo elettrico \vec{E} in punto P di S dipende da q_3 ?
2. Se porto q_3 all'infinito, come varia il flusso di \vec{E} attraverso S ?

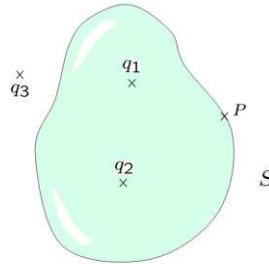


Figura 3.19: Esercizio 3.5.1.

Soluzione: Per quanto riguarda il punto 1), il campo elettrostatico in qualsiasi punto dello spazio (e quindi anche in P) dipende da tutte le cariche presenti, inclusa q_3 . Questo invece non vale per il flusso del campo attraverso una superficie chiusa che, per la legge di Gauss, dipende dalle sole cariche interne alla superficie. Nel nostro caso risulta:

$$\Phi(\vec{E})_S = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2). \quad (3.5.25)$$

Il flusso $\Phi(\vec{E})_S$ è quindi insensibile alla carica q_3 e questo risponde al punto 2).

Esercizio 3.5.2 Data una superficie cubica di lato $a = 1.4\text{ m}$, sia la normale alla superficie diretta, in ogni punto, in verso uscente (per es. la normale alla faccia $BCGD$ è $\vec{n} = \vec{u}_y$), vedi Figura 3.20. Calcolare il flusso attraverso la faccia $BCGD$ dei seguenti campi elettrici:

1. $\vec{E} = 6(\frac{N}{C}) \vec{u}_x$;
2. $\vec{E} = -2(\frac{N}{C}) \vec{u}_y$;
3. $\vec{E} = -3(\frac{N}{C}) \vec{u}_x + 4(\frac{N}{C}) \vec{u}_z$;

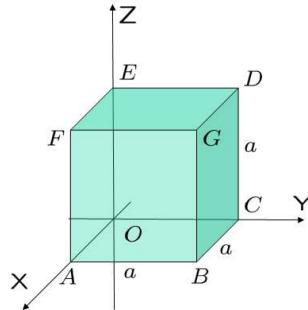


Figura 3.20: Esercizio 3.5.2.

Soluzione: Essendo il campo \vec{E} uniforme in tutti i casi, il flusso attraverso $BCDG$ si scrive $\phi_{BCDG}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_y a^2$. Nei tre casi avremo quindi:

1. $\phi = 0$;
2. $\phi = -2 a^2 (V/m) = -3.92 (V/m)$;
3. $\phi = 0$.

Esercizio 3.5.3 Calcolare flusso di \vec{E} attraverso l'intera superficie cubica dell'esercizio precedente, nei casi 1), 2) e 3).

Soluzione: Essendo \vec{E} uniforme il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo. Questo lo si può capire applicando il teorema della divergenza (3.3.4) per scrivere il flusso in termini della divergenza di \vec{E} , e ricordando che per un campo uniforme la divergenza è nulla ovunque. Un altro modo per dimostrarlo è osservando che i contributi al flusso di un campo uniforme attraverso due facce contrapposte sono uguali e opposti e quindi si cancellano nella somma.

Esercizio 3.5.4 Calcolare flusso attraverso il cubo dell'esercizio 3.5.2 dei seguenti campi:

- a) $\vec{E} = 6 \left(\frac{N}{Cm} \right) y \vec{u}_y$
- b) $\vec{E} = -7 \left(\frac{N}{C} \right) \vec{u}_x + \left(4 \left(\frac{N}{C} \right) + 6 \left(\frac{N}{Cm} \right) y \right) \vec{u}_y$

Soluzione: a) gli unici contributi al flusso ϕ corrispondono alle facce $AOEF$ (normale $\vec{n} = -\vec{u}_y$) e $BCDG$ (normale $\vec{n} = \vec{u}_y$):

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{AOEF} \vec{E} \cdot (-\vec{u}_y) dS + \int_{BCDG} \vec{E} \cdot (\vec{u}_y) dS = \int_{BCDG} 6 \left(\frac{N}{Cm} \right) a dS = \\ &= 6 a^3 (V m) \approx 16.46 (V m). \end{aligned} \tag{3.5.26}$$

ove abbiamo usato che $\vec{E} = 0$ sulla faccia $AOEF(y = 0)$.

b) Il campo \vec{E} è la somma di due contributi: uno uniforme e uno che dipende da y

$$\vec{E} = \vec{E}_{unif} + \vec{E}_{non.\ unif.},$$

ove

$$\vec{E}_{unif} = -7 \left(\frac{N}{C} \right) \vec{u}_x + 4 \left(\frac{N}{C} \right) \vec{u}_y, \quad \vec{E}_{non.\ unif.} = 6 \left(\frac{N}{Cm} \right) y \vec{u}_y. \quad (3.5.27)$$

Ricordando che il flusso della somma di due campi è la somma dei flussi di ciascun campo, troviamo:

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi(\vec{E})_{unif} + \Phi(\vec{E})_{non.\ unif.} = 16.46 (V\ m) \quad (3.5.28)$$

ove si è tenuto conto che il primo termine a secondo membro è nullo essendo il flusso attraverso una superficie chiusa di un campo uniforme.

Esercizio 3.5.5 Con riferimento al problema precedente, calcolare la carica q_{int} contenuta nel cubo.

Soluzione: Dalla legge di Gauss si ha

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int} \Rightarrow q_{int} = \epsilon_0 \Phi(\vec{E}) = 8.85 \times 10^{-12} \times 16.46 C \approx 1.4610^{-10} C.$$

Esercizio 3.5.6 Si consideri una rete per farfalle con bordo su un sostegno circolare C di raggio R . Sia S_1 la superficie della rete con normale \vec{n}_1 in ogni suo punto e sia S_2 la superficie piana (disco) con bordo C e normale \vec{n}_2 . Siano i versi di \vec{n}_1 ed \vec{n}_2 concordi. Sia infine la rete immersa in un campo \vec{E} uniforme. Calcolare

a) la differenza del flusso di \vec{E} tra le due superfici S_1 ed S_2 :

$$\Delta\Phi = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS - \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS.$$

b) Supponendo che nella rete (ovvero tra le superfici S_1 ed S_2) vi sia una carica q , calcolare $\Delta\Phi$.

Soluzione: a) Riscriviamo la differenza $\Delta\Phi$ come flusso di \vec{E} attraverso una superficie chiusa S costituita da S_1 e S_2 con normale uscente in ogni punto (nei punti di S_1 la normale \vec{n} ad S sarà quindi $-\vec{n}_1$):

$$\Delta\Phi = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{S_1} \vec{E} \cdot (-\vec{n}_1) dS = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS.$$

Essendo \vec{E} uniforme, il suo flusso attraverso S è nullo e quindi: $\Delta\Phi = 0$.

b) Se tra S_1 ed S_2 è presente una carica q , applichiamo la legge di Gauss alla superficie S e troviamo:

$$\Delta\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} q.$$

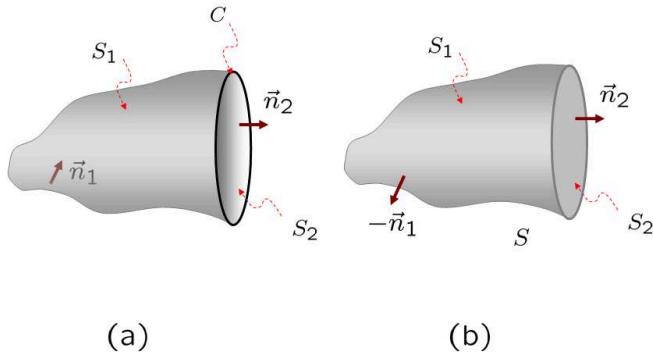


Figura 3.21: Esercizio 3.5.6.

Esercizio 3.5.7 Sia data una lastra di spessore $d = 5\text{ cm}$ ed estensione infinita. Al suo interno è distribuita uniformemente una carica positiva con densità volumetrica: $\rho = \frac{dq}{dV} = 10^{-6} \text{ C m}^{-3}$. Si determini:

- il campo elettrostatico \vec{E} in tutto lo spazio: $x < \frac{d}{2}, -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}, x > \frac{d}{2}$;
- il potenziale elettrico V in tutto lo spazio e rappresentarlo graficamente;
- il lavoro compiuto dalle forze elettriche su una carica $q = -10^{-7}\text{C}$ che viene spostata da $x = -\frac{d}{2}$ a $x = d$;

Suggerimento. Fare uso della simmetria del problema rispetto al piano passante per l'origine O (Figura 3.22) e perpendicolare all'asse X . Un campo elettrostatico ha la stessa simmetria della distribuzione di carica che lo genera. Il campo \vec{E} quindi sarà diretto lungo X , $\vec{E}(x) = E(x) \vec{u}_x$, ed avrà simmetria speculare rispetto al suddetto piano: $E(-x) = -E(x)$. Si applichi la legge di Gauss ad una superficie cilindrica con asse lungo X e le cui facce parallele alla lastra sono posizionate nei punti speculari $x, -x$

Soluzione: Osserviamo che il sistema possiede una simmetria rispetto al piano α passante per O e perpendicolare all'asse x (parallelo quindi alla lastra). Da questo deduciamo alcune proprietà di $\vec{E}(\vec{x})$: $\vec{E}(x) = E(x) \vec{u}_x$ con $E(-x) = -E(x)$. Applichiamo la legge di Gauss ad un cilindro con asse parallelo ad \vec{u}_x e le cui facce, parallele alla lastra, sono posizionate nei punti x e $-x$, si veda la Figura 3.23. Sia S l'area delle facce. Poiché attraverso la superficie

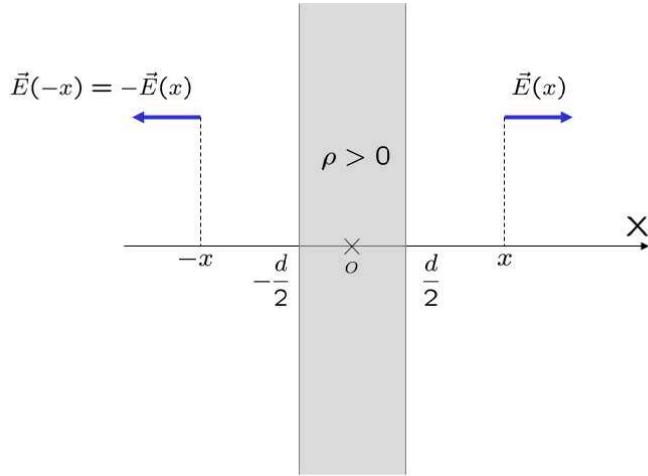


Figura 3.22: Esercizio 3.5.7.

laterale del cilindro il flusso di \vec{E} è nullo, essendo la normale ad essa perpendicolare ad \vec{E} in ogni punto, il flusso di \vec{E} attraverso il cilindro ha contributi solo dalle facce parallele:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{cilindro} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E(x) S - E(-x) S = 2 E(x) S .$$

Distinguiamo due casi:

- $x > \frac{d}{2}$. In questo caso la carica interna al cilindro è $q_{int} = S d \rho$. Applicando la legge di Gauss si ha

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int} = \frac{1}{\epsilon_0} S d \rho ,$$

da cui segue $E(x) = \frac{d\rho}{2\epsilon_0}$, $E(-x) = -\frac{d\rho}{2\epsilon_0}$.

- $0 < x < \frac{d}{2}$. In questo caso: $q_{int} = 2 x S \rho$. Applicando la legge di Gauss si ha

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{2 x S \rho}{\epsilon_0} ,$$

da cui segue $E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$.

Per calcolare $V(\vec{x})$ risolviamo l'equazione

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z .$$

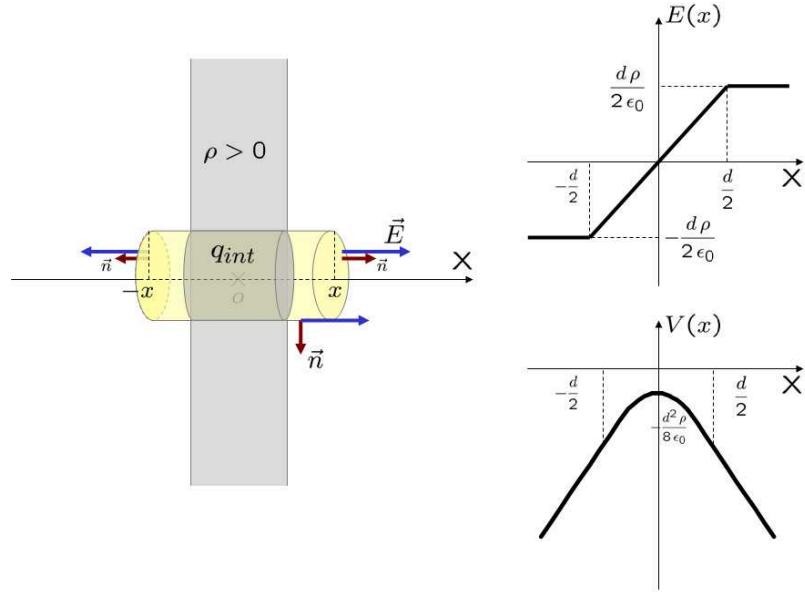


Figura 3.23: Esercizio 3.5.7.

Uguagliando i due vettori componente per componente, ed essendo $\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$, troviamo che $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$, ovvero $E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$. Risolviamo questa equazione differenziale nelle tre regioni considerate:

$$\begin{aligned} x < -\frac{d}{2} \quad V(x) &= \frac{d\rho}{2\epsilon_0} x + c_0, \\ -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad V(x) &= -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + c_1, \\ x > \frac{d}{2} \quad V(x) &= -\frac{d\rho}{2\epsilon_0} x + c_2. \end{aligned}$$

La soluzione scritta sopra non descrive ancora il potenziale, poiché dipende da tre costanti, mentre noi sappiamo che il potenziale elettrostatico è definito a meno di una sola costante additiva arbitraria. Le tre costanti c_0, c_1, c_2 non sono infatti arbitrarie, ma sono legate da due condizioni. Queste condizioni derivano dal richiedere che $V(x)$ sia continua ovunque. Possiamo infatti fissare arbitrariamente una delle costanti, p.es. c_0 , e ricavare le altre due dalla condizione di continuità. Fissiamo per semplicità $c_0 = 0$, e richiediamo che $V(x)$ sia continua nel passare da una regione alla successiva (il suo limite sinistro e destro in ogni punto devono coincidere). La continuità in $x = -d/2$ implica:

$$V\left(-\frac{d^-}{2}\right) = V\left(-\frac{d^+}{2}\right) \Rightarrow -\frac{d^2\rho}{8\epsilon_0} = c_1,$$

(3.5.29)

da cui ricaviamo che per $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$:

$$V(x) = -\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right) \frac{\rho}{2\epsilon_0}. \quad (3.5.30)$$

Continuità in $x = d/2$ invece implica:

$$V\left(\frac{d^-}{2}\right) = V\left(\frac{d^+}{2}\right) \Rightarrow c_2 = 0, \quad (3.5.31)$$

da cui troviamo, per $x > \frac{d}{2}$:

$$V(x) = -\frac{d\rho}{2\epsilon_0} x. \quad (3.5.32)$$

Gli andamenti di $E(x)$ e di $V(x)$ sono illustrati nella Figura 3.23.

Calcoliamo infine il lavoro.

$$\begin{aligned} W &= q \left(V\left(-\frac{d}{2}\right) - V(d) \right) = \\ &= q \left(-\frac{d^2 \rho}{4\epsilon_0} + \frac{d^2 \rho}{2\epsilon_0} \right) = \frac{d^2 q \rho}{4\epsilon_0} \simeq -7 \times 10^{-6} J. \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

Esercizio 3.5.8 Sia data una carica q distribuita uniformemente all'interno di un volume sferico di raggio R . Si calcoli il campo elettrostatico ed il relativo potenziale dentro e fuori la distribuzione di carica.

Soluzione: La distribuzione di carica ha simmetria sferica. Ci aspettiamo quindi che anche il campo da essa generato abbia la stessa simmetria, ovvero che sia un campo di tipo radiale rispetto al centro della distribuzione:

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(r) \vec{u}_r. \quad (3.5.34)$$

Descriviamo la distribuzione di carica per mezzo della densità volumetrica $\rho = \frac{dq}{dV}$, uniforme all'interno della sfera ($\rho = \text{cost.}$ per $r < R$):

$$q = \int_V \rho dV = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho. \quad (3.5.35)$$

Per determinare $E(r)$ applichiamo la legge di Gauss ad una superficie sferica S_r di raggio r , concentrica alla distribuzione di carica, vedi Figura 3.24. In ogni punto di S_r la normale

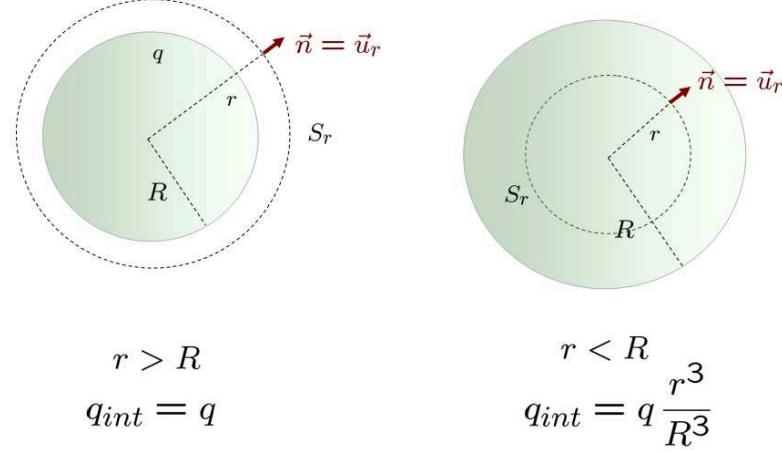


Figura 3.24: Esercizio 3.5.8.

\vec{n} coincide con il versore radiale \vec{u}_r e quindi $\vec{E} \cdot \vec{n} = E(r)$, costante su S_r . Il flusso di \vec{E} attraverso S_r vale:

$$\Phi_{S_r}(\vec{E}) = \int_{S_r} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E(r) \int_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r). \quad (3.5.36)$$

La legge di Gauss, riferita alla superficie S_r si scrive:

$$\Phi_{S_r}(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (3.5.37)$$

Il valore della carica q_{int} interna ad S_r vale, se $r < R$ e la superficie è quindi interna alla distribuzione di carica, il prodotto della densità ρ , costante, per il volume racchiuso da S_r , mentre, se $r > R$, $q_{int} = q$, vedi Figura 3.24:

$$\begin{aligned} r < R : \quad q_{int} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = q \frac{r^3}{R^3}, \\ r > R : \quad q_{int} &= q, \end{aligned} \quad (3.5.38)$$

ove nella prima equazione abbiamo espresso ρ in termini di q usando la (3.5.35). Applicando quindi la legge di Gauss (3.5.37) alle due regioni $r < R$ ed $r > R$, troviamo:

$$\begin{aligned} r < R : \quad 4\pi r^2 E(r) &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(q \frac{r^3}{R^3} \right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{u}_r, \\ r > R : \quad 4\pi r^2 E(r) &= \frac{1}{\epsilon_0} q \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r. \end{aligned} \quad (3.5.39)$$

Ricordando che \vec{u}_r in un punto dello spazio è definito come il versore associato al corrispondente vettore posizione \vec{x} : $\vec{u}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{x}}{r}$, possiamo scrivere il campo elettrico nella seguente forma:

$$r < R \quad : \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{R^3}, \quad (3.5.40)$$

$$r > R \quad : \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{r^3}. \quad (3.5.41)$$

Calcoliamo infine il potenziale elettrico $V(\vec{x})$ associato al problema risolvendo la seguente equazione differenziale

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \right), \quad (3.5.42)$$

ove abbiamo usato l'espressione del gradiente del potenziale in coordinate polari sferiche. Essendo il campo elettrico radiale, le componenti angolari del gradiente a secondo membro devono essere nulle, ovvero le derivate parziali di V rispetto a θ, φ sono zero. Da questo concludiamo che il potenziale è funzione della sola coordinata r e risolve l'equazione differenziale:

$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (3.5.43)$$

Risolviamo prima l'equazione nelle due regioni ($r < R$ ed $r > R$) separatamente, poi fissiamo una delle due costanti arbitrarie richiedendo la continuità di $V(r)$ in $r = R$:

$$r < R \quad : \quad V(r) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + V_0, \quad (3.5.44)$$

$$r > R \quad : \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + V'_0. \quad (3.5.45)$$

La continuità in R implica:

$$V(R^-) = V(R^+) \Rightarrow V_0 = V'_0 + \frac{3q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, \quad (3.5.46)$$

mentre, richiedendo $V(r \rightarrow \infty) = 0$, fissiamo anche la seconda costante: $V'_0 = 0$. L'espressione finale del potenziale è:

$$r < R \quad : \quad V(r) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{(3R^2 - r^2)}{R^3}, \quad (3.5.47)$$

$$r > R \quad : \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (3.5.48)$$

Capitolo 4

Conduttori

Abbiamo definito conduttori quei materiali nei quali sono presenti portatori di carica liberi di muoversi. Conduttori possono essere liquidi (soluzioni elettrolitiche, ecc...) o solidi (metalli). Noi ci occuperemo prevalentemente di conduttori metallici. I portatori di carica liberi all'interno dei metalli sono elettroni appartenenti agli orbitali più esterni degli atomi. Essi sono legati molto debolmente ai rispettivi nuclei, così debolmente che basta un'energia dell'ordine dell'energia termica per liberarli, e, per questo, sono da considerarsi a tutti gli effetti elettroni liberi di muoversi da un punto all'altro del metallo. Possiamo stimare la densità di elettroni liberi in un metallo. Prendiamo come esempi il rame *Cu* e l'argento *Ag*. In questi casi ciascun atomo ha un solo elettrone libero esterno, per cui la densità di elettroni liberi è pari alla densità di atomi:

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{N_A}{V_A},$$

ove V_A è il volume molare (di un grammo-atomo) ed $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro. Si può esprimere V_A come

$$V_A[m^3] = \frac{A}{\rho[g/m^3]}, \quad A = \text{peso atomico}.$$

Troviamo quindi

$$n = \frac{N_A \rho}{A}.$$

Possiamo ora dare una stima di n per i due elementi:

$$Cu : \begin{cases} A = 63.546 \\ \rho = 8.96 \times 10^6 g \times m^{-3} \\ n = 8.5 \times 10^{28} \text{ elettroni} \times m^{-3} \end{cases} \quad Ag : \begin{cases} A = 107.868 \\ \rho = 10.5 \times 10^4 g \times m^{-3} \\ n = 5.8 \times 10^{28} \text{ elettroni} \times m^{-3}. \end{cases}$$

Consideriamo un conduttore metallico carico in situazione di equilibrio elettrostatico (situazione ovvero in cui non si osservano spostamenti macroscopici di carica.) Valgono le seguenti proprietà:

1. All'interno del conduttore $\vec{E} = 0$. Dobbiamo a questo punto distinguere tra campo elettrico microscopico \vec{E}_{micro} e campo elettrico \vec{E} che si misura sperimentalmente. Il primo è dovuto, in ogni istante, alle cariche presenti nell'intorno di un certo punto del conduttore. Poiché le cariche sono soggette al moto termico, che è disordinato, \vec{E}_{micro} è una quantità discontinua nello spazio (fuori dagli atomi $\vec{E}_{micro} \simeq 0$ mentre dentro gli atomi è apprezzabilmente diverso da zero) e rapidamente variabile nel tempo. Proprio per questo motivo il campo microscopico \vec{E}_{micro} non è direttamente misurabile, essendo gli strumenti di misura incapaci di seguirne le variazioni su scale di lunghezza e tempo così piccole. Il campo che si misura \vec{E} è invece una media di \vec{E}_{micro} in un volumetto dV piccolo su scala macroscopica ma sufficientemente grande da contenere un numero abbastanza elevato di particelle:

$$\vec{E} = \langle \vec{E}_{micro} \rangle_{dV}; \quad \vec{E} \text{ uniforme su } dV.$$

*Velocità media cubetto: $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i$
moto caotico
cariche
Avogadro*

Osserviamo che il campo \vec{E} macroscopico è una quantità *regolare* a differenza di \vec{E}_{micro} . Se in un punto $\vec{E} \neq 0$ in una situazione di equilibrio elettrostatico, \vec{E} agirebbe sugli elettroni liberi con una forza

$$\vec{F} = -e\vec{E} \quad \text{per elettrone},$$

e determinerebbe un moto di insieme, o *di deriva*, degli elettroni stessi (*corrente elettrica*), che in regime di equilibrio elettrostatico non si osserva. Da questa proprietà

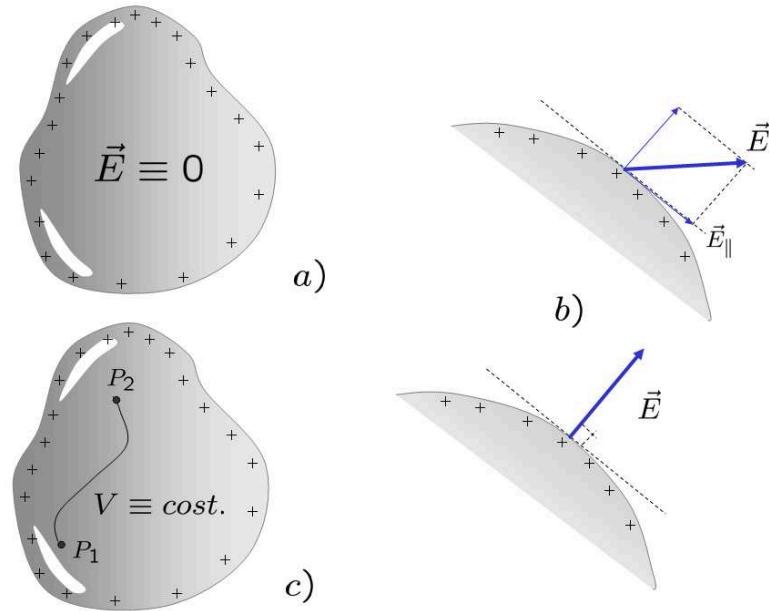


Figura 4.1: Conduttore carico in equilibrio elettrostatico.

deduciamo che :

- (a) non vi sono cariche all'interno del conduttore e quindi:
 (b) un eccesso di carica si distribuisce sempre sulla superficie del conduttore, vedi Figura 4.1 a).

Prendiamo infatti un punto P all'interno del conduttore ed una superficie S chiusa infinitesima intorno a P , che racchiude un volume dV , anch'esso infinitesimo. Sia S totalmente contenuta all'interno del conduttore. Per la legge di Gauss il flusso di \vec{E} attraverso S è legato alla carica $dq_{int} = \rho(P) dV$ (ρ essendo la densità di carica) contenuta al suo interno:

$$d\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{dq_{int}}{\epsilon_0} \simeq \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} dV, \quad (4.0.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(P) = 0$$

ma $\vec{E} \equiv 0$ su S per cui $\rho(P) = 0$, ovvero non vi è carica in P . Da questo deriva la proprietà (b). Un eccesso di carica si distribuisce sulla superficie del conduttore in modo che il campo da essi prodotto \vec{E} sia nullo all'interno, in condizione di equilibrio.

3° PROPRIETÀ

2. Sulla superficie di un conduttore il campo \vec{E} è diretto in direzione normale alla superficie stessa, in condizione di equilibrio, vedi Figura 4.1 b). Se, all'equilibrio, \vec{E} sulla superficie avesse una componente tangente alla superficie stessa, sui portatori di carica liberi agirebbe una forza tangente alla superficie che determinerebbe un moto di cariche non osservato all'equilibrio, vedi Figura 4.1 b).

Teorema di Coulomb: Sia $\sigma(P) = \frac{dq}{dS}$ la densità superficiale di carica in un punto P sulla superficie di un conduttore carico. Se \vec{n} è la normale alla superficie nel punto P , il campo \vec{E} in prossimità del punto P , all'esterno del conduttore, vale:

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}. \quad (4.0.3)$$

Per dimostrarlo, consideriamo una superficie cilindrica infinitesima S avente una delle due facce parallele ($d\Sigma_+$) all'esterno del conduttore e l'altra ($d\Sigma_-$) all'interno, vedi Figura 4.2. Le due facce sono infinitamente vicine ed S contiene il punto P sulla superficie del conduttore carico. Sulla faccia interna $d\Sigma_-$, $\vec{E} = \vec{E}_- = 0$, mentre sulla faccia esterna, per la proprietà 2),

$$\vec{E} = \vec{E}_+ = E \vec{n}_+ = E \vec{n} \quad \text{uniforme su } d\Sigma, \quad (4.0.4)$$

essendo \vec{n}_+ la normale a $d\Sigma_+$. Essa coincide con la normale \vec{n} alla superficie in P essendo le facce del cilindro parallele alla superficie del conduttore in P . Calcoliamo ora il flusso di \vec{E} attraverso S

$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E}_+ \cdot \vec{n}_+ d\Sigma_+ + \vec{E}_- \cdot \vec{n}_- d\Sigma_- + \Phi_{\text{sup.}}(\vec{E}) = E d\Sigma_+, \quad (4.0.5)$$

$$\hookrightarrow \vec{n}_\perp = \vec{n}$$

lat.

$$\vec{E}(P) = E_+ \vec{n}$$

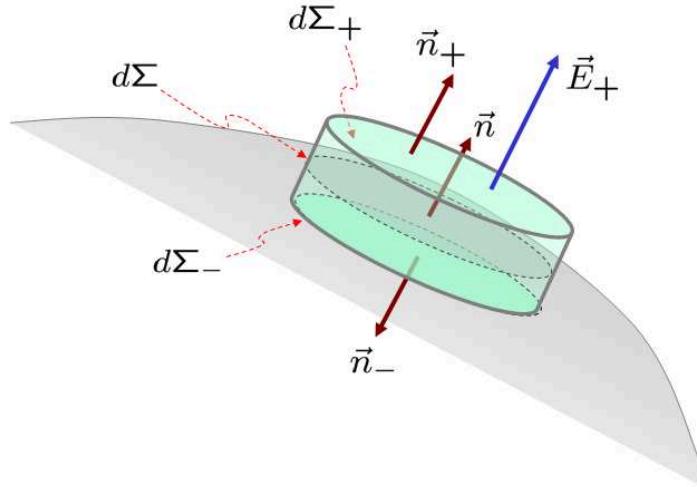


Figura 4.2: Superficie cilindrica infinitesima intorno ad un punto sulla superficie di un metallo.

ove abbiamo usato la proprietà che il flusso di E attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo, in quanto la normale a questa superficie è tangente alla superficie del conduttore e quindi è perpendicolare ad \vec{E} . Applichiamo ad S la legge di Gauss

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} dq_{int}, \quad q_{int} = \sigma(P) d\Sigma \quad (4.0.6)$$

essendo dq_{int} la carica interna ad S : $dq_{int} = \sigma(P) d\Sigma_+$. Concludiamo che

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}. \quad (4.0.7)$$

Dalla 1) segue che il potenziale $V(\vec{x})$ è uniforme all'interno del conduttore. Infatti, presi due qualsiasi punti P_1, P_2 all'interno del conduttore, vedi Figura 4.1 c), si ha

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P1 \rightarrow P2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad (4.0.8)$$

ove l'integrale è calcolato su un percorso contenuto nel conduttore. Tutti i punti di un conduttore, inclusi i punti superficiali, sono quindi allo stesso potenziale $V(\vec{x}) \equiv V_0$. Un conduttore carico è caratterizzato da un solo valore V_0 del potenziale.

\hookrightarrow Superficie equipotenziale $\Rightarrow \vec{E} \perp S$

4.1 Induzione elettrostatica

Consideriamo adesso un conduttore neutro all'interno di un campo elettrico esterno \vec{E} .

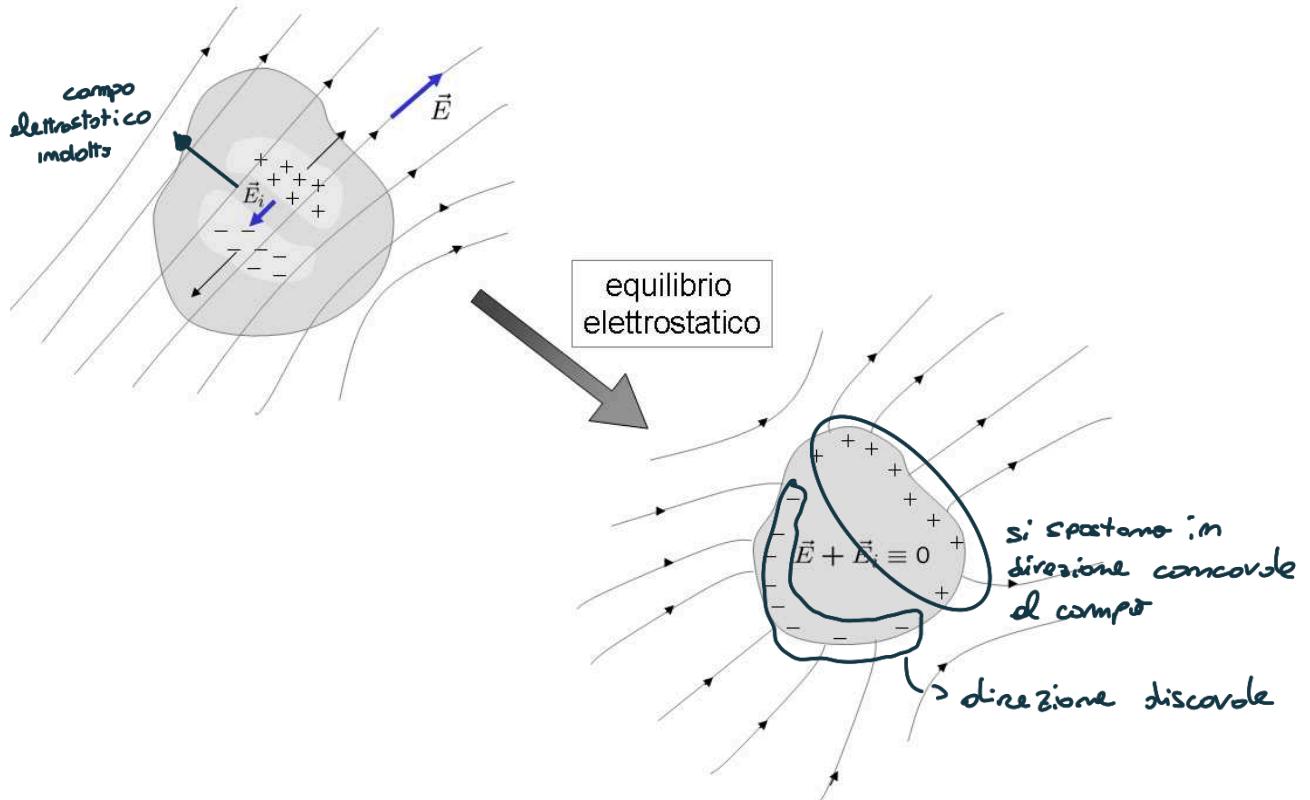


Figura 4.3: Induzione elettrostatica.

L'azione di \vec{E} sugli elettroni liberi determina un movimento di insieme di questi in verso opposto ad \vec{E} . Questo produce un eccesso di carica positiva, costituito dagli atomi privati degli elettroni più esterni, che si muove in senso concorde ad \vec{E} . L'effetto di \vec{E} è quindi di separare le cariche all'interno del conduttore e spostarle in verso opposto. Tra le cariche positive e negative si viene a creare un campo \vec{E}_i detto *campo elettrico indotto*, che si sovrappone ad \vec{E} . Nella situazione di equilibrio, le cariche negative si distribuiscono sulla parte della superficie del conduttore opposta rispetto al verso di \vec{E} , mentre le cariche positive si spostano sulla parte opposta della superficie, in modo che, in ogni punto all'interno del conduttore, \vec{E}_i compensi esattamente il campo esterno \vec{E} :

$$\vec{E} + \vec{E}_i = 0. \rightarrow \text{comp- } E, \text{interno conduttore} \quad (4.1.1)$$

Il fenomeno per cui si formano eccessi di carica opposti all'interno del conduttore per effetto di un campo elettrico esterno è detto *induzione elettrostatica* e gli eccessi di carica sono dette *cariche indotte*. La somma delle cariche indotte è zero essendo il conduttore globalmente neutro. Se avviciniamo un conduttore carico ad un conduttore neutro, il campo \vec{E} prodotto

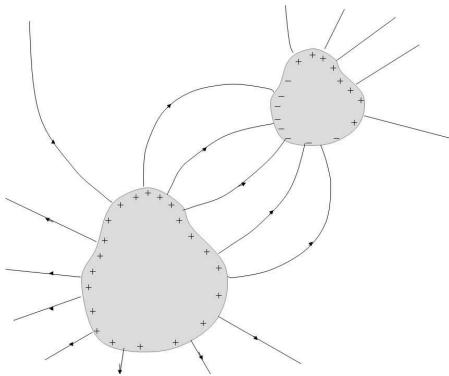


Figura 4.4: Induzione eletrostatica dovuta ad un conduttore carico.

dal primo produce induzione eletrostatica sul secondo. Sulla superficie del conduttore neutro che si affaccia al conduttore carico, si formerà un eccesso di carica di segno opposto, mentre sulla superficie opposta la carica indotta avrà lo stesso segno, vezi Figura 4.4. Se tutte le linee di campo che si originano (o terminano) sul conduttore carico, terminano (o si originano) sulle cariche opposte indotte sul conduttore neutro, l'induzione è detta completa.

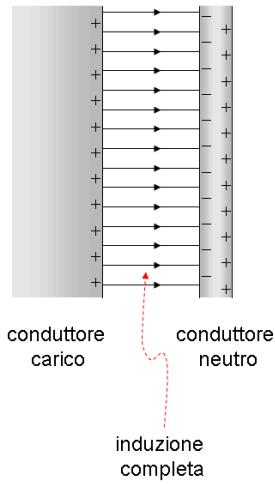


Figura 4.5: Induzione eletrostatica completa.

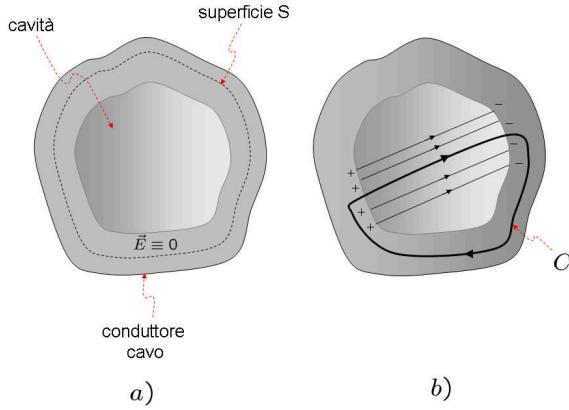


Figura 4.6: Conduttore cavo vuoto.

4.2 Conduttore cavo.

Consideriamo un conduttore cavo carico con carica q , vedi Figura 4.6 a). Mostriamo che non vi sono eccessi di carica dentro il conduttore se non è presente carica nella cavità. Prendiamo una superficie chiusa S che scorre all'interno del conduttore e che ne racchiude la cavità. Per la proprietà 1), $\vec{E} \equiv 0$ su S . Il flusso di \vec{E} attraverso S è quindi nullo

$$0 = \Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int}. \quad (4.2.1)$$

La carica q_{int} interna ad S è nulla. Per ipotesi non vi è carica all'interno della cavità, per cui se vi sono eccessi di carica dovranno essere presenti sulla superficie interna del conduttore. In tal caso vi sarebbe un campo $\vec{E} \neq 0$ all'interno della cavità dalle cariche positive a quelle negative, vedi Figura 4.6 b). Se prendiamo un contorno chiuso lungo una linea di campo nella cavità, che si richiude all'interno del conduttore, la circuitazione di \vec{E} lungo tale percorso avrà contributi non nulli solo all'interno della cavità ed avremmo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0, \quad (4.2.2)$$

in contraddizione con la proprietà di \vec{E} di essere conservativo. Non ci sono quindi eccessi di carica all'interno del conduttore (tra superficie interna ed esterna di C), ove $\vec{E} = 0$ o anche dentro la cavità. La carica q si distribuisce sulla superficie esterna del conduttore e tutti i punti all'interno sono allo stesso potenziale V_0 . Se viene modificata la carica q sul conduttore cavo

$$q \rightarrow q + \Delta q, \quad (4.2.3)$$

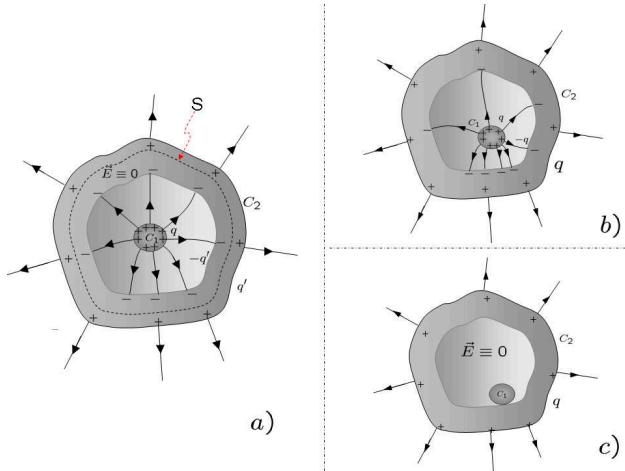


Figura 4.7: Conduttore carico all'interno di un conduttore cavo.

il valore del potenziale varierà uniformemente da V_0 a $V_0 + \Delta V$, ovvero della stessa quantità ΔV in ogni punto, in modo che \vec{E} all'interno della cavità continuerà ad essere nullo. Consideriamo adesso un conduttore cavo e neutro C_2 nella cui cavità è presente un conduttore carico C_1 con carica q , vedi Figura 4.7 a). Per induzione si produrrà una carica $-q'$ di segno opposto a q sulla superficie interna di C_2 ed una carica $+q'$ sulla superficie esterna di C_2 , essendo C_2 neutro. Se prendiamo una superficie chiusa S completamente contenuta tra le due superfici di C_2 e che racchiude la cavità, allora $\vec{E} = 0$ su S . Applicando la legge di Gauss ad S si ha:

$$0 = \Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0}(q - q') \Rightarrow q = q'. \quad (4.2.4)$$

Tra C_1 e C_2 vi è induzione completa e la carica indotta sulla superficie interna di C_2 è uguale ed opposta a q . Dentro la cavità $\vec{E} \neq 0$ e, spostando C_1 , varia \vec{E} in ogni punto e varia la distribuzione della carica indotta $-q$ sulla superficie interna,, vedi Figura 4.7 b). La distribuzione della carica esterna $+q$ rimane inalterata. Se, al limite, portiamo C_1 a contatto con C_2 , le cariche $+q$ e $-q$ si neutralizzano e scompare il campo \vec{E} all'interno della cavità, vedi Figura 4.7 c). Rimane la carica $+q$ la cui distribuzione è rimasta imperturbata. Il sistema è assimilabile ad un unico conduttore cavo vuoto con carica q considerato in precedenza. Spostando C_1 abbiamo modificato la situazione elettrostatica (campo \vec{E} e distribuzione di carica) all'interno di C_2 . Questo non ha influito sulla situazione elettrostatica all'esterno (distribuzione di $+q$ sulla superficie esterna di C_2 e ddp (differenza di potenziale) tra C_2 ed altri conduttori carichi), poiché, affinché l'informazione sulla posizione di C_1 si propaghi attraverso lo spessore di C_2 per giungere sulla superficie esterna, occorrerebbe un campo \vec{E} diverso da zero tra le due superfici di C_2 . Per lo stesso motivo l'informazione sul cambiamento della situazione elettrostatica esterna (variazione della carica esterna $+q$, avvicinamento di

altri conduttori carichi, ecc...) non si propaga all'interno di C_2 essendo $\vec{E} = 0$ tra le due superfici e quindi non influisce sulla situazione elettrostatica all'interno di C_2 . Per esempio

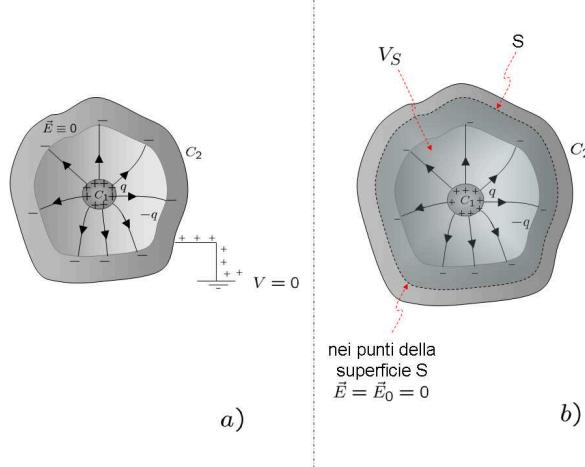


Figura 4.8: Conduttore cavo messo a terra a), soluzione del problema di Neumann all'interno di una superficie S b).

possiamo scaricare la carica esterna $+q$ mettendo C_2 “a terra”, ovvero a contatto con la terra (che è un conduttore) sulla quale la carica $+q$ si disperde, vedi Figura 4.8 a). Questo vuol dire porre C_2 a potenziale $V = 0$, essendo fissato convenzionalmente lo zero del potenziale sulla terra. Questo procedimento lascia inalterato il campo \vec{E} all'interno della cavità e quindi la ddp tra C_1 e C_2 . Il conduttore cavo C_2 funge quindi da *schermo elettrostatico*: una variazione del potenziale di C_2 determina una corrispondente variazione uguale in ogni punto all'interno di C_2 (inclusa la cavità, in modo da mantenere inalterata la ddp). Un modo matematico semplice per comprendere questa proprietà è il seguente. Abbiamo visto che il campo elettrostatico \vec{E} all'interno di un volume V_S racchiuso da una superficie S , nel quale è presente una certa distribuzione di carica con densità $\rho(\vec{x})$, è univocamente definito come soluzione delle equazioni

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &\equiv 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0},\end{aligned}$$

ovvero dall'equazione di Poisson (3.3.9)

$$\textcircled{(\nabla^2 V)} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{NON EQ DI POISSON MA DI LAPLACE}$$

una volta assegnato il valore $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x})$ (è sufficiente specificare il valore della componente normale di $\vec{E}(\vec{x})$) nei punti della superficie S (problema di Neumann, si veda la sezione 3.5). Possiamo prendere una superficie chiusa S , tra le due superfici di C_2 , che racchiude nel suo interno la cavità. Il campo \vec{E} all'interno di V_S è univocamente definito dalle cariche $\pm q$ ivi contenute e dai suoi valori su S . Ma in questo caso $\vec{E}_0(\vec{x}) \equiv \vec{0}$ poiché S è compresa tra le due superfici di C_2 . Variando la situazione elettrostatica all'esterno, i dati del problema

di Neumann, riferito al volume V_S interno ad S , rimangono inalterati e quindi inalterata è la sua unica soluzione. Un esempio di conduttore cavo è la *gabbia di Faraday* spesso utilizzata per isolare un apparato elettronico dalla situazione elettrostatica esterna, in modo per esempio da proteggerlo da sbalzi di tensione. La proprietà di un conduttore cavo di fungere da schermo elettrostatico è legata alla validità della legge di Gauss per il campo elettrostatico che, a sua volta, è legata alla proprietà del campo \vec{E} generato da una carica puntiforme di variare in modulo in ragione dell'inverso del quadrato della distanza: $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$. La verifica sperimentale di questa proprietà ha fornito storicamente la prima evidenza di questa legge. In questo modo infatti Cavendish nel 1773 dedusse che $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^n}$ con $n = 2 \pm 0.02$. Sperimentalmente si può usare il sistema schematicamente illustrato in Figura 4.9.

Con un voltmetro si può misurare la ddp $\Delta V = V_1 - V_2$ tra un conduttore interno C_1 ed uno cavo esterno C_2 quando il potenziale V_2 di quest'ultimo viene fatto variare con un generatore di tensione G . Se C_2 fungesse da schermo elettrostatico, ΔV non dovrebbe variare. Questo permette oggi di verificare la legge $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$ con una precisione elevata:

$$n - 2 \simeq (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}.$$

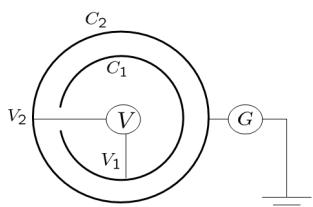


Figura 4.9: Conduttore cavo come schermo

4.3 Condensatori

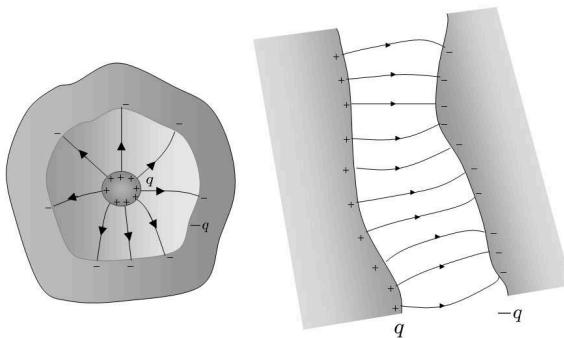


Figura 4.10: Induzione completa tra due conduttori.

Le proprietà che abbiamo illustrato per il sistema di un conduttore cavo ed un conduttore carico ad esso interno, si possono generalizzare al caso di due conduttori tra cui vi è induzione completa, vedi Figura 4.10. In questo caso più generale, infatti, la regione di spazio tra i due conduttori risulta essere separata dall'esterno da una regione (l'interno dei conduttori) in cui il campo elettrico è nullo. Questo isola la situazione elettrostatica (campo elettrico,

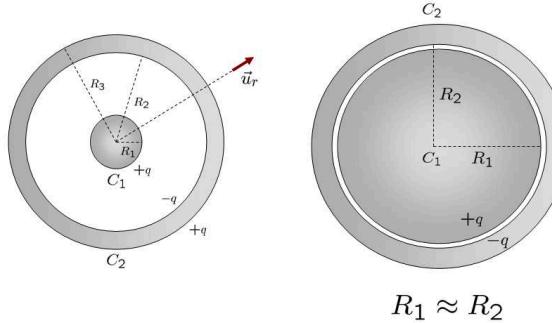


Figura 4.11: Condensatore sferico.

e quindi ddp tra i conduttori, cariche indotte, etc.) tra i due conduttori dall'esterno. Un sistema di un conduttore carico e di uno neutro tra i quali vi è induzione completa è detto *condensatore*. La ddp ΔV tra i due conduttori, detti *armature*, non dipende, per quanto detto, dal potenziale di uno dei due che, perciò, può essere messo a terra. ΔV risulta essere sempre proporzionale alla carica q presente sulle superfici affacciate:

$$\Delta V = \frac{q}{C}. \quad (4.3.1)$$

La costante di proporzionalità C , detta *capacità* del condensatore, dipende solo dalla geometria del sistema e dalla natura del materiale presente tra le due armature (supponiamo per ora che vi sia il vuoto).

Condensatore sferico. Consideriamo un conduttore sferico carico C_2 con carica q , contenuto all'interno di un conduttore carico C_1 ad esso concentrico. Sia R_1 il raggio di C_1 ed R_2 il raggio interno di C_2 , vedi Figura 4.11. Studiamo il campo \vec{E} del sistema ed il corrispondente potenziale $V(\vec{x})$. Per la simmetria (sferica) del problema la forma generale di \vec{E} sarà

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r,$$

essendo r la distanza dal centro dei conduttori. Sia S_r una superficie sferica concentrica ai due conduttori. Il campo elettrostatico sui punti di S_r è orientato lungo la normale ad S_r (direzione radiale \vec{u}_r) ed il suo modulo è uniforme su essa. Il flusso di \vec{E} attraverso S_r è quindi: $\Phi_{S_r}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r)$. Applichiamo ad S_r la legge di Gauss per vari valori di r :

$$\begin{aligned} r < R_1 &: \text{sappiamo già che } \vec{E} = 0 \text{ essendo i punti interni a } C_1, \\ R_1 < r < R_2 &: \Phi_{S_r}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, \\ R_2 < r < R_3 &: \vec{E}(\vec{x}) = 0, \rightarrow \text{perché intorno} \\ r > R_3 &: \Phi_{S_r}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Il potenziale $V(r)$ è una funzione ovunque continua che soddisfa, in ciascuna regione, l'equazione

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}. \quad (4.3.3)$$

Risolvendo questa equazione nelle quattro regioni separatamente, otteniamo:

$$\begin{aligned} r \leq R_1 & : V = V_0 = \text{cost.}, \\ R_1 < r \leq R_2 & : V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0^{(I)}, \\ R_2 < r \leq R_3 & : V = V_0^{(II)}, \\ r > R_3 & : V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0^{(III)}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

La continuità di $V(r)$, nel passare da una regione all'altra, implica le seguenti tre relazioni tra le quattro costanti V_0 , $V_0^{(I)}$, $V_0^{(II)}$, $V_0^{(III)}$:

$$\begin{aligned} r = R_1 & : V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + V_0^{(I)}, \\ r = R_2 & : \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + V_0^{(I)} = V_0^{(II)}, \\ r = R_3 & : V_0^{(II)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + V_0^{(III)}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Queste relazioni fanno sì che il potenziale, come ci aspettiamo, dipenda da una sola costante additiva arbitraria, che può a sua volta essere fissata in modo che $V(r \rightarrow \infty) = 0$. Questo implica che $V_0^{(III)} = 0$ ed inoltre che:

$$V_0^{(II)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \quad V_0^{(I)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right); \quad V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.3.6)$$

Possiamo ora scrivere l'espressione finale del potenziale:

$$\begin{aligned} r \leq R_1 & : V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right), \\ R_1 < r \leq R_2 & : V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right), \\ R_2 < r \leq R_3 & : V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}, \\ r > R_3 & : V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Questa soluzione ci consente di calcolare la ddp tra le due armature:

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{R_2 - R_1}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2} \right) q = \frac{q}{C}, \quad (4.3.8)$$

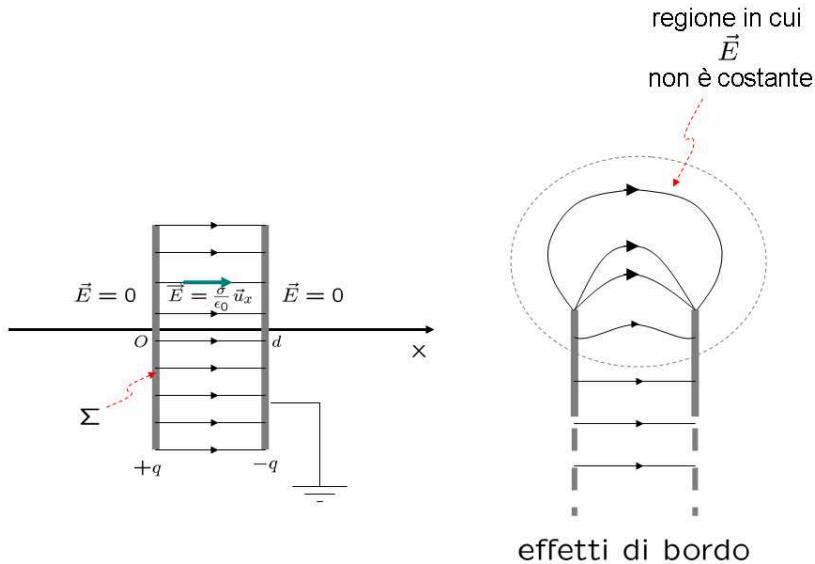


Figura 4.12: Condensatore piano.

da cui si deduce:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Consideriamo due casi limite:

- $R_2 - R_1 = h \ll R_1, R_2$. Si considera $R_1 \approx R_2 = R$ e trascurano gli ordini superiori ad uno in h/R_1 e h/R_1 . Si ha

$$C \simeq 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{h} \simeq \epsilon_0 \frac{S}{h}.$$

- **Limite $R_2 \rightarrow \infty$:** $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$. Il limite $R_2 \rightarrow \infty$ corrisponde a portare il conduttore esterno C_2 all'infinito. Un conduttore sferico carico può essere pensato come l'armatura interna di un condensatore sferico la cui armatura esterna è situata all'infinito. Possiamo quindi ad esso associare una capacità pari a $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$.

La capacità C di un condensatore si misura in Farad (F)

$$1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}}.$$

Essa misura la quantità di carica che può essere immagazzinata all'interno di un condensatore tra le cui armature vi è una *ddp* pari a 1 *Volt*.

Condensatore piano. Un condensatore piano è costituito da due armature piane parallele, poste a distanza d molto minore della loro dimensione lineare, in modo da potersi considerare, a tutti gli effetti, di estensione infinita, vedi Figura 4.12. Le due armature hanno cariche indotte sulle superfici affacciate pari a $\pm q$ ed una differenza di potenziale ΔV . Il potenziale $V = V(x)$ tra le due armature è:

$$V(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}x + \text{cost..}$$

La *ddp* tra le due armature è

$$\Delta V = V(0) - V(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d,$$

ove σ è la densità di carica indotta sulle superfici delle armature, che consideriamo uniforme. Se S è l'estensione di queste superfici

$$\sigma = \frac{q}{S},$$

per cui:

$$\Delta V = q \left(\frac{d}{\epsilon_0 S} \right) = \frac{q}{C}.$$

La capacità del condensatore piano è quindi

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Questa espressione vale nell'approssimazione in cui le due lastre sono molto vicine tra di loro. In questo limite il campo \vec{E} è circa uniforme ovunque fra le due lastre e vale l'espressione di $V(x)$ usata. Per lastre di dimensione finita questa è comunque un'approssimazione, poiché vicino ai bordi delle lastre \vec{E} non è più uniforme. Più le lastre sono vicine e più questo effetto di bordo è trascurabile, vedi Figura 4.12. Convenzionalmente viene rappresentato, nella simbologia circuitale un condensatore come un condensatore piano, vedi Figura 4.13.

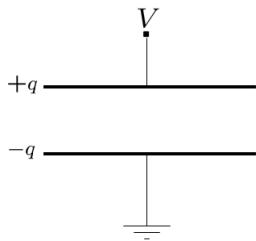


Figura 4.13: Rappresentazione simbolica di un condensatore.

