Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Licenciatura En Física
Física Computacional I

Reporte PDE's

"Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales"

Fryda Susana Oviedo Aguilar

Profr. Carlos Lizárraga Celaya

Mayo del 2021

1. Introducción

En las actividades 10, 11 y 12 se analizaron diferentes ecuaciones diferenciales parciales, se buscó una solución numérica en cada una de ellas utilizando el método de diferencias finitas, dicho método es bastante útil y practicamente sencillo.

En la actividad 10 se buscó resolver algunos casos para la ecuación de calor, en la actividad 11 se resolvieron casos para la ecuación de onda y en la actividad 12 se resolvieron casos para la ecuación de Poisson. En cada caso al resolverlos se necesitó considerar las condiciones de frontera de tipo Dirichlet y las de tipo Neumann.

2. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales son ecuaciones en las que se definen relaciones entre varias derivadas parciales de una función de múltiples variables. Normalmente es bastante complicado o en ocasiones imposible el poder definir soluciones explícitas a este tipo de ecuaciones, pero existen diferentes métodos de aproximaciones numéricas para resolverlos.

Hay diferentes tipos de estas ecuaciones: las parabólicas, las hiperbólicas, y las elípticas. Son ecuaciones lineales de segundo orden y tienen la forma: $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$. Dependiendo de los coeficientes podemos saber la clasificación de la ecuación.

2.1. Ecuaciones Parabólicas

Este tipo de ecuaciones permite resolver los denominados problemas de propagación que son problemas transitorios donde la solución de la ecuación diferencial parcial es requerida sobre un dominio abierto, sujeta a condiciones iniciales y de frontera prescritas. Los ejemplos mas comunes de estos problemas incluyen a problemas de conducción de calor, problemas de difusión, y en general problemas donde la solución cambia con el tiempo.

2.2. Ecuaciones Hiperbólicas

Las ecuaciones hiperbólicas también tratan con problemas de propagación, como por ejemplo la ecuación de onda, pero con la distinción de que aparece una segunda derivada respecto del tiempo. En consecuencia la solución consiste en distintos estados característicos con los cuales oscila el sistema. Es el caso de problemas de vibraciones, ondas de un fluido, transmisión de señales acísticas y eléctricas.

2.3. Ecuaciones Elípticas

Este tipo de ecuaciones permite resolver los llamados problemas de equilibrio, que son problemas donde se busca la solución de una ecuación diferencial dada, en un dominio cerrado, sujeta a condiciones de frontera prescritas. Es decir que los problemas de equilibrio son problemas de condiciones de frontera. Los ejemplos más comunes de tales problemas incluyen a distribuciones estacionarias de temperatura, flujo de fluidos incompresibles no viscosos, distribución de tensiones en sólidos en equilibrio, el campo eléctrico en una región que contenga una densidad de carga dada, y en general problemas donde el objetivo sea determinar un potencial.

3. Condiciones en la frontera

Las condiciones en la frontera dan restricciones para un problema, tal que, permite resolverlo. Estas condiciones se pueden aplicar tanto en ecuaciones diferenciales ordinarias como en parciales.

Existen diferentes tipos de condiciones en la frontera: Dirichlet, Neumann, y Robin.

3.1. Dirichlet

La condición de frontera de Dirichlet (o de primer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Se da cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. La cuestión de hallar las soluciones a esas ecuaciones con esta condición se le conoce como problema de Dirichlet.

3.2. Neumann

La condición de frontera de Neumann (o de segundo tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, llamada así en alusión a Carl Neumann. Se presenta cuando a una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, se le especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio.

3.3. Robin

La condición de frontera de Robin (o de tercer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Victor Gustave Robin (1855-1897), cuando en una ecuación diferencial ordinaria o en una derivadas parciales se le específica una combinación lineal de los valores de una función y los valores de su derivada sobre la frontera del dominio.

4. Método de diferencias finitas

Los métodos de diferencias finitas son diferentes técnicas que sirven para resolver ecuaciones diferenciales al aproximar derivadas con diferencias finitas. Para esto se discretiza tanto el dominio espacial como el temporal, y se separan en un número finito de pasos. El valor de la solución en cada punto discreto se aproxima resolviendo ecuaciones algebráicas que contienen diferencias finitas de puntos adyacentes. Estos métodos convierten las PDEs (o las ODEs) en un sistema de ecuaciones lineales que se resuelven con álgebra matricial.

