

内啮合曲线对构齿轮传动基础理论研究



重庆大学硕士学位论文
(专业学位)

学生姓名：李伟斌

指导教师：陈兵奎 教授

学位类别：工程硕士（机械工程）

重庆大学机械工程学院

二〇一八年五月

Research on Basic Theory of Internal Meshing Gear Transmission with Curve Element Constructed Tooth profiles



A Thesis Submitted to Chongqing University
in Partial Fulfillment of the Requirement for the
Professional Degree

By
Li Weibin

Supervised by Prof. Chen Bingkui
Specialty: ME(Mechanical Engineering)

College of Mechanical Engineering of
Chongqing University, Chongqing, China

May 2018

摘 要

齿轮传动是最重要的机械传动形式之一，在工业生产中占据着重要的地位。伴随我国汽车、航空航天、高铁等先进装备制造业的不断兴起，对具备高效率、高精度、承载能力强、传动功率大、可靠性高、低噪声、轻量化等特征的高性能齿轮需求不断增大。然而，国内现有齿轮低端产品占行业总产值比重大，高端产品如汽车变速器、高铁驱动单元、大型能源装备齿轮传动装置等供给不足，仍需要进口，且产品在传动精度、传动效率、寿命与可靠性等性能方面与国外先进水平相比差距较大。因此，开展高性能齿轮传动产品的研发，对于满足重大装备高性能使用需求，具有十分重要的理论意义和工程实用价值。

齿轮是依靠齿面的相互啮合进行动力与运动的传递，其几何性质、润滑状态、轮齿表面质量等均是影响齿轮传动性能的重要因素。点、线与面均是自然界中常见的几何元素，研究团队从齿轮几何学角度出发，利用空间曲线接触形式及载体的多样性，以曲线为啮合几何元素构建齿轮副，并对曲线啮合特性进行研究分析，提出了全新的共轭曲线啮合理论，以求从根本上解决制约当前齿轮传动性能提升的关键问题。目前，相关理论已在平行轴、相交轴及交错轴齿轮传动中得到较为广泛的应用，已逐步形成集理论设计、特性分析和齿面制造相结合的技术基础。

相较于外啮合齿轮传动，内啮合齿轮传动具有结构紧凑、传动比范围更大、承载能力更强、动力学特性更优良等优点，是一种优良的传动形式。本文在前期研究基础上，主要开展内啮合曲线对构齿轮传动基础理论研究，完成其基本啮合原理、齿面成形理论与方法及传动特性分析，既是对曲线对构齿轮传动理论的补充完善，也能够为开发出更优良的内啮合齿轮传动形式奠定理论基础。

本文的主要内容有：

① 在外啮合共轭曲线啮合基本理论的基础上，开展内啮合曲线对构齿轮的基本啮合原理的数学描述：建立曲线内啮合基本坐标系，并完成各坐标之间的矩阵变换关系推导；确定曲线接触点相对运动条件，完成沿给定的接触方向曲线公法矢量及相对运动速度的数学表达式推导，建立啮合函数关系；完成曲线的内啮合共轭曲线方程及啮合方程推导，并运用实例进行验证。

② 开展内啮合曲线对构齿轮的齿面成型基础理论及一般方法的论述：分别介绍等距包络法、齿廓螺旋运动法和轮齿基本齿条法三种齿面成型方法的基础理论，并且分别运用这三种方法建立内啮合曲线对构齿轮的齿面，完成相应的数学模型。

③ 进行内啮合曲线对构齿轮传动的轮齿齿形设计研究：对内啮合曲线对构齿轮的几何参数与齿形参数选取原则进行讨论，并且设计了单点接触与双点接触的

内啮合曲线对构齿轮传动的齿形方案，给出了相应的齿廓方程，完成了齿轮三维模型的构建。

④ 开展内啮合曲线对构齿轮传动的轮齿进行有限元强度分析：分别以单点接触与双点接触内啮合曲线对构齿轮为对象，建立基本啮合齿轮接触对，简化基础接触形式，划分接触网格，处理载荷及边界约束条件，完成了相应的接触应力计算与分析；进一步，通过有限元结果对比，双点接触内啮合曲线对构齿轮相比单点接触形式具有优良的接触性能，具有较好的应用前景。

关键词：内啮合曲线对构齿轮；啮合原理；齿面成型；齿形设计；有限元分析

ABSTRACT

As one of the important mechanical transmission forms, gear transmission plays an important rule in modern industry. The advanced equipment manufacturing fields such as automobile, aviation and aerospace, high-speed rail lay in a fast development time. And the demands for the high performance gears with the properties of high transmission efficiency, high precision, high load capacity, high transmission power, high reliability, low noise and light weight, are increasing. However, the low-end products occupy a big proportion in the total out-put value of the domestic gear industry. The high-end products, such as automobile transmission, the driver unit of high-speed rail, and the large gear transmission for energy industry, are obtained through importing form. And the gap between the domestic and foreign gear products in the aspects of transmission precision, transmission efficiency, the life-time and reliability is large. Therefore, the study on high performance gear transmission products is of great theoretical and practical values to meet the demands for important equipment.

The power and motion transmission between gears rely on the engagement of the tooth surfaces. Geometric properties, lubrication status and surface integrity of tooth surfaces are the important factors for affecting the transmission performance. The point, line and surface are the common elements in nature. Base on gear geometry, the research team builds gear pairs with curve meshing element by using the diversities of the contact forms and the curve carriers. A new conjugate curve meshing theory is put forward and it is essential to solve the problems that restrict the performance improvement of gear transmission. The proposed theory has been widely applied in the parallel axes gear, intersecting axes gear and crossed axes gear transmission. It has gradually formed the technical basis including design theory, characteristic analysis and the manufacturing of tooth surface.