4.4 Carica di un condensatore ed energia del campo elettrostatico

All'interno di un condensatore carico è immagazzinata energia, espressa in termini del lavoro necessario per caricarlo. Il processo di carica di un condensatore, ovvero il processo in seguito al quale le due armature vengono caricate con carica $\pm q$ e di conseguenza portate ad una *ddp* ΔV pari a:

$$\Delta V = \frac{q}{C},$$

si può pensare come il trasferimento di un certo numero di elettroni con carica $-q$ dall'armatura che si caricherà positivamente all'armatura che acquisterà carica $-q$. Questo processo richiede lavoro dall'esterno necessario per separare le cariche ed opporsi al lavoro negativo dovuto alle forze elettrostatiche che tenderebbero a riportare le cariche $\pm q$ insieme. Per caricare un condensatore bisogna quindi trasferire energia al sistema. Come conseguenza di questo processo si viene a creare un campo elettrico \vec{E} tra le armature, prima assente. Possiamo pensare quindi che questa energia U sia servita a creare il campo elettrostatico \vec{E} e che sia distribuita nel suo interno con una certa densità volumetrica:

$$u_e = \frac{dU}{dV}.$$

È importante a questo punto chiarire che, in un condensatore, le due armature sono separate o dal vuoto oppure da materiale isolante, per cui non è possibile alcun passaggio di cariche tra le armature stesse. Il trasferimento di carica di cui parliamo avviene tipicamente attraverso

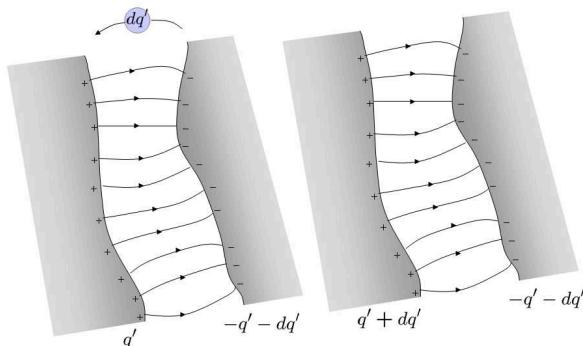


Figura 4.14: Carica di un condensatore.

un circuito collegato al condensatore, per effetto di un generatore di forza elettromotrice, che fornisce l'energia richiesta alla carica del condensatore. Analizzeremo in dettaglio questo processo nei capitoli seguenti. Per ora limitiamoci a calcolare il lavoro W necessario per portare sulle armature di un condensatore una carica $\pm q$. Pensiamo di trasferire la carica $+q$ da un'armatura all'altra in modo graduale, ovvero attraverso il trasporto successivo di cariche infinitesime dq , vedi Figura 4.14. In uno stadio intermedio, quando sulle armature si è depositata una carica $\pm q'$ ($q' < q$) il trasporto di un'ulteriore carica dq' dall'armatura negativa a quella positiva, richiede un lavoro elementare:

$$dW = -dW_{\text{es}} \quad dW = dq' \Delta V' = \frac{q'}{C} dq' \quad 0 < q' < q \quad \text{Ricorda} \quad \Delta V' = \frac{q'}{C}$$

"campo elettrostatico"

Il lavoro complessivo W che misura l'energia immagazzinata nel sistema U vale:

$$U = W = \int_0^q dW = \int_0^q \frac{q' dq'}{C} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\Delta V^2 C}{2}.$$

Consideriamo per esempio un condensatore piano con armature separate da una distanza d e con superficie S . Se σ è la densità superficiale di carica, che supponiamo uniforme, $\sigma = \frac{q}{S}$, nel limite $d \ll \sqrt{S}$ sappiamo che

$$U: \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} \cdot d = \frac{\epsilon_0 S}{2} \cdot \left(\frac{q}{\epsilon_0 S}\right)^2 \cdot d = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\right) S d \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

per cui $= \frac{\epsilon_0}{2} |E|^2 V$

$$U = \int_V u_e dV = u_e \int_V dV = u_e V = u_e (Sd) \quad U = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 (Sd) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 V,$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ all'interno}$$

\hookrightarrow se è uniforme
all'interno

essendo $V = Sd$ il volume tra le due armature. Ricordando che il campo \vec{E} è uniforme tra le due armature, in modulo uguale a $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Possiamo quindi scrivere:

\hookrightarrow prisme

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 V.$$

Se pensiamo a questa energia come distribuita nel volume V occupato da \vec{E} , con densità uniforme, essendo \vec{E} uniforme, troviamo

$$u_e = \frac{dU}{dV} = \frac{U}{V} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2.$$

L'energia spesa per la carica del condensatore è immagazzinata nel campo elettrostatico interno con densità u_e .

In generale si dimostra che un qualsiasi campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{x})$ (non uniforme) possiede un'energia distribuita al suo interno con densità:

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{x})|^2.$$

Come esercizio, calcoliamo l'energia immagazzinata all'interno di un condensatore sferico.

Sappiamo che il campo elettrico tra le due armature ($R_1 < r < R_2$) vale:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}.$$

La densità di energia è quindi:

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{r^4},$$

e dipende solo da r . L'energia U immagazzinata nel campo è

$$U = \int_V u_e dV. \quad (4.4.1)$$

Usiamo un sistema di coordinate polari centrato sul centro delle armature. In coordinate polari sappiamo che un volumetto elementare si scrive $dV = r \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$. Questo ci

consente di calcolare l'integrale (4.4.1):

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\theta) r^2 \left(\frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \right) = \\
 &= (4\pi) \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{1}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi^2\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\
 &= \frac{q^2}{2} \left(\frac{R_2 - R_1}{4\pi^2\epsilon_0 R_1 R_2} \right) = \frac{q^2}{2C}.
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

ove abbiamo già calcolato l'espressione di C :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$



Figura 4.15: Condensatori in parallelo.

armature positive ha carica $+q = \sum_{i=1}^n q_i$ mentre quello costituito dalle armature negative ha carica $-q$. Si può scrivere:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n V C_i = V C.$$

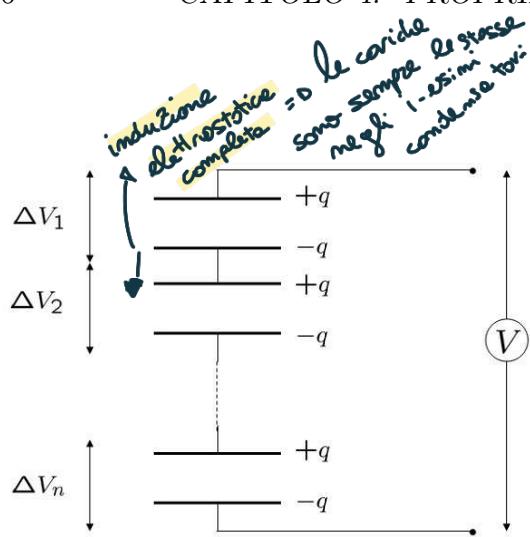
L'intero sistema si comporta come un unico condensatore con capacità

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \tag{4.4.3}$$

Condensatori in serie: Un sistema di condensatori è in serie se sono connessi in modo tale che l'armatura negativa di ciascun condensatore formi un unico conduttore con l'armatura positiva del condensatore successivo, vedi Figura 4.16. Caricando il condensatore C_i gli altri si caricano per induzione completa con la stessa carica q . La ddp ai capi del sistema è la somma delle ddp ΔV_i ai capi di ciascun condensatore:

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{C_i} = \frac{q}{C}.$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_m}$$



Il sistema si comporta come un condensatore equivalente con capacità:

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}. \quad (4.4.4)$$

Serie

$$C_i > C_{TOT}$$

Parallelo

$$C_{TOT} > C_i$$

Esercizi sulle proprietà elettrostatiche dei conduttori

Esercizio 4.4.1 Sia dato un disco di raggio R_0 su cui è distribuita uniformemente una carica q_0 con densità superficiale $\sigma = \frac{q_0}{\pi R_0^2}$. Una sferetta metallica di raggio $R_1 \ll R_0$ ha il centro disposto lungo l'asse del disco a distanza d da esso, vedi Figura 4.17. Se la sferetta è posta a contatto con la terra e quindi a potenziale $V = 0$, calcolare la carica q della sferetta.

Dati:

$$R_1 = 1 \text{ mm}; \quad R_0 = 10 \text{ cm}; \quad \sigma = 10^{-11} \text{ C cm}^{-2}; \quad d = 30 \text{ cm}.$$

Soluzione: Vediamo perché la sferetta si carica se messa a terra. Se la sferetta, inizialmente neutra, non fosse messa a terra, per effetto del campo \vec{E}_D del disco subirebbe induzione elettrostatica: si creerebbe sulla sua superficie un eccesso di carica negativa dalla parte del disco (attratta da esso) ed eccesso di carica positiva dalla parte opposta (respinta dal disco). Collegando quindi la sferetta con la terra, l'eccesso di carica positiva si disperde mentre

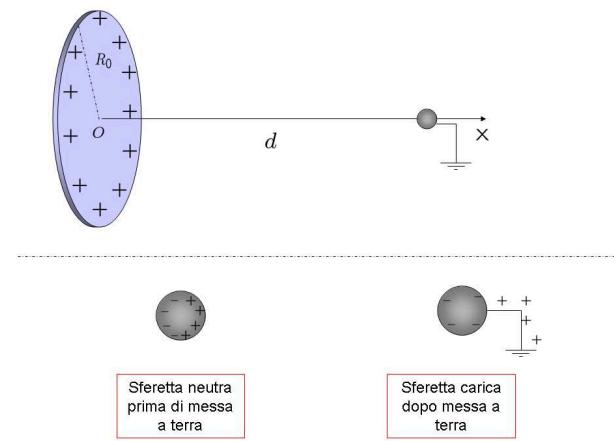


Figura 4.17: Esercizio 4.4.1.

rimarrebbe su di essa l'eccesso di carica negativa perché attratta dal disco. Calcoliamo q : la sferetta è immersa in un campo elettrico che è la somma del campo generato dal disco \vec{E}_D e del campo da essa stessa generato \vec{E}_S

$$\vec{E} = \vec{E}_D + \vec{E}_S.$$

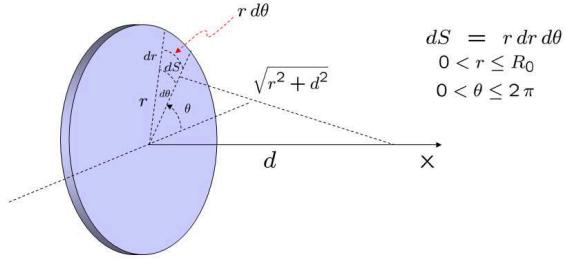


Figura 4.18: Esercizio 4.4.1.

Analogamente il potenziale elettrico totale vale

$$V(\vec{x}) = V_D(\vec{x}) + V_S(\vec{x}),$$

ove V_D e V_S sono i potenziali associati a \vec{E}_D ed \vec{E}_S . Essendo la sferetta a $V = 0$ dobbiamo quindi richiedere che

$$V_D(\text{sferetta}) + V_S(\text{sferetta}) = 0.$$

Sappiamo che

$$V_D(\text{sferetta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1},$$

dobbiamo calcolare il potenziale della sferetta nel campo generato dal disco, ovvero $V_D(\text{sferetta})$. Calcolo il potenziale associato al disco V_D lungo il suo asse.

Scrivo potenziale $V_D(x)$ come somma dei contributi dovuti alle cariche $dq = \sigma dS$ contenuti in elementi di superficie dS in cui viene divisa la superficie totale S . Fissiamo un sistema di coordinate polari sul disco, vedi Figura 4.18:

$$0 < r \leq R_0 \quad 0 < \theta \leq 2\pi.$$

L'elemento di superficie dS intorno al punto r, θ è un rettangolino di base $rd\theta$ ed altezza dr : $dS = rd\theta dr$. Troviamo:

$$\begin{aligned}
 V_D(x) &= \int_{\text{disco}} dV(x) = \int_{\text{disco}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{disco}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dS = \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{disco}} \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} d\theta = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^{R_0} \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} dr = \\
 &= \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0 R_0^2} \left(\sqrt{R_0^2 + x^2} - x \right).
 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Dalla condizione $V_D + V_S = 0$ sulla sferetta ricaviamo:

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_0^2 + d^2} - d \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 0 \Rightarrow q = -2\pi R_1 \sigma \left(\sqrt{R_0^2 + d^2} - d \right) < 0.$$

Sostituendo i valori numerici:

$$q \simeq -10^{-15} C.$$

Esercizio 4.4.2 Una carica $q = 126 \times 10^{-9} C$ è posta al centro di una cavità sferica di raggio $R = 3.66 \text{ cm}$ ricavata in un pezzo di metallo. Utilizzando la legge di Gauss, determinare \vec{E} in P_1 posto a distanza $r = 3/4R$ da q e in P_2 .

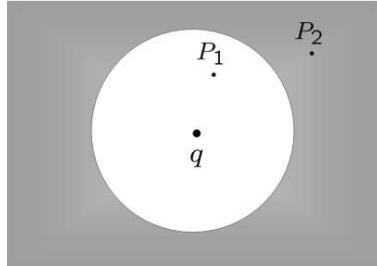


Figura 4.19: Esercizio 4.4.2.

Soluzione Consideriamo un sistema di coordinate polari (r, θ, ϕ) centrato in q . Per la simmetria sferica del problema

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\vec{u}_r.$$

Applichiamo la legge di Gauss ad una superficie sferica S_r centrata su q e passante per P_1 ($r = 3/4R$). La normale uscente ad S_r in ogni punto è $\vec{n} = \vec{u}_r$. Si ha

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi E(r) r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q,$$

da cui troviamo

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cong 150.33 \cdot 10^4 V/m.$$

In P_2 , $\vec{E} = 0$.

Esercizio 4.4.3 Sia dato un condensatore piano con armature quadrate di lato a , che formano, l'una rispetto all'altra, un angolo θ molto piccolo. Dimostrare, nel limite di θ piccolo, che la capacità C del condensatore è data dalla seguente espressione:

$$C \simeq \epsilon_0 \frac{a^2}{h} \left(1 - \frac{a\theta}{2h} \right).$$

(suggerimento: suddividere le armature in strisce di lunghezza infinitesima parallele e calcolare la capacità come quella di un parallelo di condensatori piani, ciascuno costituito da una coppia di strisce corrispondenti, vedi Figura 4.21.)

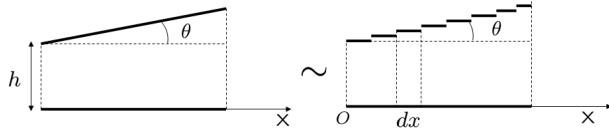


Figura 4.20: Esercizio 4.4.3.

Soluzione Sia dC la capacità del condensatore infinitesimo nel punto x

$$dC(x) = \epsilon_0 \frac{d\Sigma(x)}{h(x)}.$$

Considerando che $d\Sigma(x) = a dx$, $h(x) = h + x \tan(\theta)$, si ha

$$dC = \epsilon_0 \frac{adx}{h + x \tan(\theta)}.$$

La capacità totale sarà

$$\begin{aligned} C &= \int dC = \int_0^a \epsilon_0 \frac{a}{h + x \tan(\theta)} dx = \\ &= \frac{\epsilon_0 a}{\tan(\theta)} \int_h^{h+a \tan(\theta)} \frac{dy}{y} = \frac{\epsilon_0 a}{\tan(\theta)} \ln \left(\frac{h + a \tan(\theta)}{h} \right). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Usiamo il fatto che $\tan(\theta) \simeq \theta \ll 1$ ed, inoltre, che $\ln(1 + z) \simeq z - \frac{z^2}{2}$ se $z \ll 1$. Si ha

$$C \simeq \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \left(\frac{a}{h} \theta - \frac{a^2 \theta^2}{2h^2} \right) = \frac{\epsilon_0 a^2}{h} \left(1 - \frac{a \theta}{2h} \right).$$

Esercizio 4.4.4 Sia data una sfera metallica isolata con diametro $d = 12.6 \text{ cm}$ e potenziale $V = 8150 \text{ Volt}$ ($V_\infty = 0$). Calcolare la densità di energia del campo elettrico \vec{E} in prossimità della superficie del conduttore.

Soluzione: Il campo elettrico possiede una energia distribuita al suo esterno con densità

$$u_e = \frac{dU_e}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \quad \text{nel vuoto},$$

rispetto ad un sistema di coordinate polari centrato nel centro della sfera O . Per $r > R$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r,$$

essendo q la carica sulla sfera.

È dato il potenziale della sfera

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Il modulo di \vec{E} sulla superficie della sfera ($r = R$) è

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{V}{R},$$

da cui ricaviamo

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} \times \frac{V^2}{R^2} = \frac{8.85}{2} \times 10^{-12} \times \frac{(5.15)^2 \times 10^6}{(6.3)^2 \times 10^{-4}} = 7.4 \times 10^{-2} Jm^{-3}.$$

2 bis) Determinare l'andamento di V dentro e fuori la sfera metallica.

Esercizio 4.4.5 Siano date due sfere metalliche cariche: la sfera 1 di raggio R_1 e carica q_1 , e la sfera 2 di raggio R_2 e carica q_2 , con $R_1 < R_2$. Esse sono connesse da un filo metallico (si veda Figura 4.21, sinistra). Si supponga per semplicità che la distanza d tra le sfere sia molto maggiore dei rispettivi raggi ($d \gg R_1, R_2$) in modo che l'effetto di una sfera sulla distribuzione delle cariche sull'altra sia trascurabile e le due sfere si possano, in buona approssimazione, considerare isolate. Si determini il rapporto tra le densità superficiali σ_1 e σ_2 delle cariche sulle due sfere all'equilibrio elettrostatico (si supponga che, per simmetria sferica, le cariche siano distribuite uniformemente sulle due sfere).

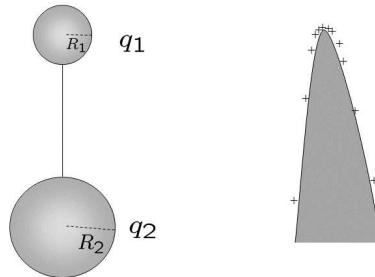


Figura 4.21: Esercizio 4.4.5.

Soluzione: Le due sfere, essendo connesse da un filo metallico, si possono pensare parte di un unico conduttore, e quindi allo stesso potenziale. Essendo esse in buona approssimazione isolate, i loro potenziali (avendo fissato a zero il potenziale all'infinito) saranno:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (4.4.7)$$

Uguagliando i due potentiali, troviamo una relazione tra le cariche q_1 e q_2 :

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (4.4.8)$$

Per simmetria sferica, le cariche sono distribuite in modo uniforme sulle due superfici S_1 ed S_2 e quindi si possono esprimere in termini di densità superficiali σ_1 , σ_2 nel seguente modo:

$$q_1 = \int_{S_1} \sigma dS = \sigma_1 4\pi R_1^2, \quad q_2 = \int_{S_2} \sigma dS = \sigma_2 4\pi R_2^2.$$

Sostituendo queste espressioni per q_1 e q_2 nella (4.4.8) troviamo:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.4.9)$$

Se $R_1 < R_2$ quindi $\sigma_1 > \sigma_2$.

Questo esercizio, attraverso lo studio di un sistema semplice, permette di comprendere una proprietà generale dei conduttori carichi: la carica superficiale all'equilibrio è più densa nei punti in cui il raggio di curvatura è minore (si veda Figura 4.21, destra). Benché la dimostrazione di questa proprietà nel caso generale sia molto complessa, l'esercizio appena svolto permette di comprenderla per un conduttore relativamente semplice: la carica è più densa sulla sfera più piccola, dove il raggio di curvatura R_1 è minore.

Ricordando il teorema di Coulomb, che lega l'intensità del campo elettrico in un punto sulla superficie di un conduttore carico alla densità superficiale di carica nello stesso punto, per quanto detto sopra, il campo elettrostatico sarà più intenso nei punti in cui il raggio di curvatura è minore. Questa proprietà generale è alla base del cosiddetto *effetto punta* per cui il campo elettrico è particolarmente intenso in prossimità delle punte di un conduttore carico, in cui il raggio di curvatura è molto piccolo.

Capitolo 5

Dielettrici (isolanti)

Consideriamo un condensatore piano tra le cui armature vi sia il vuoto. Introduciamo tra le armature una lastra di metallo di spessore h , vedi Figura 5.1. Se il condensatore viene

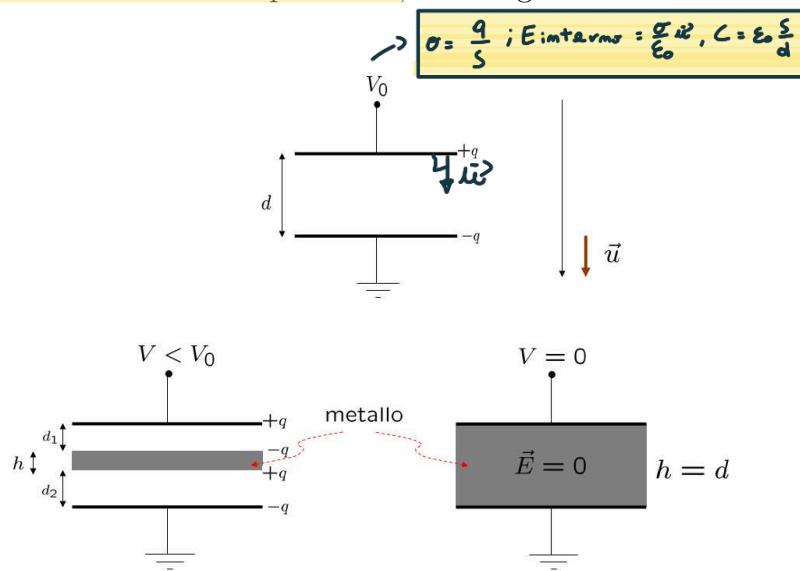


Figura 5.1: Condensatore piano contenente una lastra metallica.

caricato con carica q per induzione completa, sulle superfici della lastra saranno indotte cariche $\pm q$. Se d_1 è la distanza della lastra dall'armatura positiva e d_2 da quella negativa:

$$d_1 + d_2 + h = d$$

Il sistema è una serie di due condensatori con capacità

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1} \quad \text{e} \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{d_2}$$

La capacità totale è, usando la formula (4.4.4):

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{\epsilon_0 S}{d - h}.$$

La *ddp* è:

$$V = \frac{q}{c} = \frac{q}{\epsilon_0 S} (d - h) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - h).$$

Se $h \rightarrow d$ la lastra occupa tutto lo spazio tra le armature e le cariche di induzione neutralizzano le cariche della armature, per cui $V = 0$. L'effetto della lastra è quello di ridurre la *ddp* tra le armature dal valore

$$V_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d,$$

senza la lastra, al valore $V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - h) < V_0$.

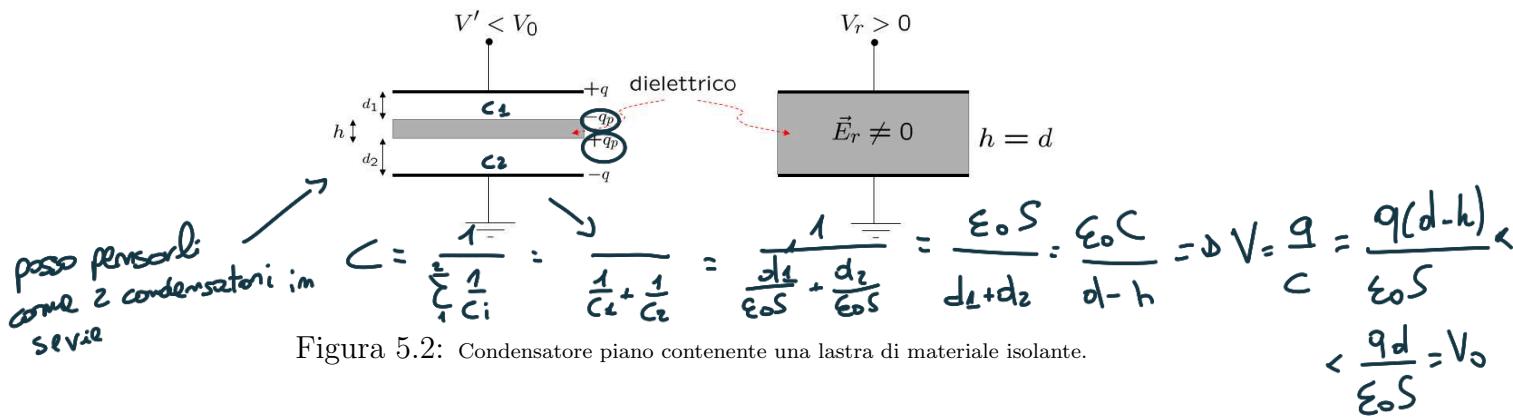


Figura 5.2: Condensatore piano contenente una lastra di materiale isolante.

Se inserissimo una lastra di materiale isolante o dielettrico di spessore h tra le armature, noteremmo ancora un calo di potenziale, ovvero una *ddp*

$$V' < V_0,$$

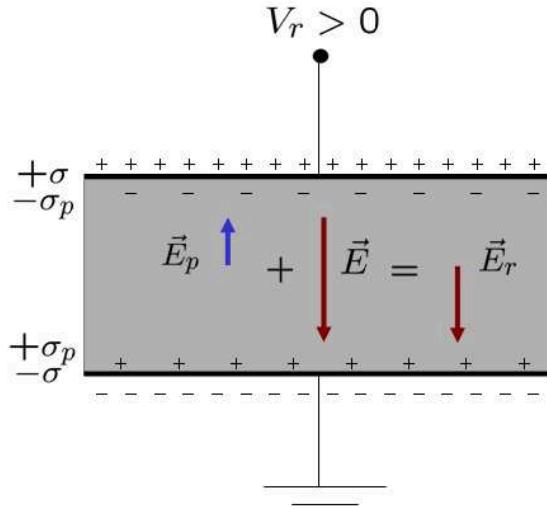
ma, questa volta, minore rispetto al caso della analoga lastra metallica. Nel limite in cui $h \rightarrow d$ e quindi tutto lo spazio tra le armature è riempito di dielettrico, a differenza del caso precedente, si osserva ancora una *ddp* $V_r > 0$ tra le armature.

Si osserva inoltre che V_r è proporzionale a V_0 attraverso una costante di proporzionalità che dipende solo dalla natura del dielettrico (come mostrò Faraday nel 1831):

$$V_r = \frac{V_0}{\epsilon_r} < V_0,$$

ove ϵ_r è una costante adimensionale sempre maggiore di uno, detta *costante dielettrica relativa del mezzo*.

Consideriamo per semplicità un mezzo dielettrico lineare (o isotropo) ed omogeneo ovvero le cui proprietà non dipendono dalla particolare direzione o dal particolare punto in cui lo



. isotropi (lineari)

. omogenei (proprietà non dipendono dal punto) $\Rightarrow \vec{E}_r$ uniforme all'interno $\parallel \vec{u}$.

Figura 5.3: Condensatore piano riempito di materiale isolante.

si osserva. Possiamo pensare V_r come dovuto ad un campo elettrico \vec{E}_r tra le due armature diretto nella stessa direzione e verso di \vec{E} , ma in modulo più piccolo di un fattore $1/\epsilon_r$:

$$\vec{E}_r = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E} \Rightarrow |\vec{E}_r| = \frac{1}{\epsilon_r} |\vec{E}| < |\vec{E}|.$$

La differenza

$$\vec{E}_p = \vec{E}_r - \vec{E} = \frac{(1 - \epsilon_r)}{\epsilon_r} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \vec{u}, \quad (5.0.1)$$

ha la stessa direzione di \vec{E} ma verso opposto ($1 - \epsilon_r < 0$). \vec{E}_p ha l'espressione di un campo generato da due distribuzioni piane di cariche opposte con densità, in valore assoluto, pari a $\sigma_p = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right) \sigma$, vedi Figura 5.3.

Quanto osservato si spiega infatti con il fenomeno di *polarizzazione* del dielettrico, in seguito al quale sulle superfici del dielettrico a contatto delle armature, per effetto del campo \vec{E} , si producono cariche di segno opposto rispetto alle cariche delle armature con cui sono a contatto. Queste cariche sono, a differenza del caso dell'induzione completa, in valore assoluto più piccole delle cariche sulle armature

$$\sigma_p = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma < \sigma,$$

e per questo il loro effetto non è tale da annullare completamente il campo elettrico all'interno del dielettrico. La polarizzazione di un dielettrico è il fenomeno per cui si vengono a creare

sulla superficie di un dielettrico lineare ed omogeneo eccessi di carica per effetto di un campo elettrico esterno. Queste cariche, dette *cariche di polarizzazione*, vanno distinte dagli eccessi di carica che si producono per esempio per elettrizzazione o per induzione elettrostatica in un conduttore e che chiameremo *cariche di conduzione*. Le prime sono il risultato di spostamenti di cariche che avvengono a livello atomico/molecolare, poiché in un dielettrico i portatori di carica sono vincolati all'interno degli atomi o molecole e non sono liberi di muoversi attraverso il materiale. Questo distingue il fenomeno di polarizzazione da quello di induzione elettrostatica, che è invece dovuto a spostamenti macroscopici dei portatori di carica liberi da un punto all'altro di un conduttore.

Torniamo all'esempio del condensatore piano. Il campo misurato all'interno del dielettrico è, come abbiamo detto:

$$\vec{E}_r = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \vec{u} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{u},$$

ove $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ è detta *costante dielettrica del mezzo*. L'espressione di \vec{E}_r ha la stessa forma del corrispondente campo nel vuoto \vec{E} e differisce solo per la sostituzione $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Si dimostra in generale che tutte le grandezze elettrostatiche all'interno di un dielettrico lineare ed omogeneo, si ottengono dalle corrispondenti grandezze nel vuoto, sostituendo $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_r \epsilon_0$. Per esempio, se calcoliamo la capacità del condensatore riempito di dielettrico, troviamo:

$$C_r = \frac{q}{V_r} = \epsilon_r \frac{q}{V} = \epsilon_r C = \epsilon \frac{S}{d} > C.$$

Per effetto del dielettrico è aumentata la capacità del condensatore.

Torniamo alla carica di polarizzazione. La sua densità si può anche scrivere come:

$$\sigma_p = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \sigma = \frac{\chi}{\epsilon_r} \sigma < \sigma,$$

ove $\chi = \epsilon_r - 1$ è la *suscettività dielettrica* del mezzo. La componente del campo \vec{E}_r dovuto alle sole cariche di polarizzazione si esprime in termini di un campo \vec{P} , detto *densità di polarizzazione*, o semplicemente polarizzazione, definito nel seguente modo:

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}, \quad (5.0.2)$$

mentre la componente di \vec{E} dovuta alle sole cariche di conduzione (e che quindi è la stessa anche in assenza del dielettrico) si esprime in termini di un campo \vec{D} , detto *induzione dielettrica*:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}.$$

Essendo $\vec{E}_r = \vec{E}_p + \vec{E}$ possiamo scrivere la seguente relazione, valida per *qualsiasi* tipo di dielettrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_r + \vec{P}.$$

Nel caso in questione il campo polarizzazione vale:

$$\vec{P} = \sigma_p \vec{u} = \frac{\chi}{\epsilon_r} \sigma \vec{u} = \chi \epsilon_0 \vec{E}_r. \quad (5.0.3)$$

Questa relazione tra \vec{P} ed \vec{E}_r si generalizza solo ai dielettrici isotropi ma non necessariamente omogenei.

Per descrivere le proprietà del campo elettrostatico in presenza di un dielettrico non basta specificare il vettore \vec{E}_r , ma occorre specificare anche uno tra i due campi \vec{D} e \vec{P} .

Ecco alcuni esempi di valori di ϵ_r

Aria	$\epsilon_r \simeq 1$
H_2O	$\epsilon_r \simeq 80$
Ambra	$\epsilon_r \simeq 2.7$
Vetro	$\epsilon_r \simeq 4 \div 7$
conduttori	$\epsilon_r = \chi = \infty$

Nella trattazione che segue ci limiteremo a considerare solo dielettrici lineari poichè quelli non isotropi sono in numero molto limitato e corrispondono solo a certi cristalli.

5.1 Analisi quantitativa

Dopo questa prima introduzione qualitativa delle proprietà elettrostatiche dei dielettrici, passiamo a descrivere più in dettaglio il fenomeno della polarizzazione, dandone una interpretazione microscopica. Nella maggior parte dei dielettrici il fenomeno di polarizzazione si può descrivere microscopicamente attraverso il seguente modello esemplificato. Consideriamo un elemento monoatomico con numero atomico Z . In situazione normale un atomo è descrivibile come un sistema in cui la carica totale positiva $+Ze$ del nucleo è totalmente schermata da quella uguale ed opposta degli elettroni che orbitano intorno. I baricentri delle cariche positive e negative coincidono. Se approssimiamo la nube di carica negativa $-Ze$ con una distribuzione sferica uniforme di carica negativa $-Ze$ ed il nucleo con una carica puntiforme $+Ze$, questa è localizzata al centro della nube elettronica.

L'effetto di un campo \vec{E} esterno è di spostare le cariche negative (ed il loro baricentro) in verso opposto ad \vec{E} e le cariche positive (nucleo) in verso concorde ad \vec{E} . Il sistema raggiungerà una configurazione di equilibrio in cui la forza dovuta ad \vec{E} e quella attrattiva tra nucleo ed elettroni si compensano. Tale configurazione è descrivibile attraverso lo spostamento \vec{x} del nucleo rispetto al centro della nube elettronica, vedi Figura 5.4. Per effetto di questo spostamento relativo dei baricentri delle cariche positive (identificabile con il nucleo stesso) e negative (centro della nube elettronica), dovuto al campo esterno \vec{E} , l'atomo è assimilabile, a distanze molto maggiori di \vec{x} , ad un dipolo elettrico, vedi Figura 5.4, con momento di dipolo:

$$\vec{p} = Z e \vec{x}.$$

L'ordine di grandezza di \vec{x} è di $10^{-15} m$ (ordine di grandezza delle dimensioni di un nucleo). Valutiamo come esercizio lo spostamento \vec{x} in funzione di \vec{E} .

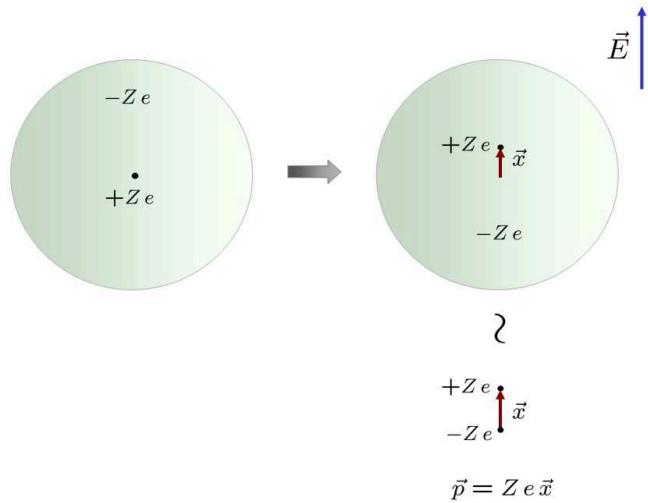


Figura 5.4: Polarizzazione per deformazione.

Descriviamo la nube elettronica come una distribuzione sferica uniforme di carica $q = -Ze$ con densità

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}.$$

Siamo interessati ad esprimere il campo \vec{E}' all'interno della distribuzione (usiamo il simbolo “primo” per distinguerlo dal campo elettrico esterno) ed in particolare nel punto \vec{x} occupato dal nucleo. Per farlo usiamo il risultato dell'esercizio 3.5.8 ed in particolare riferiamoci all'equazione (3.5.40):

$$\vec{E}' = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} \frac{\vec{x}}{R_0^3}. \quad (5.1.1)$$

L'equilibrio si realizza quando la forza $\vec{F}' = eZ\vec{E}'$ esercitata dagli elettroni sul nucleo è compensata dalla forza $\vec{F} = eZ\vec{E}$ dovuta ad \vec{E} :

$$\vec{F}' + \vec{F} = 0,$$

ovvero:

$$eZ\vec{E} = \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} \frac{\vec{x}}{R_0^3}. \quad (5.1.2)$$

Da questa condizione di equilibrio ricaviamo \vec{x} e quindi \vec{p} in funzione del campo esterno \vec{E} .

$$\vec{p} = Ze\vec{x} = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 \vec{E}. \quad (5.1.3)$$

Il momento di dipolo \vec{p} di un singolo atomo o molecola non è misurabile. Ciò che si misura è il valor medio di \vec{p} , su un volumetto dV abbastanza piccolo da poter considerare \vec{E} uniforme in esso, ma sufficientemente grande da contenere un numero N elevato di atomi/molecole:

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{p}_i.$$

Il risultato (5.1.3) va quindi riferito al momento di dipolo medio:

$$\langle \vec{p} \rangle = 4\pi \epsilon_0 R_0^3 \vec{E}. \quad (5.1.4)$$

Infine osserviamo che, nel nostro modello semplificato, abbiamo ignorato l'effetto, sull'equilibrio, dell'azione degli atomi vicini. Si dimostra che questo effetto è tenuto in conto sostituendo nella (5.1.4) al posto del campo esterno \vec{E} il campo \vec{E}_r effettivamente misurato nel dielettrico:

$$\langle \vec{p} \rangle = 4\pi \epsilon_0 R_0^3 \vec{E}_r. \quad (5.1.5)$$

Prendiamo un volumetto dV , contenente $N \gg 1$ atomi, possiamo calcolare il momento di dipolo interno al volumetto come

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = N \langle \vec{p} \rangle. \quad (5.1.6)$$

Definiamo la *densità di polarizzazione* o *polarizzazione* \vec{P} il momento di dipolo per unità di volume in ogni punto dello spazio:

$$\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV} = n \langle \vec{p} \rangle, \quad (5.1.7)$$

ove $n = \frac{N}{dV}$ è il numero di atomi/molecole per unità di volume. Identificando questo campo vettoriale con quello definito nella (5.0.2) della sezione precedente, possiamo, grazie al nostro modello esemplificato, dare una descrizione microscopica delle quantità macroscopiche che caratterizzano un dielettrico. Infatti, usando la relazione generale (5.0.3) e la (5.1.5), possiamo scrivere

$$\vec{P} = 4\pi \epsilon_0 n R_0^3 \vec{E}_r = \epsilon_0 \chi \vec{E}_r,$$

da cui troviamo per la suscettività dielettrica l'espressione microscopica: $\chi = 4\pi \epsilon_0 n R_0^3$. La relazione sopra scritta tra \vec{P} ed \vec{E}_r , come detto in precedenza, caratterizza la maggioranza dei dielettrici, ovvero quelli *lineari*. Nei materiali lineari non-omogenei, χ può, in generale, dipendere dal punto, attraverso n . Diamo una stima della suscettività dielettrica per un gas monoatomico usando sopra ottenuta per χ :

$$n = \frac{N_A}{V_A} = \frac{6.022 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}} \simeq 0.27 \times 10^{26} \frac{\text{atomi}}{\text{m}^3},$$

$$R_0 \simeq 0.5 \times 10^{-10} \text{ m},$$

$$\chi \simeq 4\pi \times (0.5)^3 \times 0.27 \times 19^{26} \times 10^{-30} \simeq 0.42 \times 10^{-4}.$$

Il meccanismo di polarizzazione che abbiamo appena descritto con il nostro modellino atomico semplificato, è quello rilevante nella maggior parte dei materiali ed è detto *polarizzazione per deformazione*. Esso in generale consiste nella deformazione, per effetto di un campo elettrico esterno, degli atomi o molecole costituenti il mezzo, in seguito alla quale i baricentri delle cariche positive e negative si separano ed i singoli atomi o molecole diventano assimilabili a piccoli dipoli elettrici. Vi sono molecole, come l'acqua, nelle quali i baricentri delle due distribuzioni di carica non coincidono, e quindi hanno una struttura dipolare già in situazione normale (ovvero in assenza di campo elettrico esterno). In questi casi, anche se vi è sempre un effetto di deformazione nella distribuzione di carica dovuto ad un campo elettrico esterno, esso non è determinante nel descrivere il fenomeno della polarizzazione. Affronteremo questi casi nell'ultima sezione. La definizione del campo \vec{P} è comunque generale e si applica ad un qualsiasi dielettrico polarizzato. Esso permette di descrivere la distribuzione di carica di polarizzazione all'interno del dielettrico.

Per determinare la relazione tra le cariche di polarizzazione e \vec{P} , consideriamo un volumetto dV a forma di parallelepipedo di base $d\Sigma$ ed altezza dh ed orientato lungo la direzione di \vec{P} al suo interno (possiamo considerare al solito \vec{P} uniforme in dV), vedi Figura 5.5. Definiamo inoltre $d\vec{h}$ come il vettore avente direzione e verso di \vec{P} in dV e lunghezza dh , in modo da poter scrivere: $\vec{P} dh = P d\vec{h}$, essendo P il modulo di \vec{P} . Il momento di dipolo totale

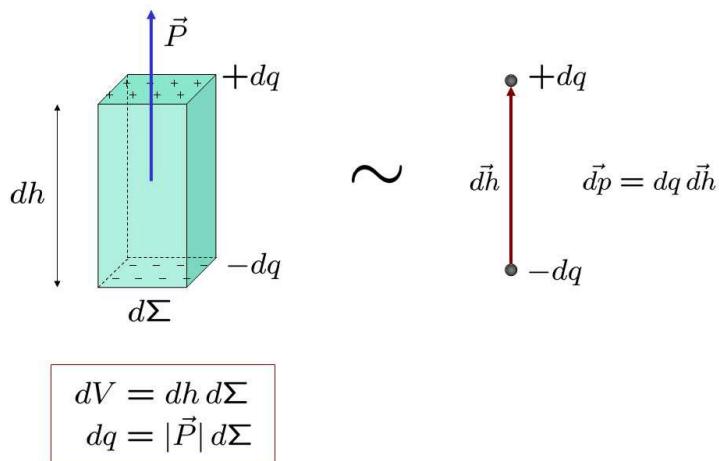


Figura 5.5: volumetto interno ad un dielettrico polarizzato.

all'interno di dV è:

$$d\vec{p} = \vec{P} dV = \vec{P} dh d\Sigma = P d\Sigma d\vec{h}.$$

Il volumetto è assimilabile ad un dipolo con momento di dipolo $d\vec{p}$ e cariche $\pm dq = \pm P d\Sigma$ a distanza dh distribuite con una densità $\pm P$ sulle superfici estreme $d\Sigma$, vedi Figura 5.5.

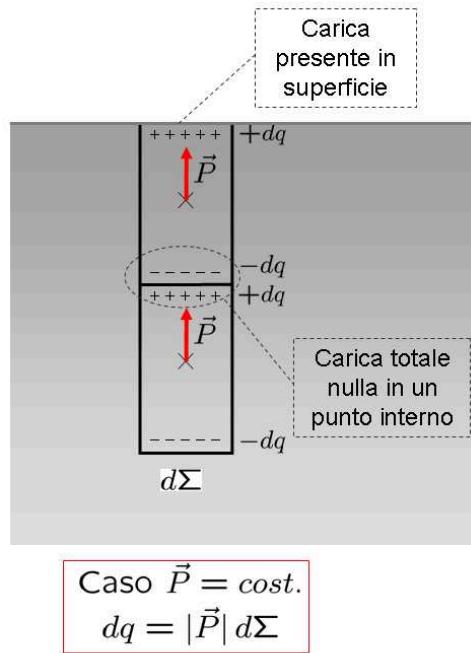


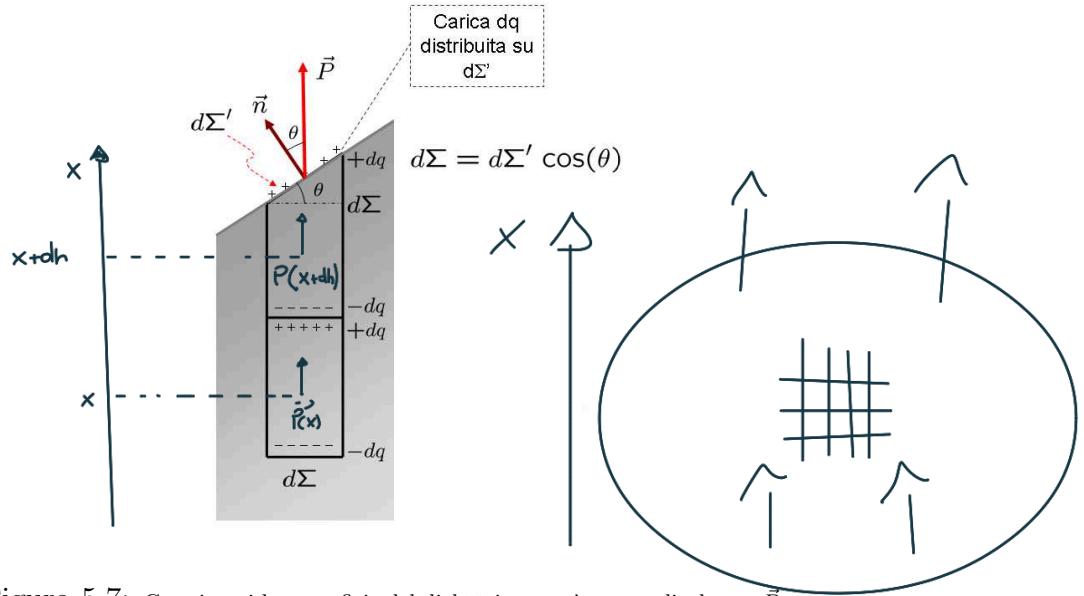
Figura 5.6: Due volumetti adiacenti all'interno di un dielettrico polarizzato.

Consideriamo un dielettrico nel quale \vec{P} è uniforme e dividiamone il volume in infiniti parallelepipedi di volume dV diretti lungo \vec{P} . Ogni punto all'interno del dielettrico può essere considerato giacente su una superficie $d\Sigma$ in comune tra due parallelepipedi successivi, vedi Figura 5.6. Essendo \vec{P} uniforme, esso è lo stesso all'interno dei due volumetti e tra di essi. Per questo le cariche di polarizzazione $\pm dq$ ai loro estremi sono uguali e sulla superficie in comune si compensano. Concludiamo quindi che, se \vec{P} è uniforme, non si osservano cariche di polarizzazione nel volume del dielettrico. Le cariche di polarizzazione non sono compensate sulle facce dei parallelepipedi che si affacciano sulla superficie del dielettrico. Se la superficie è ortogonale a \vec{P} la densità superficiale di carica è

$$\sigma_p = \frac{dq}{d\Sigma} = P.$$

Se invece la faccia $d\Sigma'$ del parallelepipedo in comune con la superficie del dielettrico è inclinata rispetto a \vec{P} , vedi Figura 5.7, la stessa carica $dq = P d\Sigma$ distribuita sulla faccia inferiore del parallelepipedo, è distribuita, in corrispondenza dell'estremo superiore, su una superficie $d\Sigma' = \frac{d\Sigma}{\cos(\theta)}$, essendo θ l'angolo tra \vec{P} e la normale \vec{n} alla superficie $d\Sigma'$. La densità σ_p è data da

$$\sigma_p d\Sigma' = P d\Sigma \Rightarrow \sigma_p = P \cos(\theta),$$

Figura 5.7: Caso in cui la superficie del dielettrico non è perpendicolare a \vec{P} .

ovvero

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}.$$

Se $\vec{P} \cdot \vec{n} > 0$, $\sigma_p > 0$; se invece $\vec{P} \cdot \vec{n} < 0$ allora $\sigma_p < 0$, vedi Figura 5.8.

Supponiamo ora che \vec{P} non sia uniforme e che, per semplicità, vari solo in modulo ma non in direzione e verso. Dividiamo sempre il volume del dielettrico in parallelepipedi infinitesimi orientati nella direzione di \vec{P} . Con riferimento alla Figura 5.9, consideriamo sempre due parallelepipedi infinitesimi adiacenti disposti lungo la direzione di \vec{P} , che facciamo coincidere con l'asse X. Ai capi del volumetto inferiore, centrato in x , vi sono cariche $\pm dq = \pm P(x) d\Sigma$, mentre ai capi del volumetto superiore, centrato in $x + dh$, gli eccessi di carica sono $\pm dq' = \pm P(x + dh) d\Sigma$. Essendo $P(x) \neq P(x + dh)$, in questo caso la compensazione delle cariche di polarizzazione tra i due parallelepipedi non è completa ma vi è una carica.

$$dq_p = -dq' + dq = [-P(x + dh) + P(x)] d\Sigma \approx -\frac{\partial P}{\partial x} dh d\Sigma = -\frac{\partial P}{\partial x} dV. \quad (5.1.8)$$

Se si fossero considerati volumetti diretti lungo una direzione generica e \vec{P} variabile da punto a punto anche in direzione, si sarebbe trovato, nel volumetto dV , un eccesso di carica pari a

$$dq_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV.$$

Concludiamo che *se \vec{P} non è uniforme, si può osservare una carica di volume distribuita con densità:*

$$\rho_p(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}.$$

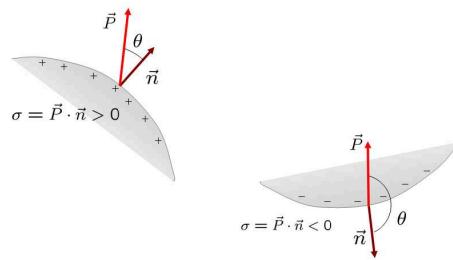


Figura 5.8: Densità superficiale di carica di polarizzazione.

Riassumendo In un dielettrico all'interno di un campo \vec{E} esterno si manifesta una carica di polarizzazione di superficie con densità

$$\sigma_p^{\text{sup}} = \vec{P} \cdot \vec{n},$$

e di volume con densità

$$\rho_p \equiv \frac{dq_p}{dV} = -\nabla \cdot \vec{P}.$$

quindi se P non omogeneo può succedere che le cariche di polarizzazione si trovino all'interno del volume.

Questa relazione lega \vec{P} alle cariche di polarizzazione come la legge di Gauss lega il campo elettrico alle cariche che lo generano. Il campo \vec{E}_r , invece, è legato attraverso la legge di Gauss a tutti i tipi di carica, sia di polarizzazione che di conduzione:

$$\nabla \cdot \vec{E}_r = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p),$$

E_r campo elettrostatico

essendo ρ la densità, in un certo punto, delle cariche di conduzione. Definendo il campo \vec{D} come

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_r + \vec{P},$$

troviamo che

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho,$$

ovvero il campo \vec{D} è originato unicamente dalle cariche di conduzione. In particolare se definiamo $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon_0$ troviamo che per esso vale la seguente legge di Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

ovvero esso rappresenta la componente del campo elettrico risultante \vec{E}_r dovuta alle sole cariche di conduzione.

Se il dielettrico è lineare,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_r,$$

N.B. dielettrico lineare: $\vec{P} \parallel \vec{E}_r \parallel \vec{D}$

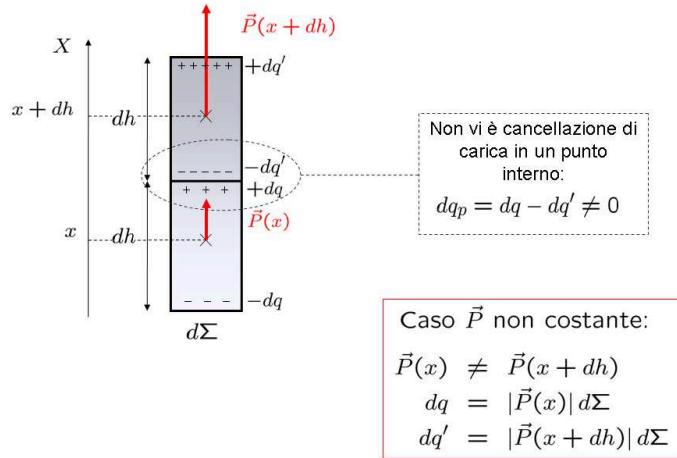


Figura 5.9: Densità superficiale di carica di polarizzazione.

Se il mezzo è lineare e omogeneo in assenza di cariche di conduzione nel volume, sono assenti cariche di polarizzazione di volume ovvero: $\rho(A) = 0 \Rightarrow \rho_p(A) = 0$

e quindi

$$\vec{D} = \epsilon_0(\chi + 1) \vec{E}_r = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_r = \epsilon \vec{E}_r.$$

Il campo \vec{D} , come abbiamo visto, dipende dalle sole cariche di conduzione e dalla loro distribuzione sulle superfici dei conduttori. Questo potrebbe portare erroneamente a pensare che questo campo sia lo stesso, per un dato sistema di conduttori carichi, in presenza o in assenza di dielettrico tra i conduttori stessi. Questo non è corretto. Infatti, anche se nei due casi le cariche di conduzione sono le stesse, la loro *distribuzione* può risentire della presenza delle cariche di polarizzazione ad esse affacciate. Questo succede nel caso in cui il dielettrico non è omogeneo e la sua densità varia in direzione tangente alla superficie del conduttore con cui è a contatto, si veda l'esercizio 5.2.1 al termine del capitolo. Si può dire quindi che in generale le cariche di polarizzazione influiscono *indirettamente* sul campo \vec{D} . Se invece il dielettrico è omogeneo, si dimostra che le cariche di polarizzazione non hanno effetto sulla distribuzione delle cariche di conduzione, e quindi che il campo \vec{D} in assenza del dielettrico, che indicheremo con \vec{D}_0 , coincide con il campo \vec{D} in presenza del dielettrico:

$$\vec{D}_0 = \vec{D}. \quad (5.1.9)$$

Sia \vec{E}_0 il campo elettrico nel vuoto e \vec{E}_r quello misurato nel dielettrico lineare e omogeneo, a parità di cariche di conduzione. Essendo nel vuoto $\epsilon_r = 1$ ed $\epsilon = \epsilon_0$, avremo che $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$. Dalla (5.1.9) e dalla definizione di $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon_0$ discende che $\vec{E} = \vec{E}_0$, ovvero che la componente \vec{E} del campo elettrico totale dovuto solo alle cariche di conduzione coincide con il campo elettrostatico \vec{E}_0 che si misurerebbe in assenza di dielettrico (vuoto). Dalla stessa equazione

(5.1.9) troviamo anche che:

$$\vec{E}_r = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{E}_0, \quad (5.1.10)$$

ovvero $\vec{E}_r = \vec{E}_0/\epsilon_r = \vec{E}/\epsilon_r$. Ricordiamoci ora che l'espressione del campo elettrostatico nel vuoto è sempre proporzionale ad $1/\epsilon_0$. La (5.1.10) ci dice che, in presenza di un dielettrico lineare ed omogeneo, l'espressione del campo elettrico \vec{E}_r si ottiene dalla corrispondente espressione nel vuoto \vec{E}_0 , sostituendo ad ϵ_0 la costante dielettrica ϵ del mezzo.

Sappiamo che il campo elettrostatico generato (nel vuoto) da un sistema di cariche $(q_i) = (q_1, \dots, q_n)$ disposte nei punti $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, vale in un punto \vec{x} :

$$\vec{E}_0(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}.$$

Nel vuoto $\epsilon_r = 1$ e $\chi = 0$, per cui possiamo calcolare l'induzione dielettrica:

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}.$$

Questo campo dipende solo dalle cariche di conduzione (q_i) e dalla loro distribuzione. Se lo spazio fosse totalmente ricoperto di dielettrico lineare ed omogeneo, con costante dielettrica relativa $\epsilon_r > 1$, il campo \vec{D} sarebbe lo stesso, ma, a causa delle cariche di polarizzazione, il campo elettrico \vec{E}_r sarebbe diverso e dato da

$$\vec{E}_r(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}.$$

La sua espressione è ottenuta da quella di $\vec{E}(\vec{x})$ sostituendo ϵ_0 con ϵ . Al suo interno è immagazzinata una energia U con densità volumetrica

$$u_e(\vec{x}) = \frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon}{2} |\vec{E}_r(\vec{x})|^2.$$

Per comprendere questa formula consideriamo di nuovo il condensatore piano riempito di dielettrico (si veda Figura 5.3, destra). L'energia immagazzinata nel sistema è

$$U = \frac{1}{2} (V_r)^2 C_r = \frac{1}{2\epsilon_r} V_0^2 C = \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 \right) V.$$

Da cui si ha

$$u_e(\vec{x}) = \frac{dU}{dV} = \frac{U}{V} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon}{2} |\vec{E}_r|^2.$$

Il campo $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_r$ ci dà informazione sulla distribuzione delle cariche di polarizzazione. Esso infatti soddisfa l'equazione

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_p.$$



Se definiamo $\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$, esso soddisfa la legge di Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_p = \frac{\rho_p}{\epsilon_0},$$

ovvero, è la componente di \vec{E}_r , dovuta alle sole cariche di polarizzazione. Nel caso del sistema di cariche di conduzione (q_i) all'interno di un dielettrico,

$$\vec{E}_p = -\chi \vec{E}_r = \sum_{i=1}^n \frac{q_{pi}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3},$$

ove per ogni q_i vi è una carica di polarizzazione

$$q_{pi} = -\frac{\chi}{\epsilon_r} q_i$$

opposta a q_i in modo che \vec{E}_p sia generato dal sistema (q_{pi}) , si veda Figura 5.10.

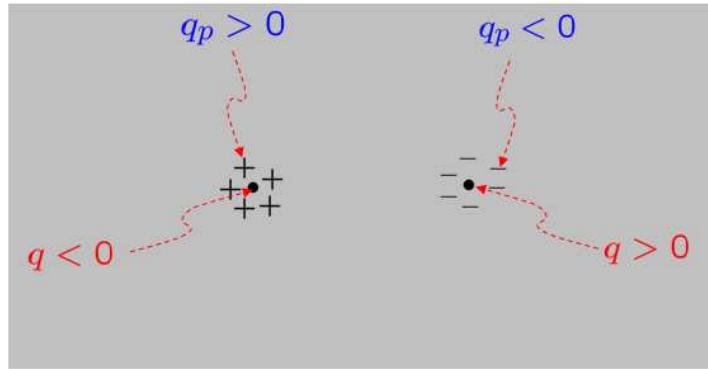


Figura 5.10: Carica di polarizzazione q_p che si crea intorno ad una carica puntiforme q immersa in un dielettrico.

Oltre alle cariche di polarizzazione di volume con densità $\rho_p = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, sulla superficie del dielettrico, in presenza di un campo esterno si manifesta una carica di polarizzazione superficiale con densità:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}.$$

Questa formula è derivabile dall'equazione principale $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_p$ che definisce \vec{P} come campo generato dalle cariche di polarizzazione. Prendiamo infatti la superficie di un dielettrico in presenza di un campo \vec{E} esterno. Sia \vec{n} la normale uscente alla superficie in un certo punto in cui la densità di carica di polarizzazione è σ_p . Consideriamo, intorno al punto, una superficie cilindrica S le cui basi, una interna ($d\Sigma_-$) al dielettrico ed una ($d\Sigma_+$) esterna ad esso, sono parallele alla superficie ed infinitamente vicine (si veda Figura 5.11). Calcoliamo il flusso di \vec{P} attraverso S . \vec{P} è diverso da zero solo su $d\Sigma_-$ e su parte della superficie laterale. Essendo le basi infinitamente vicine, trascuriamo il contributo al flusso attraverso la superficie laterale. L'unico contributo non nullo a $\Phi_S(\vec{P})$ è il flusso di P attraverso $d\Sigma_-$ su

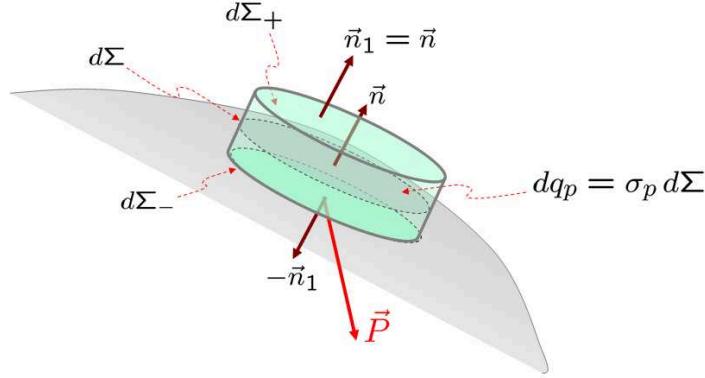


Figura 5.11: Derivazione della formula $\sigma_p = \vec{n} \cdot \vec{P}$ per la densità superficiale di carica di polarizzazione dall'analogia formula per la densità di volume: $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_p$.

cui la normale è $-\vec{n}_1 = -\vec{n}$, essendo $\vec{n}_1 = \vec{n}$ la normale uscente a $d\Sigma_+$. Applichiamo la legge della divergenza per scrivere:

$$\Phi_S(\vec{P}) = \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = - \int_{V_s} \rho_p dV = -q_{p, \text{int}} = -\sigma_p d\Sigma_- . \quad (5.1.11)$$

Ma $\Phi_S(\vec{P}) = \vec{P} \cdot (-\vec{n}_1) d\Sigma_-$ e quindi deduciamo che

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_1 = \vec{P} \cdot \vec{n} .$$

Vediamo adesso quando in un dielettrico lineare vi possono essere cariche di polarizzazione di volume. Consideriamo un punto all'interno del dielettrico e calcoliamo $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ usando la relazione

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_r = \frac{\chi}{\epsilon_r} \vec{D}.$$

Supponiamo che nel punto non vi siano cariche di conduzione:

$$\rho(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 0 .$$

Troviamo che, nello stesso punto,

$$-\rho_p = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\chi}{\epsilon_r} \vec{D} \right) = \left[\vec{\nabla} \left(\frac{\chi}{\epsilon_r} \right) \right] \cdot \vec{D} + \frac{\chi}{\epsilon_r} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \left[\vec{\nabla} \left(\frac{\chi}{\epsilon_r} \right) \right] \cdot \vec{D} . \quad (5.1.12)$$

Nel punto \vec{x} vi è carica di polarizzazione $\rho_p(\vec{x}) \neq 0$ solo se $\vec{\nabla} \left(\frac{\chi}{\epsilon_r} \right) \neq 0$, ovvero solo se χ ed ϵ_r , che dipendono dalla natura e dalla densità del mezzo, dipendono anche dal punto, il che avviene se il mezzo è *non-omogeneo*.

