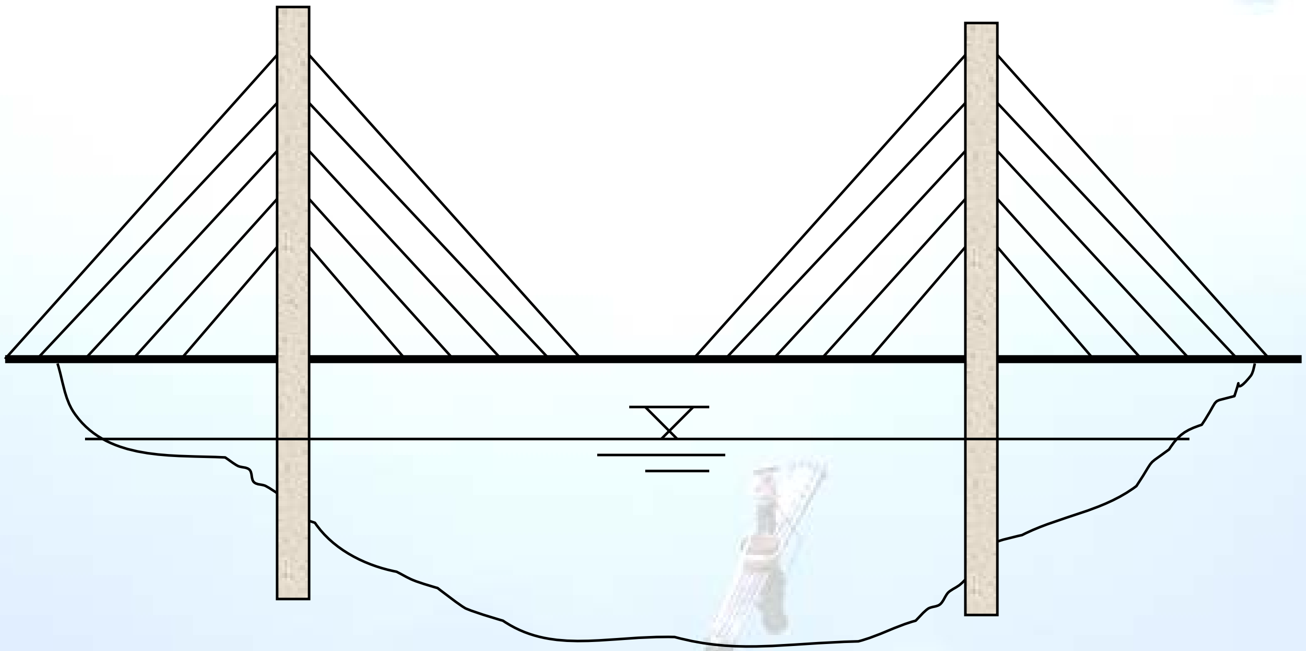
材料力学

第二章　拉伸、压缩与剪切

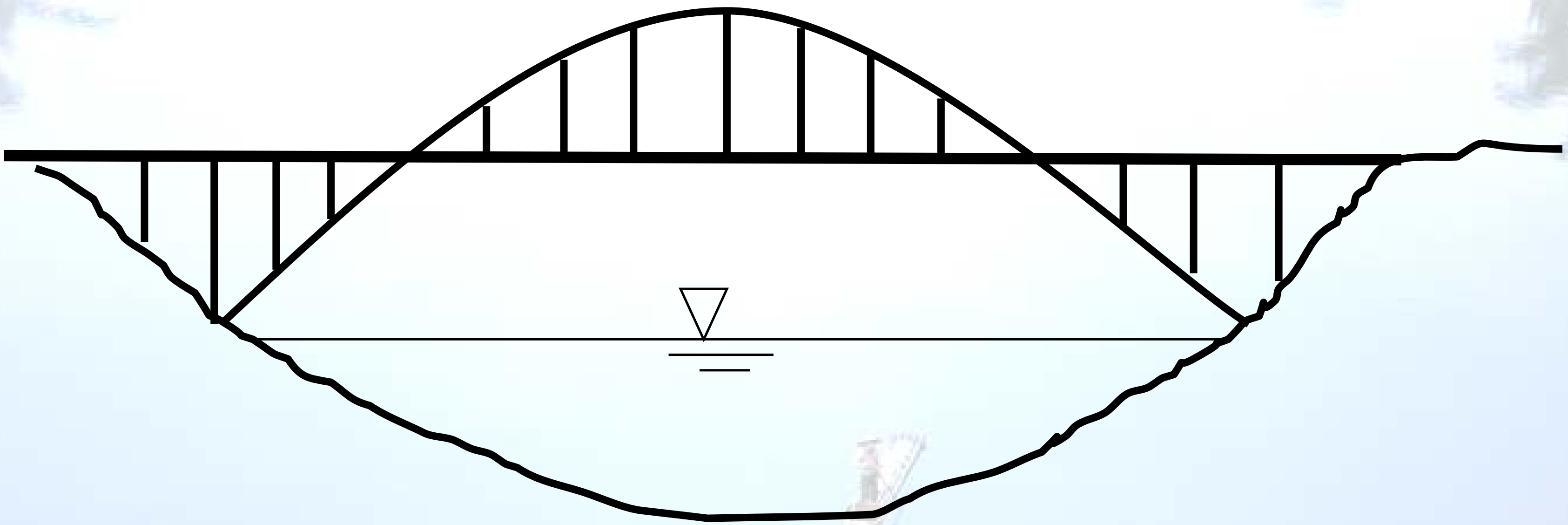
第二章　轴向拉伸和压缩

§ 2–1　轴向拉伸与压缩的概念和实例

一、工程实例



斜拉桥



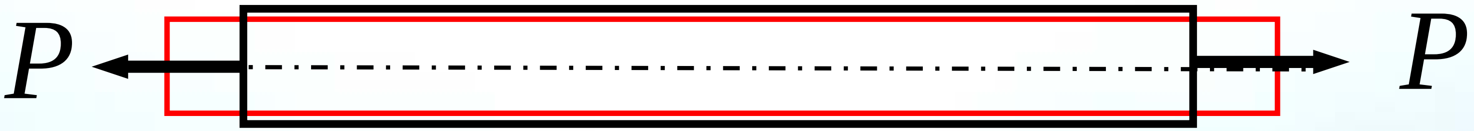
拱 桥

桁架桥

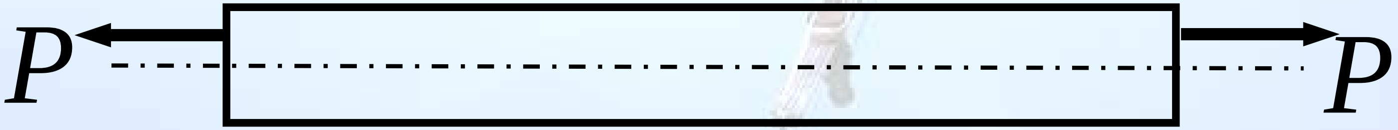
二、轴向拉压的特点

受力特点：外力合力的作用线与杆的轴线重合。

变形特点：沿杆件的轴线伸长和缩短。

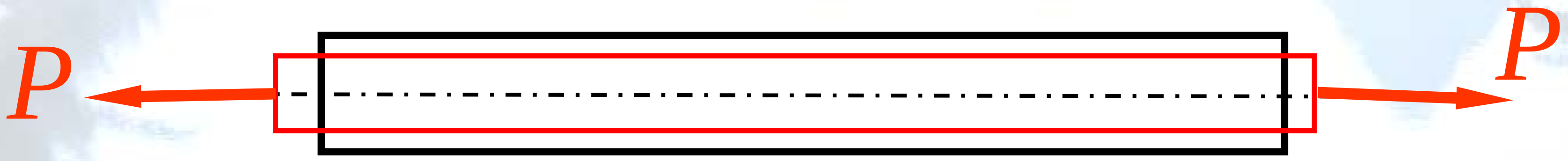


轴向拉伸

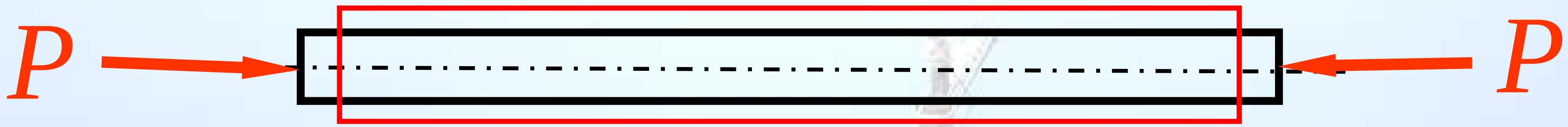


偏心拉伸

力学模型如图



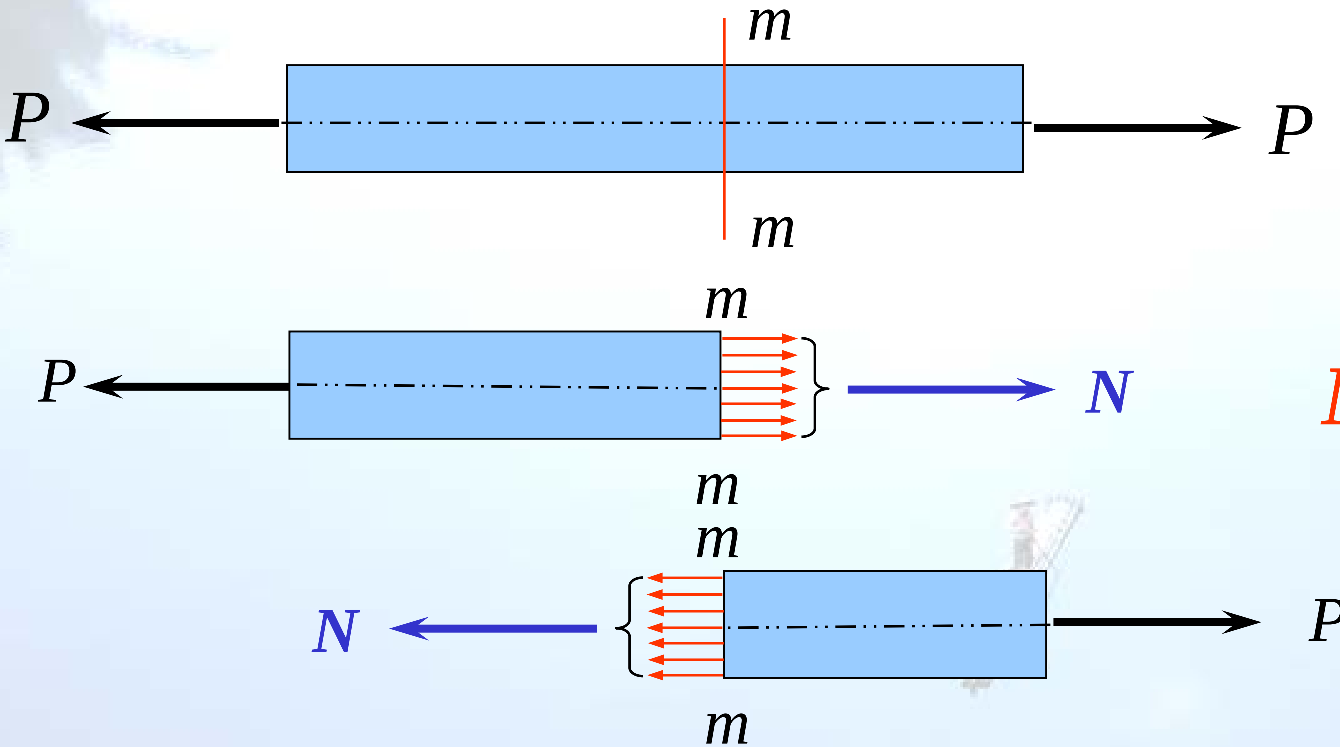
轴向拉伸，对应的力称为拉力。



轴向压缩，对应的力称为压力。

§2–2　轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力

一、轴向拉(压杆)的内力——轴力



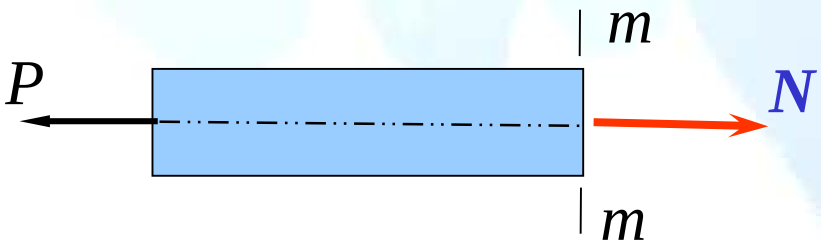
N——轴力

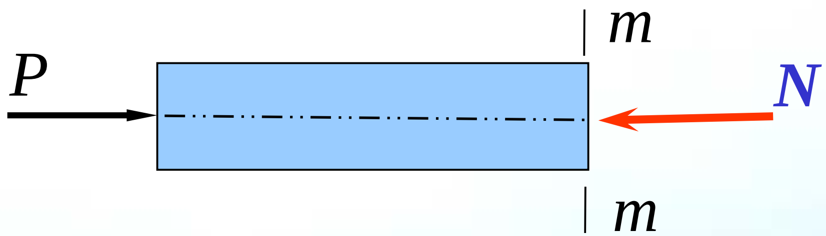
取左段：$\Sigma X = 0$ ，$N - P = 0$ ，　　$N = P$

取右段：$\Sigma X = 0$ ，$P - N = 0$ ，　　$N = P$

轴力的正负规定:

拉为正，压为负





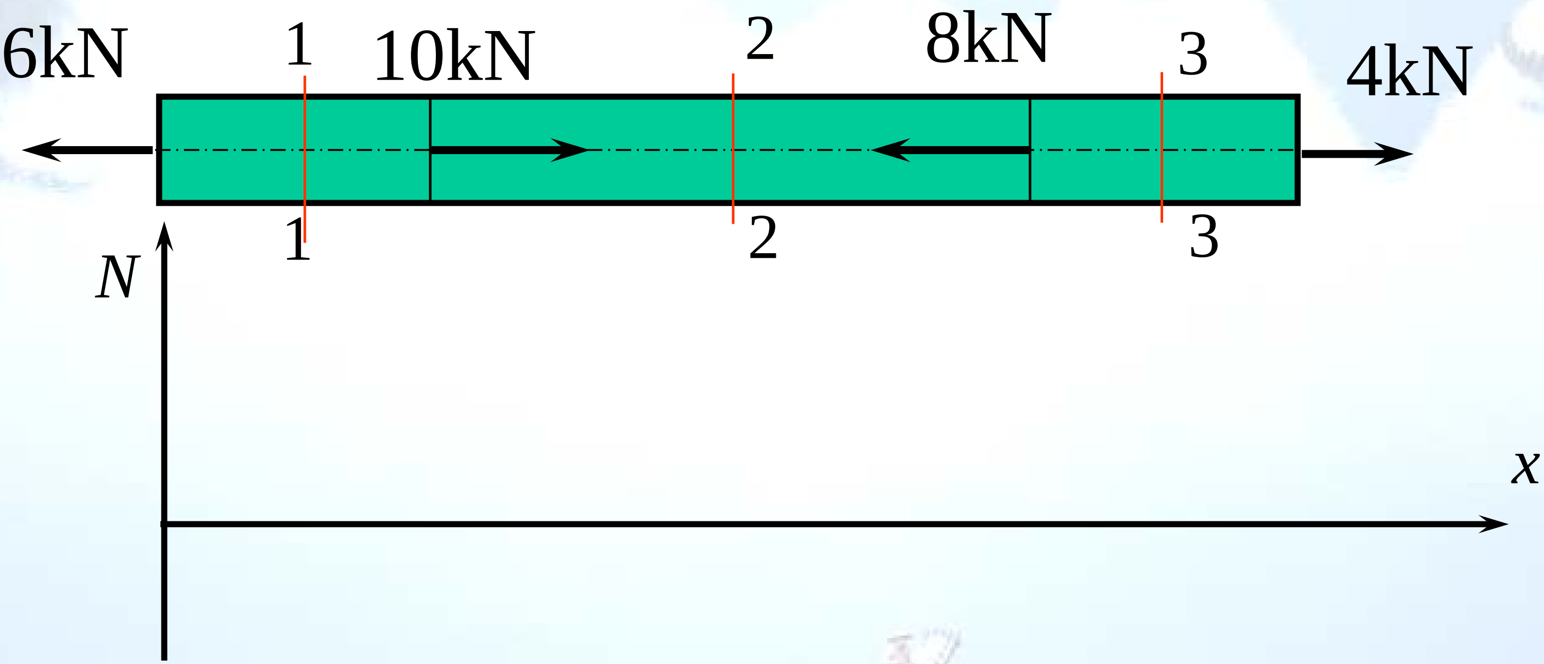
二、 内力图——轴力图

意义

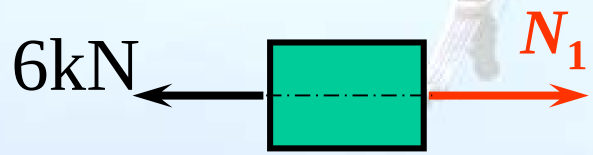
(1)反映出内力（轴力）与截面位置变化关系，较直观；

(2)利用内力图可以方便地确定出最大轴力的数值及其所在截面的位置，即确定危险截面位置，为强度计算提供依据。

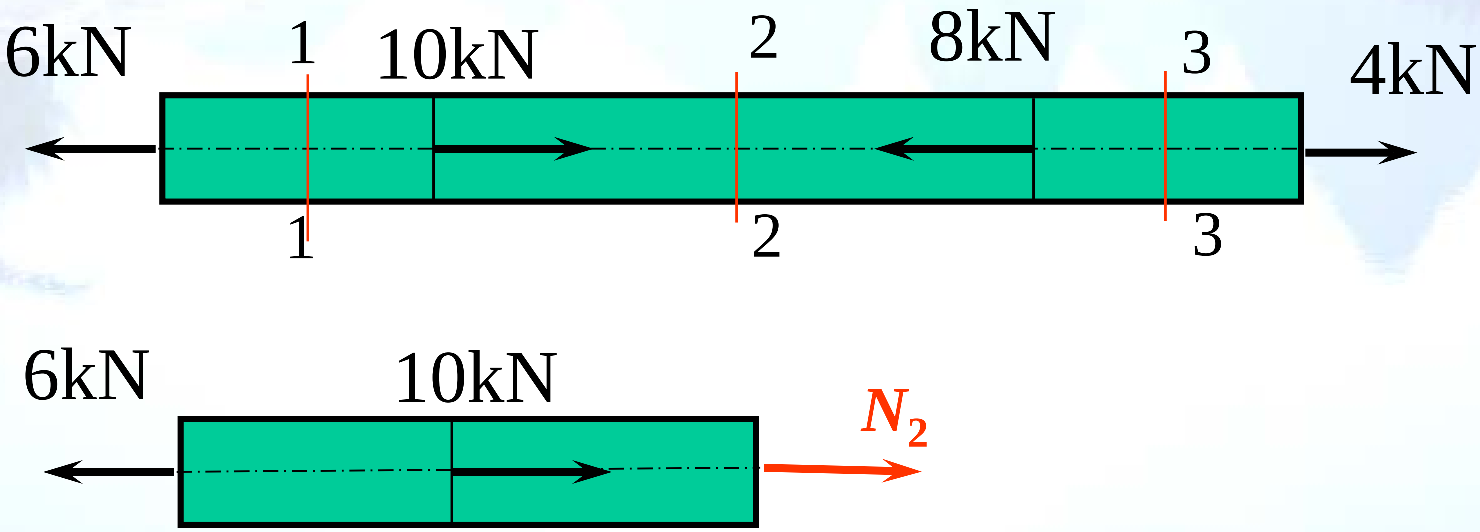
[例1] 试画出杆的轴力图。



解： 1-1截面:



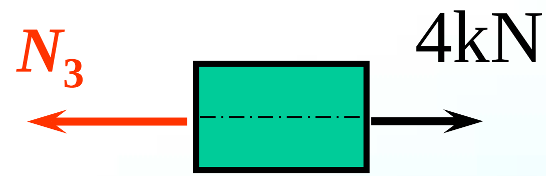
$$\Sigma X = 0, \qquad N_1 - 6 = 0 \qquad \therefore N_1 = 6(\text{kN})$$



2-2截面:

$$\Sigma X = 0, \qquad N_2 - 6 + 10 = 0$$

$$\therefore N_2 = -4(\text{kN})$$

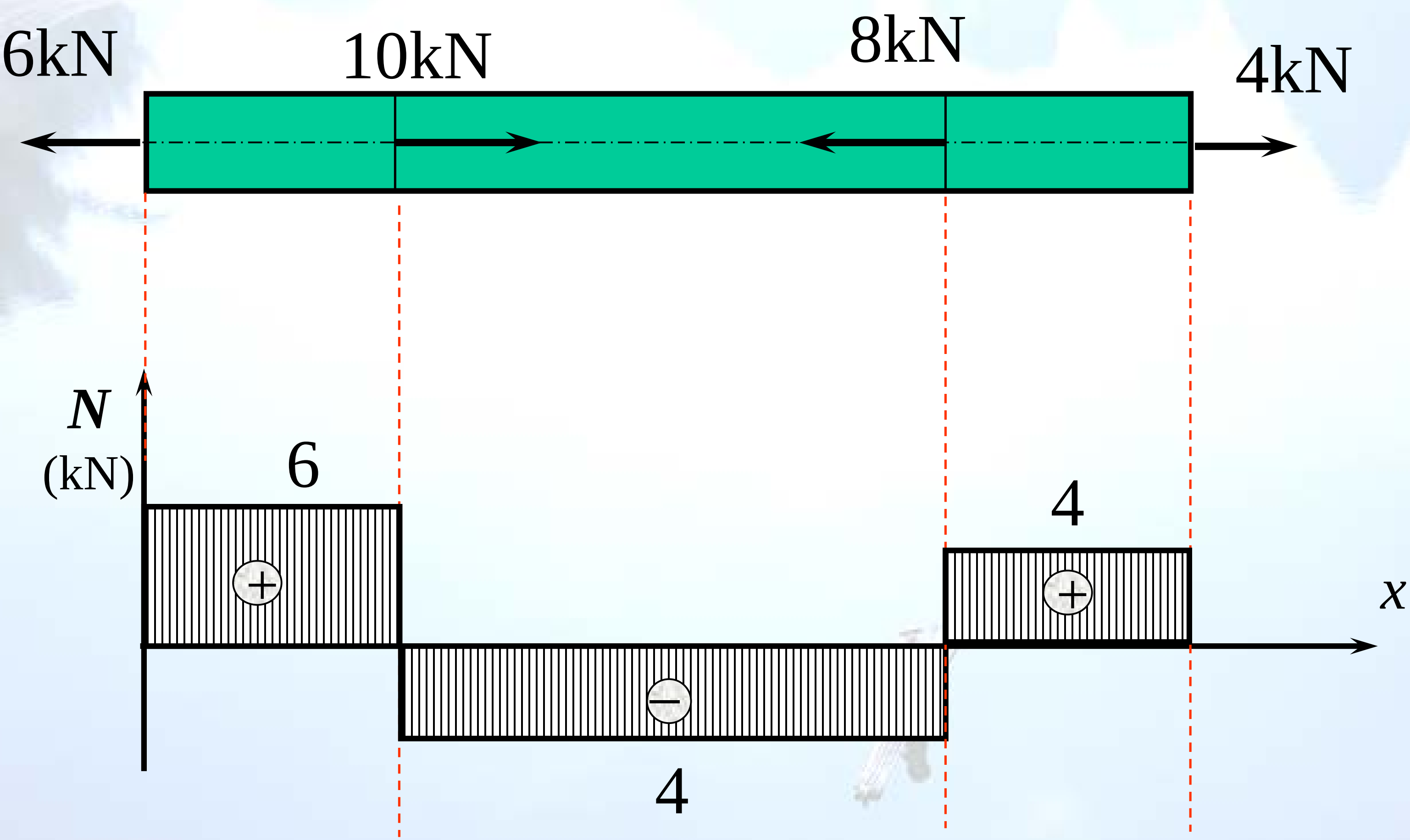


3-3截面:

$$\Sigma X = 0, \qquad 4 - N_3 = 0$$

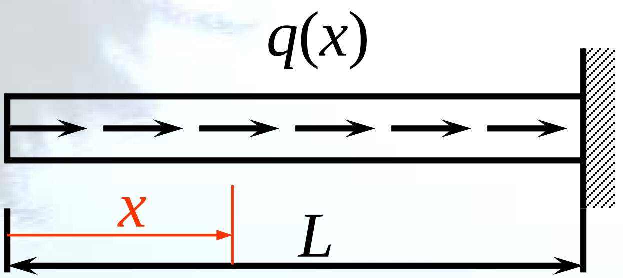
$$\therefore N_3 = 4(\text{kN})$$

$$N_1 = 6(\text{kN}) \qquad N_2 = -4(\text{kN}) \qquad N_3 = 4(\text{kN})$$



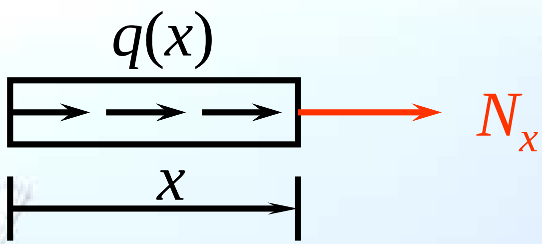
要求：上下对齐，标出大小，标出正负

[例2] 图示杆长为L，受分布力 $q = kx$ 作用，方向如图，试画出杆的轴力图。



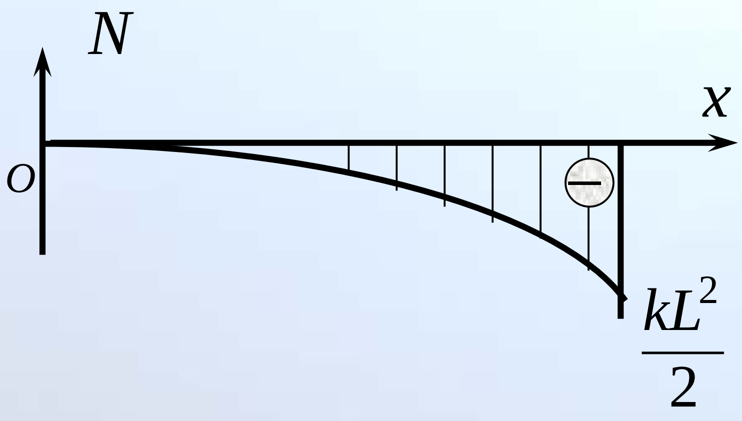
解：x 坐标向右为正，坐标原点在自由端。

任一截面上的内力$N(x)$为：

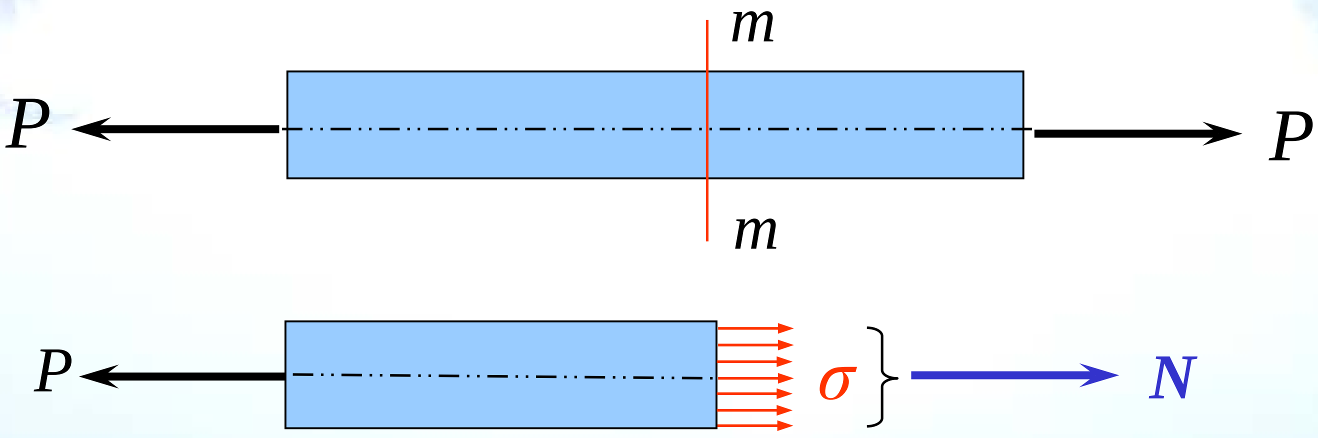


$$N(x) = \int_0^x -kx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}kx^2$$