Compared with the external gear transmission, the internal meshing gear transmission has the advantages of compact structure, larger gear ratio range, high carrying capacity, better dynamic characteristics and so on. It is an excellent transmission form. On the basis of the previous research, the studies in this paper concentrate on the basic theory of the internal meshing gear transmission with curve element constructed tooth pairs, and found the basic meshing principle, the generate method and the transmission characteristics analysis. It complements the conjugate

curve meshing theory, and settles the theoretical foundation for the development of the better internal gear transmission.

The main contents of this article are as follows:

① Based on the conjugate-curve meshing principle, mathematical descriptions of the meshing principle for internal meshing gear drive with curve element constructed tooth pairs are carried out: The coordinate systems of internal meshing gears is established, and the matrix transformation relationships between the coordinate systems are derived; The relative motion conditions on the contact point are determined and the contact normal along the given contact direction is also analyzed; According to above conclusions, the meshing function is derived and the internal conjugate curve equations are also obtained. Numerical examples are illustrated to verify the proposed results.

② The basic generate theory and method of tooth profiles of the internal meshing gear drive with curve element constructed tooth pairs are discussed. Three kinds of forming methods of tooth profiles are introduced, including the equidistance-enveloping method, the tooth profile spiral motion method and the basic tooth strip method; three methods are used to establish the tooth surface of the internal meshing gear drive with curve element constructed tooth pairs. The corresponding mathematical models are given.

③ Tooth profile design of the internal meshing gear drive with curve element constructed tooth pairs is studied. The geometric parameters of the gear and the selection principle of the tooth shape are discussed; And the tooth profile scheme of internal meshing gear drive with single point contact and two point contact are separately designed. Tooth profile equation and the 3D models of gears are also provided.

④ The finite element analysis of tooth profiles are carried out. The 3D gear models are simplified and the contact pairs of the meshing gear are provided. The load and boundary conditions are processed. The contact calculation is completed and the numerical results are analyzed for internal meshing gear drive with single point contact and two point contact.

Key words: Internal meshing gear drive with curve element constructed tooth pairs;
Meshing principle; Generation of tooth profile; Tooth profile design;
Finite element analysis

目 录

中文摘要.....	I
英文摘要.....	III
1 绪 论.....	1
1.1 课题背景及研究意义.....	1
1.2 国内外研究现状及发展.....	2
1.2.1 齿面啮合理论研究现状.....	2
1.2.2 新型齿轮传动研究现状.....	3
1.2.3 内啮合齿轮传动研究现状.....	5
1.3 论文的主要研究内容.....	6
1.4 本章小结.....	6
2 内啮合曲线对构齿轮基本原理.....	9
2.1 引言.....	9
2.2 共轭曲线的定义.....	9
2.2.1 共轭曲面的一般定义.....	9
2.2.2 共轭曲线的定义.....	10
2.3 内啮合共轭曲线基本原理.....	11
2.3.1 坐标系及变换关系.....	11
2.3.2 相对运动速度.....	14
2.3.3 沿给定接触方向的法向矢量.....	16
2.3.4 啮合方程.....	18
2.3.5 共轭曲线方程与啮合线方程.....	18
2.4 实例验证.....	19
2.4.1 平面渐开线内啮合形式.....	19
2.4.2 空间圆柱螺旋线内啮合形式.....	22
2.5 本章小结.....	25
3 内啮合齿面成型理论与基本方法.....	27
3.1 引言.....	27
3.2 等距包络法.....	27
3.2.1 求解共轭曲线法向等距曲线.....	27
3.2.2 单参数球族的包络面成形.....	29
3.2.3 内啮合管实例.....	30

3.3 齿廓螺旋运动法	33
3.3.1 基本原理	33
3.3.2 圆弧齿廓螺旋面	35
3.3.3 抛物线齿廓螺旋面	36
3.4 基本齿条法	37
3.4.1 坐标系及变换关系	38
3.4.2 求解啮合方程	39
3.4.3 齿面方程	40
3.5 本章小结	41
4 内啮合共轭齿面齿形设计与基本模型	43
4.1 引言	43
4.2 齿轮几何参数与齿形参数	43
4.2.1 齿轮基本几何参数	43
4.2.2 齿形参数设计与选取原则	45
4.3 齿形设计	48
4.3.1 单点接触轮齿齿廓及方程	48
4.3.2 双点接触轮齿齿廓及方程	52
4.4 齿轮模型	54
4.4.1 齿轮三维模型构建方法	54
4.4.2 齿轮模型	55
4.5 本章小结	57
5 齿轮强度有限元分析	59
5.1 引言	59
5.2 有限元方法及 ANSYS 接触分析	59
5.2.1 有限元方法	59
5.2.2 ANSYS 接触分析	60
5.3 内啮合曲线对构齿轮齿面接触分析	61
5.3.1 模型网格划分	61
5.3.2 齿面接触对建立	62
5.3.3 边界条件及载荷处理	63
5.3.4 计算结果分析	64
5.4 本章小结	67
6 结论与展望	69
6.1 结论	69

6.2 后续工作展望.....	69
致 谢.....	71
参考文献.....	73
附 录.....	77
作者在攻读硕士学位期间参与的研究项目.....	77

1 绪 论

1.1 课题背景及研究意义

课题来源于国家自然科学基金青年基金项目“内啮合共轭曲线齿轮传动设计制造关键技术研究”(51605049),主要开展高性能内啮合齿轮传动副的创新设计与制造等关键技术研究。