Non basta quindi che \vec{P} non sia uniforme per avere cariche di polarizzazione di volume, è necessario che il mezzo sia non-omogeneo. Se il mezzo è omogeneo, $\rho_p = 0$ all'interno del dielettrico.

Ricapitoliamo, in forma locale e non-locale, le proprietà dei tre campi $\vec{D}, \vec{E}_r, \vec{P}$. I tre campi sono legati dalla relazione

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_r + \vec{P},$$

in termini di essi si definiscono i campi

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}, \quad (5.1.13)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D}. \quad (5.1.14)$$

Le equazioni che legano questi campi alle rispettive sorgenti si scrivono, in forma locale e non-locale, come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_r = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{\rho_p}{\epsilon_0} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{E}_r \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{int} (q + q_p) \\ \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{int} q \\ \oint_S \vec{E}_p \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{int} q_p. \end{array} \right.$$

5.2 Polarizzazione per orientamento

Il meccanismo microscopico di polarizzazione descritto in precedenza è il più comune, ma esistono sostanze in cui la polarizzazione avviene in modo diverso. In certe sostanze, come l'acqua¹, le molecole hanno una polarizzazione, ovvero i baricentri delle cariche positive e negative non coincidono anche in assenza di campo \vec{E} esterno. In condizioni normali, esse sono assimilabili a piccoli dipoli. Per esempio, nella molecola di acqua le cariche negative sono concentrate sull'atomo di ossigeno mentre quelle positive sui due atomi di idrogeno. Ciascuna coppia $O - H$ è un dipolo con momenti \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , rispettivamente. Gli assi delle due coppie formano un angolo di $\sim 105^\circ$, si veda Figura 5.12. Il momento di dipolo totale è la somma dei momenti di ciascuna coppia:

$$\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (5.2.1)$$

In condizioni normali i momenti di dipolo associati a ciascuna molecola sono distribuiti casualmente nello spazio ed il valore medio del momento di dipolo su un volumetto vale dV

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{p}_i = 0$$

¹Le molecole con questa proprietà sono necessariamente composte da atomi di specie diverse.

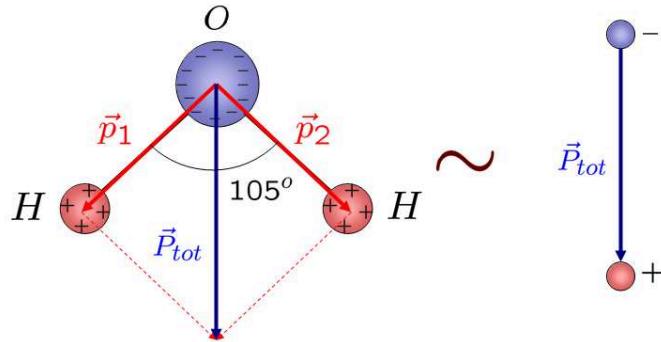


Figura 5.12: Struttura dipolare di una molecola d'acqua.

In presenza di un campo \vec{E} esterno, su ciascun dipolo agisce una coppia con momento $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$ che tende ad orientarlo lungo \vec{E} . Questa azione è la stessa per tutti i dipoli e tende ad ordinarli lungo la direzione e verso di \vec{E} . Questa tendenza è contrastata dal moto di agitazione termica che, invece, ha l'effetto di disordinare il sistema di dipoli. Come conseguenza di ciò, in presenza di \vec{E} , $\langle \vec{p} \rangle$ è diverso da zero, ma è tanto più piccolo quanto più grande è la temperatura T . Si trova che

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{p_0^2}{3K_B T} \vec{E}, \quad (\text{Legge di Debye})$$

da cui deriviamo il vettore densità di polarizzazione:

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle = n \frac{p_0^2}{3K_B T} \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \chi = \frac{p_0^2 n}{3K_B T \epsilon_0}.$$

Abbiamo descritto finora due meccanismi di polarizzazione:

- a) *Polarizzazione per deformazione*, legata alla separazione dei baricentri delle cariche positive e negative, all'interno di una molecola, dovuta al campo elettrico esterno. Abbiamo descritto questo fenomeno usando un modello molto semplificato di un singolo atomo. Questo ci ha permesso di trovare una formula approssimata per χ in termini delle caratteristiche del materiale

$$\chi = 4\pi n R_0^3.$$

- b) *Polarizzazione per orientamento* che avviene se le molecole hanno già in condizioni normali una polarità. In questo caso possiamo ricavare χ dalla legge di Debye:

$$\chi = \frac{p_0^2 n}{3k_B T \epsilon_0}.$$

Esercizio 5.2.1 Mostriamo in questo esercizio come la presenza di un dielettrico non-omogeneo possa alterare la distribuzione delle cariche di conduzione.

Consideriamo un condensatore piano il cui volume interno è in parte riempito con un materiale isolante lineare omogeneo avente costante dielettrica relativa $\epsilon_r = k_1$ ed in parte con un secondo isolante lineare omogeneo avente $\epsilon_r = k_2$, si veda Figura 5.13. Sia V la ddp tra le due armature, h la loro distanza, S la loro area e $\pm q$ le cariche di conduzione su di esse. Siano inoltre S_1 ed S_2 le aree delle parti delle armature a contatto con i due isolanti. Approssimando il campo elettrostatico come uniforme all'interno di ciascun isolante, calcolare

- a) campo \vec{E} in P_1 e P_2 ;
- b) densità di carica sulla lastra.

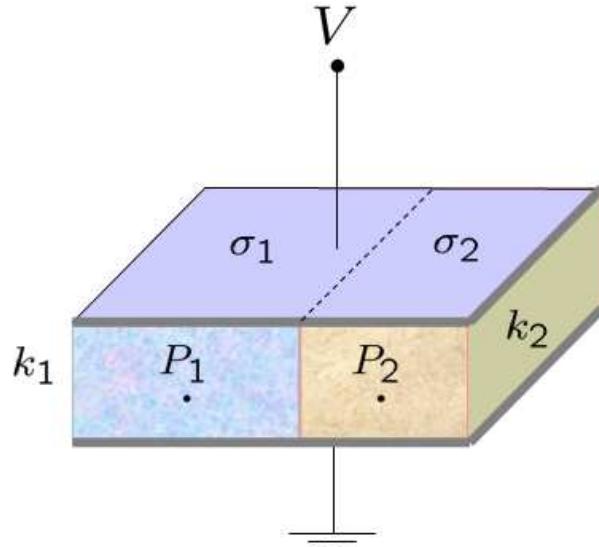


Figura 5.13: Condensatore riempito con dielettrico non-omogeneo.

Soluzione: Indichiamo sempre con \vec{u} il versore perpendicolare alle due armature, orientato da quella positiva a quella negativa. Iniziamo con l'osservare che, se \vec{E}_{r1} ed \vec{E}_{r2} sono i campi elettrici all'interno di ciascun isolante, essi devono determinare una stessa differenza di potenziale tra le armature essendo il potenziale su ciascuna armatura uniforme. Questo implica che :

$$V = |\vec{E}_{r1}| h = |\vec{E}_{r2}| h , \quad (5.2.2)$$

ovvero che:

$$|\vec{E}_{r1}| = |\vec{E}_{r2}| . \quad (5.2.3)$$

Questo risponde al primo quesito:

$$|\vec{E}_r(P_1)| = |\vec{E}_r(P_2)| = \frac{V}{h}.$$

Passiamo alla seconda domanda. Siano σ_1 e σ_2 le densità di carica di conduzione nelle parti dell'armatura positiva a contatto con il primo ed il secondo isolante rispettivamente. Mostriamo che queste densità devono essere diverse. Sappiamo che:

$$|\vec{E}_{r1}| = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 k_1}, \quad |\vec{E}_{r2}| = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 k_2}. \quad (5.2.4)$$

La condizione (5.2.3) implica:

$$\frac{\sigma_1}{k_1} = \frac{\sigma_2}{k_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (5.2.5)$$

Concludiamo che le cariche di conduzione si distribuiscono sulle due armature in modo non-uniforme al fine di compensare l'effetto delle cariche di polarizzazione e mantenere il potenziale dell'armatura uniforme sulla stessa. In particolare le cariche si addensano in corrispondenza del dielettrico con costante dielettrica relativa maggiore: $k_1 > k_2 \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_2$. Dalla (5.2.2) troviamo:

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0 k_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 k_2} = \frac{V}{h} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\epsilon_0 k_1}{h} V, \quad \sigma_2 = \frac{\epsilon_0 k_2}{h} V. \quad (5.2.6)$$

Questo risponde al secondo quesito. Possiamo anche ricavare le due densità in funzione della carica q sull'armatura positiva. Sappiamo che la carica totale sull'armatura positiva è la somma della carica $q_1 = \sigma_1 S_1$ a contatto con il primo isolante e della carica $q_2 = \sigma_2 S_2$ a contatto con il secondo:

$$q = q_1 + q_2 = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2. \quad (5.2.7)$$

Usando la relazione tra σ_1 e σ_2 , troviamo:

$$q = \sigma_1 S_1 + \frac{k_2}{k_1} \sigma_1 S_2 = \frac{k_1 S_1 + k_2 S_2}{k_1} \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{k_1}{k_1 S_1 + k_2 S_2} q, \quad (5.2.8)$$

analogamente troviamo

$$\sigma_2 = \frac{k_2}{k_1 S_1 + k_2 S_2} q. \quad (5.2.9)$$

Vediamo come le espressioni (5.2.8) e (5.2.9) sono legate alle (5.2.6). Per farlo dobbiamo usare la relazione tra V e q attraverso la capacità C del condensatore. Per calcolare C conviene pensare al condensatore come ad un parallelo di due condensatori piani: uno di superficie S_1 contenente solo il primo isolante, ed uno di superficie S_2 contenente il secondo isolante. Le capacità dei due condensatori sono:

$$C_1 = \frac{k_1 \epsilon_0 S_1}{h}, \quad C_2 = \frac{k_2 \epsilon_0 S_2}{h}. \quad (5.2.10)$$

La capacità C del parallelo sarà:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0}{h} (k_1 S_1 + k_2 S_2). \quad (5.2.11)$$

La relazione tra q e V è:

$$V = \frac{q}{C} = \frac{qh}{\epsilon_0 (k_1 S_1 + k_2 S_2)}. \quad (5.2.12)$$

Sostituendo questa espressione per V nelle espressioni (5.2.6) per σ_1 , σ_2 troviamo le (5.2.8) e (5.2.9).

Se il condensatore fosse carico con la stessa carica, ma vuoto, sappiamo che $\pm q$ si distribuirebbe uniformemente sulle due armature con densità $\pm\sigma_0 = \pm q/S$. Il vettore induzione elettrica per il condensatore vuoto vale:

$$\vec{D}_0 = \sigma_0 \vec{u}, \quad (5.2.13)$$

ed è uniforme nel volume (vuoto) tra le due armature. Nel caso del condensatore pieno considerato sopra, invece, \vec{D} non è uniforme, essendo le cariche di conduzione non uniformemente distribuite sulle armature, e vale $\vec{D}_1 = \sigma_1 \vec{u}$ nel primo isolante e $\vec{D}_2 = \sigma_2 \vec{u}$. Possiamo pensare al sistema dei due dielettrici come ad un unico dielettrico non-omogeneo, in cui la costante dielettrica relativa ϵ_r varia dal valore k_1 nel primo mezzo al valore k_2 nel secondo. In questo caso ϵ_r varia spostandoci da un mezzo all'altro, ovvero in direzione parallela alle armature e quindi perpendicolare al campo elettrico. Questo esempio mostra come in presenza di un mezzo non-omogeneo il campo induzione elettrica possa essere diverso in presenza ed in assenza del dielettrico tra i conduttori carichi:

$$\vec{D} \neq \vec{D}_0. \quad (5.2.14)$$

Capitolo 6

La corrente elettrica

Abbiamo accennato alla caratteristica che distingue i conduttori dai materiali isolanti: nei conduttori sono presenti portatori di carica liberi di muoversi. Consideriamo, per esempio, i conduttori solidi che sono i metalli. Gli elettroni presenti negli strati più esterni di un atomo di metallo (elettroni di valenza) sono caratterizzati dalla proprietà di essere molto debolmente legati al proprio atomo basta un urto dovuto all'agitazione termica per liberarli. Questi elettroni, a tutti gli effetti, si possono considerare liberi di muoversi all'interno del metallo. La struttura microscopica di un metallo può essere descritta come un reticolo di cariche positive, rappresentate dagli atomi privi dei loro elettroni più esterni, immerso in un gas di elettroni liberi.¹ Nel rame (Cu) sono per esempio presenti circa 8.5×10^{28} elettroni liberi per m^3 . Se prendiamo un volumetto dV sufficientemente grande da contenere un numero N abbastanza elevato di elettroni liberi, possiamo calcolare la velocità media degli elettroni liberi dentro dV .

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad (N \gg 1),$$

essendo \vec{v}_i le velocità dei singoli elettroni. Gli elettroni liberi sono soggetti ad un moto di agitazione termica ed a continui urti con il reticolo di ioni positivi. Questi urti hanno l'effetto di scorrelare le velocità degli elettroni, per cui all'interno di un dV , essendo $N \gg 1$, le velocità \vec{v}_i sono distribuite casualmente nello spazio e quindi

$$\langle \vec{v} \rangle = 0$$

Tutte le grandezze fisiche associate ad un singolo elettrone sono calcolate come valore medio sul volumetto dV nell'intorno di un generico punto. In presenza di un campo elettrico esterno \vec{E} , ciascun elettrone è soggetto ad una forza

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

¹Quasi tutte le sostanze solide hanno una struttura cristallina. Tale struttura può non essere visibile ad occhio nudo. In questo caso il solido è descrivibile come un aggregato di cristallini molto piccoli, ciascuno con una propria struttura reticolare. Solidi che non hanno una struttura cristallina sono le sostanze *amorfe* come il vetro o la procellana.

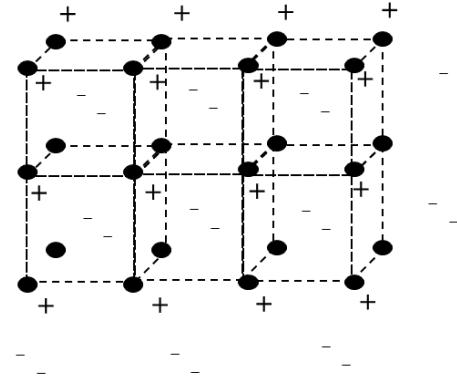


Figura 6.1: Schematizzazione di un reticolo metallico.

diretta nella stessa direzione, ma verso opposto ad \vec{E} , che imprime ad esso una componente di moto in verso opposto ad \vec{E} , mediamente descritta da una velocità costante \vec{v}_d detta **velocità di deriva**, uguale per tutti gli elettroni e che si somma al loro moto termico. Questo fa sì che, in presenza di \vec{E} , gli elettroni abbiano una velocità media non più nulla, pari alla velocità di deriva:

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_d \neq 0, \quad (6.0.1)$$

che descrive un moto collettivo di deriva in verso opposto ad \vec{E} . Questo moto di insieme dei portatori di carica liberi dovuto ad un campo elettrico esterno si chiama **corrente elettrica**.

Come abbiamo visto, tutti i punti all'interno di un conduttore, all'equilibrio elettrostatico, sono allo stesso potenziale, per cui, in tale situazione, un oggetto conduttore si può caratterizzare attraverso un unico valore del potenziale. Consideriamo due conduttori C_1 e C_2 .

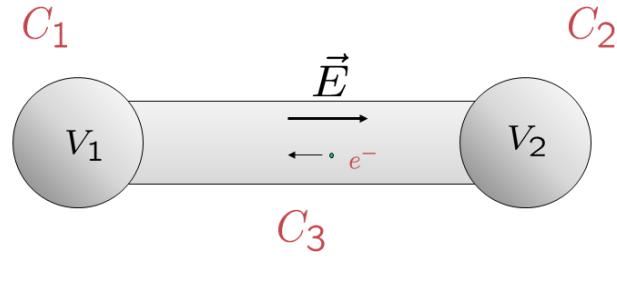


Figura 6.2: Due conduttori a diverso potenziale vengono collegati da un terzo. Si ha una situazione iniziale di non-equilibrio elettrostatico in cui si osserva corrente elettrica.

Supponiamo che su \$C_2\$ vi sia un eccesso di carica negativa rispetto a \$C_1\$ e che quindi il potenziale \$V_2\$ di \$C_2\$ sia minore del potenziale \$V_1\$ di \$C_1\$ (ricordiamo che il potenziale di un conduttore carico si può misurare come il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico quando una carica positiva unitaria viene spostata dalla superficie del conduttore e portata all'infinito, ed è quindi tanto più basso quanto maggiore è la carica negativa sul conduttore e tanto maggiore quanto più il conduttore è carico positivamente). Supponiamo di collegare i due conduttori con un terzo \$C_3\$, si veda Figura 6.2. Gli elettroni liberi all'interno dell'unico conduttore \$C_1 + C_2 + C_3\$ sono soggetti ad un campo \$\vec{E}\$ legato alla differenza di potenziale (*ddp*) inizialmente esistente tra \$C_1\$ e \$C_2\$ e tenderanno a muoversi dai punti a potenziale minore (\$V_2\$) a quelli a potenziale maggiore (\$V_1\$). Si crea quindi una corrente elettrica che dura il tempo di una scarica, ovvero il tempo necessario agli elettroni per ridistribuirsi secondo una nuova configurazione di equilibrio in cui il potenziale è uniforme all'interno dei tre conduttori ed il campo elettrico \$\vec{E}\$ al loro interno è identicamente nullo. Per studiare le proprietà di conduzione di un conduttore è desiderabile poter stabilire un regime di corrente duratura, ovvero avere un dispositivo che mantenga costante la differenza di potenziale tra \$C_1\$ e \$C_2\$, ed in generale tra due punti di un conduttore.

Questo dispositivo è detto *generatore di forza elettromotrice* (f.e.m.). Al suo interno agisce una forza elettrica **non conservativa**, di origine per esempio chimica (pila) o meccanica, il cui effetto è, via via che elettroni nei conduttori giungono nei punti a potenziale maggiore (\$C_1\$), di portare cariche negative corrispondenti nei punti a potenziale minore (\$C_2\$) o cariche positive corrispondenti nei punti a potenziale maggiore (\$C_1\$), compensando in questo modo il lavoro negativo compiuto dalla forza elettrostatica che si oppone a

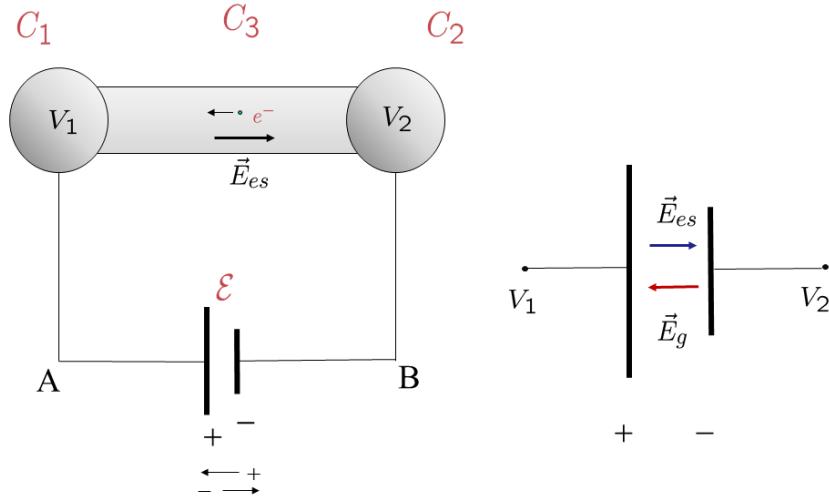


Figura 6.4: Sinistra: sistema di conduttori $C_1 + C_2 + C_3$ ai capi del quale è mantenuta una differenza di potenziale $V_1 - V_2$ costante per mezzo di un generatore di f.e.m. Destra: lungo il circuito sono presenti due campi elettrici \vec{E}_{es} e \vec{E}_g . Quest'ultimo è diverso da zero solo all'interno del generatore.

questo spostamento, si veda Figura 6.4, sinistra, e mantenendo così la differenza di potenziale tra C_1 e C_2 costante.² Un generatore di forza elettromotrice è quindi caratterizzato da due poli, uno positivo ed uno negativo, tra i quali viene mantenuta una differenza di potenziale costante, ed è rappresentato nella simbologia circuitale come in Figura 6.3.



Figura 6.3: Generatore di f.e.m. nella simbologia circuitale.

Il sistema dei conduttori C_1, C_2, C_3 collegato al generatore di f.e.m. è un esempio di *circuito elettrico*. In generale definiamo un circuito elettrico come una successione di conduttori alle estremità della quale è mantenuta una differenza di potenziale attraverso un generatore di forze elettromotrice. All'interno del circuito è quindi presente il campo elettrostatico \vec{E}_{es} ed un campo \vec{E}_g presente solo all'interno del generatore (Figura 6.4, destra):

$$\vec{E} = \vec{E}_{es} + \vec{E}_g .$$

Con riferimento alla Figura 6.4 (sinistra), il lavoro W_g su un elettrone compiuto da \vec{E}_g per

²Questa è una schematizzazione fatta a titolo esemplificativo del funzionamento di un generatore di f.e.m. Nella pila di Volta o di Daniell, ad esempio, sono gli ioni presenti in una soluzione a contatto con elettrodi di Rame e di Zinco a trasportare la carica tra i due elettrodi in modo da mantenere la differenza di potenziale tra loro costante. Tali particelle caricate sono mosse da forze di natura chimica derivanti dalle interazioni atomico/molecolari.

riportarlo da A a B, deve essere uguale ed opposto al lavoro (negativo) W_{es} compiuto da \vec{E}_{es} lungo lo stesso spostamento

$$W_g = -e \int_{A \rightarrow B} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = -W_{es} = -[-e(V_1 - V_2)] \Rightarrow \int_{B \rightarrow A} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2,$$

ove abbiamo usato la proprietà che $\int_{A \rightarrow B} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = -\int_{B \rightarrow A} \vec{E}_g \cdot d\vec{l}$, essendo i due integrali calcolati su uno stesso percorso ma in verso opposto. La forza elettromotrice \mathcal{E} è data dalla circuitazione di \vec{E} lungo tutto il circuito, orientato nel verso che va dal polo negativo al polo positivo del generatore (Figura 6.5)

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} + \int_{B \rightarrow A} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = \int_{B \rightarrow A} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 \neq 0, \quad (6.0.2)$$

ove abbiamo usato la proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo: $\oint \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = 0$. Da questo risulta che \vec{E} è un campo elettrico non-conservativo.

La f.e.m. \mathcal{E} è quindi una caratteristica del generatore, essendo dovuta al solo campo elettrico non-conservativo \vec{E}_g al suo interno, e si misura come *ddp* tra i suoi poli quando non circola corrente (come vedremo).

Convenzionalmente si fissa il verso positivo della corrente quello in cui si sposterebbero cariche positive, ovvero da punti a potenziale maggiore a punti a potenziale minore. Sappiamo che nei metalli i portatori di carica che costituiscono la corrente sono elettroni che hanno carica negativa. Come vedremo fra poco però, la descrizione della corrente elettrica non cambierebbe se i portatori, invece di avere carica negativa elementare $-e$, avessero carica positiva $+e$. Per questo, anche quando i portatori di carica sono elettroni, convenzionalmente descriveremo la corrente come dovuta al moto di particelle caricate positivamente. Presa una superficie $d\Sigma$ (Figura 6.6, sopra) all'interno di un conduttore percorso da corrente, definiamo *intensità di corrente* $i_{d\Sigma}$ che attraversa $d\Sigma$, la quantità di carica positiva che attraversa $d\Sigma$ nell'unità di tempo

$$i_{d\Sigma} = \frac{dq}{dt} \quad ; \quad [i] = [QT^{-1}] .$$

L'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica, nel S.I., è l'Ampere (A) definito come:

$$1 A = 1 C s^{-1}. \quad (6.0.3)$$

Come abbiamo accennato all'inizio del corso, l'intensità di corrente è scelta come grandezza fondamentale e la carica elettrica come derivata, la cui unità di misura (il Coulomb) è quindi definita come: $1 C = 1 A s$.³

³L'unità di misura Ampere è definita come l'intensità di corrente che, attraversando due fili conduttori rettilinei paralleli, posti a distanza di $1 m$, produce tra di essi una forza magnetica di intensità pari a $|\vec{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi}(N) = 2 \times 10^{-7} (N)$. Una definizione più recente lega l'Ampere alla carica elettrica elementare e : un Ampere è un'intensità pari ad una carica di $1/(1,6021917 \times 10^{-19}) \times e$ che circola in un circuito elettrico in un secondo.

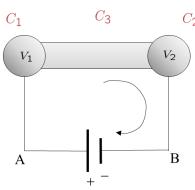


Figura 6.5: Orientamento lungo il circuito.

poco però, la descrizione della corrente elettrica non cambierebbe se i portatori, invece di avere carica negativa elementare $-e$, avessero carica positiva $+e$. Per questo, anche quando i portatori di carica sono elettroni, convenzionalmente descriveremo la corrente come dovuta al moto di particelle caricate positivamente. Presa una superficie $d\Sigma$ (Figura 6.6, sopra) all'interno di un conduttore percorso da corrente, definiamo *intensità di corrente* $i_{d\Sigma}$ che attraversa $d\Sigma$, la quantità di carica positiva che attraversa $d\Sigma$ nell'unità di tempo

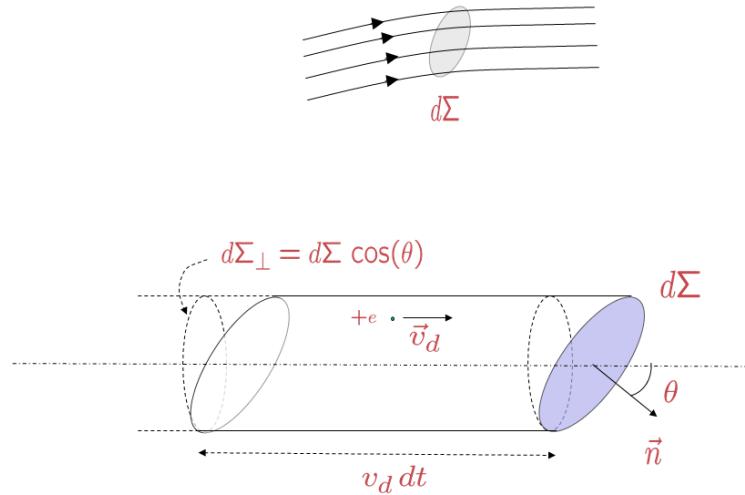


Figura 6.6: Sopra: corrente che attraversa una superficie infinitesima $d\Sigma$; Sotto: carica positiva che attraversa $d\Sigma$ nell'intervallo dt .

Per quanto detto prima decidiamo di descrivere la corrente come moto di insieme di cariche elementari positive che si muovono nel verso del campo \vec{E} . Sia $n = \frac{N}{dV}$ la densità di questi portatori di carica nel conduttore, ove N è il numero di tali portatori contenuti in un volumetto dV . La carica dei portatori all'interno di dV , avendo ciascuno carica $+e$, sarà $dq = e N$, per cui la loro densità di carica è⁴

$$\rho_e = \frac{dq}{dV} = e \frac{N}{dV} = e n .$$

La carica $dq_{d\Sigma}$ che attraversa $d\Sigma$ nel tempo dt è la carica totale contenuta in un prisma obliquo di base $d\Sigma$ e lunghezza $v_d dt$, il cui asse è orientato lungo la direzione della corrente, essendo \vec{v}_d la velocità di deriva media di ciascuna carica e v_d il suo modulo (Figura 6.6, sotto). Il volume dV del prisma obliquo è dato dal prodotto dell'area $d\Sigma_\perp$ della sua sezione trasversale per la lunghezza. Essendo $d\Sigma_\perp = d\Sigma \cos(\theta)$, ove θ è l'angolo tra la normale \vec{n} a $d\Sigma$ e la direzione della corrente, abbiamo:

$$dV = v_d dt d\Sigma_\perp = v_d dt d\Sigma \cos(\theta) . \quad (6.0.4)$$

La carica $dq_{d\Sigma}$ quindi vale

$$dq_{d\Sigma} = e n dV = e n v_d dt d\Sigma \cos(\theta) ,$$

⁴In questa sezione indichiamo con il simbolo ρ_e la densità dei portatori di carica positiva nella corrente elettrica, per non confonderla con la resistività ρ che introdurremo più avanti nel capitolo.

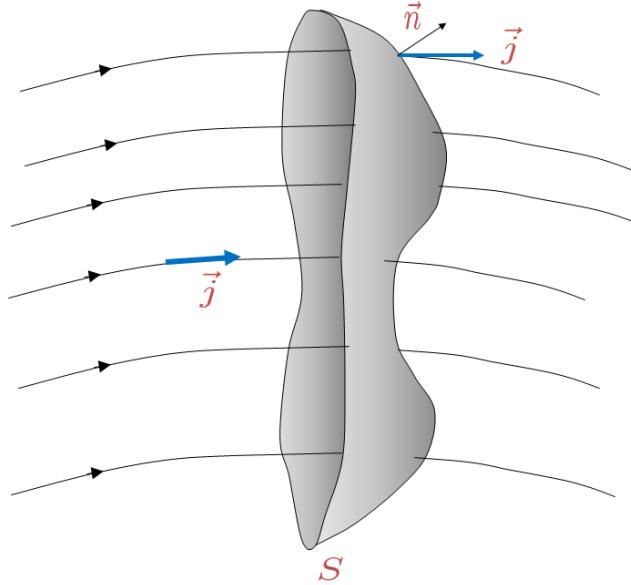


Figura 6.7: Flusso di corrente elettrica attraverso una superficie finita S .

per cui $i_{d\Sigma}$ si scrive:

$$i_{d\Sigma} = \frac{dq_{d\Sigma}}{dt} = e n v_d d\Sigma \cos(\theta) = \vec{j} \cdot \vec{n} d\Sigma ,$$

ove abbiamo introdotto il campo vettoriale:

$$\vec{j} = n e \vec{v}_d = \rho_e \vec{v}_d ,$$

ed abbiamo scritto $v_d d\Sigma \cos(\theta) = \vec{v}_d \cdot \vec{n} d\Sigma$. Il campo vettoriale $\vec{j}(\vec{x}, t)$ è detto **densità di corrente** e descrive la corrente elettrica punto per punto.⁵ Nel calcolo fatto, abbiamo preso $d\Sigma$ sufficientemente piccola da poter considerare \vec{j} (e quindi n e \vec{v}_d) uniforme al suo interno.

L'intensità di corrente $i_{d\Sigma}$ attraverso $d\Sigma$ è esprimibile quindi come il flusso elementare di \vec{j} attraverso $d\Sigma$, ove il verso della normale \vec{n} a $d\Sigma$ è scelto concorde con \vec{j} in modo che l'intensità sia positiva:

$$i_{d\Sigma} = d\Phi_{d\Sigma}(\vec{j}) . \quad (6.0.5)$$

Scegliendo invece \vec{n} discorde con \vec{j} il flusso sarebbe negativo (entrante) e l'intensità $i_{d\Sigma}$, che è definita come una grandezza positiva, sarebbe $i_{d\Sigma} = -d\Phi_{d\Sigma}(\vec{j})$. L'intensità di corrente i_S attraverso una superficie orientata finita S all'interno del conduttore sarà esprimibile come

⁵Si osservi l'analogia tra questo campo e la densità di corrente $\vec{j}_{fl.}$ che descrive il moto di un fluido, definita come $\vec{j}_{fl.} = \rho_{mat.} \vec{v}_d$, essendo $\rho_{mat.}$ la densità di materia nel fluido.

il flusso di $\vec{j}(\vec{x}, t)$ attraverso S (Figura 6.7):

$$i_S = \Phi_S(\vec{j}) = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS. \quad (6.0.6)$$

Convenzionalmente su S il versore \vec{n} è scelto in modo tale che $\vec{j} \cdot \vec{n} > 0 \Rightarrow i_S > 0$. Scegliendo invece \vec{n} discorde con \vec{j} , essendo $i_S > 0$, scriveremmo $i_S = -\Phi_S(\vec{j})$.

Supponiamo che a determinare la corrente siano sia cariche elementari positive ($+e$) con densità n_+ che cariche elementari negative ($-e$) con densità n_- . La velocità di deriva $\vec{v}_d^{(+)}$ delle prime è diretta in verso concorde ad \vec{E} , mentre la velocità $\vec{v}_d^{(-)}$ delle seconde è diretta in verso opposto ad \vec{E} . La densità di corrente si scriverà:

$$\vec{j} = (+e) n_+ \vec{v}_d^{(+)} + (-e) n_- \vec{v}_d^{(-)}.$$

Osserviamo che i contributi a \vec{j} dovuti alle cariche positive e negative hanno la stessa direzione e verso, che coincide con quello del moto dei portatori di carica positiva. Questo rappresenta la circostanza sperimentale per cui non è possibile determinare la natura dei portatori di carica (cariche positive o negative) attraverso una misura di corrente (ovvero di \vec{j}) e quindi giustifica la convenzione di scegliere, come verso della corrente, quello del moto di cariche positive.

Ricordiamo che \vec{j} , come \vec{E} e \vec{v}_d , sono quantità macroscopiche, calcolate in ogni punto come medie di corrispondenti grandezze microscopiche fatte su volumetti dV che contengono un numero sufficientemente elevato di portatori di carica.

La corrente si dice **stazionaria** se e solo se la sua intensità è la stessa attraverso una qualsiasi sezione del conduttore (Figura 6.8). Essa è quindi descrivibile attraverso un unico valore dell'intensità i , riferito ad una generica sezione del conduttore.

Per le regole di Faraday, sappiamo che, in opportune unità, l'intensità i_Σ di corrente attraverso una sezione Σ si può misurare come numero di linee di campo di \vec{j} che attraversano Σ . La corrente è stazionaria se, e solo se, quindi, ogni sezione del conduttore è attraversata dallo stesso numero di linee di campo di \vec{j} . Se la corrente non fosse stazionaria esisterebbero due sezioni Σ_1 e Σ_2 , attraversate da un numero diverso di linee di campo, ovvero esisterebbero punti tra le due sezioni in cui terminano o si originano linee di campo di \vec{j} , si veda Figura 6.9.

In questa analisi abbiamo supposto che le linee di campo di \vec{j} non intersechino mai la superficie del conduttore. Supponiamo che, a livello microscopico, il campo \vec{j} , in prossimità della superficie, abbia in un certo istante una componente perpendicolare alla superficie ed uscente. Essa sarà dovuta ad un campo \vec{E} , agente sulle cariche positive della corrente, avente anch'esso sulla superficie una componente perpendicolare ad essa in verso uscente. Poiché i portatori di carica nella corrente non possono abbandonare la superficie, si creerà su di essa un eccesso di carica positiva. Questo, a sua volta, creerà un campo $\Delta \vec{E}$ che si sovrappone ad \vec{E} , ma è diretto verso l'interno, il cui effetto è di annullarne la componente perpendicolare alla superficie (si veda Figura 6.10, sopra). Il nuovo campo $\vec{E}' = \vec{E} + \Delta \vec{E}$ riporterà le cariche accumulate sulla superficie verso l'interno. Questo processo deve pensarsi avvenire a livello microscopico, istante per istante, in prossimità della superficie di un conduttore percorso da

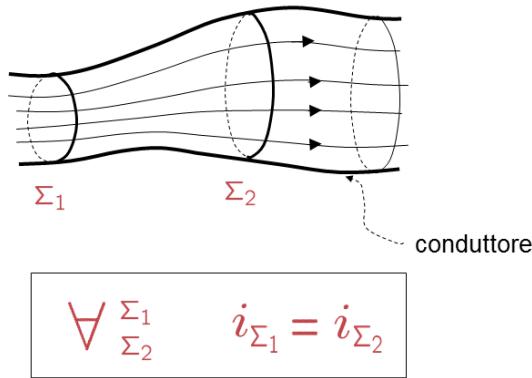


Figura 6.8: Conduttore percorso da corrente stazionaria.

corrente. Macroscopicamente si osserverà un campo \vec{E} medio ed un campo \vec{j} medio, diretti nei punti interni prossimi alla superficie, in direzione tangente ad essa (si veda Figura 6.10, sotto).

6.1 Equazione di continuità

Torniamo al caso di un conduttore percorso da una corrente **non stazionaria**. Siano Σ_1 e Σ_2 due sezioni attraverso cui, per esempio, $i_{\Sigma_1} > i_{\Sigma_2}$ (Figura 6.9, sopra e Figura 6.11). Questo vuol dire che in un tempo dt la carica (positiva) che attraversa Σ_1 , ovvero $dq_{\Sigma_1} = i_{\Sigma_1} dt$, è maggiore della carica (positiva) $dq_{\Sigma_2} = i_{\Sigma_2} dt$ che attraversa Σ_2 . Se V è il volume interno al conduttore, racchiuso tra le due sezioni, assumendo la **conservazione della carica**, la carica interna a V sarà aumentata in dt di una quantità pari a $dq = dq_{\Sigma_1} - dq_{\Sigma_2} > 0$. Dividendo per dt troviamo:

$$\frac{dq}{dt} = i_{\Sigma_1} - i_{\Sigma_2}. \quad (6.1.1)$$

Questa relazione varrebbe anche nel caso (Figura 6.9, sotto) in cui $i_{\Sigma_1} < i_{\Sigma_2}$. In tal caso, per la conservazione della carica, la carica interna a V diminuirebbe in dt di $dq = dq_{\Sigma_1} - dq_{\Sigma_2} < 0$. Se consideriamo la superficie chiusa S , che consiste nelle due sezioni Σ_1 e Σ_2 e nella porzione di superficie laterale del conduttore racchiusa tra Σ_1 e Σ_2 , al flusso di \vec{j} attraverso S contribuisce solo il flusso di \vec{j} attraverso Σ_1 e Σ_2 , poiché \vec{j} sulla superficie laterale è sempre

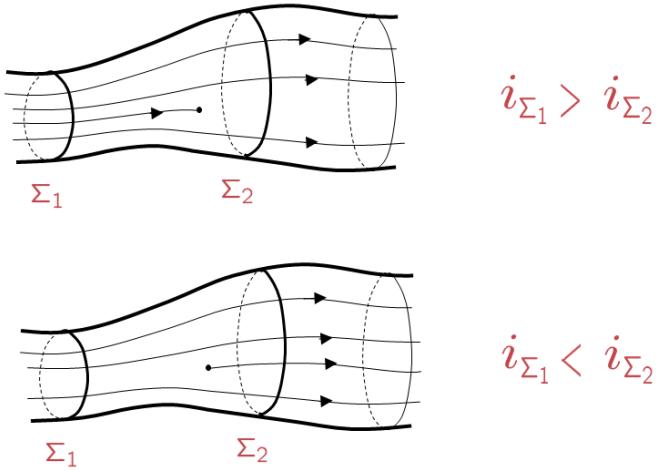


Figura 6.9: Conduttore percorso da corrente non stazionaria.

diretto lungo la tangente. Se la normale a Σ_2 è diretta nel verso della corrente, poiché la normale ad S è sempre uscente, la normale \vec{n}' a Σ_1 , come parte di S , sarà diretta in verso opposto alla corrente (Figura 6.11). Risulta quindi che il flusso di \vec{j} attraverso S è dato da:

$$\Phi_S(\vec{j}) = \int_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \vec{n}' dS + \int_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = i_{\Sigma_2} - i_{\Sigma_1}, \quad (6.1.2)$$

essendo

$$\vec{j} \cdot \vec{n}' < 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{n} > 0. \quad (6.1.3)$$

Per la (6.1.1), la variazione nel tempo della carica contenuta in S è data da

$$\frac{dq}{dt} = i_{\Sigma_1} - i_{\Sigma_2} = -\Phi_S(\vec{j}) = -\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS. \quad (6.1.4)$$

Sia adesso $\rho_e(\vec{x}, t) = e n(\vec{x}, t)$ la densità dei portatori di carica positiva all'interno del conduttore, in termini della quale scriviamo che la carica q contenuta in V come data da:

$$q(t) = \int_V \rho_e(\vec{x}, t) dV, \quad (6.1.5)$$

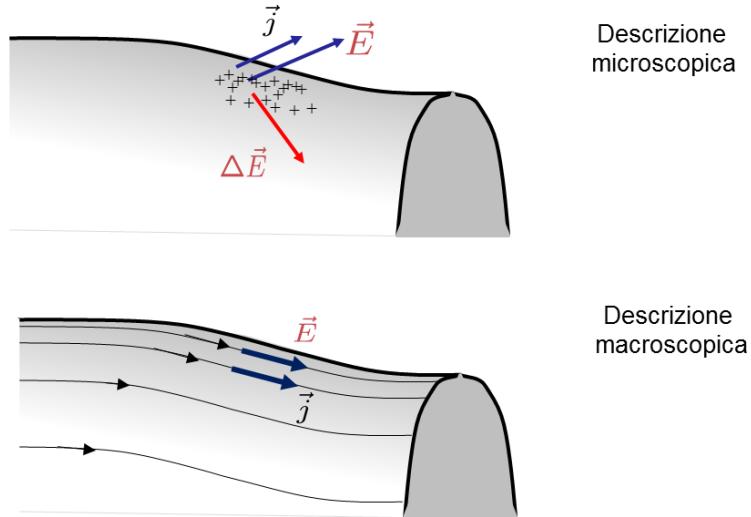


Figura 6.10: Sotto: il campo elettrico e la densità di corrente osservati in prossimità della superficie sono paralleli ad essa.
Sopra: spiegazione microscopica.

la sua derivata rispetto al tempo si può quindi scrivere nella seguente forma:⁶

$$\frac{dq}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_V \rho_e(\vec{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_e(\vec{x}, t) dV. \quad (6.1.6)$$

Usando il teorema della divergenza possiamo anche riscrivere :

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV.$$

Da questo e dalla (6.1.4) deriva che:

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \Leftrightarrow \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_e dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV.$$

L'argomento che ci ha portato a questa relazione è applicabile a qualsiasi superficie chiusa S all'interno del conduttore, per cui vale l'uguaglianza anche tra le due funzioni integrande:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = - \frac{\partial \rho_e}{\partial t}(\vec{x}, t). \quad (6.1.7)$$

⁶Osserviamo che la derivata rispetto al tempo, passando dentro l'integrale, diventa una derivata parziale perché mentre l'integrale di volume dipende solo dal tempo, la funzione integranda $\rho_e(x, y, z, t)$ dipende anche dal punto dello spazio attraverso le sue coordinate x, y, z .

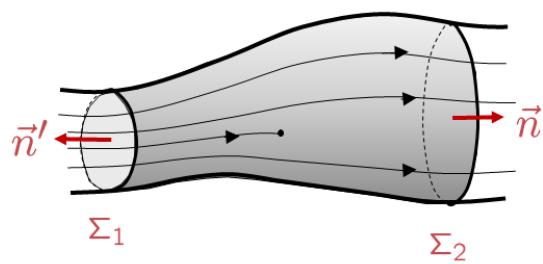


Figura 6.11: Esempio di corrente non-stazionaria.

Questa è detta *equazione di continuità* per la carica elettrica ed esprime una proprietà fondamentale finora verificata in tutti i processi fisici senza eccezione: *la conservazione della carica elettrica*. Si osservi l'analogia con l'equazione di continuità studiata in fluidodinamica e che invece esprime la conservazione della materia nel moto di un fluido. In tal caso l'equazione aveva la stessa forma (6.1.7) ma al posto di \vec{j} vi era la densità di corrente del fluido \vec{j}_{fl} ed al posto di ρ_e la densità di materia del fluido stesso.

Nei punti in cui terminano le linee di campo di \vec{j} , sappiamo che $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} < 0$ e l'equazione di continuità ci dice che $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} > 0$. Allo stesso modo dove $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} > 0$, si originano linee di campo e $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} < 0$. In altre parole nei punti in cui terminano (o si originano) linee di campo di \vec{j} vi è un addensamento (o un diradamento) di carica.

La corrente che percorre un conduttore è stazionaria, per quanto detto sopra, se e solo se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \equiv 0 \quad \text{ovunque al suo interno.}$$

Questa proprietà equivale a caratterizzare il campo \vec{j} in ogni istante come un campo *solenoidale*. Diremo quindi che la corrente è stazionaria se e solo se il campo \vec{j} è solinoidale. Questo a sua volta equivale a dire che le sue linee di campo sono ovunque continue all'interno del conduttore e che quindi il suo flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa è nullo.

6.2 Legge di Ohm

Sperimentalmente si osserva che all'interno dei conduttori metallici la densità di corrente \vec{j} è proporzionale in ogni punto al campo \vec{E} :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

o anche

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad \text{essendo } \rho = \frac{1}{\sigma}, \tag{6.2.1}$$

dove ρ è detta resistività, mentre σ è detta conduttività del metallo. Esse dipendono dalla natura del materiale e dalla temperatura T . Consideriamo un conduttore cilindrico omogeneo di sezione uniforme Σ ai capi del quale sia applicata una ddp ΔV , Figura 6.12. Siano \vec{j} e \vec{E} uniformi all'interno del conduttore diretti lungo l'asse dello stesso, con moduli rispettivamente j ed E , e sia d la lunghezza del conduttore. La ddp ai suoi capi, usando la (6.2.1), si può esprimere nel seguente modo

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E d = \rho j d = \frac{\rho d}{\Sigma} (j \Sigma) = R i, \tag{6.2.2}$$

ove abbiamo scritto

$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = j \Sigma,$$

e definito

$$R = \rho \frac{d}{\Sigma}. \tag{6.2.3}$$

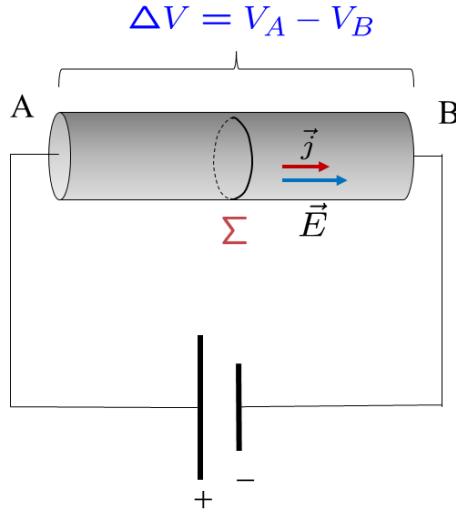


Figura 6.12: Corrente stazionaria attraverso un cilindro metallico.

R è detta *resistenza* del conduttore e dipende dalla natura del materiale, da T e dalla sua geometria. La relazione:

$$\Delta V = R i, \quad (6.2.4)$$

è detta *legge di Ohm*. L'unità di misura di R è l'Ohm (Ω) definito come:

$$[1 \Omega] = [1 \text{ Ohm}] = \left[\frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ampere}} \right].$$

Supponiamo che il conduttore (omogeneo) abbia sezione variabile, ma che sia percorso da una corrente stazionaria di intensità i , Figura 6.13. Fissiamo l'asse x lungo la direzione della corrente e supponiamo che su ciascuna sezione trasversale \vec{j} (e quindi \vec{E}) sia uniforme. La condizione di stazionarietà implica che attraverso una generica sezione trasversale $\Sigma(x)$ posizionata nel punto x lungo il conduttore

$$\forall x \in [0, d] : i_{\Sigma(x)} = \int_{\Sigma(x)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = j(x)\Sigma(x) = i.$$

Poiché l'area $\Sigma(x)$ della sezione varia lungo il conduttore, la condizione di stazionarietà implica che anche il modulo $j(x)$ della densità di corrente dipenda da x e con esso il modulo $E(x)$ del campo elettrico. La ddp ai capi del conduttore si scrive:

$$\Delta V = \int_{A \rightarrow B} \vec{E}(x) \cdot d\vec{l} = \int_0^d E(x) dx = \int_0^d \rho j(x) dx = \int_0^d \rho \frac{j(x)}{\Sigma(x)} \Sigma(x) dx =$$

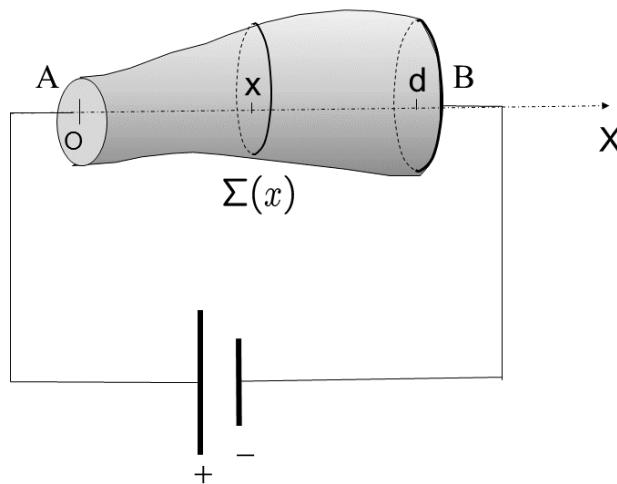


Figura 6.13: Corrente stazionaria attraverso un conduttore metallico a sezione variabile.

$$= \left[\rho \int_0^d \frac{dx}{\Sigma(x)} \right] i = Ri, \quad (6.2.5)$$

ove

$$R = \rho \int_0^d \frac{dx}{\Sigma(x)}$$

è

la

resistenza

del

conduttore.

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà della corrente di essere stazionaria, ovvero che il prodotto $j(x)\Sigma(x) = i$ non dipenda dalla sezione. Un conduttore caratterizzato da un valore definito della sua resistenza si indica nella simbologia circuitale col simbolo in Figura 6.14. Riportiamo sotto i valori di ρ per alcuni materiali

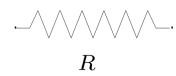


Figura 6.14: Resistenza nella simbologia circuitale.

<i>Ag</i>	$1.53 \times 10^{-8} \Omega m$,
<i>Au</i>	$2.35 \times 10^{-8} \Omega m$,
<i>Si</i>	$2.3 \times 10^3 \Omega m$,
<i>H₂O</i>	$2 \times 10^5 \Omega m$,
quarzo fuso	$10^{16} \doteq 10^{17} \Omega m$.

Gli ultimi tre sono isolanti. Come abbiamo detto, la ρ dipende dalla temperatura T . Per variazioni di T intorno ai 20°C , $\rho(T)$ ha un andamento all'incirca lineare

$$\rho(T) \simeq \rho_{20}(1 + \alpha\Delta T), \quad \Delta T = T - T_0.$$

Per i metalli $\alpha \sim 10^{-3}$.

Man mano che T si riduce, allontanandosi da T_0 , l'andamento di ρ si discosta sempre di più da quello lineare. Per alcuni metalli esiste un valore T_c al di sotto del quale $\rho = 0$, ovvero il metallo diventa *superconduttore* (non vi è bisogno di mantenere una ddp per produrre corrente)

$$\begin{aligned} Zn & \quad T_c = 0.88\text{ K}, \\ Cd & \quad T_c = 0.52\text{ K}, \\ Hg & \quad T_c = 4.15\text{ K}, \\ Pb & \quad T_c = 7.23\text{ K}. \end{aligned}$$

6.3 Potenza erogata ed effetto Joule

Consideriamo un conduttore di resistenza R percorso da una corrente stazionaria i . Sia $\Delta V = V_A - V_B > 0$ la ddp ai suoi capi, si veda Figura 6.15. Per la legge di Ohm

$$\Delta V = R i.$$

Nel tempo dt attraverso il conduttore passa una carica positiva

$$dq = i dt.$$

Il lavoro compiuto dalle forze del campo \vec{E} che agiscono su dq per portarla da un estremo all'altro del conduttore è :

$$dW = \Delta V dq = Ri^2 dt.$$

La potenza \mathcal{P} erogata per la corrente è definita come lavoro compiuto nell'unità di tempo

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = Ri^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \Delta Vi.$$

Essa misura l'energia che bisogna trasmettere in ogni istante per mantenere il regime di corrente. In ogni istante una energia pari a $dW = \mathcal{P} dt$ viene trasmessa da \vec{E} ai portatori di carica liberi, ovvero, nei metalli, agli elettroni. Questa energia si può pensare continuamente trasferita dagli elettroni agli ioni positivi del reticolo per via dei continui urti con questi ultimi. Essa quindi si trasforma da energia cinetica degli elettroni in energia termica del reticolo che determina un aumento della temperatura del metallo. Questo processo, per cui il lavoro elettrico è trasformato in energia termica del reticolo metallico, è detto *effetto Joule*. La potenza \mathcal{P} misura quindi l'energia che bisogna conferire sugli elettroni per "vincere" la resistenza opposta dal reticolo al loro passaggio. L'unità di misura di \mathcal{P} è il Watt

$$[W] = [1 \text{ Watt}] = [J \text{ sec}^{-1}] = [V A].$$

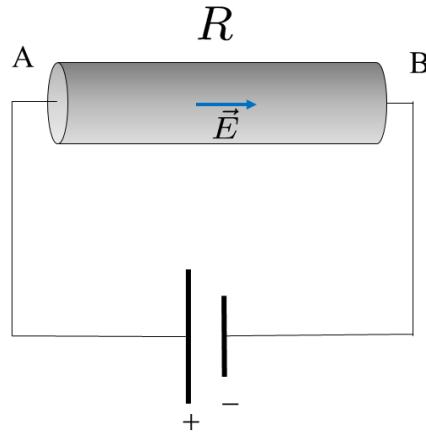


Figura 6.15: Conduttore con resistenza R percorso da corrente stazionaria.

Per effetto Joule, quindi, un conduttore percorso da corrente si riscalda. Se il conduttore è in un mezzo (come l'aria) esso si porterà ad una temperatura di equilibrio alla quale la potenza erogata \mathcal{P} viene totalmente emessa sotto forma di calore. La misura di questo calore ha storicamente fornito la prima evidenza dell'equivalenza tra lavoro e calore.

6.4 Modello classico di conduzione nei metalli

Consideriamo adesso un modello classico semplificato per descrivere microscopicamente la conduzione nei metalli che ci permette di comprendere la relazione di proporzionalità osservata tra \vec{j} ed \vec{E} . In assenza di campo elettrico esterno, il moto degli elettroni liberi è un moto di agitazione termica nel quale gli elettroni urtano continuamente contro gli ioni del reticolo, si veda Figura 6.16. Ogni urto può essere pensato come una interazione localizzata in un piccolo intorno dello ione e di brevissima durata rispetto al tempo che intercorre tra due urti successivi. Il moto dell'elettrone tra due urti successivi è descrivibile classicamente come un moto rettilineo uniforme, mentre possiamo pensare che le velocità dell'elettrone prima e dopo un urto siano completamente scorrelate. Abbiamo visto che la velocità media degli elettroni calcolata su un volumetto dV , che ne contiene un numero sufficientemente elevato, è nulla

$$\langle \vec{v} \rangle = 0.$$

La distanza media percorsa da un elettrone tra due urti successivi è *il libero cammino medio* ℓ , mentre, se $|\vec{v}|$ è la media del modulo della velocità termica, il tempo τ mediamente intercorso

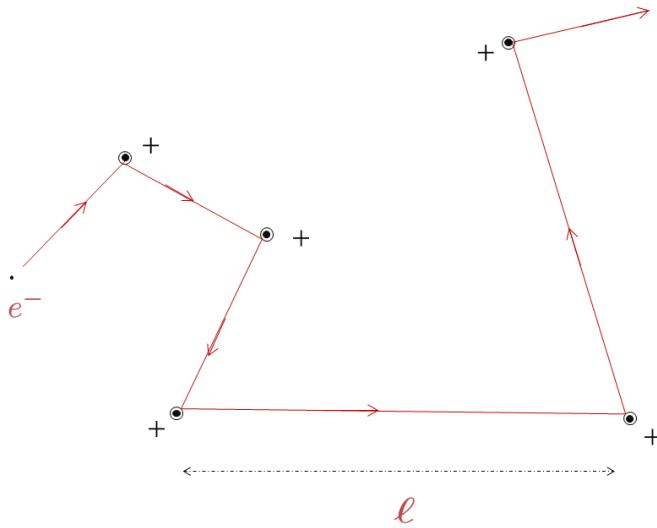


Figura 6.16: Rappresentazione schematica del moto di un elettrone in un metallo in assenza di campo elettrico esterno.

tra due urti è

$$\tau = \frac{\ell}{|\vec{v}|}.$$

È importante non confondere la velocità \vec{v} associata al moto termico (invisibile) dell'elettrone dalla velocità di deriva \vec{v}_d che invece determina la corrente elettrica. Tipicamente $|\vec{v}|$ è dell'ordine di $10^5 - 10^6 \text{ m/s}$. Come vedremo la velocità termica è di gran lunga maggiore di v_d .

Supponiamo adesso che sia presente un campo esterno \vec{E} . Questo agisce su ciascun elettrone con una forza $\vec{F} = -e\vec{E}$ e conferisce loro una componente di moto di deriva, uguale per tutti gli elettroni, che si sovrappone al loro moto termico. Questo moto è descritto da una velocità di deriva \vec{v}_d che si sovrappone alla velocità termica \vec{v}

$$\vec{v}_{tot} = \vec{v}_d + \vec{v} \Rightarrow \langle \vec{v}_{tot} \rangle = \vec{v}_d \neq 0, \quad (6.4.1)$$

ove abbiamo usato la proprietà $\langle \vec{v} \rangle = 0$, essendo la media calcolata in un certo istante su tutti gli elettroni in un volumetto dV . La componente di deriva \vec{v}_d invece è la stessa per tutti gli elettroni in dV e quindi coincide con la sua media.