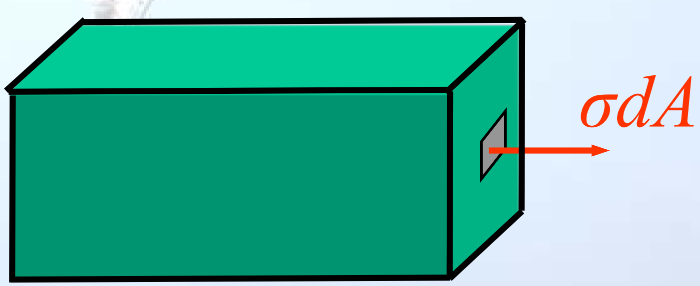
$$N(x)_{\max} = -\frac{1}{2}kL^2$$



三、拉（压）杆横截面上的应力



1、横截面上作用正应力；

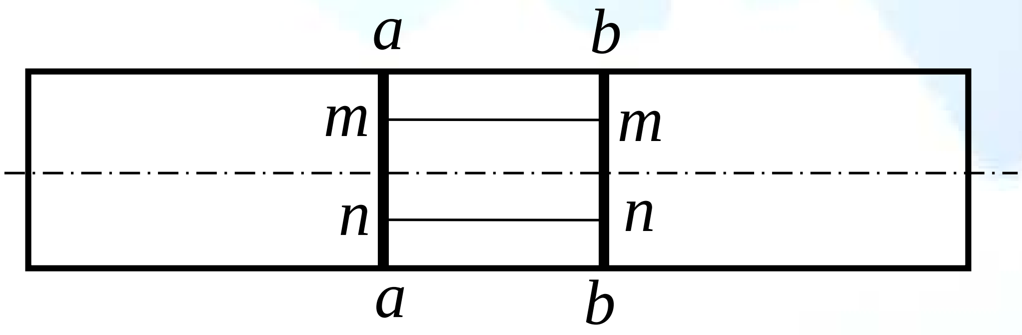


2、 $N=\int_A \sigma dA$

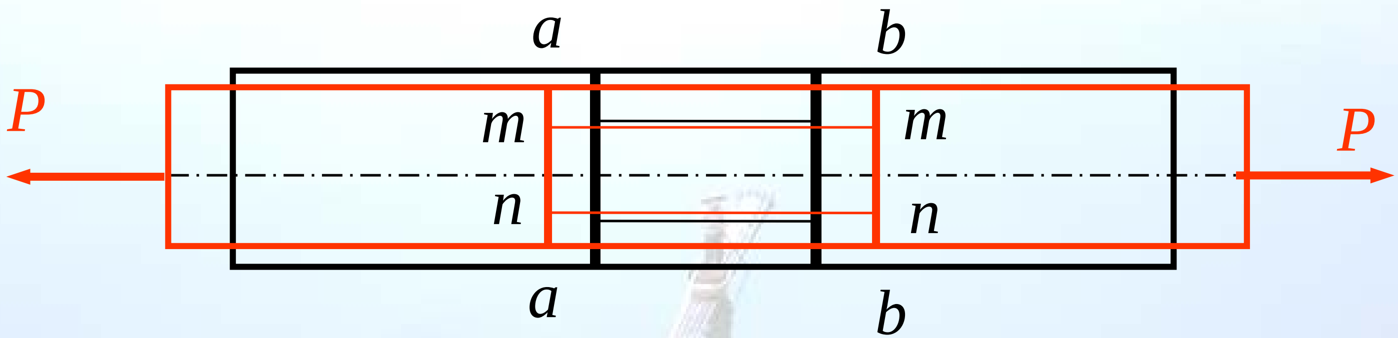
3、正应力的分布规律：

观察变形：

加载前



加载后



平面假设：原为平面的横截面在变形后仍为平面。

各纵向纤维伸长量相同。

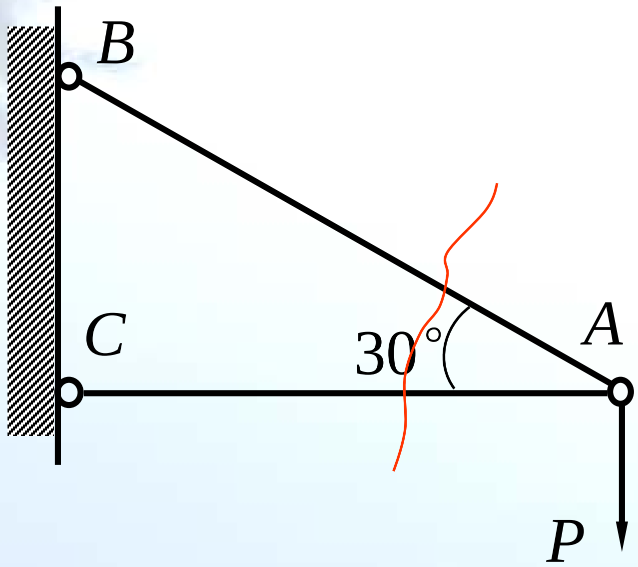
均匀材料、均匀变形，内力也均匀分布。

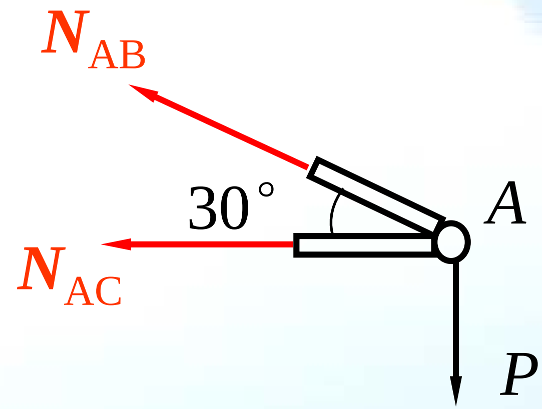
正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 在横截面上均布：

$$N=\int_A \sigma dA=\sigma\int_A dA=\sigma\cdot A$$

$$\therefore\quad \boxed{\sigma=\frac{N}{A}}\qquad（2\text{-}2）$$

[例2]　已知：P=15kN，AB杆d=20mm，求AB杆内的应力。





解：　$\sum Y = 0, \quad N_{AB}\sin 30° - P = 0$　　$\therefore N_{AB} = \dfrac{P}{\sin 30°} = 30(\text{kN})$

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{N_{AB}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{30\times 10^3}{\frac{\pi \times 0.02^2}{4}} = 95.5\times 10^6(\text{Pa})$$

$$= 95.5(\text{MPa})$$

另：长度用mm为单位代入

$$\sigma_{AB}=\frac{N_{AB}}{A}=\frac{N_{AB}}{\frac{\pi d^{2}}{4}}=\frac{30\times10^{3}}{\frac{\pi\times20^{2}}{4}}=95.5\ (\mathrm{MPa})$$

注意：代入数据时单位要统一：

N——m——Pa

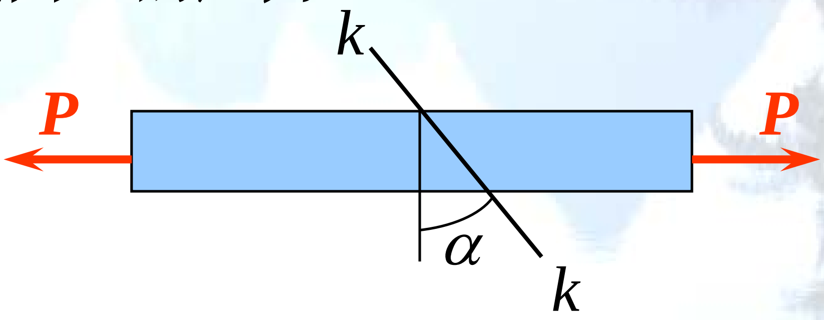
N——mm——MPa

$$1\mathrm{N/mm^{2}}=1\times10^{6}\,\mathrm{N/m^{2}}=1\mathrm{MPa}$$

§ 2–3　轴向拉伸或压缩时斜截面上的应力

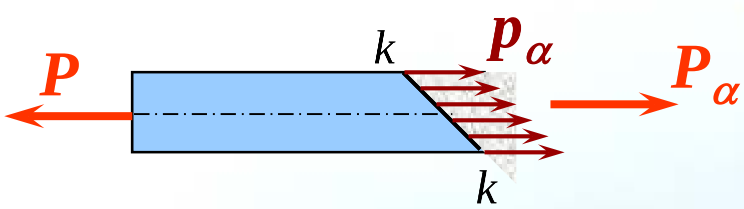
设有一等直杆受拉力**P**作用。

求：斜截面*k-k*上的应力。



解：横截面上的正应力为：

$$\sigma = \frac{P}{A}$$



斜截面上的内力为P_α：

由平衡方程：$P_\alpha = P$

则全应力：　$p_\alpha = \dfrac{P_\alpha}{A_\alpha}$

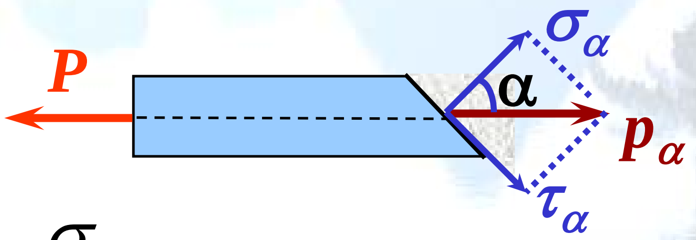
其中A_α为斜截面面积。

由几何关系：　$A_\alpha = \dfrac{A}{\cos\alpha}$

代入上式，得：

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha}{A_\alpha} = \frac{P}{A}\cdot\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$

4斜截面上全应力： $p_\alpha = \sigma\cos\alpha$



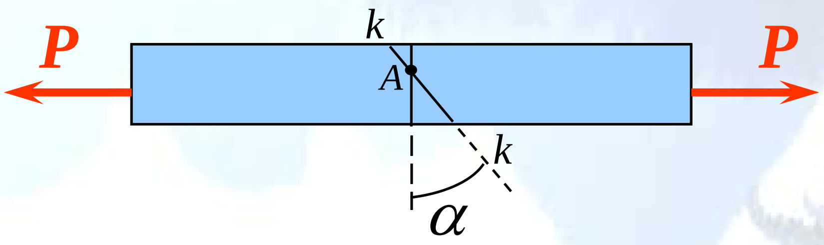
分解：
$$\begin{cases} \sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \end{cases}$$

即：
$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \end{cases}$$

由上两式可见，σ_α和τ_α是角度 α 的函数，斜截面的方位不同，截面上的应力也就不同 。

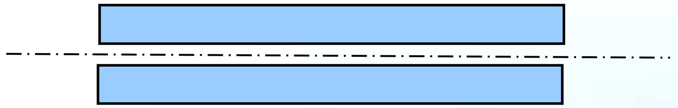
其数值随角度作周期性变化，它们的最大值及其所在截面的方位，可分别由上两式得到。

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha \end{cases}$$



当$\alpha = 0°$时，$(\sigma_\alpha)_{max} = \sigma_0$ (横截面上存在最大正应力)

当$\alpha = 90°$时，$(\sigma_\alpha)_{min} = 0$

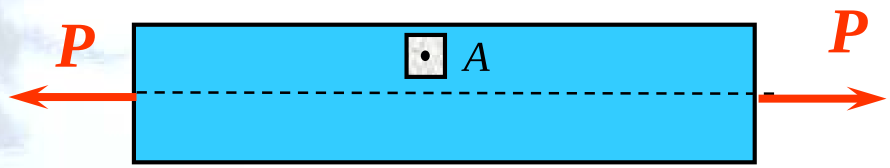


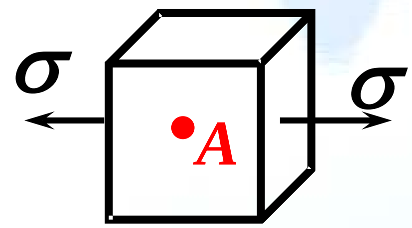
当$\alpha = \pm 45°$时，$|\tau_\alpha|_{max} = \dfrac{\sigma_0}{2}$

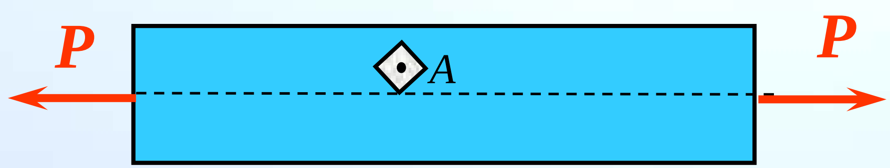
(45°斜截面上剪应力达到最大)

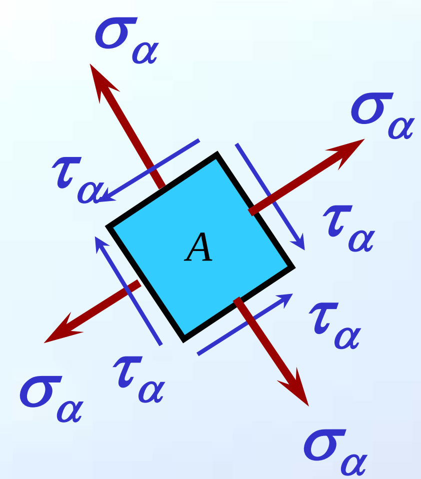
当$\alpha = 0$和$90°$时，$|\tau_\alpha|_{min} = 0$

在杆内围绕着一点取一个正六面体



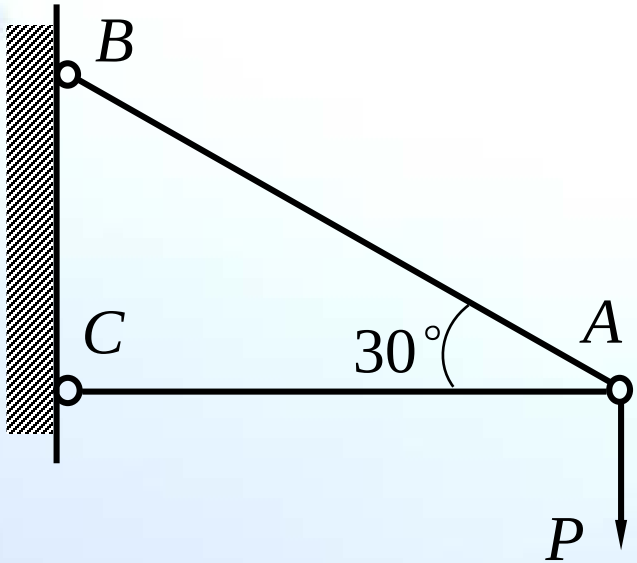






所取的正六面体完整地反映了该点的受力状态，我们把这六面体称为应力单元体。

已知：P=15kN，AB杆d=20mm，求AB杆内的应力。



$$\sigma_{AB}=\frac{N_{AB}}{A}=95.5(\text{MPa})$$

问：AB杆是否安全？

§2-4 材料拉伸时的力学性能

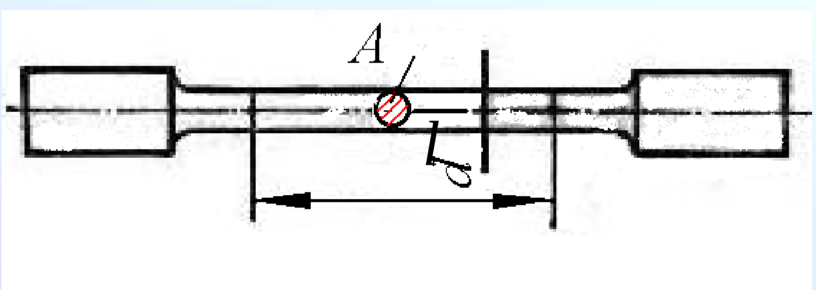
力学性能：材料在外力作用下表现的变形和破坏等方面的特性。

一、拉伸试验和应力-应变曲线

1、拉伸试验国家标准：GB/T 228-2002《金属材料室温拉伸试验方法》代替 GB228-87《金属拉力试验法》

试验条件：常温(20℃)；静载（缓慢地加载）；

2、试件：



圆截面试样

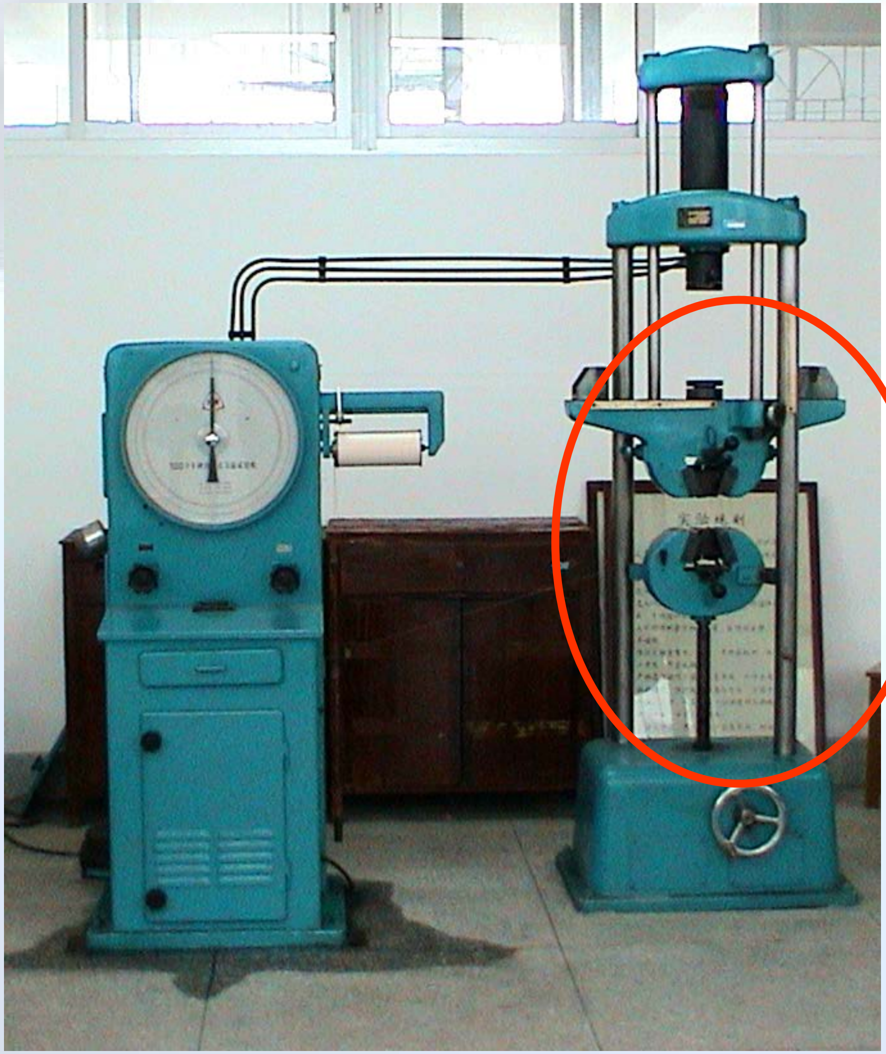
l——标距

$l=5d$ 5倍试样

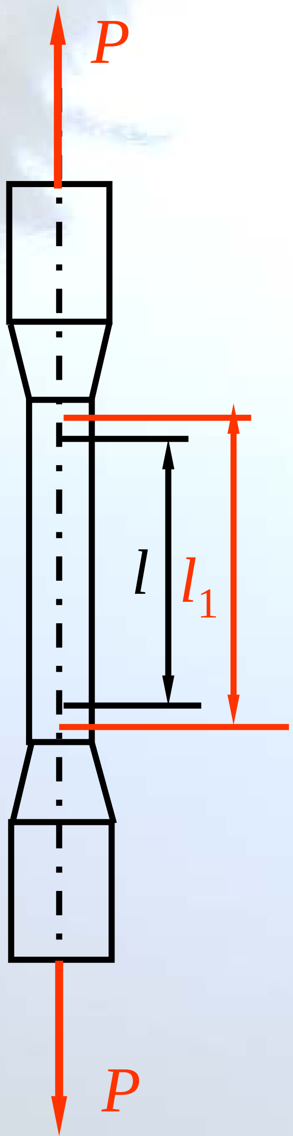
$l=10d$ 10倍试样

2、试验仪器：万能材料试验机

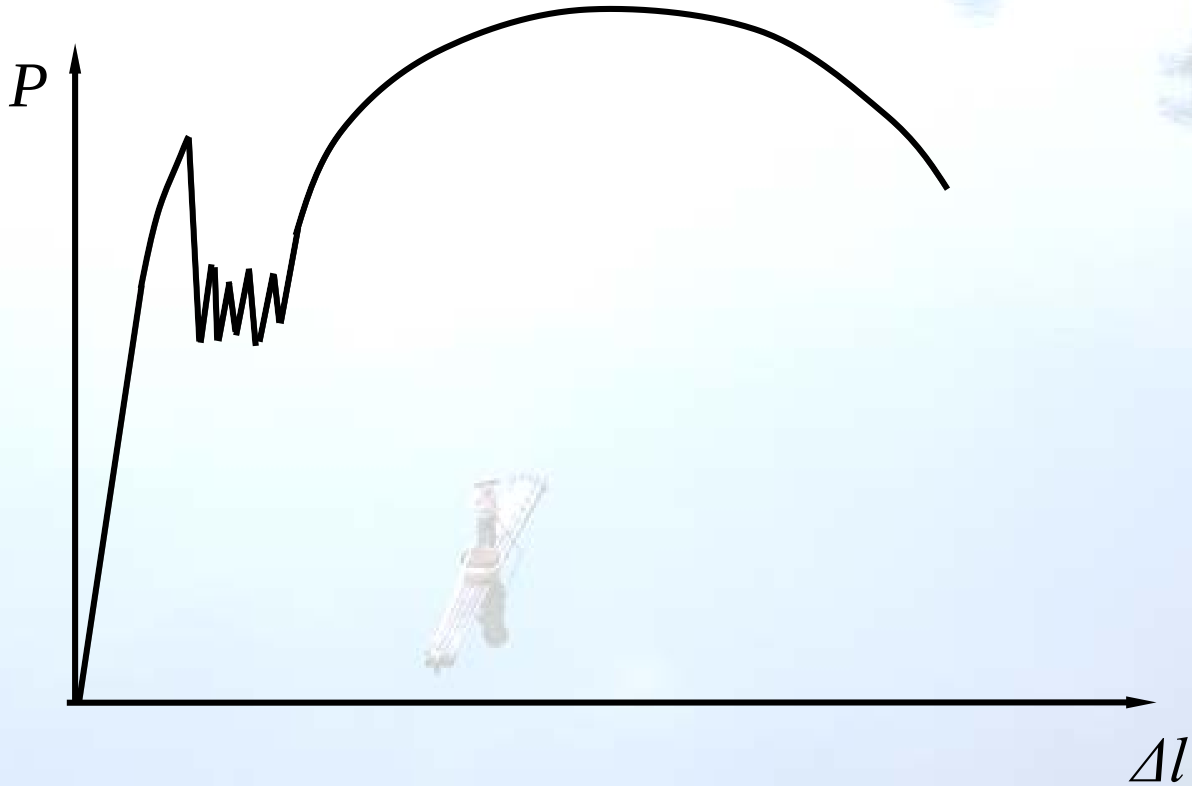
2、试验仪器：万能材料试验机



3、拉伸图(*P*--*Δl* 曲线)



$\Delta l = l_1 - l$



***P*--*Δl* 曲线**

4、应力--应变曲线（σ--ε 曲线）

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

σ--ε曲线

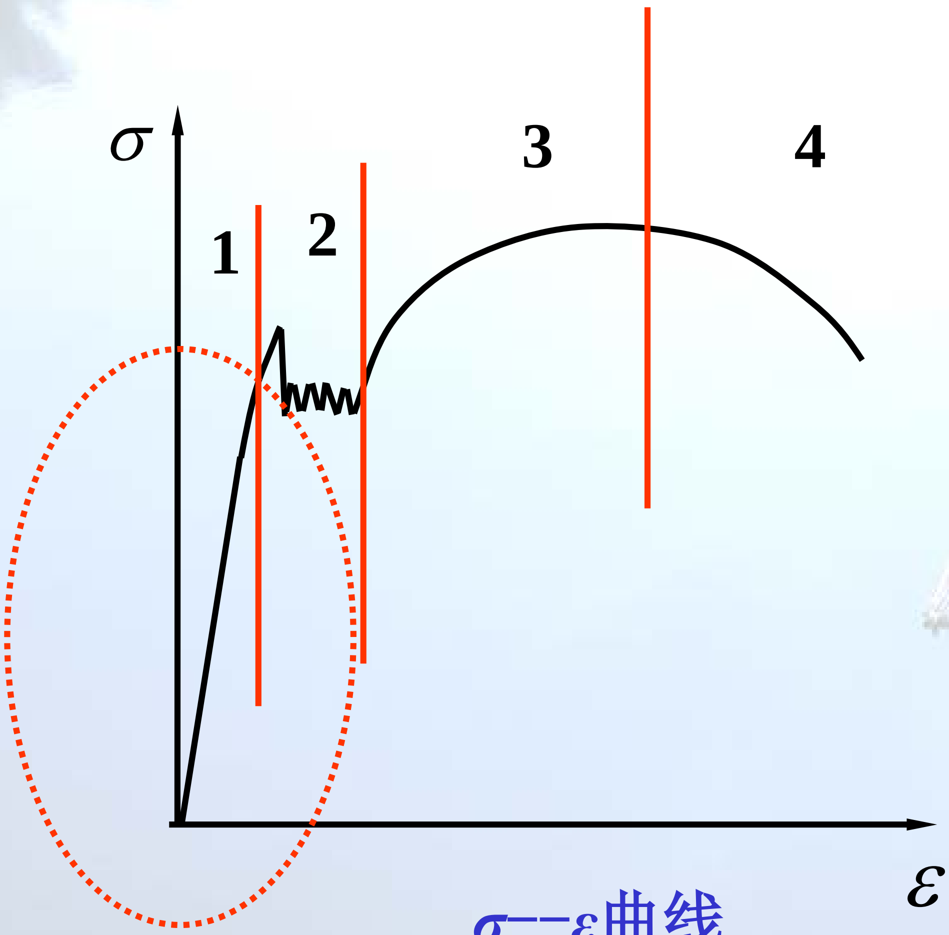
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

ε ——线应变，

单位长度的伸长量(一点的伸长量)