齿轮传动作为一种重要的传动类型,应用十分广泛,是大多数机械装备中最主要的传动形式^[1]。在装备制造业和国防工业中,齿轮是极其重要的关键基础部件,很大程度上决定着装备的性能,可以反映一个国家的工业制造水平^[2]。在《国家中长期科学和技术发展规划纲要(2006-2020年)》与国务院《装备制造业调整和振兴规划》中,均对高精度齿轮传动装置提出了高水平定位和具体发展要求。

作为国民经济飞速发展的反映之一,我国齿轮制造行业取得了长足的进步,产品品类齐全,在航空船舶、汽车产业、国防装备、轨道交通、能源冶金、精密仪器等多个工业部门中获得广泛运用,为国家工业体系提供了基础性的支撑。但是,我国齿轮行业当前正面临着由低端到高端的转型,低端产品占行业总产值比重大,高端产品如汽车变速器、高铁驱动单元、航空航天齿轮装置及大型能源装备齿轮传动装置等性能与发达国家相比差距较大,无法满足要求,需要进口,受制于人。与先进设计制造技术相比,我国齿轮产品在传动精度、传动效率、寿命与可靠性等方面存在一定的差距。伴随我国汽车、航空航天、高铁等先进装备制造业的不断兴起,对具备高效率、高精度、承载能力强、传动功率大、可靠性高、低噪声、轻量化等特征的高性能齿轮需求不断增大^[3]。因此,研发高性能齿轮传动技术,已逐步成为相关行业领域与科研部门的工作重心。

齿轮是依靠齿面的相互啮合进行动力与运动的传递,其几何性质、润滑状态、齿面表面质量等均是影响齿轮传动性能的重要因素。基于共轭曲面原理建立的共轭齿面求解与分析体系,是现有齿轮传动设计的理论基础,渐开线齿面是其中应用最为广泛的典型。但随着生产实际对齿轮传动性能要求的提高,这种设计方法已经不再能经济地满足需求^[4],如渐开线齿面在节点外的其他接触位置均存在相对滑动,两齿面难以实现滚动接触;渐开线齿轮轮齿弯曲强度不能实现更高的过载,凸-凸齿形(外啮合)接触也限制了齿面接触强度的提高。

点、线与面均是自然界中常见的几何元素。共轭曲线啮合原理就是从齿轮几何学角度出发,利用空间曲线接触形式及载体的多样性,以曲线为啮合几何元素构建齿轮副,对曲线啮合特性进行研究分析得到的新型齿轮啮合理论。目前已具备较为系统的理论框架,并在平行轴、相交轴及交错轴齿轮传动中得到较为广泛

的应用,已逐步形成集理论设计、特性分析和齿面制造相结合的技术基础。

相较于外啮合齿轮传动,内啮合齿轮传动具有结构紧凑、传动比范围更大、承载能力更强、动力学特性更优良等优点,是一种优良的传动形式。因此,开展内啮合曲线对构齿轮传动基础理论研究,完成其基本啮合原理、齿面成形理论与方法及传动特性分析,既是对曲线对构齿轮传动理论的补充完善,也能够为开发出更优良的内啮合齿轮传动形式奠定理论基础。

1.2 国内外研究现状及发展

1.2.1 齿面啮合理论研究现状

齿面啮合理论是开展齿轮传动研究的基础。共轭曲面啮合理论,其理论成熟度与应用广泛度在当前均是最高,是当前齿轮传动类型的理论基础。在该理论的基础上,已经建立了现有齿轮传动类型由共轭齿面求解到齿面几何学与运动学分析的全面而系统的体系^[5-6]。

20 世纪 70 年代,X. Foxmah 与 T. Olivier 分别对空间啮合关系进行了理论上的探究:T. Olivier 运用包络原理,求解了有限类型的共轭曲面,并且他还提出运用辅助曲面来构造的共轭曲面的观点,这是一种非常具有开拓性的想法^[7];X. Foxmah 在确定曲面的接触线与包络面方面,提出了一种新的办法,并利用数学解析的方法重新阐述了 T. Olivier 的理论,使得该理论具有更坚实的数学基础^[8],这些研究成果为运动学方法分析齿面啮合打开了大门。D. Mangeron 等学者首先提出运用矩阵运算完成坐标变换的方法来推导曲面方程,这个方法得到了广泛的采用,成为研究齿轮啮合原理的经典方法^[9]。B. Rolf 等人对包络齿面的曲率问题进行了深入的研究,为解决空间齿面啮合时的根切问题作出了贡献^[10];E. Wildhaber 在弧齿准双曲面齿轮设计制造的研究工作中投入大量精力,结合自身的研究需要首先提出了极限压力角与极限法曲率两个概念,为曲面接触的研究给出了新的描述^[11];美国工程师 M.L. Baxter 对锥齿轮的齿面诱导法曲率进行了深入研究,并在齿面接触分析中取得了成果^[12]。

F.L. Litvin 在齿轮研究领域,做出了突出贡献,他在著作《齿轮几何学与应用理论》中,详细阐述了圆柱齿轮、锥齿轮、蜗轮螺杆等多种传动类型的齿轮几何学与啮合原理,这是对共轭曲面啮合理论全面的总结,对以后的齿面研究与设计工作具有极大的指导意义^[13-14]。在摆线针轮行星传动的基础上,M. Neagoe 和 Diaconescu 以针齿作为行星齿廓、内摆线作为内齿轮齿廓进行组合,设计出了一种少齿差传动机构,并给出了该机构的啮合原理与数学模型,丰富了摆线少齿差行星传动理论^[15]。针对平面曲线族的求解问题,Argyris 提出运用包络运动原理来解决,并且给出了曲面奇异点与包络曲线存在条件的详细论证过程^[16]。在一般共轭