Supponiamo che in seguito a ciascun urto l'elettrone perda tutta la velocità \vec{v}_d guadagnata. Tra due urti successivi, se $t = 0$ è l'istante del primo,

$$\vec{v}_d(t) = -\frac{e\vec{E}}{m_e} t,$$

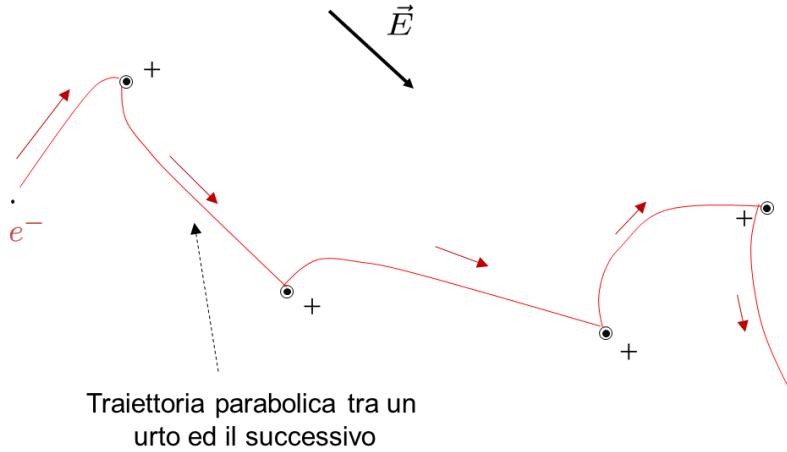


Figura 6.17: Rappresentazione schematica del moto di un elettrone in un metallo in presenza di un campo elettrico esterno.

ove abbiamo applicato la legge della meccanica newtoniana al moto dell'elettrone. La traiettoria dell'elettrone tra due urti successivi è paragonabile a quella di caduta di un grave in verso opposto ad \vec{E} , ovvero è parabolica con accelerazione $-\frac{e\vec{E}}{m_e}$, si veda Figura 6.17. Tutta l'energia cinetica, acquistata dall'elettrone tra due urti successivi, viene quindi ceduta completamente agli ioni del reticolato in seguito agli urti. Il moto di deriva si può quindi descrivere *mediamente* attraverso una velocità di deriva media costante

$$\langle \vec{v}_d(t) \rangle_\tau = -\frac{e\vec{E}}{m_e}\tau.$$

Questa è la velocità di deriva \vec{v}_d osservata attraverso la corrente ed introdotta nelle sezioni precedenti: $\vec{j} = -e n \langle \vec{v}_d \rangle_\tau$. La densità di corrente vale

$$\vec{j} = -e n \langle \vec{v}_d \rangle_\tau = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

Troviamo quindi che \vec{j} è proporzionale ad \vec{E} ed il modello ci fornisce una relazione (approssimativa) tra la condutività σ e le caratteristiche microscopiche del materiale,

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \Rightarrow \rho = \frac{m_e}{e^2 n \tau}.$$

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di v_d , consideriamo una corrente di $i = 10 A$ che attraversa un cavo di rame avente sezione trasversale pari a $\Sigma = 1 cm^2$. La densità di

corrente vale

$$j = \frac{i}{\Sigma} = \frac{10 A}{1 \text{ cm}^2} = 10^5 \text{ A/m}^2. \quad (6.4.2)$$

Ricordando che per il rame la densità degli elettroni di conduzione vale circa $n \sim 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ troviamo:

$$v_d = \frac{j}{ne} \approx \frac{10^5}{8.5 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19}} \approx 7.5 \times 10^{-6} \approx 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (6.4.3)$$

Questo ci dice che il moto di deriva degli elettroni in un metallo è estremamente lento, più di dieci ordini di grandezza più lento del moto termico.

Un altro modo di comprendere il moto di deriva con velocità costante v_d osservato per gli elettroni nella corrente elettrica, è di pensare che l'effetto dei continui urti con il reticolo degli ioni positivi si possa rappresentare efficacemente attraverso una *forza di attrito viscoso* \vec{F}_v agente sugli stessi elettroni. In questo modello semplificato, quindi, il moto degli elettroni liberi in un metallo è descritto come soggetto a due forze: una costante dovuta al campo elettrico esterno $\vec{F} = -e\vec{E}$, ed una di attrito viscoso dovuta all'interazione con il reticolo, proporzionale alla velocità dell'elettrone $\vec{F}_v = \beta\vec{v}$. Il moto che ne deriva è analogo al moto, studiato in meccanica, di caduta di un grave in un fluido. Sappiamo che, partendo da fermo, la velocità aumenta nella direzione di \vec{F} fino a raggiungere una *velocità di regime* v_R , alla quale $|\vec{F}| = |\vec{F}_v|$: $v_R = eE/\beta$. Raggiunta tale velocità, dopo un tempo brevissimo ed impercettibile, l'elettrone prosegue di moto uniforme. In questo secondo modello quindi, la velocità di deriva osservata per la corrente è data proprio da questa velocità di regime: $v_d = v_R$.

6.5 Legge di Ohm generalizzata

Abbiamo definito il circuito elettrico come una successione di conduttori ai cui capi è applicata una ddp per mezzo di un generatore di f.e.m. \mathcal{E} . Quest'ultimo è caratterizzato da una *resistenza interna* r , per cui un circuito costituito dal generatore chiuso su una resistenza R può essere schematicamente rappresentato come in Figura 6.18. I punti B e C sono gli estremi della resistenza allo stesso potenziale dei poli del generatore. Applicando la legge di Ohm alle resistenze R ed r si ha

$$V_B - V_C = Ri, \quad V_A - V_B = ri.$$

Troviamo quindi che

$$\mathcal{E} = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = (r + R)i. \quad (6.5.1)$$

La ddp $V_B - V_C$ tra i poli del generatore in presenza di corrente i , non misura quindi \mathcal{E} , a causa del calo di tensione ri dovuto alla resistenza interna, per cui:

$$V_B - V_C = \mathcal{E} - ri < \mathcal{E}.$$

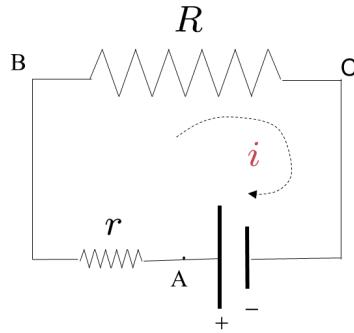


Figura 6.18: Resistenza interna del generatore.

La forza elettromotrice \mathcal{E} si misura come la ddp tra i poli del generatore a circuito aperto ($i = 0$).

In un intervallo di tempo dt nel circuito, percorso da una corrente stazionaria i , circola una carica $dq = idt > 0$. Il lavoro compiuto dalle forze non conservative all'interno del generatore per riportare dq da C a A vale

$$dW = dq \int_{C \rightarrow A} \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = dq\mathcal{E}.$$

La potenza erogata dal generatore in ogni istante è

$$\mathcal{P}_g = \frac{dW}{dt} = \mathcal{E}i. \quad (6.5.2)$$

In un circuito elettrico, è il generatore di f.e.m. a fornire l'energia necessaria per far circolare la corrente. Per questo motivo un generatore di tensione è anche detto *elemento attivo*. Usando la (6.5.1) troviamo che, nel nostro caso, la potenza \mathcal{P}_g vale:

$$\mathcal{P}_g = \mathcal{E}i = (R + r)i^2.$$

Essa viene quindi dissipata, per effetto Joule, sulle resistenze R, r detti *elementi passivi* del circuito.

6.6 Resistenze in serie ed in parallelo

Consideriamo un sistema di resistenze R_1, \dots, R_n in serie, ovvero collegate in successione in modo che il secondo estremo di una resistenza sia collegato al primo estremo della successiva,

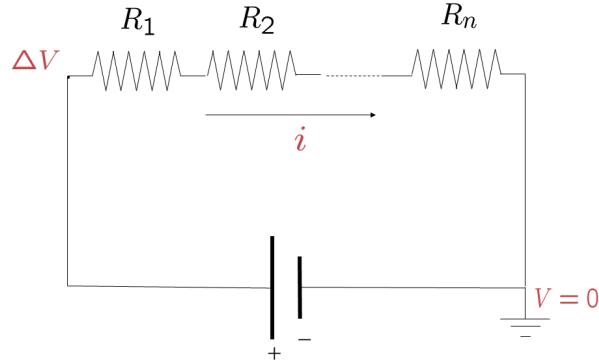


Figura 6.19: Resistenze in serie.

Figura 6.19. Applichiamo una ddp ai capi della serie, in modo che questa sia percorsa da una corrente stazionaria i . Essendo stazionaria, l'intensità i è uniforme attraverso tutte le resistenze. Se ΔV_k è la ddp ai capi di R_k , $k = 1, \dots, n$, abbiamo per la legge di Ohm: $\Delta V_k = R_k i$. La differenza di potenziale ai capi della serie sarà quindi:

$$\Delta V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \left(\sum_{k=1}^n R_k \right) i = R i.$$

Concludiamo che la serie di resistenze è equivalente ad una sola resistenza

$$R = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (6.6.1)$$

Un sistema di resistenze R_1, R_2, \dots, R_n in *parallelo* è realizzato collegando le singole resistenze in modo che ciascuna di esse abbia gli estremi in comune con la successiva. Sia ΔV la ddp applicata ai capi dell'intero sistema. Siano $(i_k) = (i_1, \dots, i_n)$ le intensità di corrente attraverso ciascuna resistenza. Dalla legge di Ohm abbiamo:

$$\Delta V = R_k i_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.6.2)$$

Per la conservazione della carica, la somma delle cariche dq_k che in un intervallo dt attraversano le singole resistenze è uguale alla carica dq che nello stesso tempo fluisce nel parallelo: $dq = \sum_{k=1}^n dq_k$. Dividendo per dt troviamo:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta V}{R_k} = \frac{\Delta V}{R}.$$

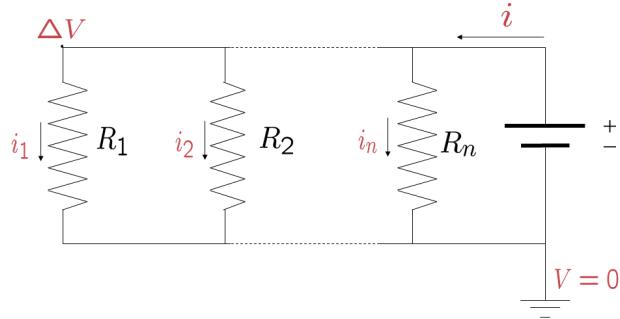


Figura 6.20: Resistenze in parallelo.

L'intero sistema è quindi equivalente ad una sola resistenza R data da

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}.$$

Osserviamo che R è minore di ciascuna resistenza R_k .

6.7 Rete elettrica

In questa sezione continuiamo a considerare solo correnti stazionarie.⁷ Una generalizzazione del concetto di circuito è la *rete elettrica*. Essa è un sistema di conduttori connessi in vario modo ed è caratterizzata da punti, detti *nodi*, in cui confluiscono più conduttori e da *rami*, ovvero conduttori compresi tra due nodi, si veda Figura 6.21. Su ciascun ramo possono essere presenti elementi attivi (generatori di f.em \mathcal{E}) e passivi (resistenze). Numeriamo i rami e supponiamo che il ramo k^{imo} contenga un elemento attivo \mathcal{E}_k , uno passivo R_k e che sia percorso dalla corrente i_k , Figura 6.21. In questo formalismo più generale le intensità di corrente saranno descritte da numeri reali che, a seconda della situazione, possono essere sia positivi che negativi. Più precisamente, su ogni ramo viene scelto inizialmente, in modo arbitrario, un verso della corrente. Se, risolvendo il problema, si trova un valore negativo dell'intensità della corrente lungo un ramo, vuol dire che il verso originariamente scelto lungo tale ramo è opposto rispetto a quello effettivo della corrente. Al contrario, un valore positivo dell'intensità implica che la corrente nel ramo segue il verso inizialmente indicato su di esso.⁸

⁷L'unico esempio di corrente non-stazionaria che tratteremo in questo capitulo, sarà quella che attraversa un circuito in cui è presente un condensatore, si veda il paragrafo 6.9.

⁸La scelta fatta all'inizio del verso della corrente lungo un ramo corrisponde a fissare il verso della normale \vec{n} ad una generica sezione Σ del ramo stesso e definire l'intensità di corrente lungo esso come $i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$.

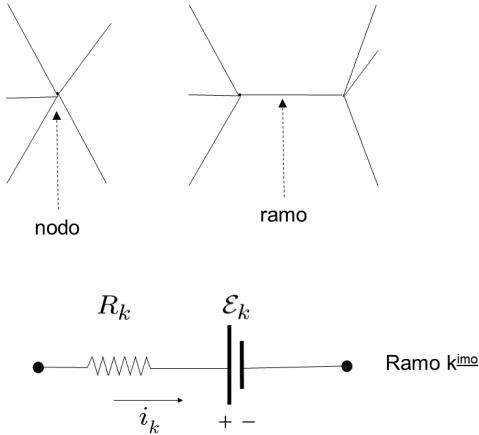


Figura 6.21: Elementi di una rete elettrica.

Problema: dati \mathcal{E}_k , R_k per ciascun ramo, determinare il sistema di correnti i_k su ogni ramo. Il problema è risolvibile con le leggi di Kirchhoff che si possono riassumere come segue.

- 1) Conservazione della carica. Si consideri la Figura 6.22. Per la conservazione della carica, in ogni istante la quantità di carica che entra nel nodo è uguale alla quantità di carica uscente, ovvero

$$-\sum_{\text{entranti}} i_k + \sum_{\text{uscenti}} i_k = 0.$$

Un nodo in cui confluiscono solo due rami, uno con una corrente entrante i_1 e l'altro con una uscente i_2 , è un nodo *triviale* in quanto l'equazione scritta sopra implica banalmente: $i_1 = i_2$. In questo caso i due rami si possono considerare parte di un solo ramo.

- 2) Definiamo maglia un qualsiasi percorso chiuso all'interno della rete su cui si definisce (in modo arbitrario) un verso di percorrenza, si veda Figura 6.23. Siano fissati in modo indipendente i versi delle correnti i_k su ciascun ramo della maglia.
- 3) Per ogni maglia si scrivano le differenze di potenziale ai capi di ciascun ramo partendo da un punto generico e seguendo il verso di percorrenza scelto. Essendo la maglia un percorso chiuso, la somma di queste differenze di potenziale deve essere zero:

$$\sum_{\text{maglia}} \Delta V_k = 0.$$

Da questo segue che se $i < 0$, il verso della corrente, ovvero di \vec{j} , è opposto rispetto a quello di \vec{n} , mentre se $i > 0$ il verso della corrente è concorde con quello di \vec{n} .

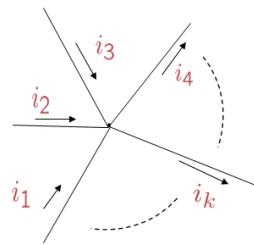


Figura 6.22: Correnti che provengono da o che fluiscono verso un nodo.

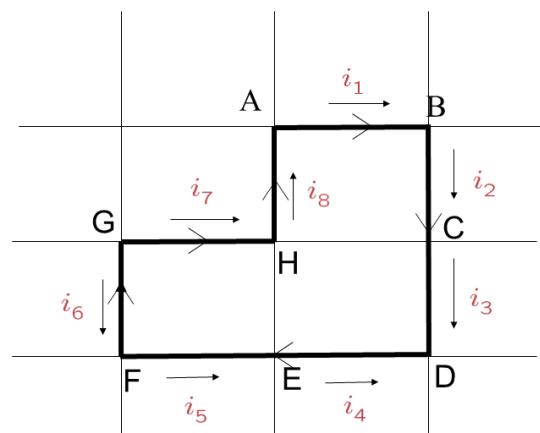


Figura 6.23: Esempio di una maglia. Il verso di percorrenza lungo la maglia è indicato dalle frecce lungo i rami. I versi delle correnti sono indicati da freccette parallele ai rami.

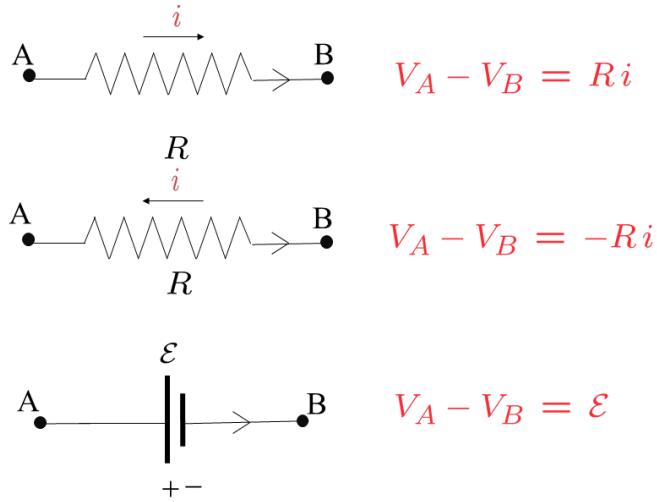


Figura 6.24: Convenzioni per esprimere la differenza di potenziale ai capi di un elemento in ciascun ramo.

Per concretezza riferiamoci all'esempio di maglia dato in Figura 6.23. Partiamo da un punto A e seguiamo il verso di percorrenza nello scrivere la ddp ai capi di ciascun ramo

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + \dots + (V_H - V_A) = 0.$$

- 4) Scriviamo quindi le ddp ai capi dei rami in funzione degli elementi presenti negli stessi e dell'intensità di corrente attraverso il ramo stesso. Per farlo seguiamo le convenzioni in Figura 6.24. In particolare la ddp $V_A - V_B$ ai capi di una resistenza vale Ri se il verso della corrente è concorde con il verso della maglia lungo il ramo (ovvero il verso che va da A a B), $-Ri$ in caso contrario. La ddp ai capi di un generatore di f.e.m. \mathcal{E} è \mathcal{E} se calcolata come differenza tra il potenziale del polo positivo e quello del polo negativo, $-\mathcal{E}$ in caso contrario.

Le diverse maglie ed i vertici ci forniscono equazioni (non tutte indipendenti) da risolvere nelle correnti i_k .

Applichiamo queste regole all'esempio semplice in Figura 6.25. La rete in Figura 6.25 consiste di una sola maglia con due rami: uno tra A e B contenente la resistenza R e l'altro, tra gli stessi punti, contenente il generatore di f.e.m. \mathcal{E} . Fissiamo arbitrariamente il verso di percorrenza lungo il circuito ed il verso delle correnti, indicato quest'ultimo da frecce parallele ai lati. Seguendo il verso di percorrenza a partire dal punto A scriviamo le ddp ai capi dei rami, la cui somma deve essere zero:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0; \quad -Ri - \mathcal{E} = 0 \Rightarrow i = -\frac{\mathcal{E}}{R} < 0.$$

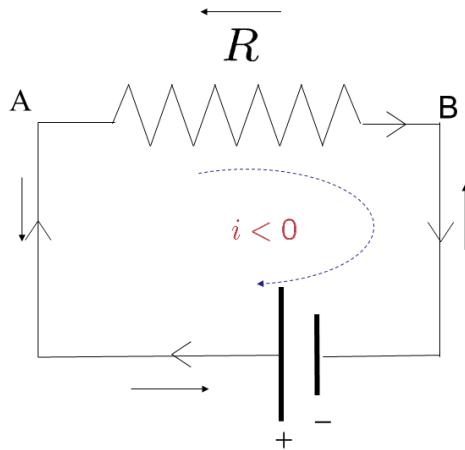


Figura 6.25: Esempio: un circuito elettrico elementare.

Il valore negativo trovato per i indica che il verso della corrente è orario (linea tratteggiata interna al circuito in figura), ovvero opposto al verso inizialmente scelto.

6.8 Ponte di Wheatstone

È un dispositivo per la misura di resistenze mediante confronto con resistenze note. Esso è schematizzato in Figura 6.26. R_x è la resistenza incognita e R_1, R_2, R_3 sono quelle note. Il simbolo circolare con una freccia dentro, posto lungo il ramo BD, indica un *galvanometro*, ovvero uno strumento per misurare l'intensità di corrente. In questo caso esso misura l'intensità i . Scriviamo le equazioni ai nodi D e B:

$$\begin{aligned} \text{nodo D:} \quad i_x &= i + i_3, \\ \text{nodo B:} \quad i &= i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Variamo ora le resistenze note R_1, R_2 finché misuriamo sul galvanometro $i = 0$, che implica $V_B = V_D$.

Le equazioni per le maglie ABD e BDC sono:

$$\begin{aligned} \text{BDC:} \quad (V_A - V_B) + (V_B - V_D) + (V_D - V_A) &= 0 \Rightarrow R_1 i_1 + R_x i_x = 0, \\ \text{ABD:} \quad (V_B - V_D) + (V_D - V_C) + (V_C - V_B) &= 0 \Rightarrow -R_3 i_3 + R_2 i_2 = 0. \end{aligned}$$

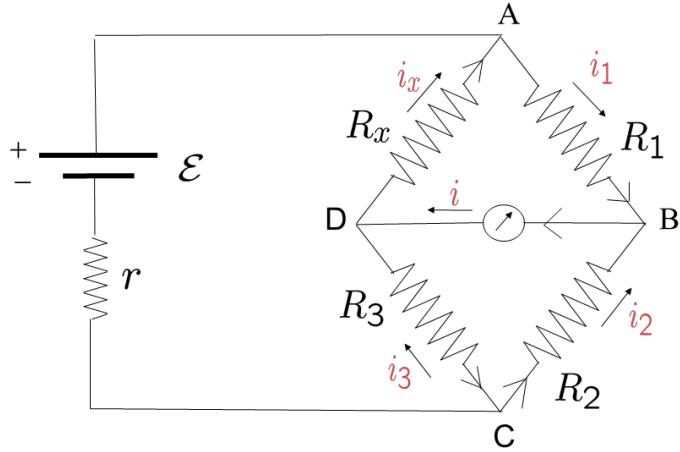


Figura 6.26: Ponte di Wheatstone.

ove abbiamo usato $V_B - V_D = 0$. Possiamo quindi mettere insieme le equazioni trovate

$$\begin{aligned} i_x &= i_3, \quad i_1 = -i_2 \\ R_x i_x &= -R_1 i_1, \quad R_3 i_3 = R_2 i_2. \end{aligned} \quad (6.8.1)$$

Esse si risolvono in R_x come segue:

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}. \quad (6.8.2)$$

6.9 Carica e scarica di un condensatore

Abbiamo discusso il processo di carica di un condensatore da un punto di vista energetico nella sezione 4.4 senza entrare nel dettaglio di come esso si realizzi in pratica. Tale processo è stato descritto in modo schematico come lo spostamento di una quantità di carica positiva q da un' armatura, che si carica negativamente con carica $-q$, all'altra che acquista così la carica q . Tale spostamento non può realizzarsi attraverso lo spazio che divide le due armature, essendo questo o vuoto o riempito di materiale isolante. Esso invece si verifica attraverso un circuito. Abbiamo ora sufficienti conoscenze dei circuiti elettrici per poter discutere questo processo in dettaglio.

Carica di un condensatore. Si consideri un circuito composto da un generatore di f.e.m. \mathcal{E} chiuso su un condensatore di capacità C . Sia R la resistenza totale del circuito (che include

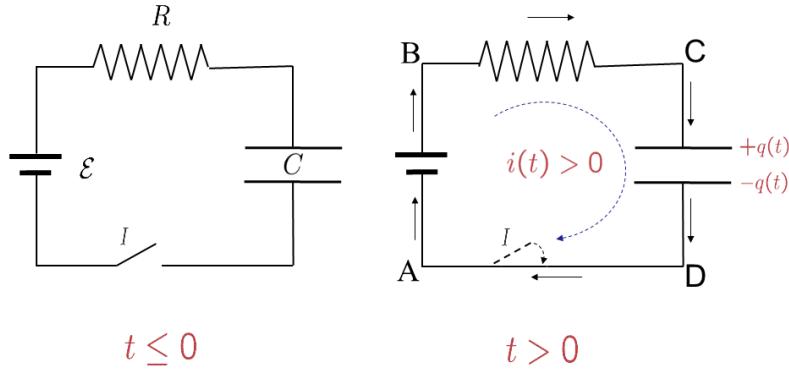


Figura 6.27: Carica di un condensatore.

quella interna del generatore di f.e.m.). Un circuito elettrico di questo tipo è detto RC , si veda la Figura 6.27. Il circuito è inizialmente aperto in corrispondenza di un interruttore I ed il condensatore scarico. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso e nel circuito circola corrente (Figura 6.27 di destra). Sia $i(t)$ l'intensità della corrente e $\pm q(t)$ le cariche sulle due armature del condensatore nell'istante t . Scegliamo come verso della corrente, in ogni ramo del circuito, quello orario, come indicato in figura 6.27 (a destra) dalle frecce parallele a ciascun lato, e deriviamo l'equazione che descrive il circuito stesso scrivendo le differenze di potenziale ai capi di ciascun elemento, la cui somma lungo tutto il circuito è nulla:

$$0 = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_A). \quad (6.9.1)$$

Esprimendo ora tali differenze di potenziale in termini di $i(t)$ e $q(t)$

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= -\mathcal{E}, \\ V_B - V_C &= Ri, \\ V_C - V_D &= \frac{q}{C}, \\ V_D - V_A &= 0, \end{aligned} \quad (6.9.2)$$

dalla (6.9.1) troviamo:

$$\mathcal{E} = R i + \frac{q}{C}. \quad (6.9.3)$$

Secondo le convenzioni descritte nel paragrafo precedente, se risolvendo l'equazione troviamo un valore positivo di $i(t)$, vorrà dire che la corrente segue effettivamente il verso da noi scelto

(quello orario), altrimenti essa scorre in verso opposto (antiorario). La scelta fatta per il verso della corrente implica la seguente relazione tra $i(t)$ e la carica $q(t)$ sull'armatura positiva:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) . \quad (6.9.4)$$

Infatti se $i > 0$, carica positiva fluisce sull'armatura e $q(t)$ aumenta, mentre se $i < 0$ la corrente fluisce in verso antiorario e l'armatura perde carica positiva, con conseguente diminuzione di $q(t)$. L'equazione (6.9.3) si può quindi riscrivere come equazione differenziale nella funzione incognita $q(t)$:

$$\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} , \quad (6.9.5)$$

che sappiamo risolvere con il metodo della separazione delle variabili. Dividiamo l'intervallo tra $t = 0$ ed un generico istante $t > 0$ in intervallini infinitesimi tra t' e $t' + dt'$, con $0 \leq t' \leq t$, durante ciascuno dei quali la carica $q(t')$ sarà variata di $dq = i(t') dt'$. Dalla (6.9.5) ricaviamo la relazione tra dq e dt' per ciascuno di questi intervallini:

$$\frac{dq}{q(t') - \mathcal{E}C} = -\frac{dt'}{RC} . \quad (6.9.6)$$

Sommiamo membro a membro le equazioni scritte sopra, su tutti gli intervallini, per t' che varia da 0 a t . Questo vuol dire integrare il primo membro da $q(0)$ a $q(t)$ ed il secondo da 0 a t :

$$\int_{q(0)}^{q(t)} \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' = -\frac{t}{RC} . \quad (6.9.7)$$

Calcolando l'integrale a primo membro troviamo la seguente relazione tra $q(t)$ e t

$$\ln \left(\frac{q(t) - \mathcal{E}C}{q(0) - \mathcal{E}C} \right) = -\frac{t}{RC} . \quad (6.9.8)$$

Valutiamo ora l'esponenziale di ambo i membri e risolviamo l'equazione risultante in $q(t)$, in modo da ottenere la soluzione generale cercata:

$$q(t) = \mathcal{E}C + (q(0) - \mathcal{E}C) e^{-\frac{t}{RC}} . \quad (6.9.9)$$

Se siamo interessati a descrivere il processo di carica di un condensatore inizialmente scarico, dobbiamo porre $q(0) = 0$ e la corrispondente soluzione è

$$q(t) = \mathcal{E}C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) . \quad (6.9.10)$$

Nota $q(t)$, ricaviamo $i(t)$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} . \quad (6.9.11)$$

Osserviamo che $i(t) > 0$ ovvero la corrente effettivamente fluisce nel verso (orario) da noi scelto. Le funzioni $q(t)$ e $i(t)$ sono rappresentate graficamente nelle figure 6.28. Si osservi

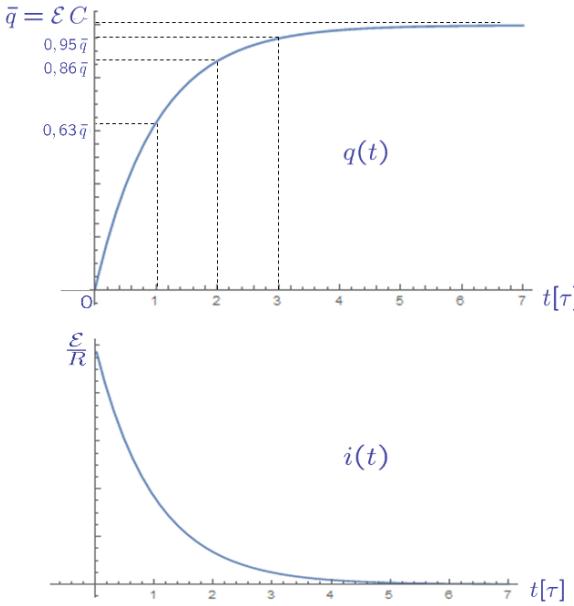


Figura 6.28: Andamenti di $q(t)$ e di $i(t)$. Il tempo è riportato sull'asse orizzontale in unità di $\tau = RC$.

che $q(t)$ tende esponenzialmente al valore limite $\bar{q} = \mathcal{E}C$ corrispondente al condensatore pienamente carico, mentre l'intensità di corrente tende esponenzialmente a zero. Il tempo caratteristico dell'evoluzione nel tempo sia di $q(t)$ che di $i(t)$ è $\tau = RC$: all'istante $t = \tau$, $q(t)$ ha raggiunto il 63% del suo valore asintotico ed $i(t)$ si è ridotta della stessa percentuale; dopo un intervallo pari 3τ questa percentuale diventa del 95% e così via. Quindi dopo un periodo caratteristico detto *transitorio*, la cui durata è pari ad un certo numero di intervalli τ possiamo pensare che il condensatore sia, a tutti gli effetti, completamente carico con carica $\bar{q} = \mathcal{E}C$ e che nel circuito non circoli corrente. Negli istanti immediatamente successivi alla chiusura dell'interruttore ($t = 0$), invece, la differenza di potenziale $V(t) = q(t)/C$ ai capi del condensatore è praticamente nulla (è come se il condensatore non ci fosse). Ai capi della resistenza R vi è quindi, a $t = 0$, una differenza di potenziale pari a \mathcal{E} ed il valore iniziale di $i(t)$ è, per la legge di Ohm, \mathcal{E}/R , ovvero il valore che avremmo in assenza del condensatore. Col passar del tempo aumenta la differenza di potenziale tra le armature del condensatore e quindi diminuisce a differenza di potenziale ai capi di R , e, con essa, l'intensità di corrente $i(t)$. Questa si riduce sempre più, tendendo a zero, man mano che la differenza di potenziale ai capi del condensatore si avvicina ad \mathcal{E} .

Ora studiamo il processo di carica dal punto di vista energetico. Ricordiamo che in un circuito elettrico è l'elemento attivo, ovvero il generatore di f.e.m., a fornire energia, erogando una potenza $\mathcal{P}_g = \mathcal{E}i$, si veda l'equazione (6.5.2). Usando l'equazione del circuito (6.9.3) e

moltiplicandone ambo i membri per i , troviamo che tale potenza, nel nostro caso, vale:

$$\mathcal{P}_g = \mathcal{E} i = R i^2 + i \frac{q}{C} = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_C. \quad (6.9.12)$$

Osserviamo che una parte della potenza erogata dal generatore, pari a $\mathcal{P}_R = R i^2$, viene dissipata sulla resistenza per effetto Joule. La parte rimanente, ovvero $\mathcal{P}_C = i q/C$, viene invece spesa sul condensatore. Essa descrive l'energia che fluisce nel condensatore e che è richiesta per caricarlo. Sappiamo dal paragrafo 4.4, che questa energia U è immagazzinata nel campo elettrostatico che si viene a creare, in seguito alla carica, tra le due armature. Calcoliamo l'energia U contenuta nel condensatore in un istante $t > 0$:

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^t \mathcal{P}_C(t') dt' = \frac{1}{C} \int_0^t q(t') i(t') dt' = \frac{1}{C} \int_0^t q(t') \frac{dq}{dt'}(t') dt' = \\ &= \frac{1}{C} \int_0^t \frac{d}{dt'} \left(\frac{q^2}{2} \right) dt' = \left(\frac{q(t)^2}{2C} - \frac{q(0)^2}{2C} \right) = \frac{q(t)^2}{2C}. \end{aligned} \quad (6.9.13)$$

L'energia U emmagazzinata nel condensatore pienamente carico è data dal limite di $U(t)$ per $t \rightarrow \infty$. Per quanto abbiamo visto tale valore è, in ottima approssimazione, raggiunto in un istante $t \gg \tau = RC$ in cui la carica sull'armatura positiva ha, a tutti gli effetti, raggiunto il suo valore asintotico $\bar{q} = \mathcal{E} C$:

$$U = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \frac{\bar{q}^2}{2C} = \frac{\bar{q}\mathcal{E}}{2} = C \frac{\mathcal{E}^2}{2}. \quad (6.9.14)$$

Ritroviamo l'espressione di U derivata nel paragrafo 4.4.

Scarica di un condensatore. Pensiamo al condensatore considerato sopra che, una volta caricato con carica \bar{q} , venga fatto scaricare. Questo avviene collegando le due armature attraverso un conduttore con resistenza R , si veda la Figura 6.29. Come nel caso precedente, fissiamo lungo il circuito il verso della corrente essere quello orario (indicato dalle frecce parallele ai lati), in modo che sia sempre valida la relazione (6.9.4) tra $i(t)$ e $q(t)$. A differenza del circuito considerato in precedenza in Figura 6.27, è assente in questo caso l'elemento attivo, sostituito da un tratto di conduttore a resistenza nulla. L'equazione del circuito si otterrà quindi dalla (6.9.5) mettendo \mathcal{E} a zero:

$$0 = R i + \frac{q}{C}. \quad (6.9.15)$$

Chiudendo, attraverso l'interruttore I , il circuito all'istante $t = 0$, il condensatore comincerà a scaricarsi e la corrispondente soluzione $q(t)$ della (6.9.15) si otterrà quindi da quella generale (6.9.9) ponendo $\mathcal{E} = 0$ e $q(0) = \bar{q}$:

$$q(t) = \bar{q} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (6.9.16)$$

Dalla (6.9.4) ricaviamo $i(t)$:

$$i(t) = -\frac{\bar{q}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (6.9.17)$$

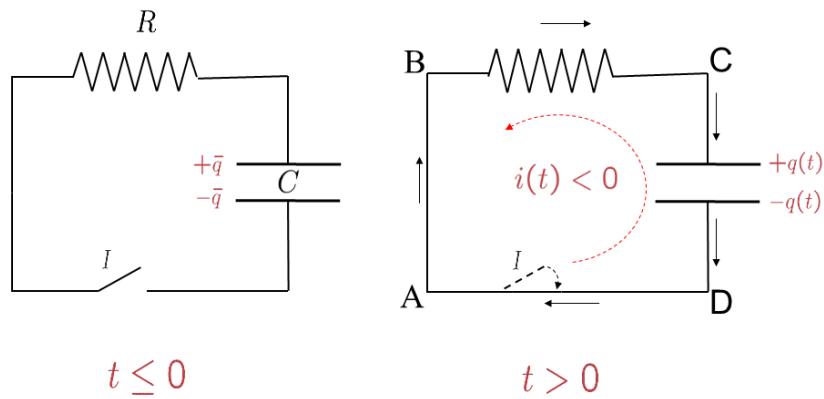


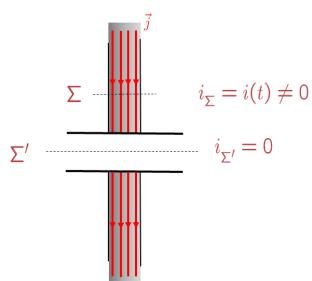
Figura 6.29: Scarica di un condensatore.

Gli andamenti di $q(t)$ e di $i(t)$ sono riportati in Figura 6.30. Si osservi che ora troviamo un valore negativo dell'intensità di corrente. Questo indica che il verso della corrente, indicato dalla linea circolare tratteggiata all'interno della figura 6.29 di destra, è, come ci aspettiamo, antiorario e quindi opposto rispetto a quello inizialmente scelto per la corrente lungo il circuito stesso.

Concludiamo questo paragrafo osservando che la corrente in un circuito RC, come in un qualsiasi circuito contenente un condensatore, è *non-stazionaria*. Infatti se prendiamo, in corrispondenza del condensatore, due sezioni del circuito, una Σ lungo il filo ed una Σ' che invece si svolge tra le due armature del condensatore (si veda la Figura 6.31), troviamo:

$$i_\Sigma = i(t) \neq 0, \quad i_{\Sigma'} = 0, \quad (6.9.18)$$

ove $i(t)$ descrive la corrente che scorre nel circuito, per esempio durante il processo di carica o scarica del condensatore.



L'intensità di corrente attraverso Σ' è nulla poichè non vi è passaggio di carica tra le due armature. Osserviamo quindi che esistono due sezioni, Σ , Σ' , attraverso le quali le intensità di corrente sono diverse. Questo implica che la corrente non è stazionaria. Tale caratteristica è evidente anche dalla discontinuità delle linee di campo di \vec{j} , che terminano sull'armatura positiva (dove la carica positiva si accumula) e si originano

Figura 6.31: Due sezioni di un circuito in cui è presente un conden-

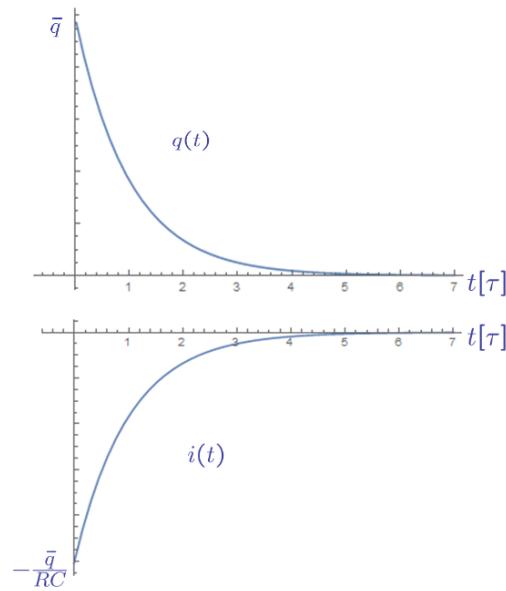


Figura 6.30: Andamenti di $q(t)$ e di $i(t)$ nel processo di scarica di un condensatore. Il tempo è riportato sull'asse orizzontale in unità di $\tau = RC$.

su quella negativa, si veda la figura 6.31. Richiameremo infatti più avanti, nel Capitolo 10, la trattazione qui fatta del processo di carica di un condensatore, quando discuteremo della generalizzazione della legge di Ampère a correnti non-stazionarie.

Capitolo 7

Magnetostatica nel vuoto

7.1 Interazione magnetica

Già dal VI secolo a.C. era noto che alcuni minerali come la *magnetite* (Fe_3O_4) avevano la capacità di esercitare una forza su particelle di limatura di ferro. Questo tipo di forza è detta *forza magnetica*. I materiali capaci di esercitare o subire questa forza sono detti magneti.

La prima analisi quantitativa di questa interazione la si deve a W. Gilbert nel 1600. Si definisce carica magnetica la proprietà di esercitare o subire una forza magnetica. Deduciamo alcune proprietà fondamentali di questa forza da osservazioni elementari.

- 1) La carica magnetica è distribuita sulla superficie di un magnete ed è localizzata in regioni detti *poli*.

Se prendiamo una bacchetta di magnetite sospesa ad un filo per il suo baricentro e avviciniamo ad un suo estremo l'estremo di una seconda bacchetta dello stesso materiale che teniamo in mano, osserviamo che uno degli estremi è soggetto ad una forza repulsiva mentre l'altro ad una forza attrattiva, Figura 7.1. Questo si spiega dicendo che esistono due tipi di carica magnetica, localizzata su ogni magnete in due poli opposti.

- 2) Avvicinando un oggetto di ferro ad un magnete, questo acquista carica magnetica o si *magnetizza*. Sostanze che sono presenti in natura con carica magnetica sono dette magneti naturali (per esempio, magnetite), mentre il ferro magnetizzato è detto magnete artificiale o calamita.

Un pezzo di ferro magnetizzato molto piccolo e sottile è detto *ago magnetico*. Si osserva che sulla superficie terrestre un ago magnetico tende a disporsi lungo il meridiano. Gilbert concluse che la terra agisce come un grande magnete i cui due poli sono all'incirca localizzati sui poli geografici. Questo permette di identificare i poli di un magnete. Si chiama polo nord di un magnete quello che tende ad orientarsi verso il nord terrestre, polo sud quello opposto. Si osserva che i poli dello stesso tipo si respingono e che i poli opposti si attraggono.

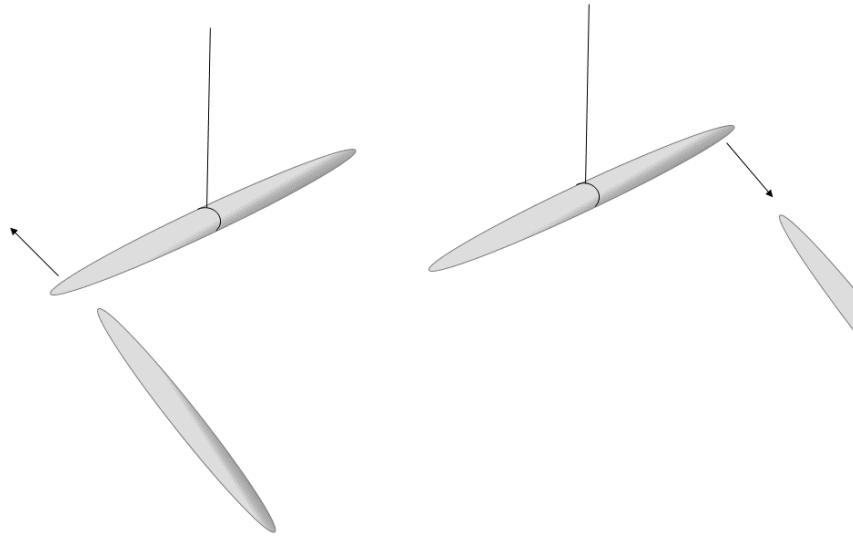


Figura 7.1: Stesso polo di un magnete avvicinato ai due poli di un secondo magnete sospeso per il suo baricentro.

- 3) L'interazione magnetica è diversa da quella elettrostatica. Il magnete è un conduttore ed esercita forza magnetica anche se tenuto in mano. La forza magnetica non è quindi legata ad eccessi di carica, perché questi si disperderebbero se il magnete fosse tenuto in mano. Inoltre, mettendo il magnete a contatto con un elettroscopio, si può verificare che esso è scarico.
- 4) Possiamo descrivere l'interazione magnetica come abbiamo fatto con quella elettrica, nella rappresentazione dell'*azione a contatto* ovvero mediata da un *campo magnetico* $\vec{B}(\vec{x})$: un magnete genera un campo $\vec{B}(\vec{x})$ intorno a sé e $\vec{B}(\vec{x})$ agisce per mezzo di una forza magnetica su un magnete posto al suo interno.

Osserviamo che un ago magnetico all'interno di un campo magnetico, come quello terrestre, tende ad orientarsi in una certa direzione e, se perturbato leggermente da questa posizione di equilibrio, esso oscilla intorno ad esso in modo armonico. Un comportamento analogo lo abbiamo trovato nel dipolo elettrico all'interno di un campo elettrico esterno. In tal caso se il campo \vec{E} è uniforme e se \vec{p} è il momento del dipolo, esso subisce una coppia di forze con momento $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$, che tende ad allineare \vec{p} con \vec{E} . Per piccole oscillazioni di \vec{p} intorno alla direzione e verso di \vec{E} , il moto è di oscillazione armonica con frequenza

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{p E}{I}},$$

essendo $I = \frac{ma^2}{2}$.

In analogia possiamo pensare che l'ago si comporti da dipolo magnetico, a cui è associato un momento di dipolo magnetico \vec{m} diretto lungo l'ago dal polo sud (S) al polo nord (N) e che, all'interno di un campo \vec{B} uniforme esso subisca una coppia di forze di momento $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, che tende ad allineare \vec{m} a \vec{B} . Sotto queste ipotesi, il moto dell'ago magnetico ci può fornire una definizione operativa di \vec{B} : nella sua posizione di equilibrio stabile, la direzione dell'ago definisce la direzione di \vec{B} in un certo punto; il verso di \vec{B} è quello che va da S ad N ed il modulo lo si può misurare in opportune unità in termini della frequenza di oscillazione dell'ago intorno alla posizione di equilibrio stabile, Figura 7.2. Usando l'ago magnetico è quindi possibile tracciare le linee del campo \vec{B} .

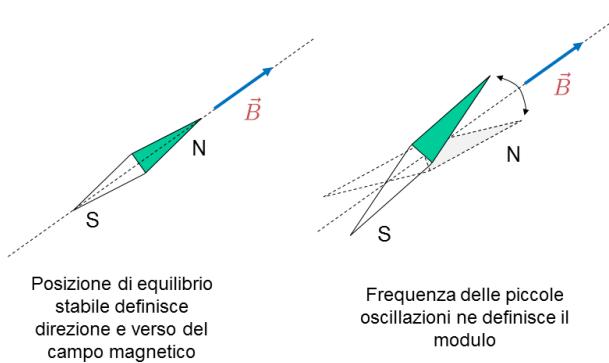


Figura 7.2: Definizione operativa del campo magnetico con un ago magnetico.

- 5) Non è possibile isolare i due poli magnetici. Se cercassimo di isolare un polo dividendo il magnete, troveremmo che ciascuno dei pezzi risultanti avrà un polo N ed S, Figura 7.3. Analogamente, se procedessimo con la suddivisione, termineremmo con tanti dipoli N-S. La carica magnetica in questo senso si comporta come la carica di polarizzazione in un dielettrico. Anche quest'ultima è il risultato di dipoli (elettrici) a livello atomico-molecolare e per questo non è isolabile o estraibile. Se infatti cercassimo di estrarre della carica di polarizzazione positiva dalla superficie di un dielettrico, isolando una porzione comunque piccola, questa presenterebbe cariche di polarizzazione di entrambi i segni.

L'impossibilità di isolare un polo magnetico ha però una motivazione più fondamentale rispetto all'analogia situazione nel caso delle cariche di polarizzazione. Nel caso delle forze elettriche, sappiamo che esistono in natura portatori di carica elettrica positiva

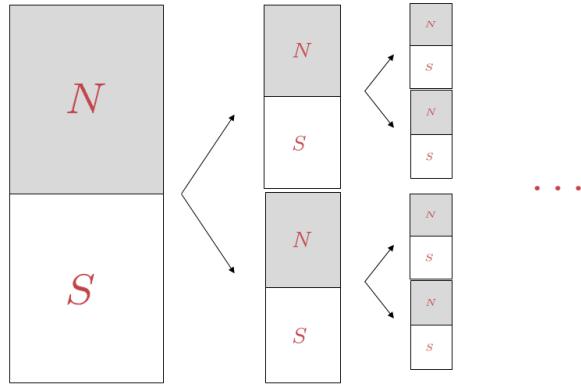


Figura 7.3: Definizione operativa del campo magnetico con un ago magnetico.

e negativa, ovvero che ciascun tipo di carica esiste in natura in forma isolata. Nelle sostanze dielettriche queste sono saldamente legate insieme nelle strutture atomiche-molecolari. Nel caso delle interazioni magnetiche non sono mai stati osservati portatori di cariche magnetiche elementari (monopoli). Sembra che alla base delle interazioni magnetiche non vi siano singole cariche magnetiche ma *dipoli magnetici*.

7.2 Campo magnetico e correnti

Un primo importante progresso nello studio delle interazioni magnetiche fu compiuto da Oernsted nel 1811. Egli osservò che disponendo un ago magnetico parallelamente ad un filo conduttore e libero di ruotare su un piano parallelo al filo, se questo è percorso da una corrente i , l'ago tende a disporsi su un piano ortogonale al filo. Un filo percorso da corrente genera quindi un campo $\vec{B}(\vec{x})$ intorno a sé. Usando l'ago è possibile tracciare le linee di \vec{B} che sono cerchi concentrici al filo sul piano perpendicolare ad esso e diretti nel verso legato al verso della corrente dalla regola della mano destra, Figura 7.4.

Nel 1820 Ampère osservò che due fili paralleli, percorsi da corrente, esercitano una forza magnetica l'uno sull'altro che è di tipo attrattivo se le correnti sono equiveverse, repulsivo se hanno verso opposto. Egli concluse che un filo percorso da corrente non solo potesse generare un campo \vec{B} attraverso il quale esercitare una forza magnetica, ma potesse anche *subire* una forza magnetica. Egli ipotizzò che, così come alla base dei fenomeni elettrostatici vi sono cariche fisse, alla base dei fenomeni magnetici vi fossero cariche in moto o correnti. Ampère suppose inoltre che le proprietà magnetiche dei magneti fossero spiegabili in termini

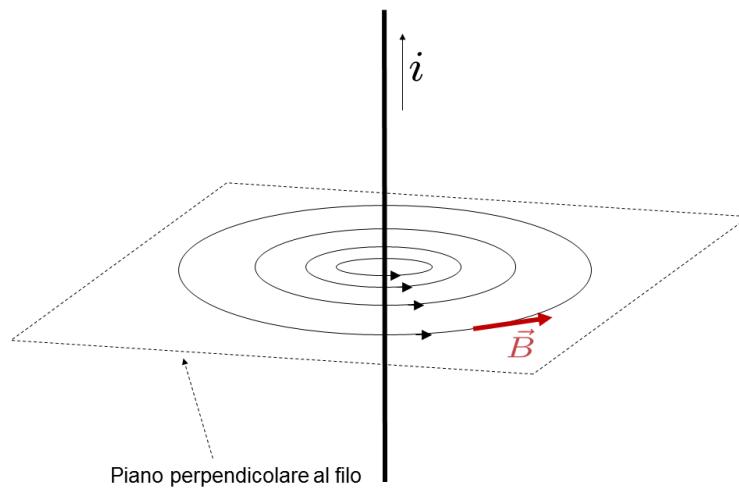


Figura 7.4: Campo magnetico generato da un filo percorso da corrente.

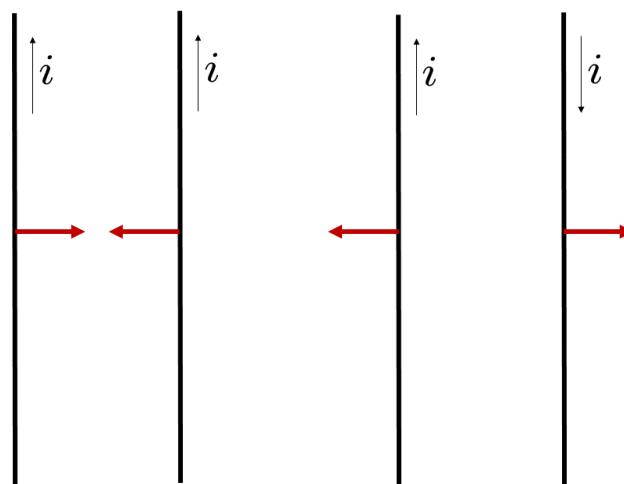


Figura 7.5: Interazione magnetica tra correnti.

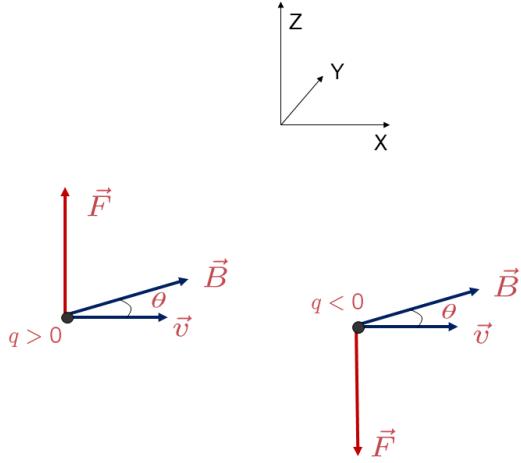


Figura 7.6: Forza di Lorentz.

di correnti microscopiche all'interno di questi materiali. Studieremo in seguito queste correnti dette *amperiane*. In questo capitolo ci limiteremo a considerare l'interazione magnetica nel vuoto.

7.3 Forza di Lorentz

Sperimentalmente si osserva che una carica q (puntiforme) in moto in un campo magnetico \vec{B} con velocità \vec{v} subisce una forza magnetica, detta forza di Lorentz, che ha la seguente forma

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{F}| = q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin(\theta),$$

essendo θ l'angolo tra \vec{B} e \vec{v} , Figura 7.6. Tale forza è in ogni istante perpendicolare sia alla velocità che al campo magnetico. Se calcoliamo il lavoro da essa compiuto sulla carica durante il suo moto, nel quale essa descrive una traiettoria C , troviamo

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0,$$

ove abbiamo espresso $d\vec{l} = \vec{v} dt$ ed abbiamo usato la proprietà che $\vec{F} \perp \vec{v}$. Durante il moto della carica, \vec{F} compie un lavoro nullo, per cui l'energia cinetica della carica è una quantità conservata:

$$E_k = m \frac{v^2}{2} = \text{cost.}$$

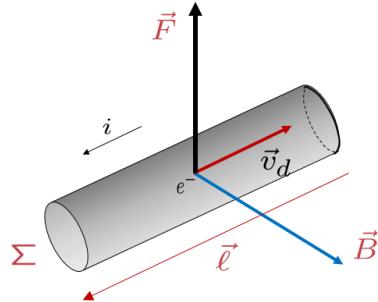


Figura 7.7: Derivazione della seconda legge di Laplace dalla forza di Lorentz sugli elettroni di conduzione in una corrente.

Se abbiamo un conduttore cilindrico percorso da una corrente stazionaria i , all'interno di un campo \vec{B} uniforme, su ciascun elettrone in moto con velocità di deriva \vec{v}_d agisce la forza di Lorentz

$$\vec{F}_e = -e \vec{v}_d \times \vec{B}.$$

Questa forza viene comunicata, attraverso gli urti, al reticolo del metallo da parte di ciascun elettrone, Figura 7.7. Sia n la densità degli elettroni nel metallo, Σ la sezione del cilindro ed ℓ la sua lunghezza. Indichiamo con $\vec{\ell}$ il vettore di modulo ℓ avente direzione e verso della corrente \vec{j} (verso opposto a quello degli elettroni, per le nostre convenzioni). La forza risultante sul conduttore è la somma delle forze su ciascun elettrone. Il numero degli elettroni interni al cilindro, in ogni istante, è $n V = n \Sigma \ell$, per cui¹

$$\vec{F} = n \Sigma \ell \vec{F}_e = -n e \Sigma \ell \vec{v}_d \times \vec{B} = n e v_d \Sigma \vec{\ell} \times \vec{B} = i \vec{\ell} \times \vec{B},$$

ove abbiamo definito $v_d = |\vec{v}_d|$ ed usato la proprietà di \vec{v}_d ed $\vec{\ell}$ di essere paralleli discordi, per cui $\ell \vec{v}_d = -v_d \vec{\ell}$. Abbiamo inoltre posto $i = n e v_d \Sigma = j \Sigma$. La formula

$$\vec{F} = i \vec{\ell} \times \vec{B}, \quad (7.3.1)$$

è detta *2^a legge elementare di Laplace*.

¹Si osservi che nel calcolare il contributo alla forza risultante sul tratto di conduttore, abbiamo considerato per ciascun elettrone la forza di Lorentz \vec{F}_e dovuta alla sola velocità di deriva \vec{v}_d . A questa velocità, uguale per tutti gli elettroni, sappiamo essere sovrapposta la velocità termica che, in modulo, è enormemente superiore a $|\vec{v}_d|$. Anche questa componente della velocità contribuisce, e molto più di \vec{v}_d , alla forza di Lorentz agente sul singolo elettrone. Così come la componente termica della velocità ha un carattere caotico, per cui, sommata su tutti gli elettroni, ha risultante nulla, anche la forza di Lorentz ad essa legata è distribuita casualmente sugli elettroni e quindi non contribuisce alla forza risultante \vec{F} sul tratto macroscopico di filo considerato.

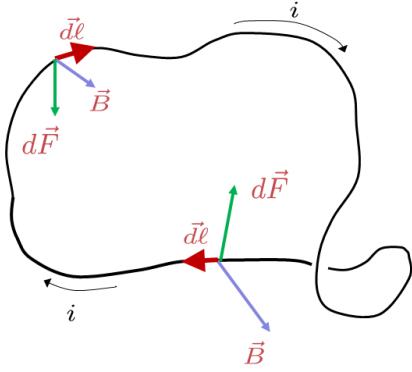


Figura 7.8: Forze agenti su un filo percorso da corrente stazionaria in un campo magnetico non-uniforme.

Se abbiamo un conduttore di lunghezza finita indefomabile, come ad esempio un circuito, percorso da corrente stazionaria i , all'interno di un campo magnetico non uniforme $\vec{B}(\vec{x})$, per effetto di quest'ultimo sul conduttore agirà un sistema di forze. Tale sistema si può descrivere dividendo il conduttore in tratti infinitesimi $d\vec{\ell}$, ciascuno orientato nel verso della corrente, sufficientemente piccoli da poter considerare il campo magnetico uniforme nel loro interno. La forza $d\vec{F}(\vec{x})$ agente sull'elementino $d\vec{\ell}(\vec{x})$ percorso da corrente i è data dalla seconda legge elementare di Laplace:

$$d\vec{F}(\vec{x}) = i \, d\vec{\ell}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}), \quad (7.3.2)$$

dove $\vec{B}(\vec{x})$ è il campo magnetico nel tratto $d\vec{\ell}(\vec{x})$, Figura 7.8. La forza risultante agente sul filo sarà la somma vettoriale di $d\vec{F}$ fatta su tutti gli elementini di filo:

$$\vec{F} = \int_{\text{filo}} d\vec{F} = i \int_{\text{filo}} d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad (7.3.3)$$

dove abbiamo portato i fuori dal simbolo di integrazione essendo essa la stessa attraverso ogni elementino di filo (corrente stazionaria).

Osserviamo che se il filo è chiuso (spira) ed è immerso in un campo magnetico \vec{B} uniforme, la risultante del sistema di forze $d\vec{F}$ è nulla. Infatti, usando la (7.3.3) e mettendo in evidenza \vec{B} troviamo:

$$\vec{F} = \int_{\text{spira}} d\vec{F} = i \left(\oint_{\text{spira}} d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = \vec{0}, \quad (7.3.4)$$

dove abbiamo usato la proprietà $\oint_{\text{spira}} d\vec{\ell} = \vec{0}$, essendo questo integrale lo spostamento totale lungo un percorso chiuso.

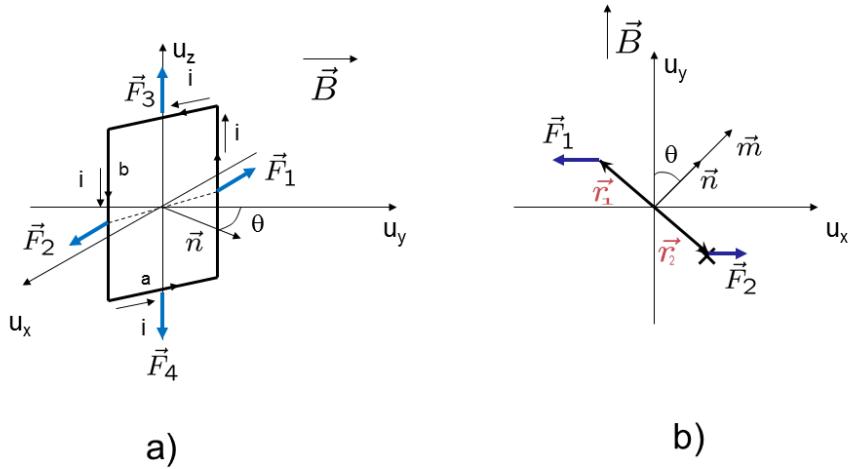


Figura 7.9: Moto di una spira rettangolare in un campo magnetico uniforme. È usata la seguente convenzione: una corrente perpendicolare al foglio del disegno è rappresentata da un punto se è uscente, una “X” se entrante.

7.4 Moto di una spira rettangolare in un campo magnetico uniforme

Consideriamo una spira rettangolare percorsa da una corrente stazionaria i in un campo magnetico \vec{B} uniforme, diretto, supponiamo, lungo l'asse Y

$$\vec{B} = B\vec{u}_y , \quad B > 0 .$$

Supponiamo che la spira sia libera di ruotare intorno ad un suo asse, coincidente con l'asse Z , Figura 7.9.

