第三篇 《动力学》

理论力学

第十章 动量定理

第十章　　　动量定理

§10-1　动量

1. 质点的动量

2. 质点系的质心

3. 质点系的动量

§10-1　动量

1. 质点的动量：

质点的质量与速度的乘积称为质点的动量 $m\bar{v}$

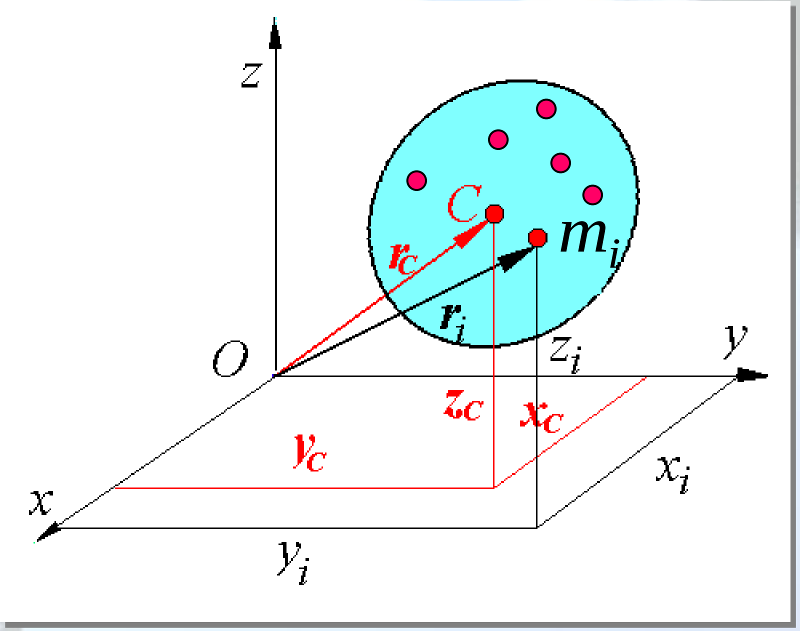
动量是瞬时矢量，方向与$\bar{v}$相同。单位是kg·m/s。

动量是度量物体机械运动强弱程度的一个物理量。

例：枪弹：速度大，质量小；　船：速度小，质量大。

2. 质点系的质心

质点系的质量中心称为质心。是表征质点系质量分布情况的一个重要概念。



设有n个质点，第i个质点的质量为 m_i，总质量为：

$$m=\sum m_i$$

质心C点的位置：$\bar{r}_C=\dfrac{\sum m_i\bar{r}_i}{m}$

设$\bar{r}_C=x_C\bar{i}+y_C\bar{j}+z_C\bar{k}$,则

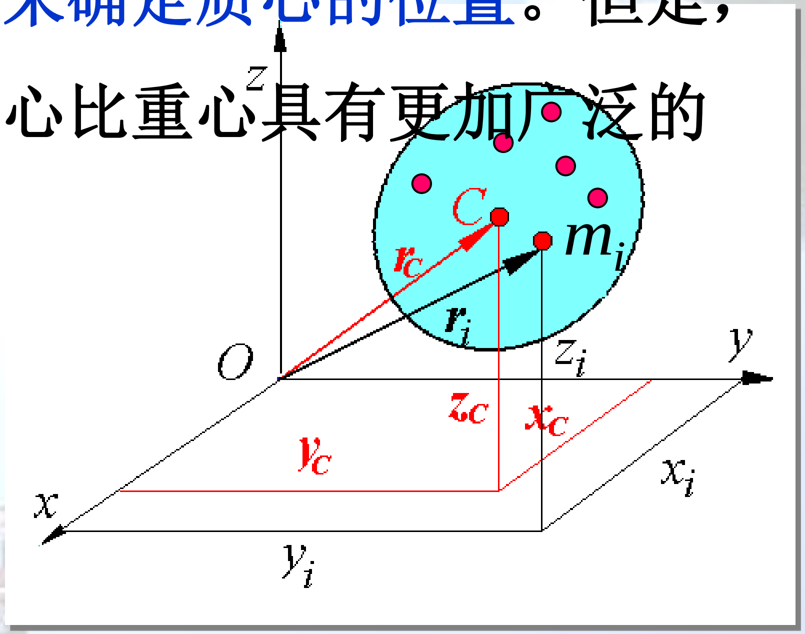
$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m},\quad y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m},\quad z_C=\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

2. 质点系的质心

质点系的质量中心称为质心。是表征质点系质量分布情况的一个重要概念。

设有n个质点，第i个质点的质量为m_i，总质量为：

在均匀重力场中，质点系的质心与重心的位置重合。可采用静力学中确定重心的各种方法来确定质心的位置。但是，质心与重心是两个不同的概念，质心比重心具有更加广泛的力学意义。



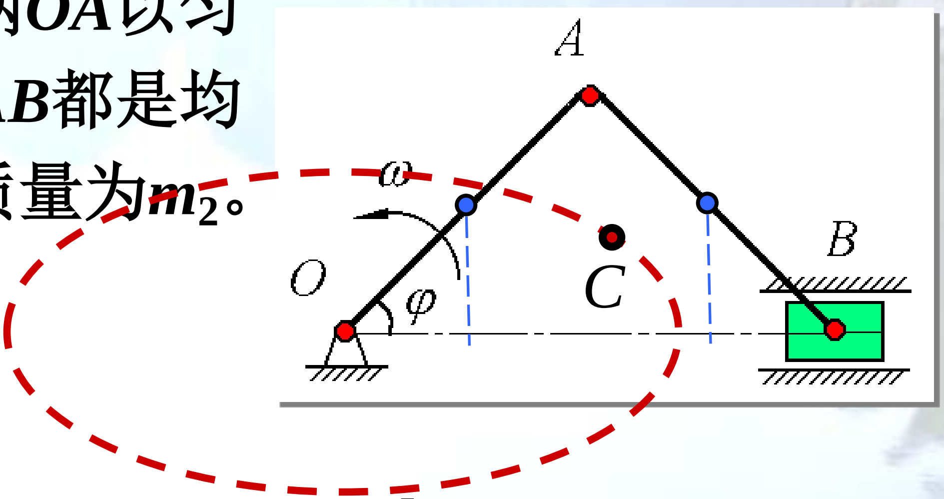
$$m=\sum m_i$$

质心C点的位置：$\bar{r}_C=\dfrac{\sum m_i\bar{r}_i}{m}$

设$\bar{r}_C=x_C\bar{i}+y_C\bar{j}+z_C\bar{k}$,则

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m},\quad y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m},\quad z_C=\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

