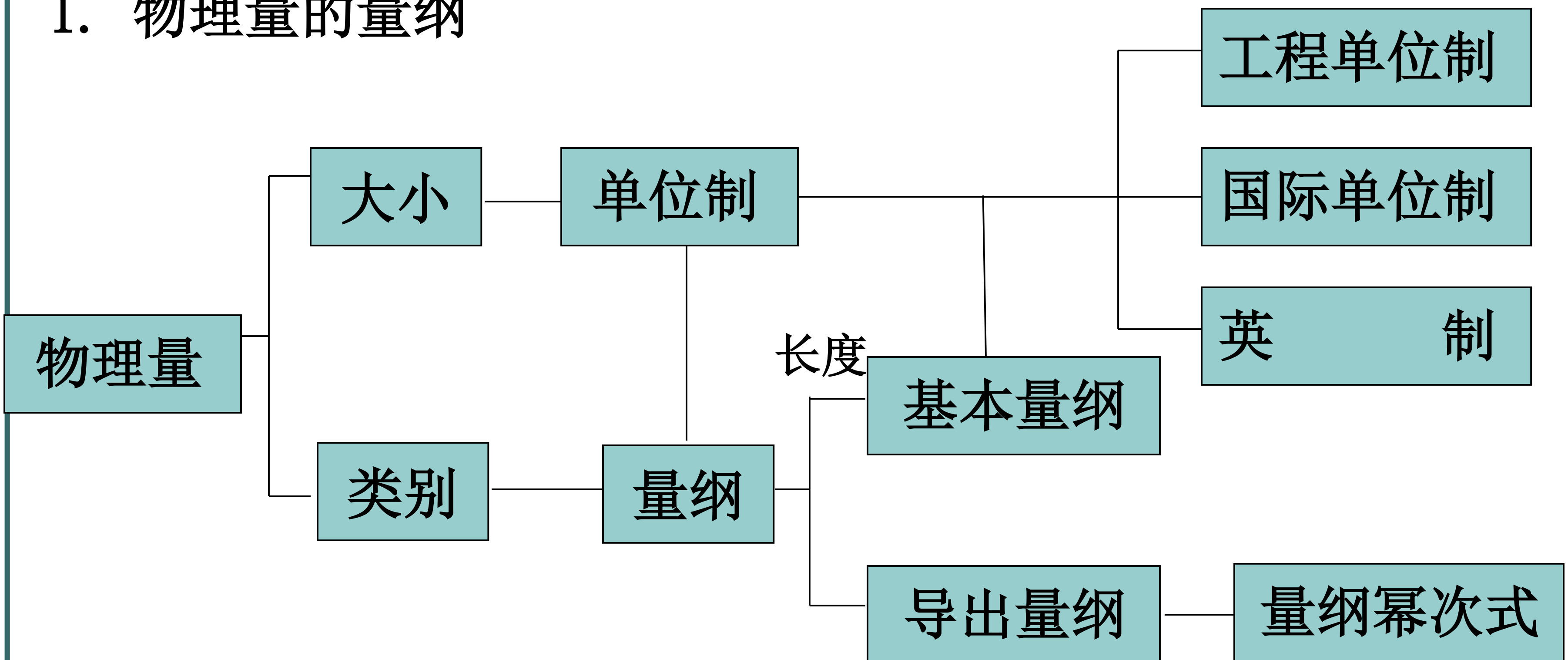
★量纲分析与相似原理-重点掌握：

- 了解物理量的基本量纲和导出量纲，量纲性质.
- 理解相似原理的三个基本定理的内容和意义，理解力学相似的概念；
- 掌握量纲分析方法（瑞利法、π定理）；
- 掌握用力学相似定义推导相似准则；
- 掌握用π定理简化函数关系，用π定理导出相似律
- 相似理论及其应用（相似准则、模型实验设计）

一、量纲与物理方程的量纲齐次性

1. 物理量的量纲



SI制中的基本量纲： $\dim\ m = \mathrm{M}$ ， $\dim l = \mathrm{L}$ ， $\dim t = \mathrm{T}$

（m：质量；l：长度；t：时间）

导出量纲：用基本量纲的幂次表示。

常用量		
速度，加速度	$\dim v = LT^{-1}$	$\dim a = LT^{-2}$
体积流量，质量流量	$\dim Q = L^3T^{-1}$	$\dim \dot{m} = MT^{-1}$
密度，重度	$\dim \rho = ML^{-3}$	$\dim \gamma = ML^{-2}T^{-2}$
力，力矩	$\dim F = MLT^{-2}$	$\dim L = ML^2T^{-2}$
压强，压力，弹性模量	$\dim p = \dim \tau = \dim K = ML^{-1}T^{-2}$	
粘度系数	$\dim \mu = ML^{-1}T^{-1}$	$\dim \nu = L^2T^{-1}$
其他量		
角速度，角加速度	$\dim \omega = T^{-1}$	$\dim \dot{\omega} = T^{-2}$
应变率	$\dim \varepsilon_{xx} = \dim \dot{\gamma} = T^{-1}$	

惯性矩，惯性积	$\dim I_x = \dim I_{xy} = L^4$	
动量，动量矩	$\dim I = MLT^{-1}$	$\dim L = ML^2T^{-1}$
能量，功，热	$\dim E = \dim W = \dim Q = ML^2T^{-2}$	
功率	$\dim P = ML^2T^{-3}$	
表面张力系数	$\dim \sigma = MT^{-2}$	
比热	$\dim c_p = \dim c_v = L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	
导热系数	$\dim k = MLT^{-3}\Theta^{-1}$	
（比）熵	$\dim s = ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$	
（比）焓，内能	$\dim i = \dim e = L^2T\Theta^{-1}$	
注：Θ 为温度量纲		

2. 量纲齐次性原理

同一方程中各项的量纲必须相同。用基本量纲的幂次式表示时，每个基本量纲的幂次应相等，称为量纲齐次性。

$$\frac{v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}= \text{常数} \quad （沿流线）$$

$$\dim\left(\frac{v^2}{2g}\right)=\left(LT^{-1}\right)^2\left(LT^{-2}\right)^{-1}=L$$

$$\dim z \;=L$$

因此，每一个量的量纲，既可以从单位中推导，也可以根据计算公式，从其他物理量进行推导。

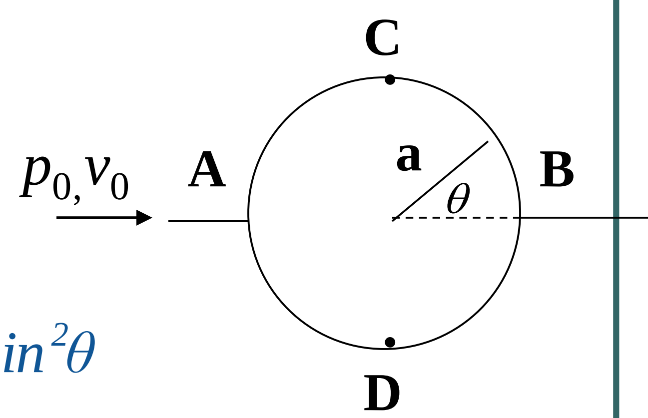
$$\dim\left(\frac{p}{\rho g}\right)=\left(ML^{-1}T^{-2}\right)\left(ML^{-3}\right)^{-1}\left(LT^{-2}\right)^{-1}=L \qquad \dim \text{常数}=L$$