Siano a e b le lunghezze dei lati perpendicolari e paralleli all'asse Z rispettivamente. \vec{n} denota la normale alla superficie della spira orientata nel verso legato al verso della corrente dalla regola della mano destra, Figura 7.9, (a). La posizione in ogni istante della spira è definita dall'angolo θ che va da \vec{u}_y ad \vec{n} , essendo positivo il verso antiorario (nella figura (a) $\theta < 0$). Essendo la spira immersa in un campo \vec{B} , uniforme, per la (7.3.4), la risultante delle forze \vec{F}_i agenti sui suoi quattro lati è nulla

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} .$$

Infatti applicando a ciascun lato la formula di Laplace (7.3.1):

$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$$

troviamo che

$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_3, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1.$$

\vec{F}_3 e \vec{F}_4 sono dirette lungo l'asse Z , per cui hanno momento nullo rispetto a tale asse.

Le forze \vec{F}_1 ed \vec{F}_2 si scrivono:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= i(b\vec{u}_z) \times \vec{B} = ibB\vec{u}_z \times \vec{u}_y = -ibB\vec{u}_x, \\ \vec{F}_2 &= ibB\vec{u}_x.\end{aligned}$$

Il momento di \vec{F}_1 e \vec{F}_2 rispetto all'asse Z è (Figura 7.9, (b)):

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = -a|\vec{F}_1| \sin(\theta) \vec{u}_z = -iabB \sin(\theta) \vec{u}_z.$$

Il segno “-” è dovuto al fatto che per $\theta < 0$, come in Figura 7.9, (b), \vec{M} è diretto nel verso di \vec{u}_z , mentre, se $\theta > 0$, esso ha il verso opposto ad \vec{u}_z . Possiamo anche scrivere

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B},$$

ove abbiamo definito

$$\vec{m} = iab\vec{n} = i\Sigma\vec{n}, \quad (7.4.1)$$

essendo $\Sigma = ab$ l'area della spira. Il vettore \vec{m} è detto *momento di dipolo magnetico*. Esso è diretto in direzione perpendicolare al piano della spira e verso legato al verso della corrente dalla regola della mano destra. La formula per \vec{M} è analoga alla formula $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ trovata per il dipolo elettrico. Scriviamo quindi l'equazione del moto della spira. Se I è il suo momento d'inerzia:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Leftrightarrow I\ddot{\theta} = -mB \sin(\theta),$$

ove abbiamo scritto $\vec{L} = I\dot{\theta}\vec{u}_z$. Abbiamo trovato l'equazione analoga a quella del pendolo, ed analoga a quella del dipolo elettrico in un campo \vec{E} uniforme. La soluzione di equilibrio stabile corrisponde a

$$\theta(t) \equiv 0,$$

ovvero \vec{m} è orientato nella direzione e verso di \vec{B} ed $\vec{M} \equiv \vec{0}$. Per piccole oscillazioni intorno a questa posizione ($\theta \approx 0$) l'equazione diventa:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{oscillatore armonico}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{I}} = \sqrt{\frac{iB\Sigma}{I}} = 2\pi\nu,$$

ν essendo la frequenza con cui la spira oscilla intorno all'orientazione di equilibrio e dipende dall'intensità di \vec{B} . La soluzione generale per piccole oscillazioni è:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0).$$

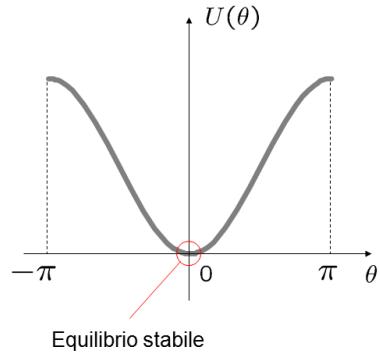


Figura 7.10: Energia potenziale di un dipolo magnetico in un campo magnetico uniforme.

Se la spira ruota da θ_0 a θ_1 la coppia \vec{F}_1, \vec{F}_2 compie un lavoro W pari a:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} M d\theta = -mB \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin \theta d\theta = mB(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) = U(\theta_0) - U(\theta_1).$$

Troviamo quindi l'espressione dell'energia potenziale della spira nel campo \vec{B} :

$$U(\theta) = -mB \cos(\theta) + \text{cost.} = -\vec{m} \cdot \vec{B} + \text{cost.}$$

Se fissiamo la costante in modo che $U(\theta = 0) = 0$, troviamo (Figura 7.10):

$$U(\theta) = mB(1 - \cos(\theta)).$$

Ricapitolando: la spira, per effetto di \vec{B} tende a orientarsi sul piano perpendicolare a \vec{B} , in modo che \vec{m} e \vec{B} siano concordi. Se perturbata di poco da questa posizione di equilibrio, essa oscilla con moto armonico intorno al suo asse con frequenza caratteristica $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{iB\Sigma}{I}}$.

Il moto di una spira percorsa da una corrente i in un campo \vec{B} uniforme è quindi analogo al moto di un dipolo elettrico in un campo elettrostatico uniforme. La corrispondenza tra le diverse quantità nei due casi è la seguente.

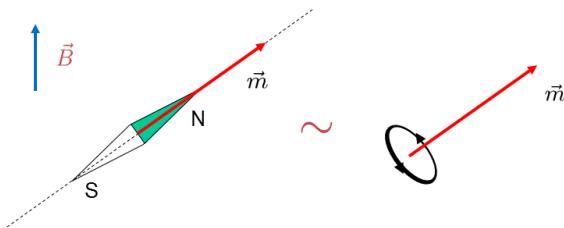


Figura 7.11: Equivalenza tra un ago magnetico ed una piccola spira percorsa da corrente, in un campo magnetico \vec{B} .

dipolo elettrico		spira
\vec{p}	\leftrightarrow	\vec{m}
\vec{E}	\leftrightarrow	\vec{B}
$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	\leftrightarrow	$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} + \text{cost}$	\leftrightarrow	$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} + \text{cost}$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{PE}{I}}$	\leftrightarrow	$\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{I}}$

Questa analisi si applica al moto di una spira piana di forma qualsiasi, percorsa da corrente i e sufficientemente piccola da poter considerare il campo \vec{B} esterno uniforme su di essa. Se Σ è la superficie della spira, ad essa è associato un momento di dipolo magnetico $\vec{m} = i \Sigma \vec{n}$, essendo \vec{n} la normale orientata come nel caso precedente.

Un ago magnetico si comporta in un campo \vec{B} esterno come una piccola spira con momento di dipolo magnetico \vec{m} diretto dal polo S al polo N, Figura 7.11. Questo si spiega supponendo che all'interno dei magneti vi siano correnti chiuse a livello atomico-molecolare, assimilabili a piccole spire. L'effetto globale è assimilabile a quello di una unica spira.

Il campo magnetico \vec{B} si misura in Tesla,

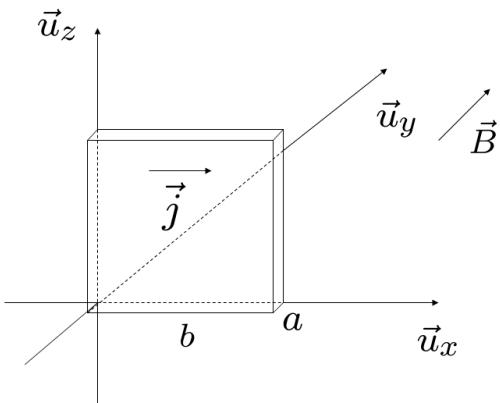


Figura 7.12: Effetto Hall: tratto di nastro conduttore in un campo magnetico ad esso perpendicolare.

$$[1T] = [1 \text{ Tesla}] = [N/(Am)].$$

Un Tesla è un valore molto elevato raggiungibile solo con superconduttori. Si usa più spesso il Gauss:

$$1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla}.$$

Il campo magnetico terrestre è dell'ordine di 0.4 Gauss.

7.5 Effetto Hall

L'effetto Hall è un fenomeno che permette di determinare la carica dei portatori in una corrente elettrica attraverso la loro interazione con un campo magnetico esterno. Consideriamo un nastro conduttore percorso da corrente. Sia lo spessore a del nastro molto più piccolo della sua altezza b . Sia il nastro disposto sul piano ZX come in Figura 7.12, all'interno di un campo \vec{B} uniforme diretto lungo l'asse Y

$$\vec{B} = B\vec{u}_y, \quad B > 0.$$

Supponiamo che la corrente sia descritta da una densità $\vec{j} = j\vec{u}_x$ ($j > 0$) uniforme e che quindi sia diretto lungo l'asse X . L'intensità di corrente attraverso una sezione del nastro sarà

$$i = j ab.$$

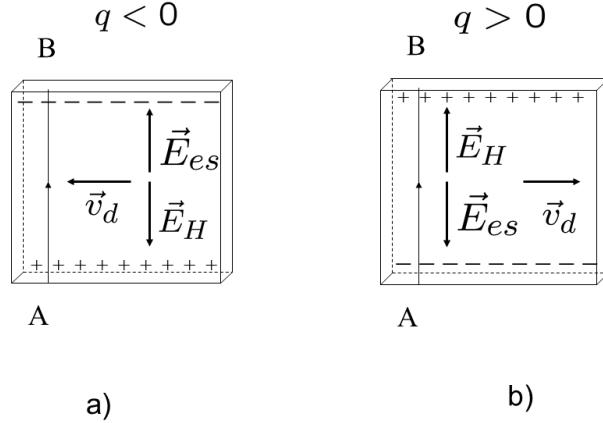


Figura 7.13: Effetto Hall: tratto di nastro conduttore in un campo magnetico ad esso perpendicolare.

Sia la corrente dovuta al moto dei portatori di carica con carica q , che si muovono con velocità di deriva media \vec{v}_d ², presenti nel conduttore con densità $n = \frac{dN}{dV}$, per cui possiamo scrivere³

$$\vec{j} = qn\vec{v}_d = qnv_d\vec{u}_x, \quad \vec{v}_d = v_d\vec{u}_x.$$

In questa sezione indichiamo con v_d la componente di \vec{v}_d lungo X e non il suo modulo. Essa quindi è positiva se $q > 0$, negativa se $q < 0$. In ogni caso $qv_d > 0$. Su ciascuna carica q agisce il campo elettrostatico $\vec{E}'_{es} = \rho\vec{j}$ che determina la corrente, diretta lungo l'asse X ed una forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = q\vec{v}_d \times \vec{B} = qv_d B \vec{u}_x \times \vec{u}_y = qv_d B \vec{u}_z.$$

La forza \vec{F}_L è diretta lungo \vec{u}_z qualsiasi sia il segno di q . Infatti possiamo anche scrivere

$$\vec{F}_L = \frac{1}{n} \vec{j} \times \vec{B}.$$

È utile descrivere \vec{F}_L come l'azione di un nuovo campo elettrico:

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v}_d \times \vec{B} = \frac{1}{qn} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{j}{qn} B \vec{u}_x \times \vec{u}_y = \frac{jB}{qn} \vec{u}_z,$$

²Se $q > 0$, \vec{v}_d ha lo stesso verso di \vec{j} , se invece $q < 0$ \vec{v}_d ha verso opposto a \vec{j} .

³Ricordiamo che dN è il numero di portatori di carica nel volumetto dV . Nonostante il simbolo usato, esso non va inteso come una quantità infinitesima, essendo numero intero. Al contrario $dN \gg 1$.

il cui verso dipende dal segno di q : se $q < 0$ esso è diretto in verso opposto ad \vec{u}_z , se $q > 0$ in verso concorde ad \vec{u}_z (Figure 7.13 (a) e (b)). Se $q < 0$, l'effetto di \vec{F}_L è di spostare le cariche q negative verso l'alto e di determinare quindi un eccesso di carica negativa sul bordo superiore del nastro ed un corrispondente eccesso di carica positiva sul bordo inferiore (Figura 7.13, (a)). Viceversa, se $q > 0$ saranno le cariche q positive ad accumularsi sul bordo superiore e quelle negative sul bordo inferiore (Figura 7.13, (b)). Nei due casi si creerà una situazione di equilibrio in cui il campo elettrostatico \vec{E}_{es} , generato da due eccessi di carica e diretto dalle cariche positive a quelle negative, è uguale ed opposto ad \vec{E}_H :

$$\vec{E}_H = -\vec{E}_{es} = \frac{jB}{nq} \vec{u}_z .$$

Se calcoliamo la *ddp* tra il bordo inferiore (punto A) ed il bordo superiore (punto B) troviamo:

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_{A \rightarrow B} \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = - \int_{A \rightarrow B} \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = - \int_{A \rightarrow B} \frac{jB}{nq} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = - \frac{jBb}{nq} = \\ &= -\frac{iB}{nqa} \Rightarrow \begin{cases} V_A < V_B & q > 0 \\ V_A > V_B & q < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

avendo scelto il cammino lungo l'asse Z , nel verso di \vec{u}_z , per cui $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$. Dalla misura della differenza di potenziale tra i due bordi del nastro è possibile dedurre quindi il segno della carica q dei portatori di carica.

Il campo “elettromotore” \vec{E}_H è un esempio di campo elettrico non-conservativo. Infatti, consideriamo il cammino chiuso C ottenuto chiudendo il segmento AB all'esterno del nastro, ove $\vec{E}_H \equiv 0$ (Figura 7.14). La circuitazione del campo elettrico totale (a cui non contribuisce la componente elettrostatica) è:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A \rightarrow B} \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = V_B - V_A = \frac{iB}{nqa} \neq 0 . \quad (7.5.2)$$

Questo mostra che il campo elettrico \vec{E} , ovvero \vec{E}_H , è non-conservativo ed è quindi possibile usare \vec{E}_H per realizzare un generatore di f.e.m. ed ottenere un circuito percorso da corrente chiudendo i bordi del nastro su un conduttore esterno, Figura 7.15.

Se il campo \vec{B} non fosse stato perpendicolare alla superficie del nastro, l'effetto Hall, e quindi la *ddp* misurata fra i due bordi ($V_A - V_B$), sarebbe dipesa solo dalla componente B_y di \vec{B} lungo \vec{u}_y . Su questo fenomeno è basato il funzionamento della sonda Hall, che è un dispositivo contenente un nastro percorso da corrente che, attraverso una misura della *ddp* tra i due bordi, permette di misurare la componente di \vec{B} perpendicolare al nastro.

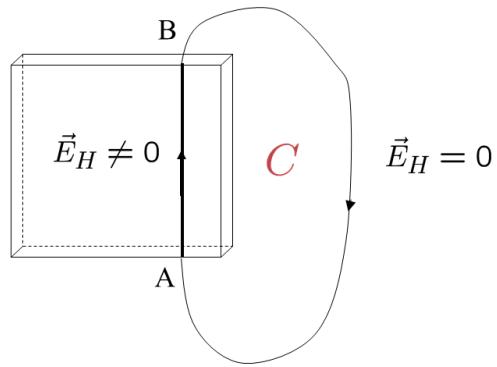


Figura 7.14: Campo \vec{E}_H ha circuitazione lungo C non-nulla. Esso è quindi non-conservativo.

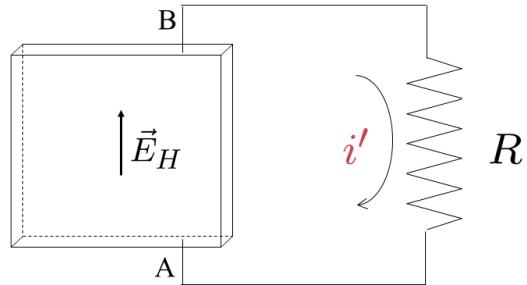


Figura 7.15: Il nastro percorso da corrente i in un campo \vec{B} esterno può fungere da generatore di f.e.m. e quindi, se i suoi bordi sono chiusi su una resistenza R , produrre una corrente i' attraverso essa. Tale corrente non va confusa con la corrente i che attraversa il nastro.

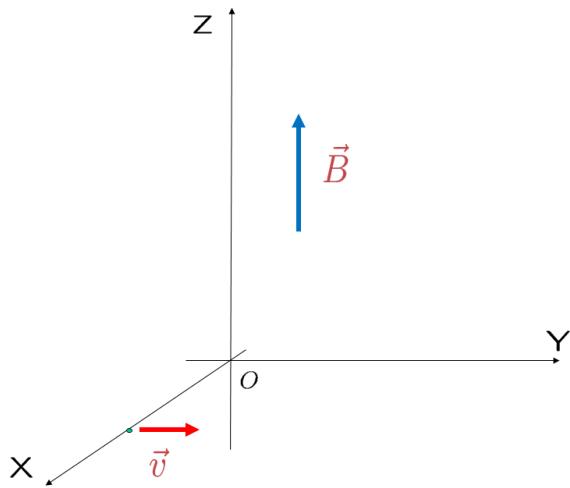


Figura 7.16: Moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme. Primo caso: la velocità iniziale della particella è perpendicolare al campo.

7.6 Moto di una carica all'interno di un campo magnetico uniforme

Consideriamo inizialmente, si veda la Figura 7.16, una carica q che si muove con velocità \vec{v} perpendicolare ad un campo

$$\vec{B} = B\vec{u}_z, \quad B > 0,$$

uniforme.

La forza di Lorentz sulla carica ha la seguente forma

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Essa, in ogni istante è perpendicolare a \vec{v} ed ha modulo $|\vec{F}_L| = |q||\vec{v}|B$. L'accelerazione $\vec{a} = \vec{F}_L/m$ da essa derivante sarà anch'essa perpendicolare in ogni istante a \vec{v} ed in modulo vale $|\vec{a}| = |q||\vec{v}|B/m$. Ricordiamo dalla Meccanica che se l'accelerazione è in ogni istante perpendicolare alla velocità, questa varia solo in direzione ma non in modulo. Questo implica che $|\vec{v}|$ è costante e che l'accelerazione ha solo componente centripeta. Il suo modulo $|\vec{a}| = |q||\vec{v}|B/m$ è costante. Sappiamo dalla Meccanica che un moto con queste caratteristiche è di tipo *circolare uniforme*, Figura 7.17. Tale moto si svolge sul piano perpendicolare a \vec{B} con accelerazione centripeta $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ e forza centripeta $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\omega} \times \vec{v}$. Dalla condizione

$$\vec{F} = \vec{F}_L,$$

troviamo che

$$m\vec{\omega} \times \vec{v} = -q\vec{B} \times \vec{v},$$

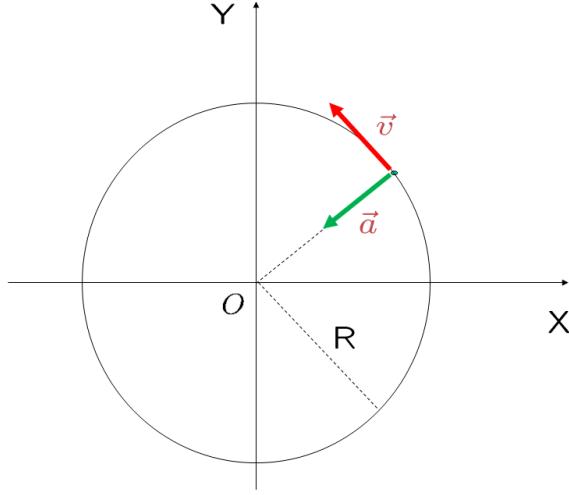


Figura 7.17: Moto circolare uniforme di una carica un un campo magnetico uniforme.

relazione vera per ogni \vec{v} , da cui ricaviamo che

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} = \omega \vec{u}_z. \quad (7.6.1)$$

Questa relazione implica che il verso del moto circolare è legato al verso di \vec{B} come in Figura 7.18. Ricaviamo quindi dalla velocità angolare ω il *periodo* del moto circolare:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

Il *raggio* della traiettoria risulta essere:

$$R = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{\omega}|} = \frac{|\vec{v}|m}{|q|B}.$$

Consideriamo ora il caso più generale in cui la velocità della carica possiede inizialmente una componente parallela a \vec{B} :

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + v_{||} \vec{u}_z.$$

La forza dipende solo da \vec{v}_\perp e l'equazione del moto si scrive:

$$m \vec{a} = \vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} = q \vec{v}_\perp \times \vec{B}.$$

Se proiettiamo lungo la direzione di $\vec{B}(\vec{u}_z)$, troviamo:

$$m a_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{moto uniforme lungo } Z,$$

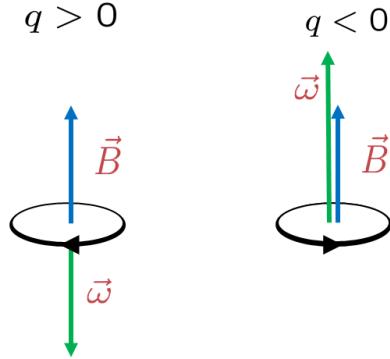


Figura 7.18: Moto circolare uniforme di una carica un un campo magnetico uniforme.

mentre sul piano XY perpendicolare a \vec{B} , l'equazione è analoga a quella considerata prima e definisce un moto circolare uniforme

$$m\vec{a}_\perp = q\vec{v}_\perp \times \vec{B} \quad (\text{piano XY}).$$

Il moto risultante è la composizione di un moto circolare uniforme con $\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$, $R = \frac{|\vec{v}_\perp|}{|\vec{\omega}|} = \frac{m|\vec{v}_\perp|}{|q|B}$, sul piano perpendicolare a \vec{B} e di un moto rettilineo uniforme lungo la direzione di \vec{B} , ovvero è un moto *elicoidale*, Figura 7.19. Il passo dell'elica è la distanza lungo l'asse Z percorsa durante un giro completo sul piano perpendicolare a B :

$$\ell = v_\parallel T = \frac{2\pi m|v_\parallel|}{|q|B}.$$

7.7 Prima legge di Laplace

Finora abbiamo descritto, attraverso la seconda legge di Laplace, come un campo magnetico $\vec{B}(\vec{x})$ agisce su una carica in moto o un filo percorso da corrente al suo interno. Consideriamo ora la relazione tra $\vec{B}(\vec{x})$ e le correnti che la generano. Essa è descritta dalla prima formula di Laplace. Consideriamo un tratto infinitesimo di conduttore $d\vec{\ell}$ percorso da corrente di intensità i . Sia $d\vec{\ell}$ orientato nel verso della corrente al suo interno (ovvero nel verso di \vec{j}), Figura 7.20. Se consideriamo un punto P ad una distanza r dal conduttore, la prima formula di Laplace esprime il campo $d\vec{B}$ in P nel seguente modo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\vec{\ell} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2}, \quad (7.7.1)$$

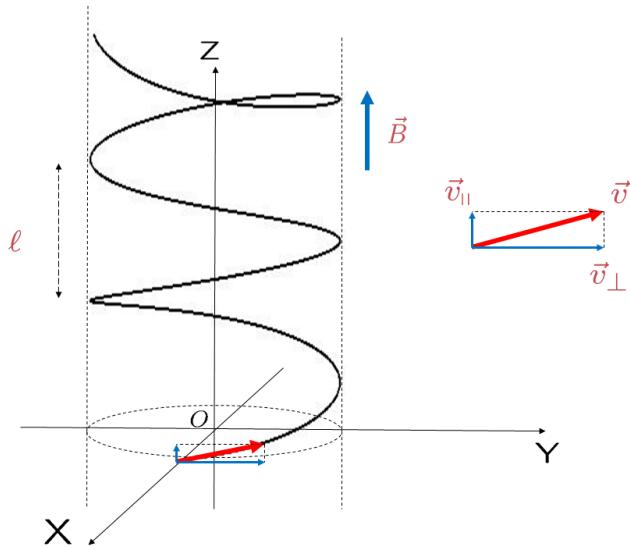


Figura 7.19: Moto elicoidale di una carica in un campo magnetico uniforme.

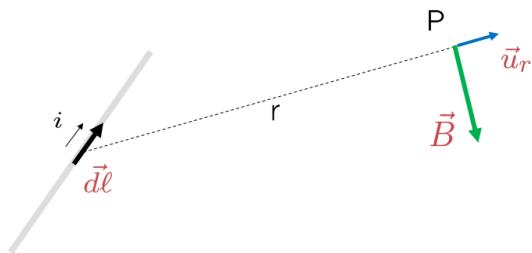


Figura 7.20: Prima legge di Laplace: campo magnetico generato da un tratto infinitesimo $d\vec{\ell}$ di filo conduttore percorso da corrente i .

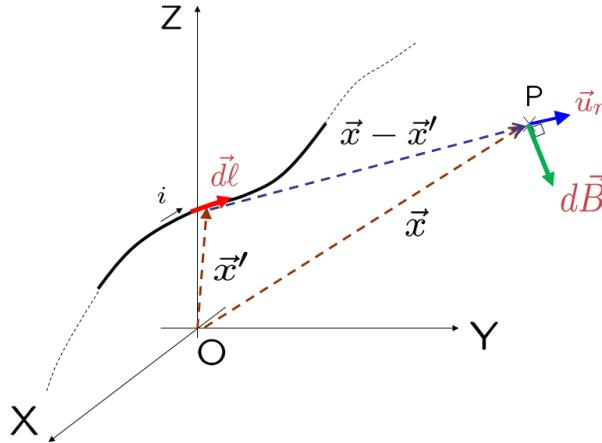


Figura 7.21: Prima legge di Laplace: campo magnetico generato da un tratto finito di filo conduttore percorso da corrente i .

essendo \vec{u}_r il versore della direzione che va da $d\vec{\ell}$ a P . Si osservi che $d\vec{B}$ è perpendicolare sia al tratto di filo $d\vec{\ell}$ che alla direzione radiale rispetto ad esso nel punto P : $d\vec{B} \perp \vec{u}_r$, $d\vec{\ell}$. Assumiamo ora che per il campo magnetico, come per il campo elettrico, valga il *principio di sovrapposizione*: il campo magnetico generato da due o più elementi di corrente in ogni punto è la somma dei campi magnetici generati da ciascun elemento di corrente, nello stesso punto. Se quindi abbiamo un filo conduttore di forma generica percorso da una corrente stazionaria i , possiamo esprimere il campo \vec{B} in un punto dello spazio circostante, generato da tale corrente, come la somma dei contributi infinitesimi $d\vec{B}$ dovuti a ciascun tratto elementare $d\vec{\ell}$ in cui il filo è diviso, Figura 7.21. Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane, sia \vec{x}' il vettore posizione dell'elemento di filo $d\vec{\ell}$ (orientato nel verso della corrente) ed \vec{x} il vettore posizione del punto in cui vogliamo calcolare \vec{B} . Il contributo $d\vec{B}(\vec{x})$ è espresso dalla legge elementare di Laplace:

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\vec{\ell}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3},$$

avendo scritto il versore \vec{u}_r rispetto a $d\vec{\ell}$ nel punto P come:

$$\vec{u}_r = \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (7.7.2)$$

e la distanza r tra P e $d\vec{\ell}$ come $|\vec{x} - \vec{x}'|$.

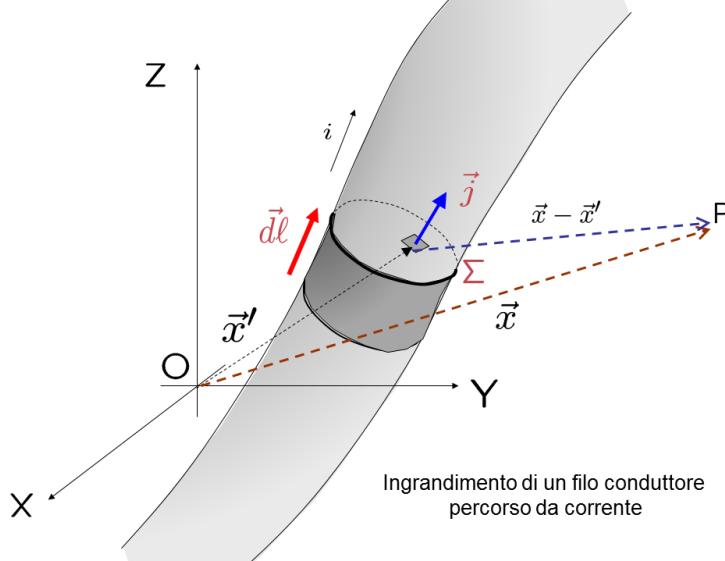


Figura 7.22: Ingrandimento di un filo conduttore percorso da corrente i . Supponiamo che sulla sezione trasversale Σ il vettore $d\ell$ sia uniforme così come \vec{j} .

Il campo $\vec{B}(\vec{x})$ complessivo si ottiene integrando $d\vec{B}(\vec{x})$ al variare di $d\ell(\vec{x}')$ (ovvero del punto \vec{x}') lungo il filo:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \int_{(filo)} d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{(filo)} d\ell(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Questa formula generale permette di calcolare il campo \vec{B} generato da un generico filo percorso da corrente. Se il conduttore percorso da corrente ha una sezione non trascurabile, scriviamo i attraverso la sezione Σ , finita nell'intorno del punto \vec{x}' , lungo il filo in termini del flusso di \vec{j} :

$$i = \int_{\Sigma} j d\Sigma,$$

avendo orientato la normale \vec{n} a Σ nella direzione di \vec{j} in ogni punto: $\vec{j} = j\vec{n}$.

Possiamo quindi generalizzare la formula precedente per \vec{B} nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(filo)} i d\ell(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(filo)} \int_{\Sigma} j d\Sigma \left[d\ell(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \left[\vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right], \end{aligned} \quad (7.7.3)$$

essendo V il volume interno al filo e $dV = d\ell d\Sigma$ il volume infinitesimo relativo al tratto $d\ell$. Abbiamo inoltre usato la proprietà $j d\ell = d\ell j$.

Nel limite in cui la sezione Σ del filo è trascurabile rispetto alla lunghezza in gioco, ritroviamo la formula precedente in cui \vec{B} è espresso come integrale di linea lungo il filo.

Se la corrente è dovuta al moto di cariche elementari q con velocità media \vec{v}_d e se $n = \frac{dN}{dV}$ è la densità dei portatori di carica possiamo scrivere:

$$\vec{j} = nq\vec{v}_d.$$

Sostituendo questa espressione nella formula per \vec{B} , troviamo:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV nq \vec{v}_d(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dN q \vec{v}_d(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i q \vec{v}_d \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}, \end{aligned} \quad (7.7.4)$$

dove la somma è estesa sulle cariche interne al volume.

Il campo quindi si esprime come la somma di campi elementari generati da ogni singola carica in movimento, dislocata nel punto \vec{x}_i , dentro il conduttore. Da questo deduciamo che una carica q in moto con velocità \vec{v} , genera un campo \vec{B} espresso come:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{v} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2}, \quad (7.7.5)$$

essendo r la distanza del punto dalla carica, \vec{u}_r il versore diretto dalla carica al punto.

Diamo ora il valore della costante μ_0 che compare nella prima legge di Laplace. Essa è detta *permeabilità magnetica del vuoto* e vale:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Henry}}{\text{m}},$$

dove abbiamo introdotto l'unità di misura dell'*induttanza* che definiremo più avanti: $1 \text{ Henry} = 1 \text{ T m}^2/\text{A}$.

Calcoliamo il campo \vec{B} generato da un segmento di conduttore di lunghezza $2a$ percorso da corrente stazionaria i nei punti del piano mediano, Figura 7.23. Consideriamo un punto P equidistante dagli estremi del segmento, distante r dal suo centro.

Facciamo coincidere l'asse X con la congiungente il centro del segmento con P . Scegliamo l'asse Y lungo la direzione del segmento nel verso di \vec{j} come in figura.

Dividiamo il segmento in tratti infinitesimi $d\vec{l} = dy \vec{u}_y$. Possiamo individuare il tratto $d\vec{l}$, oltre che attraverso l'ordinata y , tramite l'angolo θ tra \vec{u}_d e \vec{u}_y .

$$y = \frac{r}{\tan(\pi - \theta)} = -\frac{r}{\tan(\theta)} \Rightarrow dy = \frac{r}{\sin^2 \theta} d\theta. \quad (7.7.6)$$

Applichiamo la formula di Laplace per esprimere \vec{B} nel punto P :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int d\vec{l} \times \frac{\vec{u}_d}{d^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dy}{d^2} \vec{u}_y \times \vec{u}_d = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dy}{d^2} \sin(\theta) \vec{u}, \quad (7.7.7)$$

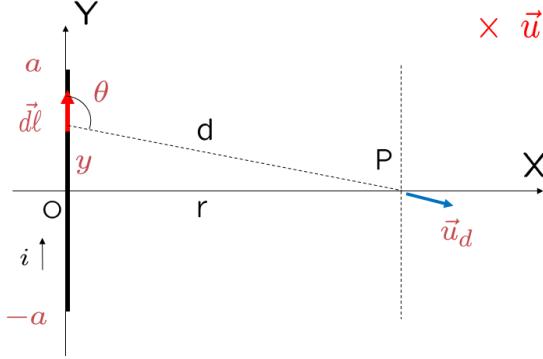


Figura 7.23: Segmento di filo conduttore percorso da corrente.

ove abbiamo espresso $\vec{u}_y \times \vec{u}_r = \sin(\theta) \vec{u}$, essendo \vec{u} il versore ortogonale al foglio entrante. Infatti al variare di $d\ell$ lungo il filo, varia \vec{u}_d , ma la direzione \vec{u} del prodotto $\vec{u}_y \times \vec{u}_d$ è sempre la stessa poiché \vec{u}_d e \vec{u}_y definiscono sempre lo stesso piano.

Usiamo la (7.7.6) e la proprietà:

$$d = \frac{r}{\sin(\theta)} .$$

Otteniamo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin(\theta) d\theta \vec{u} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} (\cos(\theta_0) - \cos(\theta_1)) \vec{u} . \quad (7.7.8)$$

Essendo $\cos(\theta_1) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$ e $\cos \theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$, troviamo per \vec{B}_m la seguente espressione:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}} \vec{u} . \quad (7.7.9)$$

Nel limite in cui $a \gg r$, stiamo a tutti gli effetti considerando un filo rettilineo infinito. Usando la proprietà:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} + O\left(\frac{r}{a}\right)^4 \right) \simeq \frac{1}{a} ,$$

ovvero trascurando i termini di ordine r^2/a^2 , troviamo

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u} .$$

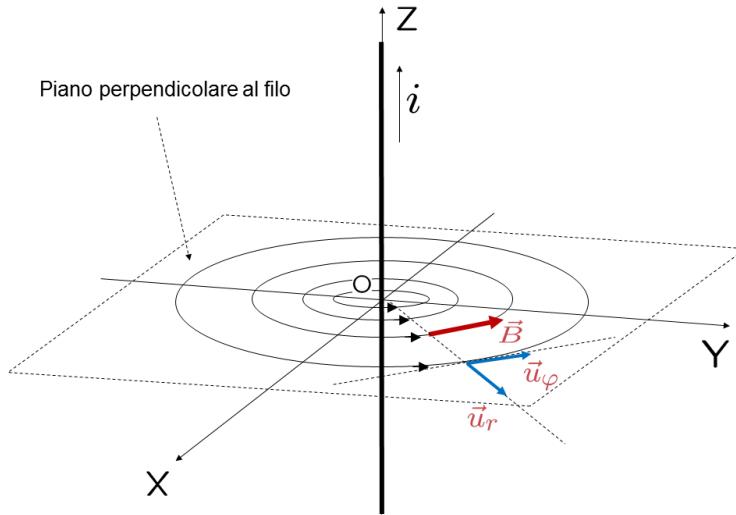


Figura 7.24: Campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente.

Usando un sistema di coordinate cilindriche con asse coincidente con il filo, Figura 7.24, il campo magnetico si può quindi scrivere nella seguente forma

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \vec{u}_z \times \vec{u}_r, \quad (7.7.10)$$

ove \vec{u}_z è scelto in verso concorde con la corrente. Le sue linee di campo sono cerchi sul piano perpendicolare al filo centrati sul filo e la cui orientazione è legata al verso della corrente dalla regola della mano destra. La legge appena trovata è detta legge di Biot-Savart.

7.8 Il campo magnetico è solenoidale

Usando la prima formula di Laplace dimostriamo che il campo magnetico generato da un qualsiasi sistema di correnti soddisfa la proprietà:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

ovunque nello spazio. Questa proprietà caratterizza il campo magnetico come solenoidale, si veda il paragrafo 3.4.⁴ Sappiamo che i punti in cui la divergenza di un campo vettoriale è diversa da zero sono punti in cui terminano o si originano linee di campo. La proprietà di \vec{B}

⁴Abbiamo già incontrato un campo vettoriale solenoidale nel Capitolo 6. Esso era il campo \vec{j} associato ad una corrente stazionaria: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Le sue linee di campo erano per questo continue ed il suo flusso attraverso una qualsiasi sezione del filo conduttore (intensità di corrente i) indipendente dalla sezione stessa.

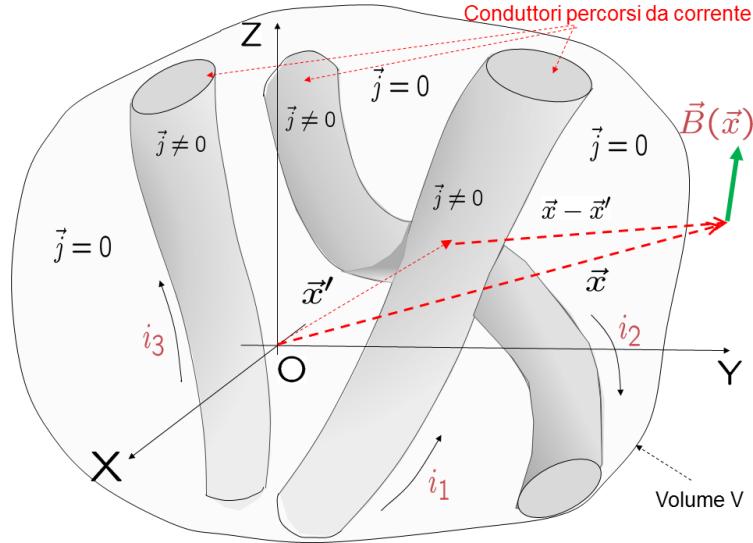


Figura 7.25: Campo magnetico generato da un sistema di fili percorsi da corrente. Le correnti sono convenientemente descritte da un unico campo $\vec{j}(\vec{x})$ diverso da zero solo all'interno dei fili conduttori.

di essere solenoidale implica che le linee di campo di \vec{B} non si originano o terminano in alcun punto nello spazio, ovvero esse sono sempre linee chiuse. Questa proprietà è consistente con il fatto che per il campo magnetico non sono mai state osservate cariche elementari (monopoli) in cui, in analogia con quanto abbiamo visto per il campo elettrostatico, le linee di campo terminerebbero o si originerebbero. Se abbiamo un sistema di fili percorsi da corrente, distribuiti dentro un volume V , è conveniente descriverle in termini di un unico campo densità di corrente $\vec{j}(\vec{x})$, definito in tutto il volume: esso è uguale a zero fuori dai conduttori (ovvero nello spazio vuoto), e diverso da zero solo nel loro interno, ove coincide con il corrispondente campo densità di corrente, Figura 7.25. L'espressione di \vec{B} in un punto \vec{x} è deducibile dalla prima formula di Laplace nella forma (7.7.3):

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Calcoliamo ora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} :$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right).$$

Ricordiamo che l'operatore divergenza agisce sulle componenti (x, y, z) di \vec{x} e non le componenti (x', y', z') di \vec{x}' che individuano l'elemento di corrente. Rispetto ad esso quindi

$\vec{j}(\vec{x}')$ è costante. Calcoliamo la funzione integranda:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(j_y(\vec{x}') \frac{z - z'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - j_z(\vec{x}') \frac{(\vec{y} - \vec{y}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(j_z(\vec{x}') \frac{x - x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - j_x(\vec{x}') \frac{(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(j_x(\vec{x}') \frac{y - y'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - j_y(\vec{x}') \frac{(x - x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) = \\
 &= j_x(\vec{x}') \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(y - y')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) \right] + \\
 &+ j_y(\vec{x}') \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \frac{(x - x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] + \\
 &+ j_z(\vec{x}') \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{(x - x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(y - y')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) \right] = \\
 &= j_x(\vec{x}') \left[-3 \frac{(y - y')(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} + 3 \frac{(y - y')(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \right] + \\
 &+ j_y(\vec{x}') \left[-3 \frac{(x - x')(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} + 3 \frac{(x - x')(z - z')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \right] + \\
 &+ j_z(\vec{x}') \left[-3 \frac{(x - x')(y - y')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} + 3 \frac{(x - x')(y - y')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \right] \equiv 0.
 \end{aligned}$$

La funzione integranda è quindi *identicamente nulla*. Da questo segue che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Per quanto detto le linee di campo di \vec{B} sono sempre chiuse.

Possiamo quindi calcolare la circuitazione di \vec{B} lungo una sua linea di campo. Per definizione di linea di campo, tale circuitazione sarà non-nulla

$$\oint_{l.c.} \vec{B} \cdot d\ell \neq 0.$$

Concludiamo quindi che il campo magnetico è *non-conservativo*.

7.8.1 Il vettore potenziale magnetico

Accenniamo in questo paragrafo alla proprietà del campo magnetico, legata al suo essere solenoidale, di potersi sempre esprimere come il rotore di un campo vettoriale $\vec{A}(\vec{x})$ detto vettore *potenziale magnetico*:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}). \quad (7.8.1)$$

Per dimostrarlo partiamo dalla prima legge di Laplace (7.7.1). Usiamo la formula (3.4.9), dimostrata nel paragrafo 3.4.1, per scrivere

$$\vec{d\ell} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{d\ell}}{r} \right), \quad (7.8.2)$$

avendo scelto come vettore costante \vec{V} nella (3.4.9) il vettore elementare $d\vec{\ell}$. Questo ci permette di riscrivere la (7.7.1) nella seguente forma:

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(i \frac{\vec{d\ell}}{r} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{d\ell}}{r} \right) = \vec{\nabla} \times d\vec{A}(\vec{x}), \quad (7.8.3)$$

dove abbiamo definito

$$d\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{d\ell}}{r}. \quad (7.8.4)$$

In questa equazione possiamo esplicitare la dipendenza di $d\vec{A}$ sia dal punto \vec{x} in cui esso è calcolato, e sia dalla posizione \vec{x}' dell'elementino di filo $d\vec{\ell}$, esprimendo la distanza r tra i sue punti come $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$:

$$d\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{d\ell}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (7.8.5)$$

Il campo magnetico \vec{B} generato da un tratto finito di filo percorso da corrente sarà la somma dei contributi elementari $d\vec{B}$ dovuti a ciascun tratto infinitesimo di filo e si potrà scrivere nella forma:

$$\vec{B} = \int_{\text{filo}} d\vec{B} = \int_{\text{filo}} \vec{\nabla} \times d\vec{A} = \vec{\nabla} \times \int_{\text{filo}} d\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (7.8.6)$$

ove l'integrale va pensato come una somma sugli elementini di filo $d\vec{\ell}$, ovvero una somma sulle loro posizioni \vec{x}' lungo il filo. Il simbolo di rotore $\vec{\nabla} \times$ è stato portato fuori da questa somma poiché le derivate parziali sono fatte invece rispetto alle coordinate x, y, z del punto \vec{x} in cui il campo magnetico è calcolato. Abbiamo inoltre definito

$$\vec{A} = \int_{\text{filo}} d\vec{A}.$$

Allo stesso modo, dalla equazione (7.7.5) che esprime il campo magnetico generato da una carica q puntiforme in moto con velocità \vec{v} , possiamo definire il potenziale magnetico ad esso associato:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{v} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{q \vec{v}}{r} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}}{r} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}), \quad (7.8.7)$$

ove

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}}{r}. \quad (7.8.8)$$

Dall'equazione (7.8.1), che noi abbiamo dimostrato a partire dalla prima legge di Laplace, discende in modo immediato la proprietà del campo magnetico di essere solenoidale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (7.8.9)$$

ove abbiamo usato la proprietà (3.4.5) che la divergenza di un rotore è identicamente nulla, si veda il paragrafo 3.4.

A differenza del potenziale elettrico $V(\vec{x})$, che è un campo scalare, il *potenziale magnetico* $\vec{A}(\vec{x})$ è un campo vettoriale. Come il potenziale elettrico, anche il potenziale magnetico non è univocamente definito. Tuttavia mentre l'ambiguità della definizione del primo è rappresentata da una costante additiva arbitraria, l'ambiguità nella definizione del potenziale magnetico consiste nell'aggiunta del gradiente di una funzione arbitraria. In altre parole due potenziali magnetici $\vec{A}(\vec{x})$ ed $\vec{A}'(\vec{x})$ che differiscono per il gradiente di una funzione generica $f(\vec{x})$:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}'(\vec{x}) + \vec{\nabla}f(\vec{x}), \quad (7.8.10)$$

definiscono lo stesso campo magnetico $\vec{B}(\vec{x})$. Infatti

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}' + \vec{\nabla}f) = \vec{\nabla} \times \vec{A}' + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = \vec{\nabla} \times \vec{A}', \quad (7.8.11)$$

ovvero lo stesso campo magnetico è esprimibile, attraverso la (7.8.1), sia in termini di $\vec{A}(\vec{x})$ che di $\vec{A}'(\vec{x})$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la proprietà che il rotore di un gradiente è identicamente nullo, si veda l'equazione (3.3.8). Concludiamo che il potenziale magnetico è definito a meno del gradiente di una funzione arbitraria.

7.9 Campo generato da una spira circolare percorsa da corrente

Consideriamo una spira circolare percorsa da corrente stazionaria i . Vogliamo determinare \vec{B} in un punto P lungo l'asse della spira. Facciamo coincidere quest'ultimo con l'asse Z e fissiamo l'origine al centro della spira. Dividiamo, al solito, la spira in tratti infinitesimi $d\vec{l}$ diretti nel verso della corrente. Fissiamo un sistema di coordinate polari sul piano della spira in modo che i punti della spira siano definiti da (r, φ) e che $d\vec{l} = R d\varphi \vec{u}_\varphi$, Figura 7.27. Al solito il verso dei φ crescenti è quello legato al verso dell'asse Z dalla regola della mano destra ed è, guardando la spira dal semiasse Z positivo, il verso antiorario. Se la corrente circola in tale verso allora $d\varphi$ lungo lo spostamento $d\vec{l}$ è positivo, ovvero spostandoci nel verso della corrente φ aumenta. Scriviamo il campo \vec{B} nel punto P come la somma dei contributi $d\vec{B}$ dovuti a ciascun tratto $d\vec{l}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\text{spira}} d\vec{l} \times \frac{\vec{u}_d}{d^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\text{spira}} R \frac{d\varphi}{d^2} \vec{u}_\varphi \times \vec{u}_d,$$

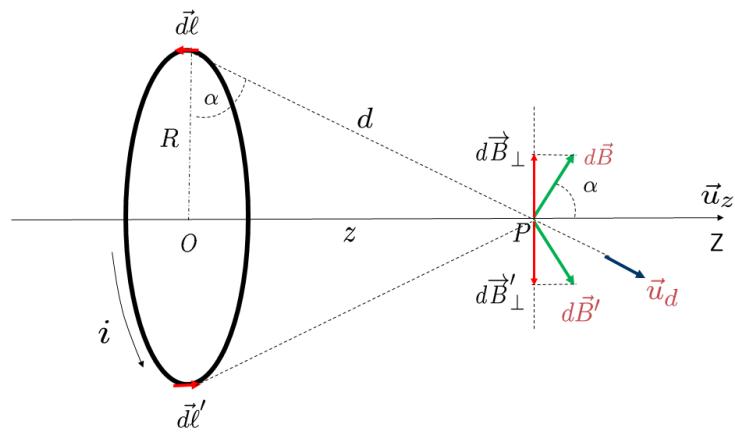


Figura 7.26: Campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente.

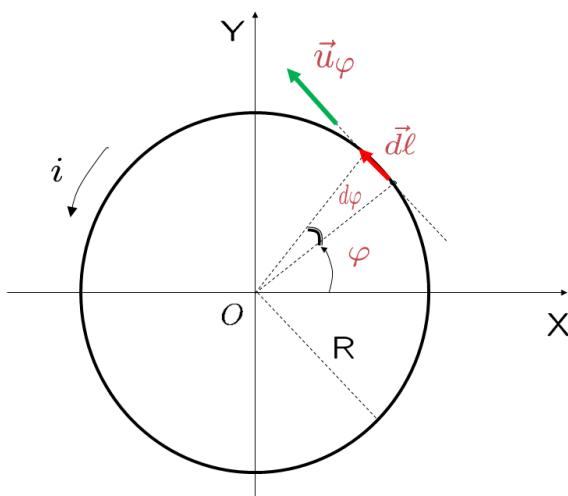


Figura 7.27: Descrizione polare dei punti lungo la spira.

ove abbiamo indicato con \vec{u}_d il versore dell'asse che va dall'elementino $d\vec{\ell}$ al punto P e con d la loro distanza. Indicando con α l'angolo tra la direzione di \vec{u}_d ed il piano della spira, possiamo scrivere

$$d\vec{B} = d\vec{B}_{\perp} + d\vec{B}_{\parallel}, \quad d\vec{B}_{\parallel} = |d\vec{B}| \cos(\alpha) \vec{u}_z, \quad (7.9.1)$$

ovvero decomporre $d\vec{B}$ nei suoi componenti sul piano perpendicolare all'asse Z ($d\vec{B}_{\perp}$) e lungo all'asse Z ($d\vec{B}_{\parallel}$). Osserviamo che i contributi $d\vec{B}_{\perp}$ dovuti a due elementini diametralmente opposti $d\vec{\ell}, d\vec{\ell}'$ si elidono, Figura 7.27, per cui all'integrale contribuiscono solo le componenti di $d\vec{B}$ lungo Z :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\text{spira}} R \frac{d\varphi}{d^2} \cos(\alpha) \vec{u}_z. \quad (7.9.2)$$

Nel fare l'integrale lungo la spira in φ , dobbiamo ricordarci che se la corrente si muove in verso antiorario, φ aumenta da 0 a 2π , mentre se la corrente ha verso opposto, φ diminuisce da 2π a 0:

$$\begin{aligned} \text{corrente in verso antiorario: } & \int_{\text{spira}} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \\ \text{corrente in verso orario: } & \int_{\text{spira}} d\varphi = \int_{2\pi}^0 d\varphi = -2\pi. \end{aligned}$$

Nel primo caso abbiamo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R}{d^2} i \cos(\alpha) \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\pi R^2}{d^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i\Sigma}{d^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}, \quad (7.9.3)$$

ove abbiamo scritto $\cos(\theta) = R/d$ ed $\vec{m} = i\Sigma \vec{u}_z$, essendo $\Sigma = \pi R^2$ l'area della spira. In questo caso il verso di \vec{u}_z è legato a quello della corrente dalla regola della mano destra ed è quindi concorde con il momento di dipolo magnetico della spira \vec{m} . Se invece la corrente scorre in senso orario, l'integrale in φ vale -2π e troviamo:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i\Sigma}{d^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}, \quad (7.9.4)$$

poiché ora $\vec{m} = -i\Sigma \vec{u}_z$ essendo \vec{m} ed \vec{u}_z discordi. Nel limite $|z| \gg R$, $d = \sqrt{z^2 + R^2} \simeq |z|$ e quindi

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{|z|^3}.$$

In generale si dimostra che, lontano dalla spira, nei punti fuori dall'asse il campo magnetico ha il seguente andamento (Figura 7.28)

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 |\vec{m}|}{4\pi d^3} \cos(\theta) \vec{u}_z + \frac{\mu_0 |\vec{m}|}{4\pi d^3} \sin(\theta) \vec{u}_\theta. \quad (7.9.5)$$

Se il punto P giacesse sull'asse della spira ($\theta = 0$) ritroveremmo il risultato precedente. Osserviamo che l'andamento di \vec{B} a grandi distanze è analogo a quello del campo elettrostatico generato da un dipolo elettrico nell'approssimazione di dipolo. Si confrontino infatti

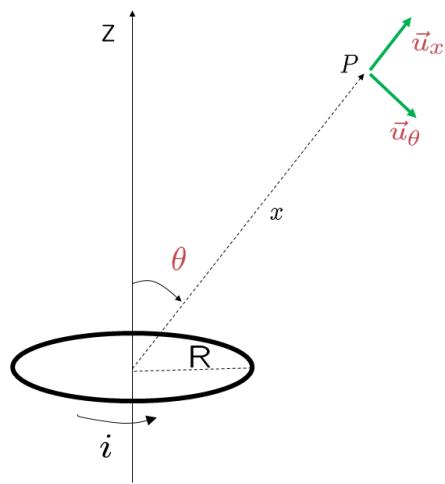


Figura 7.28: Descrizione dei punti fuori dall'asse della spira.

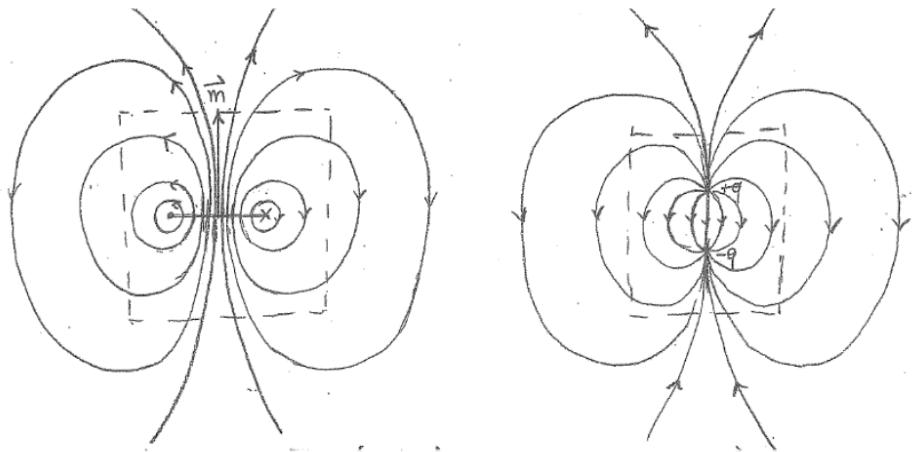


Figura 7.29: Campo magnetico generato da una spira a confronto con campo elettrostatico generato da un dipolo: stesso andamento lontano dalle rispettive sorgenti.

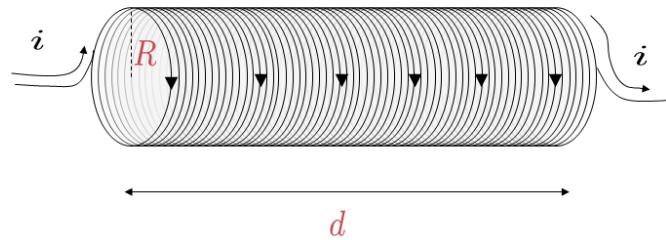


Figura 7.30: Solenoide.

le equazioni (7.9.5) e (2.5.10). Se nella prima sostituiamo $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$, $|\vec{m}| \rightarrow p$, $\mu_0 \rightarrow 1/\epsilon_0$, troviamo la seconda.

Vicino alle relative sorgenti gli andamenti di \vec{B} ed \vec{E} differiscono: \vec{B} ha linee sempre chiuse, mentre le linee di \vec{E} si originano su $+q$ e terminano in $-q$.

7.10 Campo magnetico generato da un solenoide

Il solenoide è descrivibile come un filo conduttore avvolto sulla superficie di un cilindro in modo da formare un'elica con passo molto piccolo, Figura 7.30. Un solenoide è caratterizzato, oltre che dalle dimensioni del cilindro, anche dal numero di avvolgimenti, o spire, per unità di lunghezza:

$$n = \frac{dN}{dx}.$$

Ricordiamo che dN è un numero intero e quindi non va considerato come infinitesimo (al contrario supponiamo che sia abbastanza grande). Lo indichiamo con il simbolo dN solo perché esso è associato all'intervallo dx .

È utile pensare ad un solenoide come ad un numero molto elevato di spire circolari accostate l'una all'altra con densità n . Consideriamo un solenoide percorso dalla corrente

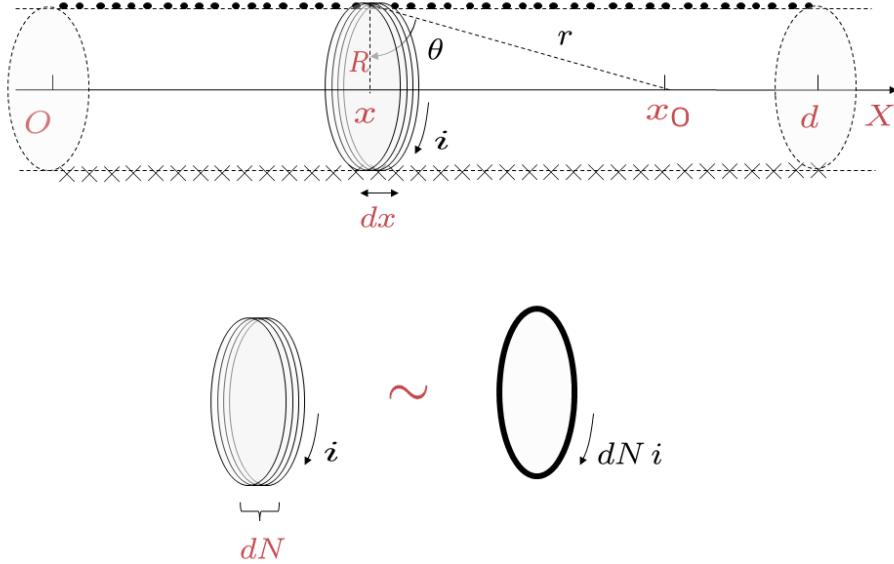


Figura 7.31: Sopra: sezione longitudinale di un solenoide. L'angolo θ è negativo se $x < x_0$, come in figura (è desritto in verso orario mentre il verso positivo è antiorario), positivo se $x > x_0$. Sotto: un gruppo di dN avvolgimenti, ciascuno percorso da corrente i , è equivalente ad un'unica spira percorsa da corrente $dN i$.

i. Sia R il raggio della sezione e d la sua lunghezza. Supponiamo che esso consista di N avvolgimenti distribuiti uniformemente nella sua lunghezza, per cui

$$n = \frac{N}{d}.$$

Vogliamo determinare \vec{B} su un punto lungo l'asse. Fissiamo l'asse X coincidente con l'asse del solenoide, il cui verso è legato a quello della corrente dalla regola della mano destra, Figura 7.31, sopra. Dividiamo il solenoide in bobine elementari di lunghezza dx e numero di spire $dN = ndx$. Questa bobina elementare è descrivibile come un'unica spira percorsa da corrente $di = idN$, Figura 7.31, sotto. Infatti, in tempo dt molto piccolo, una sezione trasversale della bobina sarà attraversata da una carica dq_b pari a dN volte la quantità di carica dq che attraversa ciascun filo. Dividendo dq_b per dt troviamo l'intensità di corrente della spira equivalente: $di = \frac{dq_b}{dt} = dN \frac{dq}{dt} = dN i$.