[例10-4] 曲柄连杆机构的曲柄OA以匀ω转动，设$OA=AB=l$，OA及AB都是均质杆，质量各为m_1，滑块B的质量为m_2。求此系统质心的运动方程。



解：设$t=0$时$\varphi=0$，

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m}=\frac{1}{2m_1+m_2}\left[m_1\frac{l}{2}\cos\varphi+m_1\frac{3l}{2}\cos\varphi+m_2 2l\cos\varphi\right]$$

$$=\frac{m_1\frac{l}{2}+m_1\frac{3l}{2}+2m_2 l}{2m_1+m_2}\cos\varphi=\frac{2(m_1+m_2)}{2m_1+m_2}l\cos\omega t$$

$$y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m}=\frac{1}{2m_1+m_2}\left[m_1\frac{l}{2}\sin\varphi+m_1\frac{l}{2}\sin\varphi\right]$$

$$=\frac{m_1}{2m_1+m_2}l\sin\varphi=\frac{m_1}{2m_1+m_2}l\sin\omega t$$

3. 质点系的动量

质点系的动量等于质点系中所有各质点的动量的矢量和。

$$\bar{p} = \sum m_i \bar{v}_i$$

因为 $\bar{v}_i = \dfrac{\mathrm{d}\bar{r}_i}{\mathrm{d}t}$

$$\therefore \quad \bar{p} = \sum m_i \bar{v}_i = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\bar{r}_i}{\mathrm{d}t}$$ （质量不随时间变化）

$$= \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \bar{r}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum m_i \bar{r}_i$$

由质心位置公式：$\bar{r}_C = \dfrac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}$ 则 $\sum m_i \bar{r}_i = m \bar{r}_C$

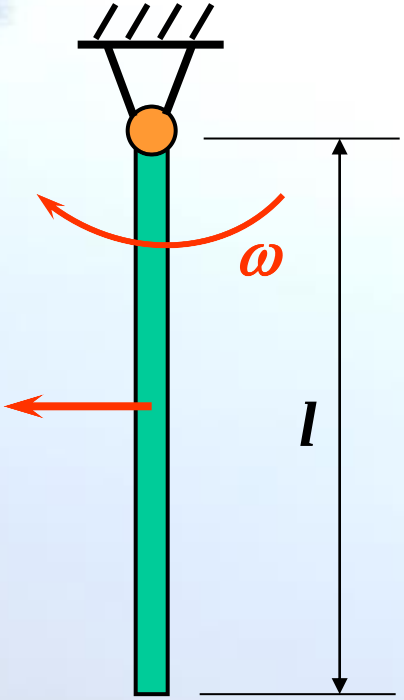
$$\therefore \quad \bar{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum m_i \bar{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m \bar{r}_C = m \frac{\mathrm{d}\bar{r}_C}{\mathrm{d}t} = m \bar{v}_C$$

$$\therefore \quad \bar{p} = m \bar{v}_C$$

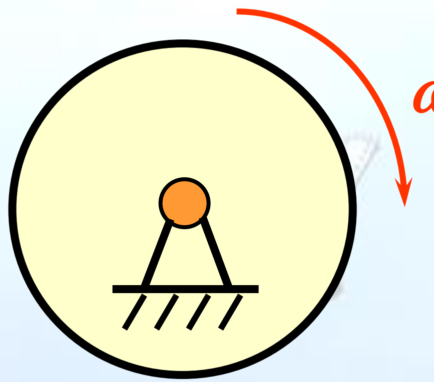
即：质点系的动量等于质点系的质量与其质心速度的乘积

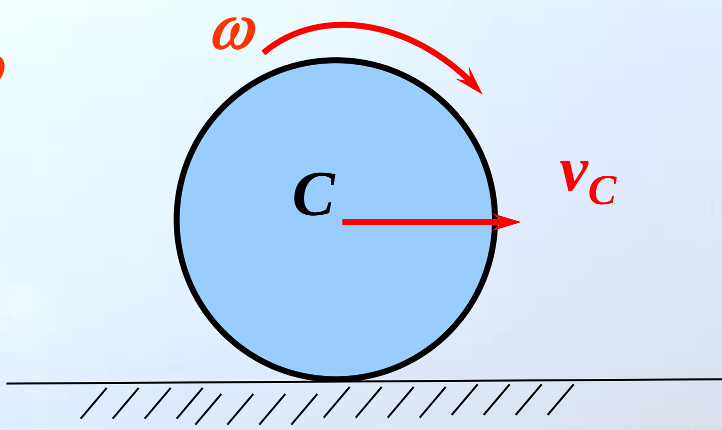
$$\boxed{\bar{p}=m\bar{v}_C}$$

例：



或：$\boxed{\bar{p}=\sum m_i\bar{v}_i}$



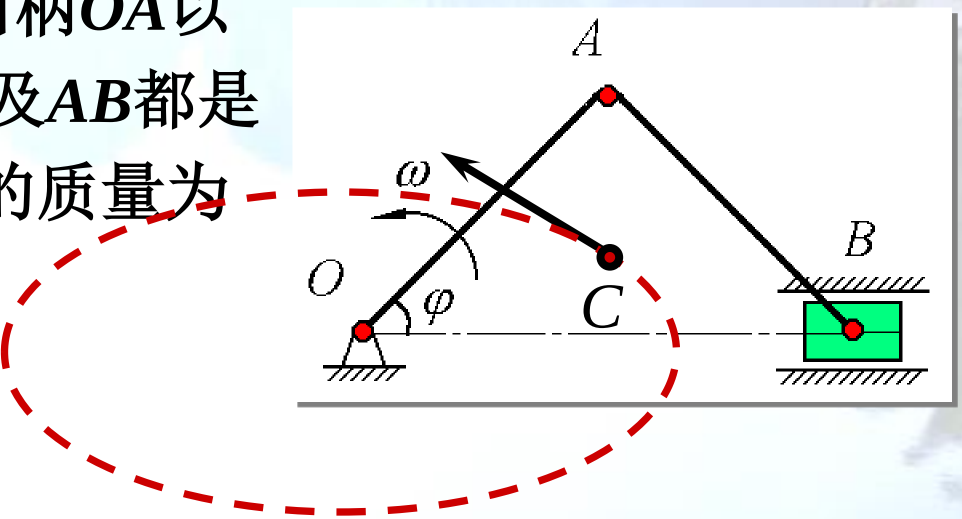


$p=m\frac{l}{2}\omega(\leftarrow)$

$p=0$

$p=mv_C(\rightarrow)$

[例10-4]　曲柄连杆机构的曲柄*OA*以匀ω转动，设$OA=AB=l$，*OA*及*AB*都是均质杆，质量各为m_1，滑块*B*的质量为m_2。求此系统的动量。