3. 物理方程的无量纲化

忽略重力的伯努利方程 $\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_0$ （沿流线）

无量纲化伯努利方程 $C_p = \dfrac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho\, v_0^2} = 1-(\dfrac{v}{v_0})^2$ （沿流线）

- 在无粘性圆柱绕流中



柱面上： 前后驻点 $v = 0$ ， $C_p = 1$

上下侧点 $v = 2v_0$ ， $C_p = -3$

其他点 $v_\theta = -2v_0 \sin\theta$, $C_p = 1-4\sin^2\theta$

柱面外：流场中 C_p 还与无量纲半径 r/R 有关

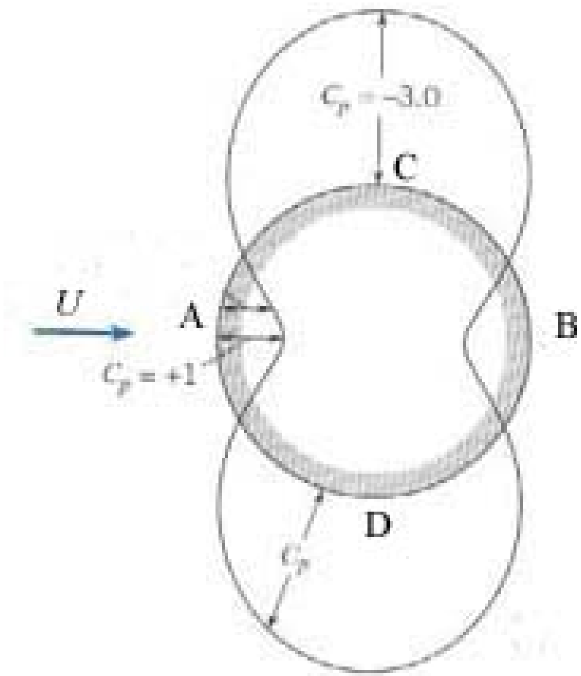
- 以上结果对任何大小的来流速度，任何大小的圆柱都适用。

六、压力场

（二）运动流场中的压强分布

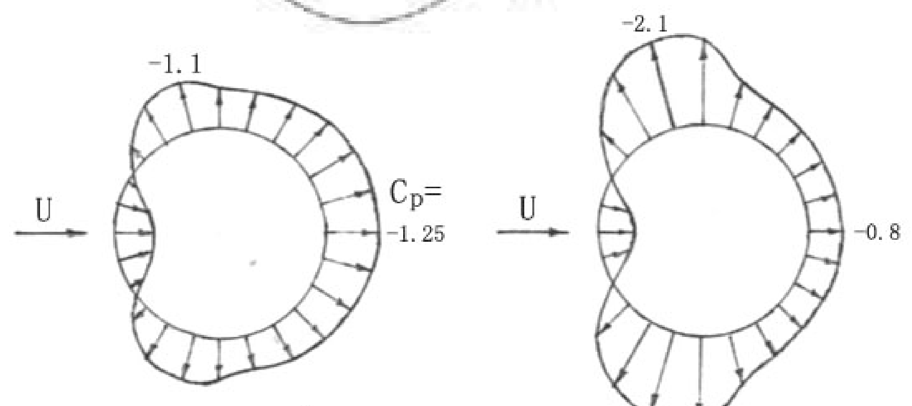
压强系数 $$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho v_0^2}$$

p_0 为参考压强，v_0 为参考速度。



1. 惯性力对压强分布的影响

2. 粘性力对压强分布的影响

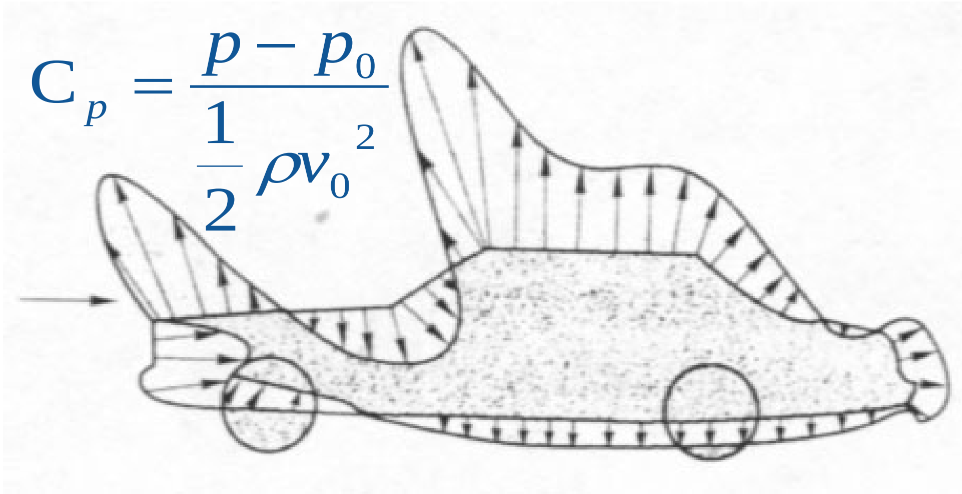


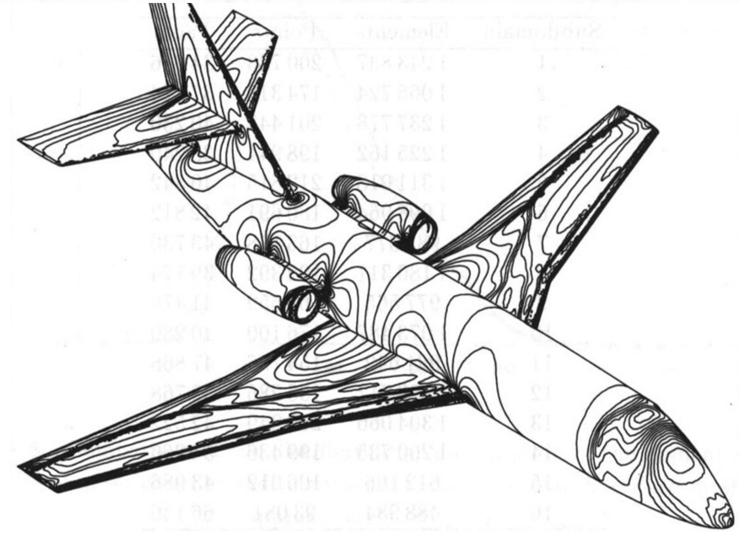
(a) Re=1. 9x10^5 (b) Re=6. 7x10^5

（二）运动流场中的压强分布

压强系数的正负是与参考压强（往往是大气压）相比，绝对值的大小是与来流的动能相比，从图中可以看出，上部形成负压，而且速度越快，实际的升力作用越大，车容易“漂”。同时前端的正压力与后端的负压力形成较大的压差阻力。