曲面几何性质的描述上, Puccio 建立了一种共轭曲面成形及曲率的一般分析方法^[17]。Ito 与 Takahashi 运用微分几何的观点与方法, 对准双曲面齿轮曲率的计算方法进行了研究, 丰富了曲面曲率计算方法的内容^[18]。在谐波精密传动的研究中, Musser 对其啮合原理进行了推导, 针对齿面上点的运动轨迹、齿形设计与干涉等问题进行了深入讨论^[19]。

国内学者在啮合理论方面也进行了大量的研究工作。吴大任利用微分几何学基本理论, 讨论了一般曲面与曲线的几何关系等问题, 其相关结论奠定了齿面啮合理论的发展基础^[20]。陈志新对互相连续滑动接触的共轭曲面, 在其啮合原理与应用上做了探讨, 其研究成果丰富了空间共轭曲面几何学的内容^[21]; 吴序堂对共轭曲面齿轮啮合原理进行了系统的论述, 其编著的《齿轮啮合原理》对齿形、齿面成型等问题进行了全面的探讨^[22]。为发展新的啮合理论, 厉海祥等人提出并深入研究了一种点线啮合齿轮的啮合原理^[23]; 在圆弧齿轮传动理论的基础上, 潘华平等提出了可实现纯滚动的传动类型, 对其啮合基本理论进行了讨论, 其成果可用于解决因为相对滑动导致的齿轮传动问题^[24]。在蜗轮蜗杆传动领域, 段德容推导了二次包络 TI 蜗杆传动的啮合原理, 并详细分析了齿面接触情况及其界线曲线的规律, 取得了成果^[25]。刘健则对共轭曲面原理对加工制造中的应用做了研究, 讨论了齿廓的新型加工方法^[26]。在螺旋齿轮啮合理论方面, 李高敬从加工的角度上出发, 利用标准滚刀完成了短齿制齿轮的加工, 并且建立了“对称”无侧隙传动方程, 为螺旋齿轮的加工与分析作了贡献^[27]。陈扬枝等人建立了适合于微小弹性啮合传动机构的空间曲线啮合理论模型, 扩展了空间曲面的啮合理论, 也为新型共轭传动理论提出了一个曲线啮合的新思路^[28-31]。

另外, 陈兵奎及其课题组对多种啮合理论进行了研究: 针对摆线少齿差行星传动的齿面加工问题, 利用刀具齿形的包络运动完成内、外摆线齿轮的通用加工; 提出了渐开弧面齿轮传动基本啮合原理, 并给出了齿面的一般方程, 这是一种具有中心距可分性的点啮合制传动; 利用曲线与曲面之间的共轭关系, 建立线面共轭啮合理论, 给出了共轭齿面副的成型一般方法; 基于曲线共轭运动关系, 建立了共轭曲线啮合理论, 并运用该理论进行了新型圆柱齿轮与锥齿轮传动的设计、实验与初步应用工作^[32-38]。

齿面啮合理论的研究工作是突破现有齿轮传动局限性的基础, 科研工作者们也一直在不断努力, 推进啮合理论的发展与进步。

1.2.2 新型齿轮传动研究现状

齿轮啮合理论的研究进展为新型齿轮传动的研究开发提供了理论基础。国内外研究人员, 一方面在已有的齿廓曲线基础上, 综合不同齿廓曲线与齿面的优点, 提出新型的“组合”式齿面; 另一方面, 利用新型啮合理论, 寻找新的齿廓曲线,

构建具有优良传动特性的新型齿轮传动类型。

国外方面, F.L.Litvin 等学者将研究重点放在了面齿轮传动上, 他们通过分析渐开线齿廓、非渐开线齿廓两类圆柱齿轮分别与相对应面齿轮的啮合情况, 提出了一种渐开螺旋线式的面齿轮传动, 其齿面间为点接触的啮合形式, 传动平稳; 同时, 因为采用了纵向支撑, 可避免齿面边缘接触, 齿面接触强度较高^[39]。Komori 等人将齿廓曲线处理为类似于分阶式圆弧的多段微线段, 这种齿廓适用于螺旋齿轮传动, 由于齿廓各段在啮合时大多数接触点处的相对曲率接近为零, 因而具有很高的接触强度, 十分适合高速重载的工况^[40]。T.Yeh 等研究人员为减小齿面接触应力, 同时增强齿根弯曲强度, 利用偏差函数对齿廓进行修整, 成功地提升了齿面的承载能力^[41]。Tsay 与 Fong 将渐开线齿廓与圆弧齿廓进行巧妙地组合, 成功开发出了新型点啮合制齿轮传动, 虽然是点啮合制, 但该齿轮传动对加工与装配误差并不十分敏感^[42]。同样地, Ariga 和 Nagata 运用圆弧与渐开线齿廓构成的“组合”式刀具, 成功制造出了新型 W-N 齿轮, 它同样具有对中心距误差的低敏感性^[43]。Kapelevich 对渐开线齿轮轮齿两侧齿廓进行不对称处理, 在减小了传动尺寸的同时, 提高了传动性能, 为齿轮传动轮齿修形设计做了一个很好的范例^[44]。

