

# 第二篇 《运动学》

第五章 点的运动学

第六章 刚体的简单运动

第七章 点的合成运动

第八章 刚体的平面运动

# 第八章 刚体的平面运动

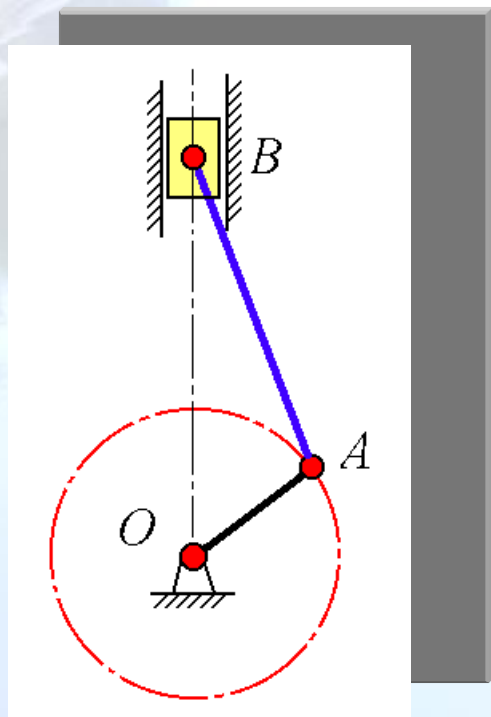
§ 8-1 刚体平面运动的概念和运动分解

§ 8-2 求平面图形内各点速度的基点法

§ 8-3 求平面图形内各点速度的瞬心法

§ 8-4 用基点法求平面图形内各点的加速度

## § 8-1 刚体平面运动的概念和运动分解



曲柄连杆机构中连杆 $AB$ 的运动

$A$ 点作圆周运动， $B$ 点作直线运动，

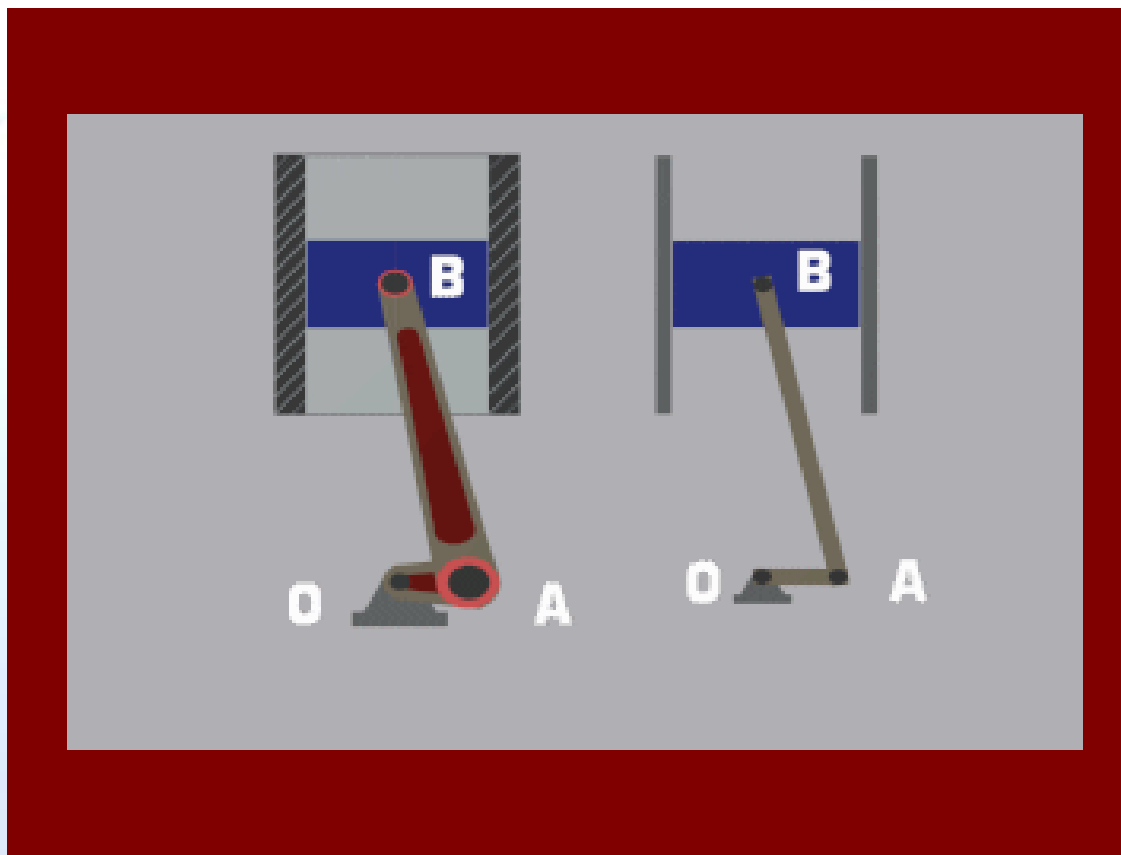
因此， $AB$  杆的运动既不是平动也不是定轴转动，而是平面运动。



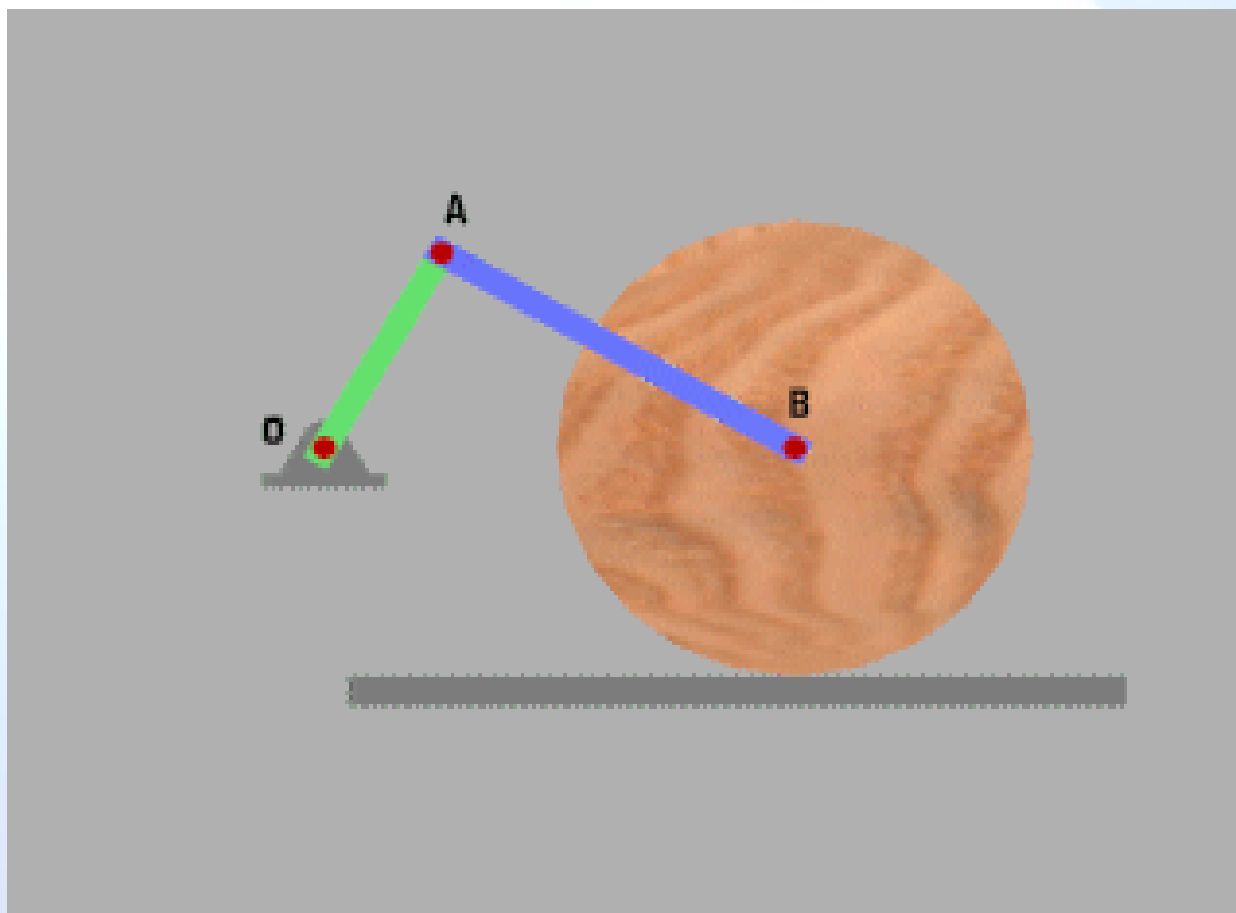
### 一、平面运动的定义

在运动过程中，刚体上的任意一点到某一固定平面的距离始终保持不变，这种运动称为**平面运动**。也就是说，刚体上的各点都在平行于某一固定平面的平面内运动。

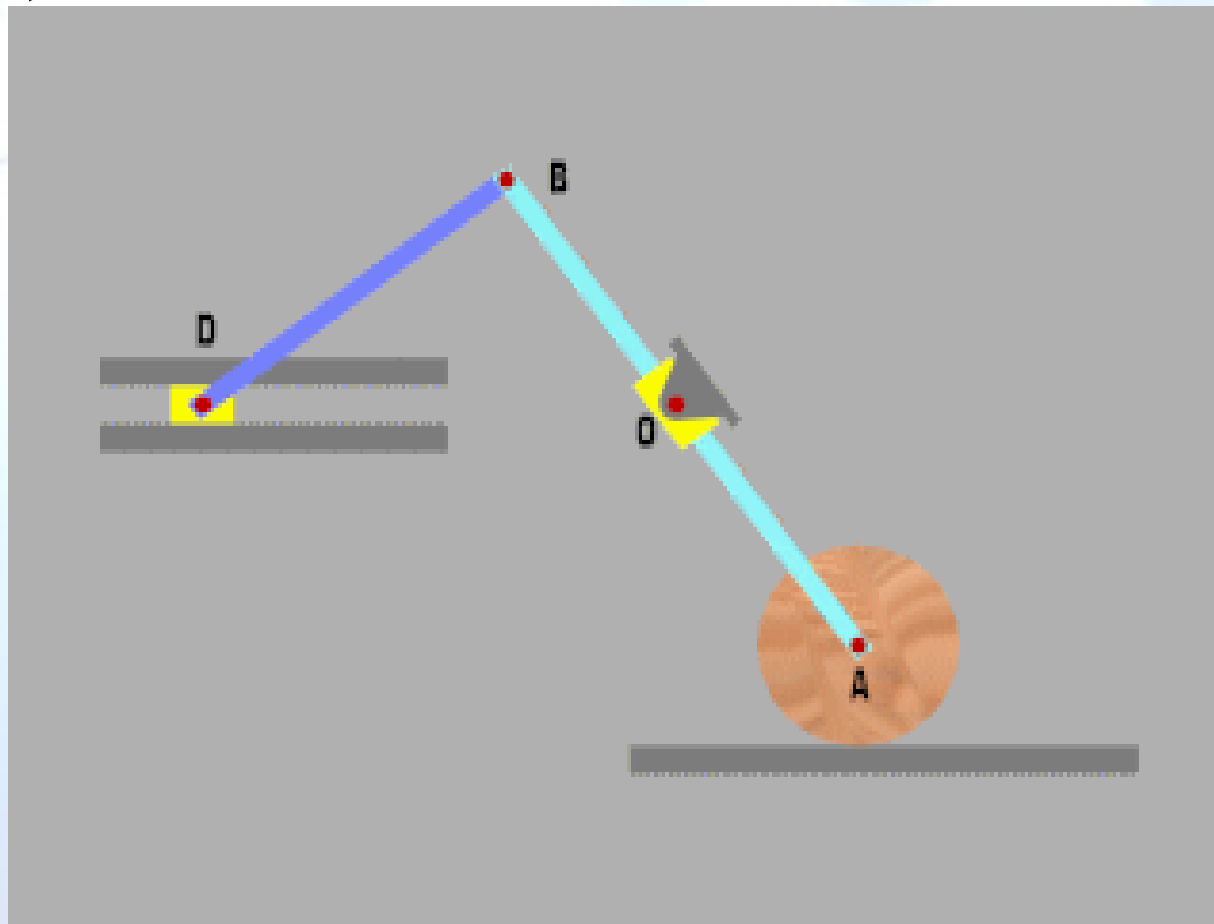
## 影片901



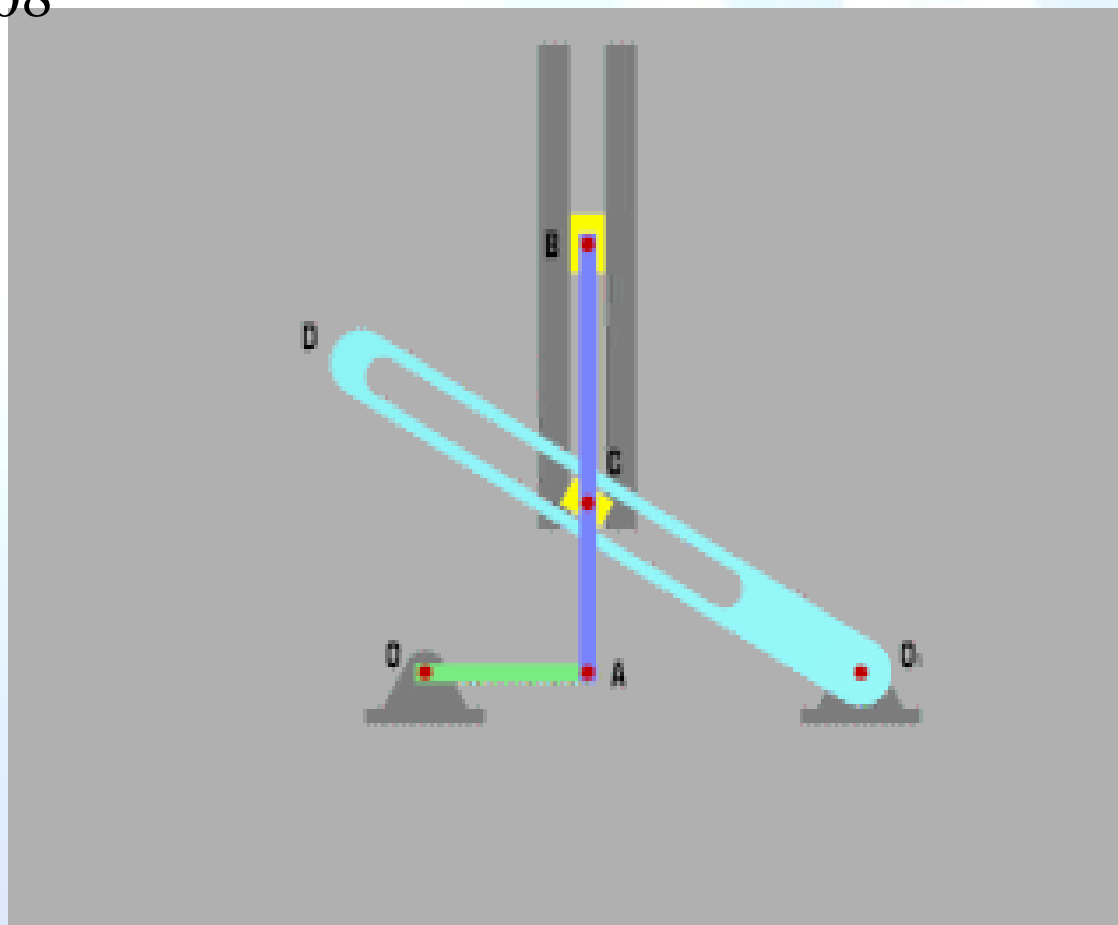
## 影片907



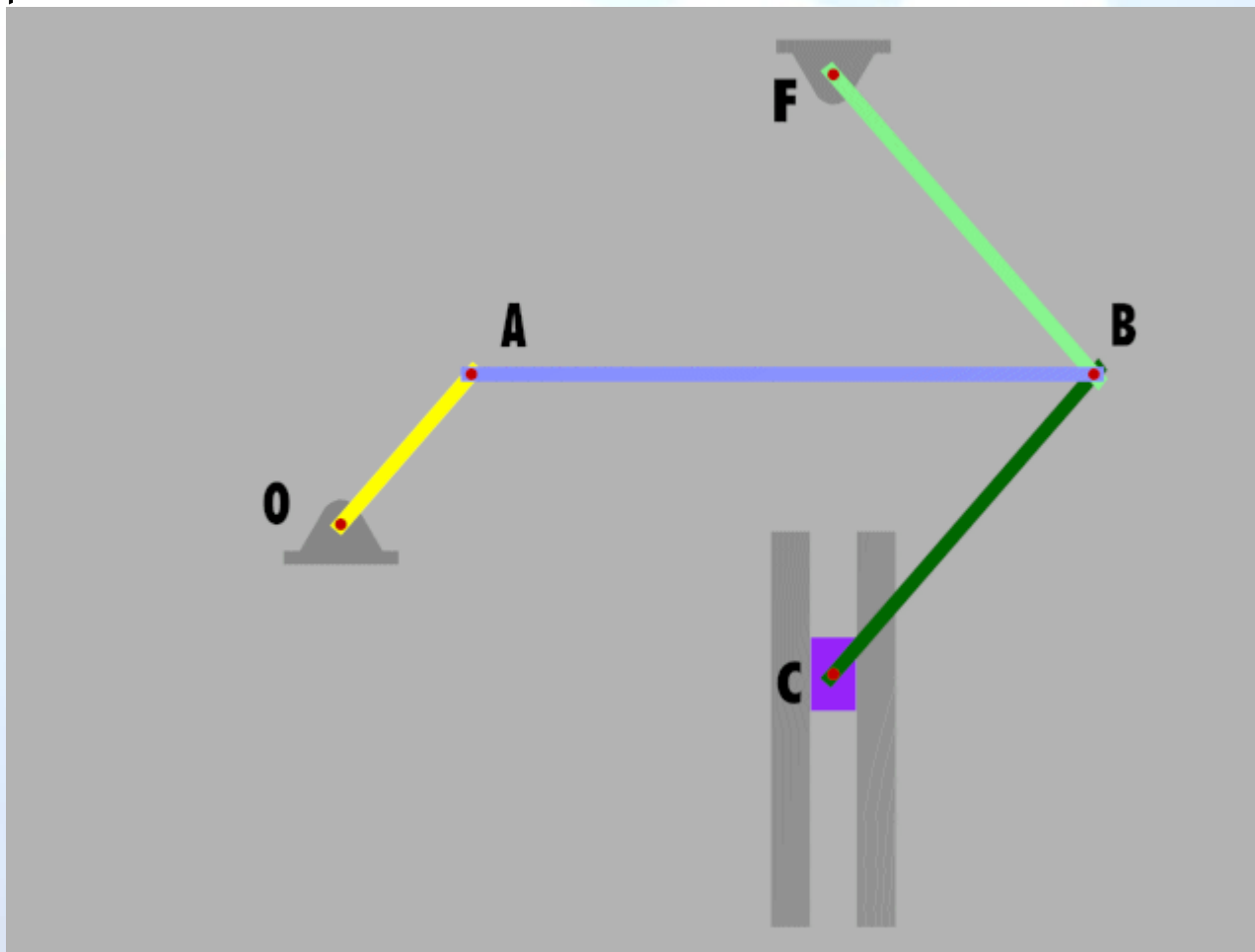
## 影片909



## 影片908



## 影片905







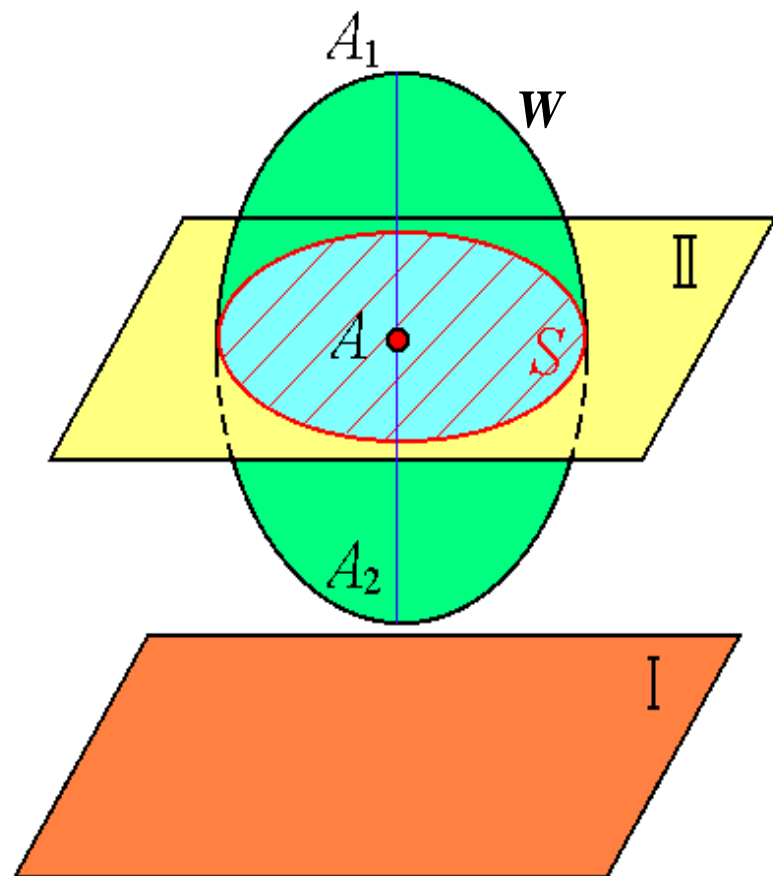
刚体的平面运动是工程上常见的一种运动，这是一种较为复杂的运动。对它的研究可以在研究刚体的平动和定轴转动的基础上，通过运动合成和分解的方法，将平面运动分解为上述两种基本运动。然后应用合成运动的理论，推导出平面运动刚体上**一点**的速度和加速度的计算公式。