Descriviamo il campo \vec{B} in x_0 come l'integrale sui contributi $d\vec{B}$ dovuti a ciascuna bobina elementare, Figura 7.31, sopra. Se prendiamo la bobina elementare centrata nel punto di ascissa x , il corrispondente valore di $d\vec{B}$ è dato dalla formula (7.9.3) del campo magnetico di una spira lungo il suo asse:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di\Sigma}{r^3} \vec{u}_x = \frac{\mu_0}{2\pi} ni \Sigma \frac{dx}{r^3} \vec{u}_x; \quad \Sigma = \pi R^2.$$

Usiamo ora le seguenti relazioni⁵

$$r = \frac{R}{\cos(\theta)}; \quad x - x_0 = R \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta,$$

e otteniamo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} ni \Sigma \frac{\cos^3 \theta}{R^3} \left(\frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta \right) \vec{u}_x = \frac{\mu_0}{2} ni \cos \theta d\theta \vec{u}_x = \frac{\mu_0}{2} nid(\sin \theta) \vec{u}_x.$$

Se x varia in $(0, d)$, θ varia da $-\theta_0$ a θ_1 ove

$$\sin(\theta_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + R^2}} \quad \text{e} \quad \sin(\theta_1) = \frac{d - x_0}{\sqrt{(d - x_0)^2 + R^2}}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} ni \int_{-\sin \theta_0}^{\sin \theta_1} d(\sin \theta) \vec{u}_x = \frac{\mu_0}{2} ni (\sin \theta_1 + \sin \theta_0) \vec{u}_x = \\ &= \frac{\mu_0}{2} ni \left[\frac{d - x_0}{\sqrt{(d - x_0)^2 + R^2}} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + R^2}} \right] \vec{u}_x. \end{aligned} \quad (7.10.1)$$

$|\vec{B}|$ è massimo al centro del solenoide ($x_0 = \frac{d}{2}$) lungo l'asse e si riduce man mano che ci si avvicina ai bordi (o ci si allontana dall'asse). Esiste una regione intorno al centro del solenoide in cui (\vec{B}) è approssimativamente uniforme e parallelo all'asse con valore pari a quello in $x_0 = d/2$ (Figura 7.32):

$$\vec{B} = \mu_0 ni \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} \vec{u}_x.$$

All'aumentare di d rispetto ad R questa regione si estende mentre si riduce l'intensità di \vec{B} fuori dal solenoide. Nel limite del solenoide infinito ($d \gg R$), lontano dagli estremi, cioè per $d \gg R$ e $d - x_0 \gg R$, \vec{B} diventa nullo fuori dal solenoide ed uniforme all'interno (Figura 7.33),

$$\vec{B} = \mu_0 ni \vec{u}_x. \quad (7.10.2)$$

7.11 Interazione tra due fili percorsi da corrente

Consideriamo due fili paralleli percorsi dalle correnti i_1 e i_2 . Siano \vec{u}_1 e \vec{u}_2 i due versori diretti nel verso delle rispettive correnti. Sia \vec{u}_r il versore perpendicolare ai due fili nel verso che va dal filo 1 al filo 2. Sia r la distanza tra i due fili. Il campo generato dal primo filo nei

⁵Si osservi che l'angolo θ in Figura 7.31, sopra, è descritto in verso orario. Essendo il verso positivo per gli angoli convenzionalmente scelto essere quello antiorario, salvo specificato altrimenti, in figura $\theta < 0$. In generale θ è negativo se $x < x_0$, positivo se $x > x_0$. Se la bobina elementare si avvicina a x_0 da sinistra, x aumenta mentre θ diminuisce in valore assoluto ma, essendo negativo, aumenta anch'esso.

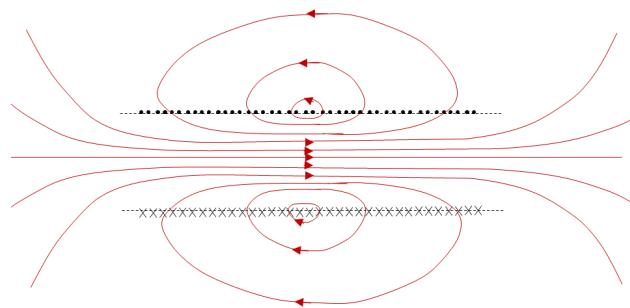


Figura 7.32: Andamento del campo magnetico generato da un solenoide.

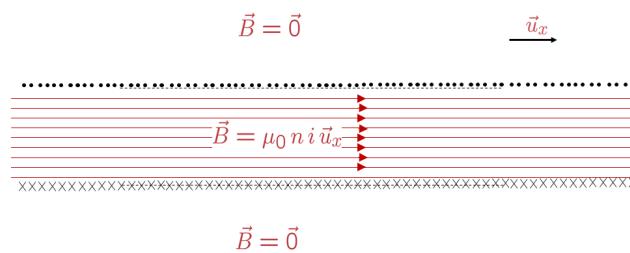


Figura 7.33: Limite di solenoide infinito: il campo magnetico è nullo fuori ed è uniforme dentro.

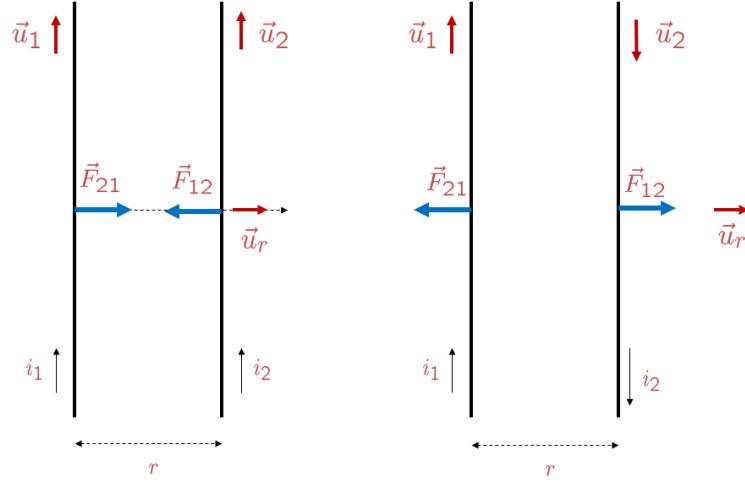


Figura 7.34: Interazione magnetica tra due fili rettilinei paralleli percorsi da corrente.

punti del secondo è dato dalla legge di Biot-Savart (7.7.10)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{r} \vec{u}_1 \times \vec{u}_r.$$

Usando la seconda legge di Laplace, troviamo che su un tratto $d\ell_2$ del secondo filo agirà una forza pari a

$$d\vec{F}_{12} = i_2 d\ell_2 \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} d\ell \vec{u}_2 \times (\vec{u}_1 \times \vec{u}_r).$$

Facciamo ora uso della proprietà generale

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

e riscriviamo

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} [(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_r] d\ell = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_r d\ell.$$

Se due correnti sono equiverse $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = +1$ e la forza è attrattiva. Se invece $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1$ le due correnti hanno verso opposto e la forza è repulsiva. Conviene definire una forza esercitata dal filo 1 sul filo 2 per unità di lunghezza di quest'ultimo:

$$\vec{F}'_{12} = \frac{d\vec{F}_{12}}{d\ell} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_r.$$

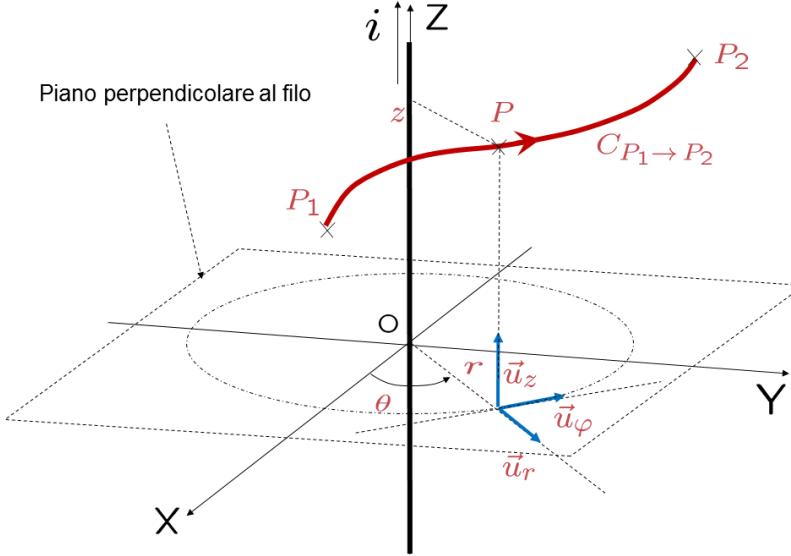


Figura 7.35: Percorso $C_{P_1 \rightarrow P_2}$ nello spazio intorno ad un filo rettilineo infinito percorso da corrente stazionaria i . I punti dello spazio sono descritti rispetto ad un sistema di coordinate cilindriche con asse Z lungo il filo e con esso concorde.

7.12 Legge di Ampère

Abbiamo visto che il campo magnetico $\vec{B}(\vec{x})$ è solenoidale, cioè

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Ne consegue che le sue linee di campo devono essere sempre chiuse. Un campo con linee di campo chiuse è *non conservativo*. Infatti la circuitazione di un campo lungo una linea di campo chiusa è un numero sempre positivo. Il campo \vec{B} è quindi non conservativo. La legge di Ampère mette in relazione \vec{B} con le correnti che lo generano. Essa vale *solo* per correnti stazionarie. Consideriamo per semplicità un filo conduttore rettilineo infinito percorso da una corrente stazionaria i . Rispetto ad un sistema di coordinate cilindriche con asse coincidente con il filo, Figura 7.35, il campo $\vec{B}(\vec{x})$ è espresso dalla legge di Biot-Savart (7.7.10)

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \vec{u}_\varphi.$$

Consideriamo un percorso orientato $C_{P_1 \rightarrow P_2}$ lungo una curva C di estremi P_1 e P_2 nel verso che va da P_1 a P_2 . Calcoliamo l'integrale di \vec{B} lungo $C_{P_1 \rightarrow P_2}$

$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

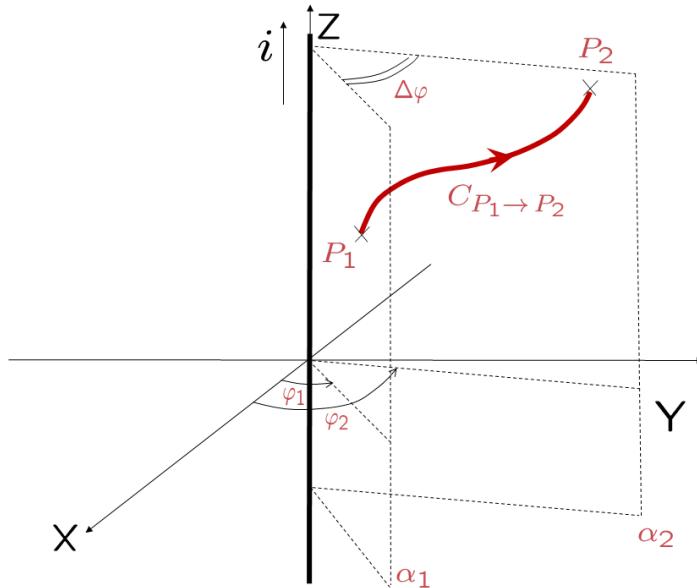


Figura 7.36: Angolo diedro $\Delta\varphi$ sotto cui il filo “vede” il percorso tra P_1 e P_2 . Esso è l’angolo tra i due semipiani α_1 , α_2 che si originano sull’asse Z e passano per gli estremi P_1 e P_2 , rispettivamente.

Ricordiamo che in coordinate cilindriche

$$d\ell = dz \vec{u}_z + dr \vec{u}_r + r d\varphi \vec{u}_\varphi,$$

da cui deduciamo

$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \vec{B} \cdot d\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} i \int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} \frac{1}{r} r d\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} i (\varphi_{P_2} - \varphi_{P_1}) = \frac{\mu_0}{2\pi} i \Delta\varphi. \quad (7.12.1)$$

L’integrale quindi non dipende dalla forma del cammino ma è proporzionale all’angolo diedro $\Delta\varphi = \varphi_{P_2} - \varphi_{P_1}$ sotto cui un osservatore disposto lungo il filo vede lo spostamento (Figura 7.36) ovvero la variazione complessiva di φ quando ci spostiamo lungo il cammino dal punto iniziale al punto finale.⁶

Un cammino chiuso si dice *concatenato con un filo* se non è possibile portarlo a distanza infinita dal filo senza che questo lo intersechi, Figura 7.37. Consideriamo un cammino chiuso C non concatenato col filo, Figura 7.38. Calcoliamo la circuitazione di \vec{B} lungo C ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} i \Delta\varphi,$$

⁶Questa proprietà dell’integrale di linea di \vec{B} ricorda l’analoga proprietà del flusso del campo eletrostatico generato da una carica puntiforme, di dipendere solo dall’angolo solido sotto cui la carica “vede” la superficie. La differenza tra i due casi, dal punto di vista matematico, è che l’integrale di linea di \vec{B} è un integrale unidimensionale, mentre il flusso di \vec{E} è un integrale di superficie. Allo stesso modo l’angolo diedro è un angolo piano, misurato in radianti, mentre quello solido è tridimensionale, misurato in steradiani.

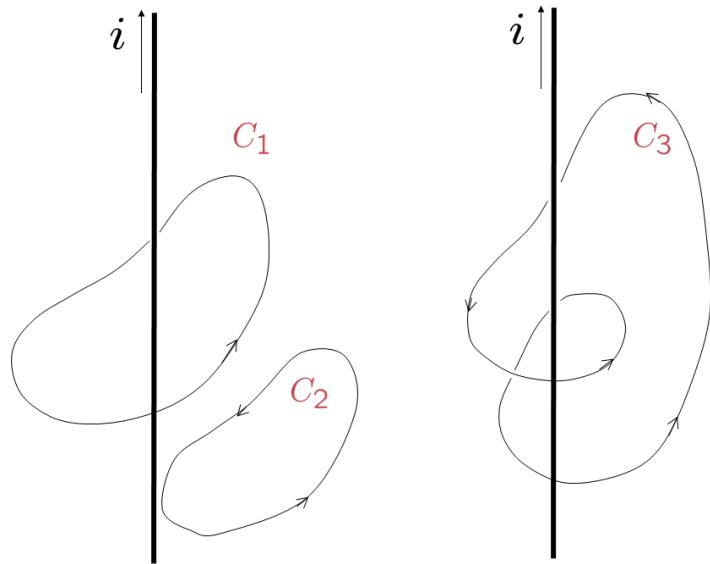


Figura 7.37: Esempi di percorsi chiusi concatenati (C_1 , C_3) e non concatenati (C_2) con un filo percorso da corrente.

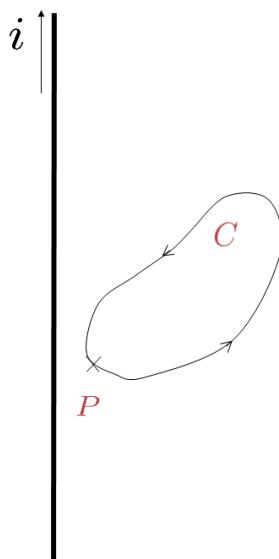


Figura 7.38: Cammino non concatenato con una corrente.

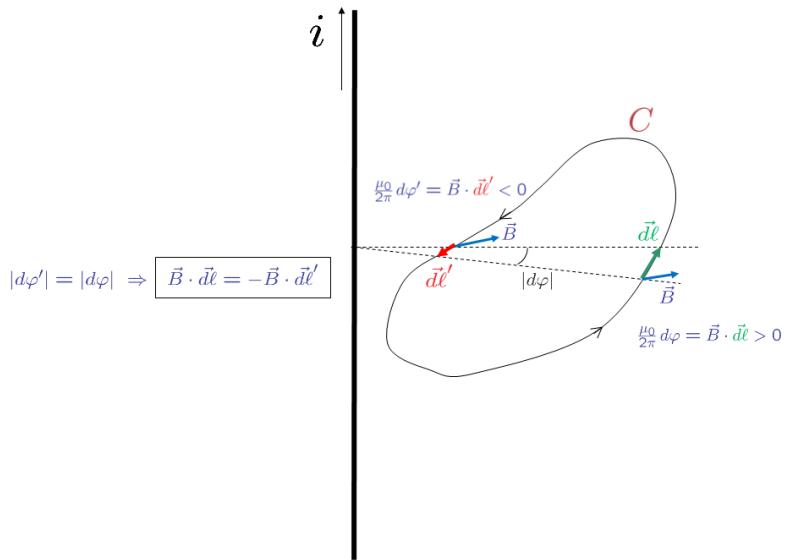


Figura 7.39: la circuitazione del campo magnetico lungo un cammino non-concatenato è nulla perché somma di contributi elementari che si cancellano a due a due.

essendo $\Delta\varphi$ la variazione complessiva di φ quando ci si sposta lungo il cammino C . In questo caso possiamo convincerci che $\Delta\varphi = 0$ perché, partendo da un qualsiasi punto e seguendo C , lungo una parte del cammino φ aumenta, mentre lungo la parte rimanente φ diminuisce fino a tornare al valore iniziale. Consideriamo per esempio il cammino in figura e muoviamoci lungo il percorso a partire dal suo punto P in cui la coordinata φ è minima, seguendo il verso fissato, osserviamo che φ aumenta fino ad un valore massimo per poi diminuire e tornare al valore che ha in P . Questo implica quindi che la circuitazione del campo magnetico è nulla. Per dimostrare questa proprietà in modo più rigoroso, si osservi che, se il cammino C non è concatenato con la corrente, per ogni spostamento infinitesimo $d\vec{\ell}$ lungo il quale $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ è positivo, vi è uno spostamento $d\vec{\ell}'$, “visto” dal filo sotto lo stesso angolo diedro, lungo il quale $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}' < 0$, si veda la Figura 7.39. Ricordandoci che

$$\frac{\mu_0}{2\pi} d\varphi = \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0 , \quad \frac{\mu_0}{2\pi} d\varphi' = \vec{B} \cdot d\vec{\ell}' < 0 ,$$

lungo il primo spostamento φ aumenta di $d\varphi > 0$ mentre lungo il secondo esso diminuisce, variando di $d\varphi' < 0$. Ma per costruzione $|d\varphi| = |d\varphi'|$ perché i due spostamenti elementari sono “visti” sotto lo stesso angolo. Questo implica che $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\vec{B} \cdot d\vec{\ell}'$ e che quindi la circuitazione di \vec{B} lungo C è nulla essendo somma di contributi elementari uguali e opposti che si cancellano a due a due.

Se invece consideriamo una traiettoria concatenata al filo, come nella Figura 7.40 a sinistra, spostandoci lungo C fino a tornare al punto iniziale, φ varia di 2π ($\Delta\varphi = 2\pi$),

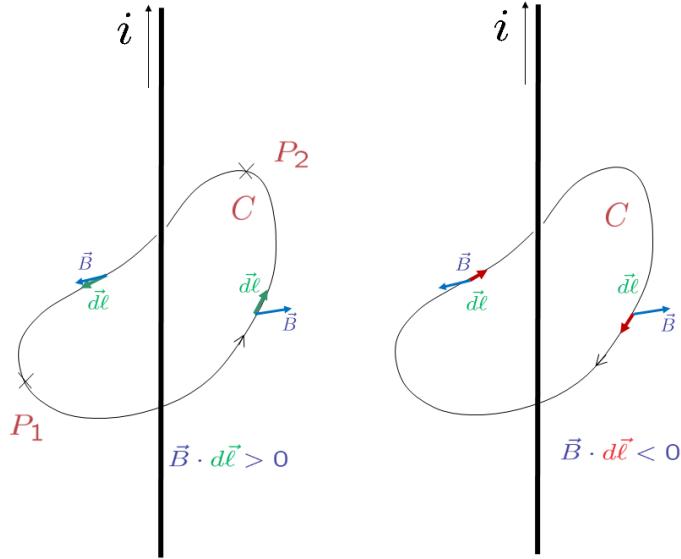


Figura 7.40: Cammini concatenati con una corrente. Il cammino a sinistra ha verso legato a quello della corrente dalla regola della mano destra, quello a destra no.

per cui

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} i 2\pi = \mu_0 i .$$

Infatti, con riferimento alla Figura 7.40 di sinistra, se partiamo dal punto P_1 e ci spostiamo lungo il cammino nel verso fissato, arriveremo ad un punto P_2 nel quale l'angolo φ sarà variato di π rispetto al valore in P_1 . Proseguendo lungo il cammino oltre il punto P_2 , percorreremo un tratto di curva situato, nel disegno, “dietro” il filo e l'angolo φ aumenterà dal valore in P_2 , fino a che, tornati in P_1 , la variazione totale sarà di 2π . Più precisamente notiamo che per ogni spostamento elementare $d\vec{\ell}$ lungo tale cammino $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0$ e che quindi la variazione corrispondente $d\varphi$ dell'angolo φ è positiva essendo $\frac{\mu_0}{4\pi} d\varphi = \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0$. In altre parole lungo il cammino nella Figura 7.40 di sinistra l'angolo φ *aumenta* monotonicamente da 0 a 2π .

Applicando lo stesso ragionamento al percorso nella Figura 7.40 di destra, invece, poiché $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} < 0$ in ogni punto, φ *diminuisce* da 0 a -2π , ovvero $\Delta\varphi = -2\pi$ e

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\mu_0 i .$$

Nel caso raffigurato in Figura 7.41, si ha invece $\Delta\varphi = 6\pi$ e

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 3\mu_0 i ,$$

perché il cammino si “avvolge” tre volte intorno alla corrente. Possiamo riassumere come segue quanto abbiamo imparato fino ad ora riguardo la circuitazione del campo magnetico

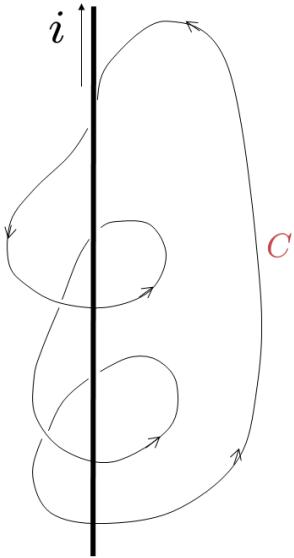


Figura 7.41: Cammino concatenato con una corrente.

generato da una corrente attraverso un filo rettilineo infinito:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad (7.12.2)$$

se C non è concatenato con la corrente, mentre

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \pm \mu_0 N i, \quad (7.12.3)$$

se C è concatenato con la corrente ed “avvolge” il filo un numero N di volte. Il segno + a secondo membro corrisponde al caso in cui il verso di C è legato a quello della corrente dalla regola della mano destra, il segno – al caso contrario.

Per generalizzare questo risultato, è necessario far uso della seguente proprietà che non dimostreremo: *il valore della circuitazione di \vec{B} lungo un percorso chiuso C non varia se C , o il filo percorso dalla corrente che genera \vec{B} , sono deformati con continuità, fintanto che il cammino chiuso ed il filo non si intersecano.*

I risultati (7.12.2) e (7.12.3) valgono quindi per un percorso chiuso C ed un filo di forma generica, purché quest’ultimo sia percorso da corrente *stazionaria*. La condizione di stazionarietà della corrente è necessaria per la validità della legge di Biot-Savart che abbiamo utilizzato inizialmente per dimostrare la (7.12.1). Si osservi inoltre che dire che un percorso chiuso avvolge una corrente N volte è equivalente a dire che la corrente avvolge il filo N volte.

Possiamo ora generalizzare questo risultato ad un sistema arbitrario di correnti stazionarie nello spazio⁷ $i_1, i_2, i_3 \dots$. Il campo magnetico risultante \vec{B} nello spazio, per il principio di sovrapposizione, è in ogni punto la somma dei campi magnetici $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3 \dots$, generati da ciascuna corrente:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_1(\vec{x}) + \vec{B}_2(\vec{x}) + \vec{B}_3(\vec{x}) + \dots \quad (7.12.4)$$

La circuitazione di \vec{B} lungo un percorso chiuso C è la somma delle circuitazioni lungo C di ciascun campo componente:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} + \oint_C \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell} + \oint_C \vec{B}_3 \cdot d\vec{\ell} + \dots \quad (7.12.5)$$

Per le (7.12.2) e (7.12.3), solo i campi magnetici \vec{B}_k generati dalle correnti i_k *concatenate* con il percorso C contribuiscono alla circuitazione, in misura pari a $\pm \mu_0 N_k i_k$, con il segno “+” se il verso della corrente i_k è legato al verso su C dalla regola della mano destra, con segno “-” in caso contrario. Il numero intero positivo N_k rappresenta il numero di volte in cui il cammino C si “avvolge” intorno alla corrente i_k . Giungiamo quindi al seguente risultato generale:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{c.c.} \pm N_k i_k, \quad (7.12.6)$$

ove $\sum_{c.c.}$ sta ad indicare la somma sulle sole correnti concatenate con C . La (7.12.6) esprime la *legge di Ampère*. Nell'esempio in Figura 7.42 si ha

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i_1 - i_2 + i_3),$$

mentre nell'esempio in Figura 7.43 abbiamo:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i_1 - 3i_3).$$

Osserviamo in quest'ultimo caso che la corrente i_2 non è concatenata con il percorso chiuso. Per semplicità di notazione, scriveremo avvolte la legge di Ampère nella seguente forma più compatta:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{c.c.} i, \quad (7.12.7)$$

ove i segni \pm di fronte ad ogni corrente ed i relativi numeri di avvolgimento N_k , saranno sottointesi.

Vogliamo ora dare della legge di Ampère una formulazione locale, ovvero esprimerla come una relazione tra il campo magnetico e le proprie sorgenti (le correnti elettriche) che vale punto per punto. A tale scopo è utile dare una caratterizzazione alternativa delle correnti concatenate con un cammino chiuso C . Come abbiamo fatto nel paragrafo 7.8, si veda Figura 7.25, descriviamo le correnti attraverso un sistema di fili conduttori mediante un unico campo

⁷Ricordiamo che in questo capitolo consideriamo le correnti ed il campo magnetico nel vuoto.

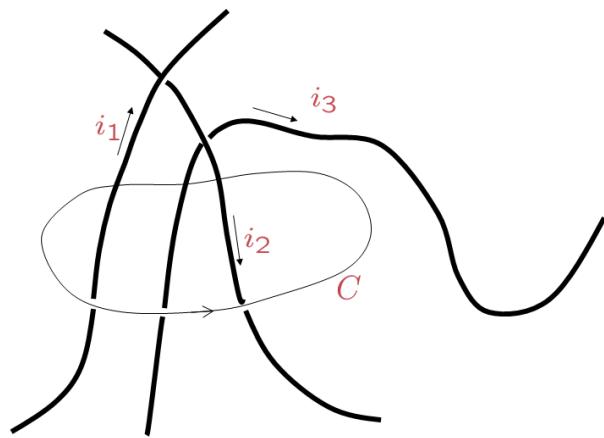


Figura 7.42: Applicazione della legge di Ampère.

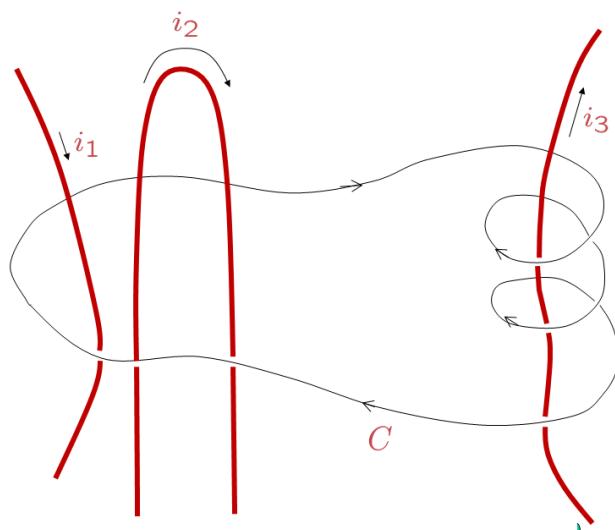


Figura 7.43: Applicazione della legge di Ampère.

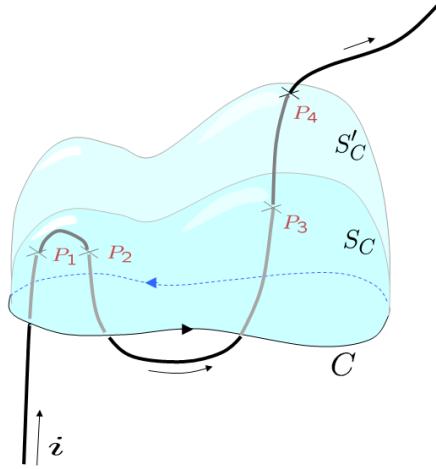


Figura 7.44: Una corrente concatenata con C interseca una qualsiasi superficie che poggia su C . In figura è illustrato un esempio di una corrente concatenata con un percorso chiuso C . La corrente interseca S_C tre volte nei punti P_1 , P_2 , P_3 . Possiamo scegliere un'altra superficie S'_C che interseca la corrente nel solo punto P_4 . Non possiamo trovare una superficie che poggia su C e che non intersechi la corrente neanche una volta.

densità di corrente $\vec{j}(\vec{x})$, definito su tutto lo spazio, che è uguale a zero fuori dai conduttori (ovvero nel vuoto) ed è diverso da zero nei conduttori. Iniziamo con l'osservare che una corrente è concatenata con C se le linee del campo \vec{j} che la descrive hanno intersezione non nulla con *qualunque* superficie S_C che poggia su C , si vedano le Figure 7.44 e 7.45. Una corrente sarà quindi non-concatenata con C se esiste una superficie S_C che poggia su C che *non* è attraversata dalla corrente. Ricordiamo che noi stiamo considerando solo correnti stazionarie, per cui le linee di campo di \vec{j} non si interrompono né si originano mai. Possiamo formalizzare meglio questo concetto ricordando la caratterizzazione geometrica che abbiamo dato nel capitolo 3 del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata. Esso, in opportune unità, è misurato dalla differenza tra il numero di linee di campo uscenti N_{out} ed il numero di linee di campo entranti N_{in} , si veda eq. (3.3.18). Se prendiamo una qualsiasi superficie S_C che poggia su C , il flusso attraverso essa del campo \vec{j} , che descrive la corrente stazionaria attraverso un filo conduttore, si scrive:

$$\Phi_{S_C}(\vec{j}) = \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = u(N_{out} - N_{in}). \quad (7.12.8)$$

Convenzionalmente sceglieremo il versore normale ad S_C in ogni punto in modo che il suo verso sia legato a quello su C dalla regola della mano destra. Se la corrente è stazionaria, le linee di campo di \vec{j} sono continue e quindi il suo flusso attraverso una *qualsiasi* superficie S_C che poggia su un cammino chiuso C è lo stesso. In altre parole la differenza $N_{out} - N_{in}$ attraverso

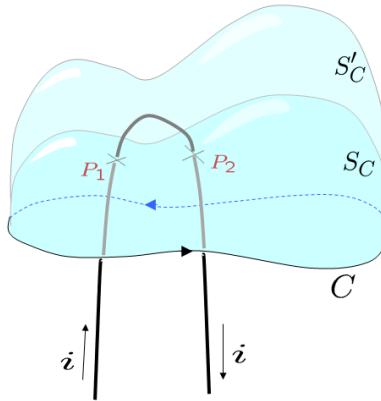


Figura 7.45: Esempio di una corrente non concatenata con un percorso chiuso C . Esiste una superficie S'_C che non interseca la corrente.

una superficie S_C non dipende dalla scelta di S_C , ma solo dal cammino C . Questa proprietà dipende solo dal fatto che \vec{j} è solenoidale e la useremo più avanti per altri campi solenoidali, come il campo magnetico. Per dimostrarla, consideriamo due superfici generiche S_C , S'_C , che poggiano sullo stesso cammino chiuso C . Osserviamo che le due superfici formano un'unica superficie chiusa S , Figura 7.46. Il flusso di \vec{j} attraverso S si scrive:

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}'' dS = \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS - \int_{S'_C} \vec{j} \cdot \vec{n}' dS, \quad (7.12.9)$$

ove abbiamo, come al solito, fissato il versore normale \vec{n}'' alla superficie chiusa S in verso uscente. Esso coinciderà quindi con il versore normale fissato su S_C in figura, ma sarà in ogni punto l'opposto del versore normale \vec{n}' fissato su S'_C , da cui il segno meno a secondo membro della (7.12.9). Usiamo la proprietà che la corrente è stazionaria per cui \vec{j} è solenoidale, ovvero $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ su tutto lo spazio. Questo implica, per il teorema della divergenza:

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n}'' dS = \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS - \int_{S'_C} \vec{j} \cdot \vec{n}' dS \Rightarrow \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int_{S'_C} \vec{j} \cdot \vec{n}' dS, \quad (7.12.10)$$

ovvero i flussi attraverso S_C ed S'_C coincidono. Dal punto di vista geometrico, se la differenza $N_{out} - N_{in}$ attraverso S_C fosse diversa da quella attraverso S'_C , da qualche parte tra le due superfici, le linee di campo di \vec{j} si dovrebbero interrompere o originarsi, in contraddizione con la proprietà delle linee di campo di \vec{j} di essere continue. Concludiamo quindi che il flusso di

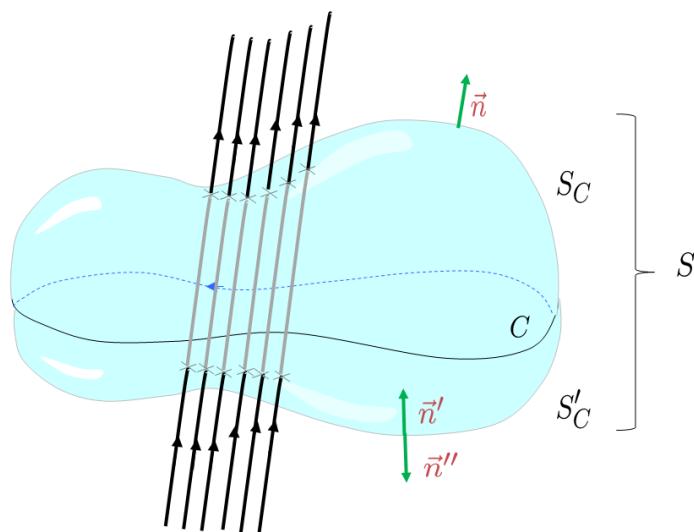


Figura 7.46: Due superfici S_C ed S'_C che poggiano su un contorno chiuso C . Su S_C la normale in ogni punto è \vec{n} , mentre quella su S'_C è indicata con \vec{n}' . Entrambe hanno verso legato a quello di C dalla ragola della mano destra. Le due superfici formano un'unica superficie chiusa S su cui il versore normale in ogni punto è indicato con \vec{n}'' . Esso coincide con \vec{n} su S_C e con $-\vec{n}'$ su S'_C . Essendo le linee di campo di \vec{j} continue, la differenza $N_{out} - N_{in}$ è la stessa per le due superfici.

\vec{j} attraverso una superficie S_C che poggia sul contorno chiuso C , non dipende dalla superficie ma solo da C . Usiamo questo flusso per caratterizzare una corrente concatenata con un percorso chiuso C : una corrente elettrica stazionaria, definita da un campo \vec{j} , è concatenata con un cammino chiuso C se e solo se il flusso di \vec{j} attraverso una qualsiasi superficie S_C che poggia su C è diverso da zero:

$$\text{corrente stazionaria } \vec{j} \text{ concatenata con } C \Leftrightarrow \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS \neq 0. \quad (7.12.11)$$

Se infatti la corrente non è concatenata con C , sappiamo che esiste una superficie S_C che poggia su C e che non è attraversata dalla corrente. In ogni punto di questa superficie $\vec{j} = \vec{0}$ e quindi anche il corrispondente flusso sarà nullo: $\int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0$. Per la proprietà dimostrata sopra, il valore del flusso non dipende dalla scelta di S_C e quindi concludiamo che se la corrente stazionaria non è concatenata con C , il flusso di \vec{j} attraverso una qualsiasi superficie S_C che poggia su C è nullo.

Consideriamo l' esempio di corrente non concatenata con un percorso chiuso nella Figura 7.47 di destra. Possiamo convincerci che il flusso della corrente attraverso una qualsiasi superficie che poggia su C è nullo. Prendiamo una di queste superfici S_C . Benché essa intersechi il filo percorso da corrente due volte, in una intersezione il flusso è uscente mentre nell'altra esso è entrante. Essendo le linee di \vec{j} continue, nei punti di intersezione tante sono le linee di campo entranti quante quelle uscenti e quindi i corrispondenti contributi al flusso si elidono: $N_{in} = N_{out}$ (in figura $N_{in} = 6 = N_{out}$). Possiamo addirittura, in questo caso, trovare una superficie S'_C che non interseca proprio i conduttori, ovvero sulla quale $\vec{j} = 0$ e quindi $N_{in} = N_{out} = 0$, come in Figura 7.45. Ritroviamo quindi in questo esempio la proprietà generale dimostrata sopra: la differenza $N_{out} - N_{in}$, ovvero il flusso di \vec{j} attraverso una superficie S_C che poggia su C , non dipende dalla superficie scelta.

Se invece la corrente è concatenata con C , come in Figura 7.47, a sinistra, N_{in} ed N_{out} non possono essere uguali (in figura $N_{out} = 6$ e $N_{in} = 3$) ed il flusso è non-nullo. Lo studente può convincersi che, anche in questo caso, la differenza $N_{out} - N_{in} = 3$ non dipende dalla superficie S_C scelta. Per quanto detto sopra, se $\vec{j}(\vec{x})$ descrive un insieme di correnti stazionarie, al flusso di $\vec{j}(\vec{x})$ attraverso una qualsiasi superficie S_C che poggia in C contribuiscono solo le correnti concatenate con C .

Consideriamo una serie di fili conduttori percorsi da correnti stazionarie i_k con densità \vec{j}_k . Definiamo, al solito, un campo $\vec{j}(\vec{x})$ che sia nullo tra un conduttore e l'altro e che all'interno del conduttore k^{imo} sia $\vec{j} = \vec{j}_k$. Prendiamo un contorno chiuso C ed una qualsiasi superficie S_C che poggia su di esso. Fissiamo come sempre il verso della normale \vec{n} ad S_C in modo che sia legata al verso di C dalla regola della mano destra. Supponiamo che il conduttore k^{imo} intersechi S_C nella superficie Σ_k . Poiché i_k è un numero positivo, avremo che

$$i_k = \pm \int_{\Sigma_k} \vec{j}_k \cdot \vec{n} dS,$$

ove si ha il segno positivo se la corrente ha il verso di \vec{n} , ovvero verso legato a quello di C dalla regola della mano destra, ed il segno negativo nel caso contrario. Calcoliamo ora il

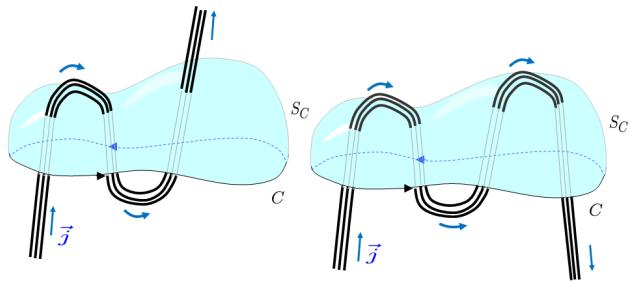


Figura 7.47: Sinistra: linee di campo di \vec{j} in un filo conduttore percorso da corrente, concatenato con un percorso chiuso C . Destra: linee di campo di \vec{j} in un filo conduttore percorso da corrente, non concatenato con un percorso chiuso C . Nel primo caso, attraverso una generica superficie S_C che poggia su C , $N_{out} \neq N_{in}$ ed il flusso di \vec{j} è non nullo; nel secondo $N_{out} = N_{in}$ ed il flusso di \vec{j} attraverso la superficie generica S_C è nullo.

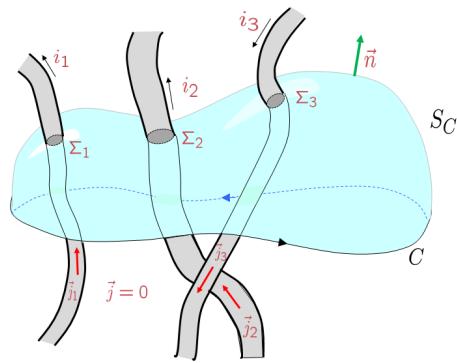


Figura 7.48: Il flusso di \vec{j} attraverso una superficie S_C che poggia su un cammino chiuso C . Esso è la somma dei flussi delle densità di corrente \vec{j}_k interne a ciascun filo, attraverso le corrispondenti superfici di intersezione Σ_k con S_C .

flusso del campo totale \vec{j} attraverso S_C . Esso è la somma dei flussi di ciascun \vec{j}_k attraverso la corrispondente sezione Σ_k . Nell'ipotesi che il percorso C si "avvolga" intorno a ciascuna corrente (o, equivalentemente che ciascuna corrente si "avvolga" intorno a C) una sola volta, troviamo

$$\int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \sum_k \int_{\Sigma_k} \vec{j}_k \cdot \vec{n} dS = \sum_{c.c.} \pm i_k, \quad (7.12.12)$$

ove la somma è estesa alle correnti concatenate con C (c.c.), poiché queste solo contribuiscono al flusso attraverso S_C . Si noti che se una stessa corrente concatenata con C si "avvolge" intorno a tale percorso N_k volte, il corrispondente filo intersecherà S_C in N_k sezioni $\Sigma_{k_1}, \Sigma_{k_2}, \dots$ ed attraverso ciascuna di esse il flusso di \vec{j}_k sarà $\pm N_k i_k$. La formula sopra si generalizza quindi come segue:

$$\int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \sum_{c.c.} \pm N_k i_k, \quad (7.12.13)$$

Dall'ipotesi di stazionarietà delle correnti questo flusso dipende solo da C e non da S_C .

Possiamo ora riscrivere la legge di Ampère (7.12.6) nella forma

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS, \quad (7.12.14)$$

ove, usando la (7.12.13), abbiamo scritto la somma sulle correnti concatenate a secondo membro della (7.12.6), come flusso del campo \vec{j} attraverso una generica S_C . Facciamo osservare che la (7.12.14) è consistente fintanto che le correnti sono stazionarie. Infatti solo in questo caso l'integrale a secondo membro non dipende dalla scelta di S_C ma, come il primo membro, solo dal cammino C .

Usando la legge di Stokes, troviamo che per qualsiasi C ed S_C :

$$\int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS.$$

Essendo C ed S_C generici, possiamo derivare da questa uguaglianza una relazione locale, ovvero valida punto per punto, tra \vec{B} e le sue sorgenti:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}). \quad (7.12.15)$$

Questa è la legge di Ampère in forma locale.

7.12.1 Limite della validità della legge di Ampère alle correnti stazionarie

Il fatto che la legge di Ampère valga solo per correnti stazionarie si può ricavare anche calcolando la divergenza di ambo i membri della (7.12.15) ed usando l'identità (3.4.5):

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \quad (7.12.16)$$

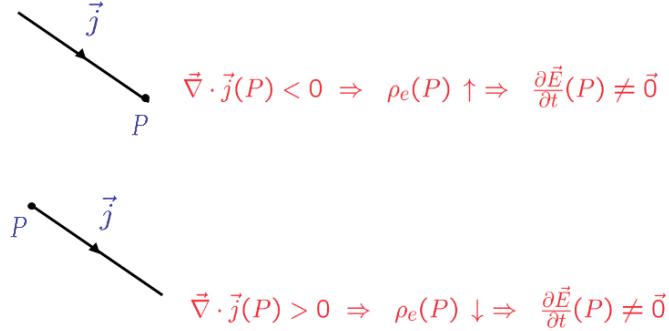


Figura 7.49: Corrente non-stazionaria. Il campo \vec{j} che la descrive ha linee di campo discontinue. Nei punti di discontinuità la densità dei portatori di carica varia nel tempo e, con essa, il campo elettrico da essi generato.

In altre parole l'equazione (7.12.15) implica che in ogni punto dello spazio $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, ovvero che il campo \vec{j} sia solenoidale e quindi le correnti stazionarie.

Discuteremo nel Capitolo 10 la generalizzazione della legge di Ampère a correnti non-stazionarie. Per farlo però non possiamo più limitarci, come abbiamo fatto fino a questo punto del corso, a considerare campi elettrici e magnetici statici, ovvero indipendenti dal tempo: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x})$. In particolare possiamo convincerci che in presenza di correnti non-stazionarie, si genera un campo elettrico variabile nel tempo: $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{x})$. Per comprendere questo punto consideriamo una corrente non-stazionaria. Essa sarà descritta da un campo \vec{j} la cui divergenza non è identicamente nulla. In altre parole esiste almeno un punto P in cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \neq 0$. In questo punto sappiamo che linee di campo di \vec{j} si interrompono se $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(P) < 0$ o si originano se $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(P) > 0$, si veda la Figura 7.49. L'equazione di continuità della carica elettrica (6.1.7), che ne esprime la conservazione, ci dice che in questo punto la densità di carica elettrica ρ_e deve variare nel tempo:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t}(P) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(P). \quad (7.12.17)$$

In particolare se in P linee di campo di \vec{j} si interrompono, ovvero $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(P) < 0$, le cariche positive di cui possiamo idealmente pensare comporsi la corrente, si fermano o rallentano, determinando in questo modo, in virtù della conservazione della carica elettrica, un aumento della loro densità, ovvero di ρ_e : $\frac{\partial \rho_e}{\partial t}(P) > 0$. Se invece linee di campo di \vec{j} si originano in P ,

ovvero $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(P) > 0$, nello stesso punto possiamo pensare che cariche positive si mettano in moto nella direzione della corrente e che quindi, sempre per la conservazione della carica, la loro densità diminuisca nel tempo: $\frac{\partial \rho_e}{\partial t}(P) < 0$. In ogni caso avremmo che il campo elettrico \vec{E} generato dalle cariche di conduzione varierà nel tempo, variando la densità ρ_e delle cariche stesse.

In conclusione se le correnti sono non-stazionarie, da qualche parte nello spazio vi sono cariche che si addensano o si diradano e quindi il campo elettrico da esse generato sarà variabile nel tempo: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$. È proprio questo campo $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{x})$ dipendente dal tempo la chiave per generalizzare la legge di Ampère a correnti non-stazionarie, come fu intuito dal celebre fisico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879). Quest'ultimo infatti estese la validità la legge di Ampère introducendo a secondo membro della stessa, tra le sorgenti del campo magnetico, un nuovo tipo di corrente, detta *corrente di spostamento*., non legata ad un effettivo spostamento di cariche, bensì alla variazione del tempo del campo elettrico. Tratteremo questo punto più estesamente nel Capitolo 10.

Capitolo 8

Proprietà magnetiche della materia

Studiamo in questo capitolo l'effetto di un mezzo omogeneo, isotropo sul campo magnetico generato da un sistema di correnti o magneti.

Iniziamo con il considerare un solenoide infinito con densità di spire n e percorso da corrente i . Supponiamo che nel suo interno vi sia il vuoto, Figura 8.1, sopra. Il campo \vec{B}_0 al suo interno è omogeneo:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n i \vec{u}_x. \quad (8.0.1)$$

Definisco il campo “intensità di campo magnetico”

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = n i \vec{u}_x. \quad (8.0.2)$$

Esso dipende solo dalla geometria delle correnti (in questo caso da n) e dalle correnti (i).

Si definiscono *correnti di conduzione* le correnti all'interno di materiali conduttori dovute al moto d'insieme dei portatori di carica (come le correnti in un circuito o la corrente i nel solenoide considerato).

Consideriamo adesso lo stesso solenoide riempito di un mezzo isotropo ed omogeneo, Figura 8.1, sotto.

Si misura all'interno un campo \vec{B} nella stessa direzione e verso del campo \vec{B}_0 nel vuoto. Si osserva che \vec{B} è proporzionale a \vec{B}_0

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0 = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (8.0.3)$$

ove μ_r è detta *permeabilità magnetica relativa del mezzo* e dipende *solo* dal mezzo.

Se definiamo la permeabilità magnetica assoluta del mezzo

$$\mu = \mu_r \mu_0,$$

possiamo scrivere:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu n i \vec{u}_x. \quad (8.0.4)$$

Una proprietà generale dei mezzi isotropi ed omogenei è che il campo magnetico al loro interno si ottiene, come funzione delle correnti di conduzione che le generano, dall'espressione

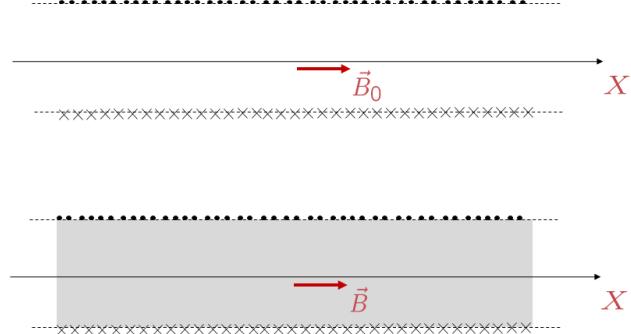


Figura 8.1: Sopra: sezione longitudinale di un solenoide vuoto. Sotto: sezione longitudinale di un solenoide riempito di un mezzo isotropo ed omogeneo.

del campo \vec{B}_0 nel vuoto, ma generato dalle stesse correnti, attraverso la sostituzione $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0$.

In modo simile a quanto fatto per il campo elettrico \vec{E}_r , è utile esprimere \vec{B} in un mezzo omogeneo ed isotropo come somma di due contributi; uno, \vec{B}_0 , che dipende solo dalle correnti di conduzione ed un altro, \vec{B}' che, invece, dipende solo dal mezzo:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (8.0.5)$$

Definendo il vettore magnetizzazione

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}'}{\mu_0}, \quad (8.0.6)$$

ed usando le (8.0.2), (8.0.5), (8.0.6) si può scrivere

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (8.0.7)$$

ove \vec{H} dipende solo da correnti di conduzione ed \vec{M} dipende solo dalla risposta del mezzo al campo esterno.

Usando la (8.0.3) si può inoltre esprimere \vec{M} nel seguente modo

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}. \quad (8.0.8)$$

La quantità $\chi_m = \mu_r - 1$ è detta *suscettività magnetica del mezzo*.

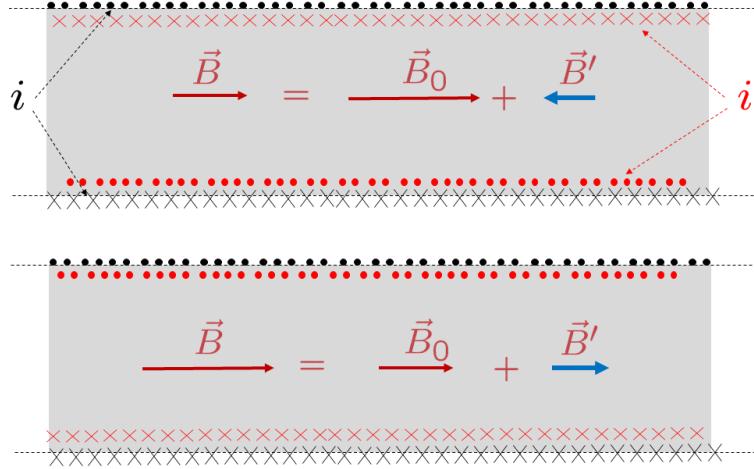


Figura 8.2: Correnti amperiane (in rosso) affacciate, sulla superficie del mezzo, alle correnti di conduzione (in nero). Sopra: sostanza diamagnetica. Sotto: sostanza paramagnetica.

La componente $\vec{B}' = \mu_0 \vec{M}$, la quale dipende solo dal mezzo e dalla sua reazione al campo esterno, nel caso del solenoide si scrive (usando la (8.0.8)):

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \chi_m n i \vec{u}_x.$$

\vec{B}' è anch'esso uniforme. Lo si può pensare generato da un solenoide sovrapposto al primo con densità di spire n' e corrente i'

$$\vec{B}' = \mu_0 n' i' \vec{u}_x = \mu_0 \chi_m n i \vec{u}_x, \quad (8.0.9)$$

con

$$n' i' = \chi_m n i. \quad (8.0.10)$$

Questo sistema di correnti, assimilabile ad un nuovo solenoide ($n' i'$) sovrapposto al primo ($n i$), non è fittizio. Si tratta di correnti che si manifestano sulla superficie del mezzo per effetto del campo magnetico esterno. Esse si distinguono dalle correnti di conduzione in quanto non sono dovute a moti di insieme di cariche attraverso il mezzo, bensì sono l'effetto di correnti microscopiche che si manifestano a livello atomico-molecolare. Queste correnti sono dette amperiane, Figura 8.2. Le proprietà magnetiche dei materiali si distinguono a seconda dei valori di μ_r , $\chi_m = \mu_r - 1$.

Sostanze diamagnetiche: $\chi_m < 0$, $\mu_r < 1$. Tipicamente $\chi_m \simeq -(10^{-4} \div 10^{-5})$. Esempi: rame, argento, acqua, etc. Il campo \vec{B}' ha direzione opposta al campo magnetico nel

vuoto $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$, per cui $|\vec{B}| < |\vec{B}_0|$, Figura 8.2, sopra. Si può pensare questo come dovuto al fatto che le correnti amperiane sono dirette in verso opposto a quelle di conduzione $n'i' = \chi_m ni$. χ_m dipende solo dalla natura del mezzo e non dalla temperatura T .

Come vedremo, il fenomeno fisico (diamagnetismo) che determina le proprietà magnetiche dei materiali diamagnetici ha luogo in tutte le sostanze. Nei materiali paramagnetici e ferromagnetici tale meccanismo è secondario e quindi non influisce in modo apprezzabile sulle proprietà magnetiche di queste sostanze.

Sostanze paramagnetiche: $\chi_m > 0$, $\mu_r > 1$. Tipicamente $\chi_m \simeq (10^{-4} \div 10^{-5})$. Esempi: Al, Ca, Mn etc. Le correnti amperiane $n'i' = \chi_m ni$ sono equivevere alle correnti di conduzione per cui il campo magnetico da esse generato $\vec{B}'_0 = \mu_0 \chi_m \vec{H} = \chi_m \vec{B}_0$ ha lo stesso verso di \vec{B}_0 . Si osserva quindi da parte delle correnti amperiane un effetto sinergico: $|\vec{B}| > |\vec{B}_0|$. χ_m non dipende solo dal mezzo ma anche dalla temperatura T secondo la legge

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T}, \quad (8.0.11)$$

essendo ρ la densità e C la costante di Curie.

Sostanze ferromagnetiche: $\chi_m \simeq \mu_r \simeq 10^3 \div 10^4$. In questo caso entrambi $|\vec{B}'_0|$ e $|\vec{B}|$ sono molto più grandi di $|\vec{B}_0|$. Il campo magnetico è molto amplificato per effetto delle correnti amperiane. Entrambe μ_r e χ_m dipendono non solo dal materiale e dalla temperatura, ma anche dalle correnti di conduzione, che possiamo rappresentare attraverso \vec{H} . La loro dipendenza da H non è esprimibile in termini di una funzione ad un solo valore. Ad un dato valore di H corrispondono diversi valori di μ_r e χ_m , a seconda del modo con cui ci si è arrivati a quel valore di H . Questa particolare dipendenza prende il nome di *isteresi*. Esempi di materiali ferromagnetici sono il ferro, la magnetite, il cobalto etc. Prendiamo il caso di un solenoide (ni) riempito di materiale ferromagnetico

$$\vec{H} = ni \vec{u}_x.$$

Il campo \vec{B} all'interno lo si può esprimere usando la (8.0.7)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

essendo $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, $\vec{M} = M \vec{u}_x$, $\vec{H} = H \vec{u}_x$. Supponiamo che il mezzo ferromagnetico non abbia mai subito magnetizzazione ed aumentiamo H a partire da $H = 0$ accendendo la corrente i , Figura 8.3. Si osserva che M cresce lungo la curva (a) fino ad un valore costante $M = M_s$ per $H > H_m$. Per questi valori di H la sostanza ha raggiunto la *saturazione* e \vec{B} varia linearmente con H

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_s).$$

Se si riduce H da H_m , M varia seguendo una curva (b) al di sopra di (a). Per $H = 0$ (ovvero $i = 0$) si osserva una magnetizzazione residua del mezzo $M = M_r > 0$ e quindi un campo magnetico residuo

$$\vec{B}_r = \mu_0 \vec{M}_r.$$

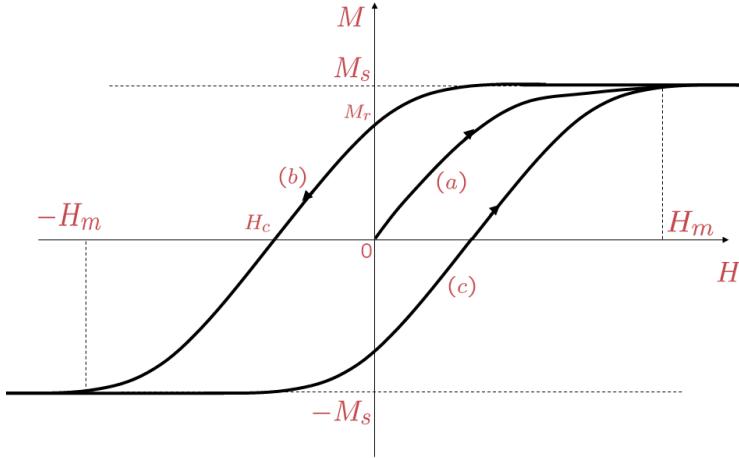


Figura 8.3: Ciclo di isteresi.

Invertendo il verso della corrente e quindi andando a valori negativi di H si osserva che per $H = H_c < 0$ (*campo coercitivo*) $\vec{M} = 0$ e quindi $\vec{B}_c = \mu_0 \vec{H}_c$. Per $H < -H_m$ si raggiunge nuovamente la saturazione con $M = -M_s$. Riportando H da $-H_m$ ad H_m , M segue la curva (c) posta sotto (a) e si riprende il ciclo definito dalle curve (c) e (b), detto *ciclo di isteresi*. Se lungo la curva (a) avessimo iniziato a diminuire H a partire da un valore $H_0 < H_m$, il sistema avrebbe seguito un ciclo di isteresi più piccolo, Figura 8.4.

In questo modo, a seconda del modo in cui portiamo H ad un valore H_0 , possiamo ottenere per M , ad $H = H_0$, un qualsiasi valore compreso tra le curve (b) e (c). Dalla relazione

$$M = \chi_m \vec{H},$$

essendo le curve descritte da M al variare di H non delle rette, concludiamo che χ_m dipende da H . Inoltre abbiamo visto che questa dipendenza non è univoca, ma dipende dalla *storia* del mezzo, ovvero da *come* si è giunti al valore di H .

Ferromagneti duri: il ciclo di isteresi è largo, Figura 8.5 a sinistra. Per questo $M_r \approx M_s$ ed il campo residuo è molto intenso. Questi materiali sono impiegati per costruire magneti permanenti.

Ferromagneti dolci: Il ciclo di isteresi è molto stretto.

$$M_r \simeq 0 \Rightarrow B_r \simeq 0.$$

È possibile portare il campo magnetico a zero spegnendo la corrente.

Se si aumenta la temperatura, il ciclo di isteresi di ogni ferromagnete tende ad allungarsi e restringersi, fino ad approssimarsi ad una retta per $T > T_c$ (T_c è detta temperatura di Curie).

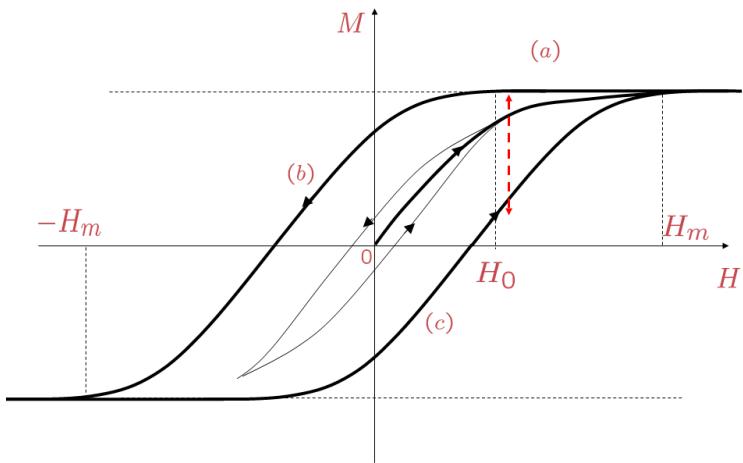


Figura 8.4: Sottponendo il sistema a trasformazioni diverse, per uno stesso valore H_0 di H possiamo ottenere tutti valori della magnetizzazione M nell'intervallo (in rosso) compreso tra le curve (b) e (c). Questo mostra che la magnetizzazione non è, per un ferromagnete, esprimibile attraverso una funzione di H .

