数值分析第一次作业：

1. 计算机求解科学技术问题的过程中每一步都不可避免地产生一定的误差，请简述误差的来源，并指出哪些类型的误差产生在数值计算环节。

2. 什么是算法？算法的理论分析主要在哪些方面？什么是算法的复杂度？

3. 如果对 $f=(2-\sqrt{3})^6$ 作恒等变形为

$$f_1=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^6},\quad f_2=(7-4\sqrt{3})^3,\ f_3=\frac{1}{1351+780\sqrt{3}},\ f_4=(26-15\sqrt{3})^2,$$

然后将 $\sqrt{3}$ 用近似值 1.7 代入各式进行计算，试对各式因替代产生的误差大小进行估计。

4. 设区间 $[a,b]$ 上给定 3 个不同的节点 x_0,x_1,x_2，求证存在唯一的次数不超过 2 次的多项式 $p(x)$，使 $p(x_i)=y_i(i=0,1,2)$。

5. 什么是拉格朗日插值基函数？以各不相同的节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 及各节点处函数值 $f(x_i)=y_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 的拉格朗日插值多项式是多少？余项是多少？

6. 设 $l_i(x)(i=0,1,2,3,4)$ 是以 $x_i(i=0,1,2,3,4)$ 为节点的拉格朗日插值基函数，试求：

（1）$\sum_{i=0}^{4}x_il_i(x)$ ；（2）$\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)l_i(x)$ ；（3）$\sum_{i=0}^{4}x^5l_i(x_i)$ ；（4）$\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)^5l_i(x)$

7. 设 $p(x)$ 是函数 $f(x)$ 的以 $x_i(i=0,1,\cdots,k)$ 为节点的插值多项式，$q(x)$ 是函数 $f(x)$ 的以 $x_i(i=1,\cdots,k,k+1)$ 为节点的插值多项式，$r(x)$ 是函数 $f(x)$ 的以 $x_i(i=0,1,\cdots,k,k+1)$ 为节点的插值多项式，求证：$r(x)=p(x)+\dfrac{x-x_0}{x_{k+1}-x_0}(q(x)-p(x))$.

8. 写出具有 n+1 个节点的牛顿插值公式及余项的表达式。如果有重复节点时，重复节点处的函数的差商与函数的导数有什么关系？

9. 设 $f(x)$ 在 $-1,0,1,2$ 处的函数值分别为 $0,-1,-2,3$，试写出函数的（1）拉格朗日插值多项式；（2）牛顿插值多项式；（3）插值多项式的余项。

10. 设 $f(x)$ 满足 $f(-1)=0,f(0)=-1,f(2)=3,f'(-1)=1,f'(0)=-2,f''(-1)=-6$，试写出函数的埃尔米特(Hermite)插值多项式,求 $f(1)$ 的近似值并写出余项。

11. 已知函数 $f(x)$ 在 n 个节点处满足 $f(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,n)$，试用最小二乘法给出拟合曲线 $y=a+bx+cx^3$ 的正则方程组。

作业解答：

1. 计算机求解科学技术问题的过程中每一步都不可避免地产生一定的误差，请简述误差的来源，并指出哪些类型的误差产生在数值计算环节。

【答】计算机求解科学技术问题，一般要经过建立数学模型，获得初始数据，进行数值计算，解释计算结果等步骤，每一步相应地会产生相应的一些误差。如建立数学模型时不可避免地产生模型误差，获得的初始数据会带有观测误差，数值计算过程会产生截断误差和舍入误差等等。产生在数值计算环节的主要是截断误差和舍入误差。

2. 什么是算法？算法的理论分析主要在哪些方面？什么是算法的复杂度？

【答】简单来说算法就是用来将输入数据转化成输出结果的一系列的计算步骤，。它必须是面向计算机的，并且是有限条的。算法的理论分析主要是指连续问题离散化和离散性方程数值求解，包括误差分析、稳定性、收敛性等，它刻画了算法的可靠性、准确性。算法的复杂度包括计算的时间复杂度和空间复杂度，即同一规模和精度要求下计算时间的长短和计算机内存空间占用的多少，也说是计算量和存储量的分析。