## 二、平面运动的简化

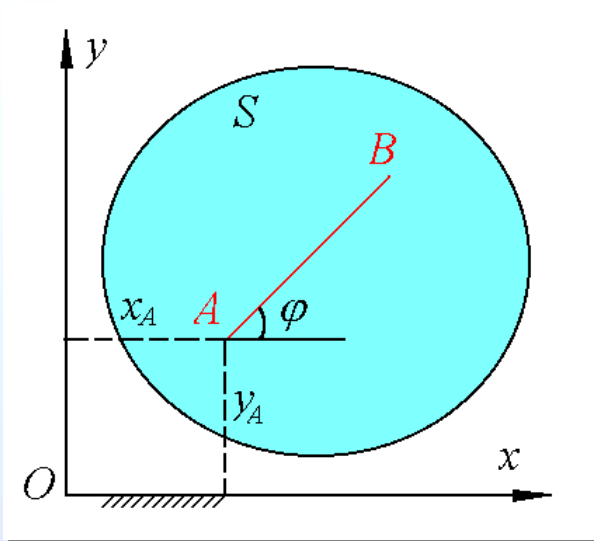
刚体的平面运动可以简化为平面图形 $S$ 在其自身平面内的运动。

即在研究平面运动时，不需考虑刚体的形状和尺寸，只需研究平面图形的运动，确定平面图形上各点的速度和加速度。



### 三、平面运动的分解 • 刚体的平面运动方程

为了确定平面图形的位置，我们只需确定平面图形内任意一条线段的位置。



任意线段AB的位置可用A点的坐标和AB与x轴夹角表示。因此图形S的位置决定于 $x_A, y_A, \varphi$ 三个独立的参变量，它们都是时间的函数。

$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases} \quad \text{平面图形的运动方程}$$



#### 四、平面运动的分解：平动和转动

在运动中：

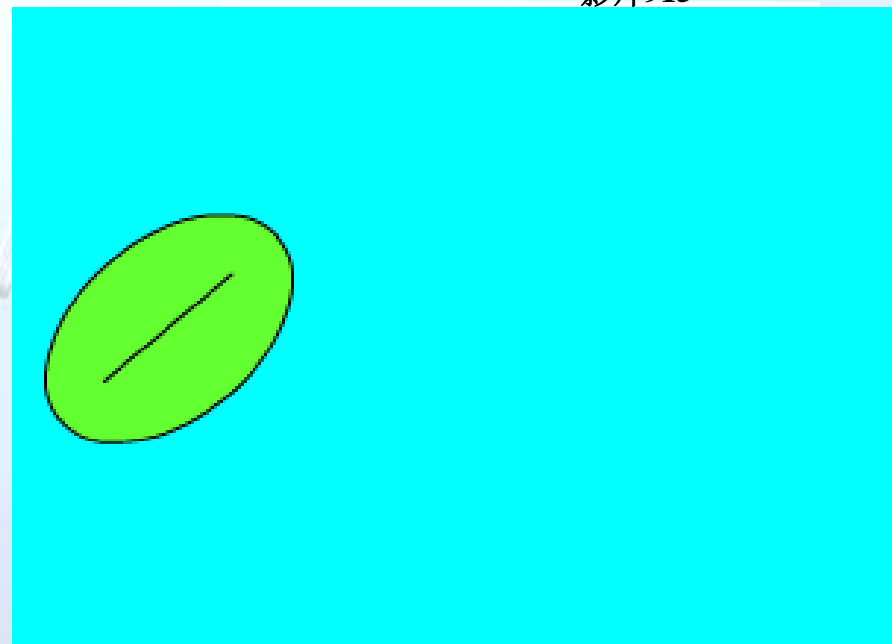
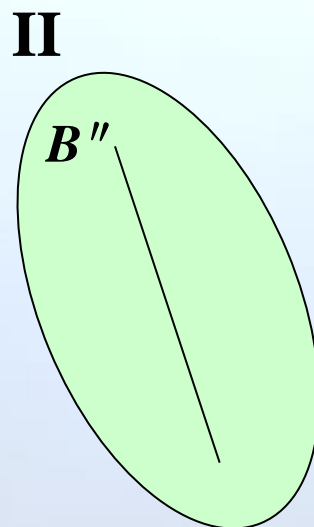
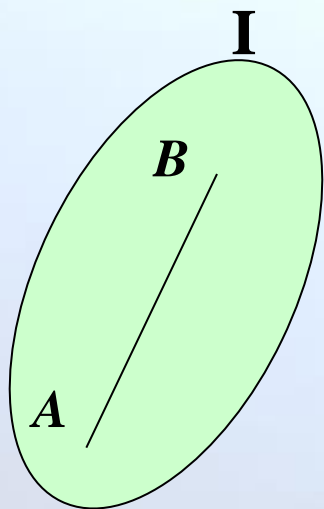
当  $A$  点不动时，则刚体作定轴转动。

当  $\varphi$  角不变时，则刚体作平动。

故刚体平面运动可以看成是平动和转动的合成运动。

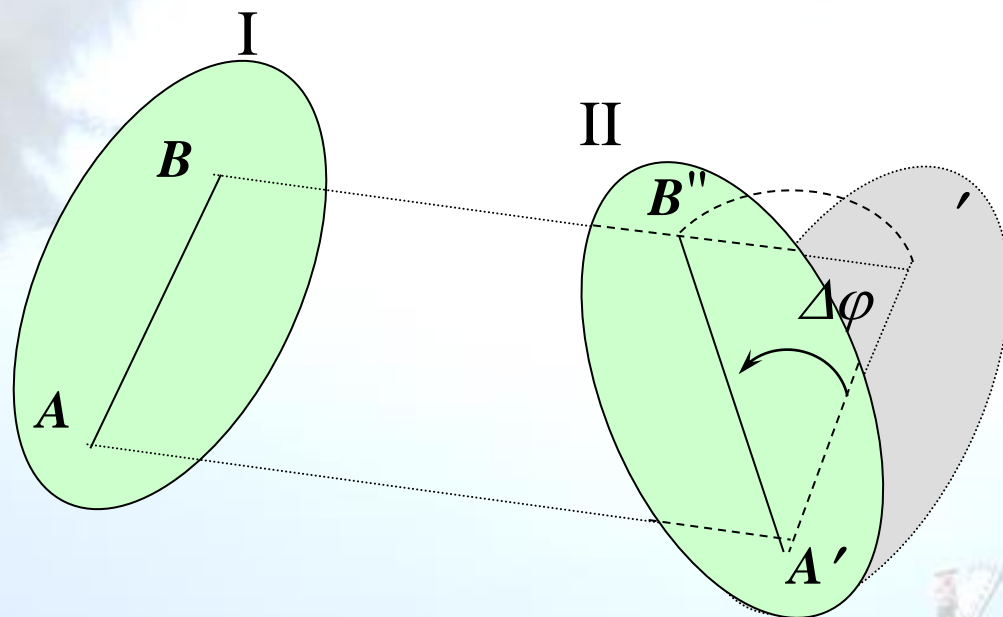
例如：平面图形  $S$  在  $\Delta t$  时间内从位置 I 运动到位置 II

影片915

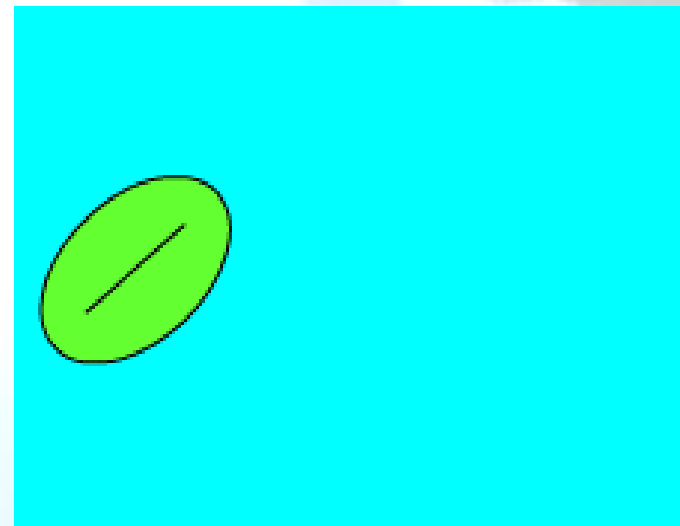




例如：平面图形  $S$  在  $\Delta t$  时间内从位置 I 运动到位置 II



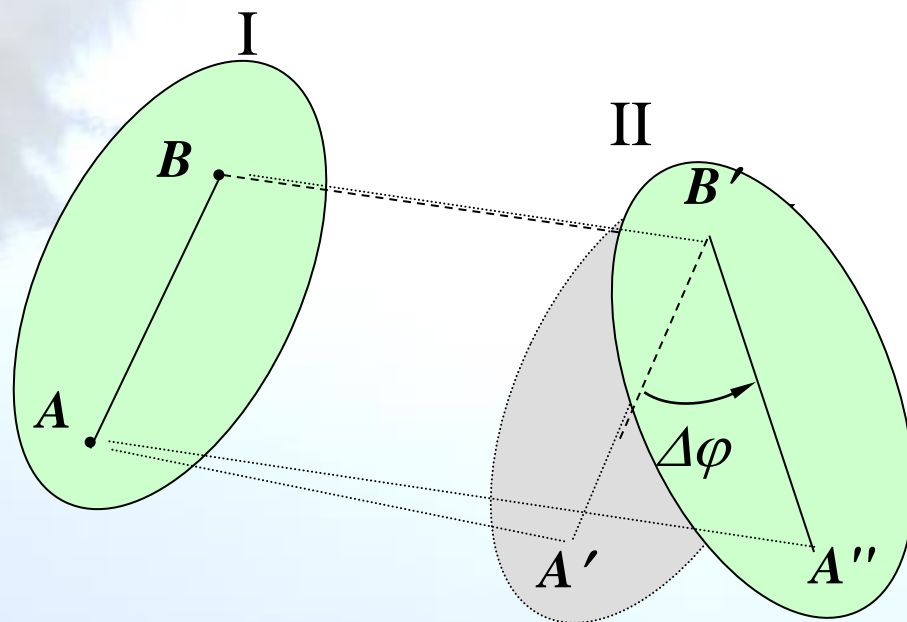
影片910



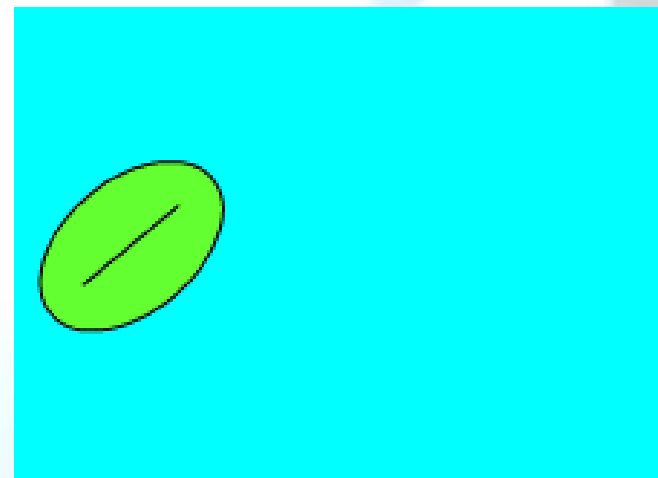
以A为基点：随基点A平动到A'B'后，绕基点转  $\Delta\varphi$  角到A'B''



另一种运动过程:



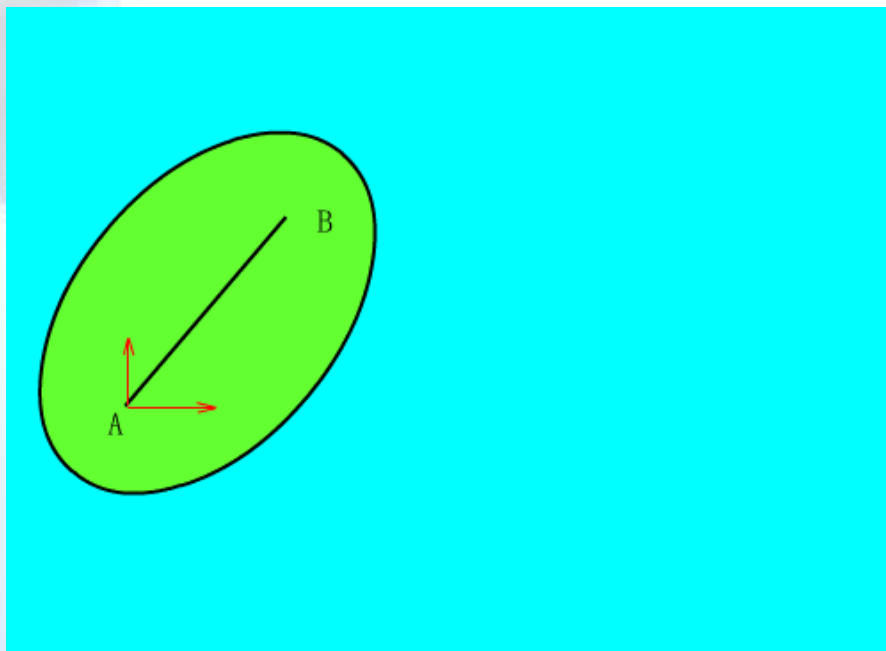
影片912



以 $B$ 为基点: 随基点 $B$ 平动到 $A'B'$ 后, 绕基点转 $\Delta\varphi$  角到 $A''B'$

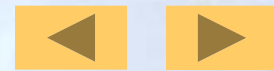
即: 刚体的平面运动为平动和转动的合成运动。

## 影片913



$x$

实际上，图形的运动是平动和转动同时进行的，在描述图形的运动时，在基点放一**动坐标系**，动坐标系随基点作平动，图形的运动分解为随同基点的平动和在动系内绕基点的转动。



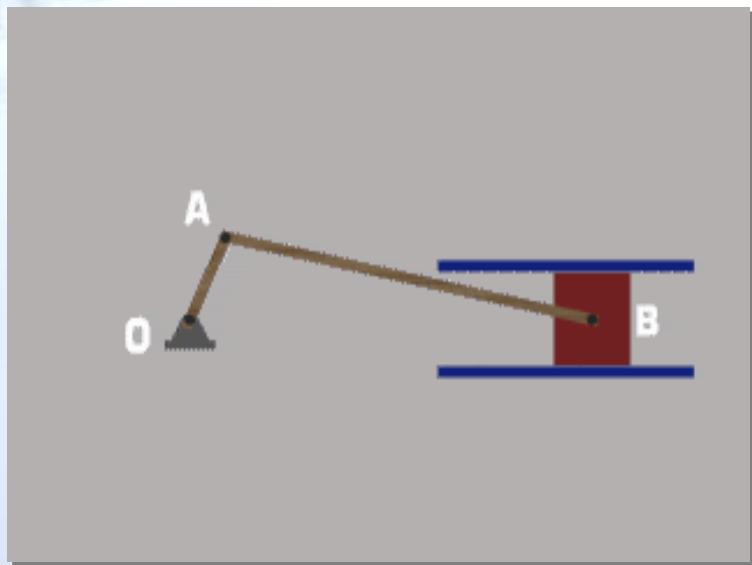
平动的速度和加速度随基点的选择有关，  
而平面图形绕基点转动的角速度和角加速度与  
基点选取无关。(即在同一瞬间，图形绕任一基  
点转动的 $\omega$ 、 $\alpha$ 都是相同的) 基点的选取是任  
意的。(通常选取运动情况已知的点作为基点)





## 曲柄连杆机构

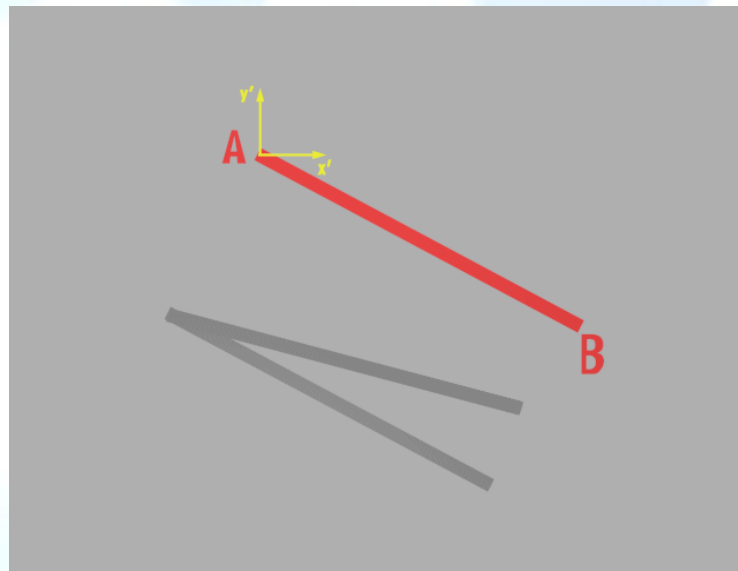
影片902



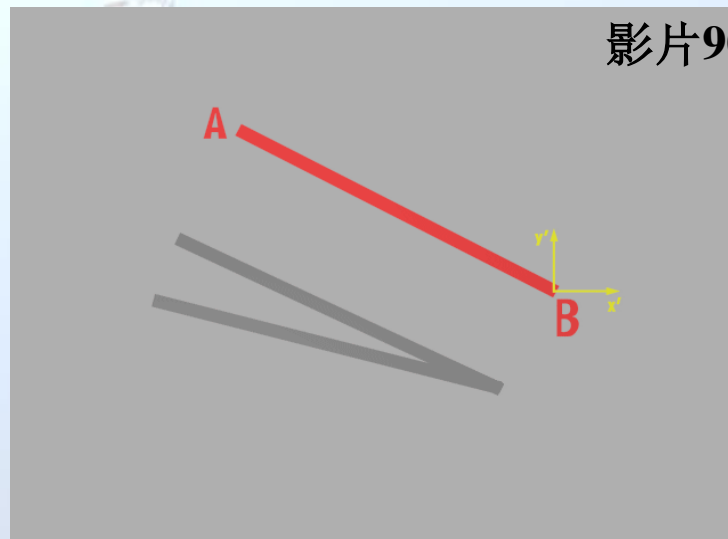
$AB$ 杆作平面运动

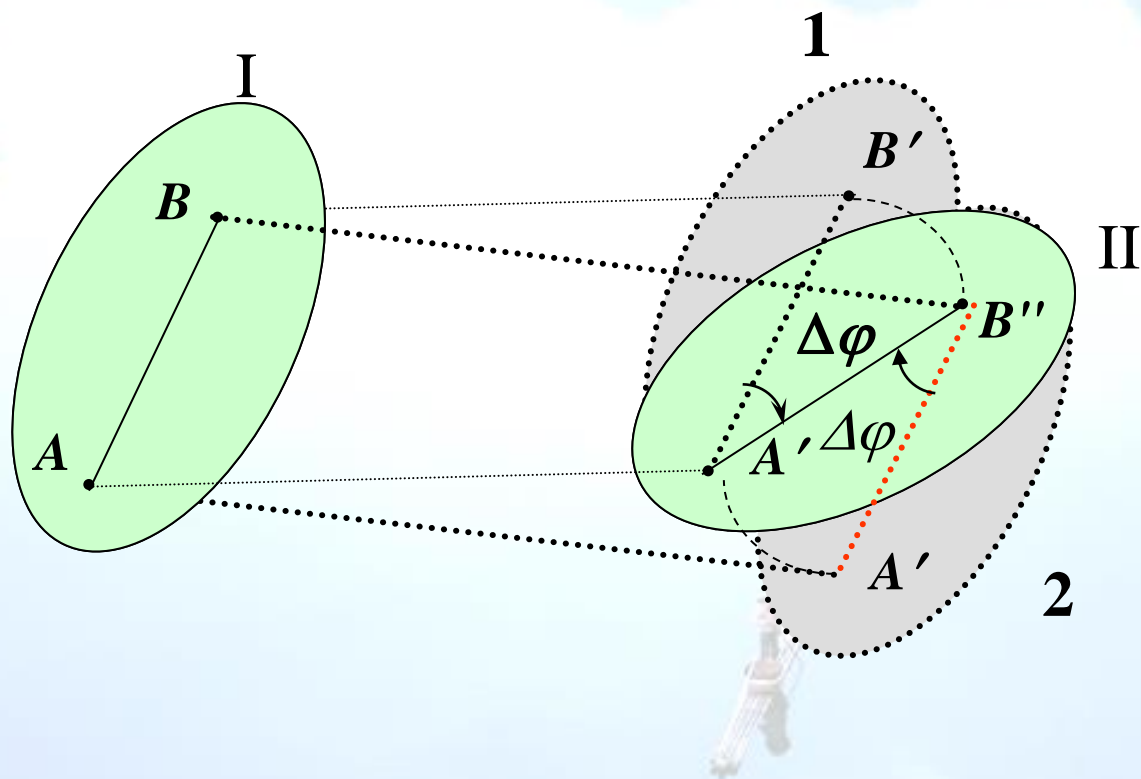
## 平面运动的分解

影片903



影片904



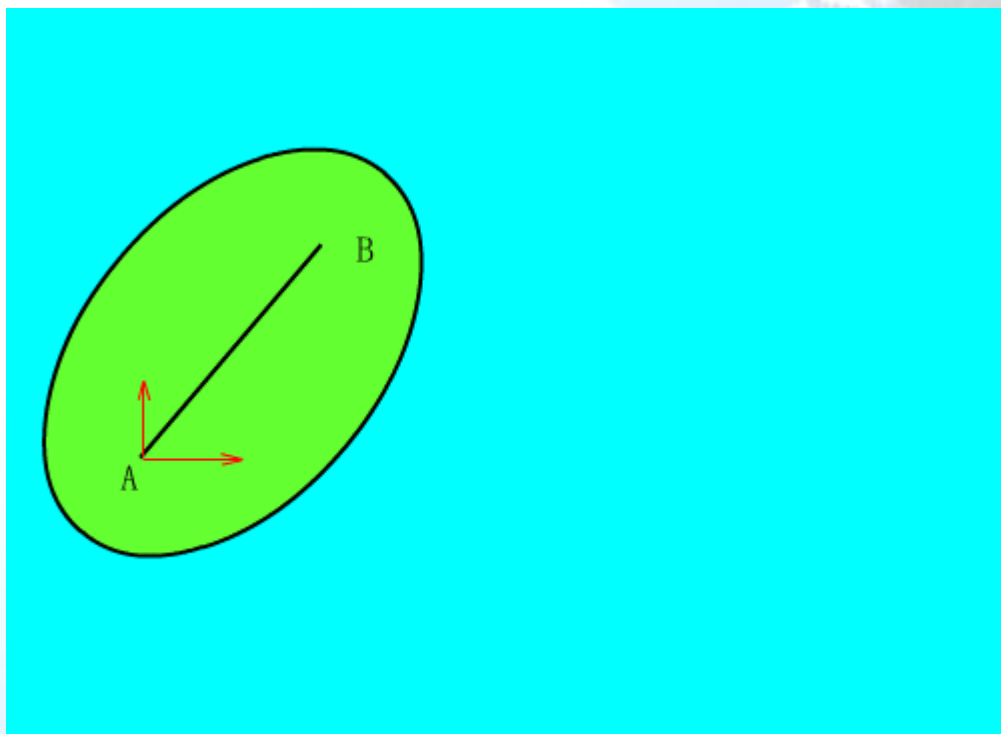


## § 8-2 求平面图形内各点速度的基点法

### 一、基点法（合成法）

取 $A$ 为基点，将动系固结于 $A$ 点，动系作平动。

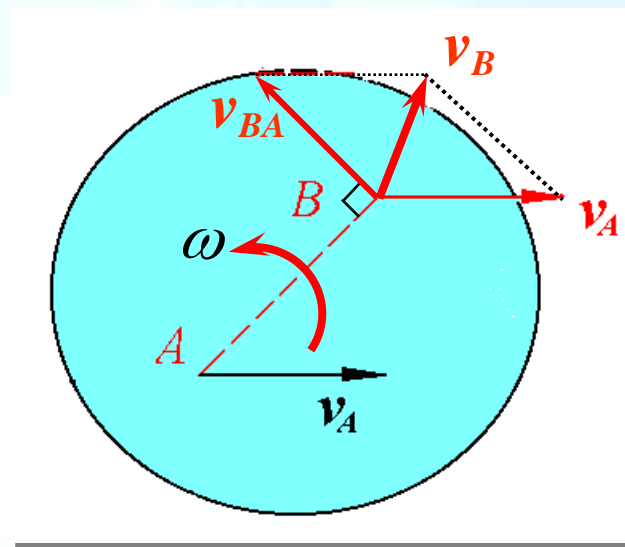
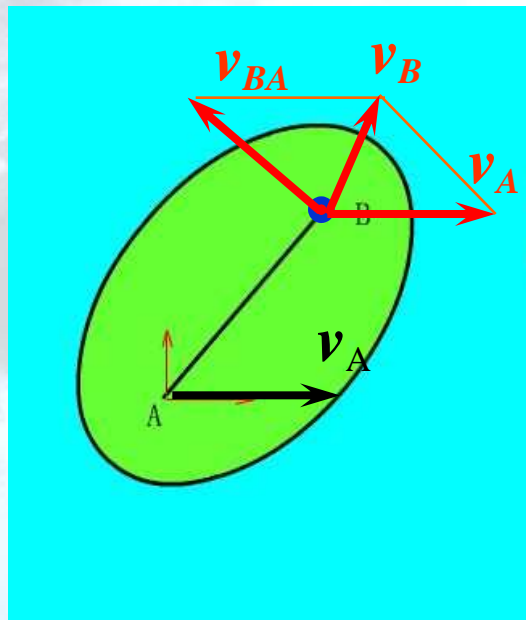
取 $B$ 为动点，则 $B$ 点的运动可视为牵连运动为平动和相对运动为圆周运动的合成。