国内研究者在新型齿轮传动方面也取得了成果。张光辉等学者设计了一种分阶式双渐开线型齿廓, 与分阶式双圆弧齿廓类似, 在两段相错的渐开线之间用一段圆弧过渡, 这种齿廓设计方案中, 轮齿齿根厚度较大, 并且节点附近位置是不参与接触的, 使得该齿轮传动弯曲与接触强度均较高, 是等强度齿形设计方案的典型^[45]。罗善明等研究者对余弦曲线齿廓进行了深入研究, 将余弦曲线作为小齿轮的齿廓曲线, 余弦曲线的零线作为节圆, 波幅作为齿顶, 设计出了滑动系数小, 轮齿强度较高的余弦齿轮传动, 为新齿形曲线的研究提供了参照^[46]。厉海祥一对齿轮分别进行处理, 小齿轮为短齿制渐开线斜齿变位齿轮, 大齿轮齿廓分为上、下两段, 上段为凸齿形渐开线, 下段为凹齿形过渡曲线, 这样在啮合过程中, 上段为直线形式的线接触, 下段为凸凹齿廓的点接触, 获得了点接触与线接触同时存在的新型齿轮传动形式^[47]。黄小平等人由轴向重合度入手, 设计了端面非共轲齿廓, 齿廓只在节圆位置处点接触, 通过适当的螺旋角保证轴向重合度大于 1, 获得了能够实现纯滚动的齿轮传动类型^[48]。陈兵奎等研究者, 利用圆弧齿廓对渐开线齿面上选定位置处的渐开线齿廓进行替代, 得到渐开弧面齿廓, 这样的齿面接触强度较高, 同时具有一定的中心距可分性^[49]; 同时, 该课题组运用新型线曲线啮合理论, 设计了共轲曲线圆柱齿轮与锥齿轮传动^[36-38]; 将基于曲面共轲、曲线共轲、线面共轲等多形式啮合理论设计出的齿轮传动, 统称为对构齿轮传动。陈扬枝等学者对空间啮合理论进行扩展, 提出了适用于小微弹性啮合传动机构的曲线啮合理论, 并运用该理论设计出了空间曲线啮合齿轮^[50], 这与基于共轲曲线

原理的齿轮传动存在一定的差别。苏进展提出了一种三次曲线作为齿线的圆柱齿轮^[51]；王进戈等人采用经蜗轮齿面一次包络成形的环面蜗杆，与用两个可处置的滚子作为齿面的蜗轮，构成了新型蜗轮蜗杆传动，可实现无侧隙传动^[52]。

随着社会生产力的提高，对高性能的齿轮传动类型的需求日益迫切，各种采用新型齿廓的齿轮传动被开发出来。也由于加工技术的升级，复杂齿形的齿面能够被加工出来，给各种新型齿轮传动的应用提供了技术保障。

1.2.3 内啮合齿轮传动研究现状

内啮合齿轮传动与外啮合齿轮传动在传动原理上是一致的，只是形式上有所差别，二者很多运动规律相同，只是内啮合传动还具有一些特殊的规律。内啮合齿轮传动存在比较多的干涉，尤其是在少齿差的内啮合传动中，从而已有的内啮合齿轮几乎都是变位齿轮^[53]。

与外啮合齿轮传动相比，内啮合齿轮传动具有如下优点：

- ① 小齿轮在内齿轮内部，中心距较小，传动机构结构尺寸较小、结构紧凑，能实现多对一的行星传动，传动力学特性好；
- ② 两齿轮回转方向相同，相对角速度小，相对滑动导致的磨损小，并且润滑油不易挤出，润滑状况好，摩擦小、传动效率高；
- ③ 内外齿轮一般为凸、凹齿面接触，综合曲率半径大，齿面接触强度高，并且重合度大，传动平稳；
- ④ 内齿轮齿根圆半径比齿顶圆大，齿根厚度更大，因而轮齿弯曲强度较高，更适宜重载的工况。

当前应用的内啮合齿轮传动，以渐开线齿形为主，渐开线行星齿轮传动具有传动比大、传动效率高、承载能力强等特点，因而应用十分广泛：航空、汽车、矿山工程机械等传动系统中均有其身影，发挥了重要作用；对于渐开线内啮合传动，从齿廓修形设计、啮合特性分析及加工制造等多方面，研究工作做得很多，理论相对比较丰富。摆线齿廓同样也得到广泛应用，多应用在摆线行星传动机构中，这类机构多应用于精密传动场合中；针对摆线行星传动，尤其是摆线少齿差行星传动，多种新型传动理论、齿面接触特性、传动动力学分析及摆线轮廓加工制造方面的研究工作都比较深入。但是，对于圆弧齿廓一类的点啮合制齿轮内啮合传动的研究文献相对较少，且多为多圆弧齿轮齿廓内啮合传动：F.L. Litvin 教授等学者，在盘型砂轮的基础上设计内啮合传动的内、外齿轮，并且推导得到了内、外齿轮齿面的法线方程与啮合方程^[54-57]；台湾学者吴昱龙以分阶式双圆弧齿廓为基础，进行了双圆弧齿形设计并推导了齿面方程，建立了内啮合齿轮模型，并进行了有限元分析^[58]；徐文博在他的论文中，由啮合基本定律出发，运用运动包络法，求解了双圆弧内啮合齿轮的齿面方程及端面齿廓方程，运用三维软件构建了

模型，并进行了有限元分析^[59]；康兴虎对四圆弧齿廓内啮合传动进行了研究，设计了四圆弧内啮合齿廓，并给出啮合原理上的证明，同时进行了相应的成型铣刀与加工工艺的研究^[60]；吴凯同样针对四圆弧内啮合齿轮，进行了啮合特性的分析，同时运用有限元方法对比分析了四圆弧齿廓与双圆弧齿廓在内啮合传动中弯曲强度^[61]。

当前在内啮合齿轮传动研究中，研究重点主要在于渐开线内齿轮的加工工艺、内啮合少齿差传动干涉问题与特性分析、摆线少齿差行星传动理论与制造等方面，关于点啮合制齿轮在内啮合传动中运用上研究比较少。相对于渐开线等齿轮传动，点啮合制齿轮具有承载能力、传动效率等多方面的优势。运用共轭曲线原理，进行内啮合曲线对构齿轮传动基础理论与新内啮合齿形的设计，是对内啮合传动的重要补充，具有重要的学术与现实意义。