二、 低碳钢在拉伸时的力学性能

低碳钢：含碳量在0.3%以下



σ--ε曲线

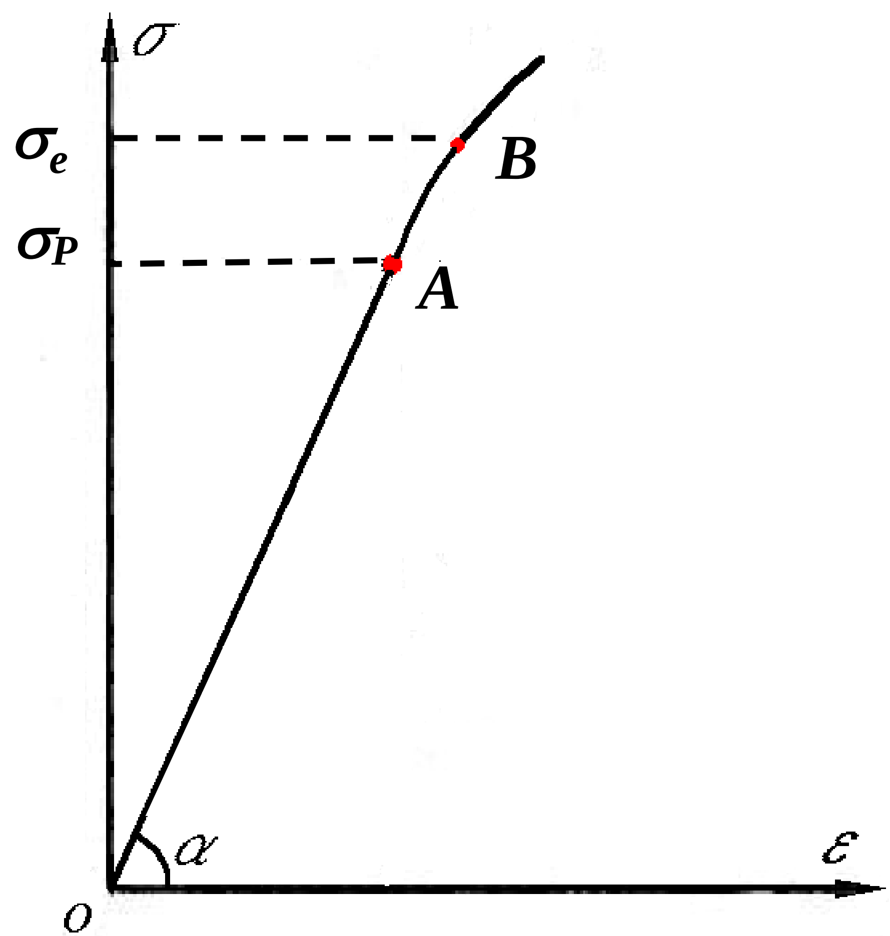
1、弹性阶段

2、屈服阶段

3、强化阶段

4、局部变形阶段

1、弹性阶段（*oB*段）



弹性区域内的应力-应变关系

σ_e -- 弹性极限

线弹性阶段（*oA*段）

σ_P -- 比例极限

在线弹性阶段内

$\sigma \propto \varepsilon$

$\sigma = E\varepsilon$ 胡克定律

E——弹性模量

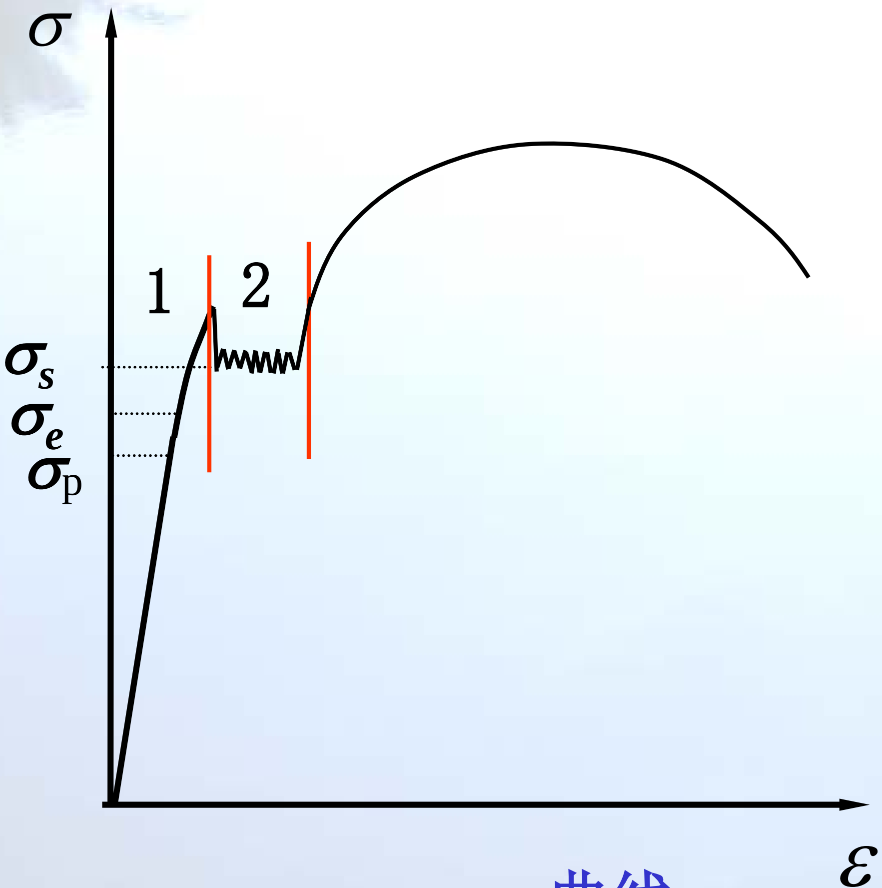
材料常数，

量纲和单位与σ相同

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \tan\alpha$$

2、屈服阶段

在屈服阶段内，试件产生显著的塑性变形。

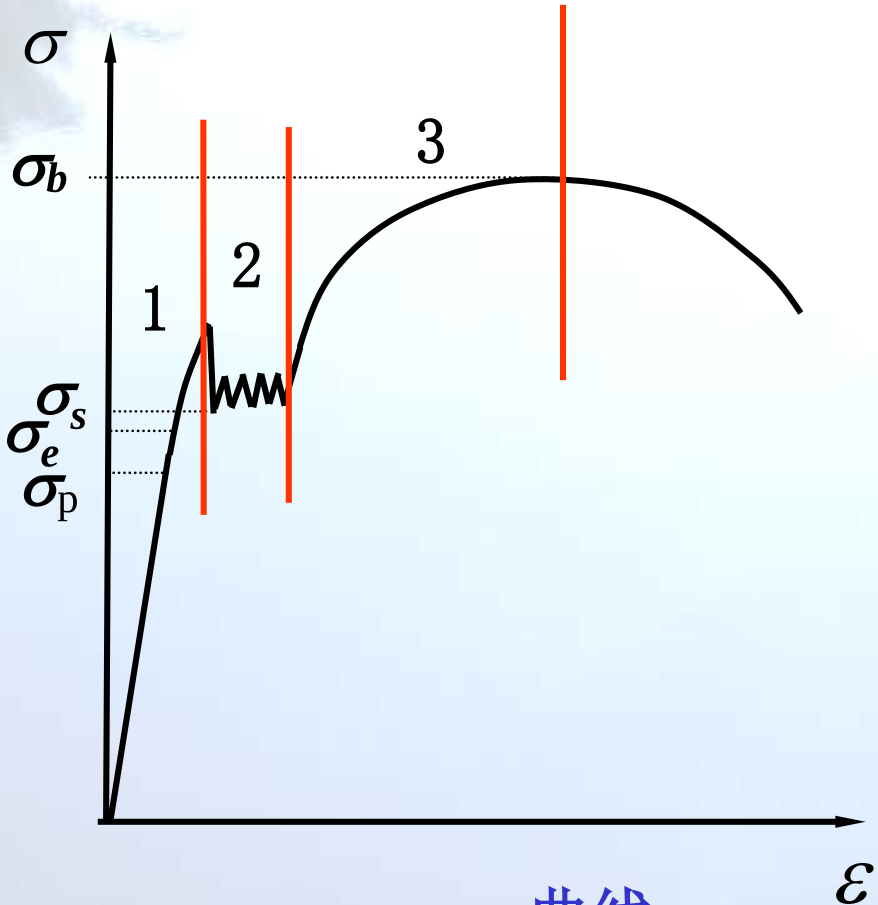


σ—ε 曲线

σ_s ---屈服极限

屈服极限σ_s 是衡量材料强度的重要指标

3、强化阶段

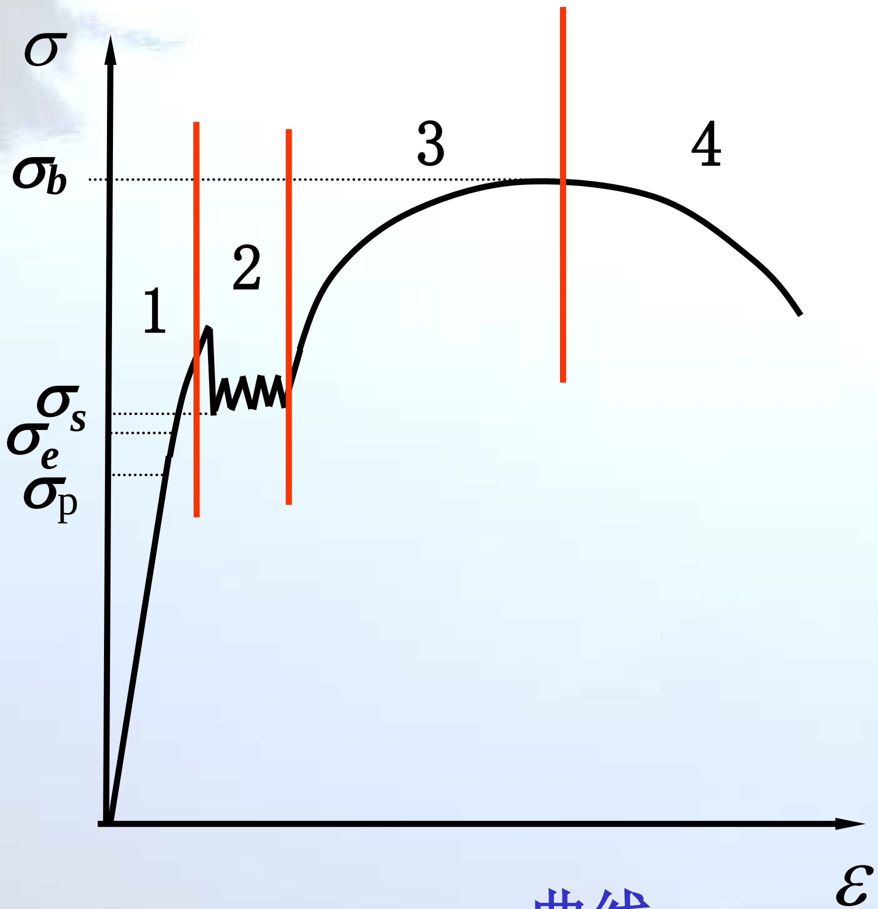


σ--ε曲线

σ_b---强度极限

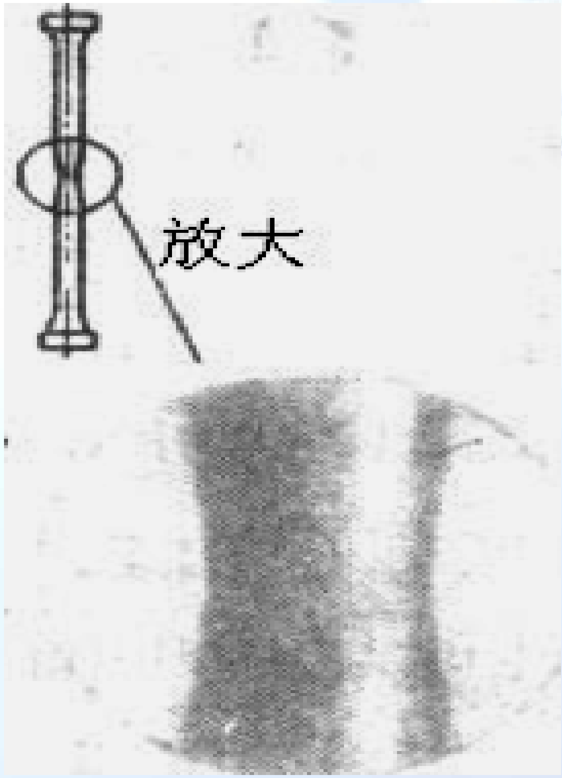
强度极限σ_b是材料所能承受的最大应力，是衡量材料强度的另一重要指标。

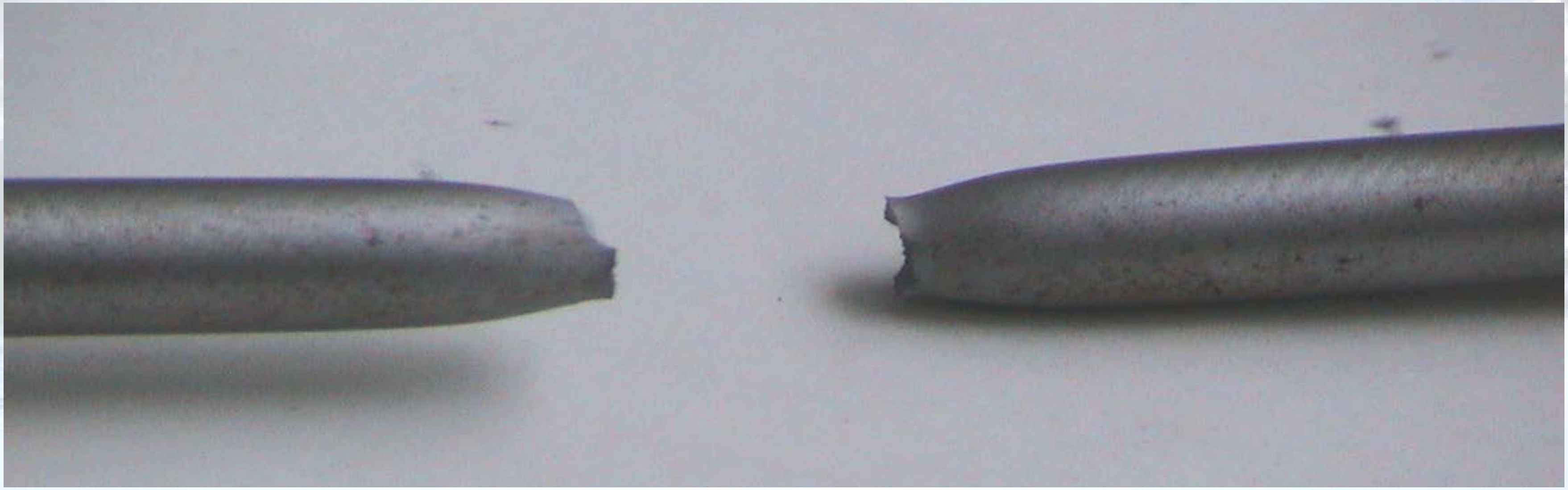
4、局部变形阶段



σ−−ε曲线

颈缩现象：





5、强度指标和塑性指标：

σ_e -- 弹性极限

σ_P -- 比例极限

σ_s ---屈服极限

σ_b---强度极限

伸长率:δ

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$

断面收缩率：ψ

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

材料分类：
脆性材料和塑性材料

$\delta < 5\%$ 为脆性材料

$\delta \geq 5\%$ 为塑性材料

Q235钢：

强度指标：

σ_s =235MPa

σ_b =390MPa

塑性指标：

伸长率：

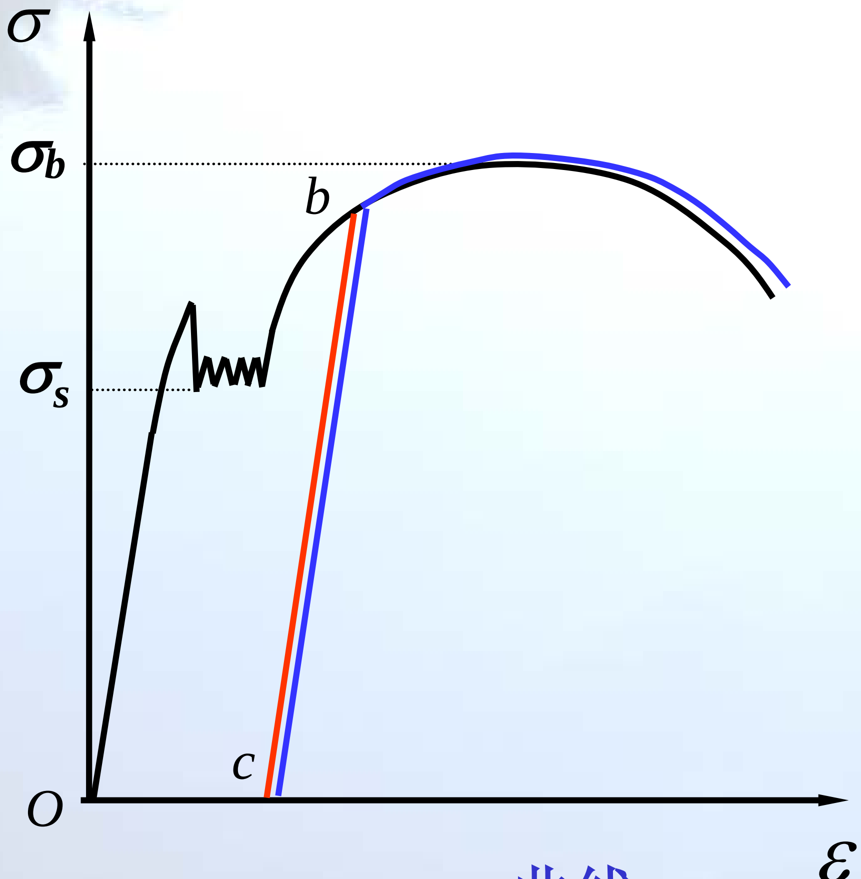
δ=20~30％

断面收缩率：

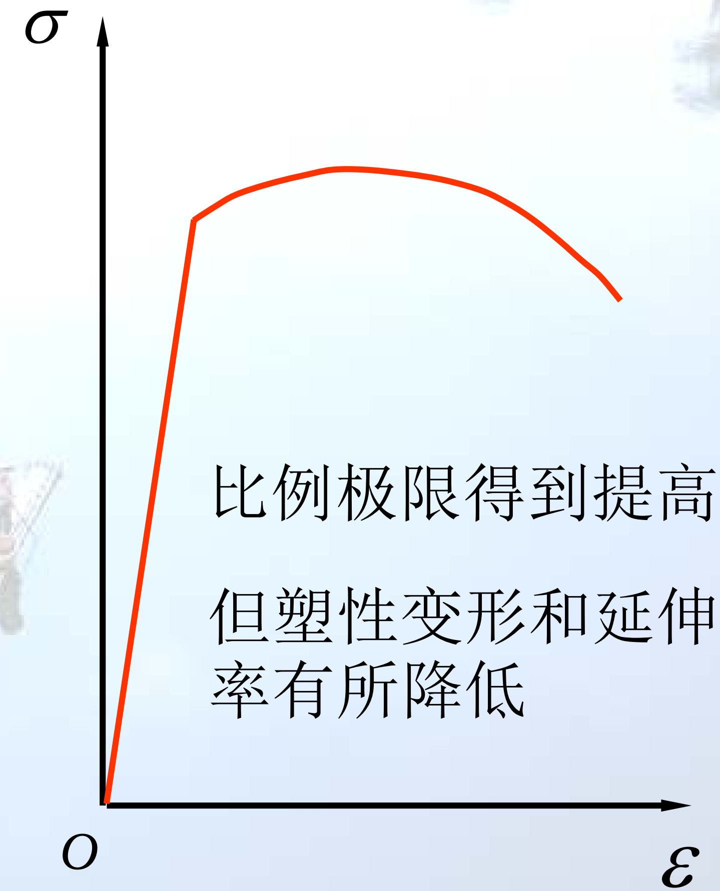
ψ=60％左右

5、卸载定律和冷作硬化

卸载定律：在卸载过程中，应力和应变按直线规律变化。



σ--ε曲线



比例极限得到提高

但塑性变形和延伸率有所降低

三、其他塑性材料在拉伸时的力学性能

16Mnq钢 σ_s =340MPa　　σ_b =510MPa

δ=20％

15MnVNq钢 σ_s =420MPa

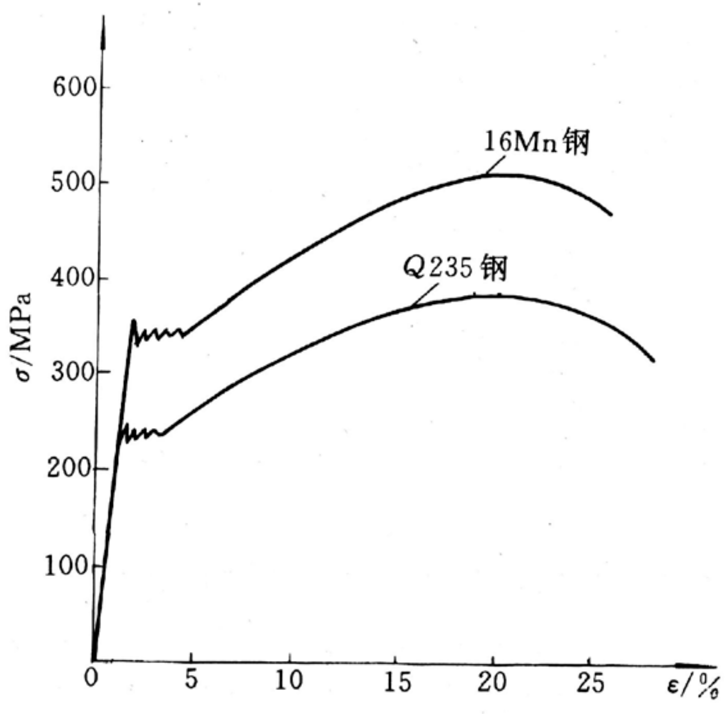
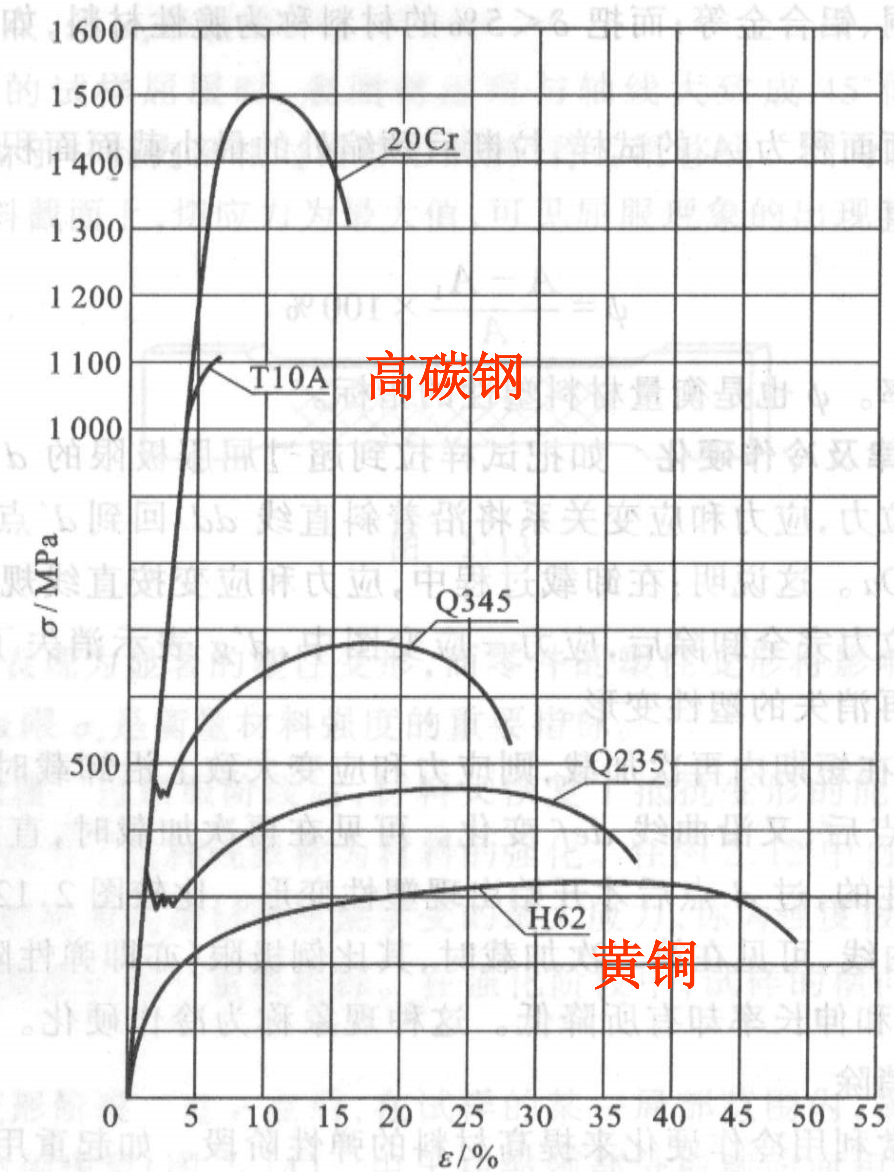


图 1-19

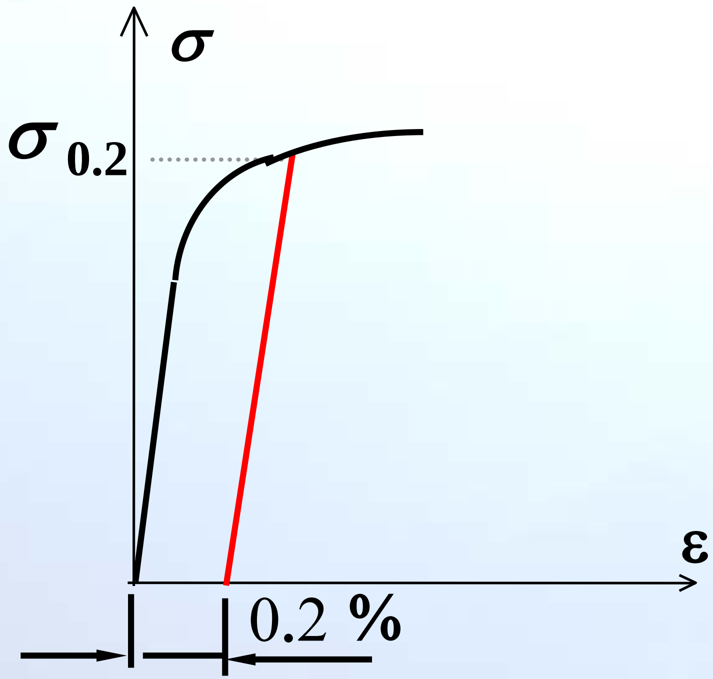


1 600
1 500
1 400
1 300
1 200
1 100
1 000
500
σ / MPa
20Cr
T10A
高碳钢
Q345
Q235
H62
黄铜
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
ε/%

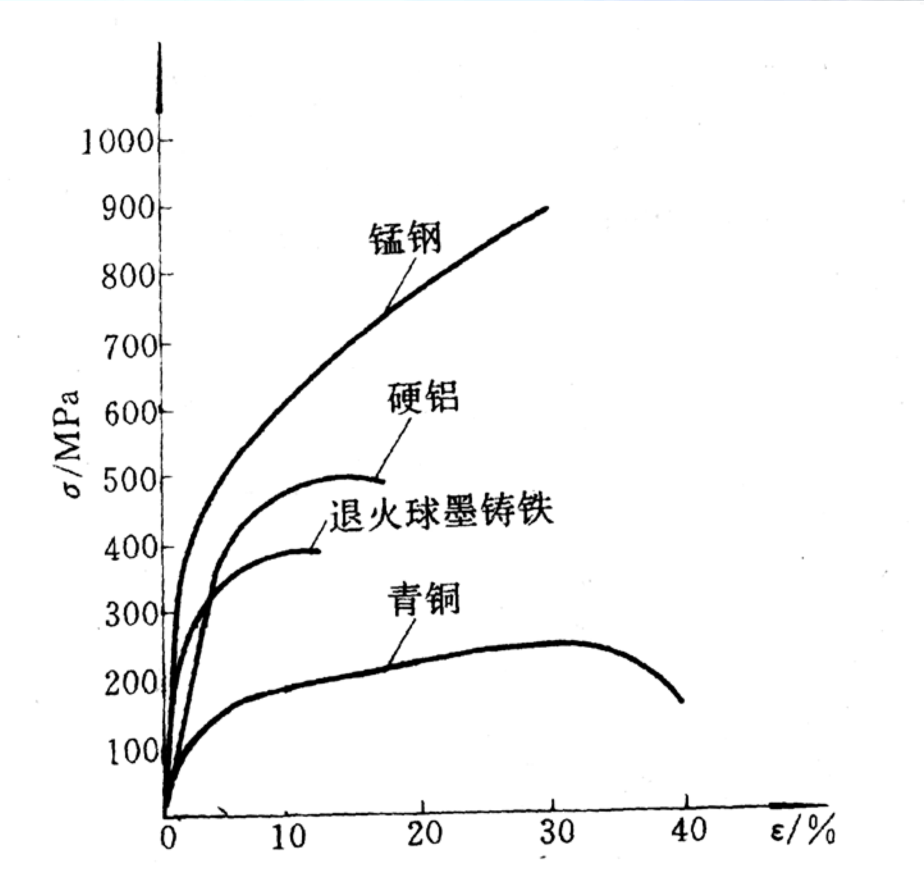
图 2.15 (P24)

