基于《概率论与数理统计》（第三版），ISBN：978-7-04-044003-4；该文档不再更新。

本学期概率论与数理统计采用电脑阅卷形式，共15个选择题，6个大计算题。

概率论部分

事件的互斥、对立、独立关系

- 事件的互斥：$A \cap B = \varnothing$，就是 A、B 不能同时发生
- 事件的对立：$\overline{A} = \Omega - A$，就是这两个有且仅有一个发生
- 事件的独立：满足 $P(AB) = P(A)P(B)$ 的两个事件
    - 若A, B 相互独立，那么 $\overline{A}, \overline{B}$ 和 A, B 之间也相互独立
    - 若 $A_1, A_2 \ldots A_n$ 相互独立，则将任意 m 个事件换成对立事件，形成的新的 n 个事件依然相互独立
    - 若 $A_1, A_2 \ldots A_n$ 相互独立，则 n 个事件中至少有 1 个发生的概率为

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)]$$

事件概率的加法、减法、对偶律

- 加法：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- 减法： $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$
- 对偶律：$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

> 概率性质：（1）非负性$P(A) \geq 0$（2）规范性$P(\Omega) = 1$（3）有限可加性

古典概型

古典概型的两个特征：

- 试验的样本空间只有有限个元素
- 试验中每个基本事件发生概率相同

若事件 A 含有 k 个基本事件，样本空间有 n 个基本事件，则

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

> 基本事件两两互斥

【例题】将 n 个球放入 N 个盒子中 (n<N)，设盒子的容量不限，求（1）每个盒子至多一球的概率（2）n 个盒子各放一球的概率

> （1）$P = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n}$ （2）$P = \frac{C_N^n n!}{N^n}$

条件概率

事件 A 在事件 B 的条件下发生的概率为条件概率，记为 $P(A|B)$，有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

化简可以得到乘法公式

$$P(A|B)P(B)=P(AB)$$

全概率公式、Bayes公式

样本空间的划分：设 Ω 为样本空间，B_i 为样本空间的事件，若有：

- $B_iB_j=\varnothing, i\neq j$
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$

则称 B_i 为样本空间的一个划分

全概率公式：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

Bayes公式：

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

> 一般来说：A 为发生的事件，B_i 未发生事件的各个原因

> **使用这两个公式，必须有：$B_1B_2=\varnothing, B_1\cup B_2=\Omega$ 之类的条件**

分布函数的定义、性质

随机变量 *X* 的分布函数为：$F(x)=P(X\leq x)$

具有以下性质：

- 单调不减
- 右连续
- $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

> $P(x_1\leq X\leq x_2)=F(x_2)-F(x_1-0)$

密度函数的定义、性质

对于连续型随机变量 *X*，若有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，则$f(x)$ 为概率密度函数

具有以下性质：

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$
- 若 *f(x)* 连续，则有 $F'(x) = f(x)$

一维常见的随机变量及其分布函数和分布律或密度函数，概率的计算

离散型随机变量

名称及记号	分布律	数学期望	方差	解释
两点分布	$P(x=0)=1-p$ $P(x=1)=p$	p	$p(1-p)$	随机变量只能取0,1两个值
二项分布 X~b(n,p)	$P(x=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	将 E 独立重复n次，事件A出现 k 次概率
泊松分布 X~π(λ)	$P(x=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$	λ	λ	
几何分布 X~G(p)	$P(x=k)=(1-p)^{k-1}p$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	成功的概率为p，求首次成功次数为 k 的概率

> **泊松定理：** $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$（二项分布的泊松近似）

连续性随机变量

名称及记号	密度函数	数学期望	方差	分布函数
均匀分布 X~U(a,b)	$f(x)=1/(b-a), a \leq x \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$F(x)=\frac{(x-a)}{(b-a)}, a \leq x \leq b$
指数分布 X~E(λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$F(x)=1-e^{-\lambda x}, x>0$
正态分布 X~N(μ,σ²)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	-

> 对指数分布：$P(X>x)=e^{-\lambda x}$

> 对正态分布：① 若 X~N(μ,σ²)，则 Y=(X-μ)/σ~N(0,1) ②

一维随机变量函数的分布的计算

> **注意取值范围，这是重难点**

设随机变量 *X* 有概率密度 $f_X(x)$，函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$ 或小于0，则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]|h'(y)|, \alpha < y < \beta$$

- $h(x)$ 为 $g(x)$ 反函数
- $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty)), \beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$ （其实 $\alpha < y < \beta$ 就是 $g(x)$ 值域）

> 这是单调的情况。对于非单调的情况，则需要进行分情况讨论，参考例题为课本P64例3

二维离散型随机变量

- 联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$
  - $F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1$
  - 右连续
  - 对 x,y 单调不减
- 联合分布律 $P(x=i,y=j)=p_{ij},i,j=1,2...$
- 边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$
- 边缘分布率 $p_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$
- 若 X,Y **独立**，有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$
- 在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律 $P(X\le x|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