1.3 论文的主要研究内容

本文在共轭曲线啮合基本理论的研究基础上，进一步对内啮合齿轮传动开展相关应用工作，建立内啮合曲线对构齿轮基本原理，揭示内啮合条件下曲线对构接触一般特性；提出齿面成型理论及基本设计方法，构建具备优良接触特性的齿轮副；建立齿轮基本模型，开展齿面强度分析与评价。

论文主要包含以下工作：

① 根据共轭曲线啮合基本理论，建立内啮合曲线对构齿轮传动坐标系模型，获取各坐标系之间的数学关系；通过相对运动条件及接触点处沿给定接触方向法矢量的推导，建立内啮合传动下共轭曲线啮合方程；进一步基于给定空间曲线及啮合关系，得到配对共轭曲线方程及啮合线一般表达式；并运用常见空间曲线验证基本结论。

② 提出齿面成型基本理论及一般方法，介绍等距包络法、齿廓螺旋运动法及轮齿基本齿条法的基本内容，并运用三种方法分别建立内啮合曲线对构齿轮的啮合齿轮副，建立相应的基本数学模型。

③ 提出内啮合曲线对构齿轮齿形设计方案，简要分析内啮合曲线对构齿轮齿形设计原则，开展几何及齿形参数设计与优化，完成单点接触和双点接触两种形式的基本齿廓构型，建立齿轮三维实体模型并运动仿真分析。

④ 提出内啮合曲线对构齿轮强度计算准则，通过已建模型、网格划分及约束设定，基于有限元方法分析齿面接触能力特性，评价齿面传动性能。

1.4 本章小结

本章主要论述了研究本课题的学术与现实意义、国内外在齿轮传动理论与新

型齿轮传动开发的进展状况及本文的主要研究内容。主要工作有：

① 论述了进行内啮合曲线对构齿轮传动基础理论的研究，在齿轮传动研究中的学术意义与当前社会经济条件下的现实意义；

② 分别简要概述了齿面啮合理论研究、新型齿轮传动类型开发与内啮合齿轮传动三个方面的发展研究现状；

③ 确定本文所要论述的主要内容为：内啮合曲线对构齿轮啮合原理、齿面成形与齿形设计、齿轮强度分析等方面的内容。

2 内啮合曲线对构齿轮基本原理

2.1 引言

共轭曲面啮合理论是齿轮传动最重要的基础理论之一，生产中被广泛运用的圆柱齿轮、锥齿轮、蜗轮蜗杆等传动机构，它们的轮齿齿面是通过以具有一定几何特性的齿廓曲线为基础，按照共轭曲面啮合理论进行构面运动，从而得到具有优良传动性质的啮合齿面。类似于曲面元素，曲线同样可以作为构件的接触元素，并且相较于曲面接触，曲线的接触形式更具多样性：一对平面曲线，可在同一平面内接触，也可以形成空间接触形式，而空间曲线的接触状态就更加复杂；既可以相外切接触，也可以相内切接触等。基于共轭曲线理论设计制造外圆柱齿轮、锥齿轮等均已经应用到了生产实践中，具有优良的传动性能。

本章将在共轭曲线啮合理论的研究基础上，开展内啮合曲线对构齿轮基本啮合原理的数学描述，主要包括坐标系建立及变换关系、相对运动条件的确定、接触点处沿给定接触方向的法矢量推导、啮合函数关系的建立、共轭曲线及啮合线方程的形成等，并通过平面及空间曲线实例验证相关结论，为后续齿面及模型构建分析奠定理论基础。

2.2 共轭曲线的定义

2.2.1 共轭曲面的一般定义

通常将两构件上用以实现给定运动规律，且在运动过程中始终保持连续相切接触的一对曲面^[62]。如果一对曲面互为共轭曲面，那么它们之间具有互为包络面的关系，可以运用包络运动原理互相求解。

轮齿加工刀具与齿面之间即满足共轭曲面的关系：在给定的运动条件下，刀具曲面不同，加工出的轮齿曲面形状不同；而在不同的运动条件下，同一把刀具加工出的轮齿曲面也是不同的。

具体如图 2.1 所示，对于一对作啮合运动的曲面 $\Sigma^{(1)}$ 、 $\Sigma^{(2)}$ ，当其满足以下条件时：

- ① $\Sigma^{(1)}$ 上不存在奇点；
- ② 两曲面按给定规律做相对运动，在 t 时刻两曲面在一条曲线 C_t 处相切接触；
- ③ $\Sigma^{(2)}$ 上的每一点均在唯一的确定时刻 t 进入接触，即位于唯一 C_t 上^[36]。

可以将曲面 $\Sigma^{(2)}$ 称作曲面 $\Sigma^{(1)}$ 在此相对运动规律下的共轭曲面，反之亦成立。

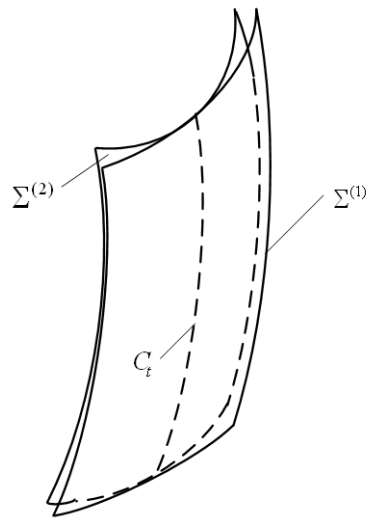


图 2.1 共轭曲面

Fig 2.1 Conjugate surfaces

2.2.2 共轭曲线的定义

将在给定运动规律下，在此运动过程中沿指定接触方向始终保持连续相切接触的一对光滑曲线定义成一对共轭曲线^[63]。更详细地，对于给定运动过程中的两条曲线 Γ_1 , Γ_2 ，如图 2.2 所示，当它们满足以下条件时：