解:

$$x_C=\frac{2(m_1+m_2)}{2m_1+m_2}l\cos\omega t$$

$$v_{Cx}=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{2(m_1+m_2)}{2m_1+m_2}l\omega\sin\omega t$$

$$p_x=mv_{Cx}=-2(m_1+m_2)l\omega\sin\omega t$$

$$y_C=\frac{m_1}{2m_1+m_2}l\sin\omega t$$

$$v_{Cy}=\frac{m_1}{2m_1+m_2}l\omega\cos\omega t$$

$$p_y=mv_{Cy}=m_1 l\omega\cos\omega t$$

$$p=\sqrt{p_x^2+p_y^2}$$

§10-2　动量定理

1、质点的动量定理

2、质点系的动量定理

§10-2 动量定理

1、质点的动量定理

$$\because m\bar{a}=\bar{F} \qquad \text{或} \quad m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{v})=\bar{F}}$$

质点的动量对时间的导数等于作用于质点的力 —质点的动量定理

2、质点系的动量定理

设质点系有n个质点，第i个质点的质量为m_i，速度为v_i，所受力有外力和内力：

外力：$\bar{F}_i^{(e)}$质点系以外的物体作用于该质点系中各质点的力。

内力：$\bar{F}_i^{(i)}$ 质点系内各质点之间相互作用的力。

对整个质点系来讲，内力系的主矢和内力系对任一点（或轴）的主矩均恒等于零。即：

$$\sum\overline{F}_i^{(i)}=0 \qquad \sum\overline{M}_O(\overline{F}_i^{(i)})=0 \qquad \sum M_x(\overline{F}_i^{(i)})=0$$

对质点系内任一质点 i， $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\overline{v}_i)=\overline{F}_i^{(i)}+\overline{F}_i^{(e)}$

对整个质点系： $\sum\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\overline{v}_i)=\cancel{\sum\overline{F}_i^{(i)}}+\sum\overline{F}_i^{(e)}$

$$\therefore\quad \sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\overline{v}_i)=\sum\overline{F_i}^{(e)}$$

或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum(m_i\overline{v}_i)=\sum\overline{F_i}^{(e)}$ $\boxed{\overline{p}=\sum(m_i\overline{v}_i)}$

即： $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\overline{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\overline{F}_i^{(e)}}$ 质点系的动量定理

§ 10-3　质心运动定理

1、质心运动定理

2、质心运动守恒定律

§ 10-3　质心运动定理

1、质心运动定理

由质点系动量定理：$\dfrac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \bar{F}_i^{(e)}$

将 $\bar{p}=m\bar{v}_C$ 代入到质点系动量定理，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{v}_C)=\sum \bar{F}_i^{(e)}$$

若质点系质量不变，则

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum \bar{F}_i^{(e)}$$

即　$\boxed{m\bar{a}_C=\sum \bar{F}_i^{(e)}}$　——质心运动定理

$$\boxed{m\bar{a}_C=\sum\bar{F}_i^{(e)}}$$

因为 $\bar{r}_C=\dfrac{\sum m_i\bar{r}_i}{m}$

$$\therefore m\bar{r}_C=\sum m_i\bar{r}_i$$

等式两边对时间求两次导数

$$\therefore m\bar{a}_C=\sum m_i\bar{a}_i$$

$$\boxed{\sum m_i\bar{a}_{iC}=\sum\bar{F}_i^{(e)}}$$

——质心运动定理

投影形式

(1)直角坐标

$$\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_{ix}^{(e)} \\ ma_{Cy}=\sum F_{iy}^{(e)} \\ ma_{Cz}=\sum F_{iz}^{(e)} \end{cases}$$

或 $\begin{cases} \sum m_i a_{ix}=\sum F_{ix}^{(e)} \\ \sum m_i a_{iy}=\sum F_{iy}^{(e)} \\ \sum m_i a_{iz}=\sum F_{iz}^{(e)} \end{cases}$

(2)自然轴坐标

$$m\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\sum F_\tau^{(e)}$$

$$m\frac{v_C^2}{\rho}=\sum F_n^{(e)}$$

质心运动定理是动量定理的另一种表现形式，与质点运动微分方程形式相似。

对于任意一个质点系，无论它作什么形式的运动，质点系质心的运动可以看成为一个质点的运动，并设想把整个质点系的质量都集中在质心这个点上，所有外力也集中作用在质心这个点上。

只有外力才能改变质点系质心的运动, 内力不能改变质心的运动，但可以改变系统内各质点的运动。

2. 质心运动守恒定律

若 $\sum \overline{F_i}^{(e)} = 0$，则 $\bar{a}_C = o$，$\bar{v}_C =$ 常矢量，质心作匀速直线运动；

若开始时系统静止，即 $\bar{v}_{C0} = 0$ 则 $\bar{r}_C =$ 常矢量,质心位置守恒。

若 $\sum F_{xi}^{(e)} = 0$，则 $a_{Cx} = 0$，$v_{Cx} =$ 常量，质心沿x方向速度不变；

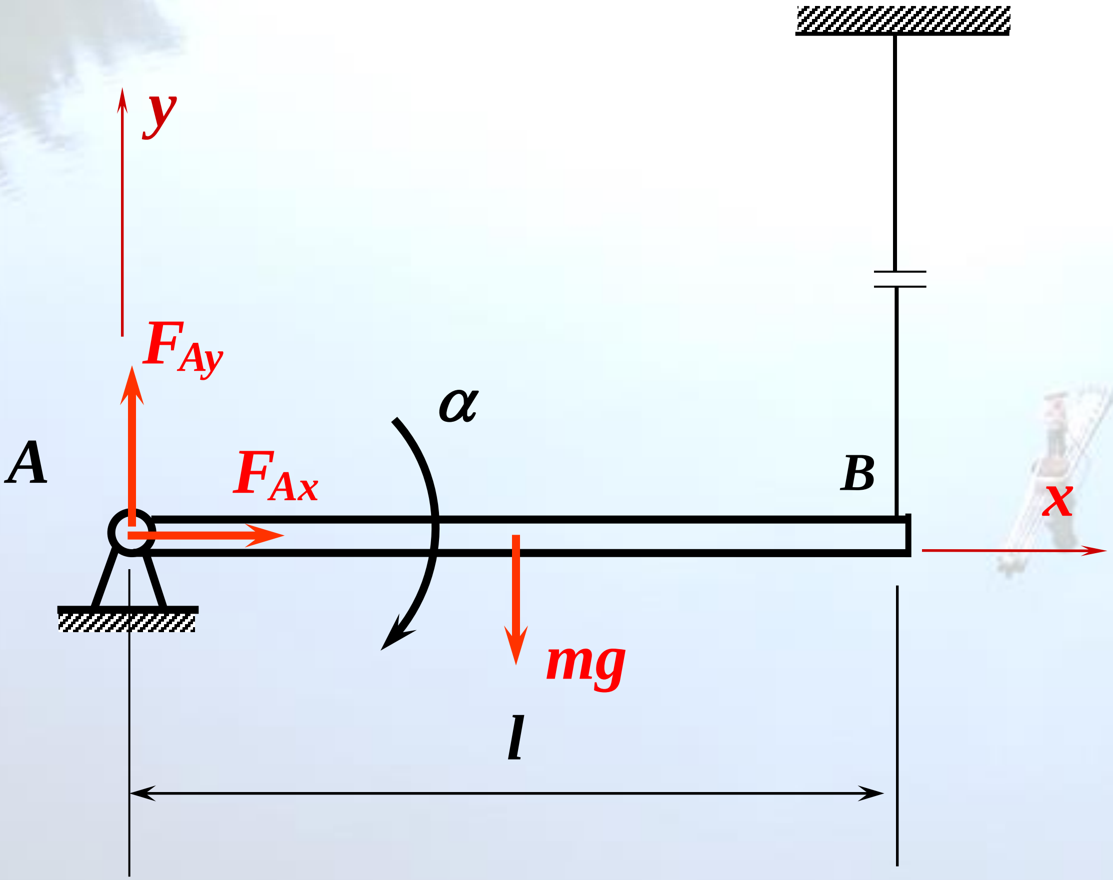
若存在 $v_{Cx0} = 0$ 则 $x_C =$ 常量，质心在x 轴的位置坐标保持不变