3. 如果对 $f=(2-\sqrt{3})^6$ 作恒等变形为

$$f_1=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^6},\quad f_2=(7-4\sqrt{3})^3,\ f_3=\frac{1}{1351+780\sqrt{3}},\ f_4=(26-15\sqrt{3})^2,$$

然后将 $\sqrt{3}$ 用近似值 1.7 代入各式进行计算，试对各式因替代产生的误差大小进行估计。

【解】由于 $1.7-\sqrt{3}=\delta\approx-0.03$，$\varphi(1.7)-\varphi(\sqrt{3})\approx\varphi'(1.7)\delta$，

（1）取 $\varphi(x)=(2-x)^6$ 时，$\varphi'(x)=-6(2-x)^5,\varphi'(1.7)=-6\times0.3^5=-0.01458$，故 $\sqrt{3}$ 用近似值 1.7 代入 f 进行计算误差 $\varepsilon_f=f(1.7)-f(\sqrt{3})\approx-0.01458\delta=0.0004374$，

相对误差为 $\varepsilon_f^*=\dfrac{-6\times0.3^5\delta}{0.3^6}=0.6=60\%$。

（2）取 $\varphi(x)=\dfrac{1}{(2+x)^6}$ 时，$\varphi'(x)=-6(2+x)^{-7},\varphi'(1.7)=-6\times3.7^{-7}$，故 $\sqrt{3}$ 用近似值 1.7 代入 f_1 进行计算误差 $\varepsilon_{f_1}=f_1(1.7)-f_1(\sqrt{3})=-6\times3.7^{-7}\delta\approx0.00001896$，

相对误差为 $\varepsilon_{f_1}^*=\dfrac{-6\times3.7^{-7}\delta}{3.7^{-6}}\approx\dfrac{0.18}{3.7}\approx4.865\%$。

（3）取 $\varphi(x)=(7-4x)^3$ 时，$\varphi'(x)=-12(7-4x)^2,\varphi'(1.7)=-12\times0.2^2$，故 $\sqrt{3}$ 用近似值 1.7 代入 f_2 进行计算误差 $\varepsilon_{f_2}=f_2(1.7)-f_2(\sqrt{3})=-12\times0.2^2\delta\approx0.0144$，

相对误差为 $\varepsilon_{f_2}^* = \dfrac{-12\times 0.2^2\delta}{0.2^3} = 1.8 = 180\%$ 。

（4）取 $\varphi(x) = \dfrac{1}{1351+780x}$ 时，$\varphi'(x) = \dfrac{-780}{(1351+780x)^2}, \varphi'(1.7) = \dfrac{-780}{2677^2} = -0.0001088$ ，故 $\sqrt{3}$ 用近似值 1.7 代入 f_3 进行计算误差 $\varepsilon_{f_3} = f_3(1.7) - f_3(\sqrt{3}) \approx 3.265\times 10^{-6}$ ，

相对误差为 $\varepsilon_{f_3}^* = \dfrac{-\dfrac{780}{2677^2}\delta}{\dfrac{1}{2677}} = \dfrac{780\times 0.03}{2677} = 0.8741\%$ 。

（5）取 $\varphi(x) = (26-15x)^2$ 时，$\varphi'(x) = -30(26-15x), \varphi'(1.7) = -30\times 0.5 = -15$ ，故 $\sqrt{3}$ 用近似值 1.7 代入 f 进行计算误差 $\varepsilon_f = f_4(1.7) - f_4(\sqrt{3}) = -15\delta = 0.45$ ，

相对误差为 $\varepsilon_{f_4}^* = \dfrac{0.45}{0.5^2} = 1.8 = 180\%$ 。

（注：一般地，相对误差如果过大（超过 20%）时，一般认为结果不可靠，而相对误差较小（小于 5%）时认为结果可靠。近似值可不可靠，常与实际问题所属领域有关。）

4. 设区间 $[a,b]$ 上给定 3 个不同的节点 x_0, x_1, x_2 ，求证存在唯一的次数不超过 2 次的多项式 $p(x)$ ，使 $p(x_i) = y_i (i = 0,1,2)$ 。