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho v_0^{\,2}}$$





- 汽车与飞机绕流：

复杂物面的压强分布

粘性流体动力学的无量纲特征参数的意义

- 粘性流体运动的基本方程是一个复杂的二阶非线性偏微分方程，除少数特殊情况外，一般很难求得这一方程的解析解。为了实用，人们往往根据问题在几何方面、动力学方面以及传热学方面的特征对方程进行简化，目的是略去方程中的次要项，保留主要项，然后对简化了的方程进行求解。

为了保证判断方程中哪些项可以略去，哪些项必须保留，有必要把原有的方程无量纲化，这时在方程中出现一系列无量纲参数，对这些无量纲参数的数量级进行比较，就可以决定方程中各项的取舍。

二、量纲分析与Π定理

量纲分析法主要用于分析物理现象中的未知规律，通过对有关的物理量作量纲幂次分析，将它们组合成无量纲形式的组合量，用无量纲参数之间的关系代替有量纲的物理量之间的关系，揭示物理量之间在量纲上的内在联系，降低变量数目，用于指导理论分析和实验研究。

量纲分析概念

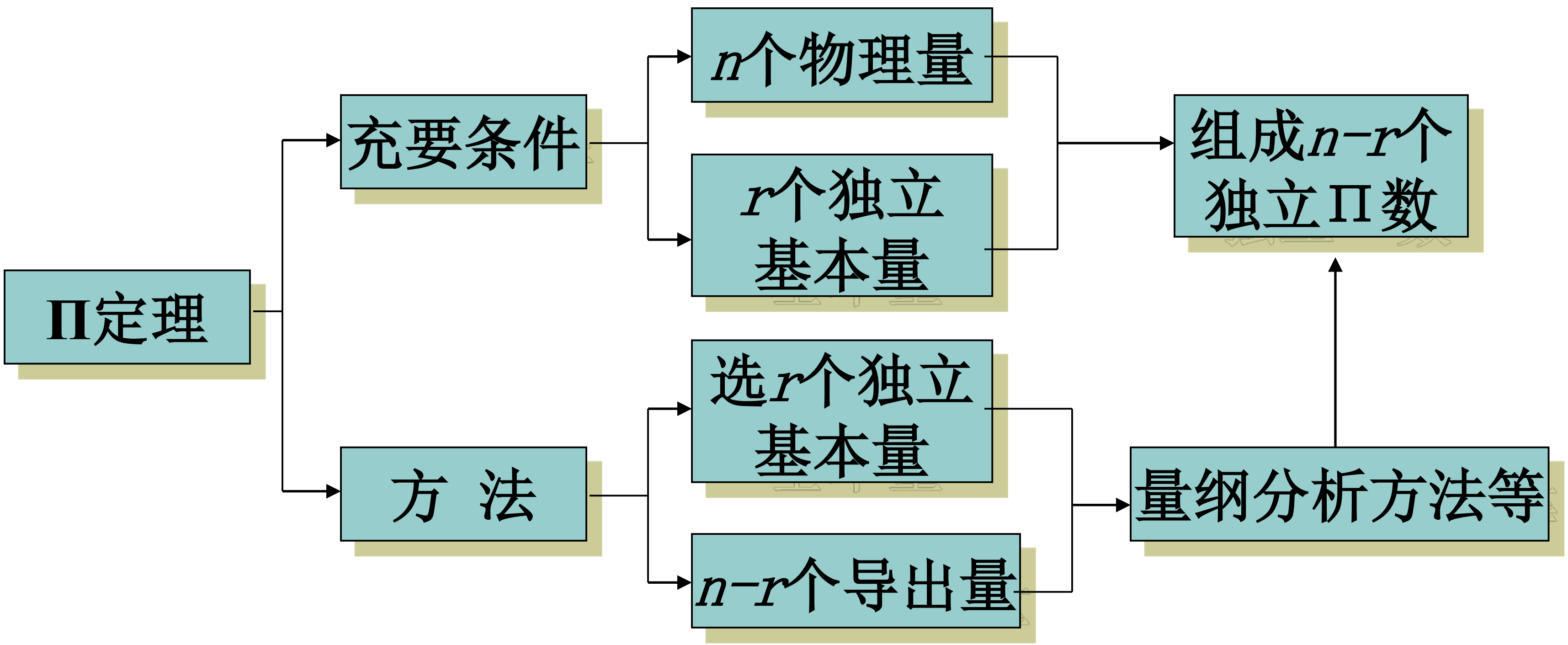
一个方程中多项量纲必须齐次；

一个流动过程中各物理量在量纲上存在相互制约关系，可以按量纲齐次性原理作分析。

类比：角色分析

一、Π定理

提议用量纲分析的是瑞利（L. Reyleigh, 1877），奠定理论基础的是布金汉（E. Buckingham, 1914）：



$$x_1=\varphi(x_2,\ x_3, \ldots\ldots, x_n)$$

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \ldots\ldots, \Pi_{n-r})$$

二、量纲分析法

1. 一般步骤：以圆柱绕流为例

第1步、列举所有相关的物理量。

$$F_D = \phi(\rho, V, d, \mu)$$

阻力　密度　速度　直径　粘度系数

第2步、选择包含不同基本量纲的物理量为基本量纲

选 ρ、V、d等3个

第3步、将其余的物理量作为导出量，即F_D、μ分别与基本量的幂次式组成Π表达式(参见如下例子)。

［例］ 粗糙管中粘性流动的压降：量纲分析一般步骤

经初步分析知道，在不可压缩牛顿粘性流体在内壁粗糙的直圆管定常流动的压降Δp与下列因素有关：管径d、管长l、管壁粗糙度ε、管内流体密度ρ、流体的动力粘度μ，以及断面平均流速v有关。分析压强降低与相关物理量的关系。