无明显屈服现象的塑性材料

$\sigma_{0.2}$ ——名义屈服极限



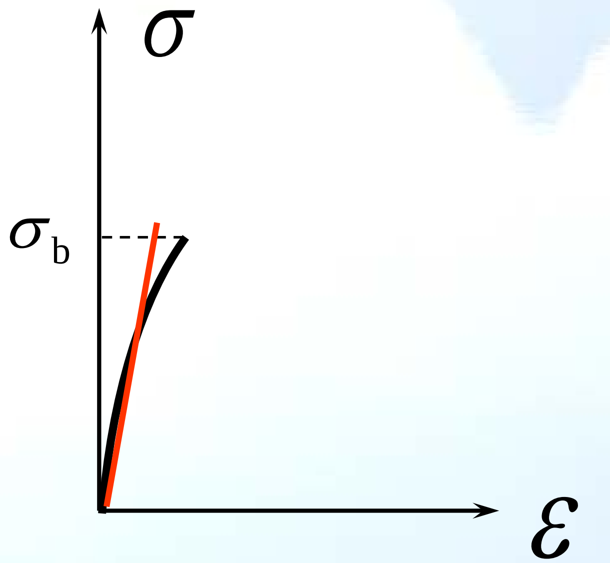
$$\frac{\Delta l}{l}=0.002=0.2\%$$



四、铸铁拉伸时的力学性能

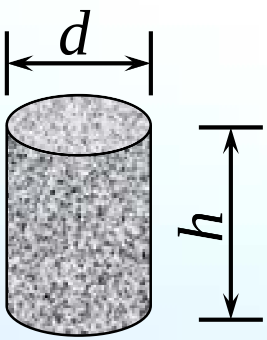
σ_b ---强度极限

$E = \tan\alpha$ ；割线斜率



§2-5　材料压缩时的力学性能

压缩试件

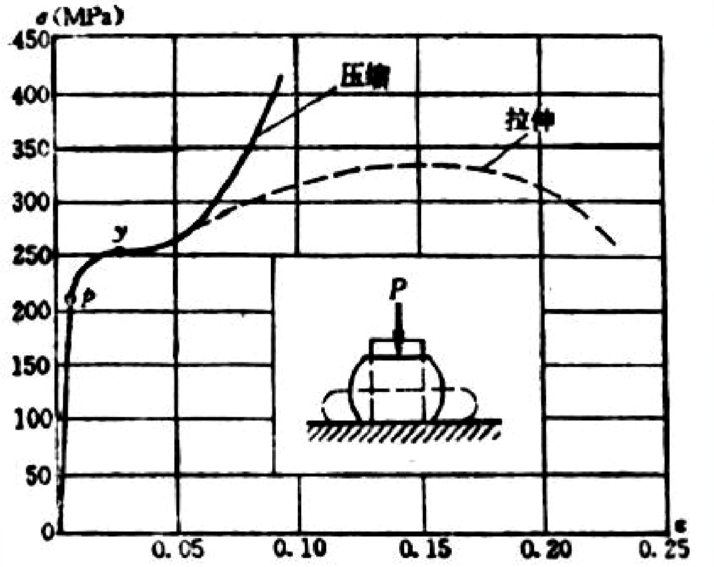


h=(1.5~3)d

1、塑性材料

低碳钢

低碳钢压缩时的弹性模量E和屈服极限σ_s 都于拉伸时大致相同。

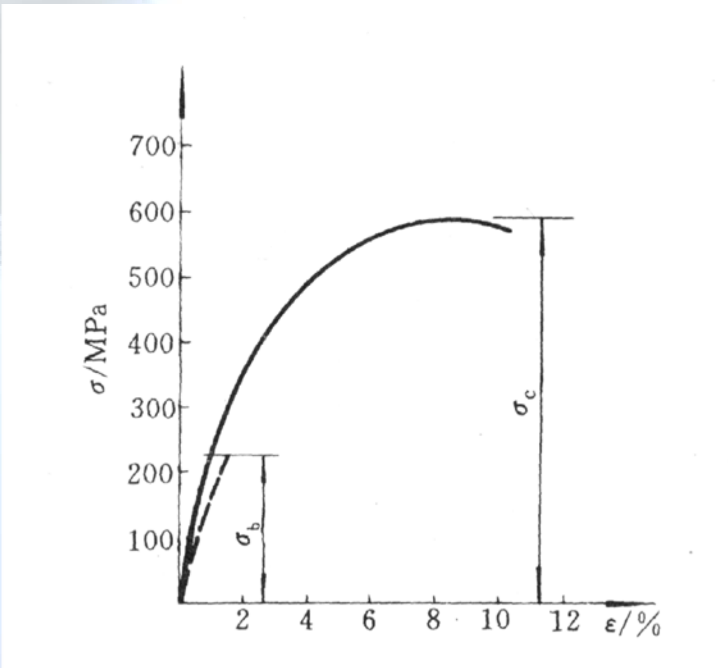


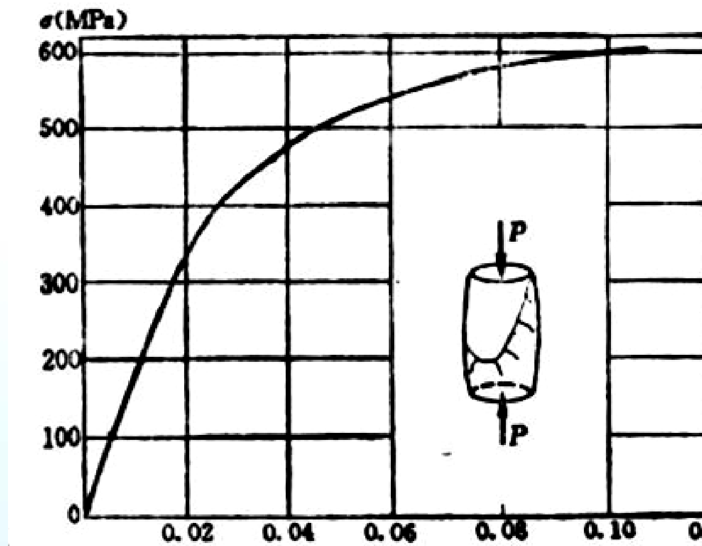
低碳钢压缩与拉伸对比图

塑性材料的拉压性能相同。

2、脆性材料

铸铁





铸铁压缩图

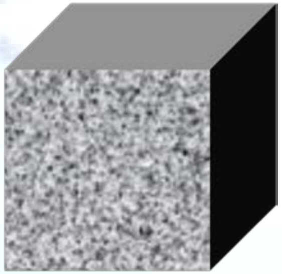
σ_{bc} ----铸铁压缩强度极限；

$\sigma_{bc} \approx （4 — 6）\sigma_{bt}$

3、混凝土的力学性能

混凝土：水泥、沙子、石子

试验标准：GBJ107-87



混凝土压缩试件

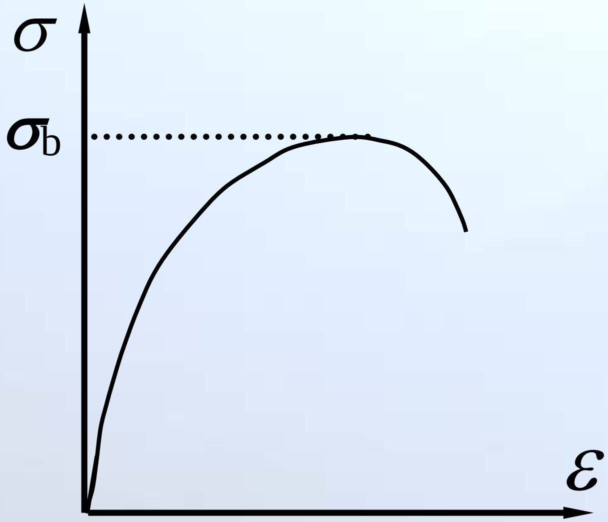
标准试件：

15×15×15cm

非标准试件：

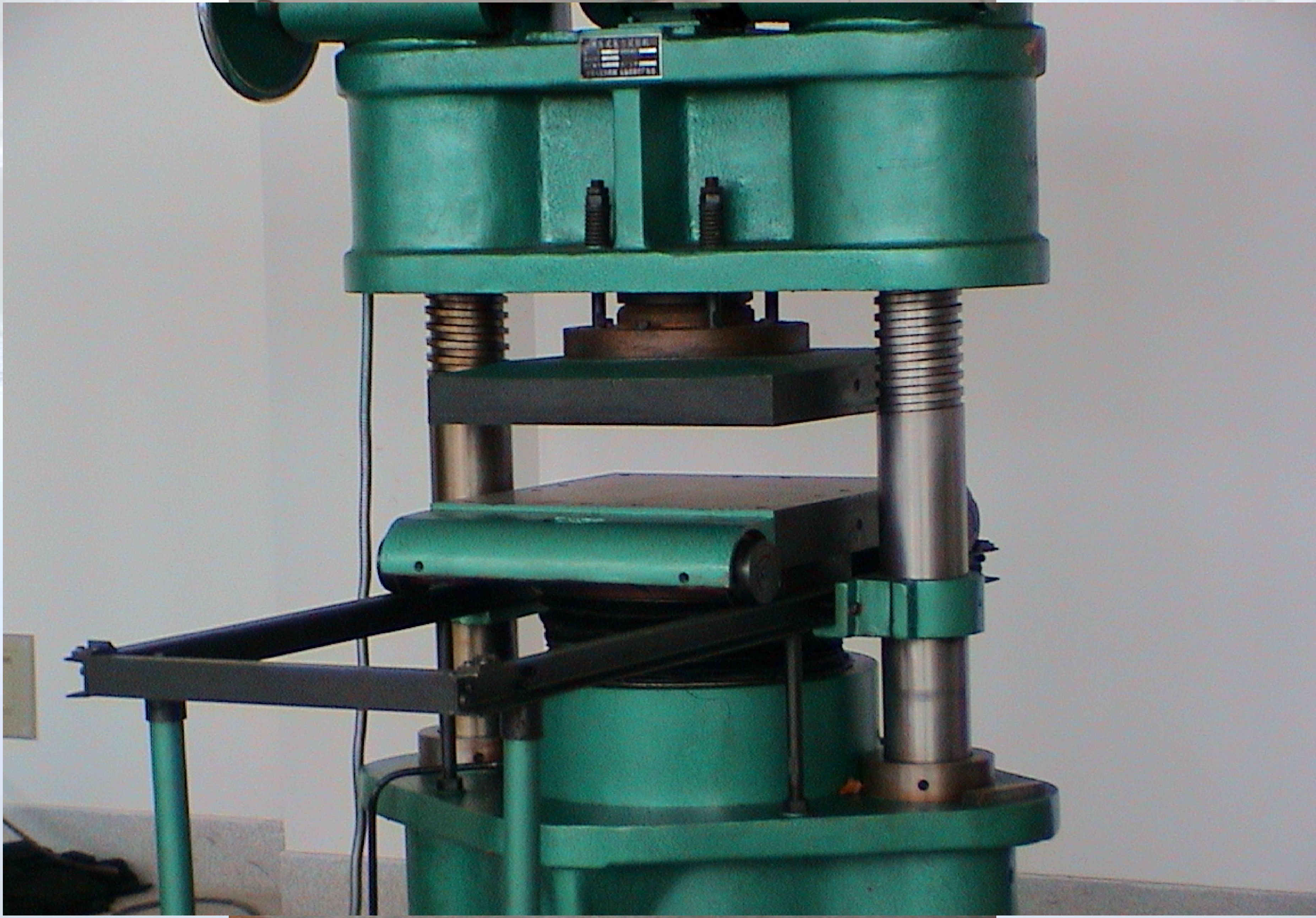
20×20×20cm

10×10×10cm



标准养护28天

立方体的强度值即为该混凝土的标号



§ 2-7 失效、安全因数和强度计算

一、失效： 塑性材料制成的构件出现塑性变形

脆性材料制成的构件出现断裂

二、拉（压）杆的强度条件：

$$\sigma = \frac{N}{A} \le \frac{\sigma_u}{n}$$

σ_{u}——极限应力

n——安全因数 >1

记： $[\sigma] = \dfrac{\sigma_u}{n}$

$[\sigma]$——许用应力；

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma]$$

拉（压）杆的强度条件

三、极限应力σ_u的取值：

1、塑性材料： σ_s（$\sigma_{0.2}$）

2、脆性材料： σ_b（σ_{bc}）

四、确定安全因数应考虑的因素：

安全因数 n 的取值： ＞1，**塑性材料**一般取1.25~2.5，
脆性材料取2.0~3.5

（1）材料

（2）荷载

（3）分析方法的正确性

（4）构件的重要性

（5）自重的要求

五、三种强度计算：

（1）校核强度： 已知荷载大小、杆子尺寸和材料，问是否安全？

$$\sigma_{max}=\frac{N_{max}}{A}\le[\sigma]$$ 安全！

若 $\sigma_{max}\ge[\sigma]$，但不超过5%，不安全，但可以使用。

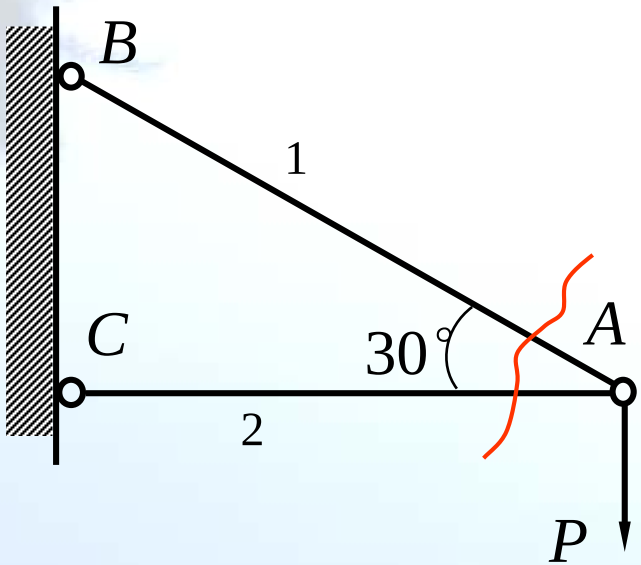
（2）设计截面尺寸： 已知荷载大小和材料，确定杆子截面面积。

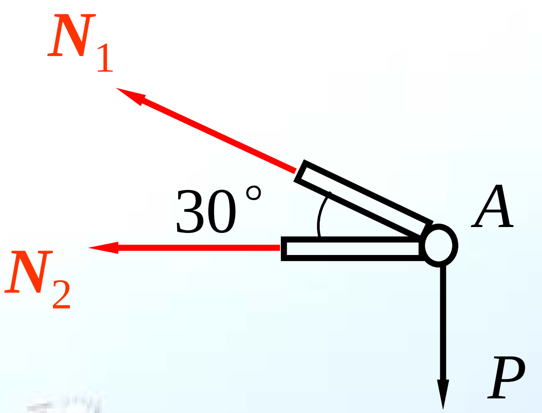
$$\sigma_{max}=\frac{N_{max}}{A}\le[\sigma] \qquad \therefore A_{min}\ge\frac{N_{max}}{[\sigma]}$$

（3）确定许可载荷： 已知材料和杆子截面面积，确定许可荷载大小

$$\sigma_{max}=\frac{N_{max}}{A}\le[\sigma] \qquad \therefore N_{max}\le A\cdot[\sigma]\ ;$$

[例3] 已知：P=15kN，1 杆d=20mm，杆子材料为Q235钢，σ_s=235MPa，n=1.5。（1）校核 1 杆的强度；（2）确定2杆的直径d_2。





解：$$[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n}=\frac{235}{1.5}=157(\text{MPa})$$

$$\Sigma Y=0,\quad N_1\sin 30^\circ-P=0\quad \therefore N_1=\frac{P}{\sin 30^\circ}=30(\text{kN})$$

$$\Sigma X=0,\quad -N_2-N_1\cos 30^\circ=0,\quad N_2=-26(\text{kN})$$

1 杆：$\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{N_1}{\dfrac{\pi d^2}{4}} = \dfrac{30\times10^3}{\dfrac{\pi\times20^2}{4}} = 95.5\,(\mathrm{MPa}) < [\sigma]$

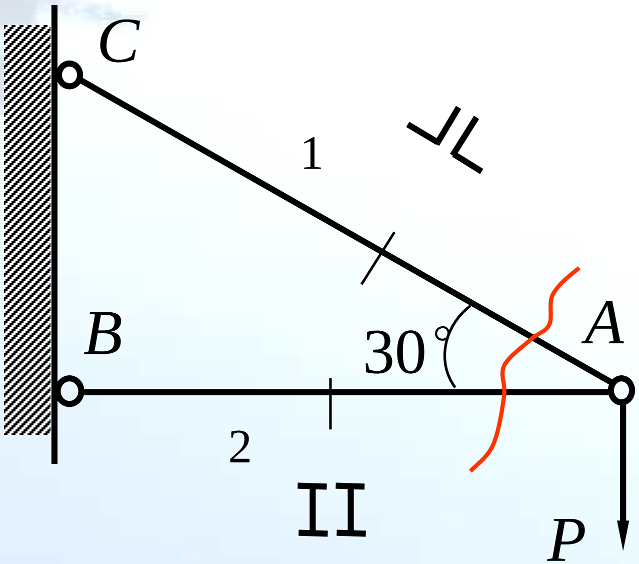
$\therefore$1杆安全。

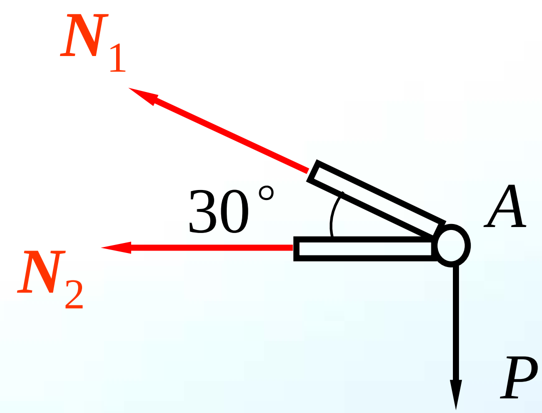
2杆：$\sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = \boxed{\dfrac{N_2}{\dfrac{\pi d_2^2}{4}} \le [\sigma]}$

$$\therefore d \ge \sqrt{\frac{4N_2}{\pi[\sigma]}} = 14.5(\mathrm{mm})$$

$$\therefore\ d \ge 14.5(\mathbf{mm})$$

[例4] 简易起重机，*AC*由两根80×80×7等边角钢组成，*AB*杆由两根10号工字钢组成，材料为Q235钢，[σ]=170MPa。求许可载荷[*P*]。





解：

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1 = 2P \\ N_2 = -1.732P \end{cases}$$

[1杆]: $A_1 = 2\times(10.86) = 21.72\text{cm}^2 = 2172\text{mm}^2$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2P}{A_1} \le [\sigma]$$

$$\therefore P \le \frac{[\sigma]\cdot A_1}{2} = \frac{170\times 2172}{2} = 184.6\times 10^3(\text{N}) = 184.6(\text{kN})$$

[2杆]: $A_2 = 2\times(14.3) = 28.6\text{cm}^2 = 2860\text{mm}^2$

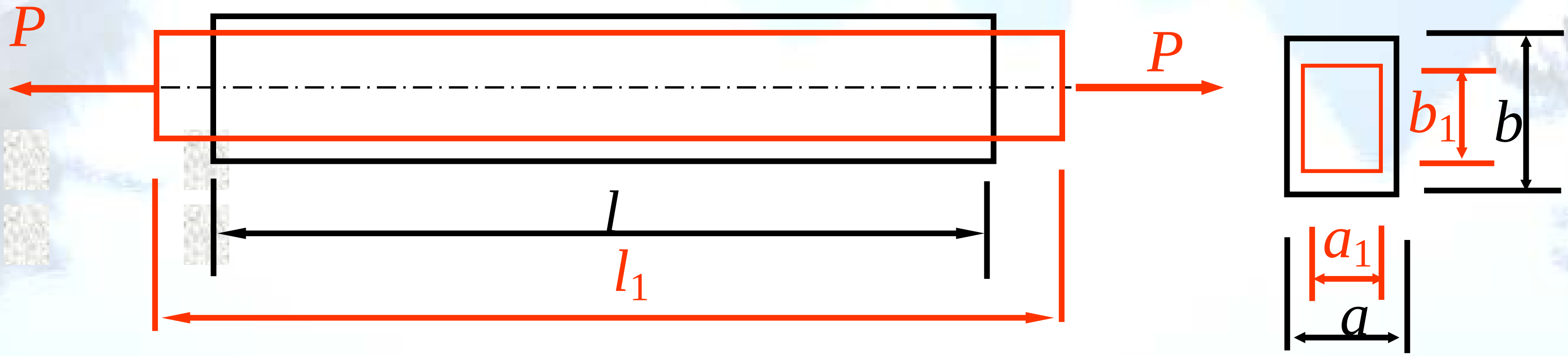
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{1.732P}{A_2} \le [\sigma]$$

$$\therefore P \le \frac{[\sigma]\cdot A_2}{1.732} = \frac{170\times 2860}{1.732} = 280.7\times 10^3(\text{N})$$

$$= 280.7(\text{kN})$$

∴许可载荷 $[P] \le 184.6(\text{kN})$

§ 2-8　轴向拉伸或压缩时的变形



纵向变形：　$\Delta l = l_1 - l$

横向变形：　$\Delta a = a_1 - a$ ，　$\Delta b = b_1 - b$

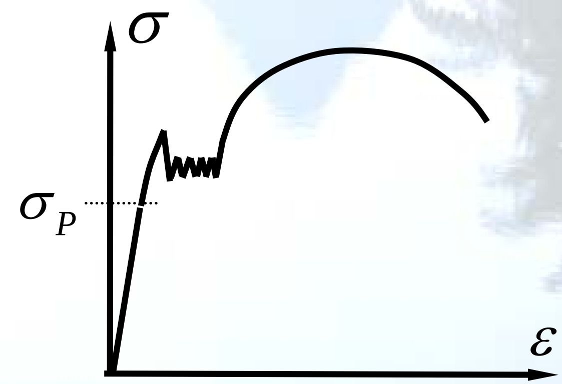
纵向应变：　$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$

横向应变：　$\varepsilon' = \dfrac{\Delta a}{a}$ ，　$\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b}$

已知：P、A、l、E，求 Δl、Δa、Δb

纵向变形：由拉伸**胡克定律** $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$\sigma = \frac{P}{A}, \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



σ−ε曲线

$$\therefore \frac{P}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$\therefore \Delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{Nl}{EA}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EA}}$$ ——胡克定律

EA 称为杆的抗拉压刚度。

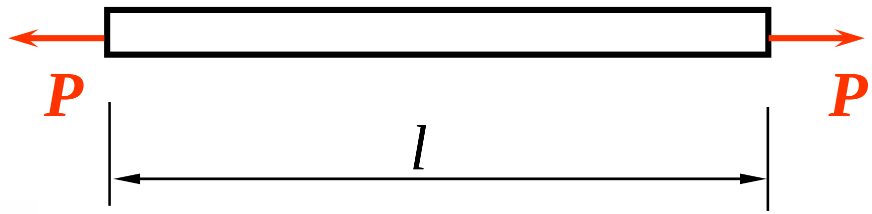
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

横向变形：$\mu = \left|\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$　　μ ——泊松比，材料的常数

$$\boxed{\varepsilon' = -\mu\varepsilon}$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} \quad \Delta a = a\varepsilon' = -a\mu\varepsilon$$

[例5] 圆截面杆，d=10mmm，l=1m，Q235钢，E=210GPa，σ_s=235MPa，P=10kN，求：Δl，ε，σ



解：$$\Delta l=\frac{Nl}{EA}=\frac{Pl}{EA}=\frac{10\times10^{3}\times1000}{210\times10^{3}\times\dfrac{\pi\times10^{2}}{4}}=0.606(\text{mm})$$

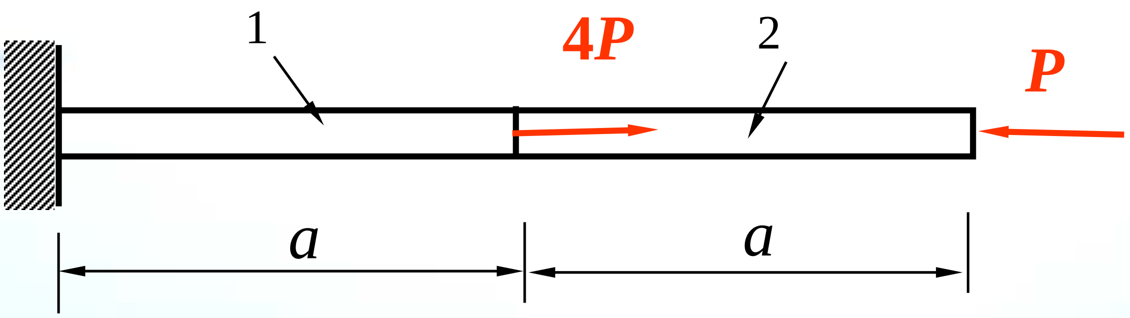
$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}=\frac{0.606}{1000}=0.000606=606\times10^{-6}\ \boxed{=606\mu\varepsilon}$$

$$\boxed{1\times10^{-6}=1\mu\varepsilon}$$

$$\sigma=E\varepsilon=210\times10^{3}\times606\times10^{-6}=127(\text{MPa})$$

$$[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n}=157(\text{MPa})\qquad(n=1.5)$$