【提示】在各个节点处建立方程，得到以二次多项式系数有关的三元一次方程组的系数行列式（范德姆行列式）不为零时方程有唯一解（克莱默法则）来说明存在唯一满足条件的次数不超过 2 次的多项式。

5. 什么是拉格朗日插值基函数？以各不相同的节点 $x_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 及各节点处函数值 $f(x_i) = y_i\ (i = 0,1,\cdots,n)$ 的拉格朗日插值多项式是多少？余项是多少？

【答】当给定节点 $x_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 时，可构造 n+1 个函数 $l_i(x) = \prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \dfrac{x-x_k}{x_i-x_k} (i = 0,1,\cdots,n)$ ，

它们都是 x 的 n 次多项式，满足 $l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$ 。这些函数称为 n+1 个节点的拉格朗日插值基函数。满足条件 $L_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 的 n 次多项式 $L_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式，余项 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 。

6. 设 $l_i(x)(i=0,1,2,3,4)$ 是以 $x_i(i=0,1,2,3,4)$ 为节点的拉格朗日插值基函数，试求：

（1） $\sum_{i=0}^{4} x_i l_i(x)$ ；（2） $\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)l_i(x)$ ；（3） $\sum_{i=0}^{4} x^5 l_i(x_i)$ ；（4） $\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)^5 l_i(x)$

【证】由拉格朗日插值公式， $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$,

（1）令 $f(x)=x$ 可知， $\sum_{i=0}^{4} x_i l_i(x)=x$ ；

（2）令 $f(x)=1$ 可知， $\sum_{i=0}^{4} l_i(x)=1$ ，所以

$\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)l_i(x)=x\sum_{i=0}^{4} l_i(x)-\sum_{i=0}^{4} x_i l_i(x)=x\times 1-x=0$ ；

（3）由于 $l_i(x_i)=1$ ，所以， $\sum_{i=0}^{4} x^5 l_i(x_i)=5x^5$ ；

（4）分别令 $f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^5$ 可得 $\sum_{i=0}^{4} x^k l_i(x_i)=\begin{cases} 1 & k=0 \\ x^k & k=1,2,3,4 \\ x^5-\prod_{i=0}^{4}(x-x_i) & k=5 \end{cases}$

所以，

$$\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)^5 l_i(x)=\sum_{i=0}^{4}(x^5-C_5^1x^4x_i+C_5^2x^3x_i^2-C_5^3x^2x_i^3+C_5^4xx_i^2-x_i^5)l_i(x)$$

$$=x^5\sum_{i=0}^{4} l_i(x)-C_5^1x^4\sum_{i=0}^{4} x_i l_i(x)+C_5^2x^3\sum_{i=0}^{4} x_i^2 l_i(x)-C_5^3x^2\sum_{i=0}^{4} x_i^3 l_i(x)+C_5^4x\sum_{i=0}^{4} x_i^4 l_i(x)-\sum_{i=0}^{4} x_i^5 l_i(x)$$

$$=x^5-C_5^1x^4x+C_5^2x^3x^2-C_5^3x^2x^3+C_5^4xx^4-(x^5-\prod_{i=0}^{4}(x-x_i))$$

$$=\prod_{i=0}^{4}(x-x_i)$$

7. 设 $p(x)$ 是函数 $f(x)$ 的以 $x_i(i=0,1,\cdots,k)$ 为节点的插值多项式，$q(x)$ 是函数 $f(x)$ 的以 $x_i(i=1,\cdots,k,k+1)$ 为节点的插值多项式，$r(x)$ 是函数 $f(x)$ 的以 $x_i(i=0,1,\cdots,k,k+1)$ 为节点的插值多项式，求证：$r(x)=p(x)+\frac{x-x_0}{x_{k+1}-x_0}(q(x)-p(x))$.