影片913

已知： $A$ 点的速度 $v_A$ ，刚体转动的角速度为 $\omega$

求：  $B$ 点的速度 $v_B$



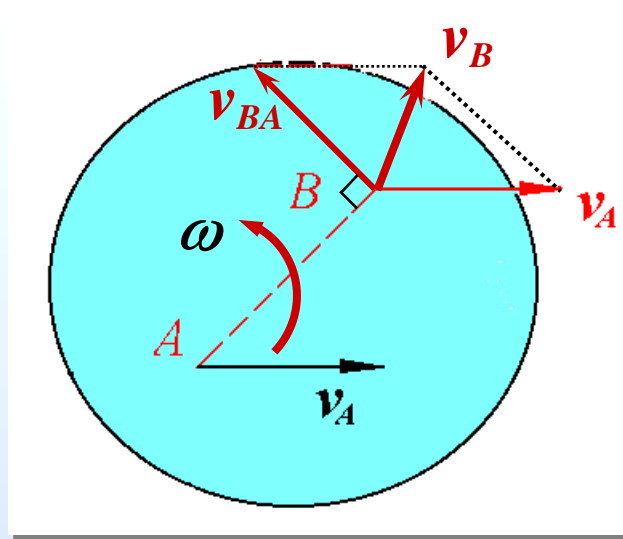
$$\bar{v}_e = \bar{v}_A, \quad \bar{v}_r = \bar{v}_{BA}, \quad \bar{v}_a = \bar{v}_B$$

根据速度合成定理  $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ , 则B点速度为:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

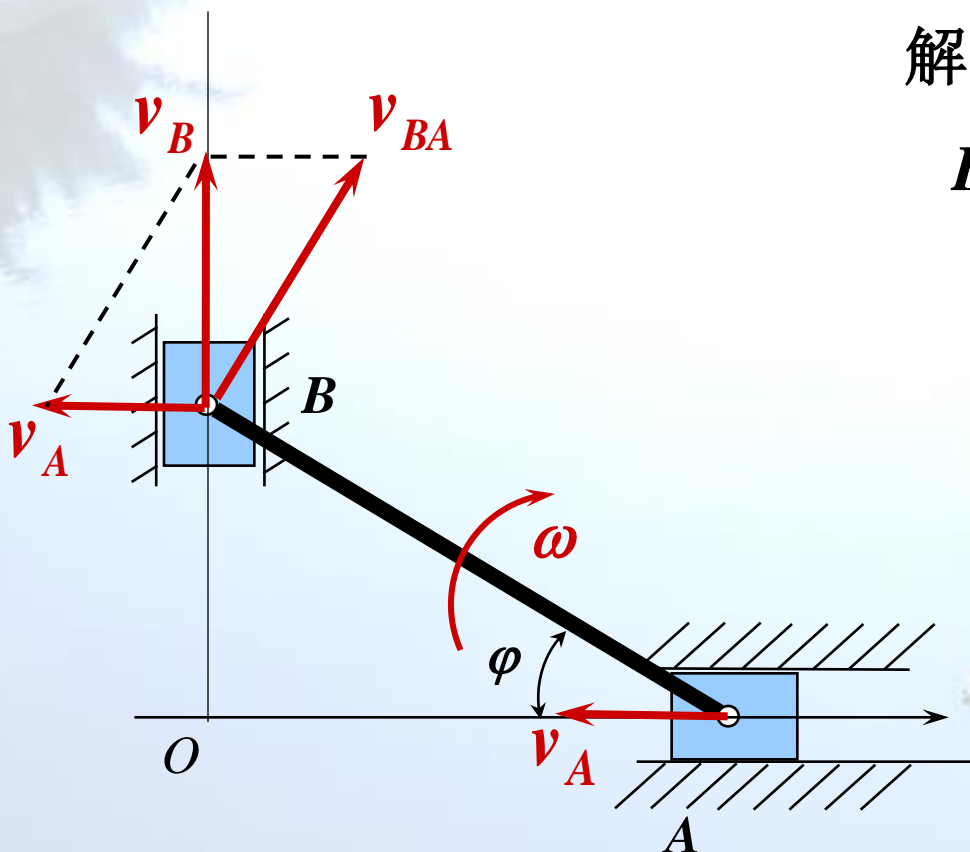
其中:  $\bar{v}_{BA}$  的大小为  $v_{BA} = \omega \cdot AB$ ,

平面图形上任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动的速度的矢量和。这种求解速度的方法称为**基点法**，也称为**合成法**。它是求解平面图形内一点速度的基本方法。



$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

[例8-1] 椭圆规尺，A端以速度 $v_A$ 向左运动， $AB=l$ ，求B端的速度和杆AB的角速度。  
(P203)



解：取A点为基点

B点的速度方向已知

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

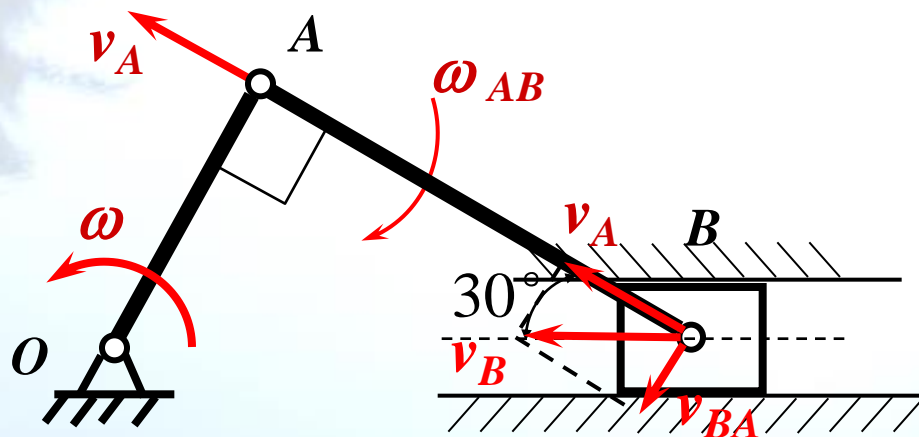
$$v_B = v_A \cot \varphi$$

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\sin \varphi}$$

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}$$



[例1] 曲柄连杆机构,  $OA=r$ ,  $AB=\sqrt{3} r$ ,  $OA$ 以匀角速度 $\omega$ 转动, 求 $B$ 的速度和 $AB$ 杆的角速度。



解:  $v_A = OA \cdot \omega = r \cdot \omega$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$v_B = v_A / \cos 30^\circ$$

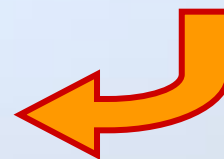
$$v_B = \frac{2\sqrt{3}}{3} r \omega$$

$$v_{BA} = v_A \tan 30^\circ$$

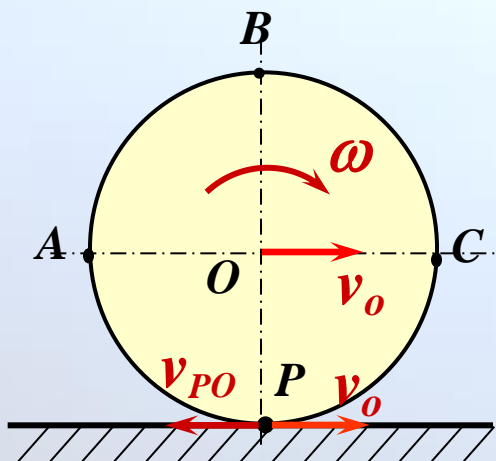
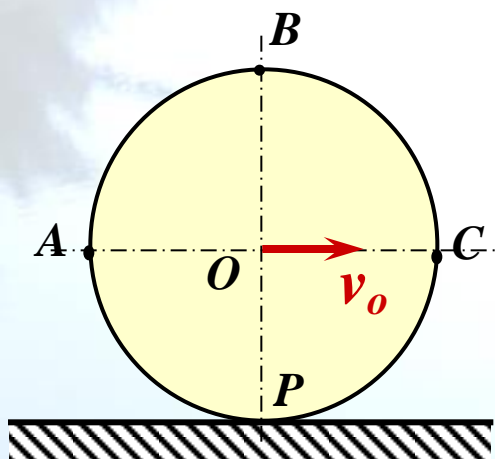
$$v_{BA} = \frac{\sqrt{3}}{3} r \omega$$

$$\because v_{BA} = AB \cdot \omega_{AB}$$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} r \omega}{\sqrt{3} r} = \frac{1}{3} \omega$$



[例2] 车轮的半径为 $R$ ，沿直线作纯滚动，轮轴以速度 $v_O$ 前进，求轮子的角速度和A、B和C各点的速度。



解 (1) 取 $O$ 为基点  $\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{v}_{PO}$

$\because$  轮子纯滚动

$$\therefore v_P = 0$$

$$\therefore \bar{v}_O + \bar{v}_{PO} = 0$$

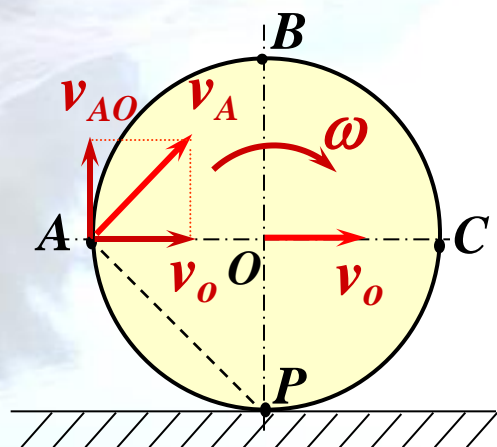
$$\bar{v}_{PO} = -\bar{v}_O$$

由  $v_{PO} = v_O$

且  $v_{PO} = R \cdot \omega$

$$\therefore \omega = \frac{v_O}{R}$$





(2) A点速度, 取O为基点

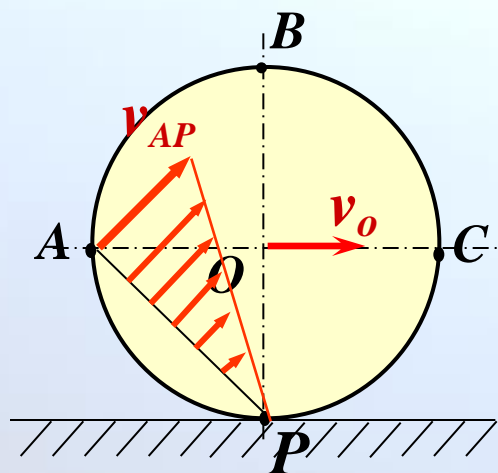
$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}$$

$$v_{AO} = R \cdot \omega = v_o \quad (\omega = \frac{v_o}{R})$$

$$\therefore v_A = \sqrt{v_o^2 + v_{AO}^2}$$

$$= \sqrt{v_o^2 + v_o^2}$$

$$= \sqrt{2}v_o$$



或取P为基点:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP}$$

$$v_A = v_{AP} = AP \cdot \omega = \sqrt{2}R \cdot \omega = \sqrt{2}v_o$$

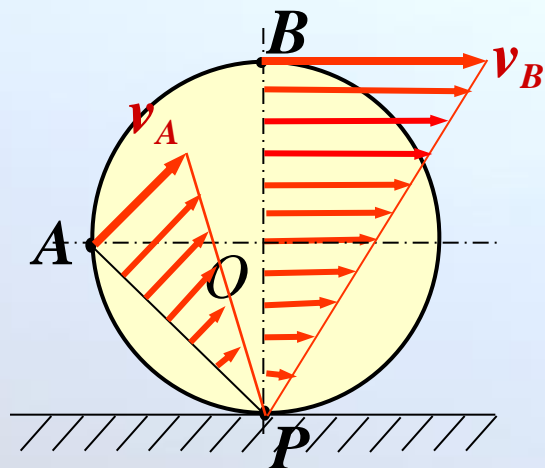
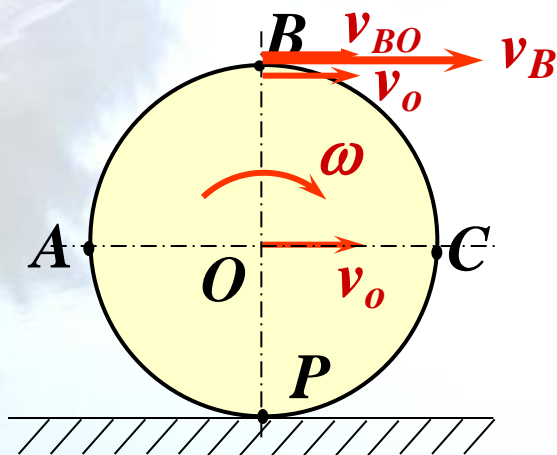


(3)  $B$ 点速度, 取 $O$ 为基点

$$\bar{v}_B = \bar{v}_O + \bar{v}_{BO}$$

$$v_{BO} = R \cdot \omega = v_O \quad (\omega = \frac{v_O}{R})$$

$$\begin{aligned} \therefore v_B &= v_O + v_{BO} \\ &= v_O + v_O = 2v_O \end{aligned}$$

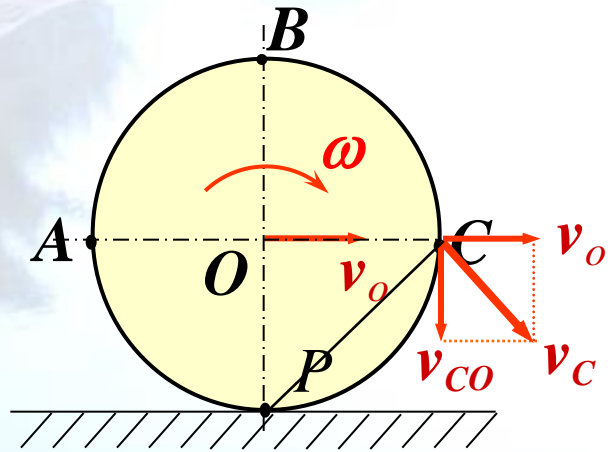


或取 $P$ 为基点:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP}$$

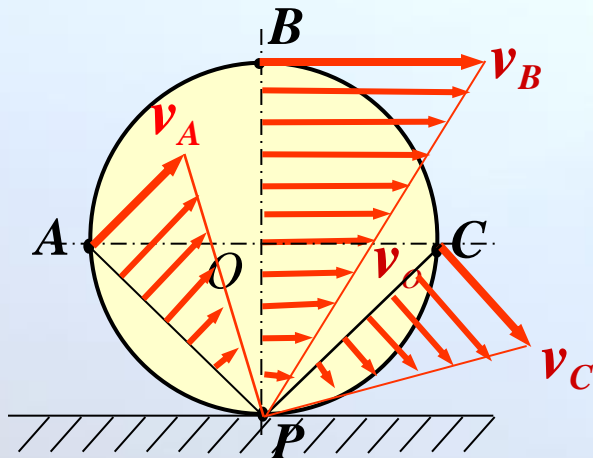
$$v_B = v_{BP} = BP \cdot \omega = 2R \cdot \omega$$

$$= 2v_O$$


$$\bar{\nu}_C = \bar{\nu}_O + \bar{\nu}_{CO}$$

$$v_{CO} = R \cdot \omega = v_O \quad (\omega = \frac{v_O}{R})$$

$$\therefore v_C = \sqrt{v_O^2 + v_{CO}^2} = \sqrt{2}v_O$$



或取 $P$ 为基点:  $\bar{\mathbf{v}}_C = \bar{\mathbf{v}}_P + \bar{\mathbf{v}}_{CP}$

$$v_C = v_{CP} = CP \cdot \omega = \sqrt{2}R \cdot \omega$$

$$= \sqrt{2}v_o$$



## 二、速度投影法

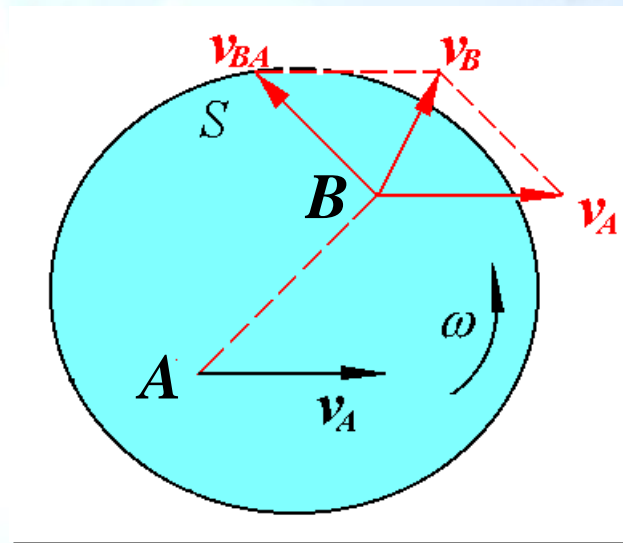
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

$$(\bar{v}_B)_{AB} = (\bar{v}_A)_{AB} + (\bar{v}_{BA})_{AB}$$

$$\because \bar{v}_{BA} \perp AB$$

$$\therefore (\bar{v}_{BA})_{AB} = 0$$

$$\therefore (\bar{v}_B)_{AB} = (\bar{v}_A)_{AB}$$



平面图形上任意两点的速度在该两点连线上的投影彼此相等。

这种求解速度的方法称为速度投影法。



[例3] 曲柄连杆机构,  $OA=r$ ,  $AB=\sqrt{3} r$ ,  $OA$ 以匀角速度 $\omega$ 转动, 求 $B$ 的速度。

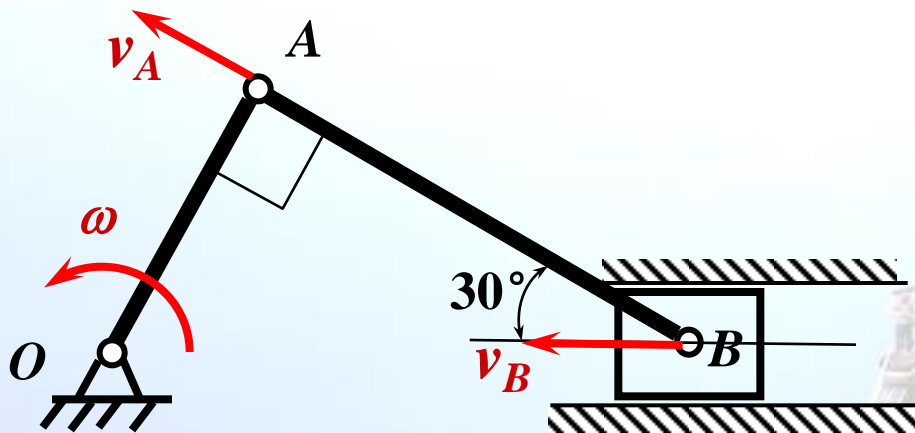
解:  $v_A = OA \cdot \omega = r \cdot \omega$

$$(\bar{v}_B)_{AB} = (\bar{v}_A)_{AB}$$

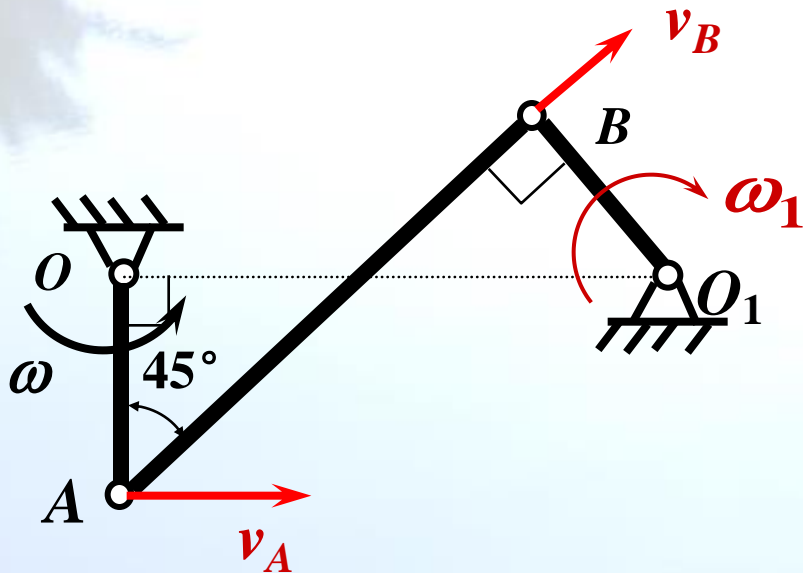
$$v_B \cos 30^\circ = v_A$$

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ}$$

$$v_B = \frac{2\sqrt{3}}{3} r \omega$$



[例4]  $OA=O_1B=r$ ,  $OA$ 以匀角速度 $\omega$ 转动, 求图示瞬时 $B$ 点的速度和 $O_1B$ 杆的角速度。



解: (1)  $v_A = OA \cdot \omega = r \cdot \omega$

$$(\bar{v}_B)_{AB} = (\bar{v}_A)_{AB}$$

$$v_B = v_A \cos 45^\circ$$

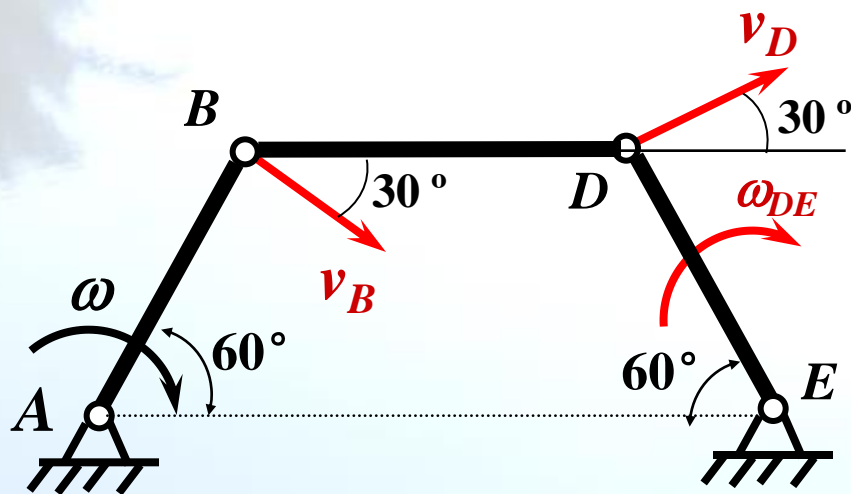
$$v_B = \frac{\sqrt{2}}{2} r \omega$$

(2)  $v_B = O_1B \cdot \omega_1$

$$\omega_1 = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{\sqrt{2}\omega}{2}$$