质心运动定理可求解两类动力学问题:

(1)已知质点系质心的运动, 求作用于质点系的外力(包括约束反力)。

(2)已知作用于质点系的外力，求质心的运动规律。

[例6] 均质杆长为l ,质量为m,当细绳被突然剪断时，杆子的角加速度为α，角速度为零，求支座A处的反力。



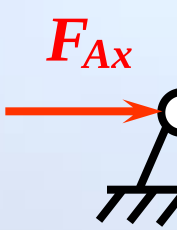
解：受力分析和运动分析

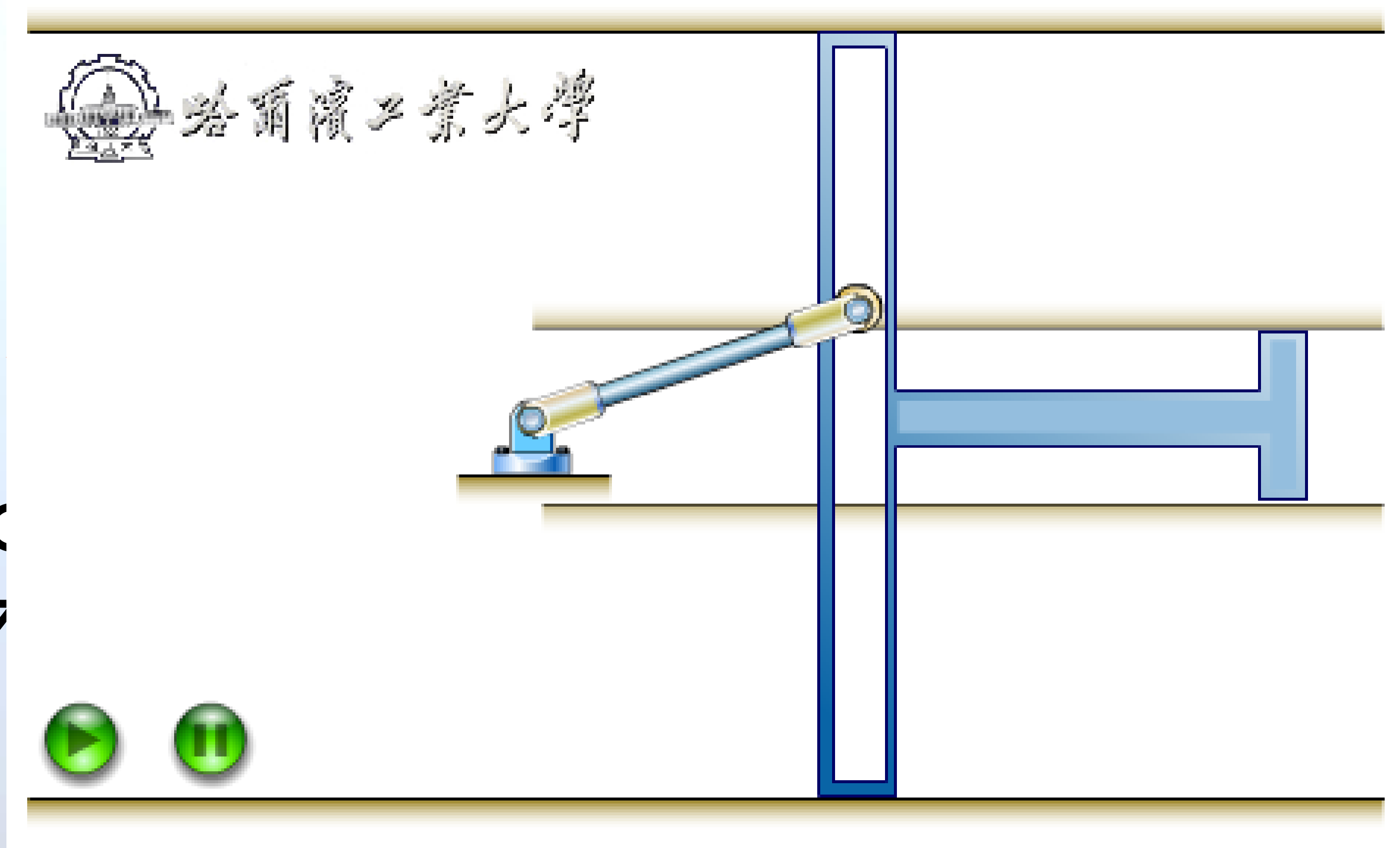
$$\begin{cases} a_{Cx}=0 \\ a_{Cy}=-\dfrac{l}{2}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\,a_{Cx}=F_{Ax} \\ ma_{Cy}=F_{Ay}-mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Ax}=0 \\ F_{Ay}=mg-m\dfrac{l}{2}\alpha \end{cases}$$

[例10-5] (P253) 均质曲杆*AB*长为r，质量为m_1，以匀角速度ω转动，滑槽连杆活塞总质量为m_2，质心在*C*，活塞上作用一恒力*F*，求*A*处的最大水平反力。