解：

1．列举物理量。Δp，V，d，ε，ρ，μ，l，共7个

$$\Delta p = \phi(\rho, V, d, \mu, \varepsilon, l)$$

2．选择基本量：ρ、V、d

3．列Π表达式求解Π数（Π数为无量纲数）

① $\Pi_1 = \rho^a V^b d^c \boldsymbol{\Delta p}$

即 $M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^a (LT^{-1})^b L^c (ML^{-1}T^{-2})$

$$\begin{cases} M: & a+1=0 \\ L: & -3a+b+c-1=0 \\ T: & -b-2=0 \end{cases}$$

解得： a = -1 , b = -2 , c = 0

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = Eu$$

（欧拉数，1/2是人为加上去的）

② $\Pi_2 = \rho^a v^b d^c \mu$

$$M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^a (LT^{-1})^b L^c (ML^{-1}T^{-1})$$

$$\begin{cases} M: & a+1=0 \\ L: & -3a+b+c-1=0 \\ T: & -b-1=0 \end{cases}$$

解得：$a = b = c$ = -1

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V d} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$ （雷诺数）

③ $\Pi_3 = \rho^a V^b d^c \boldsymbol{\varepsilon}$

$$M^0 L^0 T^0 = (M L^{-3})^a (L T^{-1})^b L^c L$$

解得：$a = b = 0$， $c = -1$

$$\Pi_3 = \frac{\varepsilon}{d}$$ （相对粗糙度）

④ $\Pi_4 = \rho^a V^b d^c \mathbf{l}$ （同上）

$$\Pi_4 = \frac{l}{d}$$ （几何比数）

4．列Π数方程

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$$

即

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = f(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{l}{d})$$

或

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda(\frac{l}{d})(\frac{v^2}{2g})$$

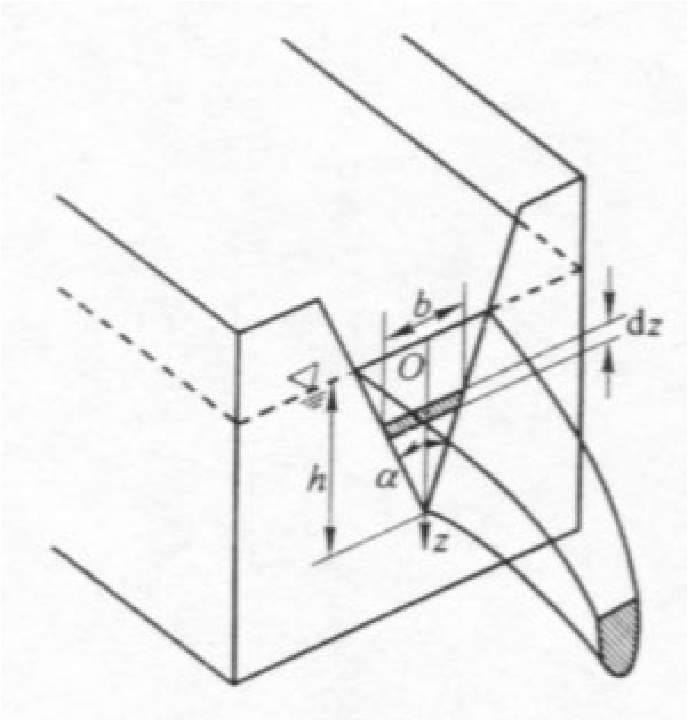
λ= F (ε /d, 1/Re)