[例5] 图示机构， $AB=DE=l$ ， $BD \parallel AE$ ，杆 $AB$ 的角速度 $\omega$ 。  
求杆 $DE$ 的角速度。



解：  $v_B = AB \cdot \omega = l \cdot \omega$

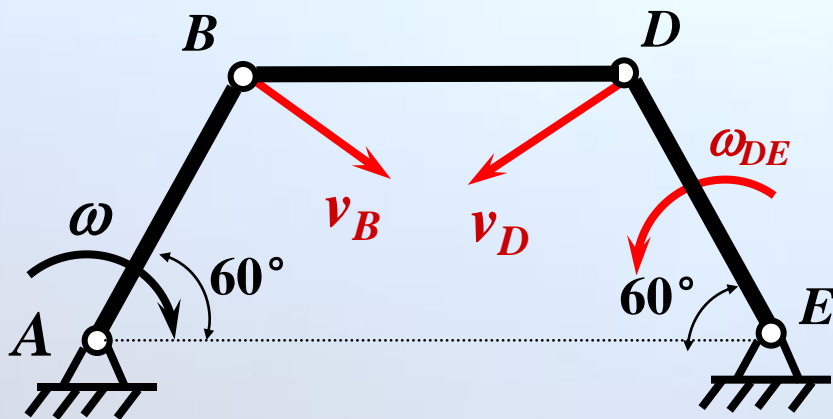
$$(\bar{v}_D)_{BD} = (\bar{v}_B)_{BD}$$

$$v_D \cos 30^\circ = v_B \cos 30^\circ$$

$$v_D = v_B$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DE} = \frac{v_B}{l} = \omega$$

思考：  $v_D$  的方向是否会朝  
如图所示的方向？



[例8-5]  
(P206)

图示机构， $OA=100\text{ mm}$ ， $CD=3CB$ ， $OA$ 的角速度 $\omega=2\text{ rad/s}$ 。求此瞬时 $E$ 的速度。

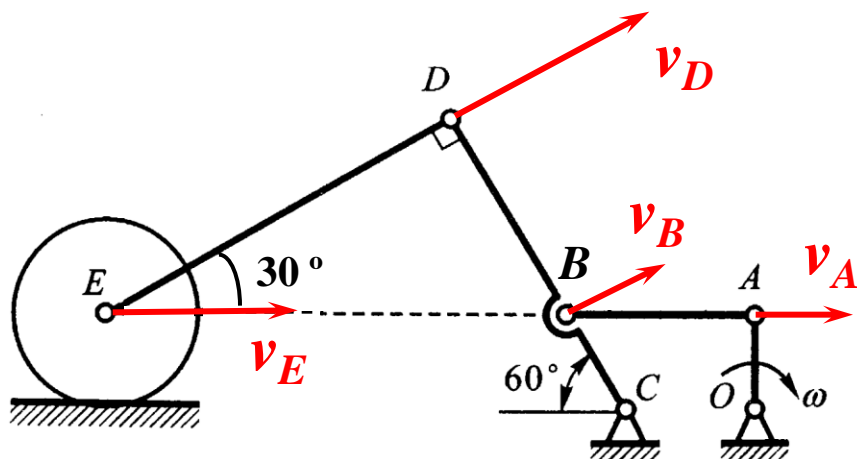


图 9-15

解：  $v_A = OA \cdot \omega$

$$(\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_B)_{AB}$$

$$v_A = v_B \cos 30^\circ$$

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ}$$

$$v_D = \frac{v_B}{CB} \cdot CD = 3v_B$$

$$= 0.6928\text{ m/s}$$

$$(\bar{v}_E)_{ED} = (\bar{v}_D)_{ED}$$

$$v_E \cos 30^\circ = v_D$$

$$v_E = \frac{v_D}{\cos 30^\circ} = 0.8\text{ m/s}$$



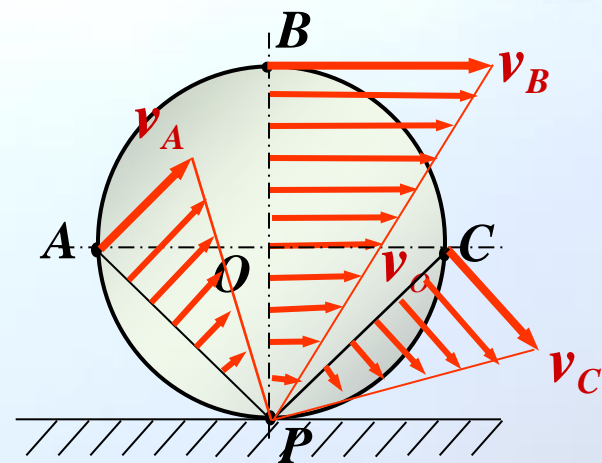
## § 8-3 求平面图形内各点速度的瞬心法

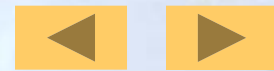
### 一、问题的提出

若选取速度为零的点作为基点，求解速度问题的计算会大大简化。于是，自然会提出，在某一瞬时图形是否有一点速度等于零？如果存在的话，该点如何确定？

### 二、速度瞬心的概念

一般情况，在每一瞬时，平面图形上都唯一地存在一个速度为零的点，该点称为平面图形在该瞬时的瞬时速度中心，简称速度瞬心。





证明： 设平面图形的角速度为  $\omega$

取A为基点，其速度为  $v_A$

在  $\bar{v}_A$  垂线上任一点M的速度为

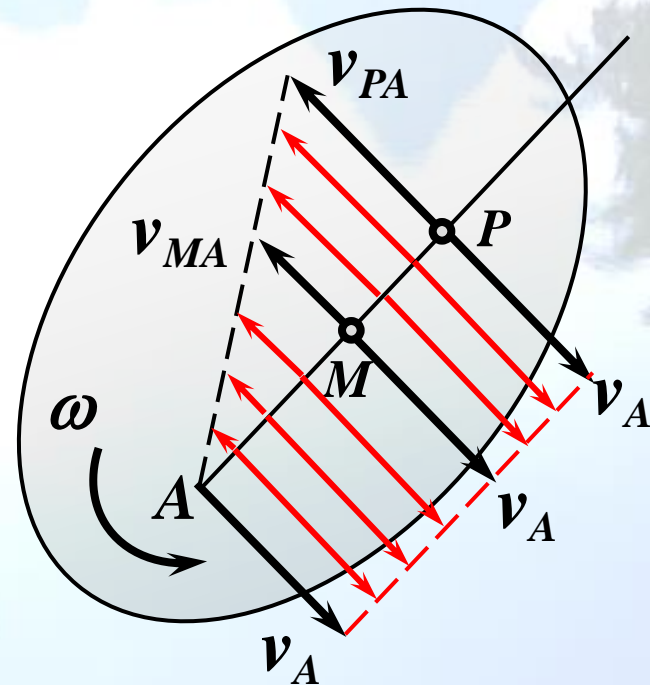
$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$$

$v_M$  的大小为

$$v_M = v_A - \omega \cdot MA$$

$$\text{取 } AP = \frac{v_A}{\omega}$$

$$v_P = v_A - AP \cdot \omega = 0$$

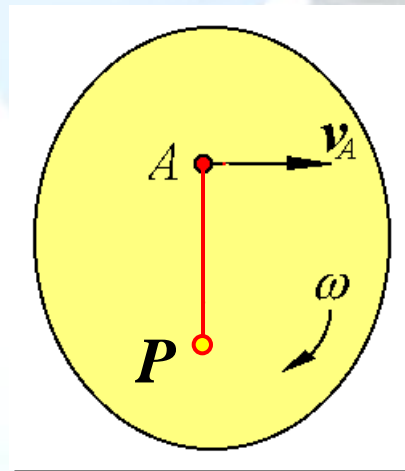


$\therefore$  在每一瞬时，平面图形上都唯一地存在一个速度为零的点。

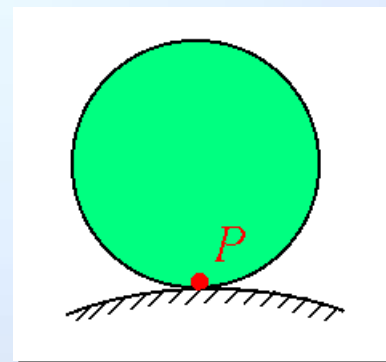
### 三、几种确定速度瞬心位置的方法

(1) 已知图形上一点的速度  $\bar{v}_A$  和图形角速度  $\omega$ , 可以确定速度瞬心的位置。 ( **$P$ 点**)

$AP = \frac{v_A}{\omega}$ ,  $AP \perp \bar{v}_A$ , 且  $P$  在  $\bar{v}_A$  顺  $\omega$  转向绕  $A$  点转  $90^\circ$  的方向一侧。

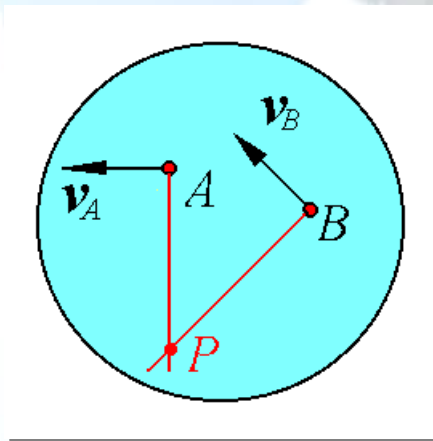


(2) 已知一平面图形在固定面上作无滑动的滚动, 则图形与固定面的接触点  $P$  为速度瞬心。



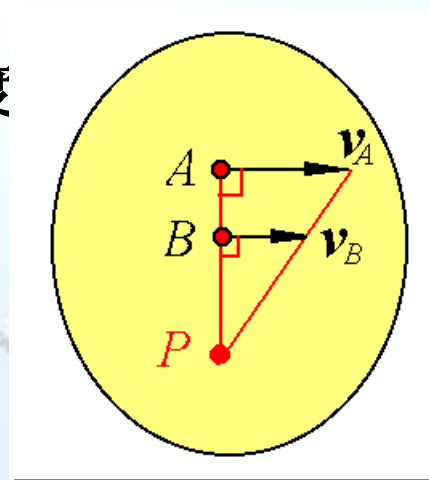


(3) 已知某瞬间平面图形上 $A, B$ 两点速度 $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ 的方向, 且 $\bar{v}_A$ 不平行 $\bar{v}_B$ , 则过 $A, B$ 两点分别作速度 $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ 的垂线, 交点 $P$ 即为该瞬时的速度瞬心.



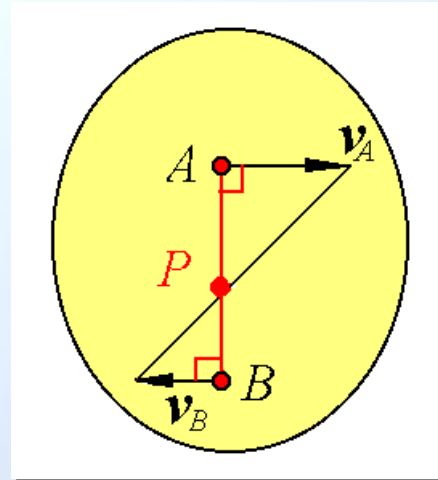
(4) 已知某瞬时图形上 $A, B$ 两点速度大小, 且 $\bar{v}_A \perp AB, \bar{v}_B \perp AB$

(a)  $\bar{v}_A$  与  $\bar{v}_B$  同向,  $\omega = \frac{|v_A - v_B|}{AB}$



(a)

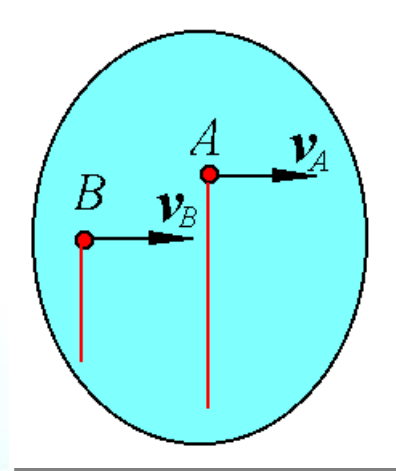
(b)  $\bar{v}_A$  与  $\bar{v}_B$  反向,  $\omega = \frac{v_A + v_B}{AB}$



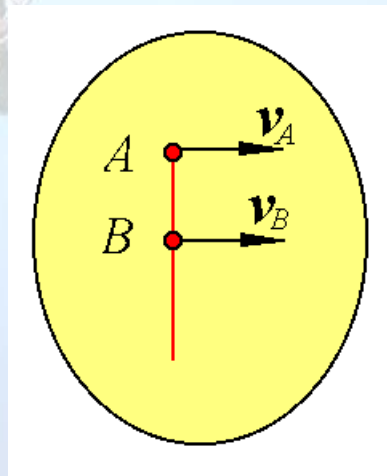
(b)



(5) 已知某瞬时图形上 $A$ 、 $B$ 两点的速度方向平行且同向,  $AB$ 连线不垂直 $A$ 、 $B$ 的速度. 则图形的瞬心在无穷远处, 图形的角速度 $\omega = 0$ , 图形上各点速度相等, 这种情况称为**瞬时平动**. (各点的加速度不相等)



另: 对(4)种(a)的情况, 若 $v_A = v_B$ , 则是瞬时平动.



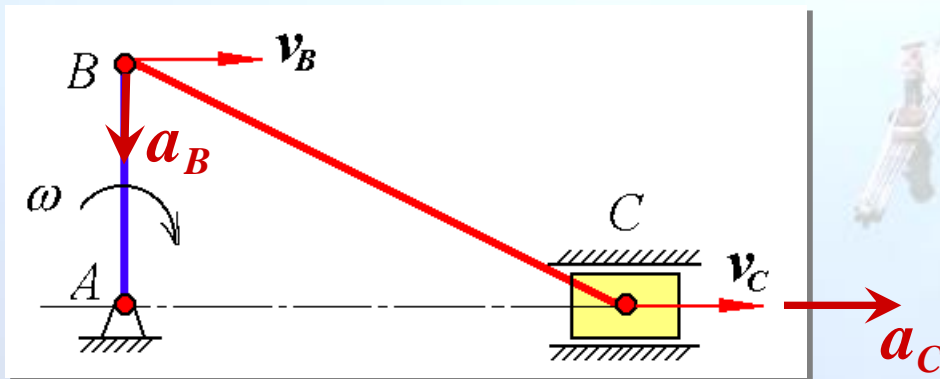
例如：曲柄连杆机构在图示位置时，连杆 $BC$ 作瞬时平动。

此时连杆 $BC$ 的角速度  $\omega_{BC} = 0$  ，

$BC$ 杆上各点的速度都相等。但各点的加速度并不相等。

设匀 $\omega$ ，则  $a_B = a_B^n = AB \cdot \omega^2 (\downarrow)$

而  $\bar{a}_C$  的方向沿 $AC$ 的，  $\bar{a}_B \neq \bar{a}_C$



瞬时平动与平动不同

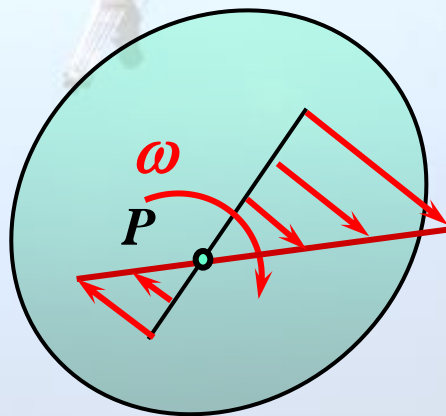
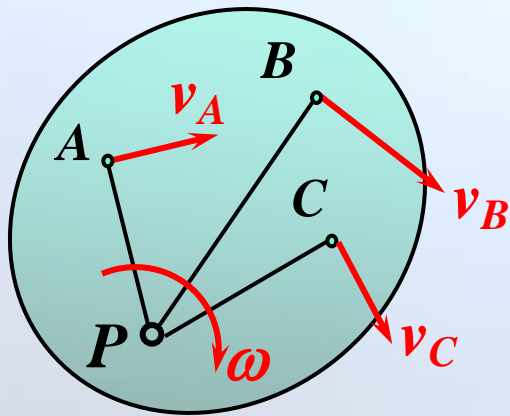
#### 四、速度瞬心法

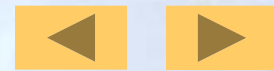
利用速度瞬心求解平面图形上点的速度的方法，称为速度瞬心法。

平面图形在任一瞬时的运动可以视为绕速度瞬心的瞬时转动，速度瞬心又称为平面图形的瞬时转动中心。

若 $P$ 点为速度瞬心，则任意一点 $A$ 的速度：

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{AP} \cdot \boldsymbol{\omega} \text{ 方向} \perp \boldsymbol{AP}, \text{ 指向与} \boldsymbol{\omega} \text{ 一致。}$$





## 五、注意的问题

- (1) 速度瞬心在平面图形上的位置不是固定的，而是随时间不断变化的。在任一瞬时是唯一存在的。
- (2) 速度瞬心处的速度为零，加速度不一定为零。不同于定轴转动。
- (3) 刚体作瞬时平动时，虽然各点的速度相同，但各点的加速度是不一定相同的。不同于刚体作平动。



[例8-7] (原题8-1) A端以速度 $v_A$ 向左运动,  $AB=l$ , 求B端的速度和杆AB的角速度。(用瞬心法求解)