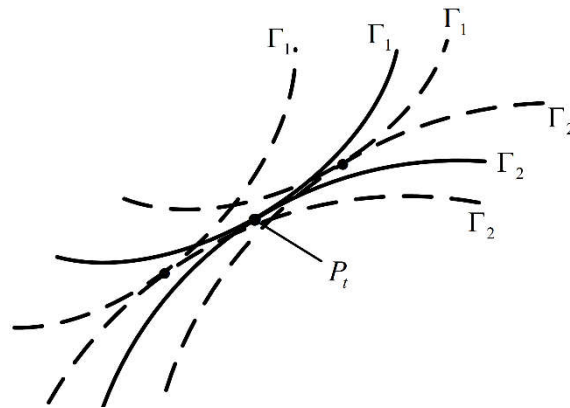


图 2.2 共轭曲线

Fig 2.2 Conjugate curves

- ① 曲线 Γ_1 , Γ_2 均为规则的光滑曲线；
- ② 在任意时刻 t ，曲线 Γ_1 , Γ_2 在点 P_t 处相切接触；
- ③ 曲线 Γ_2 上的任意一点都在唯一的时刻 t 进入接触，其接触点 P_t 唯一；
- ④ 在一定的运动规律下，曲线 Γ_1 , Γ_2 在一定范围内互为共轭曲线^[36]。

则称曲线 Γ_1 与曲线 Γ_2 是一对具有共轭运动关系的曲线。两条光滑曲线沿线上

对应点接触，具有互为包络的运动关系，将这两条曲线的啮合称为共轭曲线啮合。要实现正确的啮合运动，共轭曲线接触对还必须满足以下三个条件：

- ① 两条光滑曲线上的对应共轭点就在接触位置重合；
- ② 在共轭接触点处两曲线必须相切，并且不存在干涉；
- ③ 在共轭接触点处，两曲线间的相对运动速度必须垂直于该点处的公法面，即满足啮合方程^[36]。

可知，当一对共轭曲线相内切时，同样满足共轭曲线正确啮合条件。

2.3 内啮合共轭曲线基本原理

2.3.1 坐标系及变换关系

如图 2.3 所示，建立内啮合曲线对构齿轮传动的空间坐标系： $S(O-x,y,z)$ 和 $S_p(O_p-x_p,y_p,z_p)$ 为空间固定坐标系， $S_1(O_1-x_1,y_1,z_1)$ 和 $S_2(O_2-x_2,y_2,z_2)$ 分别为与齿轮 1 和齿轮 2 固联的动坐标系。 z 轴与齿轮 1 的回转轴线重合， z_p 轴与齿轮 2 的回转轴线重合， z 轴与 z_p 轴轴线平行，两轴线距离为 OO_p ，即为中心距 a 。

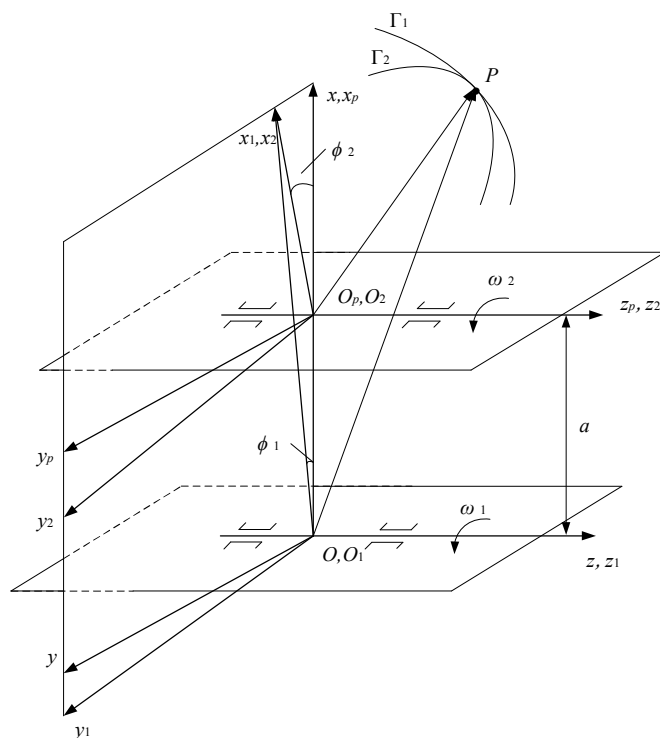


图 2.3 内啮合曲线对构齿轮空间坐标系

Fig 2.3 Coordinate system of internal conjugate-curve gears

初始时刻，两动坐标系 S_1 和 S_2 分别与固定坐标系 S ， S_p 重合。 S_1 伴随内齿轮

1 以匀角速度 ω_1 绕 z 轴正向转动, S_2 伴随小齿轮 2 以匀角速度 ω_2 绕 z_p 轴正向转动; 时刻 t 时, 两动坐标系 S_1 与 S_2 转动至图示位置, 即内齿轮 1 绕 z 轴逆时针转过 ϕ_1 角, 小齿轮 2 绕 z_p 轴逆时针转过 ϕ_2 角。

根据各坐标系相对位置及运动关系, 可以得到各坐标系之间的数学变换关系如下:

S 与 S_1 之间:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{01} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{10} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

式中

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{10} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S 与 S_p 之间:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{p0} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{0p} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

式中

$$\mathbf{M}_{p\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\theta p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S_p 与 S_2 之间:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{2p} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{p2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