研究

定理

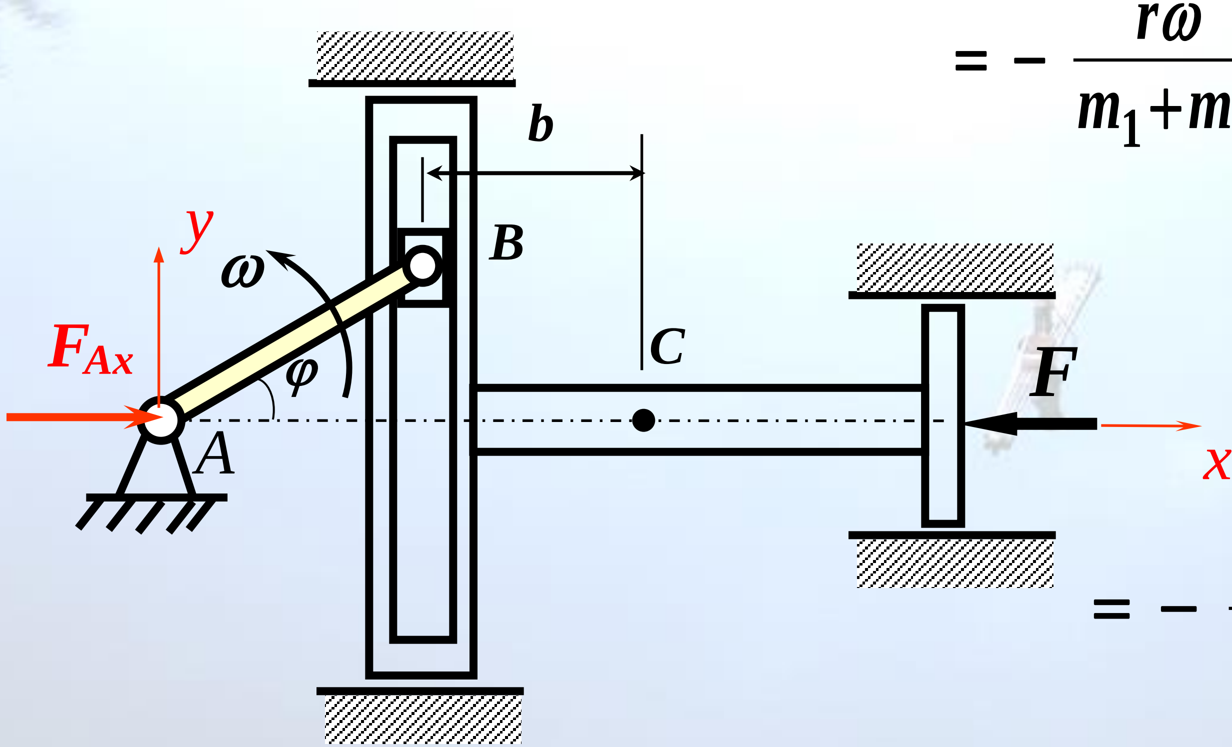
$_x - F$

$F_{Ax} - F$

解：$x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} = \dfrac{1}{m_1+m_2} \cdot \left[m_1 \dfrac{r}{2}\cos\varphi + m_2(r\cos\varphi + b) \right]$

$$v_{Cx} = \frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_1+m_2} \cdot \left[-m_1 \frac{r}{2}\sin\varphi - m_2 r\sin\varphi \right] \cdot \overset{\omega}{\boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}}$$

$$= -\frac{r\omega}{m_1+m_2} \cdot \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right)\sin\varphi$$



$$a_{Cx} = \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{r\omega^2}{m_1+m_2} \cdot \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right)\cos\varphi$$

解：$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m}=\frac{1}{m_1+m_2}\cdot\left[m_1\frac{r}{2}\cos\varphi+\ m_2(r\cos\varphi+b)\ \right]$

$$v_{Cx}=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{m_1+m_2}\cdot\left[-m_1\frac{r}{2}\sin\varphi-m_2 r\sin\varphi\right]\cdot\overset{\omega}{\boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}}$$

$$=-\frac{r\omega}{m_1+m_2}\cdot\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\sin\varphi$$

$$a_{Cx}=\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{r\omega^2}{m_1+m_2}\cdot\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\cos\varphi$$

$$m\,a_{Cx}=F_{Ax}-F$$

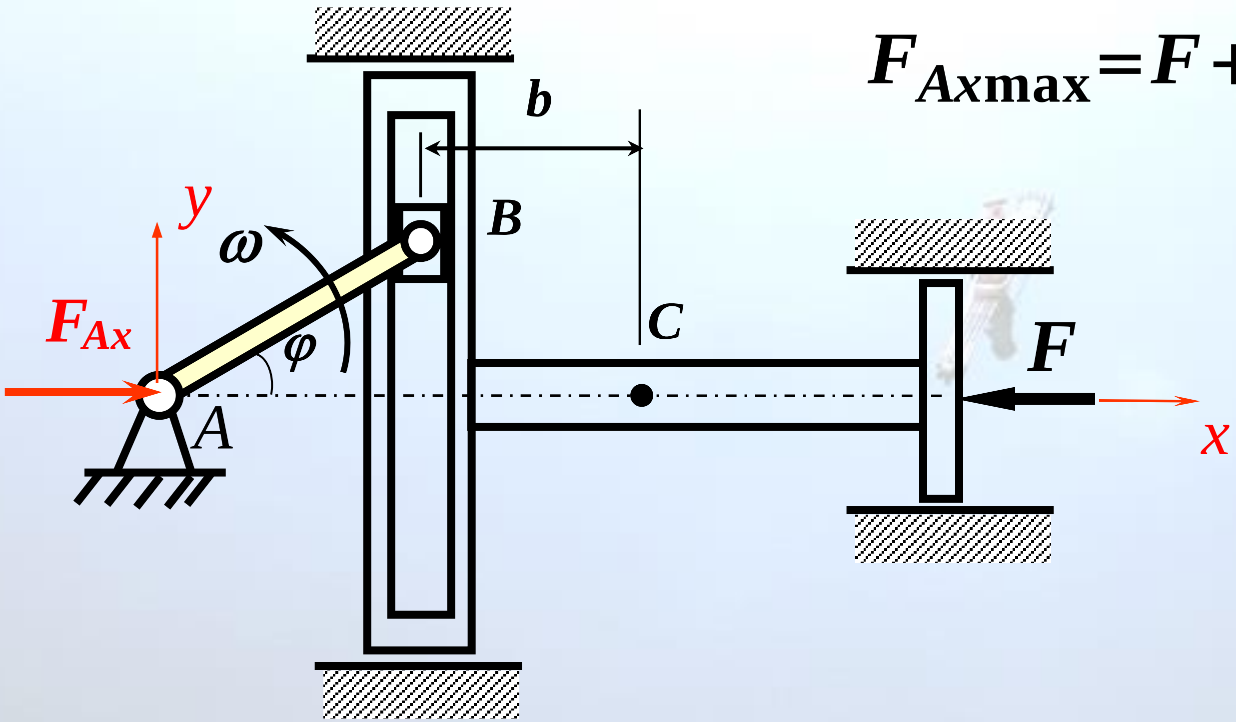
$$\therefore F_{Ax}=F+m\,a_{Cx}=F-\ r\omega^2\cdot\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\cos\varphi$$

$$\therefore F_{Ax} = F + m\,a_{Cx}$$

$$= F - r\omega^2 \cdot \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)\cos\varphi$$