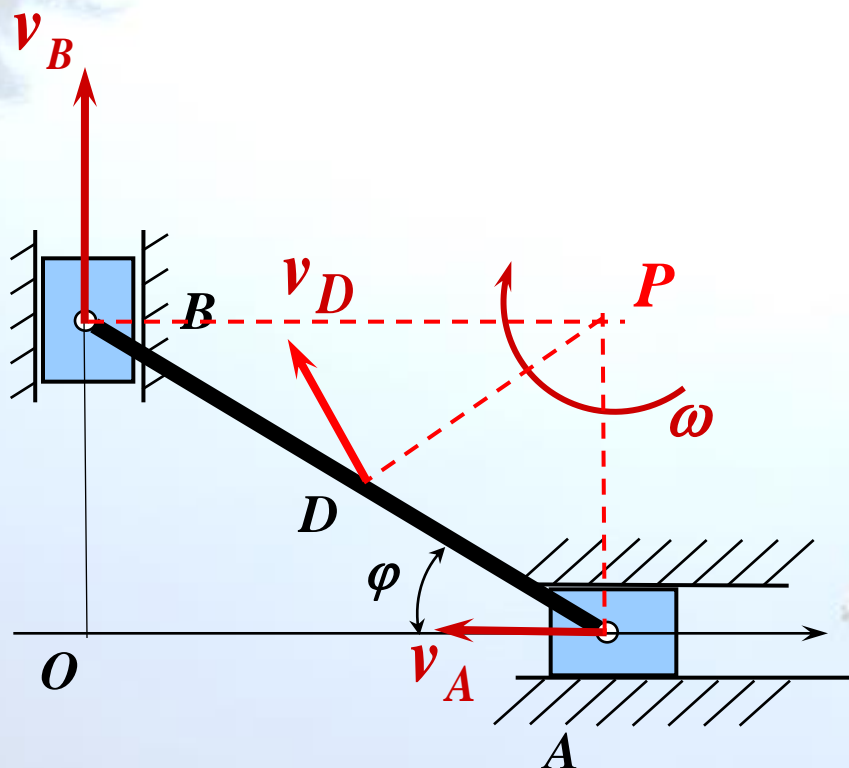
解:  $P$ 点为瞬心

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}$$

$$v_B = PB \cdot \omega = \frac{PB}{PA} \cdot v_A = v_A \cot \varphi$$

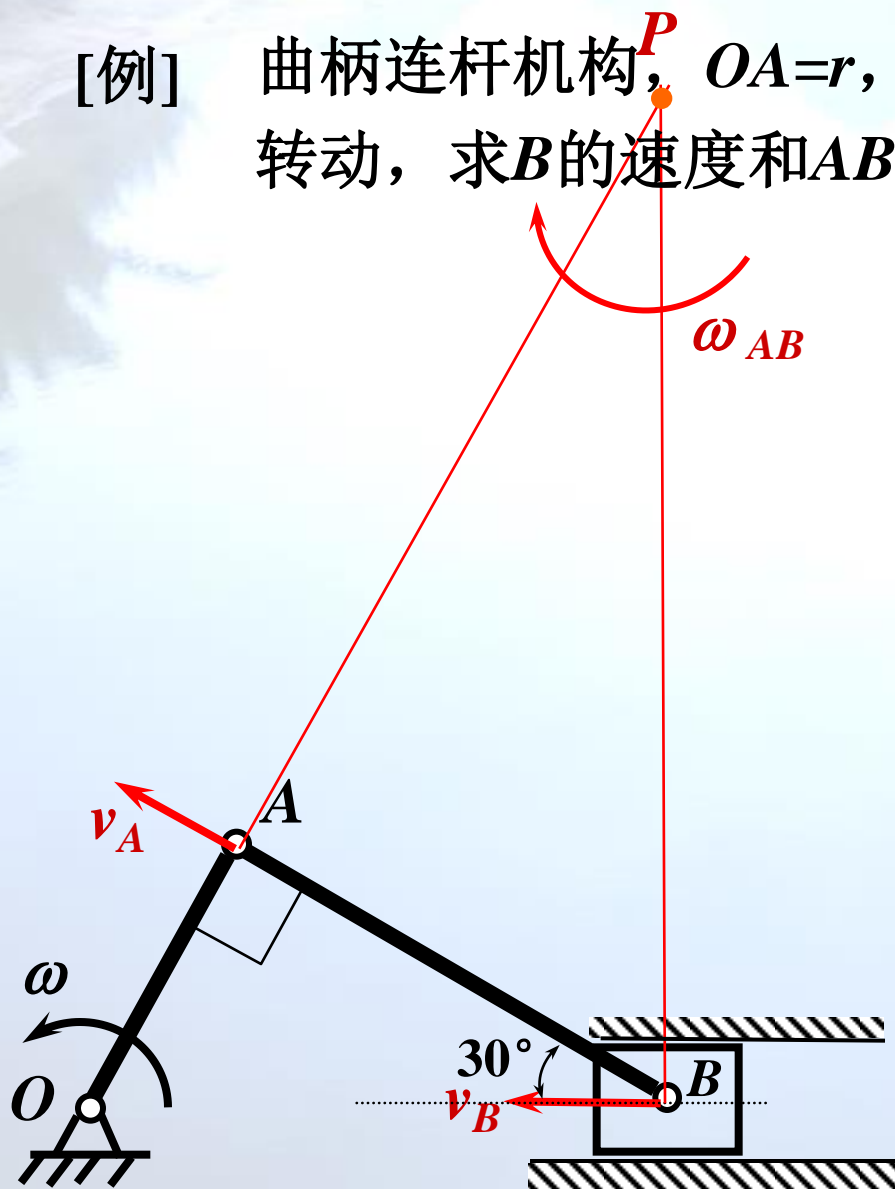
求杆中点 $D$ 的速度

$$v_D = PD \cdot \omega = \frac{l}{2} \cdot \frac{v_A}{l \sin \varphi} = \frac{v_A}{2 \sin \varphi}$$





[例] 曲柄连杆机构,  $OA=r$ ,  $AB=\sqrt{3}r$ ,  $OA$ 以匀角速度 $\omega$ 转动, 求 $B$ 的速度和 $AB$ 杆的角速度。



解: 用瞬心法求解

$$v_A = OA \cdot \omega = r \cdot \omega$$

$$v_A = PA \cdot \omega_{AB}$$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{r\omega}{AB \cdot \cot 30^\circ}$$

$$= \frac{r\omega}{\sqrt{3}r \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\omega$$

$$v_B = PB \cdot \omega_{AB}$$

$$= 2\sqrt{3}r \cdot \frac{1}{3}\omega = \frac{2\sqrt{3}}{3}r\omega$$



[例6]  $OA=O_1B=r$ ,  $OA$ 以匀角速度 $\omega$ 转动, 求 $B$ 的速度,  
 $AB$ 杆的角速度。(瞬心法)

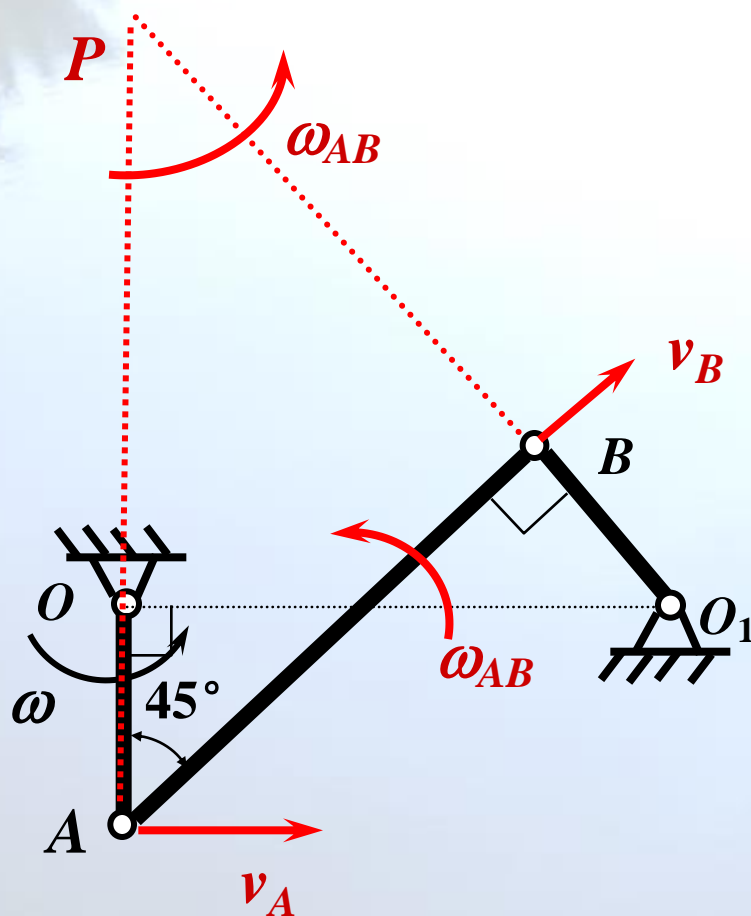
解: (1)  $v_A = OA \cdot \omega = r \cdot \omega$

$$v_A = PA \cdot \omega_{AB}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA}$$
$$= \frac{r\omega}{\sqrt{2}r + 2r} = \frac{\omega}{2 + \sqrt{2}}$$

(2)  $v_B = PB \cdot \omega_{AB}$

$$= (1 + \sqrt{2})r \frac{\omega}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \omega$$

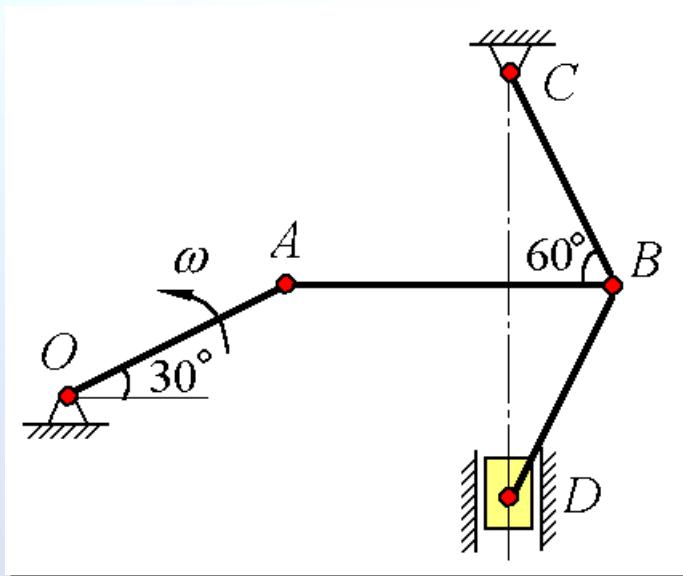


### [例7] 曲柄肘杆压床机构

已知：  $OA=0.15\text{m}$  ,  $n=300\text{ rpm}$  ,  $AB=0.76\text{m}$  ,

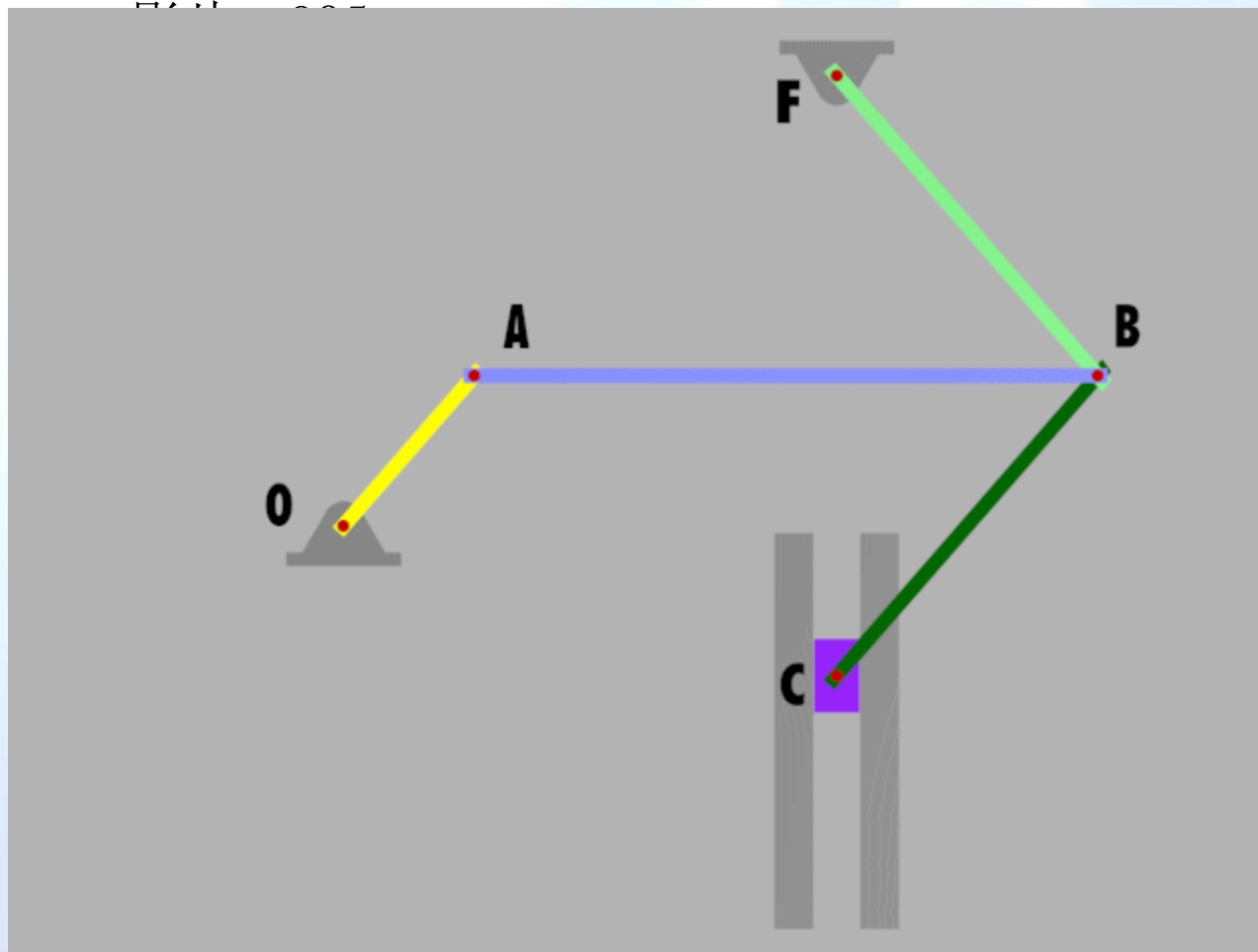
$BC=BD=0.53\text{m}$ . 图示位置时,  $AB$  水平

求该位置时的  $\omega_{BD}$   $\omega_{AB}$  及  $\bar{v}_D$



翻页请看动画

请看动画



解：OA、BC作定轴转动，AB、BD均作平面运动

A、B、D点的速度如图，

根据题意：

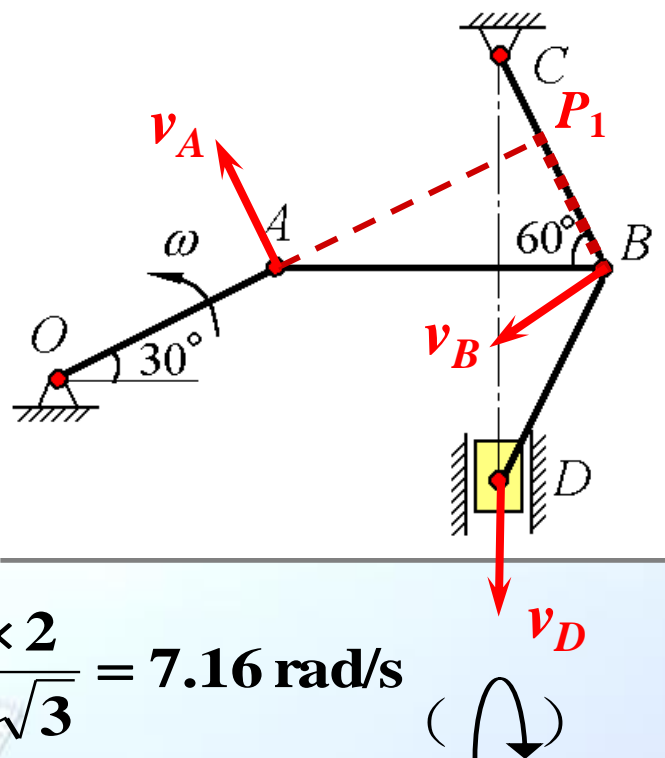
$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 300}{60} = 10\pi \text{ (rad/s)}$$

研究AB杆， $P_1$ 为其速度瞬心

$$v_A = OA \cdot \omega = 0.15 \times 10\pi = 1.5\pi \text{ m/s}$$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{1.5\pi}{AB \sin 60^\circ} = \frac{1.5\pi \times 2}{0.76 \times \sqrt{3}} = 7.16 \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = AB \cos 60^\circ \times 7.16 = 0.76 \times 0.5 \times 7.16 = 2.72 \text{ m/s}$$



解：  $OA$ 、 $BC$ 作定轴转动， $AB$ 、 $BD$ 均作平面运动

$A$ 、 $B$ 、 $D$ 点的速度如图，

根据题意：

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 300}{60} = 10\pi \text{ (rad/s)}$$

研究 $AB$ 杆， $P_1$ 为其速度瞬心

$$v_A = OA \cdot \omega = 0.15 \times 10\pi = 1.5\pi \text{ m/s}$$

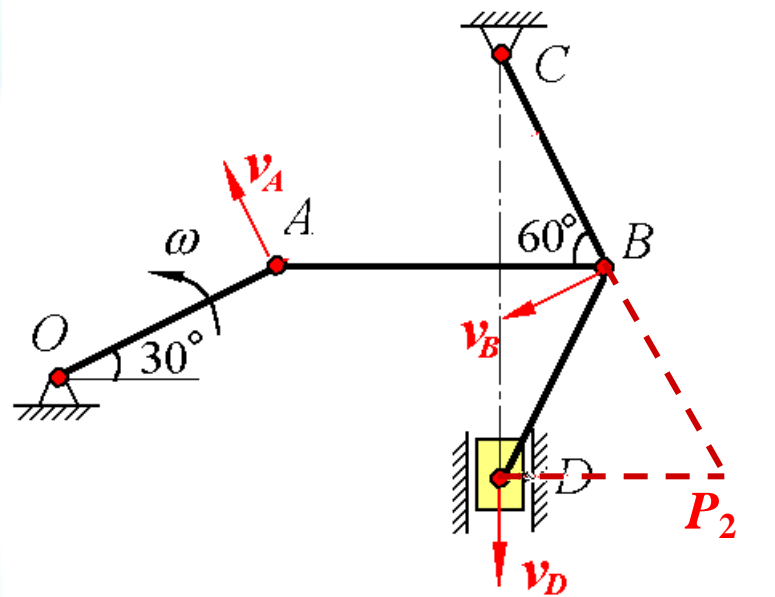
$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{1.5\pi}{AB \sin 60^\circ} = \frac{1.5\pi \times 2}{0.76 \times \sqrt{3}} = 7.16 \text{ rad/s (}\curvearrowright\text{)}$$

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = AB \cos 60^\circ \times 7.16 = 0.76 \times 0.5 \times 7.16 = 2.72 \text{ m/s}$$

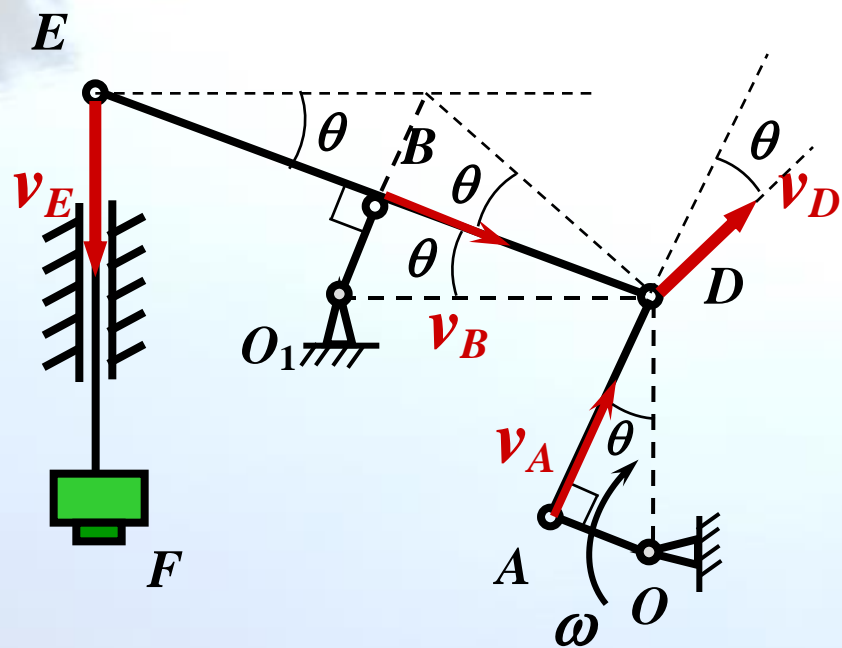
研究 $BD$ ：  $P_2$ 为其速度瞬心， $\triangle BDP_2$ 为等边三角形， $DP_2 = BP_2 = BD$

$$\therefore \omega_{BD} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{2.73}{0.53} = 5.13 \text{ rad/s (}\curvearrowright\text{)}$$

$$v_D = DP_2 \cdot \omega_{BD} = 0.53 \times 5.13 = 2.72 \text{ m/s (}\downarrow\text{)}$$



[题8-12](P227)  $OA=O_1B=r=0.1\text{m}$ ,  $EB=BD=AD=l=0.4\text{m}$ ,  
 $O_1D$ 水平,  $OD$ 铅垂,  $OA$ 的转速 $n=120\text{ r/min}$ , 求 $F$ 的速度。



$$\cos \theta = \frac{0.4}{\sqrt{0.1^2 + 0.4^2}} = 0.97$$

解：速度分析

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 4\pi \text{ rad/s}$$

$$v_A = OA \cdot \omega = 0.4\pi \text{ m/s}$$

$$v_D \cos \theta = v_A$$

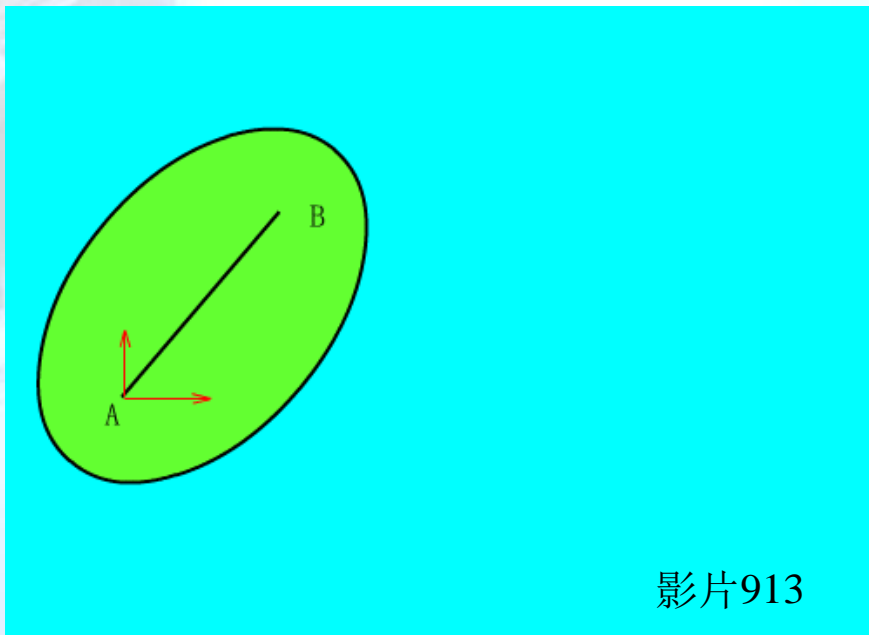
$$\therefore v_D = \frac{v_A}{\cos \theta}$$

$$v_E = v_D = \frac{v_A}{\cos \theta} = 1.294 \text{ m/s}$$



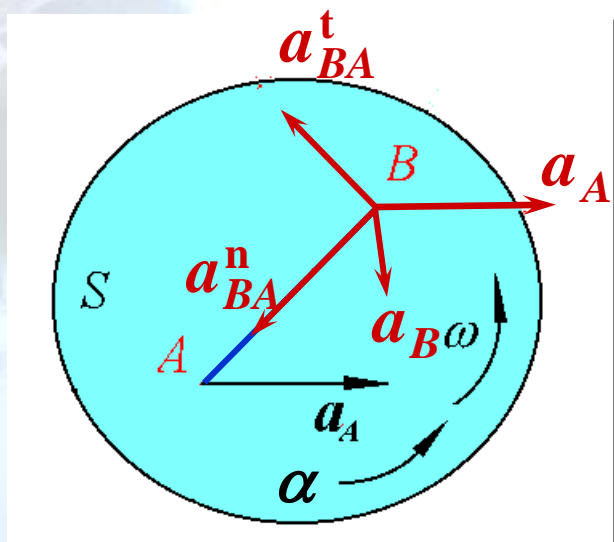


## 8-4 用基点法求平面图形内各点的加速度





## 8-4 用基点法求平面图形内各点的加速度



已知：图形 $S$ 内一点 $A$ 的加速度  $\bar{a}_A$  和图形的  $\omega, \alpha$ （某一瞬时）。

求：该瞬时图形上任一点 $B$ 的加速度。

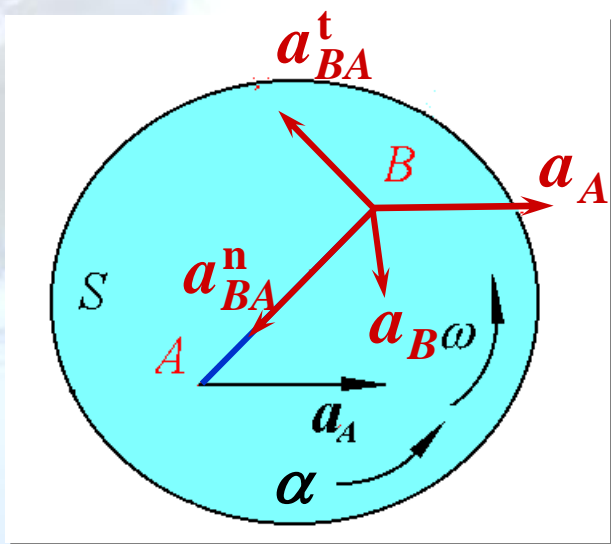
取 $A$ 为基点，将平动坐标系固结于 $A$ 点  
取 $B$ 动点，则 $B$ 点的运动分解为相对运动为圆周运动和牵连运动为平动。

$$\bar{a}_a = \bar{a}_B \quad \bar{a}_e = \bar{a}_A \quad \bar{a}_r = \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$$