[例6]　已知：载荷P，杆子面积A，长度a，材料弹性模量E，求杆子的总伸长量。

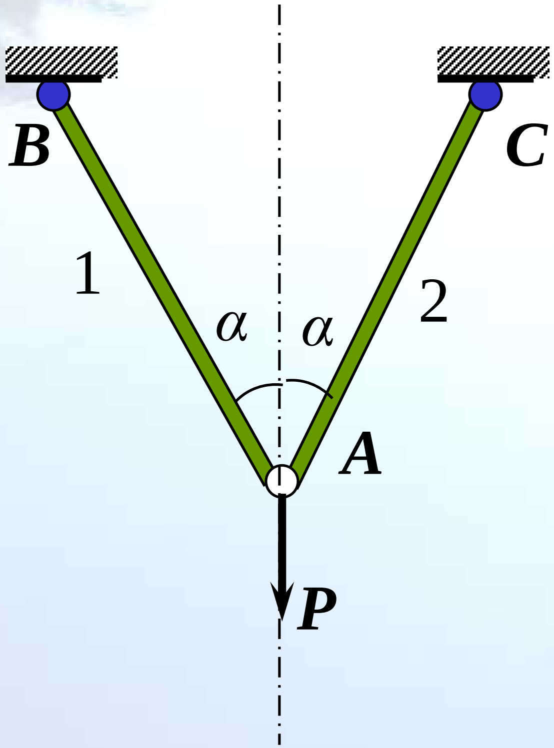


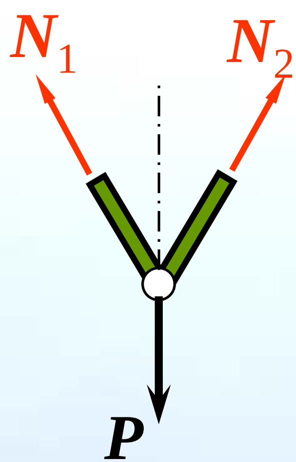
解： $$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i l_i}{E_i A_i}=\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}+\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$$=\frac{3Pa}{EA}+\frac{-Pa}{EA}$$

$$=\frac{2Pa}{EA}$$

[例7] 已知两杆长度均为 l=2m，直径d=25mm，材料的E=210GPa，P=100kN，α=30°，求A点的位移。





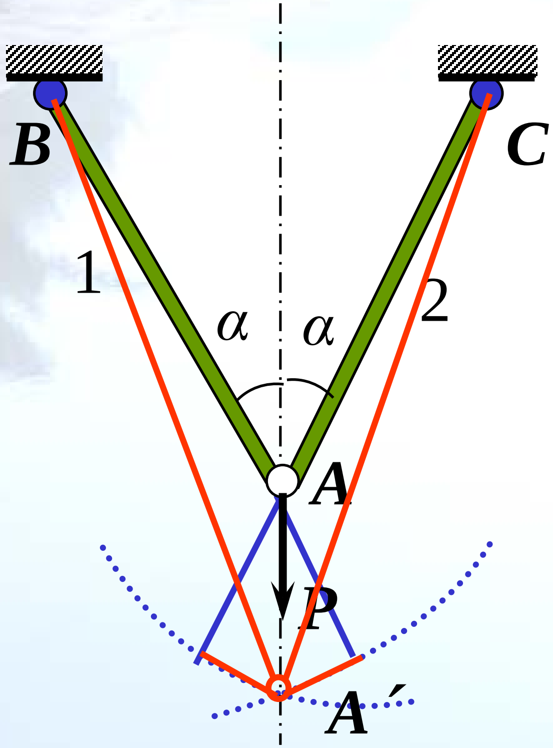
解：首先求杆子的伸长量

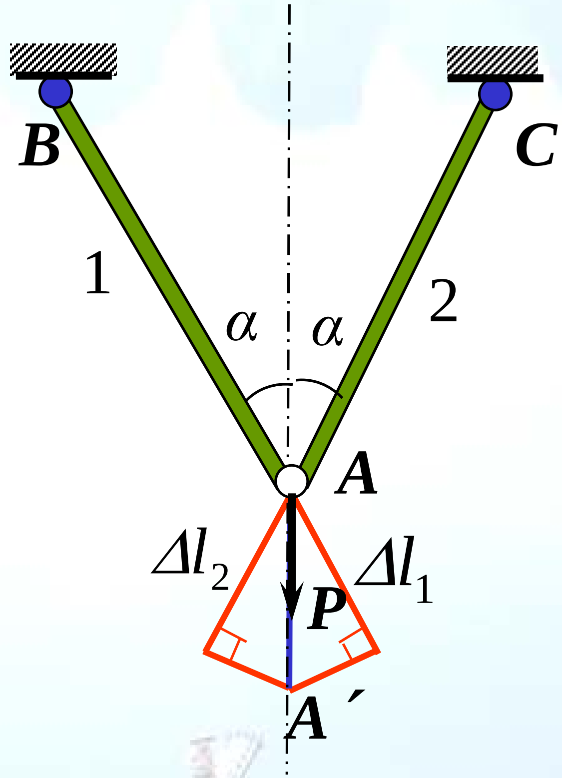
$$\Sigma X=0,\quad N_1=N_2$$

$$\Sigma Y=0,\quad N_1=\frac{P}{2\cos\alpha}$$

$$=57.7(\text{kN})$$

$$\Delta l_1=\Delta l_2=\frac{N_1 l}{EA}=\frac{57.7\times10^3\times2000}{210\times10^3\times\dfrac{\pi\times25^2}{4}}=1.12(\text{mm})$$

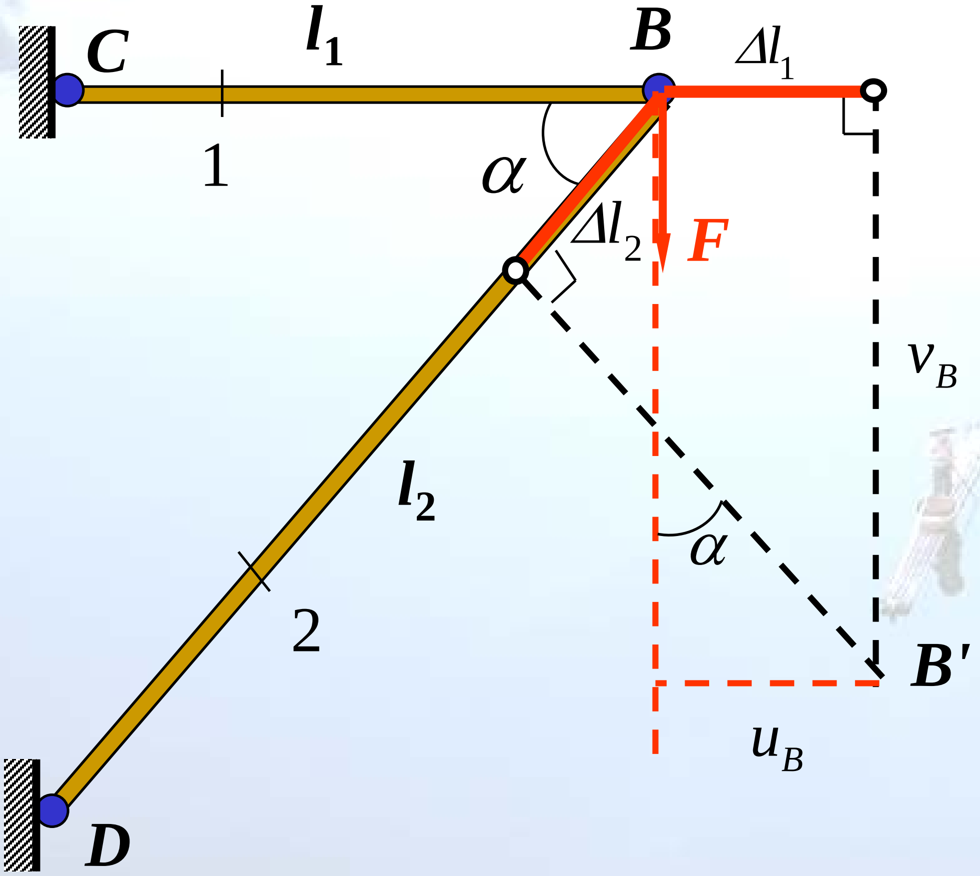




$$f_A=\overline{AA'}=\frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}=\frac{1.12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.293(\mathrm{mm})$$

用切线代替圆弧的方法求节点位移。

[例2-7](P35) 已知：BC杆为圆钢，$d = 20\text{mm}$， $l_1 = 1.2\text{m}$， BD杆为8号槽钢， $l_2 = 2\text{m}$， 两杆材料的E=200GPa，F=60kN， 求B点的位移。



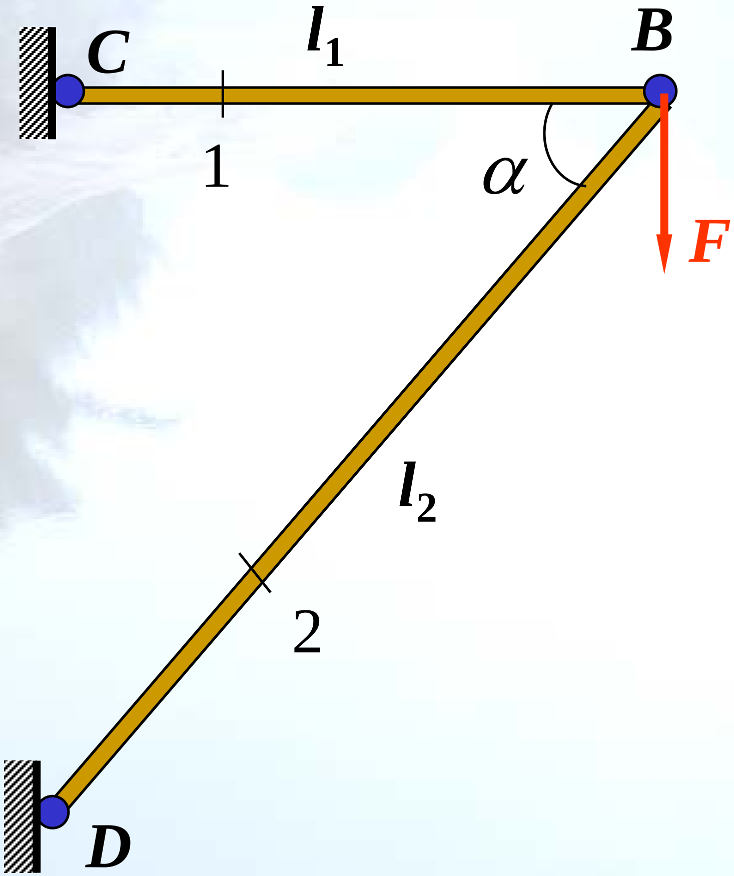
[分析] 变形图如图，B点位移至B'点， 由图知：

水平位移：

$$u_B = \Delta l_1$$

铅垂位移：

$$v_B = \Delta l_1 \mathbf{ctg}\alpha + \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha}$$



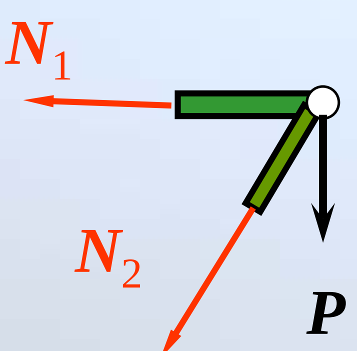
［解：］

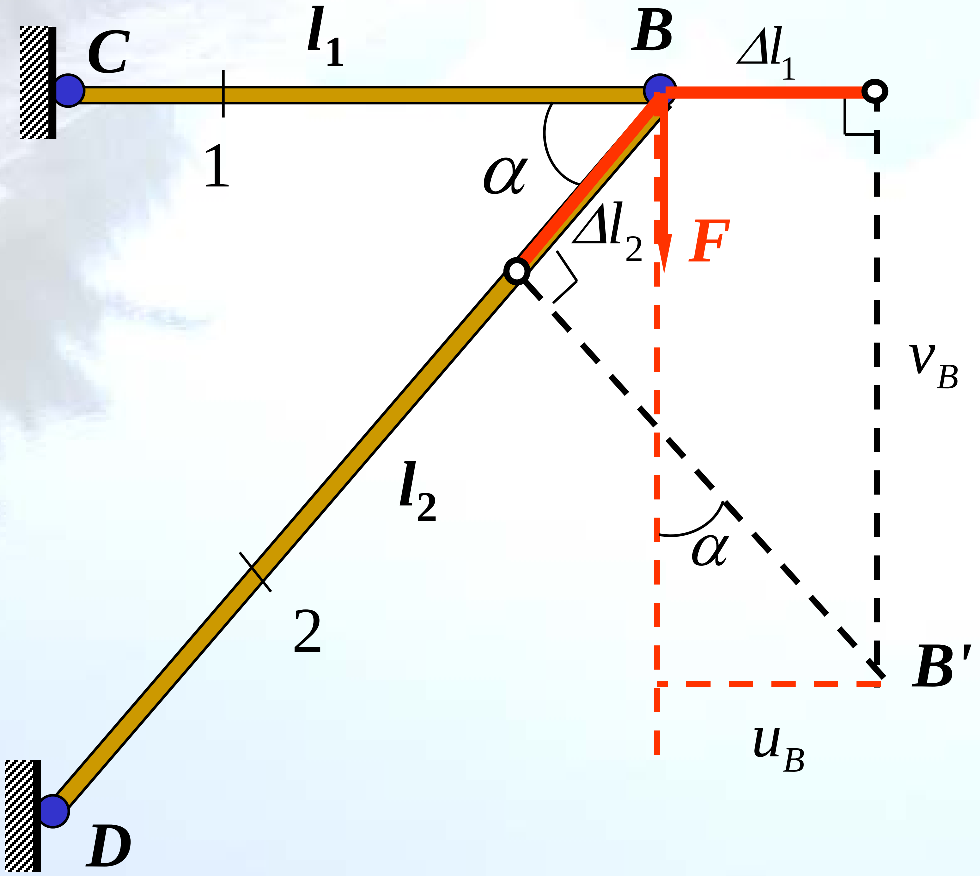
$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = 45\text{kN} \\ N_1 = -75\text{kN} \end{cases}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 0.86(\text{mm})$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -0.732(\text{mm})$$





水平位移：

$$u_B = \Delta l_1 = 0.86(\mathrm{mm})$$

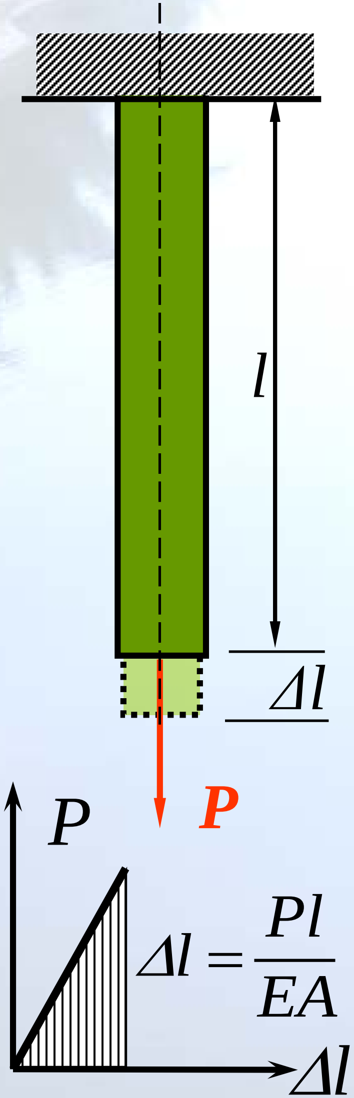
$(\longrightarrow)$

铅垂位移：

$$v_B = \Delta l_1 \mathbf{ctg}\alpha + \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha}$$

$$= 1.56(\mathrm{mm}) \quad (\downarrow)$$

§ 2-9　轴向拉伸或压缩的应变能



已知:P、A、l、E

杆件发生弹性变形，外力功转变为变形能贮存在杆内，这种能称为应变能（Strain Energy），用"U"表示。

不计能量损耗时，外力功等于应变能。

$$U = W, \quad W = \frac{1}{2}P\Delta l, \quad \Delta l = \frac{Pl}{EA}$$

$$\therefore U = W = \frac{P^2 l}{2EA}$$

$$\therefore U = \frac{N^2 l}{2EA}$$

或：$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i}$

比能 ***u***——单位体积的应变能

$$u=\frac{U}{V}=\frac{\frac{1}{2}P\cdot\Delta l}{A\cdot l}=\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{A}\cdot\frac{\Delta l}{l}$$

$$\because \sigma=\frac{P}{A}, \varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$$

$$\therefore \quad \boxed{u=\frac{1}{2}\sigma\cdot\varepsilon}$$

应用应变能，可以求解结构的变形和强度问题。

§2-10　拉伸、压缩超静定问题

一、超静定问题及其解法

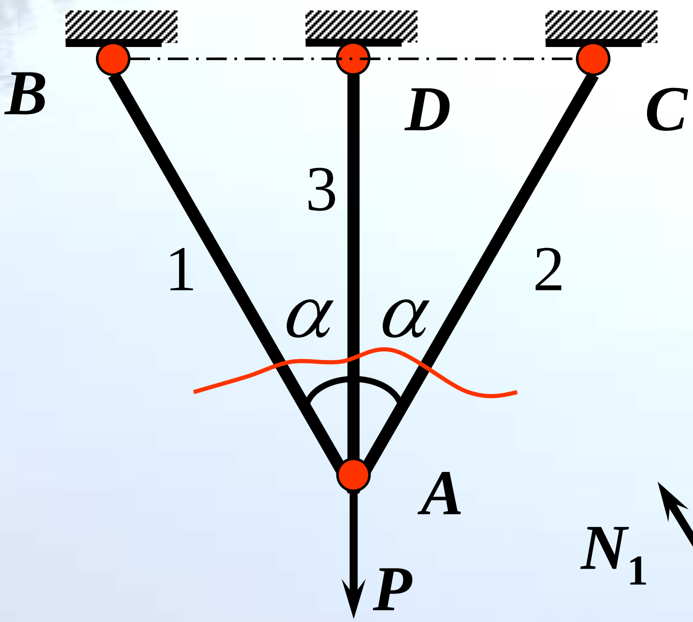
1、超静定问题：单凭静平衡方程不能确定出全部未知力（外力、内力、应力）的问题。

2、静不定次数

静不定次数=未知力个数-静力学平衡方程数

3、超静定的解法：由平衡方程、变形协调方程和物理方程相结合，进行求解。

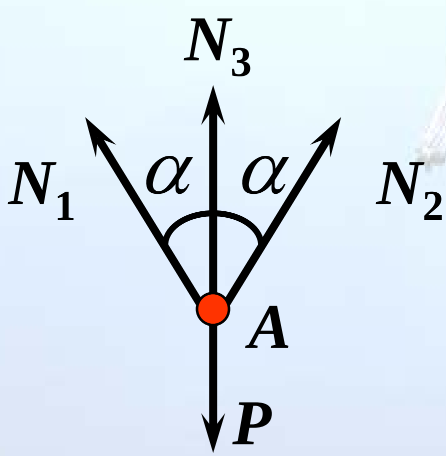
[例9] 设1、2、3三杆用铰链连接如图，已知：各杆长为：$L_1=L_2$、 $L_3=L$ ；各杆面积为$A_1=A_2=A$、 A_3 ；各杆弹性模量为：$E_1=E_2=E$、E_3。求各杆的内力。

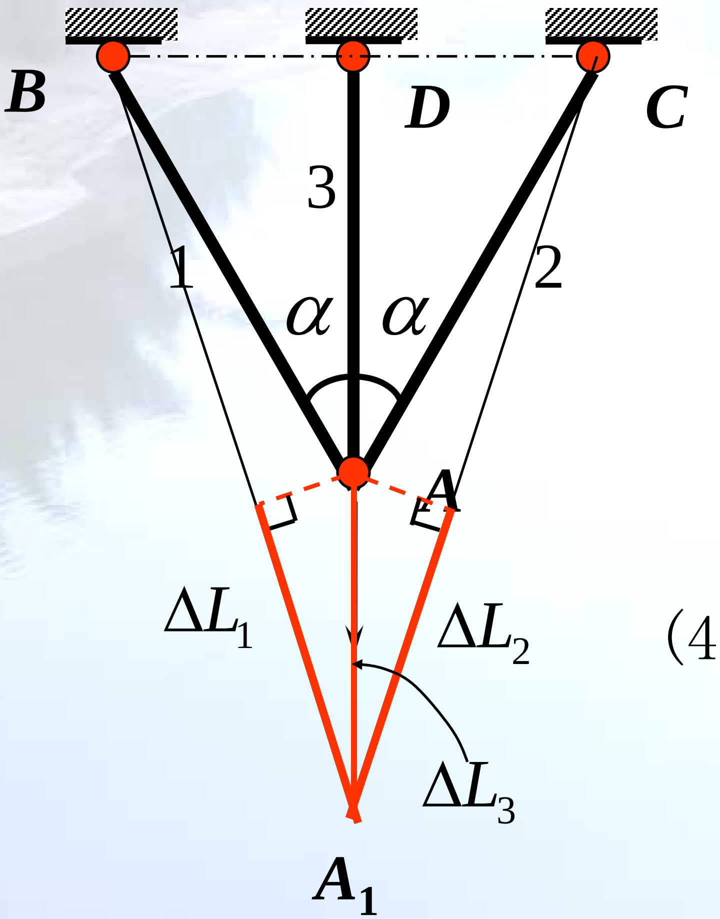


解:(1)平衡方程:

$$\sum X=0\,,\ N_1\sin\alpha-N_2\sin\alpha=0 \qquad (1)$$

$$\sum Y=0\,,\ N_1\cos\alpha+N_2\cos\alpha+N_3-P=0 \qquad (2)$$





(2) 几何方程——变形协调方程：

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 \cos\alpha \qquad \textbf{(3)}$$

(3) 物理方程——弹性定律：

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} \qquad \Delta L_3 = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3} \qquad \textbf{(4)}$$

(4) 补充方程：(4) 代入 (3) 得：

$$\frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3}\cos\alpha \qquad \textbf{(5)}$$

(5) 由平衡方程 (1)、(2) 和补充方程 (5) 组成的方程组，得：

$$N_1 = N_2 = \frac{E_1 A_1 P \cos^2\alpha}{2E_1 A_1 \cos^3\alpha + E_3 A_3}; \quad N_3 = \frac{E_3 A_3 P}{2E_1 A_1 \cos^3\alpha + E_3 A_3}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{P\cos^2\alpha}{2\cos^3\alpha + \dfrac{E_3A_3}{E_1A_1}}; \quad N_3 = \frac{P}{2\dfrac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^3\alpha + 1}$$

$$E_3A_3 \to \infty,\ N_3 \to P,\ N_1 \to 0$$

$$E_3A_3 \to 0,\ N_3 \to 0,\ N_1 \to \frac{P}{2\cos\alpha}$$

在静不定结构中，刚度越大的杆，其轴力也越大。

3、解超静定问题的一般步骤：

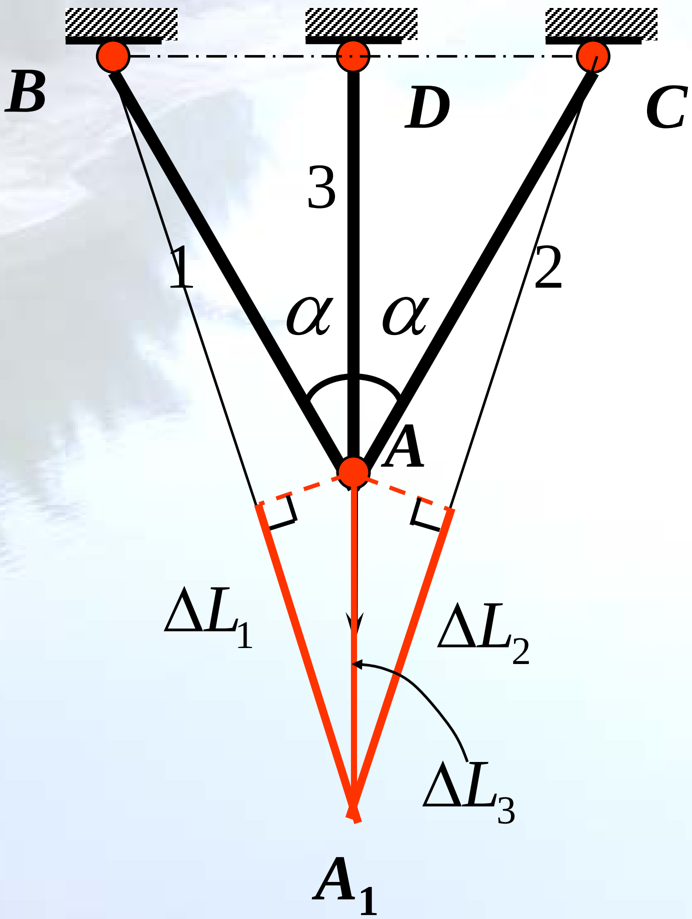
(1) 平衡方程；

(2) 几何方程——变形协调方程；

(3) 物理方程——弹性定律；

(4) 补充方程：由几何方程和物理方程得；

(5) 解由平衡方程和补充方程组成的方程组。

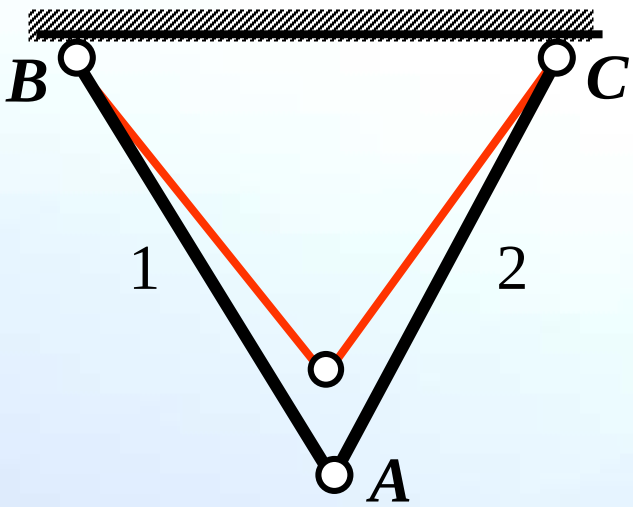


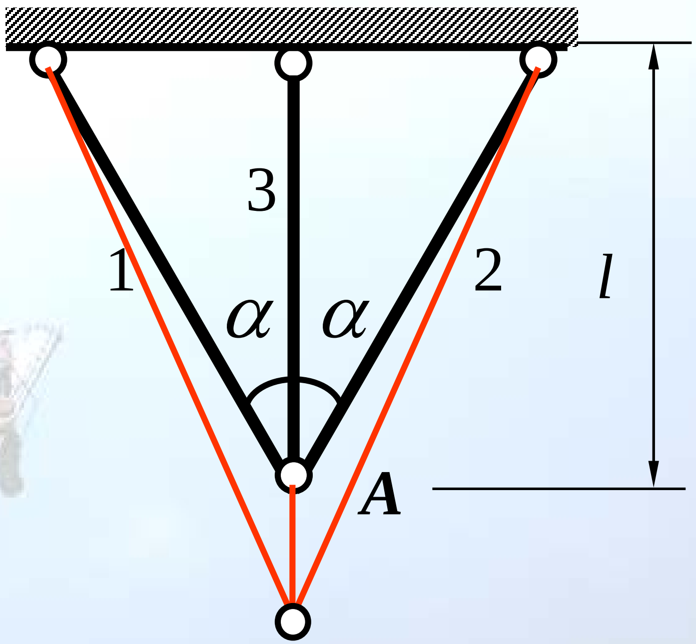
(2) 几何方程——变形协调方程：

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 \cos\alpha \qquad \textbf{(3)}$$

§2-11　温度应力和装配应力

一、温度应力

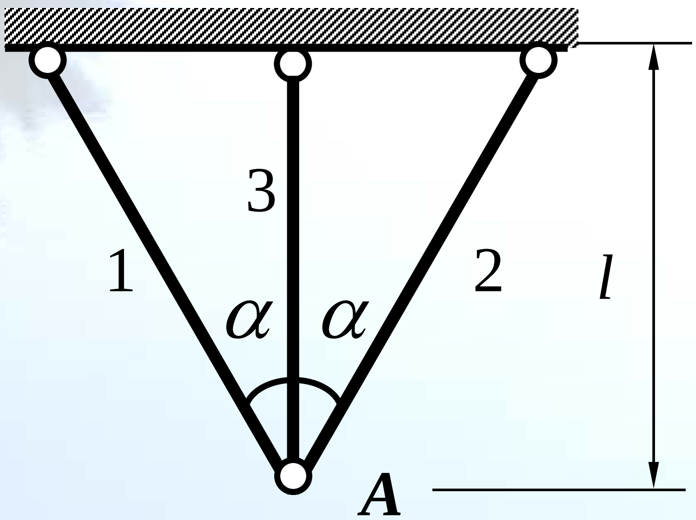




静定问题无温度应力。

静不定问题存在温度应力。

[例10] 各杆E、A相同，线膨胀系数为α， 3杆温度升高$\triangle T$，求各杆的应力。



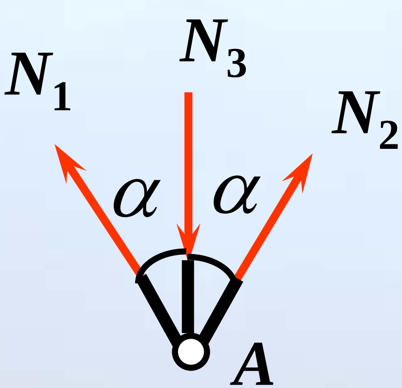
解(1)平衡方程:

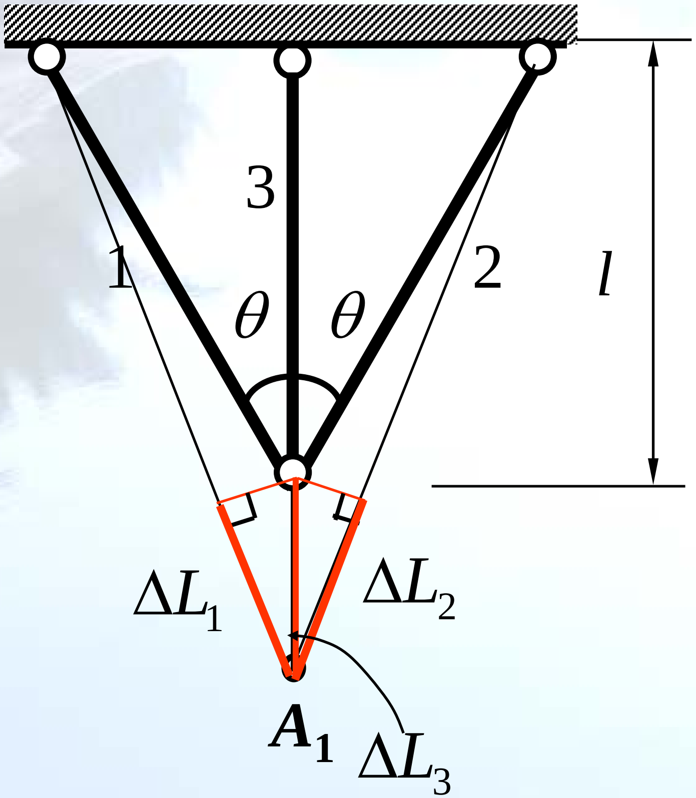
$$\sum X=0,$$

$$-N_1\sin\alpha+N_2\sin\alpha=0$$

$$\sum Y=0,$$

$$N_1\cos\alpha+N_2\cos\alpha-N_3=0$$





(2) 几何方程

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\theta$$

(3) 物理方程：

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA}$$

$$\Delta l_3 = \alpha \Delta T l - \frac{N_3 l_3}{EA}$$

$$l_1 = \frac{l}{\cos\theta}\ ,\quad l_3 = l$$

(4) 补充方程

$$\frac{N_1 l}{EA\cos\theta} = (\alpha \Delta T l - \frac{N_3 l}{EA})\cos\theta$$

解得:
$$N_1 = N_2 = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot EA \cdot \cos^2\theta}{1+2\cos^3\theta}$$

$$N_3 = \frac{2\alpha \cdot \Delta T \cdot EA \cdot \cos^3\theta}{1+2\cos^3\theta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot \cos^2\theta}{1+2\cos^3\theta}$$

$$\sigma_3 = \frac{2\alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot \cos^3\theta}{1+2\cos^3\theta}$$

设：$E = 200\text{GPa}$ ， $\alpha = 12.5\times10^{-6}\ {}^{1}\!/\!{}_{°\text{C}}$ ，$\Delta T = 40°\text{C}, \theta = 30°$

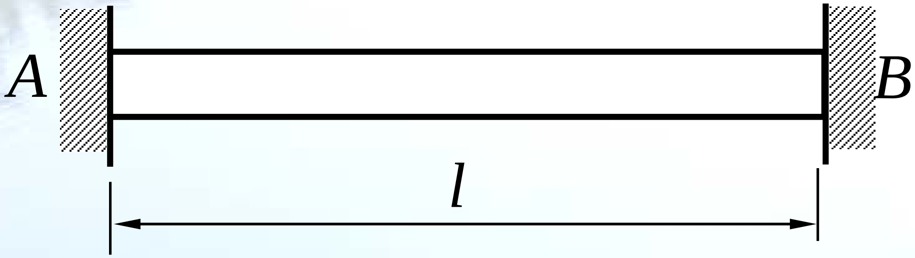
得 $\sigma_1 = \sigma_2 = 32.6\text{MPa}$ ，

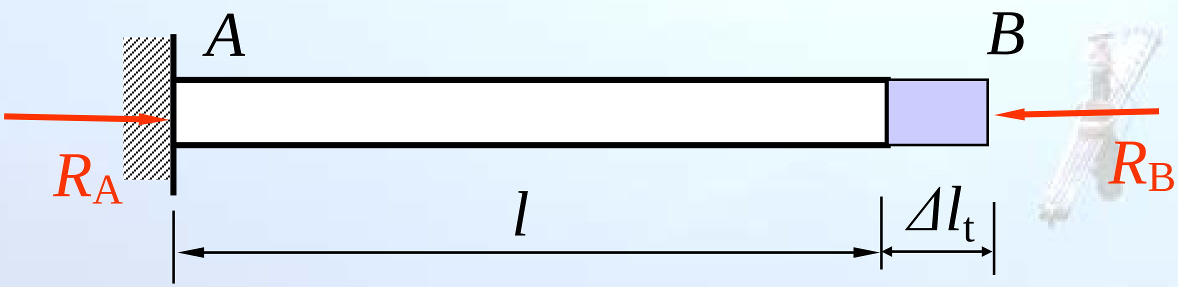
$\sigma_3 = 56.5\text{MPa}$

[例11]

$E=200\text{GPa}$ ， $\alpha=12.5\times10^{-6}\ {}^{1}\!/_{^\circ\text{C}}$ ，$\Delta T=50^\circ\text{C}, \sigma_s=235\text{MPa}$

求：杆中的温度应力。





解：$\Delta l_{\text{t}}=\alpha\cdot\Delta T\cdot l$

$$\Delta l_{\text{R}}=\frac{R_{\text{B}}l}{EA}$$

$$\because \Delta l_{\text{t}}=\Delta l_{\text{R}}$$

$$\therefore\ \alpha\cdot\Delta T\cdot l=\frac{R_{\text{B}}l}{EA}$$

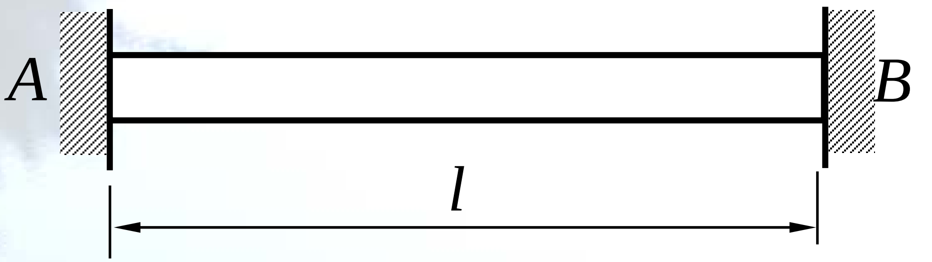
$$R_B=\alpha\cdot\Delta T\cdot EA$$

$$\sigma=\alpha\cdot\Delta T\cdot E$$

$$=125(\text{MPa})$$

$$E = 200\text{GPa}\ ,\ \ \alpha = 12.5\times10^{-6}\ {}^{1}\!/_{{}^\circ\text{C}}\ , \Delta T = 150^\circ\text{C}, \sigma_s = 235\text{MPa}$$

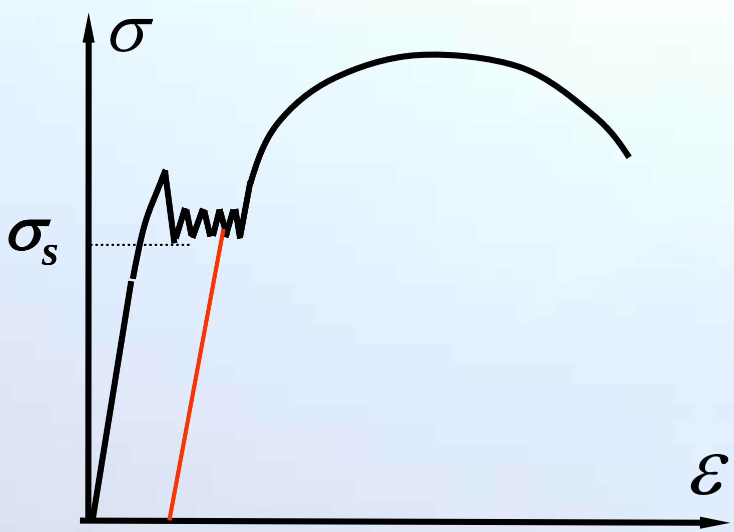
求：杆中的温度应力。



解:

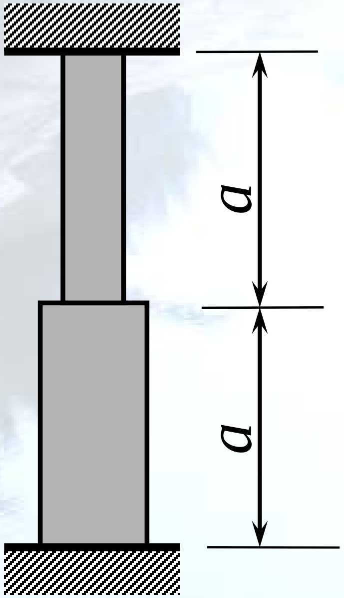
$$\cancel{\sigma = 375(\text{MPa})}$$

经过一段时间后，将温度降到开始时的温度，这时杆子内有没有应力？是拉应力还是压应力？



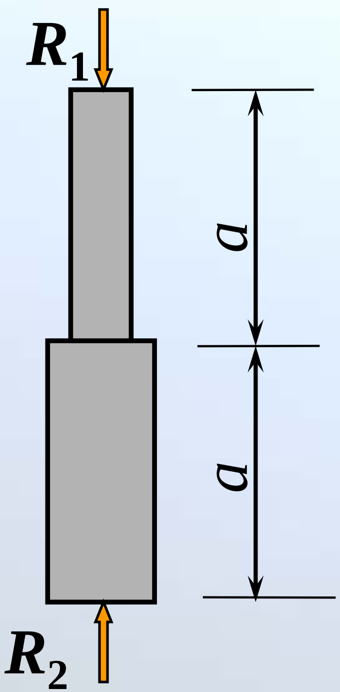
σ--ε曲线

杆子内将存在残余应力，是拉应力。



例10 如图，阶梯钢杆的上下两端在T_1=5℃时被固定, 杆的上下两段的面积分别A_1=5cm^2， A_2=10cm^2，当温度升至T_2=25℃时, 求各杆的温度应力。

(线膨胀系数α=12.5$\times 10^{-6}$ $1/{}^\circ C$ ；弹性模量E=200GPa)



解：（1）平衡方程：

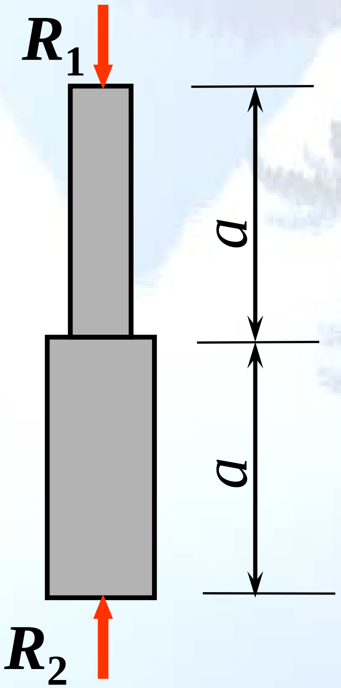
$$\sum Y=0, \qquad R_2-R_1=0$$

（2）几何方程：

$$\Delta L=\Delta L_T+\Delta L_N=0$$

（3）物理方程 $\Delta L_T = 2a \cdot \Delta T \cdot \alpha$;

$$\Delta L_N = \frac{N_1 a}{EA_1} + \frac{N_2 a}{EA_2}$$



（4）补充方程 $2\Delta T \cdot \alpha + \frac{N_1}{EA_1} + \frac{N_2}{EA_2} = 0$

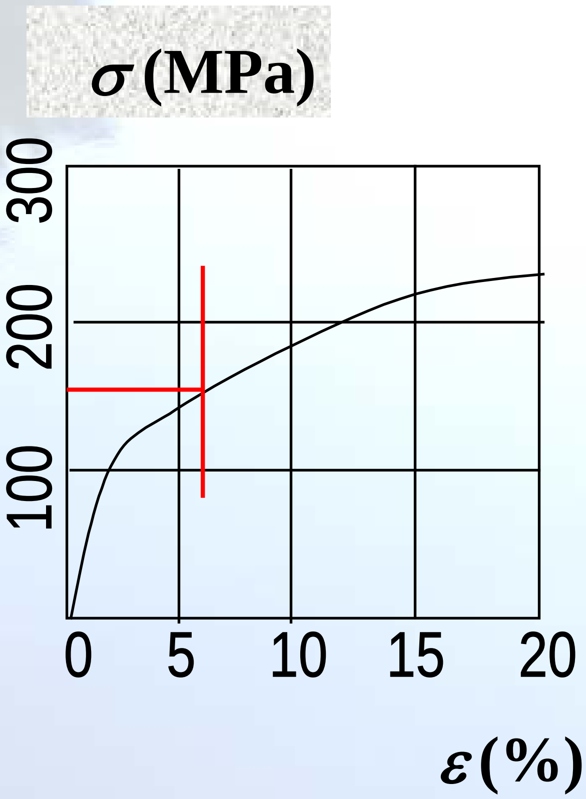
$\because$ $N_1 = -R_1$ $N_2 = -R_2$

所以解得: $R_1 = R_2 = 33.3\text{kN}$

（5）温度应力

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -66.7\text{MPa} \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -33.3\text{MPa}$$

例11 铜丝直径d=2mm，长L=500mm， 材料的拉伸曲线如图所示。如欲使铜丝的伸长为30mm， 则大约需加多大的力P?



解：变形量可能已超出了“线弹性”范围，故，不可再应用“弹性定律”。应如下计算：

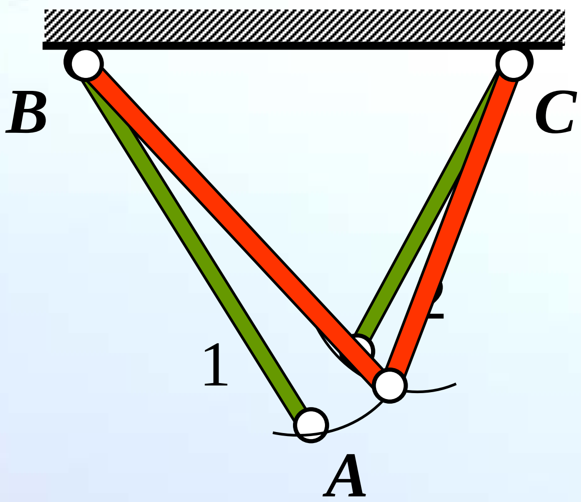
$$\varepsilon = 30/500 = 6\%$$

由拉伸图知：

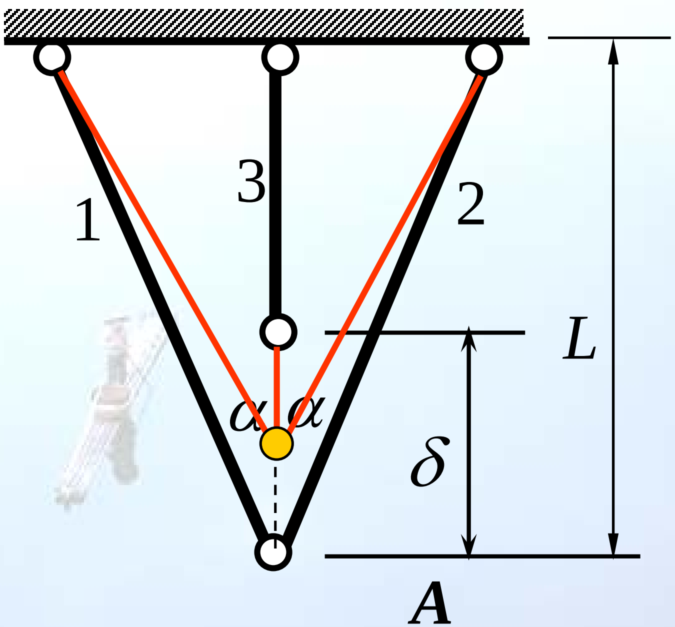
$$\sigma = 160\text{MPa}$$

$$\therefore P = A\sigma = 3.14 \times 2^2 \times 160/4 = 502\text{N}$$

二、装配应力

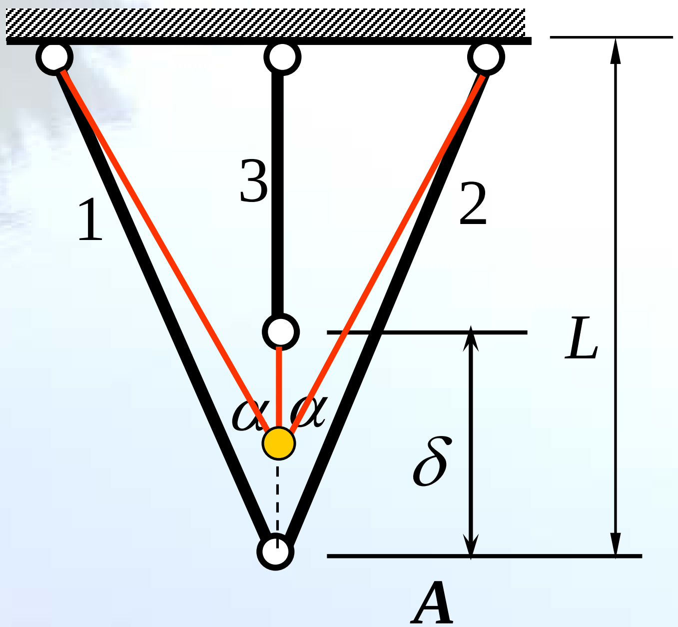


静定问题无装配应力。



静不定问题存在装配应力。

［例12］ 各杆E、A 相同，3杆的加工误差为δ，求各杆的应力。



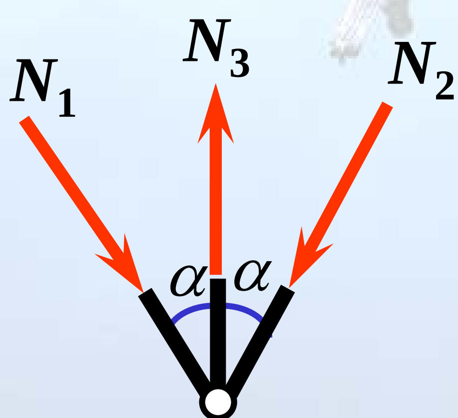
解：（1）平衡方程：

$$\sum X = 0,$$

$$N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha = 0$$

$$\sum Y = 0,$$

$$N_3 - N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0$$

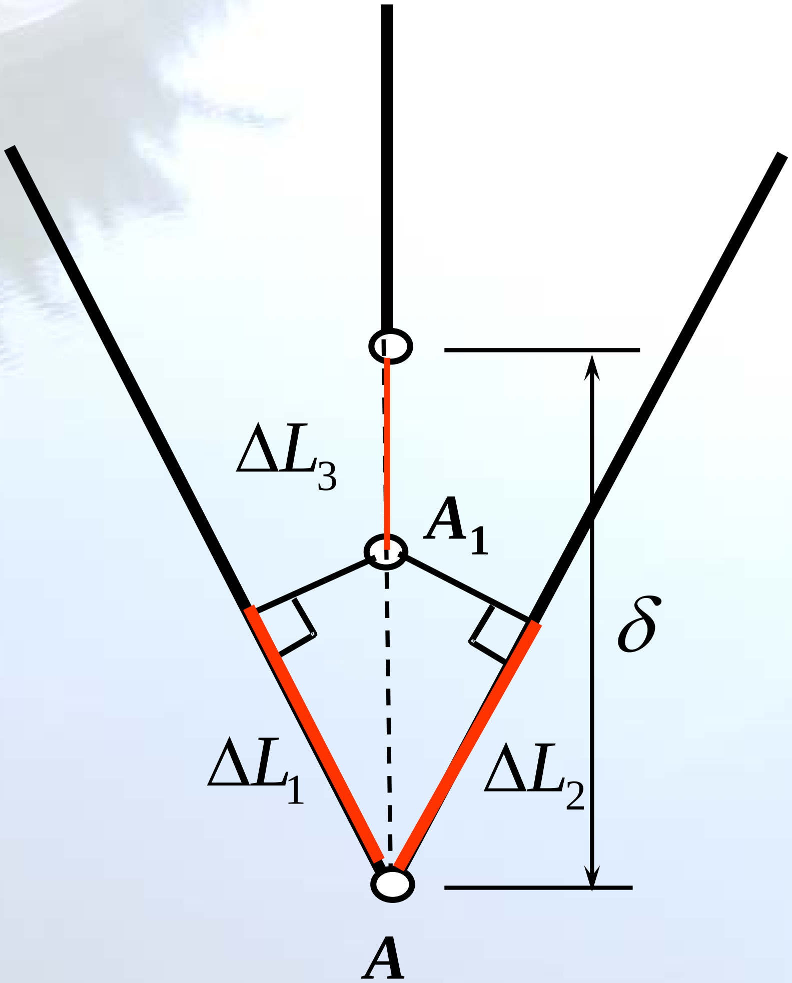


（2）几何方程

$$(\delta - \Delta L_3)\cos\alpha = \Delta L_1$$

（3）物理方程

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1}\text{，}\quad \Delta L_3 = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3}$$



得补充方程:

$$\frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \left(\delta - \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3}\right)\cos\alpha$$

$$N_1 = N_2 = \frac{EA\delta\cos^2\alpha}{(1+2\cos^3\alpha)L}$$

$$N_3 = \frac{2EA\delta\cos^3\alpha}{(1+2\cos^3\alpha)L}$$

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{N_1}{A}\ , \qquad \sigma_3=\frac{N_3}{A}$$

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{E\delta\cos^2\alpha}{(1+2\cos^3\alpha)L}\ , \qquad \sigma_3=\frac{2E\delta\cos^3\alpha}{(1+2\cos^3\alpha)\mathrm{L}}$$

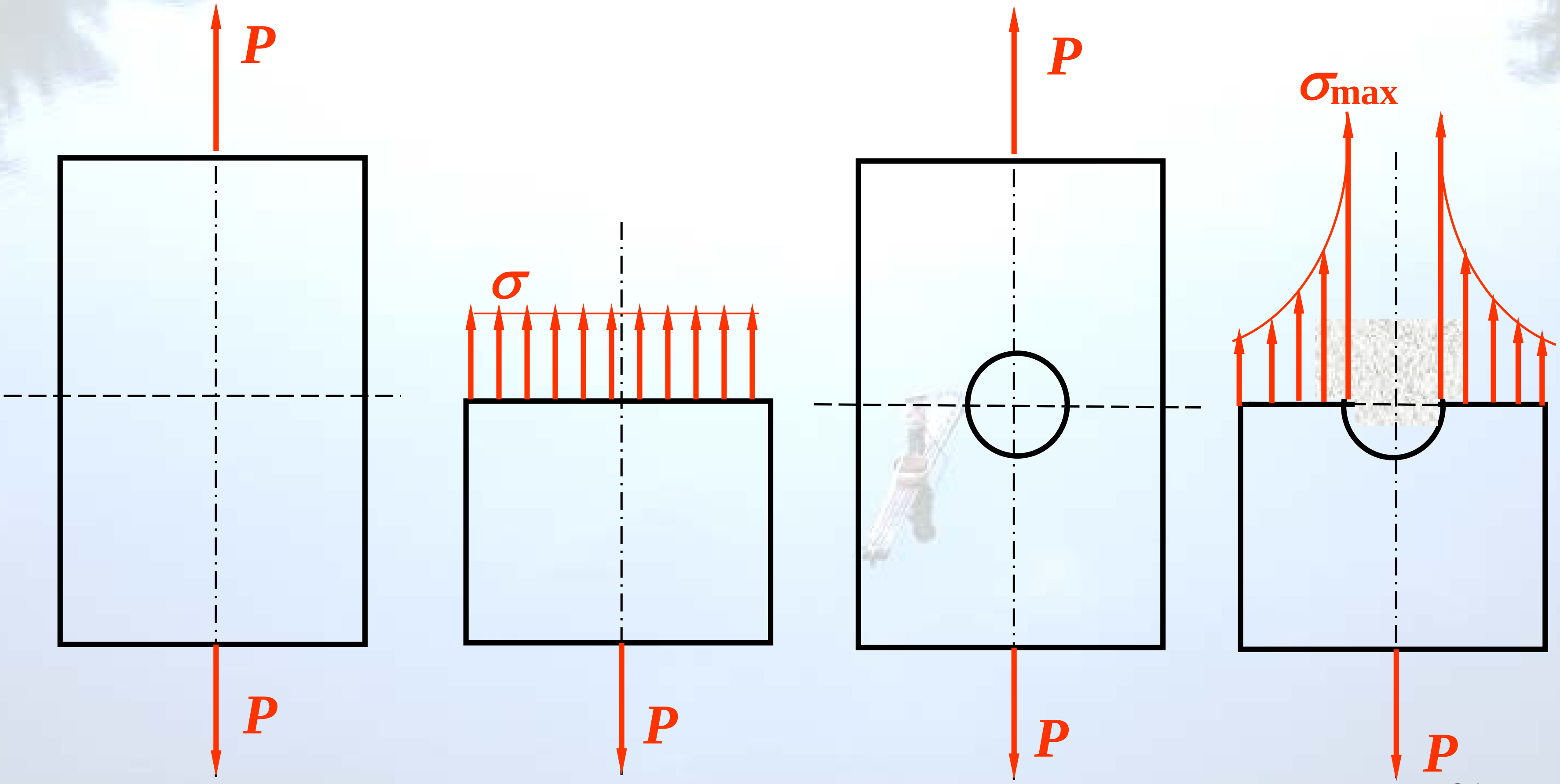
设：$E=200\mathrm{GPa}$ ， $\delta=1\mathrm{mm}$ ，$L=1\mathrm{m}$ ，$\alpha=30°$