当$\varphi=\pi$时

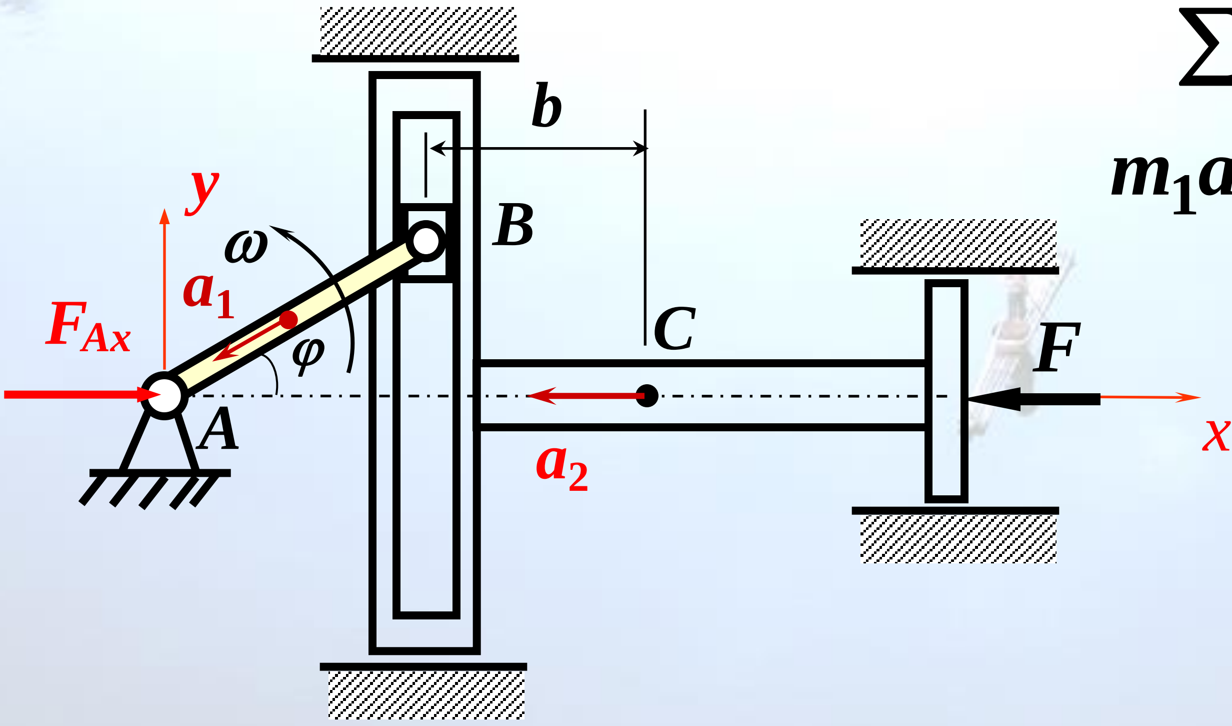
$$F_{Ax\max} = F + r\omega^2 \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)$$



[例10-5]
(P253)

均质曲杆*AB*长为*r*，质量为m_1, 以匀角速度ω 转动, 滑槽连杆活塞总质量为m_2, 质心在*C*, 活塞上作用一恒力*F*，求*A*处的最大水平反力。

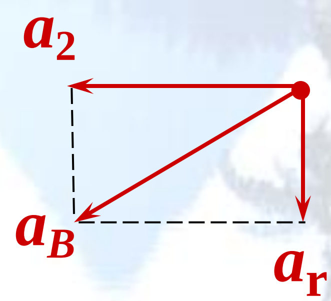
应用质心运动定理的另一形式



$$\sum m_i a_{ix} = \sum F_x$$

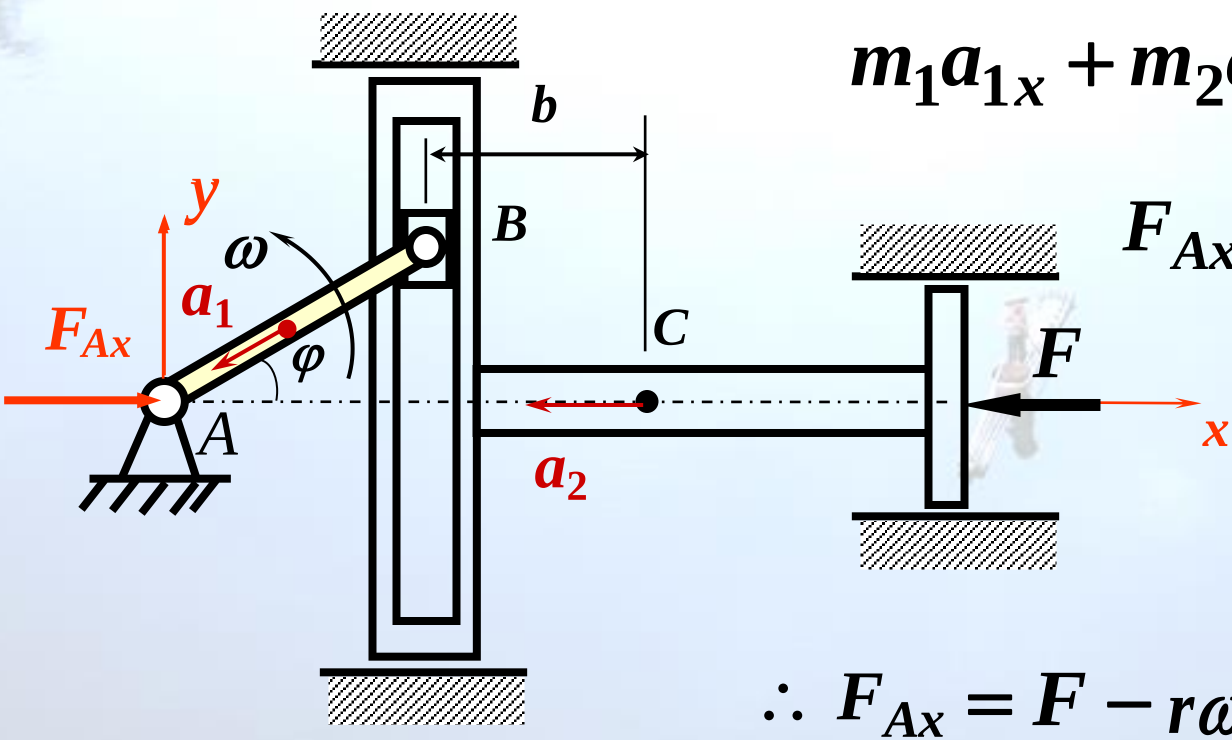
$$m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} = \sum F_x$$