由牵连运动为平动时加速度合成定理  $\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r$  可得如下公式。

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$$

由牵连运动为平动时加速度合成定理  $\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r$  可得如下公式。



$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$$

其中：  $a_{BA}^t = AB \cdot \alpha$

方向  $\perp AB$ ，指向与  $\alpha$  一致；

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega^2$$

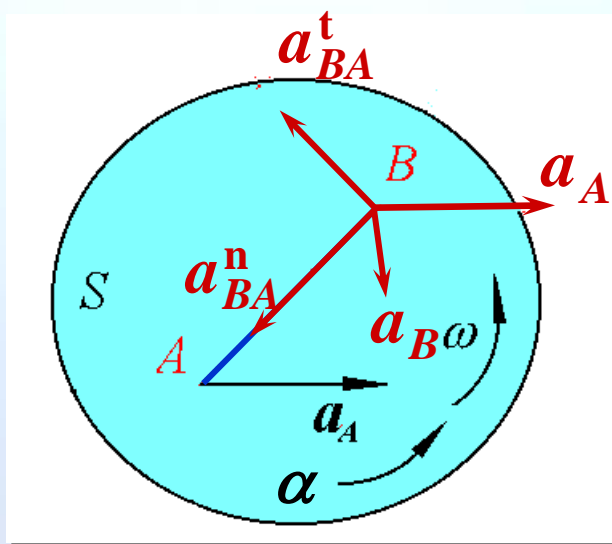
方向沿  $AB$ ，指向  $A$  点。

平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和。

这种求解加速度的方法称为**基点法**，也称为**合成法**。是求解平面图形内一点加速度的基本方法。

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$$

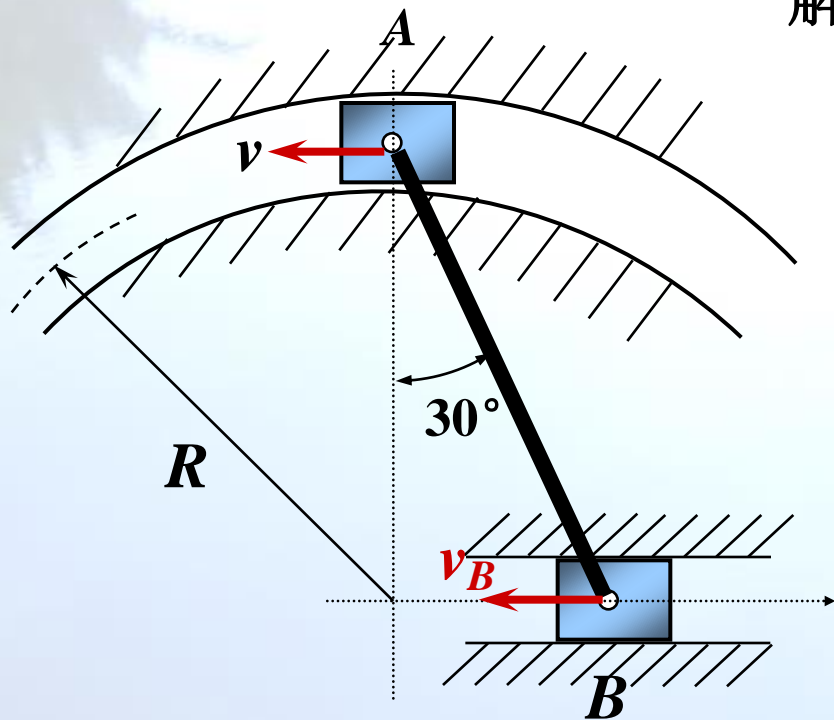
上述公式是一平面矢量方程。需知其中六个要素，方能求出其余两个。由于  $\bar{a}_{BA}^t, \bar{a}_{BA}^n$  方位总是已知，所以在使用该公式中，只要再知道四个要素，即可解出问题的待求量。



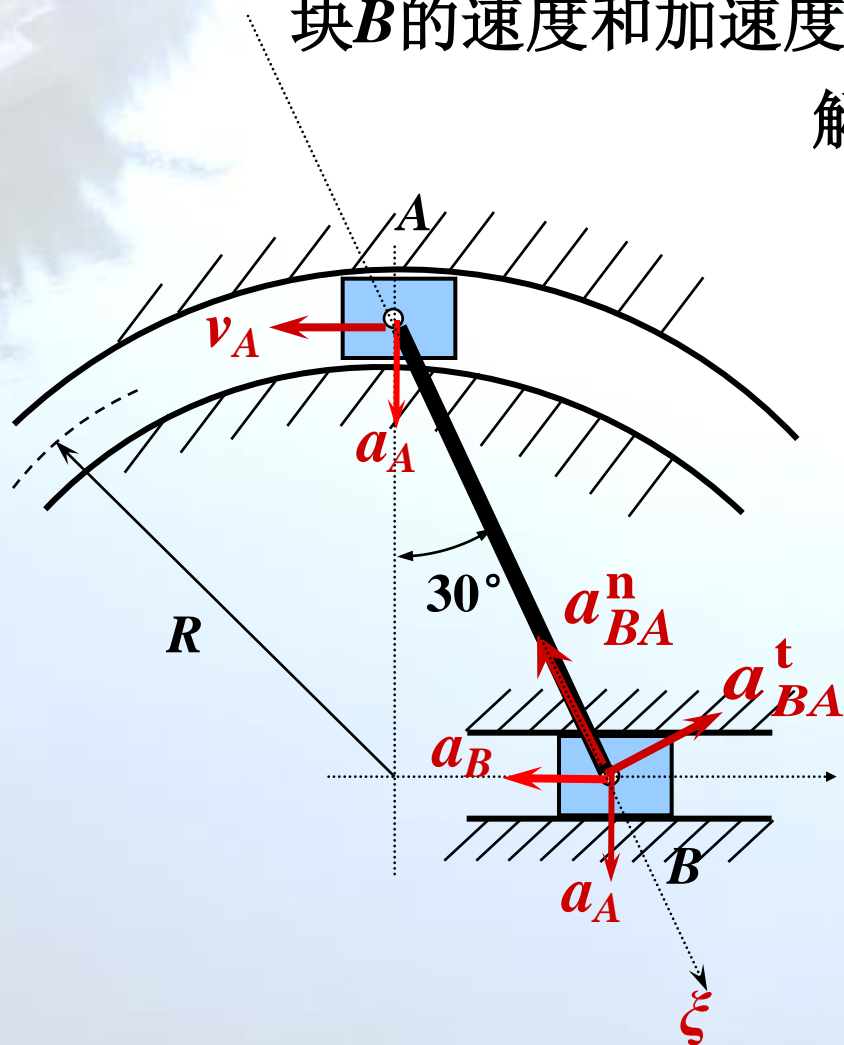
[例9] 滑块A以等速度 $v$ 沿滑道运动，求图示时刻滑块B的速度和加速度。

解：AB杆作瞬时平动， $v_B = v_A = v$

$$\omega_{AB} = 0$$



[例9] 滑块A以等速度 $v$ 沿滑道运动，求图示时刻滑块B的速度和加速度。



解: AB杆作瞬时平动,  $v_B = v_A = v$   
 $\omega_{AB} = 0$

$$\overset{?}{\bar{a}}_B = \overset{\checkmark}{\bar{a}}_A + \overset{?}{\bar{a}}_{BA}^t + \overset{\checkmark}{\bar{a}}_{BA}^n$$

$$a_A = a_A^n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0$$

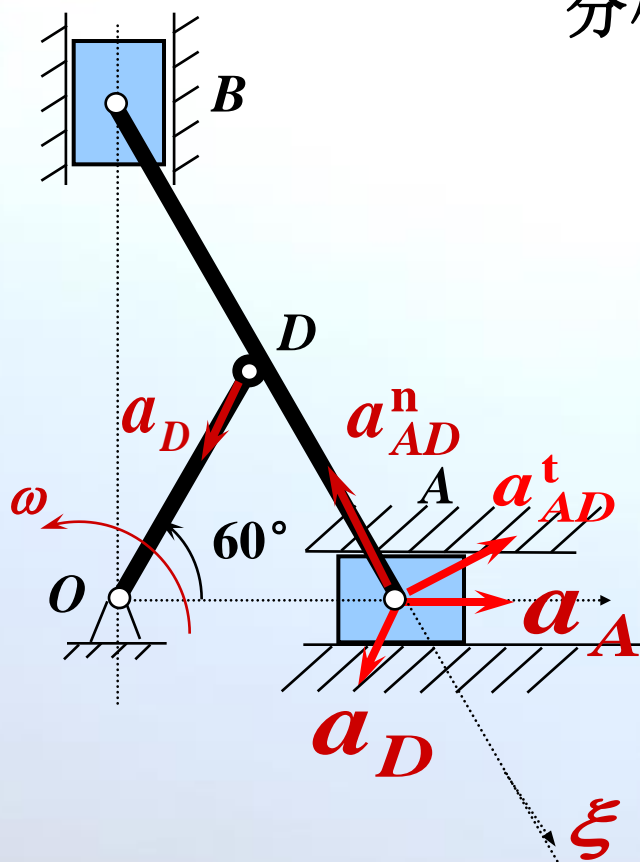
在 $\xi$ 轴上投影:

$$-a_B \cos 60^\circ = a_A \cos 30^\circ$$

$$a_B = -a_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = -\sqrt{3} \frac{v^2}{R}$$

[例8-10]  
(P213)

椭圆规机构， $OD$ 以匀角速度 $\omega$ 绕 $O$ 轴转动， $OD=AD=BD=l$ ，求图示位置时 $AB$ 的角加速度和点 $A$ 的加速度。



分析： $D$ 点的加速度： $a_D = \omega^2 \cdot l$

取 $D$ 点为基点

$$\bar{a}_A = \bar{a}_D + \bar{a}_{AD}^t + \bar{a}_{AD}^n$$

?      ✓      ?      ✓

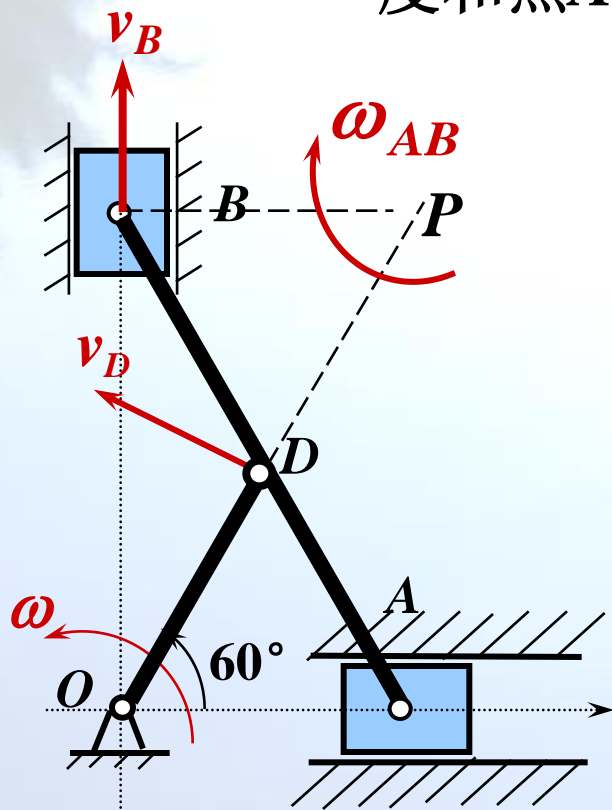
$$a_{AD}^t = AD \cdot \alpha_{AB}$$

$$a_{AD}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AD$$

首先要计算 $AB$ 杆的角速度

[例8-10]  
(P213)

椭圆规机构， $OD$ 以匀角速度 $\omega$ 绕 $O$ 轴转动， $OD=AD=BD=l$ ，求图示位置时 $AB$ 的角加速度和点 $A$ 的加速度。



解：(1) $AB$ 的角速度：

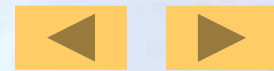
$AB$ 杆的速度瞬心为 $P$ ：

$$OD = DP$$

$$\therefore v_D = OD \cdot \omega = PD \cdot \omega_{AB}$$

$$\therefore \omega_{AB} = \omega$$





(2) A点的加速度:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_D + \bar{a}_{AD}^t + \bar{a}_{AD}^n \text{ ----- (a)}$$

$$a_D = \omega^2 \cdot l$$

$$a_{AD}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AD = \omega^2 \cdot l$$

将(a)在 $\xi$ 轴上投影:

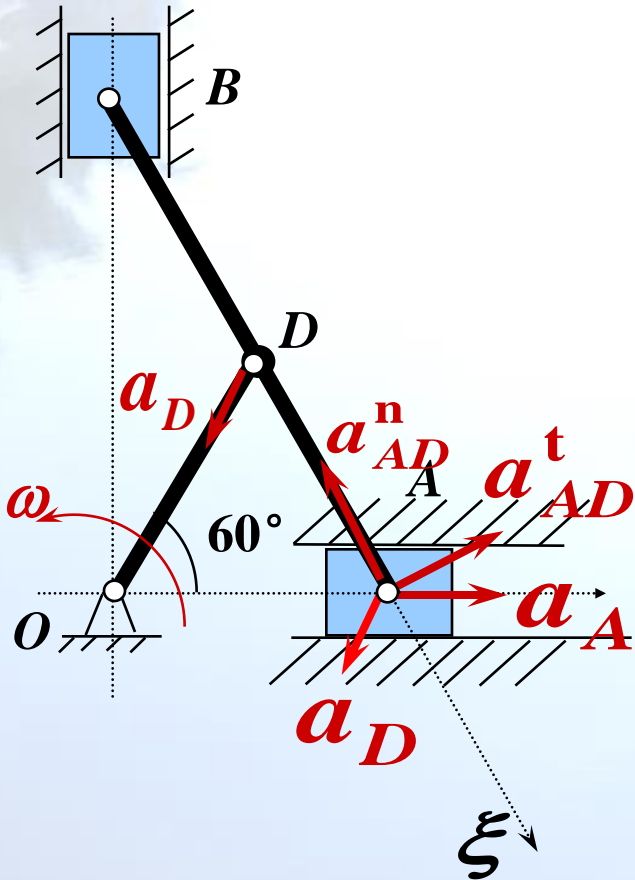
$$a_A \cos 60^\circ = a_D \cos 60^\circ - a_{AD}^n$$

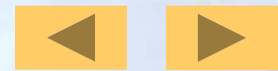
$$\therefore a_A = \frac{a_D \cos 60^\circ - a_{AD}^n}{\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\omega^2 l \cos 60^\circ - \omega^2 l}{\cos 60^\circ}$$

$$= -\omega^2 l$$

$$\omega_{AB} = \omega$$





(3) AB杆的角加速度:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_D + \bar{a}_{AD}^t + \bar{a}_{AD}^n \text{ ----- (a)}$$

将(a)在 y 轴上投影:

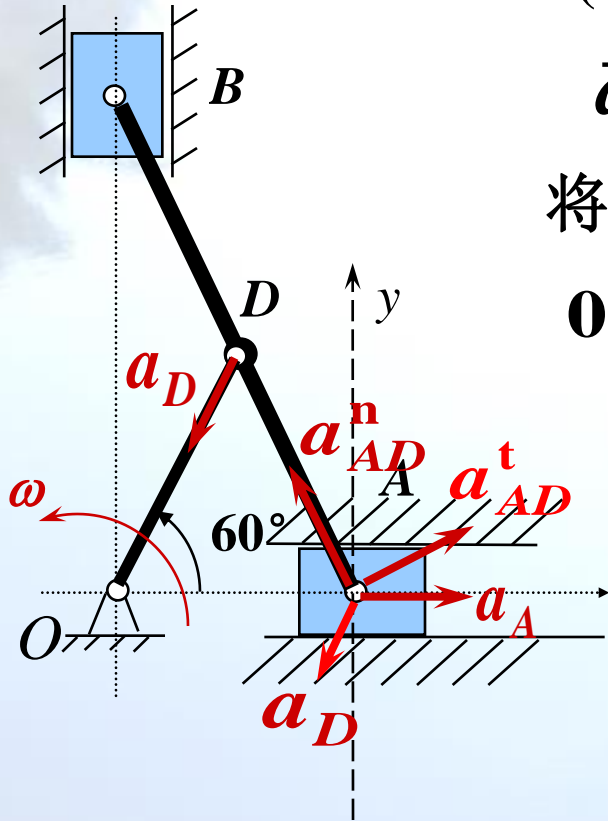
$$0 = -a_D \cos 30^\circ + a_{AD}^t \cos 60^\circ + a_{AD}^n \cos 30^\circ$$

$$a_{AD}^t = \frac{a_D \cos 30^\circ - a_{AD}^n \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\omega^2 l \cos 30^\circ - \omega^2 l \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$$

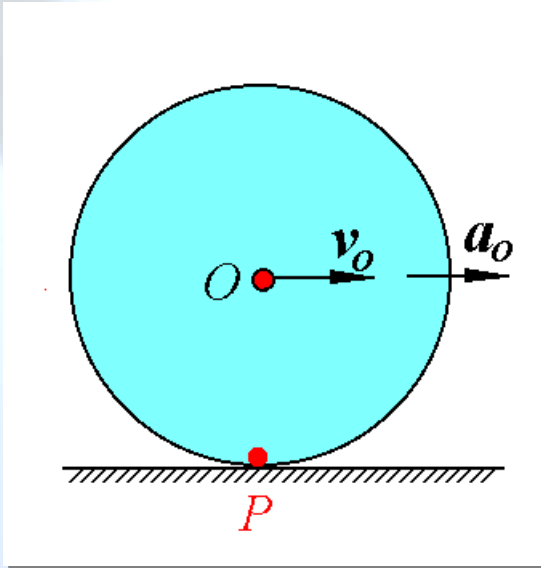
$$= 0$$

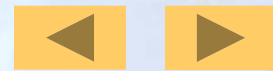
$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AD}^t}{AD} = 0$$



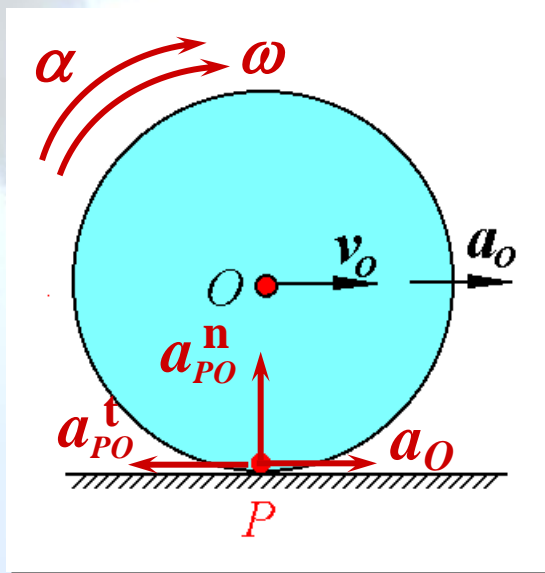


**[例8-11] (P214)** 半径为 $R$ 的车轮沿直线作纯滚动, 已知轮心 $O$ 点的速度  $\bar{v}_O$  及加速度  $\bar{a}_O$  ,求车轮与轨道接触点 $P$ 的加速度。





**[例8-11] (P214)** 半径为 $R$ 的车轮沿直线作纯滚动, 已知轮心 $O$ 点的速度  $\bar{v}_O$  及加速度  $\bar{a}_O$ , 求车轮与轨道接触点 $P$ 的加速度。



分析:  $\bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{a}_{PO}^t + \bar{a}_{PO}^n$

方向 ?  $\checkmark$   $\checkmark$   $\checkmark$

大小 ?  $\checkmark$   $R\alpha$   $R\omega^2$

故应先求出  $\omega, \alpha$

解: 轮 $O$ 作平面运动,  $P$ 为速度瞬心,

$$\therefore \omega = \frac{v_O}{R} \quad (\curvearrowright)$$

由于此式在任何瞬时都成立, 且 $O$ 点作直线运动, 故而

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_O}{R}\right) = \frac{1}{R} \frac{dv_O}{dt} = \frac{a_O}{R} \quad (\curvearrowright)$$