这就是达西公式， λ为沿程阻力系数，表示了等直圆管中流动流体的压降与沿程阻力系数、管长、速度水头成正比，与管径成反比。

［*例］　三角堰泄流量：量纲分析解与解析解比较

不可压缩流体在重力作用下，从三角堰中定常泄流，求泄流量的表达式。

解：



1．列举物理量。Q ,ρ，g，h，α 共5个

$$Q=\phi(\rho, g, h, \alpha)$$

2．选择基本量：ρ、g、h

3．列Π表达式求解Π数

① $\Pi_1=\rho^a g^b h^c Q$

$$M^0L^0T^0=(ML^{-3})^a(LT^{-2})^bL^c(L^3T^{-1})$$

$$\begin{cases} M: & a=0 \\ L: & -3a+b+c+3=0 \\ T: & -2b-1=0 \end{cases}$$

解得：$a=0,\ b=-1/2,\ c=-5/2$

$$\Pi_1=\frac{Q}{h^{5/2}g^{1/2}}$$

② $\Pi_2=\alpha$（弧度，无量纲）

4. 列Π数方程 $\Pi_1=f(\Pi_2)$

$$\frac{Q}{h^{5/2}g^{1/2}}=f(\alpha)$$

或 $$Q = f(\alpha)\sqrt{g}h^{5/2} \qquad (c)$$

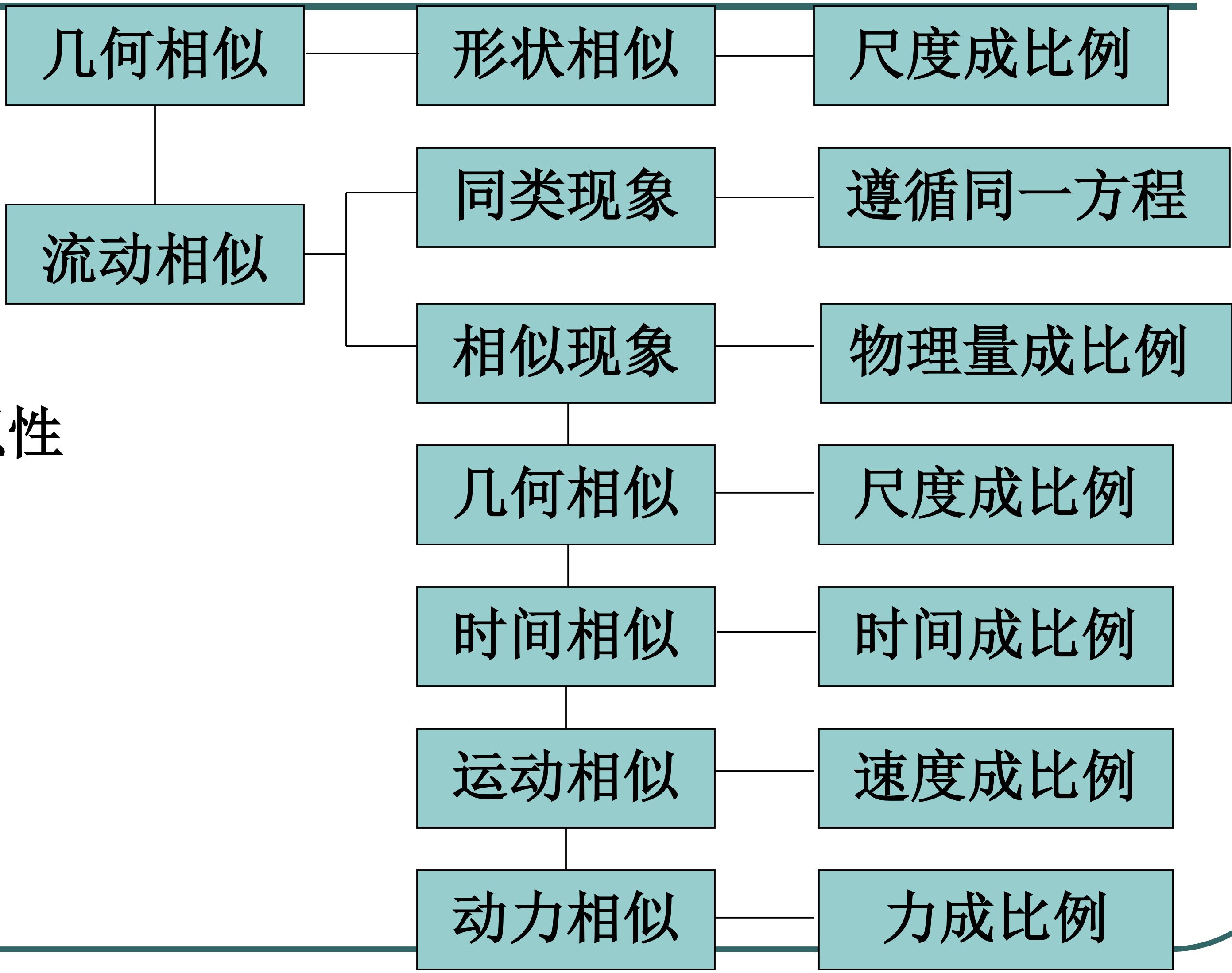
讨论：①结果表明Q与ρ无关，与h成5/2次方关系。与解析式一致，解析式为

$$Q = \frac{8}{15}\sqrt{2g}\,f(\alpha)h^{5/2}$$

$f(\alpha)$ 由实验确定

②对一孔口角已确定的三角堰，(c)式已明确地表达了Q与h的理论关系，在这里量纲分析结果与解析解起同样的作用。

三、流动相似与相似准则

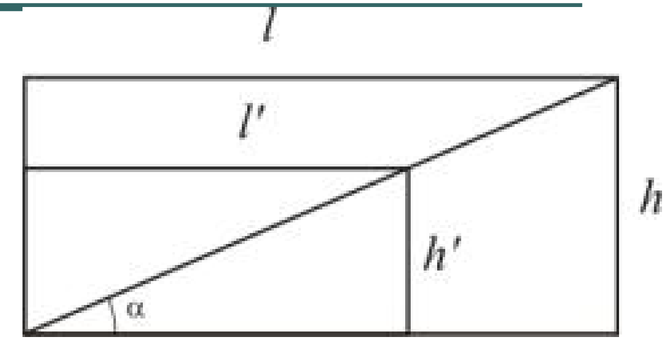


1　流动相似性

2　相似准则

1.　矩形相似

$$\frac{l}{l'}=\frac{h}{h'}=k_l \quad \Longrightarrow \quad \frac{l}{h}=\frac{l'}{h'}=l^*$$



l^* 称为相似准则数或无量纲边长。

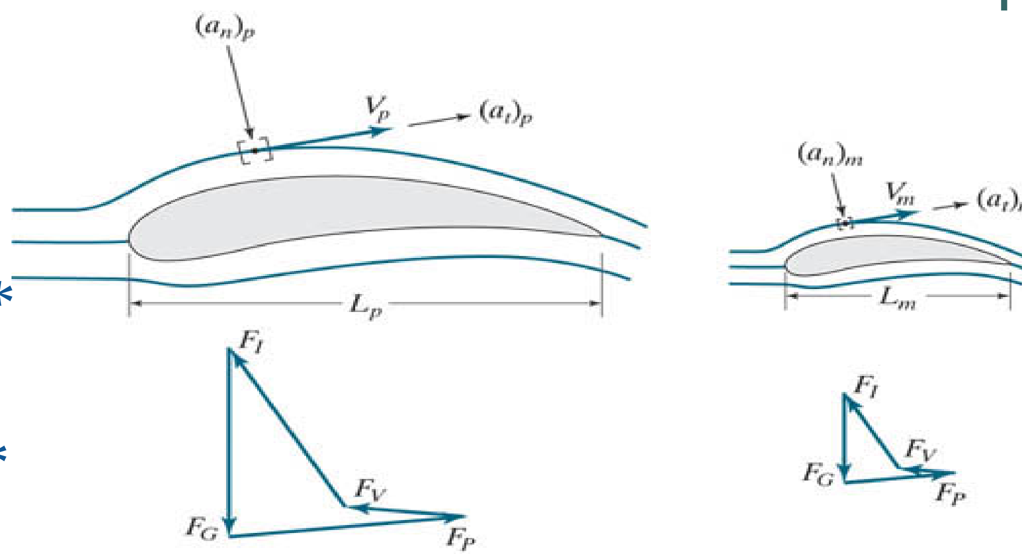
2.　流动相似

①几何相似准则数：$\dfrac{l}{b}=l^*$

② 运动相似准则数：$\dfrac{v}{U}=v^*$

③ 动力相似准则数：$\dfrac{F}{F_i}=F^*$

（F_i为惯性力）



(a) Prototype　　(b) Model

四、相似准则数的确定

1. 量纲分析法

对不可压缩粘性流体的流动：ρ，V，l，μ，g，Δp，ω

$$\Pi_1=\frac{\rho Vl}{\mu}=\mathrm{Re}$$ 雷诺数

$$\Pi_2=\frac{V^2}{lg}=Fr^2$$ 佛鲁德数

$$\Pi_3=\frac{\Delta p}{\rho V^2}=Eu$$ 欧拉数

$$\Pi_4=\frac{\omega l}{V}=St$$ 斯特哈尔数

优点：适用未知物理方程的流动。

缺点：选准物理量较难，物理意义不明确。

2. 方程分析法

以N-S 方程 x 方向的投影式为例

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

令 $u_x^*=\frac{u_x}{V},u_y^*=\frac{u_y}{V},u_z^*=\frac{u_z}{V},x^*=\frac{x}{l},y^*=\frac{y}{l},z^*=\frac{z}{l},\ f_x^*=\frac{f_x}{g},p^*=\frac{p}{p_0},t^*=t\omega$