得 $\sigma_1=\sigma_2=65\mathrm{MPa}$ ，

$\sigma_3=113\mathrm{MPa}$

§2-12　应力集中（Stress Concentration）的概念

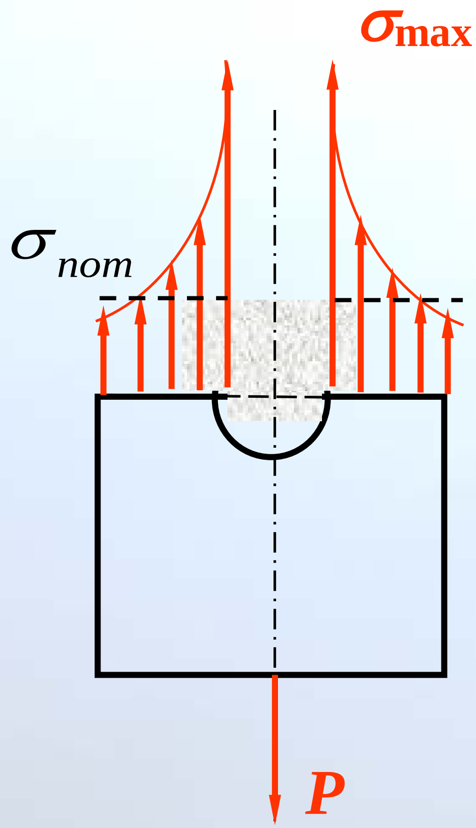
在截面尺寸突变处，应力急剧变大。

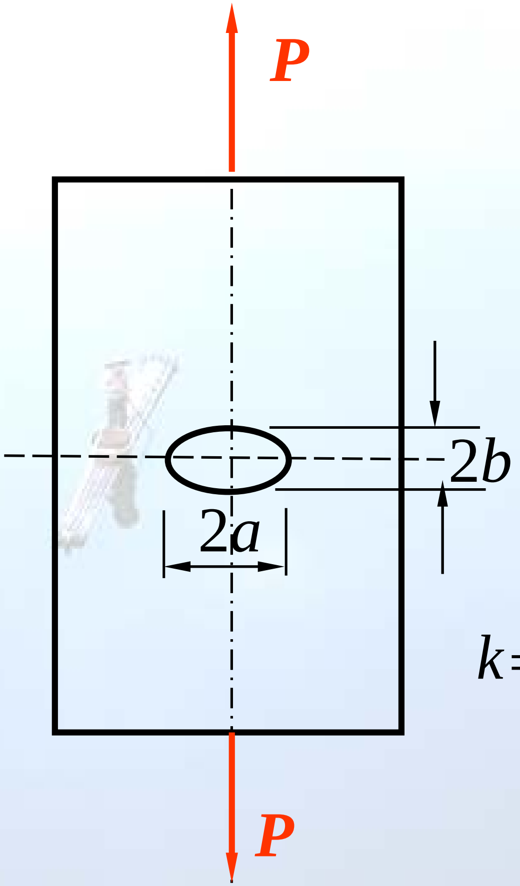


名义应力：$\sigma_{nom}=\dfrac{P}{A_{净}}$

理论应力集中系数：$k=\dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}}$

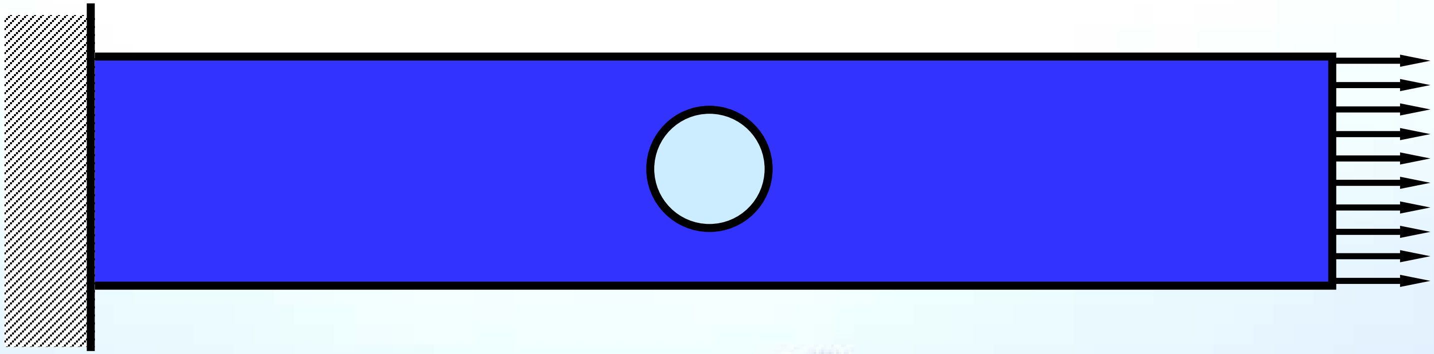
k值>1，与构件的外形有关，对于圆孔k=3，具体的推导在《弹性力学》课程中。



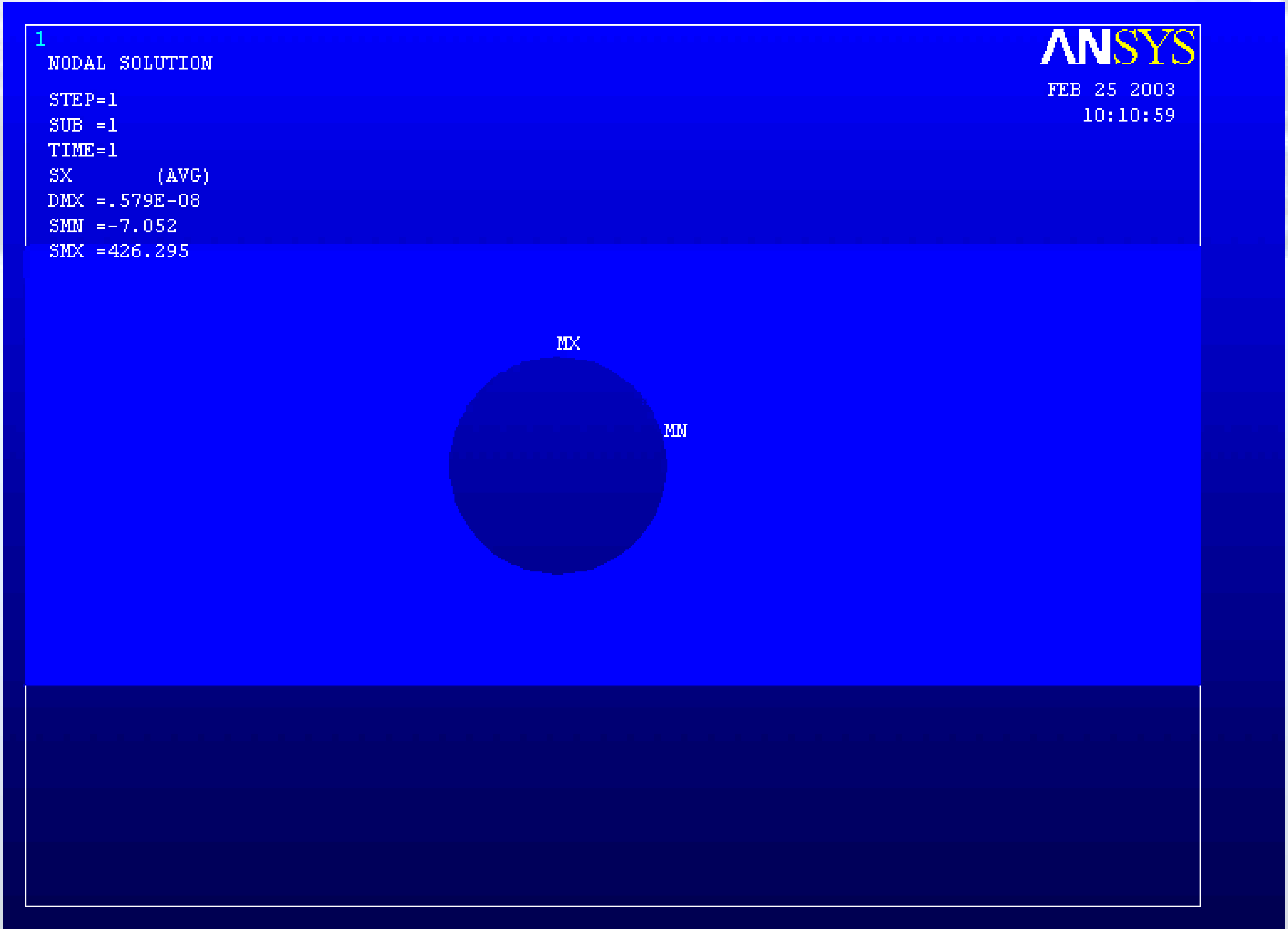


$$k=1+2\frac{a}{b}$$

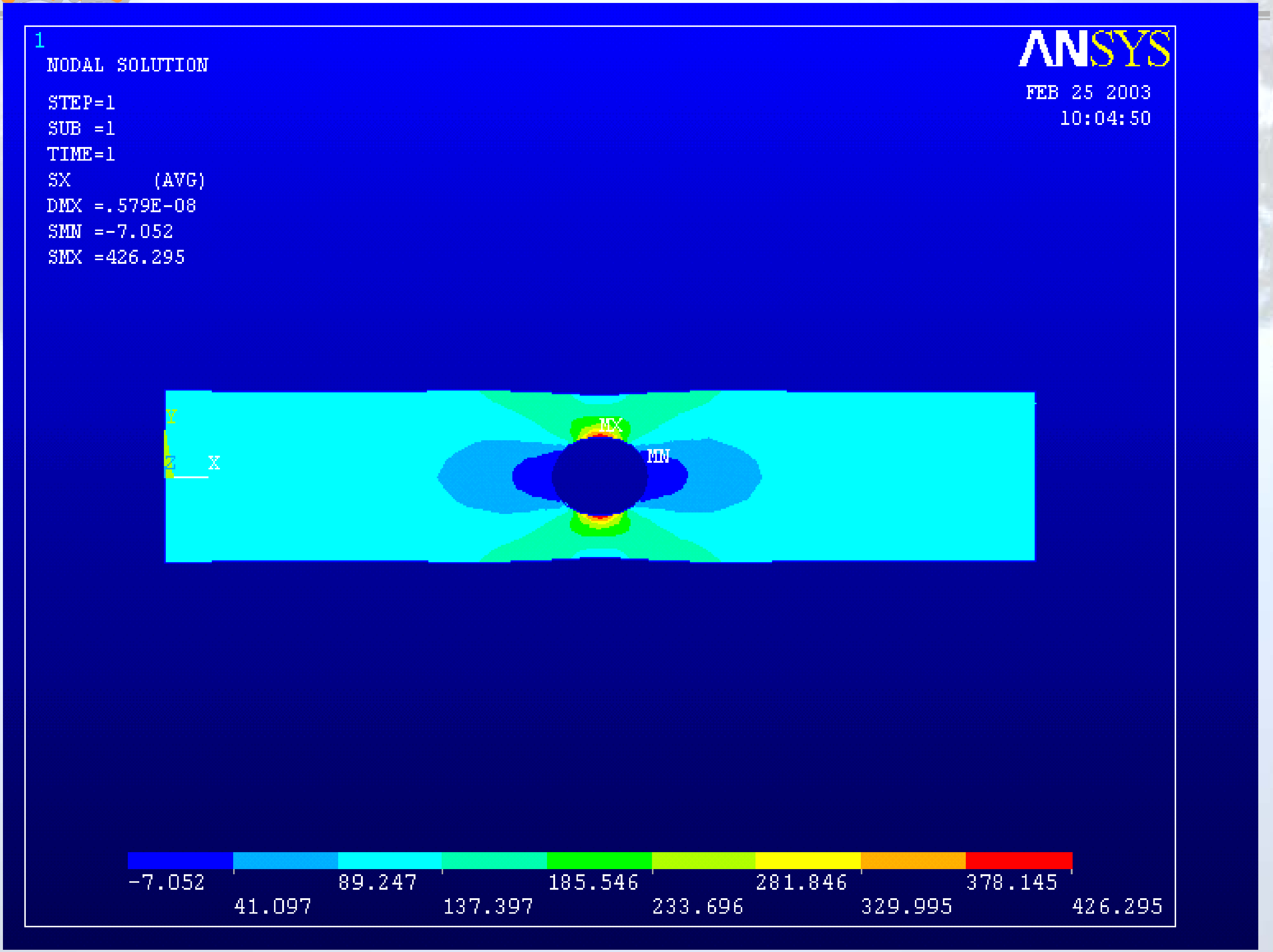
有限元分析程序《**ANSYS**》

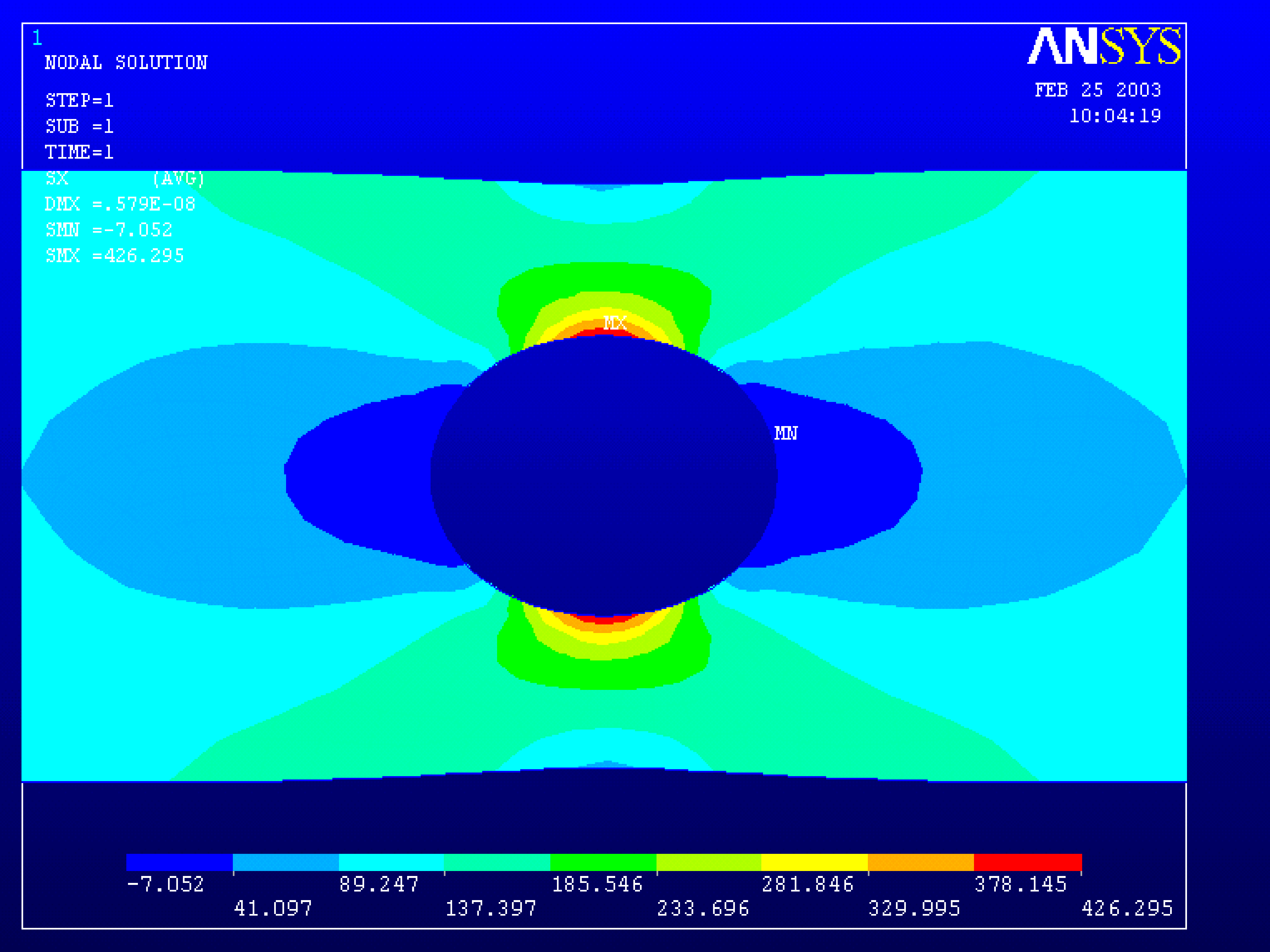


请看动画


1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
DMX =.579E-08
SMN =-7.052
SMX =426.295
ANSYS
FEB 25 2003
10:10:59
MX
MN

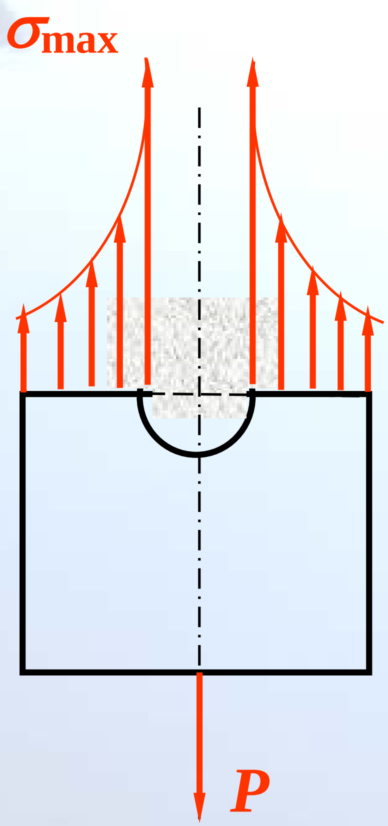
拉压

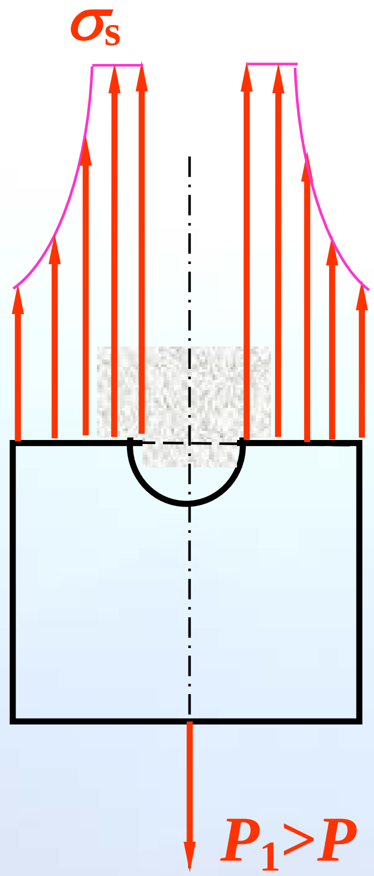

1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
DMX =.579E-08
SMN =-7.052
SMX =426.295
ANSYS
FEB 25 2003
10:04:50
Y
Z
X
MX
MN
-7.052
41.097
89.247
137.397
185.546
233.696
281.846
329.995
378.145
426.295


1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
DMX =.579E-08
SMN =-7.052
SMX =426.295
ANSYS
FEB 25 2003
10:04:19
MX
MN
-7.052
41.097
89.247
137.397
185.546
233.696
281.846
329.995
378.145
426.295

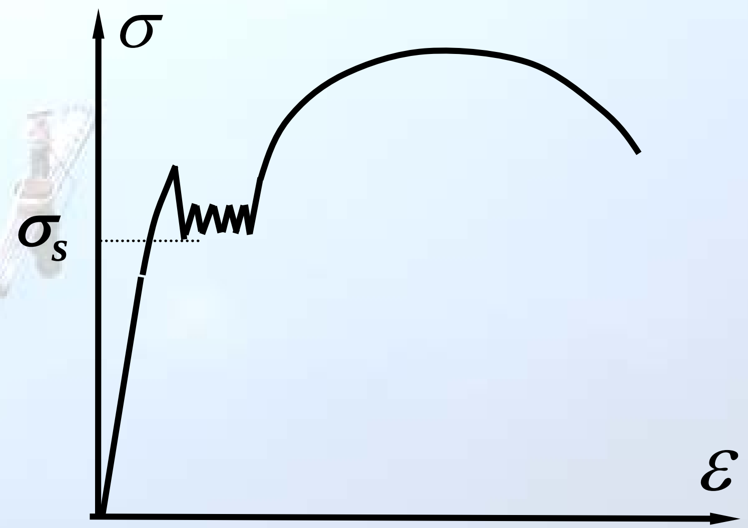
应力集中对构件强度的影响：

在静载荷作用下，塑性材料可以不考虑应力集中的影响。





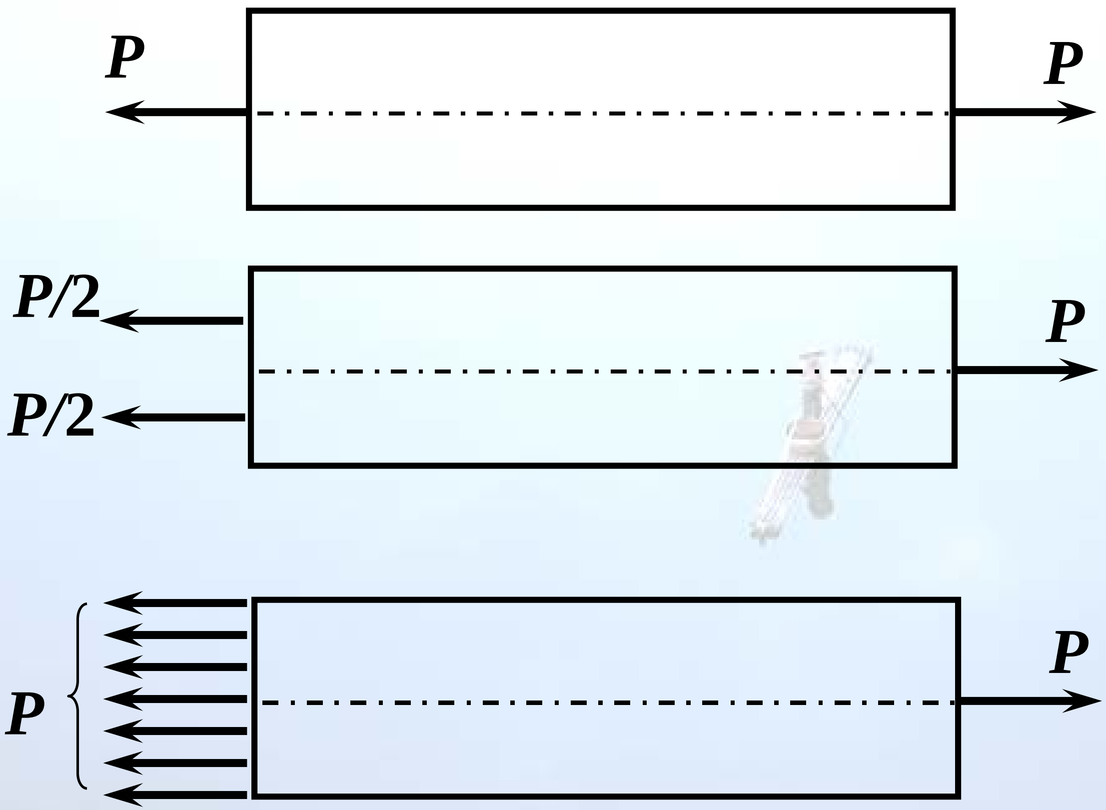
脆性材料应考虑应力集中的影响，但铸铁可以不考虑应力集中的影响。

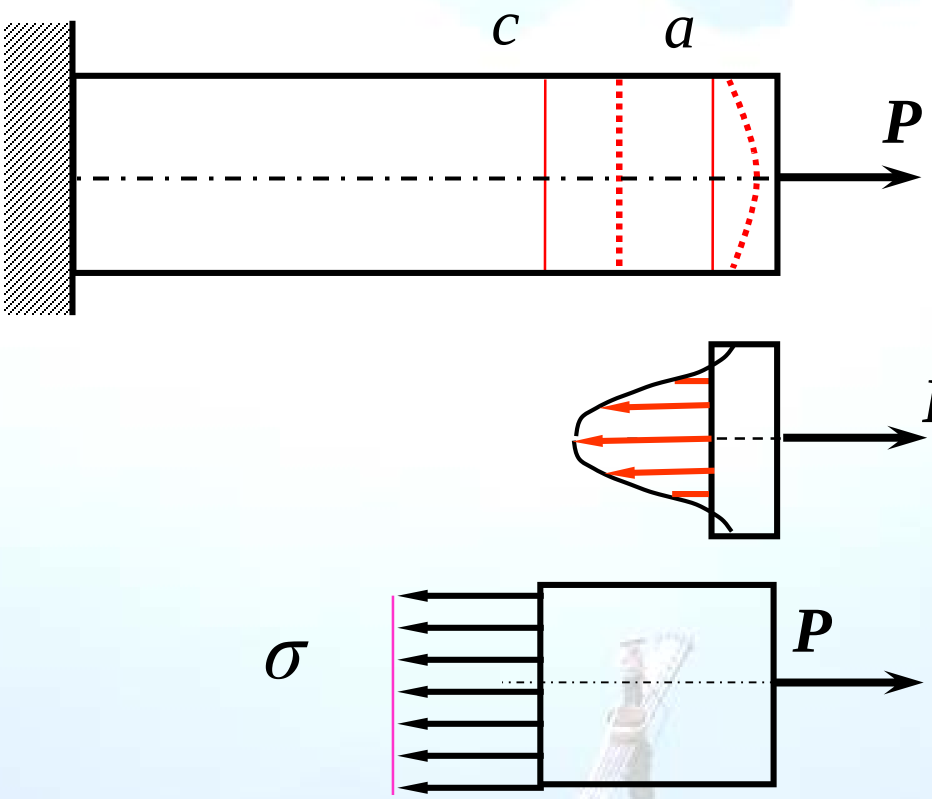


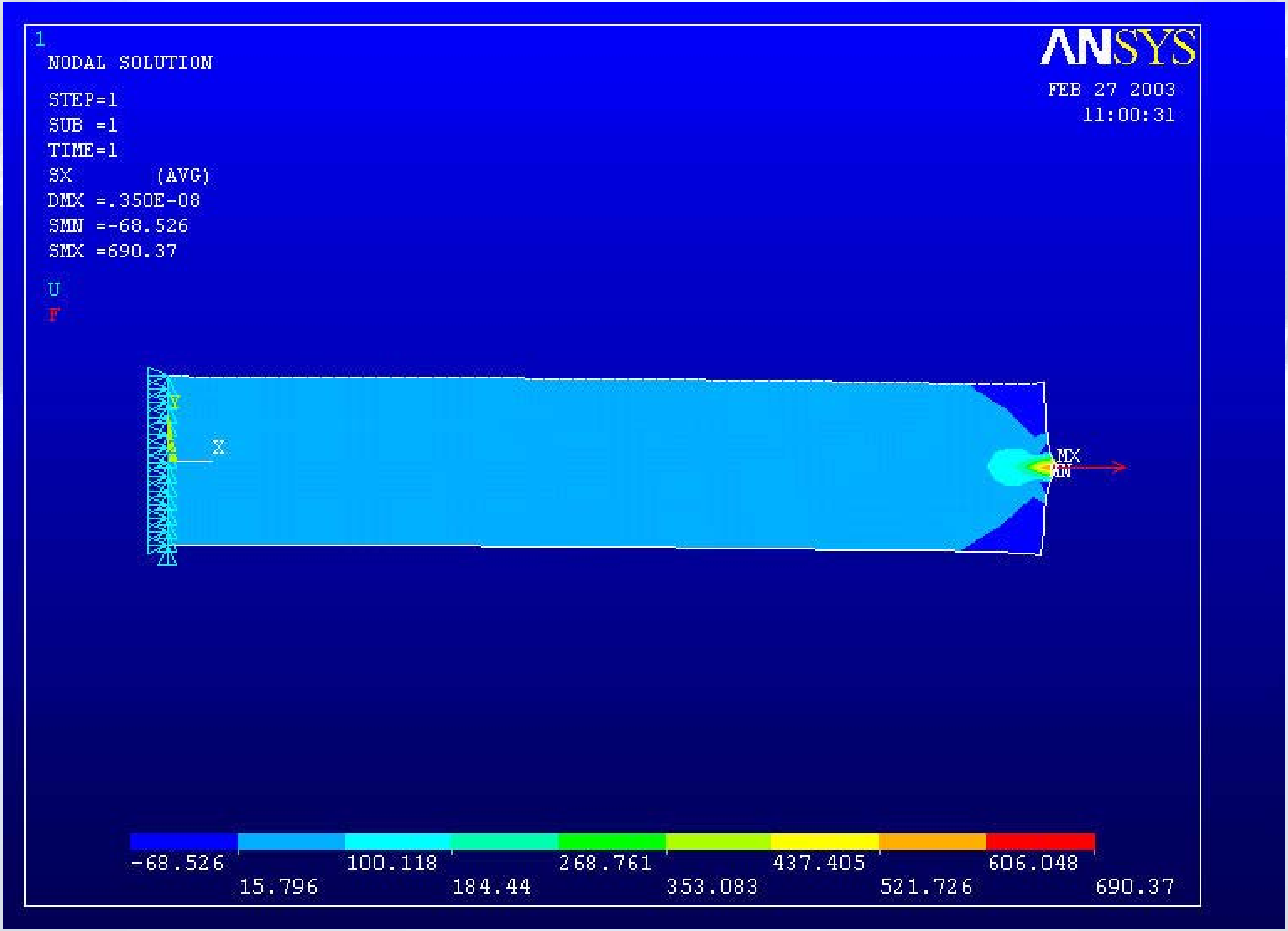
σ—ε曲线

圣维南（Saint-Venant）原理：

用与原力系等效的力系来代替原力系，则除在原力系作用区域内有明显差别外，在离外力作用区域略远处，应力分布与大小不受外载荷作用方式的影响。




c
a
P
P
σ
P

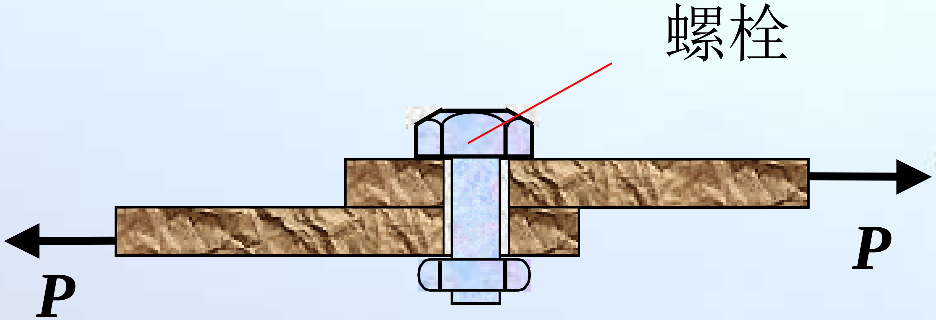

1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
DMX =.350E-08
SMN =-68.526
SMX =690.37
U
F
ANSYS
FEB 27 2003
11:00:31
Y
X
MX
MN
-68.526
15.796
100.118
184.44
268.761
353.083
437.405
521.726
606.048
690.37