以 $O$ 为基点，有： $\bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{a}_{PO}^t + \bar{a}_{PO}^n$

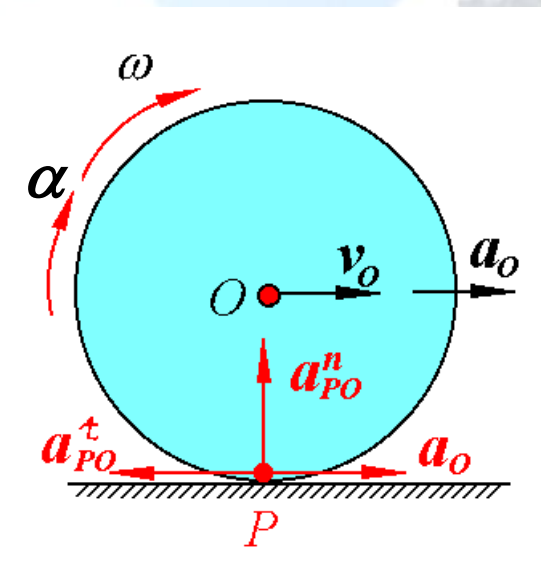
其中： $a_{PO}^t = R \cdot \alpha = a_O$ ，

$$a_{PO}^n = R\omega^2 = R \cdot \left(\frac{v_O}{R}\right)^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

做出加速度矢量图，由图中看出：

$\bar{a}_O$ 与 $\bar{a}_{PO}^t$ 等值反向，所以

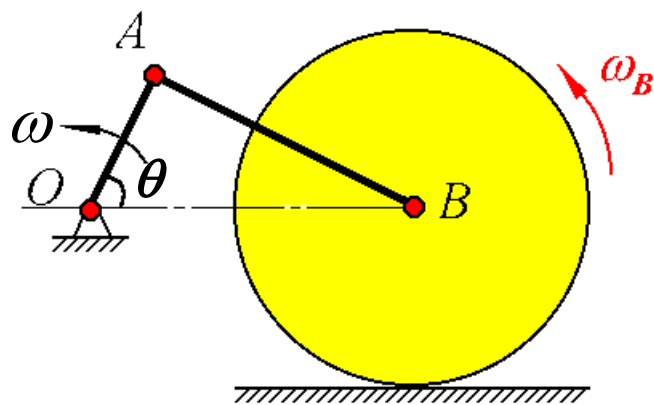
$$a_P = a_{PO}^n = \frac{v_O^2}{R} \quad (\uparrow)$$



由此看出，速度瞬心 $P$ 的加速度并不等于零，即它不是加速度瞬心。当车轮沿固定的直线轨道作纯滚动时，其速度瞬心 $P$ 的加速度指向轮心。

[例11]

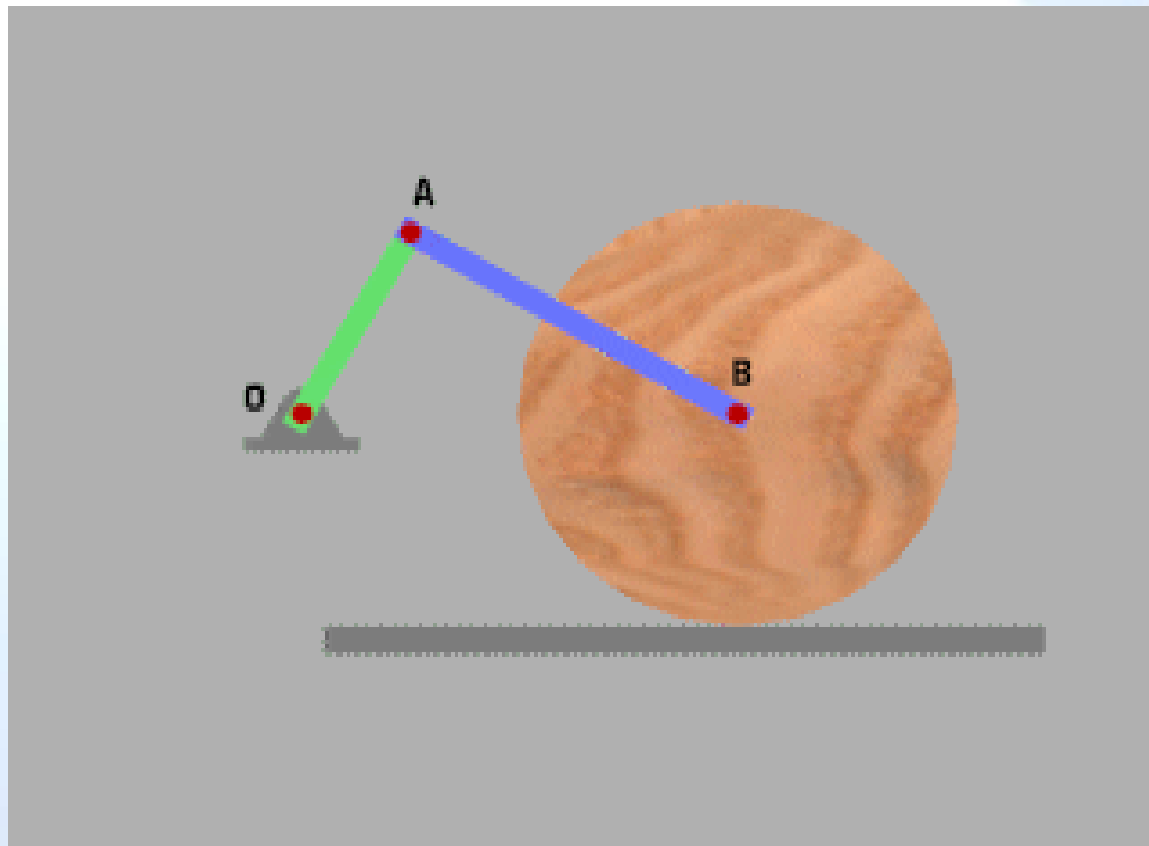
曲柄滚轮机构， $OA=15\text{cm}$ ，滚子半径  
 $R=15\text{cm}$ ， $OA$ 杆的转速 $n=60\text{ rpm}$ ，求：当 $\theta=60^\circ$   
时 ( $OA \perp AB$ )，滚轮的 $\omega_B$ ， $\alpha_B$ 。



翻页请看动画

请看动画

影片：907





分析：要想求出滚轮的 $\omega_B$ ， $\alpha_B$ 先要求出 $v_B$ ， $a_B$

解：OA定轴转动，AB杆和轮B作平面运动

研究AB：

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2\pi \text{ rad/s}$$

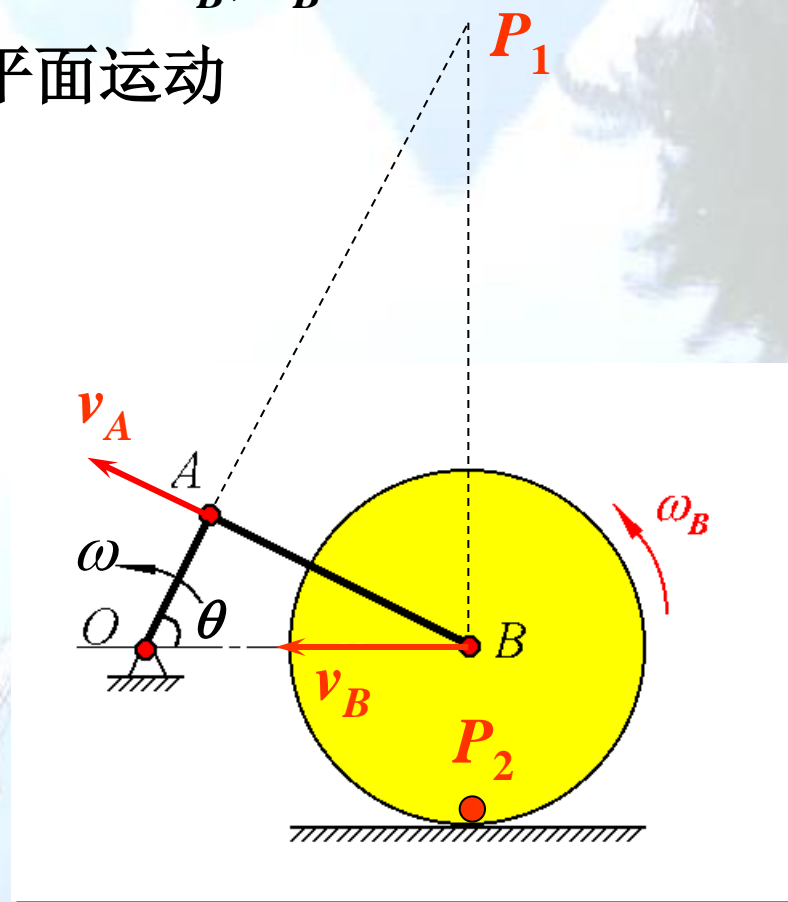
$$v_A = OA \cdot \omega = 30\pi \text{ cm/s}$$

$P_1$  为AB杆的速度瞬心

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{2}{3}\pi \text{ rad/s} \quad (\curvearrowright)$$

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = 20\sqrt{3}\pi \text{ cm/s} (\leftarrow)$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi \text{ cm/s}$$







取A为基点,  $a_A = OA \cdot \omega^2 = 60\pi^2 \text{cm/s}^2$  指向O点

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n \quad (a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \pi^2, \text{沿} BA)$$

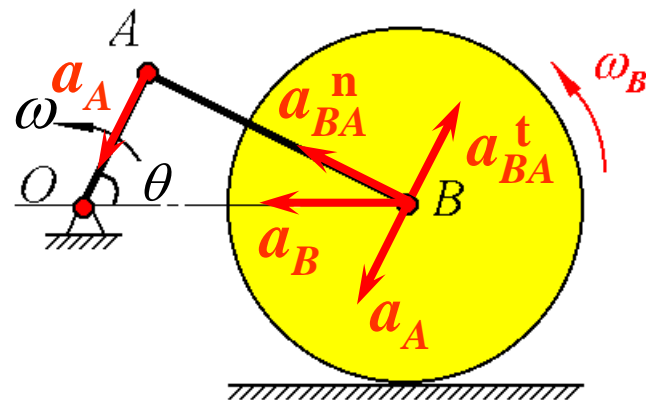
大小?    √    ?    √  
方向√    √    √    √

将上式向AB上投影

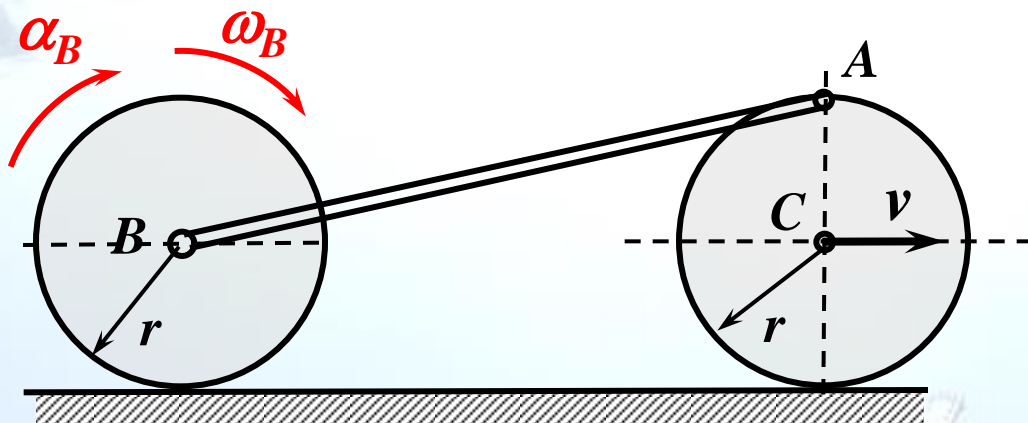
$$a_B \cos 30^\circ = 0 + 0 + a_{BA}^n$$

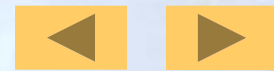
$$a_B = \frac{a_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = 131.5 \text{cm/s}^2 (\leftarrow)$$

$$\therefore \alpha_B = \frac{a_B}{R} = 8.77 \text{rad/s}^2 \quad (\curvearrowleft)$$

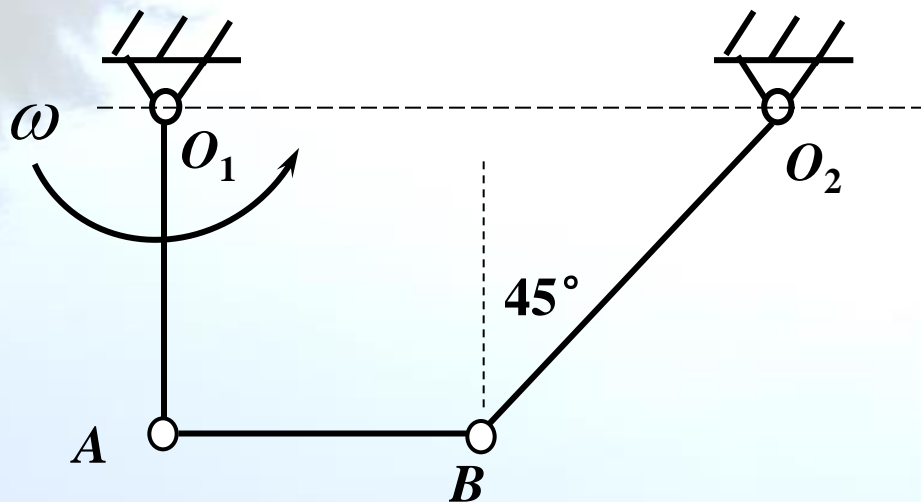


【题6】 两轮子半径均为 $r$ ， $AB=L$ ，均作纯滚动，轮心 $C$ 的速度 $v$ =常数，求图示位置时轮 $B$ 的角速度和角加速度。

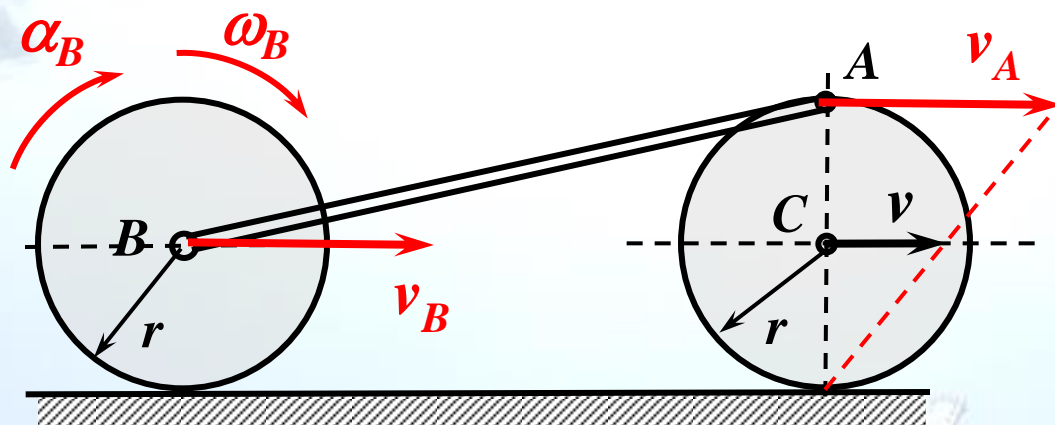




[例] 图示机构中杆  $O_1A$  以匀角速度转动， $O_1A=AB=l$ ， $AB \perp O_1A$ 。求（1）图示瞬时  $AB$  杆和  $O_2B$  杆的角速度；（2） $B$  点的加速度。



【题6】 两轮子半径均为 $r$ ,  $AB=L$ , 均作纯滚动, 轮心 $C$ 的速度 $v$ =常数, 求图示位置时轮 $B$  的角速度和角加速度。



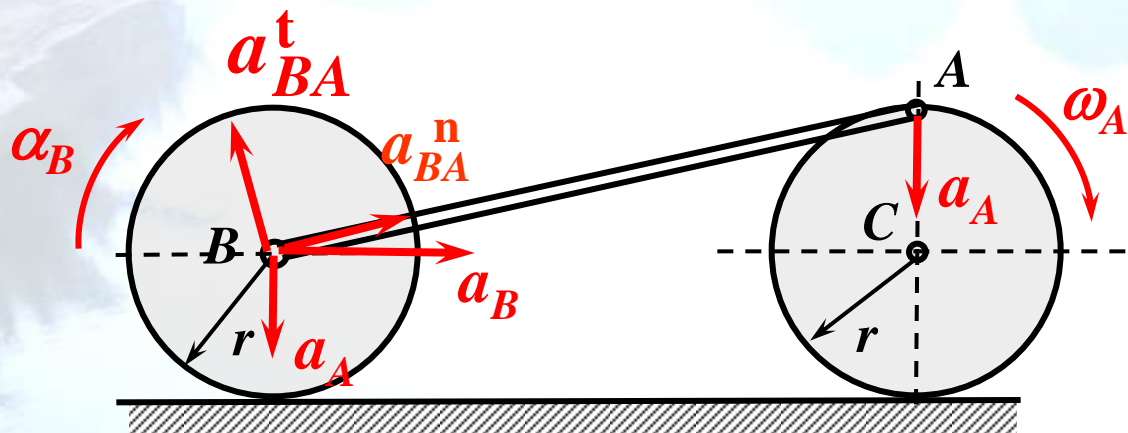
$$\omega_B = \frac{v_B}{r}$$

$$\alpha_B = \frac{a_B}{r}$$

杆 $AB$ 作瞬时平动

$$v_A = v_B = 2v$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{r} = \frac{2v}{r}$$



$$\alpha_B = \frac{a_B}{r}$$

杆AB作瞬时平动

$$\omega_{AB} = 0$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + a_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$$

将上式在杆AB投影

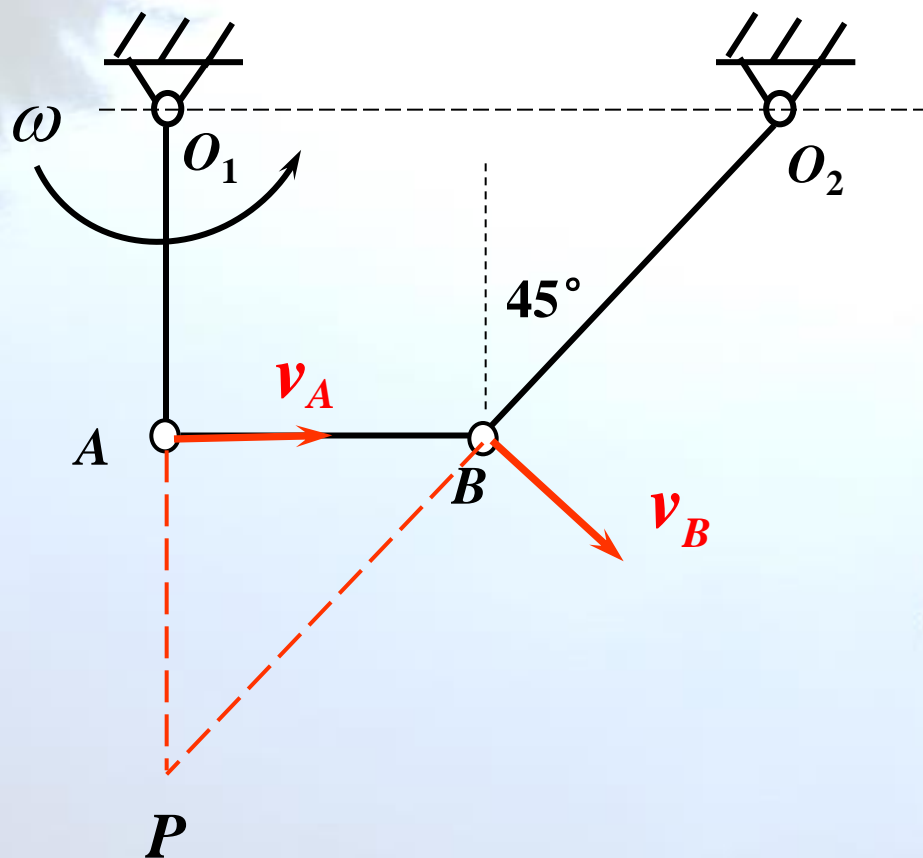
$$a_B \cos \theta = -a_A \sin \theta$$

$$\therefore a_B = -a_A \tan \theta = -\frac{v^2}{r} \frac{r}{\sqrt{L^2 - r^2}}$$

$$a_{BA}^n = 0$$

$$a_A = r \omega_A^2 = \frac{v^2}{r}$$

[例] 图示机构中杆  $O_1A$  以匀角速度转动， $O_1A=AB=l$ ， $AB \perp O_1A$ 。求（1）图示瞬时  $AB$  杆和  $O_2B$  杆的角速度；（2） $B$  点的加速度。

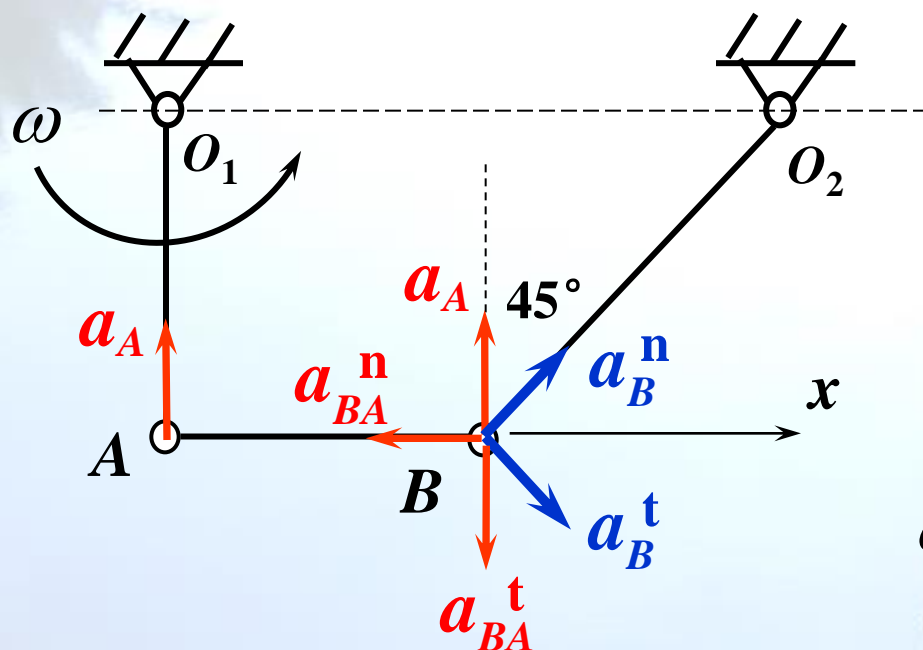


$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \omega$$

$$v_B \cos 45^\circ = v_A$$

$$\omega_{O_2} = \frac{v_B}{O_2B} = \omega$$

[例] 图示机构中杆  $O_1A$  以匀角速度转动， $O_1A=AB=l$ ， $AB \perp O_1A$ 。求 (1) 图示瞬时  $AB$  杆和  $O_2B$  杆的角速度；  
(2)  $B$  点的加速度。