代入 上式得

$$\frac{l\omega}{V}\frac{\partial u_x^*}{\partial t^*}+u_x^*\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*}+u_y^*\frac{\partial u_x^*}{\partial y^*}+u_z^*\frac{\partial u_x^*}{\partial z^*}=\left(\frac{lg}{V^2}\right)f_x^*-\left(\frac{p_0}{\rho V^2}\right)\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\left(\frac{\mu}{\rho Vl}\right)\left(\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial z^{*2}}\right)$$

$$Sr=\frac{\omega l}{V}=\frac{\text{不定常惯性力}}{\text{迁移惯性力}}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho Vl}{\mu}=\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

$$Fr^2=\frac{V^2}{lg}=\frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$$

$$Eu=\frac{p_0}{\rho V^2}=\frac{\text{压力}}{\text{惯性力}}$$

2. 方程分析法

优点：导出的相似准则数物理意义明确；无量纲方程既适用于模型也适用于原型。

缺点：不能用于未知物理方程的流动。

3. 物理法则分析法

根据物理法则或物理定律用特征物理量表示各种力的量级，用这些力的量级比值构成相似准则数。

与流体微元尺度相应的特征物理量 l

与流体微元速度相应的特征速度 V

与流体微元质量相应的特征质量 ρl^3

与流体微元粘性相应的粘度系数 μ

与流体微元压强相应的压强差 Δp

与流体微元不定常运动相应的特征角速度 $\omega\left(1/s\right)$

迁移惯性力 $F_I = (\delta m) v \dfrac{\partial v}{\partial s} \propto \rho l^3 V^2 / l = \rho V^2 l^2$

粘性力 $F_v = \mu \dfrac{dv}{dn} \delta A \propto \mu V l^2 / l = \mu V l$

重力 $F_g = (\delta m) g \propto \rho l^3 g$

$$\mathrm{Re} = \rho V / \mu$$

$$\mathrm{Fr}^2 = V^2 / lg$$

迁移惯性力 $F_I \propto \rho V^2 l^2$

压差力 $F_p = \Delta p \delta A \propto \Delta p l^2$

不定常惯性力 $F_{It} = (\delta m) \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} \propto \rho l^2 v \omega$

$$\mathrm{Eu} = \Delta p / \rho v^2$$

$$\mathrm{Sr} = l\omega / v$$

优点：导出的相似准则数物理意义明确；
适用于未知物理方程的流动。

缺点：当无法判定控制流动的物理定律时不能运用。

五、常用的相似准则数

1. Re 数（雷诺数）

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho Vl}{\mu}=\frac{惯性力}{粘性力}$$

	V	l
圆管流动	平均流速	管直径
钝体绕流	来流速度	截面宽度
平板边界层	外流速度	距前缘距离

$\mathrm{Re}<<1$ 低雷诺数粘性流动

$\mathrm{R}_{er}=2300$ 区分粘性流动层流与湍流态

$\mathrm{Re}>>1$

- 边界层外无粘流
- 边界层内以 $\mathrm{R}_{er}=50\times10^5$ 为界区分层流与湍流态

有压管流、射流、绕流、流体机械中的流动

粘性力相似

2. Fr 数(弗劳德数)

重力相似

$$\mathrm{Fr}=\frac{V}{\sqrt{gr}} \qquad Fr^2=\frac{V^2}{lg}=\frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$$

	V	l
水面船舶	船舶速度	船长
明渠流	平均流速	水深

Fr 数表示迁移惯性力和重力之比，反映重力对流动影响的相对重要性，是描述具有自由液面的液体流动时最重要的无量纲参数。如水面船舶的运动和明渠流中的水流。

3. Eu 数(欧拉数)

$$\mathrm{Eu}=\frac{p}{\rho V^2}=\frac{\textit{压差力}}{\textit{惯性迁移力}}$$

压力相似

p 可以是某一点的特征压强，也可以是两点的压强差；V 为特征速度，ρ为流体密度。**Eu**数表示压力差和迁移惯性力之比，反映压力对流动影响的相对重要性。

在描述压强差时，Eu数常称为压强系数

$$C_p=\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

当在液体流动中局部压强低于当地蒸汽压强 p_v 时，Eu 数又称为空泡数或空蚀系数

$$\sigma=\frac{p-p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

非定常力相似

4． *Sr*数（斯劳哈尔数）

$$Sr=\frac{l\omega}{V}=\frac{局部迁移惯性力}{迁移惯性力}$$

l 为特征长度，V 为特征速度，ω 为脉动圆频率。**Sr**数表示局部迁移惯性力和迁移惯性力之比，反映非定常流动因素的相对重要性。

*Wo*数（沃默斯利数）

$$Wo=l\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}=\sqrt{\frac{不定常惯性力}{粘性力}}$$

ν 为流体的运动粘度系数，*Wo* 数也称为频率参数表示不定常惯性力与粘性力之量级比,用于描述粘性流体脉动流特征。

弹性力相似

5．*Ma*数（马赫数）

$$We=\frac{V}{c}=\frac{\text{迁移惯性力}}{\text{弹性力}}$$

V 为特征速度，c 为当地声速。

*Ma*数表示迁移惯性力和弹性力之比，反映压缩性对流体流动的相对影响程度。用于研究可压缩流动、高速 气体流动。

6．*We* 数（韦伯数）

$$We=\frac{\rho V^2 l}{\sigma}=\frac{\text{惯性力}}{\text{表面张力}}$$

σ为液体的表面张力系数。

表面张力相似

***We*数表示惯性力与表面张力之比，研究气液，液液及液固交界面上的表面张力作用。**

7. *Ne* 数（牛顿数）

$$Ne = \frac{F}{\rho V^2 l^2} = \frac{外力}{惯性力}$$

F 为外力，*Ne* 数表示外力与流体惯性力之量级比，用于描述运动物体在流体中产生的阻力、升力、力矩和（动力机械的）功率等等影响。分别称为

阻力系数 $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 l^2}$　　升力系数 $C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 l^2}$

力矩系数 $C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 l^3}$　　动力系数 $C_P = \frac{P}{\rho V^3 l^2} = \frac{P}{\rho D^5 n^3}$

（*D* 为动力机械旋转部件的直径，*n* 为转速。）

但是，要做到**流动完全相似是很难办到**（甚至是根本办不到）的。比如，对于粘性不可压缩流体定常流动，尽管只有两个定性准则，即 Re 和 Fr（ $Eu = f(\mathrm{Re}, Fr)$——**非定性准则**），但是要想同时满足 $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}', Fr = Fr'$，常常也是非常困难的。因为：

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}', \quad \frac{vl}{\nu} = \frac{v'l'}{\nu'} \quad 或 \quad \frac{v'}{v} = \frac{l}{l'}\frac{\nu'}{\nu} \Rightarrow C_{v1} = \frac{C_\nu}{C_l}$$

$$Fr = Fr', \quad \frac{v^2}{gl} = \frac{v'^2}{g'l'} \quad 或 \quad C_{v2}^2 = C_l C_g \Rightarrow C_{v2} = \sqrt{C_l C_g}$$

在重力场中做试验， $g = g'$ 即 $C_g = 1$

则有：

$$C_{v1} = C_\nu \cdot C_l^{-1}, \qquad C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