§2-13 剪切和挤压的实用计算

一、连接件的受力特点和变形特点：

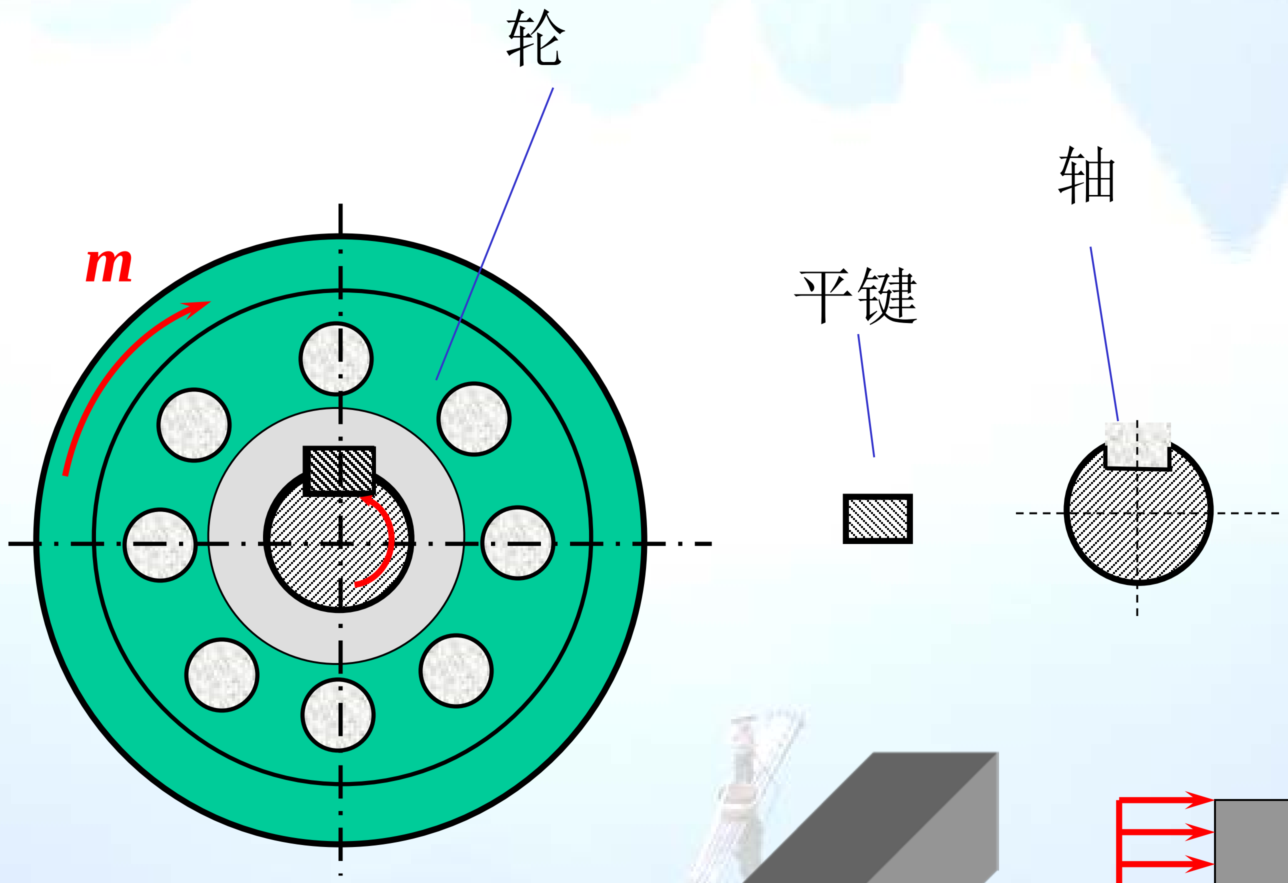
1、连接件

在构件连接处起连接作用的部件，称为**连接件**。例如：螺栓、铆钉、键等。连接件虽小，起着传递载荷的作用。

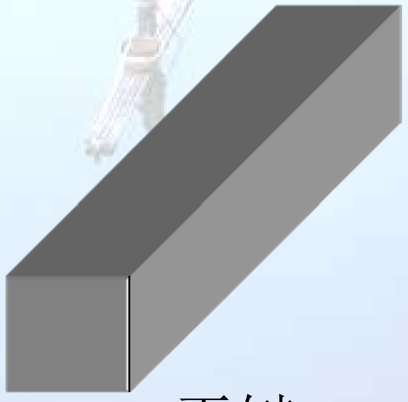


特点：可传递一般 力，

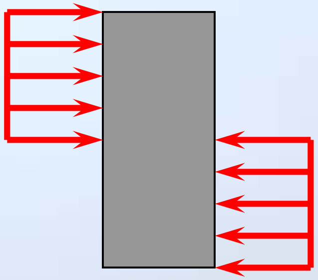
可拆卸。



特点：传递扭矩。

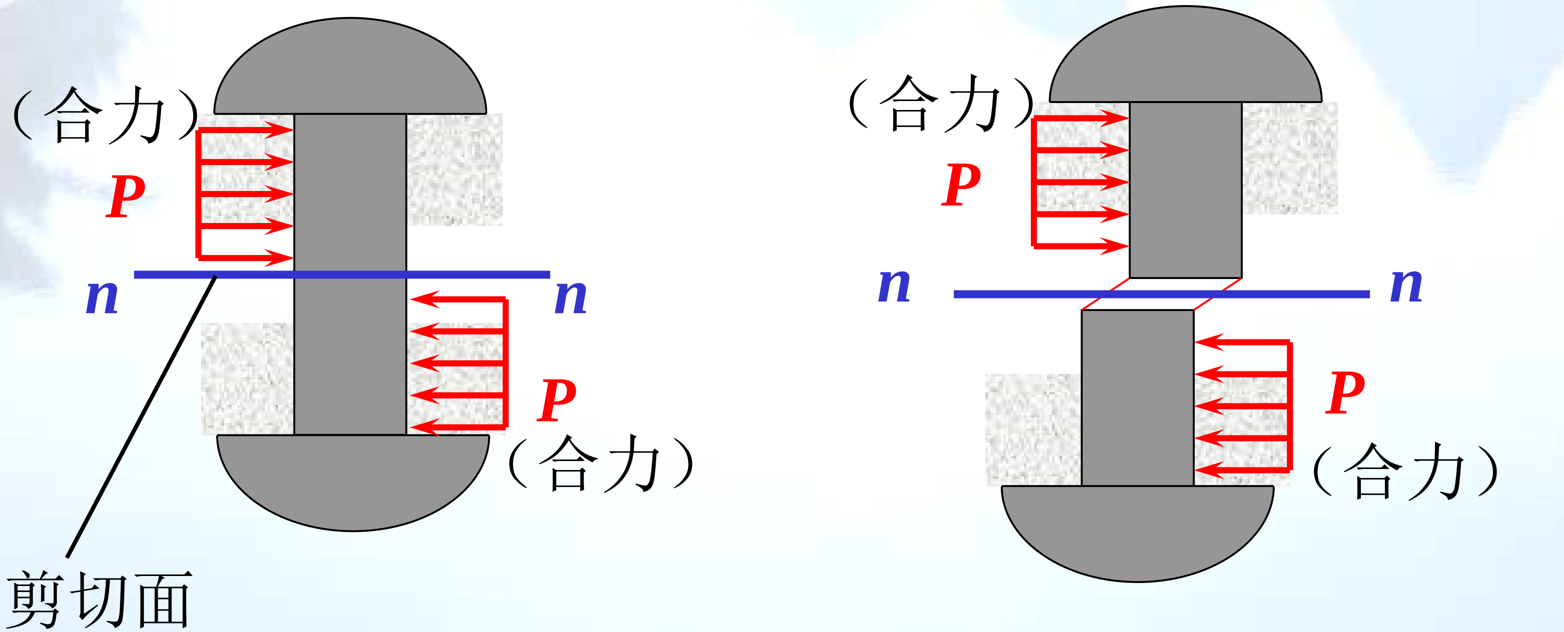


平键



2、受力特点和变形特点：

以铆钉为例：

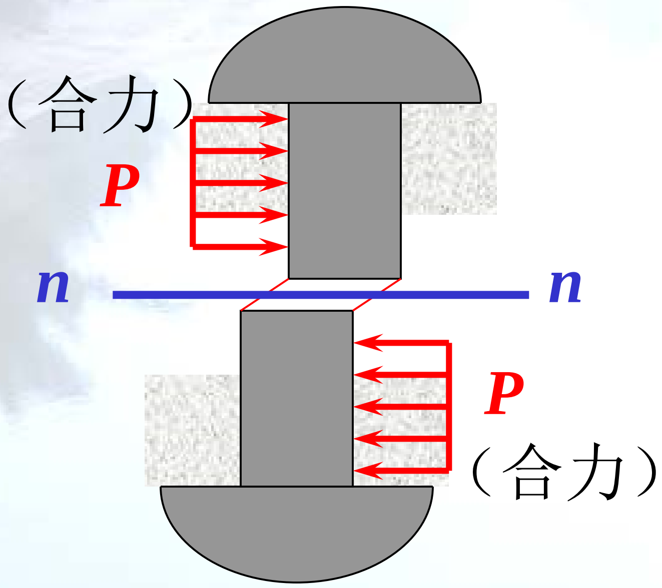


受力特点：

在构件某一截面两侧受两组大小相等、方向相反、作用线相互很近（差一个几何平面）的平行力系作用。

变形特点：

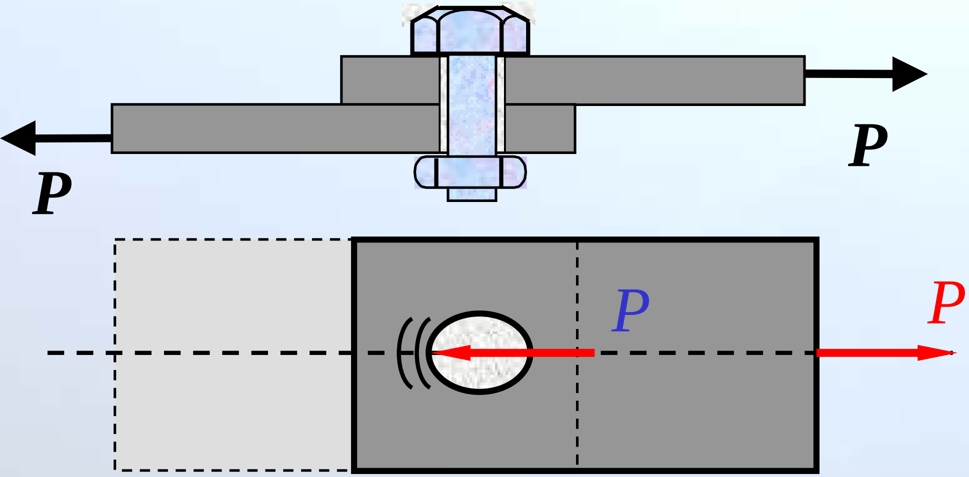
构件的两部分沿这一截面（剪切面）发生相对错动。



3、连接件的破坏形式：

剪切破坏

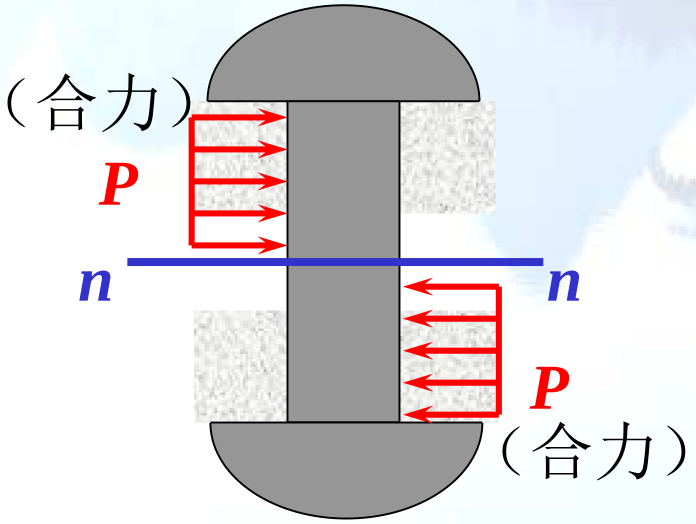
沿铆钉的剪切面剪断，如沿**n– n**面剪断 。



挤压破坏

铆钉与钢板在相互接触面上因挤压而产生挤压变形，孔边被压溃，导致连接松动而失效。

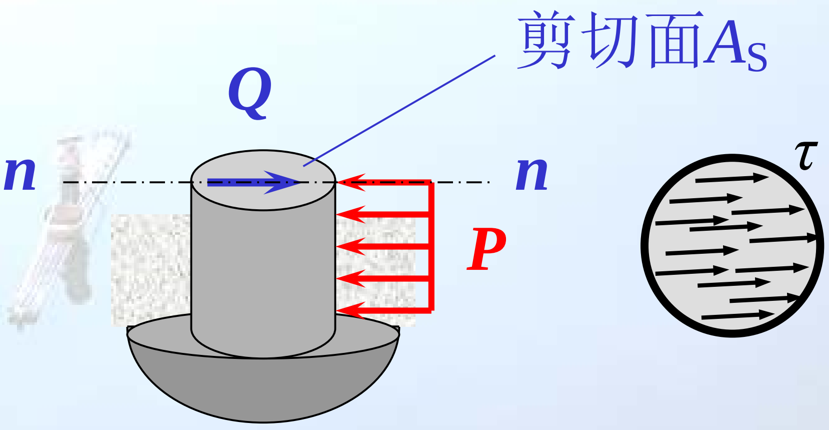
二、剪切的实用计算



剪切面上的内力：

内力 ——— 剪力Q，

实用计算：假设剪应力在整个剪切面上均匀分布。



名义剪应力： $\tau=\dfrac{Q}{A_S}$

剪切强度条件：

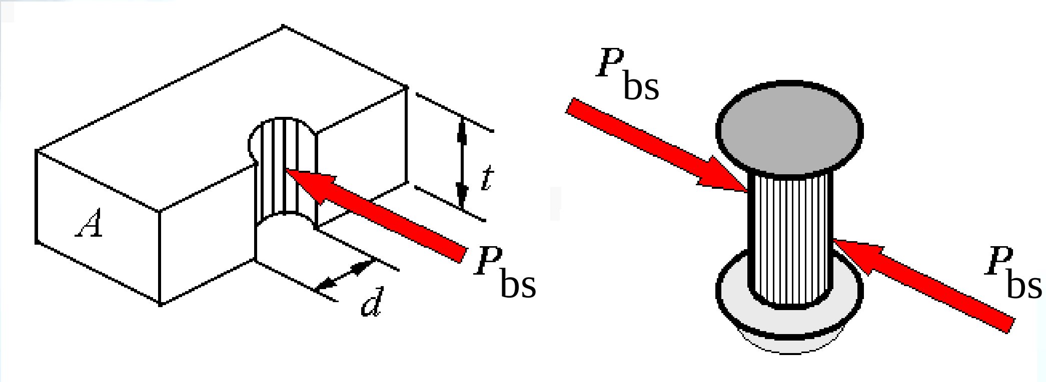
$$\tau=\frac{Q}{A_S}\leq[\tau]$$

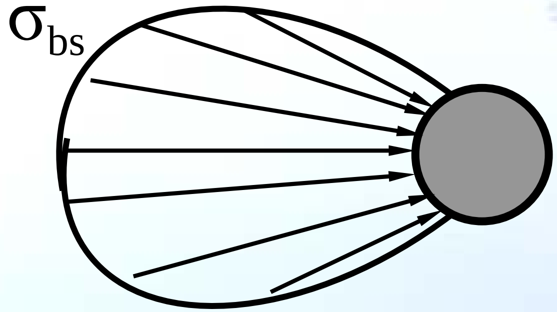
其中 $[\tau]=\dfrac{\tau_u}{n}$

τ_u是通过直接试验，并按名义剪应力公式计算得到剪切破坏时材料的极限剪应力。

三、挤压的实用计算

挤压力P_{bs}： 接触面上的压力。

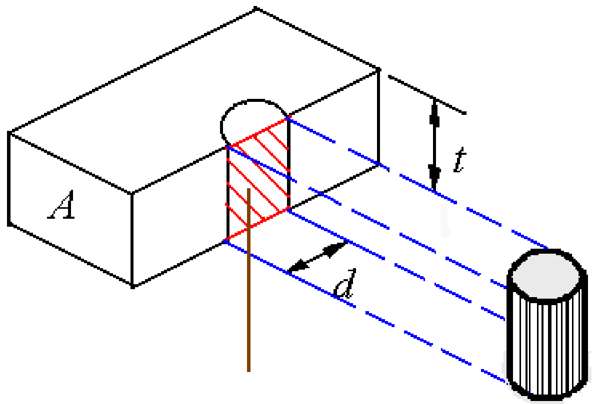




名义挤压应力： $$\sigma_{bs}=\frac{P_{bs}}{A_{bs}}$$

A_{bs}——计算挤压面面积。

计算挤压面面积：接触面在垂直P_{bs}方向上的投影面的面积。



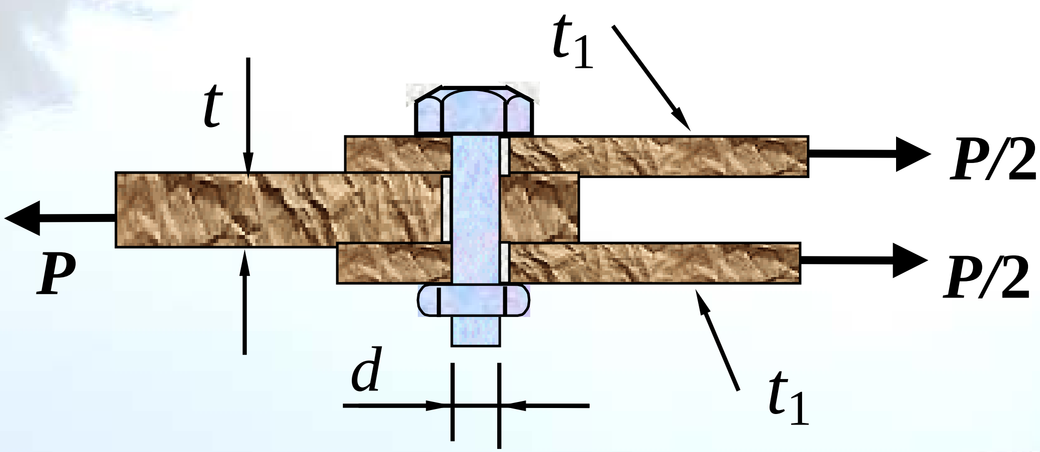
计算挤压面积 $A_{bs}=td$

挤压强度条件：

$$\sigma_{bs}=\frac{P_{bs}}{A_{bs}}\le[\sigma_{bs}]$$

$[\sigma_{bs}]$是通过直接试验，并按名义挤压应力公式计算得到材料的极限挤压应力后，除以安全系数来确定。

[例13] 已知：P=18kN，t=8mm，t_1=5mm，d=15mm，[τ]= 60MPa，许用挤压应力为[σ_{bs}]= 200MPa，试校核螺栓的强度。



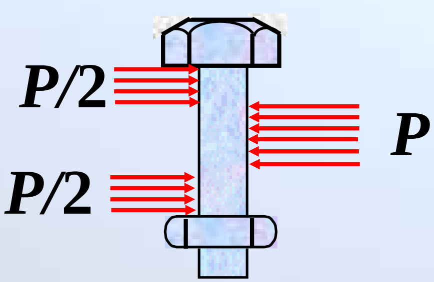
解：1、剪切强度

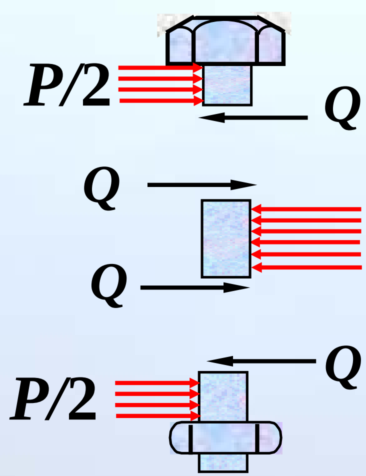
螺栓受双剪

$$Q=\frac{P}{2}=9\text{kN}$$

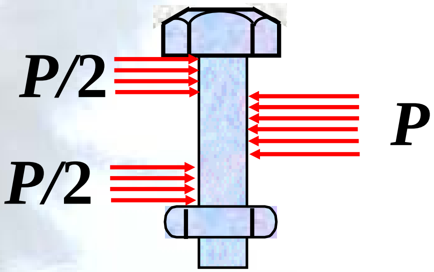
$$\tau=\frac{Q}{A_S}=\frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$=\frac{4\times9\times10^3}{\pi\times15^2}=51\text{MPa}<[\tau]$$





2、挤压强度



计算中间段的挤压强度

$$P_{bs} = P$$

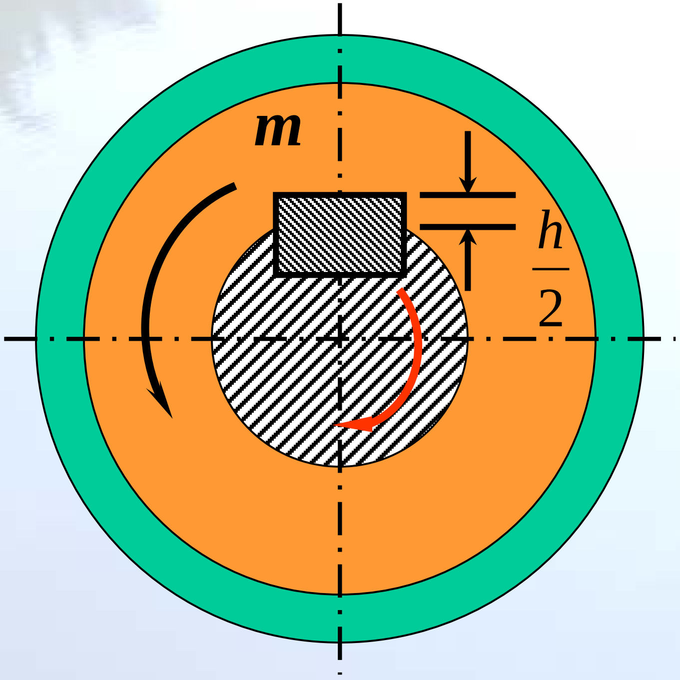
$$A_{bs} = td$$

$$\sigma_{bs} = \frac{P_{bs}}{A_{bs}} = \frac{P}{t \cdot d}$$

$$= \frac{18 \times 10^3}{8 \times 15} = 150\text{MPa} < [\sigma_{bs}]$$

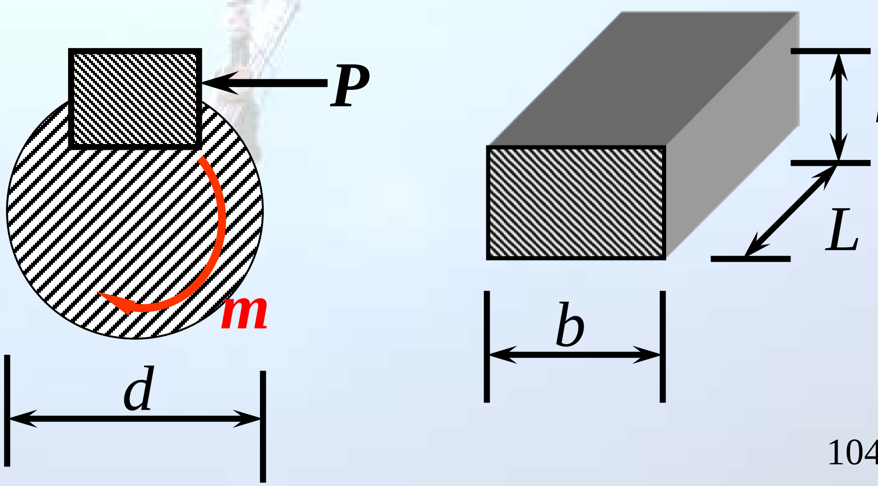
所以螺栓安全。

[例2] 齿轮与轴由平键（$b\times h\times L$=20 ×12 ×100）连接，它传递的扭矩m=2kN·m，轴的直径d=70mm，键的许用剪应力为[τ]=60M Pa，许用挤压应力为$[\sigma_{bs}]$= 100MPa，试校核键的强度。



解：①键的受力分析如图

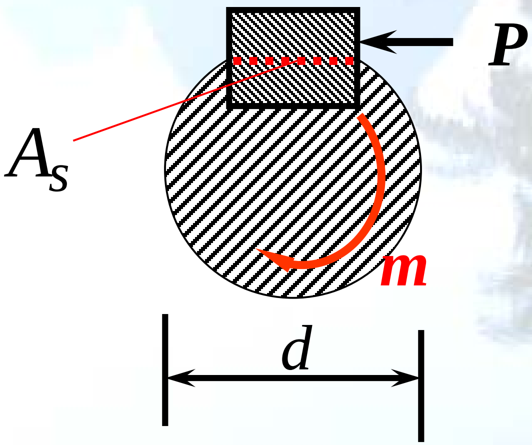
$$P=\frac{2m}{d}=\frac{2\times 2}{0.07}=57\text{kN}$$

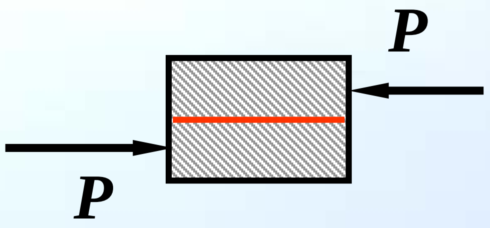


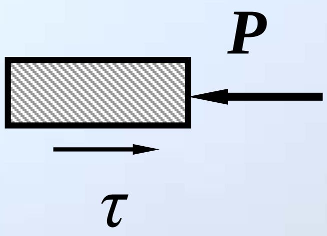
②剪切强度：

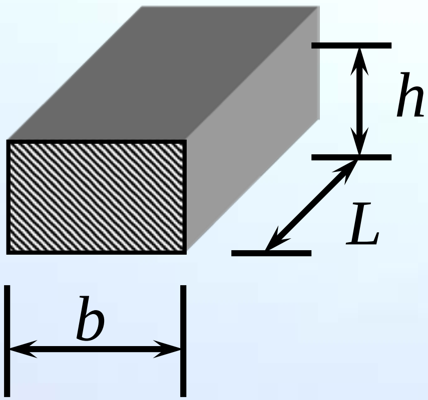
$$Q = P$$

$$\tau = \frac{Q}{A_s} = \frac{P}{bL} = \frac{57\times10^3}{20\times100} = 28.6\text{MPa} \le [\tau]$$





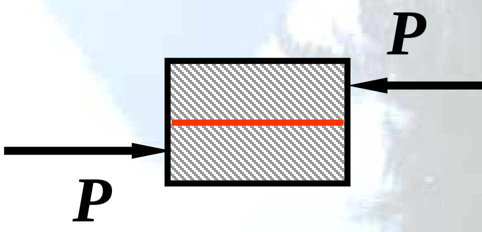


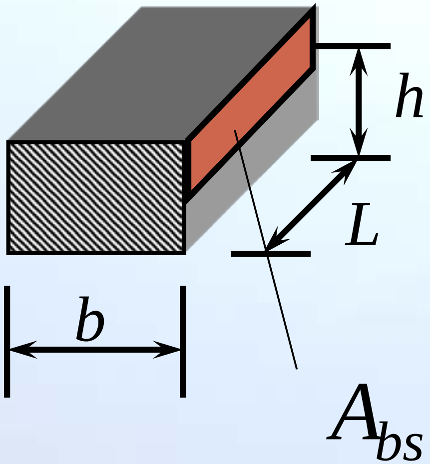


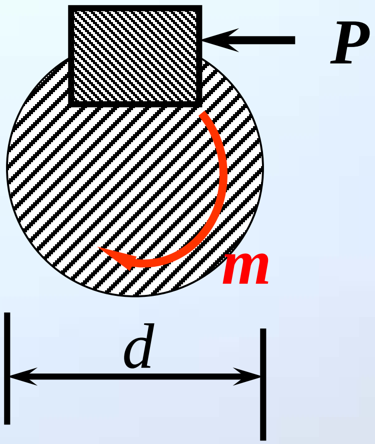
③挤压强度：

$$P_{bs} = P$$

$$\sigma_{bs}=\frac{P_{bs}}{A_{bs}}=\frac{P}{Lh/2}=\frac{57\times10^{3}}{100\times6}=95.3\text{MPa}\le[\sigma_{bs}]$$







综上，键满足强度要求。


NSR
elf
RACING
6