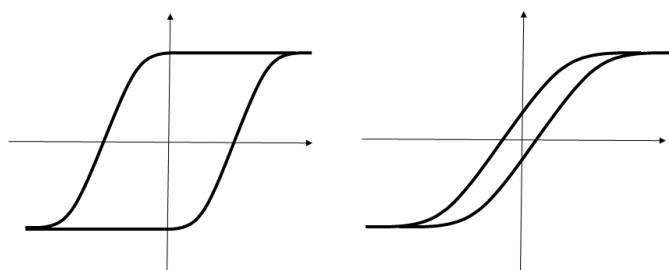


Figura 8.5: Cicli di isteresi per ferromagneti duri (sinistra) e dolci (destra).

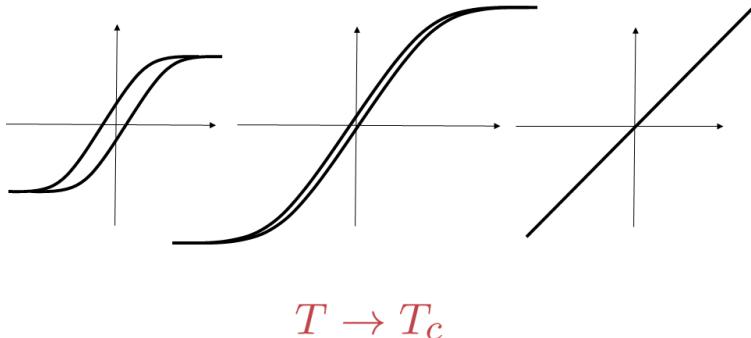


Figura 8.6: Limite $T \rightarrow T_c$ in cui un materiale ferromagnetico diventa paramagnetico.

Per $T > T_c$ la relazione tra M ed H diventa quindi lineare, ovvero, essendo $M = \chi_m H$, $\chi_m > 0$ diventa indipendente da H ed il materiale da *ferromagnetico diventa paramagnetico*. Il parametro χ_m dipenderà, per $T > T_c$, da T secondo la legge di Curie

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_c}.$$

8.1 Natura microscopica delle correnti amperiane

In ogni materiale sono presenti cariche in moto, e quindi correnti, a livello atomico o molecolare. Queste sono costituite dagli elettroni che orbitano intorno ai rispettivi nuclei. Tale moto è detto orbitale e può conferire all'atomo un momento magnetico non nullo \vec{m}_L . Per comprendere l'origine di \vec{m}_L , consideriamo, per semplicità, un atomo di idrogeno. In prima approssimazione, possiamo rappresentare questo atomo come un elettrone e^- che descrive un'orbita circolare di raggio $R_0 \simeq 0.53 \times 10^{-10} m$ intorno ad un protone p^+ . L'orbita percorsa dall'elettrone può essere assimilata ad una spira percorsa da una corrente in verso opposto a quello dell'elettrone ed intensità pari all'unica carica che circola nel circuito (il valore assoluto della carica dell'elettrone) diviso per il tempo T impiegato dall'elettrone per descrivere l'orbita (Figura 8.7, sopra):

$$i = \frac{e}{T}. \quad (8.1.1)$$

All'orbita dell'elettrone può essere quindi associato un momento di dipolo magnetico

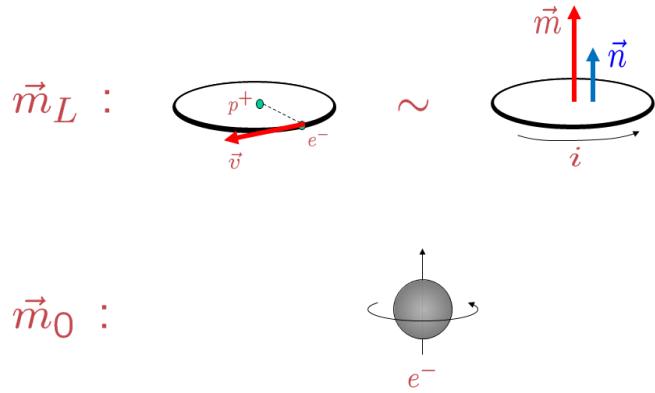


Figura 8.7: Sopra: momento di dipolo magnetico \vec{m}_L associato al moto orbitale dell'elettrone. Sotto: momento di dipolo magnetico \vec{m}_0 associato allo spin dell'elettrone.

$$\vec{m}_L = i \Sigma \vec{n}, \quad (8.1.2)$$

ove $\Sigma = \pi R_0^2$.

Se l'atomo contiene più elettroni, il moto orbitale di questi contribuirà ad un momento magnetico orbitale complessivo dell'atomo \vec{m}_L .

L'elettrone possiede una proprietà detta *momento angolare intrinseco o spin*. Essa, in modo alquanto approssimativo, la si può pensare dovuta ad un moto di rotazione dell'elettrone, rappresentato come una piccola sfera, rispetto al proprio asse.

Questa proprietà conferisce all'elettrone un momento magnetico intrinseco e può contribuire al momento magnetico complessivo dell'atomo. Ogni atomo possiede quindi un momento magnetico totale \vec{m} , somma di \vec{m}_L e del contributo \vec{m}_0 dovuto agli spin degli elettroni:

$$\vec{m} = \vec{m}_L + \vec{m}_0. \quad (8.1.3)$$

Per le sostanze *diamagnetiche* gli spin degli elettroni in un atomo si compensano tra di loro dando un contributo complessivo nullo ad \vec{m} e quindi $\vec{m} = \vec{m}_L$.

Per le sostanze *paramagnetiche* invece $\vec{m}_0 \neq 0$. Se $\vec{B} = 0$, essendo il moto orbitale degli elettroni dovuto *solo* alle forze coulombiane, non esiste una direzione privilegiata nello spazio. Se mediamo su un volumetto dV che contiene un numero sufficientemente grande di atomi si ha $\langle \vec{m}_L \rangle = 0$. Per le sostanze paramagnetiche in cui $\vec{m}_0 \neq 0$, i vettori \vec{m}_0 in dV sono

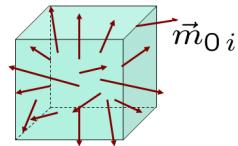

 dV

Figura 8.8: Momenti di dipolo \vec{m}_{0i} associati agli atomi/molecole di un materiale paramagnetico presenti in un volume infinitesimo dV .

distribuiti con eguale probabilità in tutte le direzioni per cui

$$\langle \vec{m}_0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{m}_{0i} = 0,$$

N essendo il numero di atomi in dV ($N \gg 1$), Figura 8.8.

Se $\vec{B} \neq 0$, esso agisce sugli elettroni in movimento attraverso la forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = -e \vec{v} \times \vec{B}$$

ed induce una componente nel moto orbitale degli elettroni uguale per tutti gli elettroni dando quindi un contributo non nullo alla media del momento magnetico orbitale di ciascun atomo:

$$\langle \vec{m}_L \rangle \neq 0.$$

Si dimostra che $\langle \vec{m}_L \rangle$ è proporzionale a \vec{B} ma sempre diretto in verso opposto ad esso

$$\langle \vec{m}_L \rangle = -\alpha_L \vec{B}, \quad (8.1.4)$$

ove α_L è una costante.

8.2 Dimostrazione della (10.1.15) [parte non richiesta]

Deriviamo, con un modello semplice, la relazione $\langle \vec{m}_L \rangle = -\alpha_L \vec{B}$.

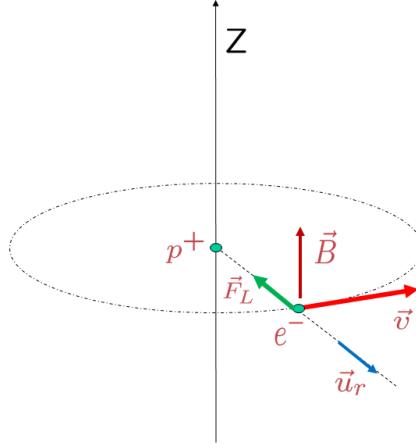


Figura 8.9: Moto di un elettrone in un atomo di idrogeno, approssimato con un moto circolare di raggio R_0 . L'elettrone è soggetto all'azione di un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano del moto.

Consideriamo sempre l'atomo di idrogeno e l'orbita dell'elettrone sul piano perpendicolare a \vec{B} , figura 8.9. Il moto circolare uniforme dell'elettrone è caratterizzato dalla velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_z$. Il moto orbitale è descritto dall'equazione di Newton dall'equazione:

$$m_e \vec{a} = \vec{F}_L + \vec{F}_{coulomb} .$$

Entrambe le forze sono dirette in direzione radiale, per cui l'accelerazione ha solo la componente centripeta: $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} - \omega^2 R_0 \vec{u}_r$. L'equazione del moto si può quindi scrivere nella sua unica componente, come segue:

$$m\omega^2 R_0 = evB + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(R_0)^2} = eR_0\omega B + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(R_0)^2}, \quad (8.2.1)$$

ove abbiamo usato:

$$v = \omega R_0 .$$

Dalla (8.2.1) ricaviamo ω e quindi il periodo dell'orbita $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Noto T , si determina l'intensità di corrente :

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi} \omega ,$$

che attraversa la spira equivalente, secondo la (9.3.15). Da i si ricava infine il modulo $m_L = \pi R_0^2 i$ di \vec{m}_L .

A noi, però, interessa capire perché il valore medio $\langle \vec{m}_L \rangle$ è diretto in senso opposto a \vec{B} . Sappiamo che a $\langle \vec{m}_L \rangle$ contribuisce prevalentemente la componente del moto dovuto solo

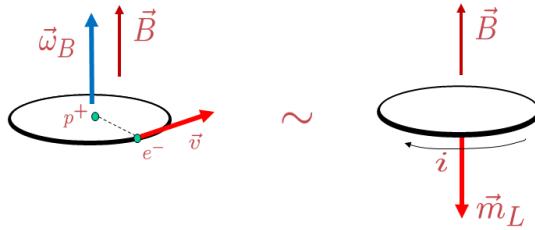


Figura 8.10: La componente $\vec{\omega}_B$ della velocità angolare di un elettrone, indotta da \vec{B} è parallela concorde con \vec{B} . Conseguentemente il momento di dipolo magnetico \vec{m}_L indotto da \vec{B} ha verso opposto a \vec{B} .

a \vec{B} . Consideriamo allora il moto dell'elettrone soggetto solo ad \vec{F}_L ; la (8.2.1) si semplifica:

$$m\vec{a} = \vec{F}_L \Leftrightarrow m\vec{\omega}_B \times \vec{v} = -e\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{\omega}_B = \frac{e}{m}\vec{B}, \quad (8.2.2)$$

ove per noi $\vec{\omega}_B$ è la componente della velocità angolare dovuta solo a \vec{B} . In realtà, analizzando in dettaglio, risulta che il moto coulombiano influisce su $\vec{\omega}_B$ e che la sua formula vada corretta per un fattore 1/2

$$\vec{\omega}_B = \frac{e}{2m}\vec{B}.$$

Ciò che è importante considerare per noi è il verso di $\vec{\omega}_B$: la componente della velocità angolare dell'elettrone, dovuta all'azione di \vec{B} è sempre parallela e concorde a \vec{B} . La corrente lungo la spira equivalente, avrà verso opposto a quello di e^- e quindi il suo contributo al momento magnetico avrà verso opposto a \vec{B} , Figura 8.10. Siccome questo contributo è quello che influenza su $\langle \vec{m}_L \rangle$:

$$\langle \vec{m}_L \rangle = -\alpha_L \vec{B}.$$

8.3 Modello microscopico per le sostanze paramagnetiche

Per le sostanze *diamagnetiche* quindi:

$$\langle \vec{m} \rangle = \langle \vec{m}_L \rangle = -\alpha_L \vec{B}.$$

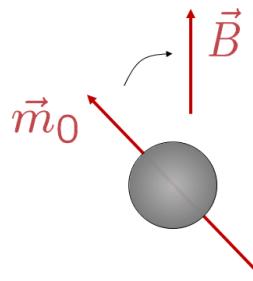


Figura 8.11: Azione di un campo magnetico \vec{B} su un atomo con momento di dipolo magnetico intrinseco \vec{m}_0 .

Per quanto riguarda le sostanze paramagnetiche, ogni atomo ha una componente non nulla \vec{m}_0 del momento magnetico dovuto agli spin degli elettroni. L'effetto di $\vec{B} \neq 0$ è di esercitare una coppia con momento

$$\vec{M} = \vec{m}_0 \times \vec{B},$$

che tende ad orientare i momenti \vec{m}_0 lungo la direzione e verso di \vec{B} . L'effetto degli urti termici, invece, è opposto: essi tendono a disordinare le direzioni di \vec{m}_0 . Il valore medio di $\langle \vec{m}_0 \rangle$ sarà quindi parallelo e concorde con \vec{B} ma tanto più piccolo quanto più alta è la temperatura T :

$$\langle \vec{m}_0 \rangle = \frac{\alpha}{T} \vec{B},$$

ove α è una costante. Si osserva che $|\langle \vec{m}_0 \rangle| \gg |\langle \vec{m}_L \rangle|$ per cui:

$$\langle \vec{m} \rangle = \langle \vec{m}_L \rangle + \langle \vec{m}_0 \rangle \simeq \langle \vec{m}_0 \rangle = \frac{\alpha}{T} \vec{B}.$$

Quindi sebbene il meccanismo alla base delle proprietà magnetiche dei mezzi diamagnetici, ovvero la creazione di un valore non nullo di $\langle \vec{m}_L \rangle$ indotto da un campo magnetico esterno, sia presente in tutte le sostanze, tale effetto è secondario nelle sostanze paramagnetiche (e ferromagnetiche).

La trattazione microscopica delle sostanze *ferromagnetiche* richiede l'impiego della meccanica quantistica. Qualitativamente, se il campo magnetico esterno $\vec{B} = \vec{0}$ il materiale ferromagnetico lo si può pensare diviso in regioni dette *regioni di Weiss*, di dimensioni lineari dell'ordine del millimetro, all'interno delle quali i momenti di dipolo magnetico intrinseci di

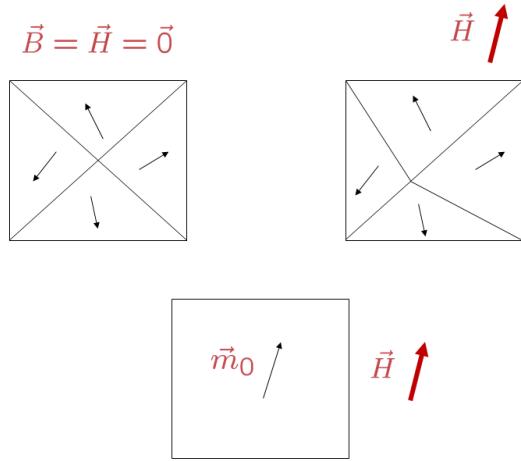


Figura 8.12: Sopra: rappresentazione schematizzata delle regioni di Weiss in assenza e in presenza di un campo magnetico esterno. Sotto: $H > H_m$, saturazione.

ciascun atomo/molecola sono tutti alineati in una stessa direzione, per cui $\langle \vec{m} \rangle = \langle \vec{m}_0 \rangle$. Le regioni di Weiss sono piccole, ma contengono un numero elevato di atomi. Il valore medio $\langle \vec{m} \rangle$ calcolato su un numero sufficientemente elevato di regioni è:

$$\langle \vec{m} \rangle = \vec{0}.$$

Se \vec{B} (o \vec{H}) è diverso da zero, le pareti delle regioni si spostano in modo da rendere più ampie le regioni in cui \vec{m} ha prodotto scalare positivo con \vec{H} e ridurre le regioni in cui $\vec{m} \cdot \vec{H} < 0$, Figura 8.12 in alto.

Oltre un certo valore H_m di H , le pareti scompaiono e si crea un'unica regione con \vec{m} parallelo e concorde ad \vec{H} , Figura 8.12 in basso.

Nel seguito ci limiteremo ad applicare l'analisi microscopica fatta in questo paragrafo per riprodurre le proprietà delle sole sostanze paramagnetiche e diamagnetiche.

8.4 Definizione microscopica del vettore magnetizzazione

Preso un materiale con densità di atomi (o molecole)

$$n_a = \frac{dN}{dV},$$

ove, al solito, dN è il numero di atomi o molecole nel volumetto¹ dV , dal valore medio del momento magnetico di ciascun atomo $\langle \vec{m} \rangle$ è possibile calcolare il momento magnetico complessivo di dV contenente un numero elevato dN di atomi, ma abbastanza piccolo da poter considerare il campo \vec{B} uniforme al suo interno:

$$d\vec{m} = dN \langle \vec{m} \rangle = n_a \langle \vec{m} \rangle dV.$$

Definiamo \vec{M} in un qualsiasi punto interno a dV come

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} = n_a \langle \vec{m} \rangle. \quad (8.4.1)$$

Dalla definizione macroscopica di \vec{M} , data all'inizio:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}' = \frac{\chi_m}{\mu_0 (1 + \chi_m)} \vec{B} \simeq \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}. \quad (8.4.2)$$

ove abbiamo usato il fatto che per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche $|\chi_m| \simeq 10^{-4} \div 10^{-5} \ll 1$, confrontando la (8.4.1) con la (9.3.18) possiamo derivare una descrizione macroscopica di χ_m per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche.

Sostanze diamagnetiche:

$$\vec{M} = n_a \langle \vec{m} \rangle = n_a \langle \vec{m}_L \rangle = -n_a \alpha_L \vec{B} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}, \quad (8.4.3)$$

da cui discende:

$$\chi_m = -\mu_0 n_a \alpha_L < 0.$$

Il modello microscopico discussso sopra riproduce, in modo approssimativo, le proprietà delle sostanze diamagnetiche, in particolare il valore negativo di χ_m e la sua indipendenza dalla temperatura.

Sostanze paramagnetiche:

$$\vec{M} = n_a \langle \vec{m} \rangle \approx n_a \langle \vec{m}_0 \rangle = n_a \frac{\alpha}{T} \vec{B} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}, \quad (8.4.4)$$

$$\chi_m = \mu_0 \frac{n_a \alpha}{T} > 0.$$

Essendo n_a proporzionale alla densità ρ , il nostro modello microscopico (approssimativo) ci ha permesso di riprodurre la legge di Curie (8.0.11) e quindi anche le proprietà magnetiche principali delle sostanze paramagnetiche.

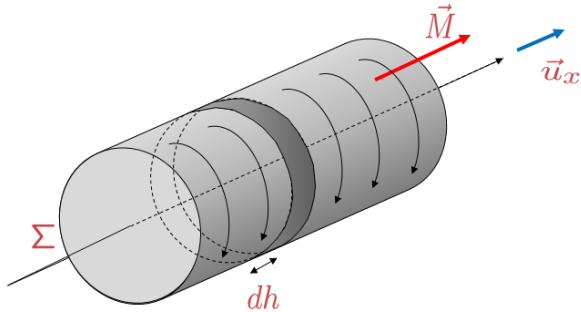


Figura 8.13: Cilindro di materiale isotropo ed omogeneo che riempie il solenoide.

8.5 Legame tra B , H , M e le correnti

Per semplicità consideriamo solo il cilindro di materiale omogeneo ed isotopo che riempie l'interno di un solenoide con densità di spire n e corrente per spira i . Sia Σ l'area della sezione trasversale, h la sua lunghezza, Figura 8.13. Al suo interno vi è un campo \vec{H} uniforme

$$\vec{H} = ni \vec{u}_x ,$$

ed un campo di magnetizzazione \vec{M} , anch'esso uniforme

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m n i \vec{u}_x = M \vec{u}_x .$$

Se il materiale è diamagnetico $\chi_m < 0$ e \vec{M} ha verso opposto a \vec{H} e quindi a \vec{u}_x . Se invece il materiale è paramagnetico, \vec{M} , \vec{H} e \vec{u}_x sono paralleli concordi, come nell'esempio in Figura 8.13. All'esterno del materiale $\vec{M} = \vec{H} = 0$. Dividiamo il cilindro in strati cilindrici paralleli di spessore dh infinitesimo e dividiamo ulteriormente ciascuno strato in cilindri infinitesimi di base $d\Sigma$ ed altezza dh , Figure 8.13 e 8.14.

Essendo \vec{M} uniforme, posso calcolare il momento magnetico di ciascun volumetto

$$d\vec{m} = \vec{M} dV = (M dh) d\Sigma \vec{u}_x = di_A d\Sigma \vec{u}_x ,$$

¹Ricordiamo che dV , benché infinitesimo, è pur sempre *macroscopico*, ovvero sufficientemente grande da contenere un numero molto elevato dN di particelle. Quindi dN è un numero intero molto grande e non va considerata una quantità infinitesima!

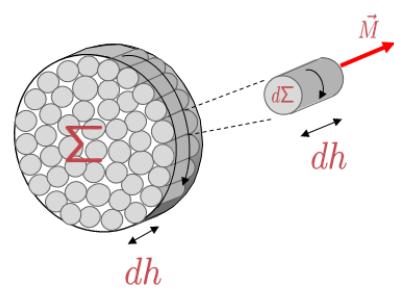


Figura 8.14: Strato cilindrico di sezione dh a sua volta suddiviso in cilindri elementari di superficie $d\Sigma$.

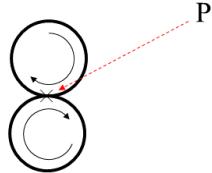


Figura 8.15: Un punto P all'interno del materiale si può pensare attraversato da correnti uguali e opposte sulle superfici di due cilindri elementari che si toccano in P .

ove abbiamo assimilato ciascun cilindro elementare con momento magnetico $d\vec{m}$ ad una spira circolare di area $d\Sigma$ e percorsa da corrente di intensità di_A . \vec{M} ha dimensione Am^{-1} per cui $di_A = M dh$ è una corrente (essendo nelle nostre convenzioni $i > 0$, di_A è positiva se il materiale è paramagnetico, negativa se diamagnetico). Questa corrente, detta corrente amperiana, scorre sulla superficie del volumetto.

Calcoliamo il momento magnetico dell'intero strato, usando il fatto che \vec{M} è uniforme:

$$d\vec{m}_{strato} = \int d\vec{m} = di_A \Sigma \vec{u}_x .$$

L'intero strato è quindi assimilabile ad una spira di superficie Σ , percorsa da corrente $di_A = \vec{M} dh$. Questa corrente è presente solo sulla superficie del cilindro, ma non è presente al suo interno. Infatti ogni punto P interno lo posso pensare in comune a due volumetti adiacenti. P è, quindi, attraversato da correnti uguali in direzione opposta (\vec{M} è uniforme) per cui l'intensità risultante in P è nulla, Figura 8.15.

Le correnti amperiane si manifestano sulla superficie del cilindro con una intensità di corrente per unità di lunghezza

$$\frac{di_A}{dh} = M . \quad (8.5.1)$$

Se assimiliamo questo sistema ad un solenoide equivalente con densità di spire n' e corrente per spira i' , l'intensità di corrente per unità di lunghezza ha la forma:

$$n'i' = \frac{di_A}{dh} = M = \chi_m H = \chi_m ni .$$

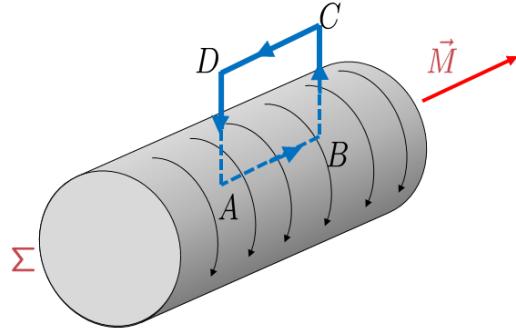


Figura 8.16: Cammino chiuso rettangolare con due lati paralleli all'asse del solenoide, uno esterno al materiale ed uno interno.

Abbiamo così ritrovato l'equazione (8.0.10).

Consideriamo ora il cammino rettangolare $ABCD$ in Figura 8.16. Siano $\vec{AB} = -\vec{CD} = dh \vec{u}_x$ infinitesimi. Sia $\vec{M}_{AB}, \vec{M}_{CD}, \vec{M}_{AD}, \vec{M}_{BC}$ il campo \vec{M} , lungo i quattro lati: $\vec{M}_{CD} = \vec{0}$, $\vec{M}_{BC}, \vec{M}_{DA}$ sono diversi da zero solo nella parte interna dei rispettivi lati, ove sono perpendicolari ad essi. Alla circuitazione di \vec{M} lungo $ABCD$ contribuisce quindi solo la parte lungo \vec{AB} :

$$\int_{ABCD} \vec{M} \cdot d\ell = \vec{M} \cdot \vec{AB} = M dh = di_A .$$

di_A rappresenta la *corrente amperiana concatenata* con il cammino. In generale si dimostra che, preso un qualsiasi cammino chiuso C in un mezzo

$$\oint_C \vec{M} \cdot d\ell = \sum_{\text{c.c. con } C} i_A , \quad (8.5.2)$$

ove “c.c. con C ” vuol dire “concatenate con C ”. Questa proprietà è analoga alla legge di Ampère per \vec{B} , ma dipende *solo* dalle correnti amperiane.

Possiamo descrivere le correnti amperiane in termini di una densità di corrente \vec{j}_A e, ricordando la proprietà generale (7.12.13), esprimere le correnti amperiane concatenate nel

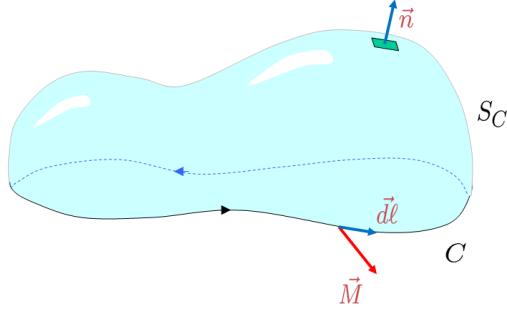


Figura 8.17: Superficie S_C che poggia sul cammino chiuso orientato C .

seguente modo

$$\sum_{c.c. \text{ con } C} i_A = \int_{S_C} \vec{j}_A \cdot \vec{n} dS, \quad (8.5.3)$$

ove, al solito, il verso di \vec{n} in ogni punto di S_C è legato al verso su C dalla regola della mano destra, Figura 8.17.

La (8.5.2) si riscrive, quindi, usando il teorema di Stokes:

$$\int_{S_C} (\vec{\nabla} \cdot \vec{M}) \cdot \vec{n} dS = \int_{S_C} \vec{j}_A \cdot \vec{n} dS.$$

Per l'arbitrarietà di C ed S_C possiamo derivare da questa relazione la relazione *locale*

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_A. \quad (8.5.4)$$

Se invece applico ad un generico cammino C la legge di Ampère per \vec{B} , la sua circuitazione dovrà dipendere da tutte le correnti in gioco, concatenate con C :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{c.c. \text{ con } C} (i_c + i_A), \quad (8.5.5)$$

ove i_c sono le correnti di conduzione (nel sistema che stiamo considerando esse sono quelle che circolano nel solenoide n, i). Scrivendo la corrente amperiana concatenata al cammino C secondo la (8.5.2), troviamo

$$\sum_{c.c. \text{ con } C} i_A = di_A = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{\ell}.$$

Sostituendo nella (8.5.5) e portando la circuitazione di \vec{M} al primo membro, otteniamo la seguente relazione

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell - \mu_0 \oint_C \vec{M} \cdot d\ell = \mu_0 \sum_{c.c. \text{ con } C} i_c,$$

da cui segue

$$\oint_C \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) \cdot d\ell = \mu_0 \sum_{c.c. \text{ con } C} i_c.$$

Ricordando che $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$, la relazione appena trovata ci dice che, lungo un cammino chiuso qualsiasi C :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\ell = \sum_{c.c. \text{ con } C} i_c. \quad (8.5.6)$$

Seguendo lo stesso ragionamento fatto per \vec{M} possiamo trasformare la (8.5.6) in una relazione *locale*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_c,$$

essendo \vec{j}_c la densità di corrente di conduzione. Il campo \vec{H} quindi non dipende dal mezzo e le sue sorgenti sono le *sole correnti* di conduzione.

Ricapitoliamo le relazioni trovate tra \vec{M} , \vec{B} ed \vec{H} e le loro sorgenti.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \sum_{c.c. \text{ con } C} (i_c + i_A) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_A)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\ell = \sum_{c.c. \text{ con } C} i_c \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_c$$

$$\oint_C \vec{M} \cdot d\ell = \sum_{c.c. \text{ con } C} i_c \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}_A$$

Capitolo 9

Induzione elettromagnetica

Finora abbiamo considerato unicamente campi elettrici $\vec{E}(\vec{x})$ e magnetici $\vec{B}(\vec{x})$ indipendenti dal tempo (campo elettrostatico e magnetostatico). Le equazioni che abbiamo derivato per questi campi, nel vuoto ed in presenza sia di cariche elettriche con densità $\rho(\vec{x})$ che di correnti con densità $\vec{j}(\vec{x})$, sono riassunte in Figura 9.1. In un mezzo isotropo e omogeneo le equazioni hanno la stessa forma con la sostituzione:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &\rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \\ \mu_0 &\rightarrow \mu = \mu_0 \mu_r.\end{aligned}\tag{9.0.1}$$

Osserviamo dalle equazioni riassunte in Figura 9.1, che i campi statici \vec{E} e \vec{B} non sono accoppiati, ovvero le equazioni coinvolgono i due campi separatamente: l'andamento di \vec{E} non influenza \vec{B} e viceversa. Essi hanno in comune solo le sorgenti le quali in un caso sono cariche fisse, nell'altro cariche in movimento.

Per descrivere l'intero processo di interazione, le equazioni sopra scritte, che determinano i due campi in funzione delle loro sorgenti, vanno integrate con l'equazione che esprime l'azione di entrambi \vec{B} e \vec{E} su una carica q in moto con velocità \vec{v} :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Considerando fenomeni in cui i due campi variano col tempo (ovvero $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B}(\vec{x}, t)$), vedremo che le loro equazioni non saranno più disaccoppiate, cioè non si possono più studiare separatamente.

Il primo fenomeno studiato in cui questo risulta evidente è *l'induzione elettromagnetica* scoperta nel 1832 indipendentemente da Faraday (Inghilterra) ed Henry (USA).

Si consideri una spira C_1 nella quale non è presente alcun generatore di tensione, ma nella quale è inserito un galvanometro, che è uno strumento per misurare l'intensità di corrente. Se si avvicina l'estremo di un magnete a C_1 , si veda Figura 9.2, il galvanometro (rappresentato da un cerchio con una lancetta a forma di freccia) misura una corrente. Quando il magnete si ferma, la corrente cessa, per ricomparire in verso opposto quando il magnete viene allontanato.

Campi elettrici e magnetici statici

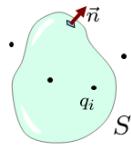
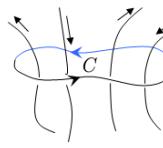
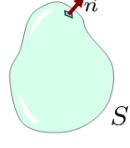
	$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{int}} q_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$	Legge di Gauss
	$\oint_C \vec{E} \cdot d\ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	Campo conservativo
	$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \sum_{\text{c.c.}} \pm i_k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	Legge di Ampère
	$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Campo solenoidale

Figura 9.1: Riassunto delle proprietà dei campi elettrici e magnetici statici nel vuoto. A sinistra in forma integrale, a destra in forma locale. In un mezzo isotropo ed omogeneo le equazioni per i due campi si ottengono da quelle nel vuoto con la sostituzione: $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_0 \mu_r$.

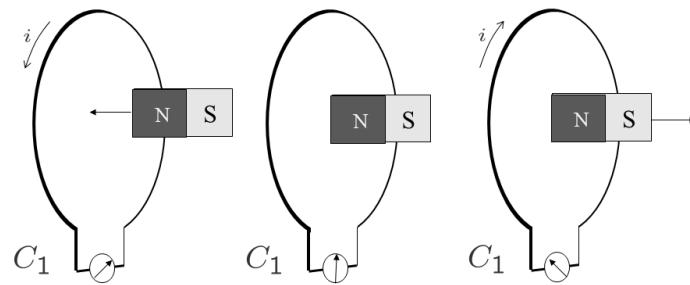


Figura 9.2: Creazione di una corrente indotta in un circuito rispetto al quale viene fatto muovere un magnete.

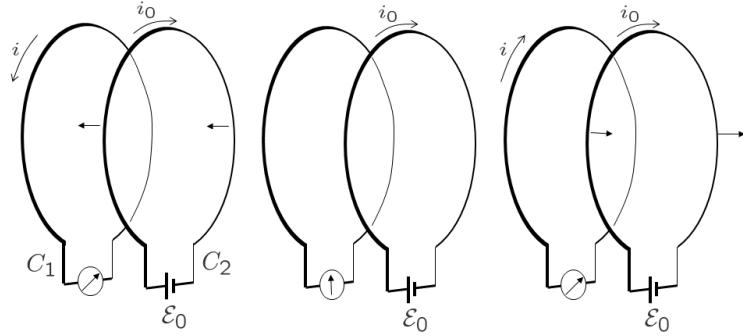


Figura 9.3: Creazione di una corrente indotta in un circuito rispetto al quale viene fatto muovere un altro circuito percorso da corrente i_0 .

Per mostrare che il fenomeno dipende esclusivamente dalla variazione del campo magnetico \vec{B} attraverso C_1 , si può ripetere l'esperimento sostituendo il magnete con un'altra sorgente di \vec{B} , cioè un'altra spira C_2 percorsa da corrente i_0 , dovuta ad un generatore di f.e.m. \mathcal{E}_0 , parallela alla prima, si veda Figura 9.3.

Va osservato che lo stesso fenomeno descritto nelle Figure 9.2 e 9.3 si verificherebbe se a muoversi, invece delle sorgenti del campo \vec{B} , fosse la spira C_1 , ovvero esso dipende dal moto relativo di C_1 rispetto a \vec{B} . Un'analisi più approfondita mostra che il fenomeno dipende solo dalla variazione del campo magnetico \vec{B} generato dalla seconda spira, attraverso la prima. Tale variazione si produrrebbe semplicemente tenendo fisse le due spire ma considerando la seconda C_2 , che contiene il generatore di f.e.m. \mathcal{E}_0 , inizialmente aperta in corrispondenza di un interruttore I , e chiudendo in un certo istante $t = 0$ il circuito per mezzo di tale interruttore, si veda la Figura 9.4. A partire dall'istante $t = 0$, circola in nella spira C_2 una corrente di intensità i_0 che, a sua volta, genera un campo magnetico \vec{B} ovunque nello spazio e, in particolare, attraverso la prima spira C_1 . Quest'ultima si trova quindi immersa in un campo magnetico che prima non c'era e si osserva in essa, in un breve intervallo di tempo successivo all'istante $t = 0$, una corrente i .

Fu Faraday a mettere in relazione la corrente i prodotta nella prima spira con la *variazione nel tempo del flusso attraverso essa del campo \vec{B} generato dalla seconda spira*. Definiremo a breve in modo preciso cosa si intende per flusso di un campo magnetico attraverso una spira.

Il fenomeno per cui si produce una corrente all'interno di una spira attraverso cui varia nel tempo il flusso di un campo magnetico \vec{B} è detto *induzione elettromagnetica* e la corrente i *corrente indotta*.

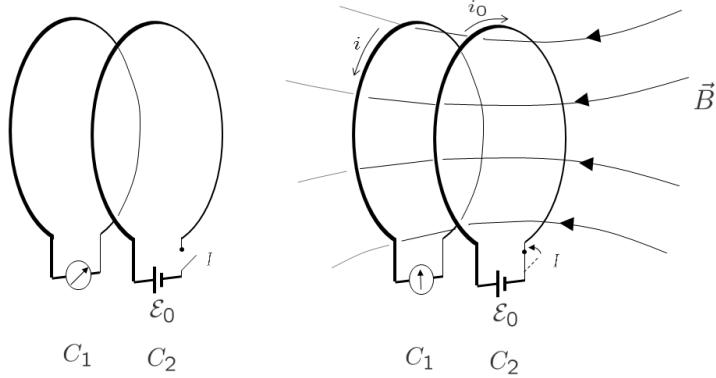


Figura 9.4: Creazione di una corrente indotta in un circuito rispetto al quale viene fatto variare il campo magnetico \vec{B} generato da un secondo circuito C_2 .

Sappiamo che la presenza di una corrente i in C_1 richiede l'esistenza di una f.e.m. \mathcal{E}_i all'interno di C_1 , dovuta ad un campo \vec{E} non-conservativo, detto *campo elettrico indotto*

$$\mathcal{E}_i = \oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

\mathcal{E}_i è detta f.e.m. indotta. Se R è la resistenza totale di C_1 , vale la legge di Ohm generalizzata

$$\mathcal{E}_i = R i .$$

Come abbiamo accennato sopra, Faraday legò \mathcal{E}_i alla variazione del flusso di \vec{B} *concatenato* con C_1 .

Fissiamo sia un verso di percorrenza di C_1 (non dipendente dal verso di i al suo interno), sia il verso della normale ad una superficie S_{C_1} che poggia su C_1 , in modo che i due siano legati dalla regola della mano destra, si veda Figura 9.5. Il fenomeno di induzione elettromagnetica trova la sua descrizione definitiva nella legge di Faraday-Neumann-Lenz che si esprime come segue:

$$\mathcal{E}_i = \oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \Phi_{S_{C_1}}(\vec{B}), \quad (9.0.2)$$

ove

$$\Phi_{S_{C_1}}(\vec{B}) = \int_{S_{C_1}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS ,$$

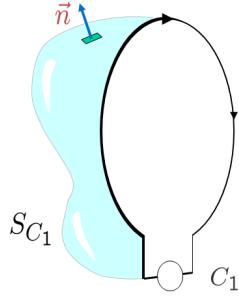


Figura 9.5: Percorso chiuso orientato C_1 e superficie orientata S_{C_1} che poggia su esso.

è il flusso di \vec{B} attraverso la superficie S_{C_1} . La consistenza dell'equazione (9.0.2) richiede che questo flusso non dipenda dalla scelta di S_{C_1} , poiché il primo membro della (9.0.2) non ne dipende.

Questo è garantito dalla proprietà del campo \vec{B} di essere solenoidale, ed il flusso $\Phi_{S_{C_1}}(\vec{B})$, che non dipende da S_{C_1} ma solo da C_1 , è detto *flusso di \vec{B} concatenato con il contorno C_1* e si indica con $\Phi_{C_1}(\vec{B})$.

La dimostrazione rigorosa che $\Phi_{S_{C_1}}(\vec{B})$ non dipenda dalla scelta di S_{C_1} è del tutto analoga alla dimostrazione fatta nel paragrafo 7.12 del capitolo 7, quando abbiamo dimostrato che il flusso di \vec{j} , per una corrente stazionaria, attraverso una superficie che poggia su un contorno chiuso, non dipende dalla scelta di tale superficie. Tale dimostrazione infatti di basava sulla proprietà del campo \vec{j} che descrive una corrente stazionaria di essere solenoidale.

Intuitivamente possiamo convincerci che $\Phi_{S_{C_1}}(\vec{B})$ non dipenda dalla scelta di S_{C_1} come segue. Consideriamo due superfici S ed S' che poggiano su C_1 , si veda la Figura 9.6. Il flusso di \vec{B} attraverso una superficie è proporzionale al numero di linee di campo che la attraversano. Essendo il campo magnetico *solenoidale* (si veda sezione 7.8), non esistono punti in cui le linee di campo terminano o si generano. Questo implica che il numero di linee che attraversano S ed S' è lo stesso e quindi

$$\Phi_S(\vec{B}) = \Phi_{S'}(\vec{B}),$$

e questo valore dipende solo dal contorno comune C_1 . Il flusso $\Phi_{C_1}(\vec{B})$ di \vec{B} concatenato con C_1 è quindi proporzionale al numero di linee di campo di \vec{B} concatenate con C_1 , con un segno “+” se il verso delle linee è legato al verso di percorrenza di C_1 dalle regole della mano destra, un segno “-” in caso contrario.

Possiamo descrivere il fenomeno di induzione avvenire in due momenti:

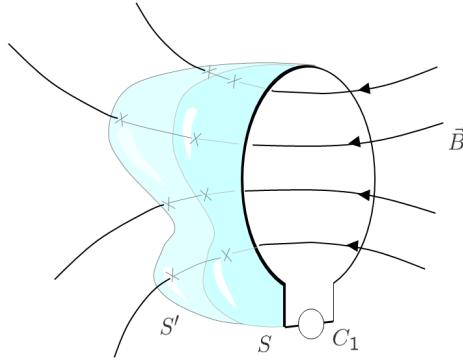


Figura 9.6: Il flusso del campo magnetico attraverso due superfici generiche S ed S' che poggiano su uno stesso percorso C_1 . I due flussi sono uguali in quanto le linee del campo magnetico intersecano le due superfici lo stesso numero di volte. Se così non fosse, esisterebbero punti tra le due superfici in cui linee di campo di \vec{B} di interrompono e di generano, ma questo non è possibile essendo il campo magnetico solenoidale e quindi le sue linee di campo continue.

- la variazione del flusso di \vec{B} concatenato con la spira C_1 genera nello spazio un campo elettrico non-conservativo \vec{E} indipendentemente dalla presenza del conduttore C_1 ;
- il campo \vec{E} agisce sugli elettroni dentro C_1 e provoca la corrente indotta.

Alla luce del primo punto possiamo estendere la legge di Faraday-Neumann- Lenz (9.0.2) ad un qualsiasi cammino chiuso C nello spazio, anche non coincidente con una spira (si veda la Figura 9.7):

$$\mathcal{E}_i = \oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \Phi_{S_C}(\vec{B}). \quad (9.0.3)$$

Si può portare la derivata dentro l'integrale e scrivere

$$\frac{d}{dt} \Phi_{S_C}(\vec{B}) = \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_C} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \vec{n} dS.$$

Usando il teorema di Stokes, possiamo scrivere

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\ell = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS,$$

per cui la (9.0.3) diventa

$$\int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS.$$

Per l'arbitrarietà del contorno C e di S_C possiamo scrivere la seguente relazione *locale*

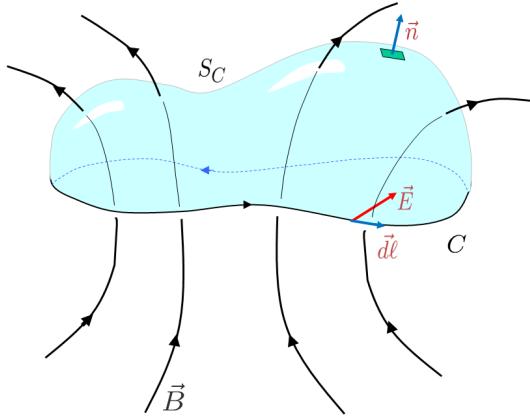


Figura 9.7: Descrizione generale del fenomeno di induzione elettromagnetica: la variazione del flusso $\Phi_C(\vec{B})$ di un campo magnetico \vec{B} concatenato con un percorso chiuso orientato C genera in tutto lo spazio un campo elettrico non-conservativo \vec{E} la cui circuitazione lungo C è proporzionale, attraverso la legge di Faraday-Neumann-Lenz, alla rapidità con cui il flusso concatenato varia nel tempo .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

la quale esprime il fatto che un campo magnetico \vec{B} variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico non-conservativo ($\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0$). Il segno negativo nella legge di Faraday-Neuman-Lenz, esprime la *legge di Lenz* la quale dice che la corrente indotta in un circuito è sempre tale che i suoi effetti si oppongono alla variazione del flusso che l'ha generata.

9.1 Corrente alternata

Consideriamo una spira rettangolare di superficie Σ , fatta ruotare intorno al proprio asse con velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ (Figura 9.8 a)) all'interno di un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_y$. In ogni istante la posizione della spira è definita dall'angolo θ formato da \vec{u}_y e la normale alla spira \vec{n} , in modo tale che l'angolo θ risulta positivo se il verso da \vec{u}_y a \vec{n} è antiorario, e, ovviamente, negativo nel caso opposto. Nella figura $\theta < 0$. Il verso di \vec{n} è legato al verso fissato lungo la spira (frecce sovrapposte ai lati) dalla regola della mano destra. La legge oraria della spira è

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0.$$

Il flusso di \vec{B} concatenato con la spira è

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{n} \Sigma = B \Sigma \cos(\theta(t)) = B \Sigma \cos(\omega t + \theta_0).$$

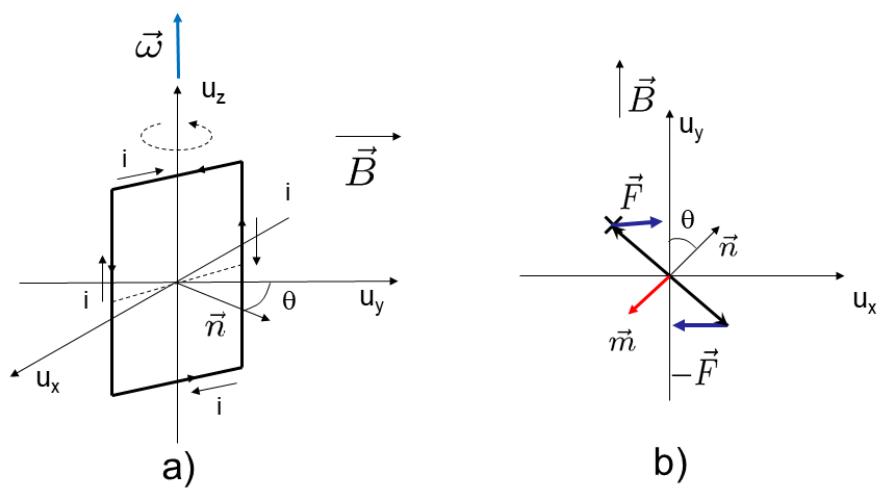
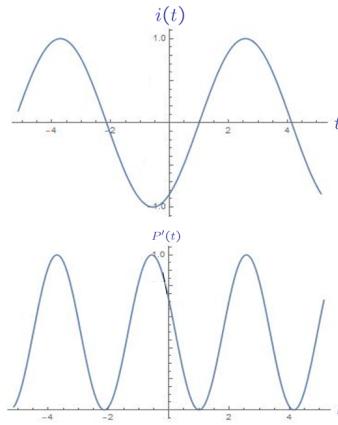


Figura 9.8: Figura a): spira rettangolare che ruota con velocità angolare costante in un campo magnetico. Figura b): stessa spira vista dall'alto, con la coppia di forze agenti sui lati verticali.

Figura 9.9: Figura sopra: $i(t)$. Figura sotto: $P'(t)$.

La f.e.m. indotta lungo la spira si ottiene applicando la (9.0.3)

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = B\Sigma\omega \sin(\omega t + \theta_0),$$

(in figura $\theta(t) < 0$ e quindi $\mathcal{E}_i < 0$). Se R è la resistenza della spira, la corrente indotta è

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{B\Sigma\omega}{R} \sin(\omega t + \theta_0) = \frac{\mathcal{E}_i^{max}}{R} \sin(\omega t + \theta_0),$$

ove $\mathcal{E}_i^{max} = B\Sigma\omega$ è il valore massimo assunto nel tempo dalla f.e.m. indotta

$$\mathcal{E}_i(t) = \mathcal{E}_i^{max} \sin(\omega t + \theta_0).$$

In figura $\theta(t) < 0$ e quindi $i < 0$, ovvero la corrente indotta ha verso opposto a quello fissato sulla spira. Al variare di t la corrente i passa da valori positivi a valori negativi (inverte quindi il proprio verso) secondo una legge sinusoidale con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Essa è detta *corrente alternata*, si veda la Figura 9.9 (sopra). La corrente i fa sì che la spira abbia un momento di dipolo magnetico

$$\vec{m} = i\Sigma\vec{n},$$

(la Figura 9.8 “b” riproduce un’istante in cui, essendo $i < 0$, \vec{m} ha verso opposto ad \vec{n}). Per effetto quindi della corrente indotta, sulla spira agirà una coppia di forze $\vec{F}, -\vec{F}$ con momento

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = (i\Sigma \vec{n}) \times (B \vec{u}_y) = i\Sigma B \vec{n} \times \vec{u}_y = -i\Sigma B \sin(\theta(t)) \vec{u}_z = -\frac{(\mathcal{E}^{max})}{R} \Sigma B \sin^2(\theta(t)) \vec{u}_z,$$

ove abbiamo usato la proprietà: $\vec{n} \times \vec{u}_y = -\sin(\theta(t)) \vec{u}_z$ (in Figura 9.8 “b” $\theta(t) < 0$ ed infatti $\vec{n} \times \vec{u}_y$ è diretto in verso concorde a \vec{u}_z). Si noti che \vec{M} è diretto sempre in verso opposto rispetto ad $\vec{\omega}$, in modo da opporsi sempre al movimento della spira. Questo deriva dal segno negativo nella (9.0.3), ovvero dalla legge di Lenz: l’effetto della corrente i (coppia di momento \vec{M}) è sempre tale da opporsi alle variazioni del flusso di \vec{B} che l’ha generata (ovvero alla rotazione della spira).

\vec{M} compie un lavoro negativo con potenza

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = (-i\Sigma B \sin(\theta(t)) \vec{u}_z) \cdot (\omega \vec{u}_z) = \\ &= -i\Sigma B \omega \sigma(\theta(t)) = -\frac{(\mathcal{E}^{max})^2}{R} \sin^2(\theta(t)) < 0. \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

La potenza che bisogna trasmettere alla bobina per tenerla in moto è quindi

$$P'(t) = -P(t) = \frac{(\mathcal{E}^{max})^2}{R} \sin^2(\theta(t)) = \mathcal{E}_i(t)i(t) = Ri^2(t) > 0.$$

Essa è quindi dissipata sulla resistenza R . $P'(t)$ è riprodotto nella Figura 9.9 (sotto). La potenza media trasmessa al circuito è la media di $P'(t)$ su un periodo T

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{T} \int_0^T P'(t) dt = \frac{1}{T} \frac{(\mathcal{E}_i^{max})^2}{R} \int_0^T dt \sin^2(\theta(t)) = \frac{(\mathcal{E}_i^{max})^2}{TR} \int_0^T dt \sin^2(\omega t + \theta_0) = \\ &= \frac{(\mathcal{E}_i^{max})^2}{TR} \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2(\theta) = \frac{(\mathcal{E}_i^{max})^2}{2TR} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(\mathcal{E}_i^{max})^2}{2R}, \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

dove abbiamo cambiato la variabile di integrazione da t e $\theta(t)$ ed abbiamo usato la proprietà

$$\int_0^{2\pi} d\theta \sin^2(\theta) = \pi, \quad (9.1.3)$$

che si dimostra scrivendo $\sin^2(\theta)$ come $(1 - \cos(2\theta))/2$ ed osservando che l’integrale di $\cos(2\theta)$ tra 0 e 2π è zero in quanto $\cos(2\theta)$ ha periodo pari a π e l’ integrale di un coseno su un’intervallo (nel nostro caso di ampiezza 2π) che è un multiplo del suo periodo è nullo.

La potenza dissipata in un circuito a corrente continua, con f.e.m. \mathcal{E} , su una resistenza R , è

$$P_c = \frac{\mathcal{E}^2}{R},$$

per cui la potenza dissipata su un circuito a corrente alternata, mediata su un periodo, coincide con la potenza dissipata su un circuito a corrente continua e f.e.m. \mathcal{E}_{eff} pari a

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_i^{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Quest'ultima formula definisce la f.e.m. efficace \mathcal{E}_{eff} e quindi

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2}{R},$$

è la potenza dissipata associata ad un circuito a corrente alternata.

Se al posto della spira abbiamo una bobina rettangolare composta da N spire parallele, il flusso attraverso la bobina $\Phi(\vec{B})$ è la somma del flusso di \vec{B} attaverso ogni singola spira

$$\Phi(\vec{B}) = N\Phi_{\Sigma}(\vec{B}).$$

Ciò che cambia rispetto al calcolo precedente è

$$\mathcal{E}_i^{\max} = NB\Sigma\omega.$$

Esempio 9.1.1 Consideriamo un circuito rettangolare di lati ℓ_1 ed ℓ_2 contenente una resistenza R ed un galvanometro G . Il circuito è posto perpendicolarmente ad un campo \vec{B} (in Figura 9.10, uscente). Il lato verticale di lunghezza ℓ_2 è libero di scorrere senza attrito con velocità \vec{v} lungo i due lati ad esso perpendicolari. Tale lato, spostandosi verso destra, “taglia” linee di campo magnetico, aumentando in questo modo il numero di linee concatenate con il circuito stesso e, quindi, facendo variare nel tempo il flusso concatenato di \vec{B} . Fissiamo un verso di percorrenza positivo lungo il circuito, in Figura descritto da frecce sovrapposte ai lati del circuito. Nel circuito si manifesta, a causa della variazione del flusso di \vec{B} ad esso concatenato, una corrente indotta. Infatti, a causa del moto del lato ℓ_2 , la lunghezza del lato ℓ_1 varierà nel tempo secondo la legge

$$\ell_1 = \ell_1^0 + vt,$$

ove $v = |\vec{v}|$. L'area Σ del circuito sarà $\Sigma = \ell_2\ell_1 = \ell_2(\ell_1^0 + vt)$ ed il flusso di \vec{B} concatenato sarà

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = B\Sigma = B\ell_2(\ell_1^0 + vt).$$

La f.e.m. indotta è espressa dalla legge di Faraday-Neumann

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt} = -B\ell_2v < 0.$$

La corrente indotta sarà quindi

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{B\ell_2v}{R} < 0,$$

la quale circola in verso opposto al verso di percorrenza fissato nel circuito.

Osserviamo che, per un osservatore fisso rispetto a \vec{B} (si veda Figura 9.11), non c'è nulla di nuovo in questo fenomeno: egli vede gli elettroni liberi dentro il lato di lunghezza ℓ_2 muoversi con velocità v rispetto al campo \vec{B} , per cui su di essi agisce la forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B},$$

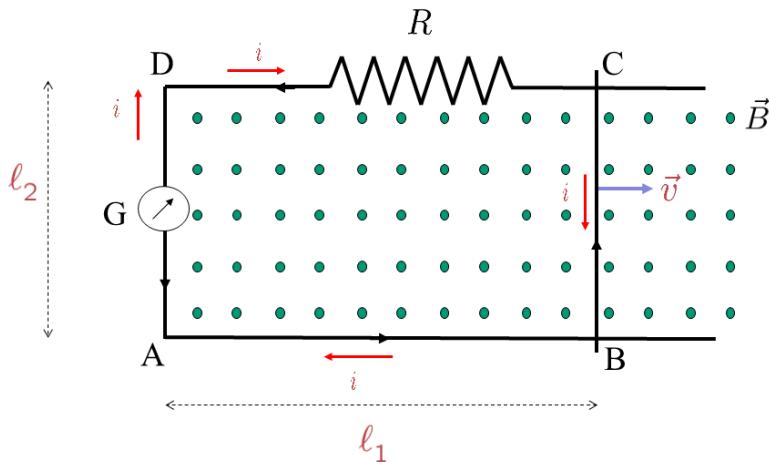


Figura 9.10: Induzione elettromagnetica in un circuito rettangolare con lato mobile, immerso in un campo magnetico unifrome.

che si può esprimere in termini di un campo non-conservativo \vec{E}

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_L}{(-e)} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

\vec{E} è non-nullo solo lungo il lato mobile ed è parallelo ad esso, diretto verso il basso. La f.e.m. associata ad \vec{E} è quindi

$$\mathcal{E} = \oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\ell = \vec{E} \cdot \overrightarrow{BC} = -\ell_2 v B < 0.$$

la quale coincide con l'espressione ottenuta mediante la legge di Faraday-Neumann-Lenz.

Rispetto all'osservatore solidale con il campo \vec{B} , il fenomeno di induzione elettromagnetica è il risultato dell'azione di \vec{B} sui portatori di carica liberi, in moto (forza magnetica).

Rispetto ad un osservatore solidale con il lato di lunghezza ℓ_2 , e quindi in moto con velocità \vec{v} rispetto a \vec{B} , le cariche di conduzione all'interno del lato sono fisse e la corrente indotta è il risultato dell'azione di un campo elettrico \vec{E} su queste cariche fisse (forza elettrica).

\vec{E} è un campo elettrico genuino che si viene a creare lungo ℓ_2 per effetto della variazione di $\Phi_{\Sigma}(\vec{B})$.

Lo stesso fenomeno (induzione elettromagnetica) viene così interpretato in modo diverso nei due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. In un caso esso deriva dall'azione di \vec{B} su cariche in moto e quindi si origina da una *interazione magnetica*, nell'altro esso

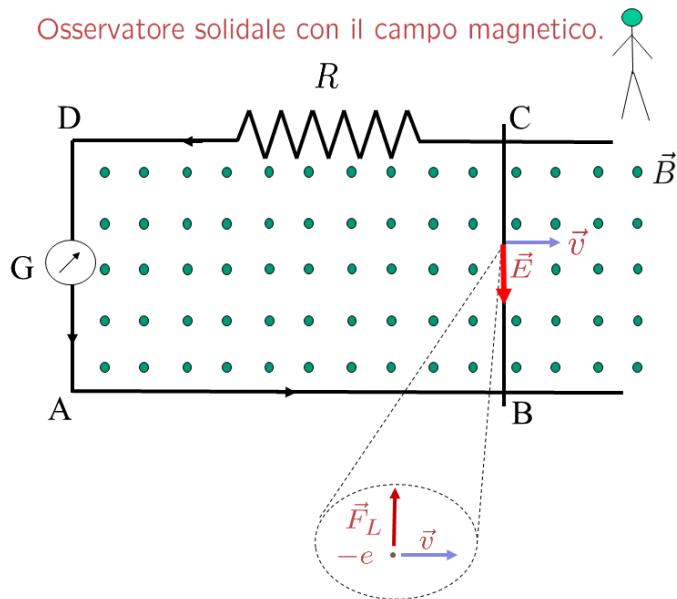


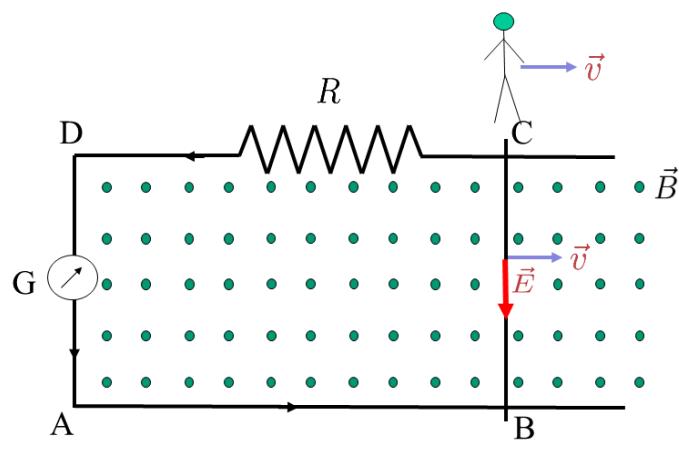
Figura 9.11: Fenomeno osservato da un osservatore solidale con il campo magnetico è spiegato in termini di una forza di Lorentz esercitata dal campo magnetico sugli elettroni liberi all'interno del lato in movimento (fenomeno magnetico).

deriva dall'azione di un campo elettrico \vec{E} su cariche fisse e quindi è spiegato in termini di una *interazione elettrica*.