【证明】显然，所要证明的等式两边都是 n+1 次多项式，且因

$p(x)$ 满足 $p(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,k)$，

$q(x)$ 满足 $q(x_i)=f(x_i)(i=1,\cdots,k,k+1)$，

$r(x)$ 满足 $r(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,k,k+1)$，

容易验证对于节点 $x_i(i=0,1,\cdots,k,k+1)$ 等式两边都成立，因此它们都是 $f(x)$ 以 $x_i(i=0,1,\cdots,k,k+1)$ 为节点的插值多项式。由插值多项式的唯一性定理可知，等式成立。

8. 写出具有 n+1 个节点的牛顿插值公式及余项的表达式。如果有重复节点时，重复节点处的函数的差商与函数的导数有什么关系？

【答】：具有 n+1 个节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的牛顿插值公式为

$$\begin{aligned}&f(x)\approx N_n(x)\\&=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+\cdots+f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned},$$

余项 $R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f(x_0,x_1,\cdots,x_n.x)\omega(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$，

其中，$\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$。

当有重复节点时，重复节点处的差商使用公式 $f(\underbrace{x,x,\cdots,x}_{n+1个})=\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$。

9. 设 $f(x)$ 在 $-1,0,1,2$ 处的函数值分别为 $0,-1,-2,3$，试写出函数的（1）拉格朗日插值多项式；（2）牛顿插值多项式；（3）插值多项式的余项。

【解】（1）由拉格朗日插值公式：

$$\begin{aligned}&L_3(x)=f(-1)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}+f(0)\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)}\\&+f(1)\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)}+f(2)\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}\\&=-\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}+(x+1)x(x-2)+\frac{(x+1)x(x-1)}{2}\\&=x^3-2x-1\end{aligned}$$

（2）作差商表：

-1	0	-1	0	1
0	-1	-1	3	
1	-2	5		

2	3

代入牛顿插值公式，得

$f(x) \approx N_3(x) = 0-(x+1)+(x+1)x(x-1) = x^3-2x-1$

（3）插值多项式的余项 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)x(x-1)(x-2)$，其中，$\xi$ 介于节点及 x 所界定的范围内。或 $R_3(x)=f(-1,0,1,2,x)(x+1)x(x-1)(x-2)$ 。

10. 设 $f(x)$ 满足 $f(-1)=0, f(0)=-1, f(2)=3, f'(-1)=1, f'(0)=-2, f''(-1)=-6$，试写出函数的埃尔米特(Hermite)插值多项式,求 $f(1)$ 的近似值并写出余项。

【解】由于节点处的条件，-1 是二重节点，0 是一重节点，2 是 0 重节点，可列差商表如下：

-1	0	1	-6/2=-3	1	0	0
-1	0	1	-2	1	0	
-1	0	-1	-1	1		
0	-1	-2	2			
0	-1	2				
2	3					

代入牛顿插值公式得到埃尔米特插值多项式：

$$f(x) \approx H(x) = 0+1(x+1)-3(x+1)^2+1(x+1)^3+0(x+1)^3x+0(x+1)^3x^2$$
$$=(((x+1)-3)(x+1)+1)(x+1) = x^3-2x-1$$

故 $f(1) \approx -2$，

由余项公式知 $R_5(1)=\dfrac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(1+1)^3(1-0)^2(1-2) = -\dfrac{f^{(6)}(\xi)}{90}$，其中 $\xi \in (-1,2)$ 。

11. 已知函数 $f(x)$ 在 n 个节点处满足 $f(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,n)$，试用最小二乘法给出拟合曲线 $y=a+bx+cx^3$ 的正则方程组。

【解】正则方程组为：

$$\begin{cases} an+b\sum_{i=1}^{n}x_i+c\sum_{i=1}^{n}x_i^3=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i^4=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^4+c\sum_{i=1}^{n}x_i^6=\sum_{i=1}^{n}x_i^3y_i \end{cases}$$