当选用相同的流动介质，即$\nu' = \nu$，$C_\nu = 1$

$$C_{v1} = C_l^{-1},\quad C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

若取$C_l = \frac{l'}{l} = \frac{1}{10}$时，$C_{v1} = \frac{v'}{v} = 10$，$C_{v2} = \frac{v'}{v} = \frac{1}{3.16}$ 这就使得二者发生矛盾，故**不能选用同种介质**。

当令$C_{v1} = C_{v2}$时，则有：$C_\nu = C_l^{\frac{3}{2}}$

取 $C_l = \frac{1}{10}$时，$C_\nu = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{31.6}$，这个比例也是很难办到的，如选用 20℃的水气比拟，$\nu_{气} = 15\times10^{-6}(m^2/s)$，$\nu_{水} = 1\times10^{-6}(m^2/s)$，于是$C_\nu = \frac{1}{15}$，也根本达不到要求。不过，若没有其它办法时，此方法有时也可采用。如降低水的运动粘度，即对模型中的流动介质加温。若取 60℃的水作模型中流动介质，可有$\nu' = 0.477\times10^{-6}(m^2/s)$，则 $C_\nu = \frac{0.477}{15} = \frac{1}{31.5}$可**近似地满足要求**。

六、模型实验与相似原理

1. What模型实验？

模型实验通常指用简化的可控制的方法再现实际发生的物理现象的实验。实际发生的现象被称为原型现象，模型实验的侧重点是再现流动现象的物理本质；只有保证模型实验和原型中流动现象的物理本质相同，模型实验才是有价值的。

2．Why模型实验？

- 科学研究和生产设计需要做模型实验；
- 并不是所有的流动现象都需要做模型实验。做理论分析或数值模拟的流动现象都不必模拟实验。
- 并不是所有的流动现象都能做模型实验。只有对其流动现象有充分的认识，并了解支配其现象的主要物理法则，但还不能对其作理论分析或数值模拟的原型最适合做模型实验。

原型现象的Π数方程： $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \ldots\ldots\Pi_n)$

模型现象的Π数方程： $\Pi_{1m} = f(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, \ldots\ldots\Pi_{nm})$

相似条件： $\Pi_{2m}=\Pi_2$， $\Pi_{3m}=\Pi_3$， ……， $\Pi_{nm}=\Pi_n$

相似结果： $\Pi_1=\Pi_{1m}$

由支配流动现象的主要物理法则导出的相似准则数，称为主相似准则数，或简称为主Π数。

相似理论和实践经验表明：在几何相似的条件下，保证模型和原型现象中的主Π数相等，就能保证模型和原型现象相似，并使除主Π数外的其他相关Π数也相等。

2．关于主Π数

若要保证2个主Π数均相等，如

由Fr数相等 $$\frac{V_m}{V}=\sqrt{\frac{l_m}{l}}=\sqrt{k}$$

由Re数相等 $$\frac{V_m}{V}=\frac{\nu_m}{\nu}\frac{l}{l_m}=\frac{\nu_m}{\nu}\frac{1}{k}$$

为保证两主Π数同时相等，应有 $$\frac{\nu_m}{\nu}=k\frac{V_m}{V}=k^{3/2}$$

设$k = 0.1$，$\nu = 0.1\ cm^2/s$，应有$\nu_m = = 0.00032\ cm^2/s$。

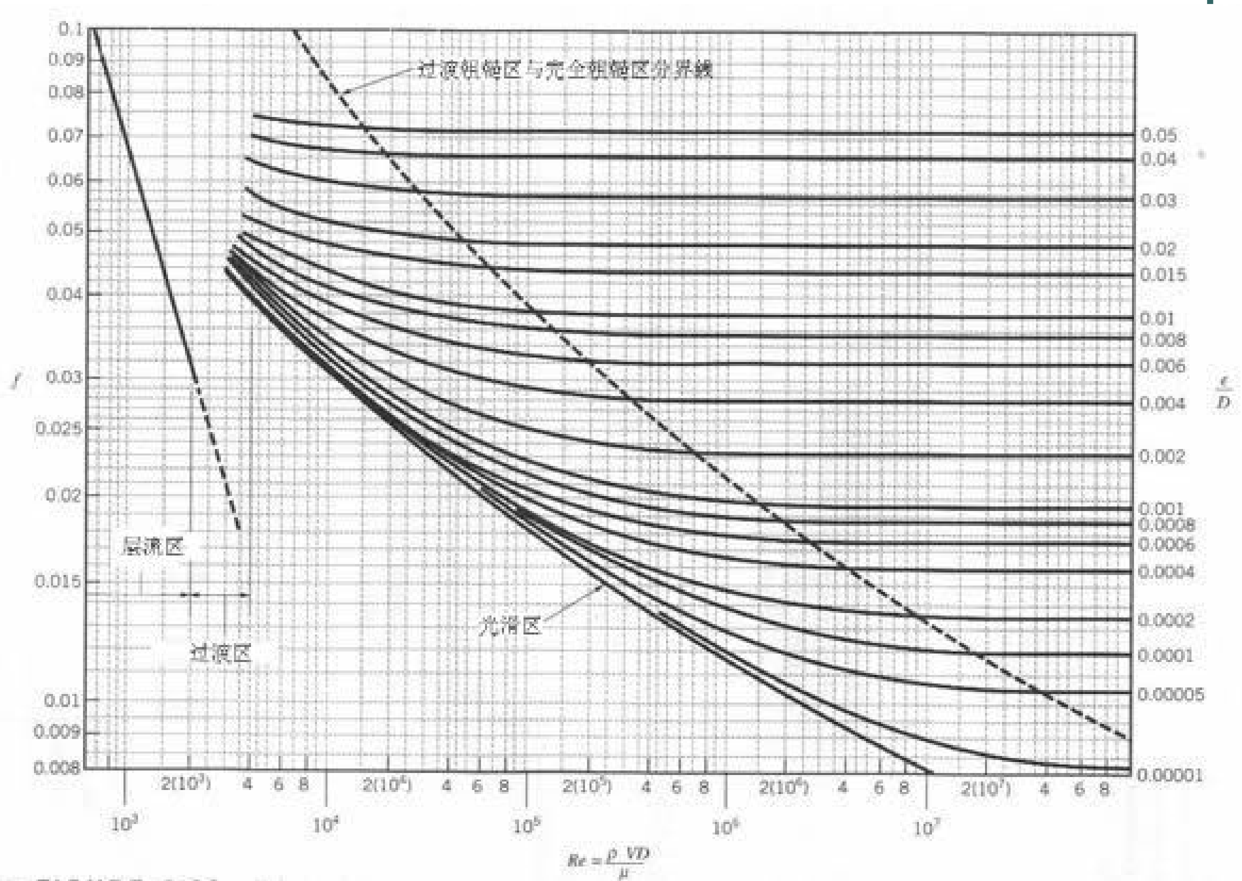
无法找到运动粘度系数如此低的实验流体来实现完全相似。

造船业上的惯常方法是：保证F数为主Π数 作模型实验，然后根据经验对粘性阻力影响作修正处理，称为近似相似。

3. 自模性

从穆迪图上可看到，当Re 数达到足够大后，管道流动进入完全粗糙区时，阻力系数保持常数，与Re无关，而仅与粗糙度有关。这种与主Π数无关的流动称为自模性。

穆迪利用自模性引入商用管道等效粗糙度概念。



例1　有一轿车，高h=1.5m，在公路上行驶，设计时速v=108km/h，拟通过风洞中模型实验来确定此轿车在公路上以此速行驶时的空气阻力。已知该风洞系低速全尺寸风洞($k_l=2/3$)，并假定风洞试验段内气流温度与轿车在公路上行驶时的温度相同，试求：风洞实验时，风洞实验段内的气流速度应安排多大？