加速度：

$$\bar{a}_B^t + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A + a_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$$

?     ✓     ✓     ?     ✓

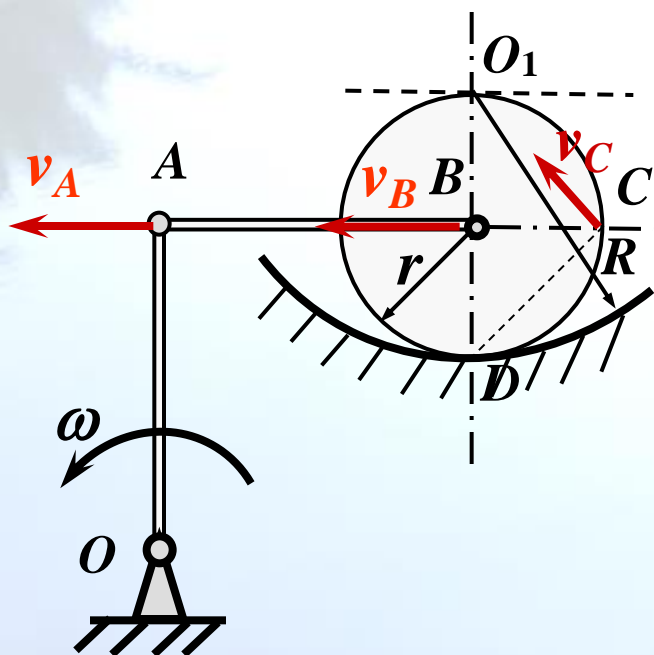
在  $x$  轴上投影：

$$a_B^t \cos 45^\circ + a_B^n \cos 45^\circ = -a_{BA}^n$$

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{O_2B} =$$

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 =$$

已知：恒定  $\omega = 2\text{rad/s}$ ,  $OA = AB = R = 2r = 1\text{m}$ , 纯滚动。求图示瞬时  $B$  点、 $C$  点的速度和加速度。



### ***AB*杆瞬时平动**

$$v_B = v_A = 2r \cdot \omega = 2 \text{ m/s}$$

轮子的角速度:  $\omega_B = \frac{v_B}{r}$

$$\begin{aligned} v_C &= CD \cdot \omega_B = \sqrt{2}r \cdot \omega_B = \sqrt{2}v_B \\ &= 2.828 \text{ m/s} \end{aligned}$$



## (2) B点的加速度

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t \quad \text{①}$$

B点作绕 $O_1$ 点的圆周运动

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^t \quad \text{②}$$

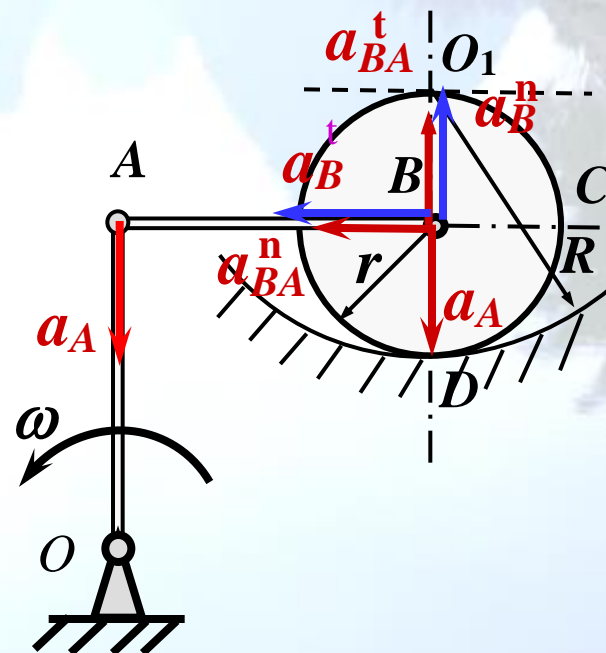
将②代入①得到:

$$\therefore \underbrace{\bar{a}_B^n}_{\checkmark} + \underbrace{\bar{a}_B^t}_{?} = \underbrace{\bar{a}_A}_{\checkmark} + \underbrace{\bar{a}_{BA}^n}_{\checkmark} + \underbrace{\bar{a}_{BA}^t}_{?} \quad \text{③}$$

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{r} = 8 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore \omega_{AB} = 0$$

$$\therefore a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 0$$



将③式在水平轴上投影:

$$-a_B^t = -a_{BA}^n$$

$$\therefore a_B^t = a_{BA}^n = 0$$

由②知:

$$\therefore a_B = a_B^n = 8 \text{ m/s}^2$$

(3) C点的加速度

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t \quad \text{④}$$

?      ✓      ✓      ?

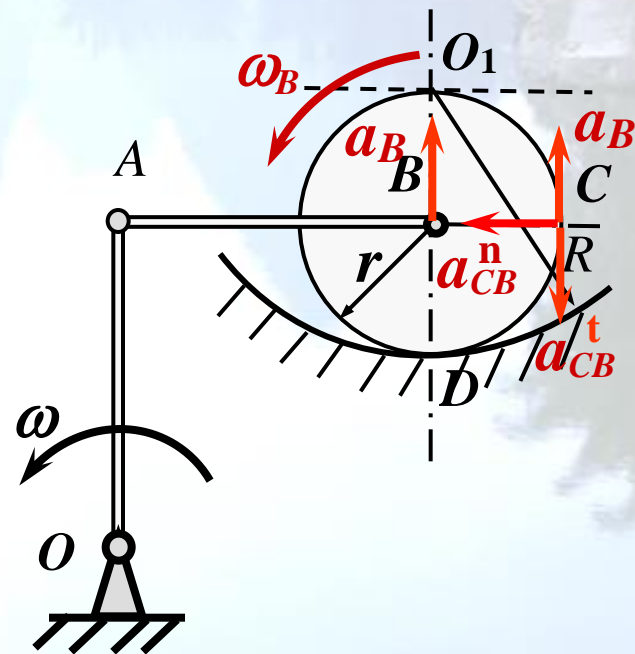
$$a_{CB}^n = r \cdot \omega_B^2 = 8 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore \omega_B = \frac{v_B}{r}$$

$$\therefore \alpha_B = \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_B}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{dv_B}{dt}$$

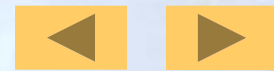
$$= \frac{a_B^t}{r} = 0 \quad \because a_B^t = 0$$

$$\therefore a_{CB}^t = r \cdot \alpha_B = 0$$



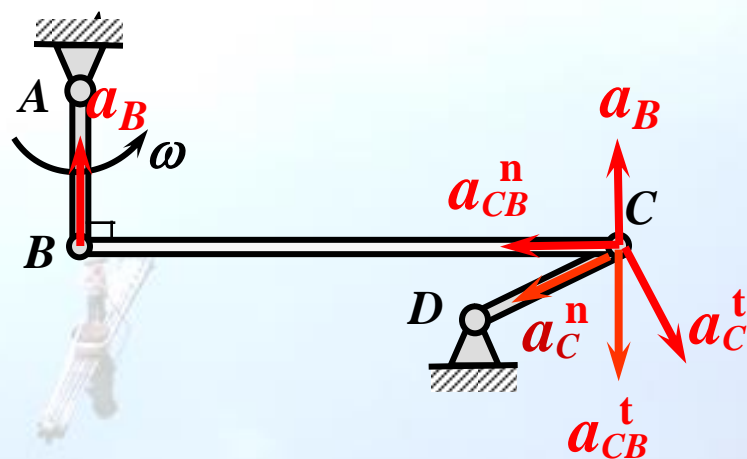
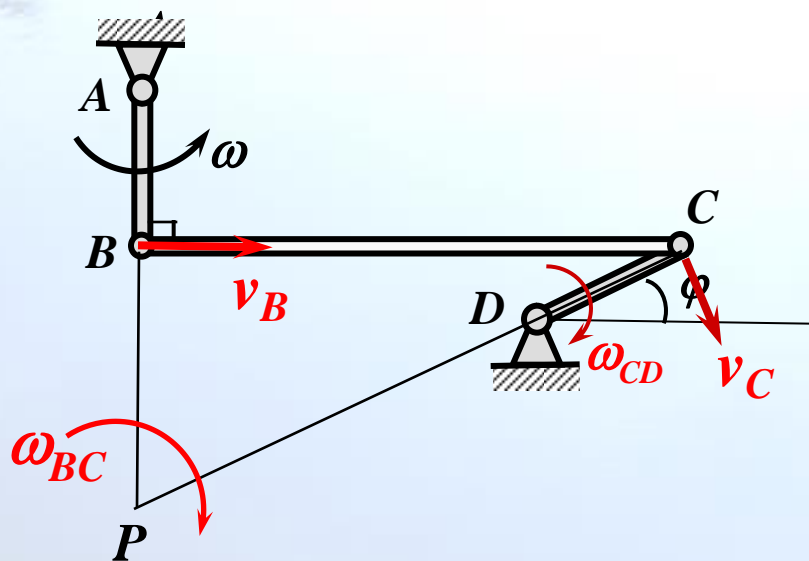
由④式知:  $\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n$

$$\begin{aligned} \therefore a_C &= \sqrt{a_{BA}^n^2 + a_B^2} \\ &= \sqrt{2} \times 8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



[例] 已知:  $AB$  杆以匀角速度  $\omega$  转动,  $AB=CD=r$ ,  $BC=L=2\sqrt{3}r$ ,  $\varphi=30^\circ$ ; 求图示位置时  $CD$  杆的角速度和角加速度。

分析:



$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t$$

$$\bar{a}_C^n + \bar{a}_C^t = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t$$



[例] 已知：匀角速度 $\omega$ ， $AB=CD=r$ ， $BC=L=2\sqrt{3}r$ ， $\varphi=30^\circ$ ，  
求图示位置时 $CD$ 杆的角速度和角加速度。

解：①  $CD$ 杆的角速度

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BP} = \frac{r\omega}{BC \tan \varphi} = \frac{\omega}{2}$$

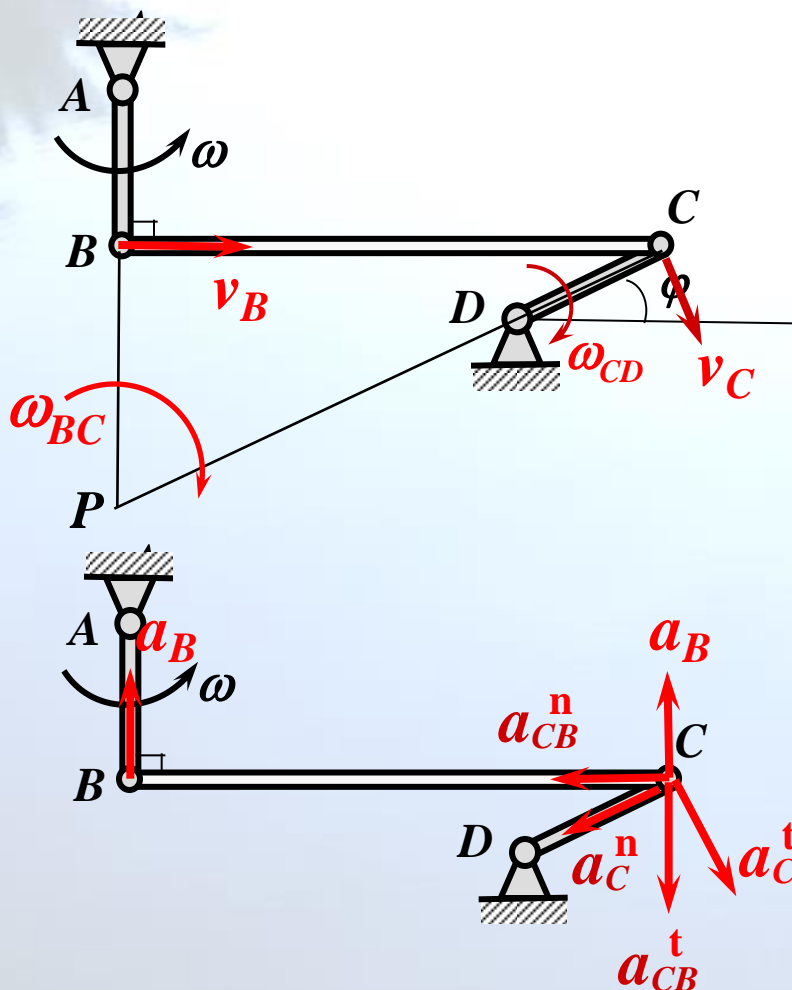
$$v_C = CP \cdot \omega_{BC} = 2r\omega$$

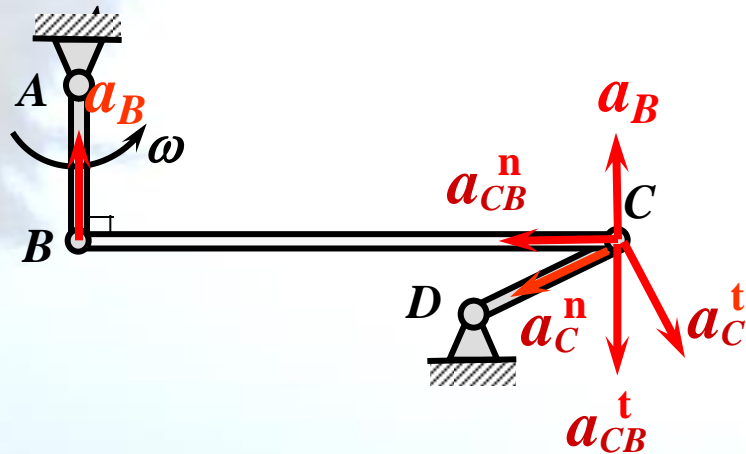
$$\therefore \omega_{CD} = \frac{v_C}{CD} = 2\omega$$

②  $CD$ 杆的角加速度

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t$$

$$\bar{a}_C^n + \bar{a}_C^t = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t$$





## ② $CD$ 杆的角加速度

$$\overset{\checkmark}{\bar{a}_C^n} + \overset{?}{\bar{a}_C^t} = \overset{\checkmark}{\bar{a}_B} + \overset{\checkmark}{\bar{a}_{CB}^n} + \overset{?}{\bar{a}_{CB}^t}$$

$$a_{CB}^n = CB \omega_{BC}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} r \omega^2$$

$$a_C^n = \frac{v_C^2}{CD} = 4r\omega^2$$

$$\omega_{BC} = \frac{\omega}{2}$$

在  $BC$  上投影

$$-a_C^n \cos \varphi + a_C^t \sin \varphi = -a_{CB}^n$$

$$a_C^t = 3\sqrt{3}r\omega^2 \quad \alpha_{CD} = 3\sqrt{3}\omega^2$$

[题8-19] 已知：图示机构中， $OA=r$ ，以等角速度  $\omega_0$  转动， $\varphi = 60^\circ$   
 $AB \perp BC$ ,  $AB=6r$ ,  $BC= 3\sqrt{3}r$ . 求 该瞬时滑块C的  
 速度和加速度.

解： $OA$  定轴转动； $AB, BC$  均作平面运动，

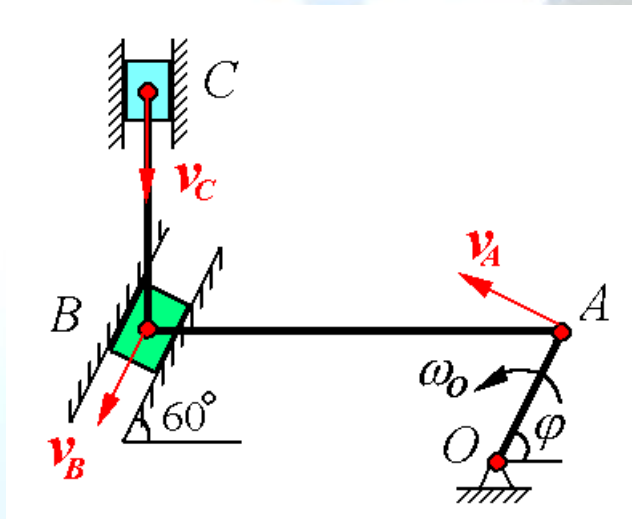
(1) 求  $\bar{v}_c$

对  $AB$  杆应用速度投影定理：

$$v_B \cos 60^\circ = v_A \cos 30^\circ \quad \therefore v_B = \sqrt{3} v_A = \sqrt{3} r \omega_0$$

对  $BC$  杆应用速度投影定理： $v_C = v_B \sin 60^\circ$

$$v_C = \sqrt{3} r \omega_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} r \omega_0 (\downarrow)$$



(2) 求  $\bar{a}_c$

以A为基点求B点加速度:  $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$  (a)

$a_A = r\omega_o^2$ ,  $a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2$ ,  $P_1$ 为AB杆速度瞬心, 而  $AP_1 = 3r$

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{r\omega_o}{3r} = \frac{\omega_o}{3},$$

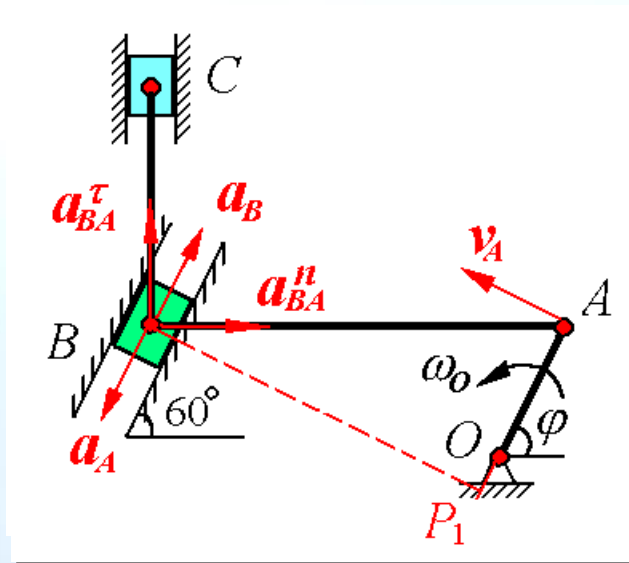
$$a_{BA}^n = 6r \cdot \left(\frac{\omega_o}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}r\omega_o^2$$

作加速度矢量图,

并沿BA方向投影

$$a_B \cos 60^\circ = -a_A \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^n$$

$$\therefore a_B = -r\omega_o^2 + \frac{4}{3}r\omega_o^2 = \frac{r}{3}\omega_o^2$$



再以 $B$ 为基点, 求  $\bar{a}_c$

$$\bar{a}_c = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^t + \bar{a}_{CB}^n \quad (b)$$

作加速度矢量图,

$P_2$  为  $BC$  的瞬心, 而  $P_2C = 9r$

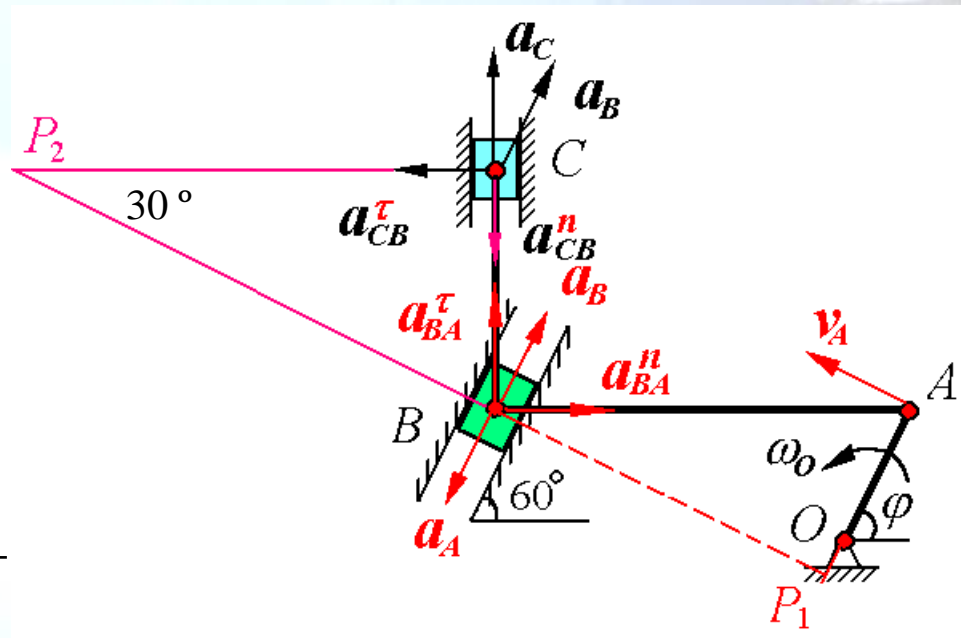
$$\therefore \omega_{BC} = \frac{v_c}{P_2C} = \frac{3}{2} r \omega_o \cdot \frac{1}{9r} = \frac{\omega_o}{6}$$

$$a_{CB}^n = BC \cdot \omega_{BC}^2 = 3\sqrt{3}r \cdot \left(\frac{\omega_o}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} r \omega_o^2$$

将 (b) 式在  $BC$  方向线上投影

$$a_c = a_B \cos 30^\circ - a_{CB}^n = \frac{r}{3} \omega_o^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} r \omega_o^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} r \omega_o^2$$

[注]  $\bar{a}_B, \bar{a}_c$  指向可假设, 结果为正说明假设与实际指向相同, 反之, 结果为负, 说明假设与实际指向相反。





# 第八章结束



上海港