$$a_{1x} = -\frac{r}{2}\omega^2 \cos\varphi,$$



$$a_{2x} = -a_B \cos\varphi = -r\omega^2 \cos\varphi$$

$$\sum m_i a_{ix} = \sum F_x$$

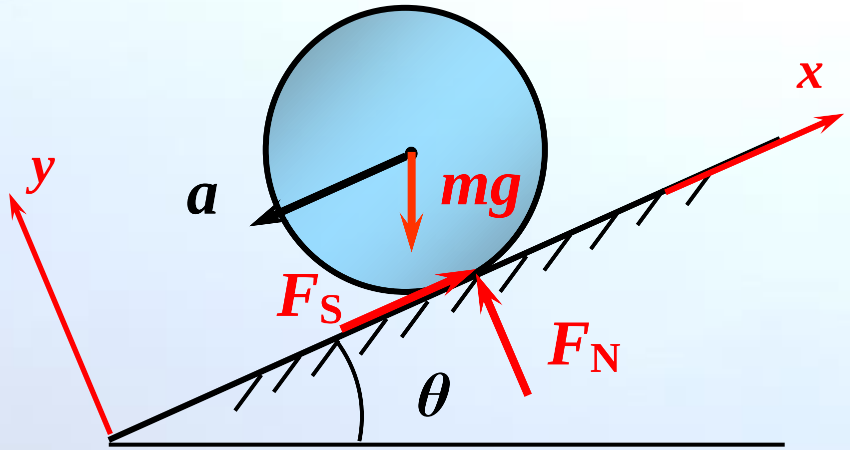


$$m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} = F_{Ax} - F$$

$$F_{Ax} = F + m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x}$$

$$\therefore\ F_{Ax} = F - r\omega^2 \cdot \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)\cos\varphi$$

[例7] 均质圆盘质量为m，只滚不滑，其质心的加速度为 a，求圆盘与地面之间的摩擦力大小。



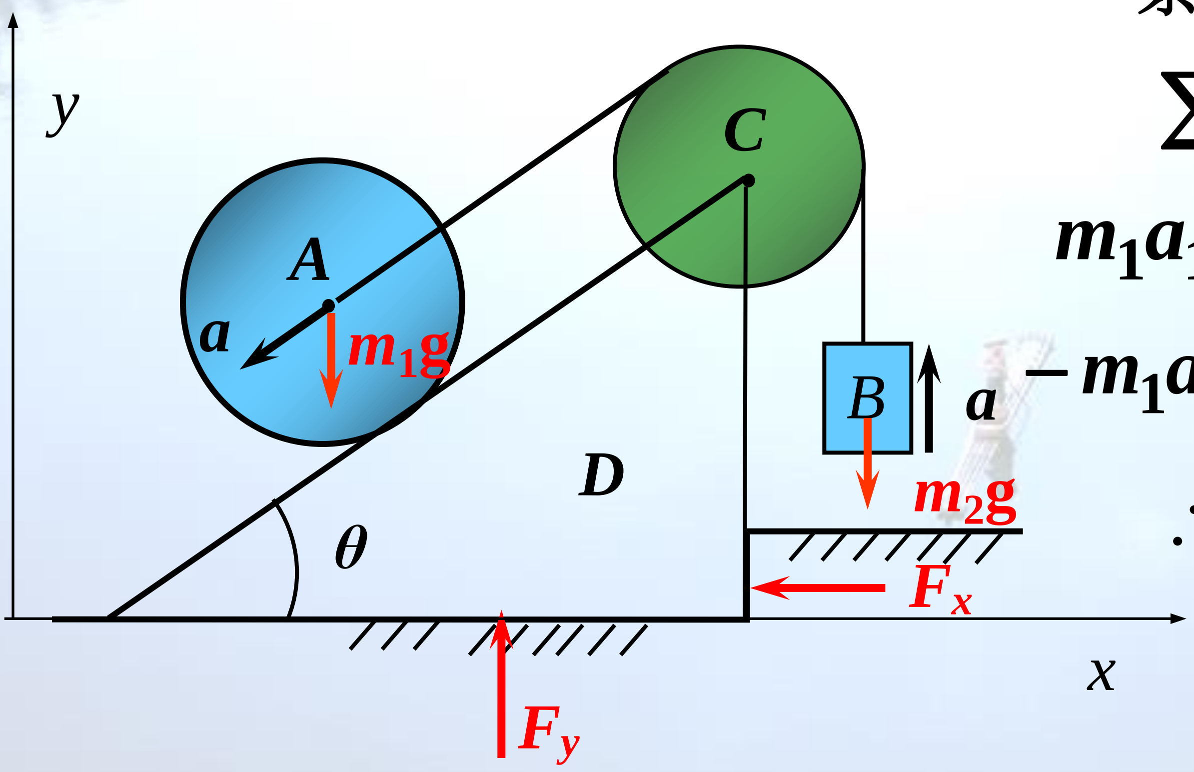
解：受力分析

$$ma_{Cx} = \sum F_x$$

$$-ma = F_S - mg\sin\theta$$

$$\therefore F_S = mg\sin\theta - ma$$

[例8] 已知：轮子A的质量为m_1，物块B的质量为m_2，三角块D放置在光滑面上，三角块D和轮子C的质量不计，物块B以加速度a 上升，求地面凸出处给三角块的水平作用力。



解：取整个系统作为质点系研究，

$$\sum m_i a_{ix} = \sum F_x$$

$$m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} = \sum F_x$$

$$-m_1 a\cos\theta + m_2 \cdot 0 = -F_x$$

$$\therefore \quad F_x = m_1 a\cos\theta$$

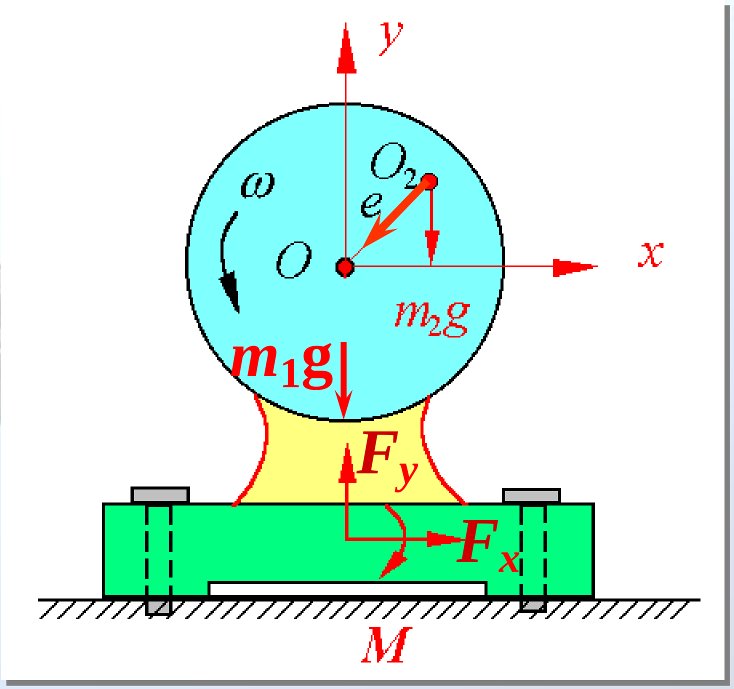
[例9] 电动机的外壳固定在水平基础上，外壳、底座和定子的质量为m_1, 转子质量为m_2, 转子的轴通过O, 但由于制造误差, 转子的质心O_2到O的距离为e 。求转子以角速度ω作匀速转动时，基础作用在电动机底座上的约束反力。