解：首先根据流动性质确定决定性相似准数，这里选取Re作为决定性相似准数，$Re_m=Re_p$，即$k_v k_l/k_\nu=1$，

再根据决定型相似准数相等，确定几个比例系数的相互约束

关系，这里$k_\nu=1$，所以 $k_v=k_l^{-1}$，由于$k_l=l_m/l_p=2/3$，

那么 ，　　　　$k_v=v_m/v_p=1/k_l=3/2$

最后得到风洞实验段内的气流速度应该是

$$v_m=v_p k_v=108\times 3/2=162km/h=45m/s$$

例2　在例1中，通过风洞模型实验，获得模型轿车在风洞实验段中的风速为45m/s时，空气阻力为1000N，问：此轿车以108km/h的速度在公路上行驶时，所受的空气阻力有多大?

解：在设计模型时，定下

$k_\nu=1$　　$k_l=2/3$　　$k_v=3/2$

在相同的流体和相同的温度时，流体密度比例系数$k_\rho=1$，那么力比例系数

$$k_F=k_\rho k_l^2 k_v^2=1\times(2/3)^2\times(3/2)^2=1$$

因此，该轿车在公路上以108km/h的速度行驶所遇到的空气阻力

$$F_p=F_m/k_F=1000/1=1000\text{N}$$

[例3]　已知管流的特征流速V_c与流体的密度ρ，动力粘度μ和管径d有关，试用瑞利量纲分析法建立V_c的公式结构.

[解]　假定 $V_c = k\rho^{\alpha} \cdot \mu^{\beta} \cdot d^{\gamma}$

式中k为无量纲常数。其中，各物理量的量纲为：

$$\dim V_c = LT^{-1}, \dim \rho = ML^{-3}, \dim \mu = ML^{-1}T^{-1}, \dim d = L$$

代入指数方程，则得相应的量纲方程 $LT^{-1} = (ML^{-3})^{\alpha} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^{\beta} \cdot L^{\gamma}$

根据量纲齐次性原理，有

$$M: 0 = \alpha + \beta$$
$$L: 1 = -3\alpha - \beta + \gamma$$
$$T: -1 = -\beta$$

解上述三元一次方程组得：$\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1$

故得：　$V_c = k\dfrac{\mu}{\rho d}$

其中常数k需由实验确定.

[例4]　实验发现，球形物体在粘性流体中运动所受阻力F_D与球体直径d、球体运动速度V、流体的密度ρ和动力粘度μ有关，试用π定理量纲分析法建立F_D的公式结构.

[解]　假定 $f_1(\rho, F_D, V, d, \mu) = 0$

选基本物理量ρ、V、d，根据π定理，上式可变为 $\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0$

其中 $\pi_1 = \rho^{\alpha_1} \cdot V^{\beta_1} \cdot d^{\gamma_1} \cdot F_D, \pi_2 = \rho^{\alpha_2} \cdot V^{\beta_2} \cdot d^{\gamma_2} \cdot \mu$

对π_1： $M^0L^0T^0 = (ML^{-3})^{\alpha_1} \cdot (LT^{-1})^{\beta_1} \cdot L^{\gamma_1} \cdot MLT^{-2}$

$$M: 0 = \alpha_1 + 1$$

$$L: 0 = -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + 1$$

$$T: 0 = -\beta_1 - 2$$

解上述三元一次方程组得： $\alpha_1 = -1, \beta_1 = -2, \gamma_1 = -2$

故 $\pi_1 = \dfrac{F_D}{\rho V^2 d^2}$

同理：

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho V d} = \frac{1}{\text{Re}}$$

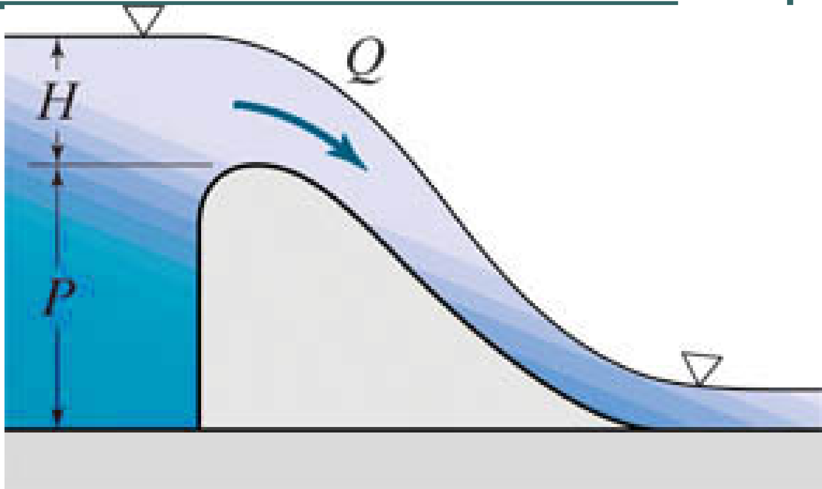
代入 $\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0$ ，并就 F_D 解出，可得：

$$F_D = f(\text{Re})\rho V^2 d^2 = C_D \rho V^2 d^2$$

式中 $C_D = f(\text{Re})$ 为绕流阻力系数，由实验确定。

[例5] 已知溢流坝的过流量$Q=1000m^3/s$，若用长度比尺$C_L=60$的模型（介质相同）进行实验研究，试求模型的流量Q.

[解] 溢流坝流动，起主要作用的是重力，应选择弗劳德准则进行模型设计.



$$\because \quad \frac{Q_p}{Q_m}=\frac{(vA)_p}{(vA)_m}=\lambda_V\lambda_l^{\,2}=\lambda_l^{\,2.5}$$

由Fr准则： $\lambda_v=\sqrt{\lambda_l}$

$$Q_m=\frac{Q_p}{\lambda_l^{2.5}}=\frac{1000}{60^{2.5}}=0.0358\,\mathrm{m^3/s}$$

$$=35.8\,\mathrm{L/s}$$