Principio di relatività (ristretta): le leggi fisiche devono avere la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale¹.

Alla luce di questo principio le leggi dell'elettromagnetismo non possono essere scritte in termini del campo elettrico \vec{E} o magnetico \vec{B} separatamente perché, come abbiamo visto nell'esempio sopra, un fenomeno descritto in un sistema di riferimento in termini dell'azione di un campo elettrico (fenomeno elettrico), in un altro sistema di riferimento può essere descritto in termini dell'azione di un campo magnetico (fenomeno magnetico). Se le leggi devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali, esse vanno scritte in termini di un unico campo più generale, il *campo elettromagnetico*, di cui \vec{E} e \vec{B} sono solo componenti. Il campo elettromagnetico è un unico oggetto che si può manifestare in un sistema di riferimento come \vec{E} , in un altro come \vec{B} ed in un altro ancora come combinazione dei due campi. Il campo \vec{E} (o il campo \vec{B}) si possono invece trasformare in una combinazione di \vec{E} e di \vec{B} attraverso le leggi di trasformazione che mettono in relazione un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Queste, nella teoria della Relatività Speciale, sono le *leggi di trasformazione di Lorentz* che generalizzano quelle di Galileo a velocità molto elevate (paragonabili con quella

¹ovvero in cui vale il principio di inerzia di Galileo. Ricordiamo che I sistemi di riferimento inerziali sono in moto rettilineo uniforme gli uni rispetto agli altri



Osservatore solidale con il lato in movimento

Figura 9.12: Fenomeno osservato da un osservatore solidale con il lato in movimento è spiegato, attraverso la legge di Faraday-Neumann- Lenz, in termini di un campo elettrico indotto agente sugli elettroni liberi all'interno del lato mobile, che ora è fisso rispetto all'osservatore (fenomeno elettrico).

della luce). Il campo elettromagnetico sarà descritto da una nuova entità geometrica che ha per “componenti” dei vettori: il campo elettrico ed il campo magnetico. Tale quantità matematica non può essere un vettore, in quanto le componenti di un vettore sono dei numeri (scalar). Essa è detta *tensore* e generalizza il concetto di vettore.

9.2 Effetto della corrente i e legge di Lenz.

Torniamo al nostro circuito rettangolare con lato mobile in Figura 9.10. Il lato in moto è percorso dalla corrente indotta nel verso che va da C a B . Essendo $i < 0$, esso è quindi soggetto ad una forza

$$\vec{F} = i \overrightarrow{BC} \times \vec{B},$$

diretta in verso opposto a \vec{v} . Questa forza si oppone al moto del lato compiendo un lavoro negativo con potenza

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = i\ell_2 Bv < 0.$$

Per mantenere il lato in moto con velocità \vec{v} è necessario compiere un lavoro con potenza uguale ed opposta

$$P' = -P = -\vec{F} \cdot \vec{v} = -i\ell_2 Bv = \mathcal{E}_i i = Ri^2 > 0.$$

Questa potenza è dissipata sulla resistenza e viene trasformata in calore per effetto Joule.

Se non vi fosse la legge di Lenz, ovvero il segno negativo nella legge di Faraday-Neumann, la corrente indotta i avrebbe verso opposto ($i > 0$) e la sua interazione con il campo \vec{B} produrrebbe energia con potenza $P = i\ell_2 Bv > 0$. Se il lato mobile fosse inizialmente fermo, basterebbe una piccola spinta verso destra per farlo accelerare indefinitamente, in virtù del lavoro positivo esercitato dal campo magnetico sulla corrente indotta. Tale accelerazione determinerebbe a sua volta un aumento di i e quindi di P . Il sistema produrrebbe energia in quantità sempre maggiore senza alcuna azione esterna e questo violerebbe il principio della conservazione dell’energia.

9.3 Induzione elettrostatica e circuiti elettrici

Si considerino circuiti elettrici indeformabili, fissi nello spazio e percorsi da correnti che variano nel tempo. Queste correnti genereranno un campo magnetico che, per il principio di sovrapposizione, sarà la somma dei campi generati da ciascuna corrente e che avrà un flusso concatenato con ciascuno dei circuiti, anch’esso variabile nel tempo. Questo flusso magnetico concatenato, variando nel tempo, produrrà nei circuiti una f.e.m. indotta che si sovrapporrà a quella già presente in essi. Ci occuperemo in questo paragrafo di come tener conto di questo fenomeno nella descrizione della dinamica delle correnti nei suddetti circuiti.

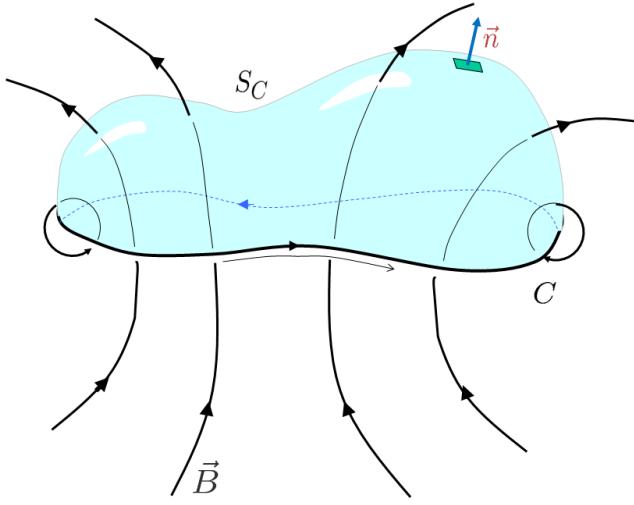


Figura 9.13: Flusso del campo magnetico generato da un circuito C percorso da corrente stazionaria, concatenato con il circuito stesso.

9.3.1 Autoinduzione

Un circuito C percorso da una corrente i stazionaria produce un campo \vec{B} che ha un flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato con il circuito stesso, si veda Figura 9.13. Se il campo \vec{B} è ovunque nel vuoto, esso espresso dalla prima legge di Laplace

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \frac{d\ell \times \vec{u}_r}{r^2}.$$

Sia S_C un'area che poggia su C , la cui orientazione è definita al solito modo.

Il flusso concatenato è

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{S_C} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{S_C} \left[\oint_C \frac{d\ell \times \vec{u}_r}{r^2} \right] \cdot \vec{n} dS.$$

Ponendo

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_C} \left[\oint_C \frac{d\ell \times \vec{u}_r}{r^2} \right] \cdot \vec{n} dS,$$

la precedente equazione diventa

$$\Phi(\vec{B}) = L i. \quad (9.3.1)$$

L è detta *induttanza* del circuito. Essa dipende solo dalla geometria del circuito e dal mezzo in cui esso è immerso. Infatti, se invece essere nello spazio vuoto, il circuito considerato fosse immerso in un mezzo lineare omogeneo con permeabilità μ , nell'espressione di L data sopra per il vuoto, μ_0 andrebbe sostituito con μ .

Se i varia nel tempo, $i = i(t)$, anche $\Phi(\vec{B})$ varia a sua volta e, per induzione, viene a prodursi una f.e.m. indotta

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\Phi(\vec{B}) = -L\frac{di}{dt}, \quad (9.3.2)$$

che si sovrappone alla f.e.m. già presente nel circuito.

Se il circuito è caratterizzato da un generatore di f.e.m. \mathcal{E} , da una resistenza totale R (che include quella interna del generatore) e da una induttanza L , l'equazione del circuito sarà

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = Ri \Leftrightarrow \mathcal{E} = Ri + L\frac{di}{dt}. \quad (9.3.3)$$

L'unità di misura per L è l'Henry

$$[L] = [\text{Henry}] = \left[\frac{Tm^2}{A} \right] = \left[\frac{\text{Weber}}{A} \right],$$

ove il Weber è l'unità di misura del flusso di \vec{B}

$$[\Phi(\vec{B})] = [Tm^2] = [\text{Weber}].$$

Se ho un componente del circuito in cui \vec{B} è molto più intenso rispetto al resto del circuito (p. es. una bobina avvolta intorno ad un ferromagnete, si veda la figura 9.14) e quindi fornisce contributo prevalente al flusso concatenato, posso pensare l'induttanza L dell'intero circuito concentrata in questo elemento che verrà chiamato esso stesso *induttanza* e rappresentato con il simbolo

in

Figura

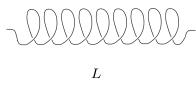
9.15.

Un circuito caratterizzato solo da una resistenza R e da una inductanza L , descritto quindi dall'equazione (9.3.3), è chiamato circuito RL , si veda figura 9.16.

Deriviamo la soluzione esplicita $i(t)$ dell'equazione (9.3.3) usando il metodo della separazione delle variabili. Dividiamo l'intervallo tra l'istante iniziale $t = 0$ ed un generico istante $t > 0$ in intervallini infinitesimi compresi tra un istante intermedio t' e $t' + dt'$, durante ciascuno dei quali l'intensità di corrente sarà variata di $di = \frac{di}{dt'} dt'$. Dalla (9.3.3) ricaviamo la seguente relazione tra di e dt' :

$$\frac{di}{i - \frac{\mathcal{E}}{R}} = -\frac{R dt'}{L} = -\frac{dt'}{\tau}, \quad (9.3.4)$$

Figura 9.15: Induttanza nella simbologia circuitale.



ove abbiamo definito $\tau = L/R$ che, come lo studente può verificare, ha dimensione di un tempo. Integriamo adesso il primo membro tra $i(0)$ e $i(t)$ ed il secondo da 0 a t :

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di}{i - \frac{\mathcal{E}}{R}} = - \int_0^t \frac{dt'}{\tau} = -\frac{t}{\tau}. \quad (9.3.5)$$

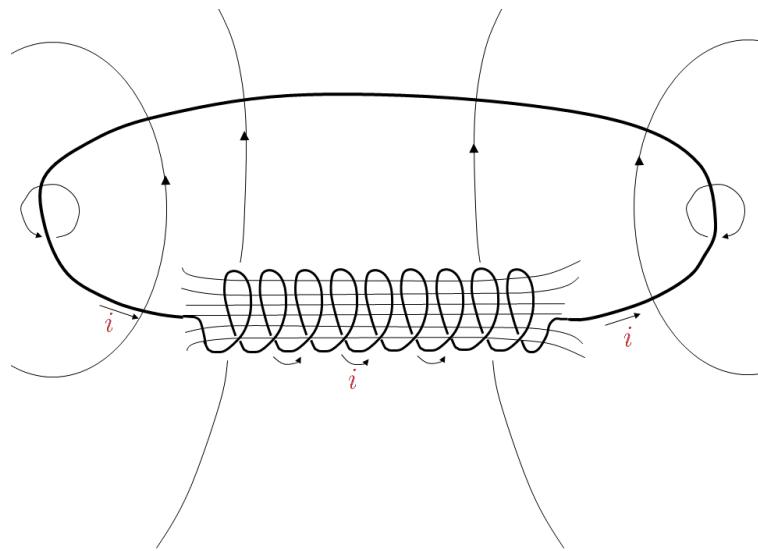


Figura 9.14: Flusso del campo magnetico generato da un circuito C percorso da corrente stazionaria, concatenato con il circuito stesso. Se nel circuito è presente un componente attraverso il quale il flusso totale del campo magnetico ha un contributo prevalente, si può pensare l'induttanza del circuito concentrata in tale componente.

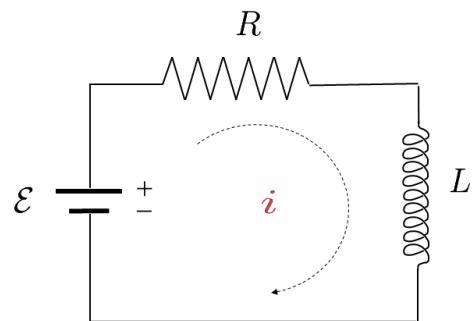


Figura 9.16: Circuito RL.

Calcolando l'interale al primo membro troviamo la seguente relazione tra $i(t)$ e t :

$$\ln \left(\frac{i(t) - \frac{\mathcal{E}}{R}}{i(0) - \frac{\mathcal{E}}{R}} \right) = -\frac{t}{\tau}. \quad (9.3.6)$$

Infine valutando l'esponenziale di ambo i membri e risolvendo l'equazione risultante in $i(t)$ otteniamo la soluzione generale della (9.3.3):

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + \left(i(0) - \frac{\mathcal{E}}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (9.3.7)$$

Nel nostro caso $i(0) = 0$ per cui:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (9.3.8)$$

Troviamo che, dopo un transitorio di durata pari ad un certo numero di intervalli τ , l'intensità di corrente si assesta, in buona approssimazione, al valore di regime $\frac{\mathcal{E}}{R}$ (lo studente si ricordi la discussione sull'analogo andamento di $q(t)$ nel processo di carica di un condensatore, fatta nel paragrafo 6.9). Questo valore asintotico è quello che avremmo, per la legge di Ohm, se l'induttanza del circuito fosse trascurabile ($L \approx 0$).

Il tempo caratteristico $\tau = L/R$ definisce infatti la durata del transitorio per cui più breve è τ e prima la corrente raggiunge il suo valore di regime. Nei circuiti studiati nel capitolo 6 abbiamo implicitamente assunto $L \approx 0$, per cui $\tau \approx 0$ e la corrente assumeva immediatamente il suo valore limite $\frac{\mathcal{E}}{R}$.

Bilancio energetico di un circuito con induttanza

Studiamo ora la dinamica, sopra descritta, della corrente in un circuito RL, dal punto di vista energetico. La potenza erogata dal generatore di f.e.m. \mathcal{E} vale $P = \mathcal{E}i$ e, usando l'equazione (9.3.3), si scrive nel seguente modo:

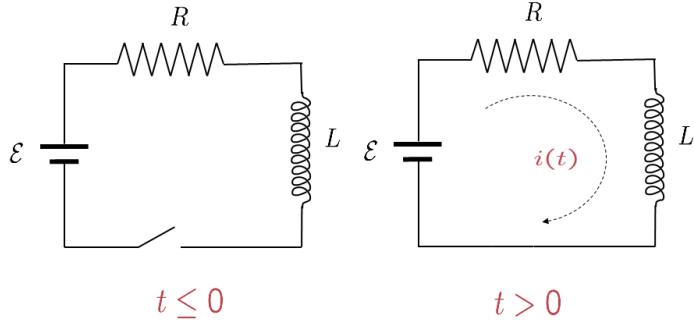
$$P = \mathcal{E}i = Ri^2 + L \frac{di}{dt} i = P_R + P_L,$$

ove $P_R = R i^2$ è frazione di potenza che viene dissipata su R , mentre

$$P_L = L \frac{di}{dt} i$$

è frazione di potenza che, invece, viene spesa su L .

Si noti che P_L è diversa da 0 solo se i varia col tempo e quindi essa si può pensare come potenza richiesta per fare variare i . Supponiamo che $t = 0$ e il circuito sia aperto: $i(0) = 0$. Se chiudiamo il circuito a $t > 0$, si veda figura 9.17, in un istante $t > 0$ la corrente si porterà ad un valore $i(t) > 0$.

Figura 9.17: Chiusura di un circuito RL all'istante $t = 0$.

Il lavoro totale speso sull'induttanza da $t = 0$ a $t > 0$ è:

$$W_L = \int_0^t P_L(t') dt' = \int_{i(0)=0}^{i(t)} L d(i^2) = \frac{L}{2} i(t)^2 - L \frac{i(0)^2}{2} = L \frac{i(t)^2}{2}. \quad (9.3.9)$$

Questo lavoro si può esprimere come la variazione da $t = 0$ a $t > 0$ di un'energia:

$$U_L = L \frac{i^2}{2},$$

associata all'induttanza, ovvero, come energia trasmessa all'induttanza. D'altro canto all'istante $t > 0$ osserviamo all'interno dell'induttanza un campo \vec{B} che a $t = 0$ non c'era. Possiamo quindi pensare che l'energia trasmessa all'induttanza U_L sia servita alla creazione del campo \vec{B} al suo interno e che sia distribuita in esso con una certa densità

$$u_m(\vec{x}) = \frac{dU_L}{dV},$$

ove $u_m(\vec{x})$ dipenderà, in ogni punto \vec{x} , solo dal campo magnetico $\vec{B}(\vec{x})$. Calcoliamo questa densità u_m in un caso semplice: consideriamo un solenoide con densità di spire n , corrente i e lunghezza l . Se l è molto maggiore delle sue dimensioni trasversali, il solenoide si può considerare, in buona approssimazione, come infinito ed il campo magnetico al suo interno uniforme e pari a

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u} \quad (\text{nel vuoto}).$$

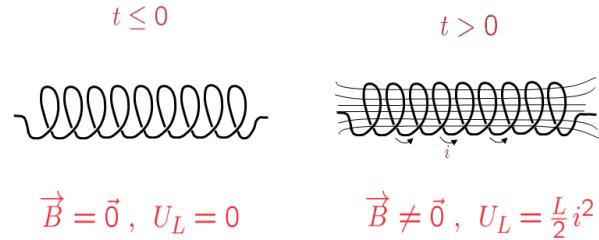


Figura 9.18: L'energia U_L impiegata per creare corrente di intensità i nel circuito è servita alla creazione del campo \vec{B} attraverso il circuito.

Sia Σ l'area della sezione trasversale del solenoide (area di ciascuna spira). Il flusso di \vec{B} , attraverso il tratto di solenoide è la somma dei flussi di \vec{B} , concatenati con ciascuna spira ($\phi_\Sigma(\vec{B})$):

$$\phi(\vec{B}) = N \phi_\Sigma(\vec{B}),$$

ove N è il numero di spire nel tratto l : $N = nl$. Essendo

$$\phi_\Sigma(\vec{B}) = B \Sigma,$$

troviamo:

$$\phi(\vec{B}) = NB\Sigma = \mu_0 niN\Sigma = \mu_0 n^2 \Sigma il = L i,$$

da cui ricaviamo l'espressione dell'induttanza associata al solenoide

$$L = \mu_0 n^2 \Sigma l. \quad (9.3.10)$$

Se il solenoide fosse pieno di materiale con permeabilità μ , l'espressione di L sarebbe:

$$L = \mu n^2 \Sigma l.$$

L'energia immagazzinata nel solenoide è quindi:

$$U_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{\mu_0 n^2 i^2}{2} \Sigma l = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \cdot V,$$

ove $V = \Sigma l$ è il volume interno. Essendo \vec{B} uniforme ed essendo la densità di energia u_m solo funzione di \vec{B} in ogni punto, possiamo pensare U_L distribuita all'interno di \vec{B} con densità u_m che non dipende dal punto:

$$u_m = \frac{dU_L}{dV} = \frac{U_L}{V} = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}.$$

Essa dipende solo da $|\vec{B}|$ e dal mezzo (in un mezzo generico $u_m = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu}$).

Quanto trovato esprime una proprietà generale del campo magnetico: un campo magnetico generico $\vec{B}(\vec{x})$ possiede un'energia U_m immagazzinata al suo interno e distribuita nello spazio da esso occupato con una densità u_m data da: \vec{B} :

$$u_m(\vec{x}) = \frac{dU_m}{dV} = \frac{|\vec{B}(\vec{x})|^2}{2\mu_0}.$$

L'energia magnetica U_m contenuta in un volume V occupato dal campo sarà espressa nel seguente modo:

$$U_m = \int_V u_m(\vec{x}) dV.$$

Se per V prendiamo il volume interno ad un'induttanza riroviamo l'espressione dell'energia U_L immagazzinata nell'induttanza, ricavata sopra.

9.3.2 Mutua induzione

Consideriamo due circuiti C_1 e C_2 nel vuoto, percorsi da correnti stazionarie, variabili nel tempo, di intensità i_1 ed i_2 . Siano inoltre \vec{B}_1 e \vec{B}_2 i campi magnetici da esse generati, rispettivamente. Si supponga che i due circuiti siano indeformabili ed in posizione fissa l'uno rispetto all'altro. Il campo magnetico totale nello spazio sarà la sovrapposizione dei due:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (9.3.11)$$

Esso avrà un flusso concatenato con entrambi i circuiti e, variando nel tempo, produrrà in essi una f.e.m. indotta che si sovrapporrà a quelle già esistenti. Calcoliamo il flusso di \vec{B} concatenato con il primo circuito:

$$\Phi_1(\vec{B}) = \int_{S_{C_1}} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS = \Phi_1(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \Phi_1(\vec{B}_1) + \Phi_1(\vec{B}_2). \quad (9.3.12)$$

Il primo termine $\Phi_1(\vec{B}_1)$ nell'ultimo membro è il flusso attraverso C_1 del campo \vec{B}_1 da esso stesso generato, che abbiamo già calcolato essere (9.3.1):

$$\Phi_1(\vec{B}_1) = L_1 i_1, \quad (9.3.13)$$

ove L_1 è il coefficiente di autoinduzione del primo circuito. Il secondo termine $\Phi_1(\vec{B}_2)$ è invece dovuto alle linee di campo di \vec{B}_2 , generato dalla corrente i_2 nel secondo circuito, che sono concatenate con il primo. Esso si esprime nel seguente modo:

$$\Phi_1(\vec{B}_2) = \int_{S_{C_1}} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1 dS = \int_{S_{C_1}} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times \vec{u}_r}{r^2} \right] \cdot \vec{n}_1 dS = M_{12} i_2, \quad (9.3.14)$$

dove

$$M_{12} = \int_{S_{C_1}} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times \vec{u}_r}{r^2} \right] \cdot \vec{n}_1 dS, \quad (9.3.15)$$

è detto *coefficiente di mutua induzione*. Esso dipende dalla geometria dei due circuiti e, se il campo \vec{B}_2 si trova in un materiale lineare omogeneo con permeabilità magnetica μ , l'espressione in (9.3.15) va modificata sostituendo μ_0 con μ , che introduce una dipendenza di M_{12} dal materiale. Possiamo quindi scrivere il flusso magnetico concatenato con C_1 nel seguente modo:

$$\Phi_1(\vec{B}) = L_1 i_1 + M_{12} i_2. \quad (9.3.16)$$

Analogamente il flusso magnetico concatenato con C_2 si scrive nella forma:

$$\Phi_2(\vec{B}) = \Phi_2(\vec{B}_1) + \Phi_2(\vec{B}_2) = M_{21} i_1 + L_2 i_2, \quad (9.3.17)$$

ove L_2 è il coefficiente di autoinduzione del circuito C_2 mentre:

$$M_{21} = \int_{S_{C_2}} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_2 dS_2 = \int_{S_{C_2}} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times \vec{u}_r}{r^2} \right] \cdot \vec{n}_2 dS. \quad (9.3.18)$$

Mostriamo che $M_{12} = M_{21}$. Per farlo scriviamo \vec{B}_1 e \vec{B}_2 in termini dei rispettivi potenziali vettori magnetici, si veda le equazioni (7.8.1) e (7.8.4):

$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1, \quad \vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_2, \quad (9.3.19)$$

ove

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r}, \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2}{r}. \quad (9.3.20)$$

Scriviamo il flusso $\Phi_1(\vec{B}_2)$ nel seguente modo:

$$\Phi_1(\vec{B}_2) = \int_{S_{C_1}} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1 dS = \int_{S_{C_1}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_2) \cdot \vec{n}_1 dS = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_1 = i_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{r} = M_{12} i_2, \quad (9.3.21)$$

ove abbiamo riscritto il flusso come integrale di linea di \vec{A}_2 lungo C_1 applicando la legge di Stokes. Questo ci ha permesso di trovare la seguente formula per M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{r}. \quad (9.3.22)$$

Possiamo ricavare l'analoga espressione per M_{21} :

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r}. \quad (9.3.23)$$

Gli integrali a secondo membro delle (9.3.22) e (9.3.23) sono chiaramente uguali e questo mostra che $M_{12} = M_{21}$. Denotiamo entrambe le quantità con il simbolo M . Si noti che, a differenza dell'induttanza, M può essere positivo o negativo, a seconda dell'orientazione relativa dei due circuiti. Le f.e.m. indotte $\mathcal{E}_i^{(1)}, \mathcal{E}_i^{(2)}$ in C_1 e C_2 , rispettivamente, dalla variazione nel tempo del flusso magnetico concatenato, sono:

$$\mathcal{E}_i^{(1)} = -\frac{d}{dt} \Phi_1(\vec{B}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_i^{(2)} = -\frac{d}{dt} \Phi_2(\vec{B}) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \quad (9.3.24)$$

Se in C_1 e C_2 sono presenti generatori di tensione con f.e.m. $\mathcal{E}^{(1)}$ e $\mathcal{E}^{(2)}$, rispettivamente, e se R_1 ed R_2 sono le resistenze complessive nei due circuiti, le equazioni dei due circuiti si scrivono come segue:

$$\mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}_i^{(1)} = R_1 i_1 \Leftrightarrow \mathcal{E}^{(1)} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad (9.3.25)$$

$$\mathcal{E}^{(2)} + \mathcal{E}_i^{(2)} = R_2 i_2 \Leftrightarrow \mathcal{E}^{(2)} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (9.3.26)$$

Capitolo 10

Equazioni di Maxwell

10.1 Corrente di spostamento ed equazione di Ampère-Maxwell

Abbiamo visto che la legge $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, valida per i campi \vec{E} e \vec{B} statici (il campo elettrostatico è conservativo), va modificata in presenza di un campo $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ dipendente dal tempo, per descrivere il fenomeno dell'induzione elettrostatica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Legge di Faraday-Neumann}).$$

Un campo \vec{B} dipendente dal tempo diventa *sorgente* di un campo elettrico non-conservativo. Il quadro delle leggi dell'elettromagnetismo finora delineato non è ancora simmetrico: può un campo elettrico variabile nel tempo, generare un campo magnetico?

La risposta affermativa fu data dal fisico scozzese J. C. Maxwell (1831-1879), che modificò la legge di Ampère, includendo tra le sorgenti del campo magnetico un nuovo tipo di corrente, non legato ad un effettivo spostamento di cariche, bensì alla una variazione nel tempo del campo elettrico. Questa corrente fu chiamata *corrente di spostamento*.

Richiamiamo a questo punto la discussione fatta nella sezione 7.12 ed in particolare nel paragrafo finale 7.12.1. Abbiamo visto che la condizione necessaria affinché valga la legge di Ampère è che le correnti siano stazionarie, ovvero che valga la proprietà $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ovunque. Questo risulta evidente dall'equazione (7.12.14) che esprime la legge in forma integrale, osservando che, affinché tale relazione sia consistente, è necessario che l'integrale a secondo membro non dipenda dalla scelta della superficie S_C che poggia su C , poiché il primo membro non ne dipende. Come dimostrato nella sezione 7.12 questa proprietà è vera solo se la corrente è stazionaria. Che la legge di Ampère sia inconsistente in presenza di correnti non-stazionarie è stato mostrato anche nel paragrafo 7.12.1 a partire dalla forma locale (7.12.15) della legge stessa. Nello stesso paragrafo abbiamo mostrato che, in presenza di correnti non-stazionarie, è presente nello spazio un campo elettrico \vec{E} variabile nel tempo: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$. Limitiamo la nostra discussione a campi elettrici e magnetici nel vuoto. Al fine di generalizzare la legge di Ampère a correnti non-stazionarie, come detto sopra, Maxwell

aggiunse, tra le sorgenti del campo magnetico, oltre alle correnti ordinarie, dovute al moto collettivo di cariche e descritte dal campo \vec{j} , un nuovo tipo di corrente, detta corrente di spostamento, dovuta alla suddetta variazione nel tempo del campo elettrico e descritta nel vuoto dal seguente campo:

$$\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10.1.1)$$

Egli in altre parole descrisse le sorgenti del campo magnetico attraverso un campo densità di corrente totale:

$$\vec{j}_{\text{tot}} = \vec{j} + \vec{j}_s = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (10.1.2)$$

e riscrisse conseguentemente l'equazione di Ampère (7.12.15) nel vuoto nel seguente modo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{tot}} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (10.1.3)$$

La consistenza di questa equazione richiede, come mostrato nel paragrafo 7.12.1, che il campo a secondo membro sia solenoidale come lo è il campo a primo membro, ovvero che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{tot}} = 0. \quad (10.1.4)$$

Mostriamo che questo è vero anche quando le correnti non sono stazionarie, ovvero \vec{j} non è solenoidale: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \neq 0$. Calcoliamo la divergenza della densità di corrente totale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{tot}} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{j} + \vec{j}_s) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (10.1.5)$$

Ora usiamo la proprietà che il risultato di due derivate parziali successive su una stessa funzione non dipende dall'ordine in cui esse sono calcolate. Questo ci permette di scambiare nell'ultimo membro della (10.1.5) il simbolo della derivata parziale rispetto al tempo con quello della divergenza e scrivere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{tot}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right). \quad (10.1.6)$$

Ora usiamo la legge di Gauss in forma locale $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e / \epsilon_0$ per riscrivere l'ultimo membro nel seguente modo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{tot}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_e = 0, \quad (10.1.7)$$

essendo l'ultimo membro nullo in virtù dell'equazione di continuità della carica elettrica (6.1.7), che ne esprime la conservazione. Abbiamo quindi dimostrato che \vec{j}_{tot} è *sempre solenoidale* anche quando \vec{j} non lo è. In altre parole la corrente totale descritta da \vec{j}_{tot} , somma della corrente ordinaria e della corrente di spostamento, è *sempre stazionaria* e ciò garantisce la consistenza dell'equazione (10.1.3). Possiamo capire l'effetto della corrente di

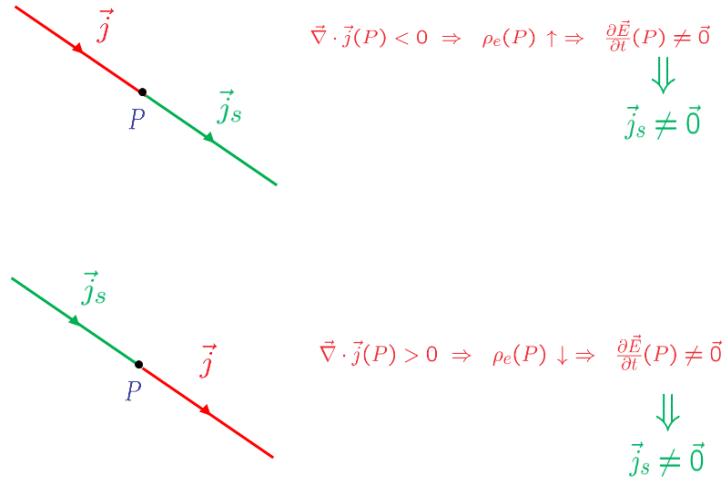


Figura 10.1: In corrispondenza dei punti di discontinuità delle linee di campo di \vec{j} si crea un campo elettrico variabile nel tempo che determina una corrente di spostamento. In rosso le linee di campo di \vec{j} , in verde quelle di \vec{j}_s . Queste ultime si raccordano perfettamente con le prime ed insieme esse descrivono le linee di campo, sempre continue, di \vec{j}_{tot} .

spostamento, in presenza di correnti non-stazionarie, in modo grafico. Se la corrente ordinaria non è stazionaria, le linee di campo di \vec{j} sono, in certi punti dello spazio, discontinue. Come mostrato nel paragrafo 7.12.1, l'equazione di continuità della carica elettrica implica che, in corrispondenza di tali punti di discontinuità, la densità ρ_e di carica elettrica varia nel tempo e con essa il campo elettrico da essa generato. La presenza di un campo elettrico variabile nel tempo determina, a sua volta, una corrente di spostamento descritta dal campo \vec{j}_s le cui linee di campo *si raccordano* perfettamente con quelle discontinue di \vec{j} , in modo che le linee del campo totale \vec{j}_{tot} siano continue ovunque, Figura 10.1. Questa caratteristica esprime in termini geometrici la proprietà di \vec{j}_{tot} di essere solenoidale. L'equazione (10.1.3) è quindi consistente poiché i campi a primo e secondo membro sono descritti da linee di campo ovunque continue e chiuse.

Scriviamo ora tale equazione in forma integrale. Consideriamo un percorso chiuso e orientato C nello spazio ed una superficie S_C che poggia su esso, con la solita convenzione che il verso del versore normale \vec{n} in ogni suo punto sia legato al verso di C dalla regola della mano destra. Calcoliamo il flusso di ambo i membri della (10.1.3) attraverso S_C :

$$\int_{S_C} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \int_{S_C} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS. \quad (10.1.8)$$

Usando la legge di Stokes possiamo scrivere l'integrale a primo membro come circuitazione

del campo magnetico lungo C :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \int_{S_C} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \sum_{c.c.} i_{\text{tot}}, \quad (10.1.9)$$

ove abbiamo definito l'intensità della corrente totale concatenata con il cammino C :

$$\sum_{c.c.} i_{\text{tot}} = \int_{S_C} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS, \quad (10.1.10)$$

usando il fatto che il flusso a secondo membro, essendo la corrente totale stazionaria, non dipende da S_C ma solo da C : *esso è il flusso di \vec{j}_{tot} concatenato con C .* Calcoliamo questo flusso:

$$\begin{aligned} \sum_{c.c.} i_{\text{tot}} = \int_{S_C} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS &= \int_{S_C} (\vec{j} + \vec{j}_s) \cdot \vec{n} dS = \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_C} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS = \\ &= \Phi_{S_C}(\vec{j}) + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sum_{S_C} i + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{S_C}(\vec{E}) = \\ &= \sum_{S_C} i + \sum_{S_C} i_s, \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

ove abbiamo scritto il flusso $\Phi_{S_C}(\vec{j})$ come intensità di corrente attraverso S_C , che abbiamo indicato con $\sum_{S_C} i$ e, nel passare dalla prima linea alla seconda, abbiamo portato la derivata rispetto al tempo fuori dall'integrale di superficie. Abbiamo anche definito l'intensità di corrente di spostamento attraverso S_C nel seguente modo:

$$\sum_{S_C} i_s = \Phi_{S_C}(\vec{j}_s) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{S_C}(\vec{E}). \quad (10.1.12)$$

Si noti che le due intensità di corrente $\sum_{S_C} i$ e $\sum_{S_C} i_s$, separatamente, dipendono dalla superficie S_C scelta, mentre, per quanto detto sopra, la loro somma non dipende da S_C ma solo da C : L'equazione (10.1.9) si può quindi scrivere nella forma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \sum_{c.c.} i_{\text{tot}} = \mu_0 \left(\sum_{S_C} i + \sum_{S_C} i_s \right) = \mu_0 \left(\sum_{S_C} i + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{S_C}(\vec{E}) \right). \quad (10.1.13)$$

Le equazioni (10.1.3) e (10.1.13) esprimono, rispettivamente in forma locale ed integrale, la *legge di Ampère-Maxwell*, che generalizza la legge di Ampère a correnti non-stazionarie. In presenza di sole correnti stazionarie, non vi è variazione nel tempo della densità di carica ρ_e dei portatori di carica in alcun punto e quindi il campo elettrico da essi generato è anch'esso costante: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. Ne segue che, in questo caso, non vi è corrente di spostamento ($\vec{j}_s = \vec{0}$) e la legge di Ampère-Maxwell (10.1.13) (o, equivalentemente, (10.1.3)) si riduce alla legge di Ampère (7.12.15) (o, equivalentemente, (7.12.6)) studiata nel Capitolo 7.

È istruttivo mostrare come l'introduzione della corrente di spostamento curi l'inconsistenza della legge di Ampère in un esempio concreto.

10.1.1 Applicazione della legge di Ampère-Maxwell ad un circuito RC

Consideriamo un circuito RC con una certa resistenza complessiva R , nel quale è inserito un condensatore (che supporremo, per semplicità, piano e vuoto) di capacità C . Facciamo riferimento al processo di carica o di scarica del condensatore trattato in dettaglio nel paragrafo 6.9. Nell'istante iniziale l'interruttore I , nella figura 6.27 per il processo di carica o nella figura 6.29 per quello di scarica, viene chiuso, ed il circuito è percorso da una corrente $i(t)$. Essa dura solo per un tempo, caratteristico del circuito, pari ad un certo numero di intervalli $\tau = RC$: il tempo richiesto dal condensatore per caricarsi con carica $\bar{q} = \mathcal{E}C$, nel caso del processo di carica, o per scaricarsi nel secondo caso. Dopo questo tempo caratteristico, la corrente, benchè ancora diversa da zero, è, a tutti gli effetti, trascurabile.

Durante il periodo di carica o scarica $i(t) \neq 0$, anche se in effetti il circuito, in corrispondenza del condensatore, è aperto, non essendoci passaggio di carica tra le due armature.

Mostriamo ora come l'applicazione della legge di Ampère in presenza, come nel circuito in esame, di una corrente non-stazionaria, porti ad una contraddizione. Consideriamo un contorno chiuso C intorno ad un punto del circuito come nella Figura 10.2 ed applichiamo ad esso la legge di Ampère nella forma (7.12.14):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_C} \vec{j} \cdot \vec{n} dS, \quad (10.1.14)$$

ove, a secondo membro, abbiamo scritto la somma sulle correnti concatenate con C come flusso di \vec{j} attraverso una superficie S_C che poggia su C . Calcoliamo ora tale flusso attraverso due superfici S_1, S_2 che poggiano su C : S_1 interseca il filo (figura 10.2 di sinistra) in un punto mentre S_2 passa tra le armature del condensatore e quindi non interseca il filo (figura 10.2 di destra). Il primo membro della (10.1.14) non dipende dalla superficie che poggia su C , esso dipende solo da C . Se si calcola il secondo membro, invece, come flusso di \vec{j} attraverso S_1 o S_2 si ottengono risultati diversi:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS &= i(t) \neq 0, \\ \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n} dS &= 0, \end{aligned}$$

perché $\vec{j} = 0$ su S_2 in quanto non vi è passaggio di carica tra le due armature e quindi attraverso S_2 . Troviamo quindi, applicando la (10.1.14), due valori diversi per la stessa circuitazione del campo manetico:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \begin{cases} \mu_0 i(t) \neq 0 & S_C = S_1 \\ 0 & S_C = S_2. \end{cases} \quad (10.1.15)$$

Sappiamo che questa evidente contraddizione deriva dall'aver applicato la legge di Ampère ad una corrente non-stazionaria quale è quella in esame. A causa della non-stazionarietà

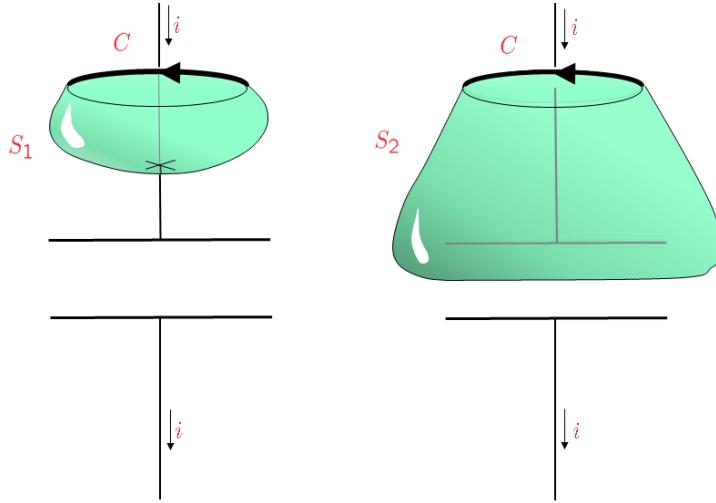


Figura 10.2: Applicazione della legge di Ampère ad un contorno chiuso in prossimità del condensatore in un circuito RC percorso da corrente.

della corrente, infatti, il flusso a secondo membro della (10.1.14) dipende dalla scelta della superficie S_C , mentre il primo membro chiaramente non ne dipende.

Mostriamo ora come l'applicazione della legge di Ampère-Maxwell (10.1.13) non dà luogo a questa inconsistenza. Per vederlo, calcoliamo la circuitazione a primo membro della (10.1.13) lungo lo stesso cammino chiuso C in figura 10.2, e valutiamo il secondo membro scegliendo per S_C , come sopra, le superfici S_1 ed S_2 . Il campo densità di corrente \vec{j} è diverso da zero solo lungo il filo, mentre è nullo tra le due armature. Le sue linee di campo terminano sull'armatura positiva e si originano su quella negativa. Sulle due armature varia nel tempo la densità di carica elettrica e questo produce una variazione del campo elettrico \vec{E} all'interno del condensatore. Tale variazione produce a sua volta, nello spazio tra le armature, la corrente di spostamento che è quindi diversa da zero solo all'interno del condensatore, ove \vec{j} è nullo. Calcoliamo \vec{j}_s nell'ipotesi fatta sopra che il condensatore sia vuoto e piano, con armature di area S e distanti h , si veda Figura 10.3. Se $q(t)$ è la carica sull'armatura positiva all'istante t e se \vec{u} è il versore perpendicolare dalle armature, nel verso che va da quella positiva a quella negativa, sappiamo che il campo elettrico è, in buona approssimazione, diverso da zero solo all'interno del condensatore, dove esso è uniforme e ha la seguente espressione:

$$\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{u} = \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u}, \quad (10.1.16)$$

essendo $\sigma(t) = q(t)/S$ la densità superficiale di carica $\sigma(t)$ sull'armatura positiva. Dalla

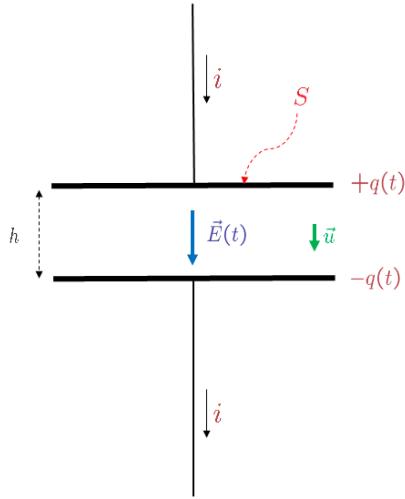


Figura 10.3: Campo elettrico variabile all'interno del condensatore.

(10.1.16) deduciamo la densità di corrente di spostamento:

$$\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u} \right) = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} \vec{u} = \frac{i(t)}{S} \vec{u}, \quad (10.1.17)$$

ove abbiamo usato la relazione (6.9.4): $i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$. Riassumendo, la densità di corrente totale \vec{j}_{tot} , definita in (10.1.2) come somma della densità di corrente ordinaria \vec{j} e della densità di corrente di spostamento \vec{j}_s è diversa da zero lungo tutto il circuito, anche tra le armature del condensatore:

$$\vec{j}_{\text{tot}} = \begin{cases} \vec{j} & \text{lungo il filo} \\ \vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{nel condensatore.} \end{cases} \quad (10.1.18)$$

Si noti che in nessun punto del circuito i due campi \vec{j} e \vec{j}_s danno entrambi contributi non-nulli al campo totale: dove l'uno è diverso da zero l'altro è nullo e viceversa, si veda la Figura 10.4. Dimostriamo adesso ora che l'inconsistenza (10.1.15) è superata grazie alla presenza della corrente di spostamento. Per farlo calcoliamo il secondo membro della legge di Ampère-Maxwell (10.1.13) scegliendo come S_C le due superfici S_1 ed S_2 della figura 10.3, e mostriamo che esso, nei due casi, ha lo stesso valore. Iniziamo col prendere $S_C = S_1$ e

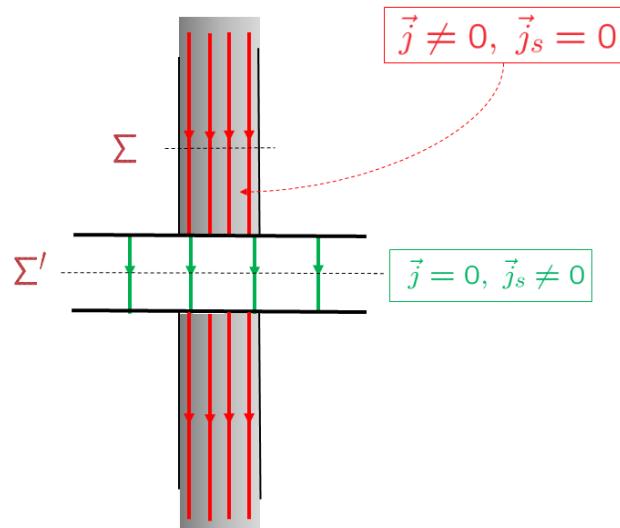


Figura 10.4: In rosso le linee di campo di \vec{j} (diverso da zero solo lungo il filo), in verde quelle di \vec{j}_s (diverso da zero solo all'interno del condensatore). Insieme esse descrivono le linee di campo di \vec{j}_{tot} . Si noti che qualsiasi sezione del circuito (p.es. una sezione Σ del filo o una superficie Σ' che si svolge tra le due armature del condensatore) è attraversata dallo stesso numero di linee del campo \vec{j}_{tot} . Questo esprime la proprietà della corrente totale di essere stazionaria a differenza della corrente ordinaria descritta da \vec{j} .

calcoliamo il flusso di \vec{j}_{tot} attraverso essa, osservando che su S_1 $\vec{j}_s = \vec{0}$, e quindi $\sum_{S_1} i_s = 0$:

$$\int_{S_1} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \sum_{S_1} i = i(t). \quad (10.1.19)$$

Se invece scegliamo $S_C = S_2$, su di essa $\vec{j} = \vec{0}$ e $\vec{j}_{\text{tot}} = \vec{j}_s$, ovvero $\sum_{S_2} i = 0$:

$$\int_{S_2} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_2} \vec{j}_s \cdot \vec{n} dS = \sum_{S_2} i_s. \quad (10.1.20)$$

Essendo \vec{j}_s diverso da zero solo all'interno del condensatore, al flusso contribuisce solo la parte di S_2 compresa tra le due armature, che chiamiamo S_2^{int} , ove \vec{j}_s è uniforme e vale (10.1.17):

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS &= \int_{S_2^{\text{int}}} \vec{j}_s \cdot \vec{n} dS = \int_{S_2^{\text{int}}} \frac{i(t)}{S} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \frac{i(t)}{S} \int_{S_2^{\text{int}}} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \frac{i(t)}{S} \int_{S_2^{\text{int}}} \cos(\theta) dS = \frac{i(t)}{S} \int_{S_2^{\text{int}}} dS_{\perp} = \frac{i(t)}{S} S = i(t), \end{aligned} \quad (10.1.21)$$

ove abbiamo indicato con θ l'angolo tra il vettore \vec{u} ed il vettore \vec{n} normale alla superficie S_2 . Esso ci dice quanto l'elementino dS su S_2 sia "inclinato" rispetto al piano parallelo alle armature. Il prodotto $\cos(\theta) dS$ quindi misura l'area dS_{\perp} della proiezione dell'elementino di superficie dS sul piano parallelo alle armature. L'integrale di dS_{\perp} fatto all'interno del condensatore altro non è che l'area S delle armature. Confrontando la (10.1.21) con (10.1.19) troviamo che *l'intensità della corrente totale, definita dalla (10.1.10), attraverso le due superfici è la stessa*:

$$\sum_{c.c.} i_{\text{tot}} = \int_{S_C} \vec{j}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} dS = \sum_{S_C} i + \sum_{S_C} i_s = \begin{cases} \sum_{S_1} i = i(t) & (S_C = S_1) \\ \sum_{S_2} i_s = i(t) & (S_C = S_2). \end{cases} \quad (10.1.22)$$

Usando la (10.1.13) troviamo adesso per la circuitazione del campo magnetico un unico valore:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{c.c.} i_{\text{tot}} = \begin{cases} \mu_0 i(t) & (S_C = S_1) \\ \mu_0 i(t) & (S_C = S_2). \end{cases} \quad (10.1.23)$$

Abbiamo quindi illustrato, in un esempio concreto, come l'introduzione delle correnti di spostamento curi l'inconsistenza della legge di Ampère in presenza di correnti non-stazionarie.

Terminiamo questo paragrafo mostrando che l'intensità di corrente di spostamento attraverso la superficie S_2 si può anche scrivere nella forma (10.1.12). Per farlo calcoliamo il flusso di \vec{E} in (10.1.16) attraverso S_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_{S_2}(\vec{E}) &= \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_2^{\text{int}}} \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \int_{S_2^{\text{int}}} \cos(\theta) dS = \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \int_{S_2^{\text{int}}} dS_{\perp} = \\ &= \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} S = \frac{q(t)}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (10.1.24)$$

Calcolandone la derivata rispetto al tempo e moltiplicando il risultato per ϵ_0 troviamo per l'intensità della corrente di spostamento il risultato ottenuto sopra:

$$\sum_{S_2} i_s = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{S_2}(\vec{E}) = \frac{dq}{dt}(t) = i(t). \quad (10.1.25)$$

10.2 Equazioni di Maxwell

Riassumiamo le equazioni, *in forma non-locale* e nel vuoto, dedotte finora. Sia C un percorso chiuso orientato ed S_C una generica superficie che poggia su C , sulla quale l'orientazione della normale \vec{n} è legata al verso lupo C dalla regola della mano destra. Sia inoltre S una qualsiasi superficie chiusa, con normale orientata verso l'esterno. Valgono nel vuoto le seguenti leggi:

1. Legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{B});$$

2. Legge di Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{int} q_i;$$

3. Legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_{S_C} i + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{S_C}(\vec{E}) \right);$$

4. \vec{B} solenoidale:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Queste equazioni si possono scrivere nella seguente forma locale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (10.2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho; \quad (10.2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right); \quad (10.2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.2.4)$$

In un mezzo isotropo e omogeneo, con costante dielettrica ϵ e permeabilità μ le precedenti equazioni si riscrivono sostituendo ϵ_0 con ϵ e μ_0 con μ . Le equazioni (10.2.1)-(10.2.4) furono

pubblicate da Maxwell nel 1861 e rappresentano la sistemazione matematica definitiva delle leggi che governano i fenomeni elettromagnetici.

Esse vanno corredate con la legge che descrive l'azione dei campi \vec{B} ed \vec{E} su una carica q in moto con velocità \vec{v}

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Inoltre, sia il campo elettrico che quello magnetico hanno una propria energia distribuita al loro interno con densità, nel vuoto,

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2; \quad u_m = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2. \quad (10.2.5)$$

Le equazioni (10.2.1)-(10.2.4) sono equazioni alle derivate parziali lineari, non-omogenee, nelle incognite $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$. I termini non-omogenei sono quelli che non contengono i campi elettrico e magnetico e descrivono le loro sorgenti, ovvero la carica elettrica (ρ) e le correnti (\vec{j}). La parte omogena del sistema di equazioni è definita mettendo $\rho = 0$ e $\vec{j} = \vec{0}$ e ha la forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (10.2.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (10.2.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.2.9)$$

Il sistema (10.2.6)- (10.2.9) descrive campi elettrici e magnetici in assenza di sorgenti e, come vedremo nel prossimo capitolo, ammette una soluzione non-banale anche in una regione lontana da cariche e correnti. Questa descrive campi \vec{E} e \vec{B} che variano rapidamente nel tempo e che, variando, si “sostengono” a vicenda: il campo \vec{B} variando nel tempo è sorgente di un campo \vec{E} la cui variazione, a sua volta, produce \vec{B} , e così via. Tale soluzione, come vedremo nel prossimo capitolo, descrive un'onda detta *onda elettromagnetica* che, a differenza delle onde materiali (p.es. un'onda su una corda, onde sonore, onda su una superficie d'acqua, ecc.) le quali necessitano di un mezzo materiale per propagarsi, possono propagarsi anche nel vuoto con velocità

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

In un mezzo, isotropo e omogeneo, caratterizzato dalle costanti ϵ , μ , le equazioni di Maxwell si ottengono da quelle nel vuoto (10.2.1)-(10.2.4) sostituendo $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ e $\mu_0 \rightarrow \mu$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (10.2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho; \quad (10.2.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right); \quad (10.2.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.2.13)$$

Le equazioni (10.2.5) invece si riscrivono nella forma

$$u_e = \frac{\epsilon}{2} |\vec{E}|^2; \quad u_m = \frac{1}{2\mu} |\vec{B}|^2. \quad (10.2.14)$$

Ricordiamo ora la definizione dei vettori \vec{D} e \vec{H}^1

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu,$$

per un mezzo lineare e omogeneo, per riscrivere le equazioni (10.2.10)-(10.2.13) e (10.2.14) nella seguente forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (10.2.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho; \quad (10.2.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (10.2.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.2.18)$$

Le equazioni (10.2.5) invece si riscrivono nella forma

$$u_e = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}; \quad u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}. \quad (10.2.19)$$

Si dimostra che le equazioni (10.2.15)-(10.2.18) e (10.2.19), da noi derivate per un mezzo isotropo e omogeneo, sono in realtà generali e descrivono i campi elettrici e magnetici in un mezzo qualsiasi. Osserviamo che l'aver scritto le equazioni di Maxwell (10.2.15)-(10.2.18), e l'equazione (10.2.19), solo in termini delle cariche di conduzione (ρ) e delle correnti di conduzione (\vec{j}), che possiamo definire "sorgenti macroscopiche", senza includere le sorgenti di origine "atomica", ovvero le cariche di polarizzazione e le correnti amperiane, ha richiesto l'introduzione dei campi \vec{D} e \vec{H} oltre a \vec{E} e \vec{B} .

In un mezzo isotropo e omogeneo, caratterizzato dalle costanti ϵ, μ , le onde elettromagnetiche si propagano con velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} < c.$$

Se il mezzo non è ferromagnetico, ricordiamoci che, con buona approssimazione, $\mu_r \simeq 1$, per cui

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} c = \frac{c}{n} < c,$$

¹Per un materiale ferromagnetico $\mu = \mu(H)$.

ove abbiamo definito con $n = \sqrt{\epsilon_r}$, che viene chiamato *indice di rifrazione* del mezzo ed è sempre maggiore di 1: $n > 1$.

La velocità c coincide con la velocità della luce nel vuoto. Questo portò Maxwell ad ipotizzare che *la luce fosse una particolare forma di onda elettromagnetica*.

Le onde elettromagnetiche, predette da Maxwell come soluzione delle sue equazioni, furono scoperte per la prima volta da Hertz nel 1888.

Ricordiamo infine, dalla discussione all'inizio del presente capitolo, che la conservazione della carica elettrica, espressa dall'equazione di continuità, è condizione necessaria per la consistenza dell'equazione di Ampère-Maxwell (se veda l'equazione (10.1.7)). *Le equazioni di Maxwell, ed in particolare la (c), implicano quindi la conservazione della carica elettrica.*

Indice analitico

- agitazione termica, 163
- Ampère, 200, 234, 247, 271
- Ampère-Maxwell, 304
- angolo
 - solido, 87, 89, 90
- Avogadro, 119
- Bohr
 - raggio di, 80
- campo
 - centrale, 96
 - conservativo, 85
 - elettrico, 39, 40, 85, 86, 165, 179, 305
 - elettromagnetico, 90
 - elettrostatico, 85, 94, 165, 166
 - flusso, 86
 - linee, 100
 - microscopico, 120
 - radiale, 85
 - scalare, 92
 - solenoidale, 102, 175, 221
 - vettoriale, 92
- carica elettrica
 - conservazione della, 175
 - eccesso di, 121, 123, 124, 137, 152
- cariche di polarizzazione, 146
- Cavendish, 128
- circuitazione, 125, 167
- circuito elettrico, 166
- condensatore, 128, 131, 139, 140, 143, 155, 160
 - capacità, 129, 131, 146
 - carica, 132, 134
 - in parallelo, 135
 - in serie, 135
- piano, 132, 134, 146
- sferico, 134
- conduttore
 - cavo, 125, 127, 128
- conduttori, 163
- coordinate
 - cartesiane, 39, 92
 - cilindriche, 42, 96
 - polari, 89, 90, 98, 134, 140
- corrente, 163
 - di spostamento, 249, 295
 - stazionaria, 205
- corrente elettrica, 164, 165, 170–172, 188
 - densità della, 169, 170, 181
 - indensità della, 167
 - stazionaria, 170, 175, 178, 183, 184
 - unità di misura della, 167
 - verso, 167
- costante dielettrica, 146
- costante dielettrica relativa, 144
- Coulomb, 85, 87, 96, 131
- ddp (differenza di potenziale), 129, 165
- ddp(differenza di potenziale), 82, 126–128, 131, 132, 135, 144
- ddp(differenza di potenziale), 182–184
- diamagnetiche
 - sostanze, 253
- dielettrici, 143, 147, 149
- dielettrico, 146
- dipolo, 150, 158, 159
 - elettrico, 147
 - momento, 149, 150, 158
- Effetto punta, 142
- elettrone, 80

- libero, 119
- massa, 80
- moto, 80, 260, 261
- moto di deriva, 120
- orbita, 260
- protone, coppia, 81
- velocità, 80, 81, 261
- elettroni
 - gas, 163
 - liberi, 119, 120, 123, 163, 165, 179
- elettronica
 - nube, 147, 148
- elettronVolt, 82
- energia, 132–134, 140, 155
 - cinetica, 81
 - di ionizzazione, 82
 - di legame, 82
 - potenziale, 81
 - termica, 119
 - totale, 80, 81
- equazione di continuità, 175
- Equazione di Laplace
 - definizione, 95
- Equazione di Poisson
 - definizione, 95
 - problema di Dirichelet, 105
 - problema di Neumann, 106, 127
- f.e.m. (forza elettromotrice), 165
- Farad, 131
- Faraday, 99, 128, 144
- ferromagnetiche
 - sostanze, 254
- forma locale, 92, 158
- frequenza, 198, 199, 206, 207
- Funzioni
 - armoniche, 95
- Gauss, 85, 86, 89, 91, 94–97, 111–113, 121, 122, 126, 128, 129, 139, 153, 156, 271, 304
 - forma locale, 92, 94
 - unità di misura, 209
- Gilbert, 197
- Hall
 - effetto, 209, 211
 - sonda, 211
- idrogeno, 80, 82, 158, 257, 260
- induzione
 - cariche di , 144
 - completa, 126, 128, 135, 143, 145
 - dielettrica, 146, 155
 - elettrostatica, 122–124, 137, 146
- induzione elettromagnetica, 273
- isolanti, 163
- isteresi, 254
- Kirchhoff
 - leggi di , 186
- Laplace, 206, 215, 217, 219, 221, 222, 286
 - seconda legge, 203
- laplaciano, 95
- lavoro, 77–79, 82, 83, 115, 132, 133
- legame
 - energia di , 82
- Legge di Ampère, 240
- Lorentz, 202, 203, 210, 213, 259, 281
- maglia, 186
- magnetica
 - carica, 197
 - forza, 197, 198, 200, 202
 - interazione, 198
 - permeabilità, 219, 251
 - suiscettività, 252
- magnetico
 - ago, 197, 199, 200, 208
 - campo, 198, 202, 204, 208, 209, 215, 221, 230, 251, 253, 254, 273, 277, 283, 305
 - dipolo, 199, 206, 208, 257, 279
 - momento, 257, 258, 261, 264, 267
 - polo, 199
- magnetite, 197
- massa
 - ridotta, 80
- Maxwell, J.C., 249, 295

- equazioni di, 305, 306
- metalli, 163
- moto
 - termico, 120, 164, 180
- Oernsted, 200
- onde elettromagnetiche, 307
- paramagnetiche
 - sostanze, 254
- polarizzazione, 145–147, 149, 155, 157–159
 - cariche di, 151
 - carica di, 150
 - cariche di, 146, 151–153, 155, 156, 158
- potenziale, 95, 122, 127–130, 132
 - elettrico, 98
 - energia, 81
 - magnetico, 105, 223
- rame, 163
- regola della mano destra, 200, 205, 206, 221, 230, 240, 245, 274, 277
- resistenze
 - in parallelo, 183
 - in serie, 183
- resistività, 175
- rete elettrica, 185
- rifrazione
 - indice di, 307
- rotore, 95
- Rydberg, 82
- scarica, 165
- simmetria, 95, 96, 112, 129, 139
- struttura microscopica, 163
- velocità
 - deriva, 164
- Wheatstone, 189