解: 取整个电动机作为质点系研究，

分析受力: 受力图如图示

运动分析：定子、底座的质心的加速度为零，

转子质心O_2的加速度$a_2=e\omega^2$，方向指向O。



$a_1=0$，　$a_2=e\omega^2$

$$a_{2x}=-e\omega^2\cos\omega t,$$

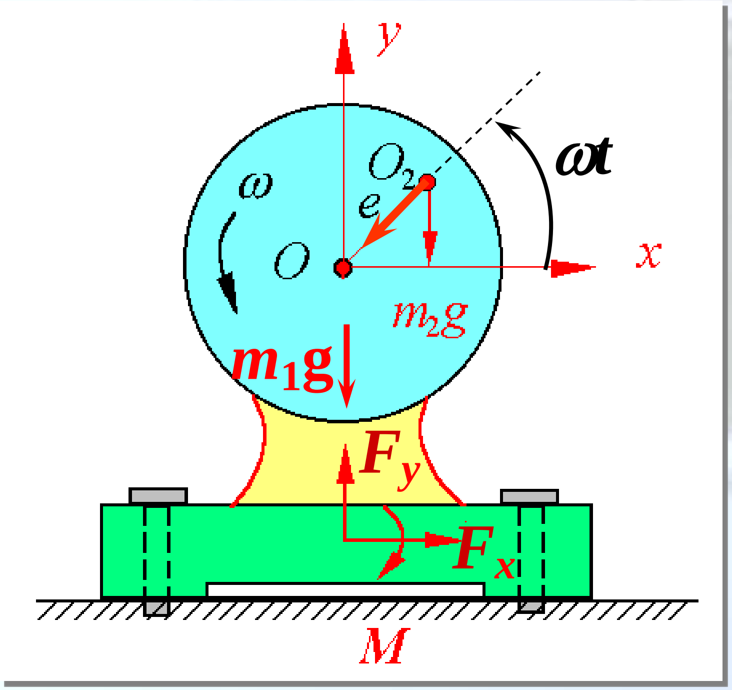
$$a_{2y}=-e\omega^2\sin\omega t$$

根据质心运动定理，有

$$\begin{cases}\sum m_i a_{Cix}=\sum F_{ix}^{(e)}\\ \sum m_i a_{Ciy}=\sum F_{iy}^{(e)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}m_2 a_{2x}=F_x\\ m_2 a_{2y}=F_y-m_1 g-m_2 g\end{cases}$$

$$\begin{cases}-m_2 e\omega^2\cos\omega t=F_x\\ -m_2 e\omega^2\sin\omega t=F_y-m_1 g-m_2 g\end{cases}$$

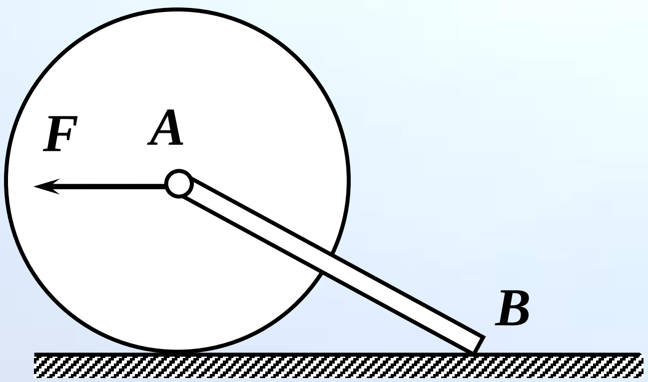


$$\begin{cases}F_x=-m_2 e\omega^2\cos\omega t,\\ F_y=m_1 g+m_2 g-m_2 e\omega^2\sin\omega t\end{cases}$$

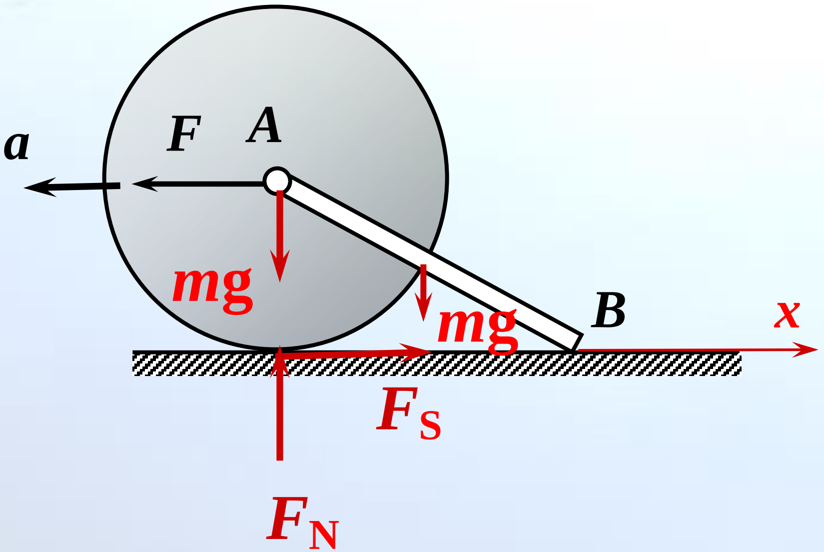
当$e=0$时，

$$F_x=0,\quad F_y=m_1 g+m_2 g$$

[例8] 均质圆盘A的质量为m，半径为R，均质细杆AB的质量也为m，长$l=2R$，杆端A与轮心光滑铰接，圆盘沿水平面纯滚动，水平拉力$F=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}mg$，此时，杆端B刚好离开地面,轮心A的加速度$a=\sqrt{3}g$。试求：为保证纯滚动，轮与地面间的静滑动摩擦因数应为多大?



[例8] 均质圆盘A的质量为m，半径为R，均质细杆AB的质量也为m，长$l=2R$，杆端A与轮心光滑铰接，圆盘沿水平面纯滚动，水平拉力$F=\frac{5\sqrt{3}}{2}mg$，此时，杆端B刚好离开地面,轮心A的加速度$a=\sqrt{3}g$。试求：为保证纯滚动，轮与地面间的静滑动摩擦因数应为多大?



$$\begin{cases} \sum m_i a_{Cix} = \sum F_{ix}^{(e)} \\ \sum m_i a_{Ciy} = \sum F_{iy}^{(e)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2ma = F_S - F \\ 0 = F_N - 2mg \end{cases}$$

$$F_S = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \qquad F_N = 2mg$$

$$F_S \leqslant f_s \cdot F_N \qquad f_s \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$$


第十章结束