二维连续型随机变量的密度函数，边缘密度

- 联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$
  - 连续
  - 对 x,y 单调不减
  - 若 f(x,y) 在 (x,y) 处连续，有 $\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$
- 边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv$
- 边缘分布率 $f_X(x)=\int\limits_R f(x,y)dy$
- 若 X,Y **独立**，有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
- 在 $Y=y$ 条件下随机变量 X 的条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dy$,概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=f(x,y)/f_Y(y)$

> 对于独立，还有以下性质：假设 X,Y 独立 ,若 h(x),g(x) 连续，那么 h(X),g(Y) 也独立

二维正态分布（各参数的意义，边缘分布）

$(X,Y)\sim(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$

- ρ 为 X,Y 的相关系数
- 边缘概率密度函数 $f_X=\int_R e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2}/(\sqrt{2\pi}\sigma_1)$ (也是正态分布)

简单的二维随机变量函数的分布

离散型

分布律为：

$$P(Z=z_k)=\sum_{g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij}$$

表示对任何满足 $g(x_i,y_j)=z_k$ 的一切 (x_i,y_j) 的 p_{ij} 求和

特别的，当 **Z=X+Y** 时，有

$$P(Z=z_k)=\sum_i P(X=x_i,Y=z_k-x_i)$$

当 X,Y 独立时，有

$$P(Z=z_k)=\sum_i P(X=x_i)P(Y=z_k-x_i)$$

连续型

分布律为：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\int\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

表示对任何满足 $g(x_i,y_j)=z_k$ 的一切 (x_i,y_j) 的 p_{ij} 求和

特别的，当 **Z=X+Y** 时，有

$$f_Z(z)=\int\limits_R f(x,z-x)dx$$

当 X,Y 独立时，有

$$f_Z(z)=\int\limits_R f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

(上式为**卷积公式**)

> 这里可以引出一个推论：**有限个相互独立的正态分布的线性组合还是正态分布**

随机变量的数字特征

- **数学期望**：$E=\sum\limits_{i=1}^{n} xp_i, E=\int\limits_R xf(x)dx$
    - $E(C)=C$
    - $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$
    - 若 X,Y 相互**独立**，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$
    - 随机变量函数的数学期望 $E[g(X)]=\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)p_i=\int\limits_R g(x)f(x)dx$ (课本上没有证明过程)，对二维的，也有 $E[g(X,Y)]=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}=\int\limits_R\int\limits_R g(x,y)f(x,y)dx$
- **方差**：$D(X)=Var(X)=E[X-E(X)]^2=\sum\limits_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2p_i=\int\limits_R[x-E(X)]f(x)dx$

  - $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$
  - $D(C)=0$
  - $D(aX+Y)=a^2D(X)$
  - $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)+2E([X-E(X)][Y-E(Y)])$
- **协方差**：$cov(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])$
  - cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)
  - cov(aX,bY) = abcov(X,Y)
  - cov(X,Y) = D(X±Y) - [D(X) + D(Y)]
  - 若 X,Y 相互独立，则 cov(X,Y) = 0
- **相关系数** $\rho_{XY}=cov(X,Y)/\sqrt{D(X)D(Y)}$
  - $|\rho_{XY}|\leq 1$

不相关的几个等价条件

> **独立 一定 不相关，不相关 不一定 独立**

切比雪夫不等式

$$P(|X-\mu|\leq\varepsilon)>1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明：

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)=\int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon}f(x)dx\leq\int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{R}(x-\mu)^2f(x)dx=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

大数定律样本矩收敛于相应的总体矩

若随机变量 Xi 的数学期望都存在，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon)=1$ 被称为满足大数定理

- 伯努利大数定理：当 Xi~b(n,p) 时：

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon)=1$$

- 切比雪夫大数定理：

$$\lim_{n\to\infty}P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon)=1$$

- 辛勤大数定理：（独立同分布）

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon)=1$$

中心极限定理

- 独立同分布的随机变量和的标准化当量当 n 足够大时，服从正态分布，即

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$

- 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

$$P(a<X<b) = P(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}})$$
$$\approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

数理统计部分

- t 分布、χ^2 分布、F分布的构造及性质；F分布的分位数性质；
- 估计量的评选标准：无偏性和有效性；
- 参数的矩估计和极大似然估计（离散型和连续型）；
- 参数的区间估计（一个正态总体 μ 和 σ^2，单侧和双侧）
  - μ 已知：$(\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
  - μ 未知：$(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$
- 假设检验的思想，做法（一个正态总体，单侧及双侧）