El método de diferencias finitas utiliza la expansión de Taylor para aproximar las derivadas. Teniendo el valor que toma la función al evaluar en un punto específico, entonces:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \tfrac{h}{1!} f'(x_0) + O(h^2)$$

$$f'(x_0) \approx \tfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + O(h^2)$$

donde $O(h^2)$ denota términos de orden superior. Con esto se puede utilizar el método de diferencias finitas hacie enfrente (ya que utiliza el punto que sigue). Por otro lado, el método de diferencias finitas hacia atrás se obtiene similarmente, y tenemos que la derivada es:

$$f^{'}(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + O(h^2)$$

Al promediar las dos ecuaciones obtenidas se puede obtener la diferencia finita centrada de orden superior

$$f^{'}(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} + O(h^2)$$

Con esta tercera ecuación podemos aproximar la segunda derivada del siguiente modo:Con esta tercera ecuación podemos aproximar la segunda derivada del siguiente modo:

$$f^{''}(x_0) \approx \frac{f^{'}(x_0+h)-f^{'}(x_0)}{h} + O(h^2)$$

Al sustituir las diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás, obtenemos:

$$f^{''}(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} + O(h^3)$$

Esta ecuación nos relaciona tres puntos diferentes.

5. Ecuación de Calor

En el trabajo de la actividad 10 utilizamos la ecuación de calor. La Ecuación del Calor describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de la Temperatura $u(x,t)$. En un medio unidimensional x, la ecuación es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(\frac{\partial u}{\partial x^2})$$

Entonces con el método de diferencias finitas utilizando serie de Taylor para la resolución del c uaciones diferenciales llegamos a una diferencia finita centrada de orden superior

$$f^{'}(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} + O(h^3)$$

Entonces, a partir de esta ecuación y utilizando condiciones de frontera tipo Neumann llegamos a la solución de 2 ejercicios diferentes, con dos condiciones iniciales diferentes. Tal ecuación se hace presente en la actividad 10 del curso:
$https://github.com/FrydaOviedo/Fisica_Computacional/blob/main/Actividad10/Actividad10.i$

6. Ecuación de Onda

Para la solución de la ecuación de onda con la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(x, y, z, t))$$

donde c^2 es la velocidad de propagación de la información. La función $u(x, y, z, t)$ representa la presión en una onda acústica, la intensidad de un campo electromagnético, el desplazamiento respecto a un nivel de referencia como lo puede ser la amplitud de una onda superficial en la superficie del agua o el desplazamiento respecto a la horizontal de una cuerda vibrante. En una dimensión, por ejemplo el caso de una cuerda vibrante, la Ecuación de Onda se simplifica a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f(x, t) x \in (0, L], t \in (0, T]$$

Requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución.

$$u(x, 0) = I(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

Se requiere también especifícar el valor de la constante c y la función $I(x)$.

Tal teoría fue aplicada en el trabajo de la actividad 11, en el cual se resolvieron 6 ejercicios, y en donde la resolución del problema y respetivo codigo donde se muestran las condiciones de frontera iniciales quedan se encuentran en el repositorio GitHub: $https://github.com/FrydaOviedo/Fisica_Computacional/blob/main/Ac$

7. Ecuación de Poisson

La resolución de la ecuación de Poisson se hizo en la actividad 12, es de tipo elíptica. La solución de la Ecuación de Poisson es

$$\nabla u(x, y, z) = f(x, y, z)$$

La Ecuación de Poisson se da en problemas de campos gravitatorios, campos eléctricos y otros problemas en la Física. La Ecuación de Poisson es la generalización de la Ecuación de Laplace.

$$\nabla 2u = 0$$

Finalmente se utilizó un codigo ya existente para tratar diferentes tipos de condiciones: de Dirichlet, de Neumann y de Robin. El codigo utilizado así como la resolución de todos los problemas de la actividad se encuentran en GitHub: $https : //github.com/FrydaOviedo/Fisica_Computacional/blob/main/Actividad12/Activ$

8. Conclusion

Se aprendió a tratar con diferentes tipos de ecuaciones diferenciales parciales, en sus diferentes presentaciones. Se utilizó el método de diferencias finitas dando lugar a resolver numéricamente los problemas ya que las soluciones no son analíticas. Las actividades que se realizaron para abarcar este tema fueron muy interesantes, de gran ayuda para el practicar programación en problemas cotidianos dentro del mundo de la física, así mimsmo demuestran la importanica de la programación para resolver problemas bastante complejos con gran facilidad. La realización de las actividades ha sido un reto al nivel educativo en el que se preseta la asignatura de Física Computacional 1, sin embargo, han sido de las más interesantes, y demuestran ser muy practicas en la física.