式中

$$\mathbf{M}_{2p} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 & 1 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{p2} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 & 1 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是, 两动坐标系 S_1 与 S_2 之间的变换关系为:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{21} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{12} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

式中

$$\begin{aligned}
 M_{21} &= M_{2p} M_{p0} M_{01} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \phi_2) & -\sin(\phi_1 - \phi_2) & 0 & -a \cos \phi_2 \\ \sin(\phi_1 - \phi_2) & \cos(\phi_1 - \phi_2) & 0 & a \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 M_{12} &= M_{10} M_{0p} M_{p2} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \phi_2) & \sin(\phi_1 - \phi_2) & 0 & a \cos \phi_1 \\ -\sin(\phi_1 - \phi_2) & \cos(\phi_1 - \phi_2) & 0 & -a \sin \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.3.2 相对运动速度

在齿轮啮合基础理论的构建中, 需要求解两齿廓在接触点处的相对运动速度。根据运动学原理^[64], 利用矢量法求解接触点处的相对运动速度, 如图 2.4 所示, 点 P 是齿轮上的任意接触点, 需要求解内齿轮 1 上该点 $P^{(1)}$ 相对于小齿轮 2 上同一点 $P^{(2)}$ 的运动速度。

分析可知, 在动坐标系 S_1 下, 相对运动速度矢量 $\mathbf{v}_1^{(12)}$ 可用公式(2.9)来计算

$$\mathbf{v}_1^{(12)} = \mathbf{v}_1^{(1)} - \mathbf{v}_1^{(2)} \quad (2.9)$$

速度矢量 $\mathbf{v}_1^{(1)}$ 为

$$\mathbf{v}_1^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}_1 \quad (2.10)$$

式中 \mathbf{r}_1 为 P 点在动坐标系 S_1 中的矢径, 为 $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{O_1P} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1$, 其中 \mathbf{i}_1 , \mathbf{j}_1 , \mathbf{k}_1 , 分别表示坐标轴 x_1 , y_1 , z_1 的单位矢量。

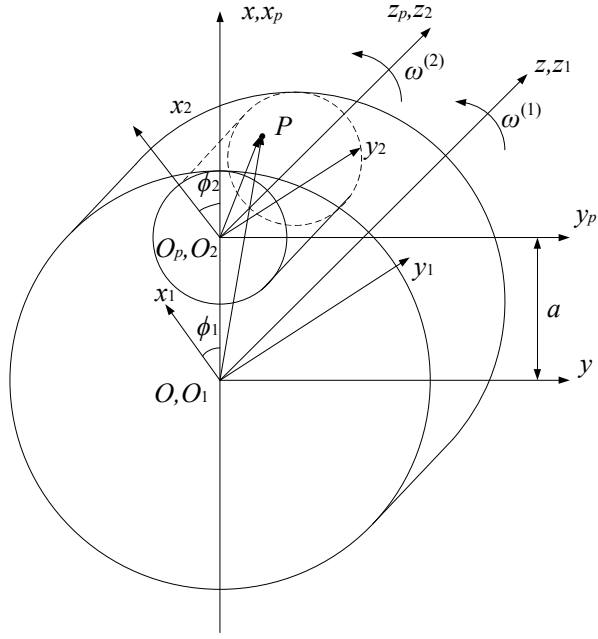


图 2.4 内啮合齿轮副相对运动速度

Fig 2.4 Relative velocity of internal meshing gear pair

根据齿轮啮合原理的相关知识^[64], 可知小齿轮 2 上 $P^{(2)}$ 点的速度矢量 $\mathbf{v}_1^{(2)}$ 由以下两部分组成, 即

$$\mathbf{v}_1^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(2)} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)} \quad (2.11)$$

其中

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{O_1 O_2} = a \cos \phi_1 \mathbf{i}_1 - a \sin \phi_1 \mathbf{j}_1$$

将 $\mathbf{v}_1^{(1)}$, $\mathbf{v}_1^{(2)}$ 代入公式 (2.9) 中, 得到

$$\mathbf{v}_1^{(12)} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}_1^{(2)}) \times \mathbf{r}_1 - \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)} \quad (2.12)$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \omega_1 \mathbf{k}_1$$

$$\boldsymbol{\omega}_1^{(2)} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \omega_2 \mathbf{k}_1$$

式中: ω_1 ——内齿轮 1 角速度的大小;

ω_2 ——小齿轮 2 角速度的大小。

于是, 将相关表达式代入式 (2.12) 中并化简, 可以得到

$$\mathbf{v}_1^{(12)} = [-(\omega_1 - \omega_2)y_1 + \omega_2 a \sin \phi] \mathbf{i}_1 + [(\omega_1 - \omega_2)x_1 + \omega_2 a \cos \phi] \mathbf{j}_1 \quad (2.13)$$

运用同样的方法可以求得在固定坐标系 S 中的 $\mathbf{v}^{(12)}$ 表达式为

$$\mathbf{v}^{(12)} = -(\omega_1 - \omega_2)y \mathbf{i} + [(\omega_1 - \omega_2)x_1 + a\omega_2] \mathbf{j} \quad (2.14)$$

2.3.3 沿给定接触方向的法向矢量

如图 2.5 所示, 为空间曲线 Γ 在点 P 处的基本三棱形, α 、 β 、 γ 分别表示曲线在 P 点处的切向矢量、主法矢量与副法矢量, 它们分别位于曲线在该点处的切线、主法线和副法线上; 主法线与副法线所确定的平面称为曲线在该点处的法平面, 切线与主法线所确定的平面称为曲线在该点处的密切平面, 切线与副法线所确定平面称为曲线在该点处的从切平面^[65]。

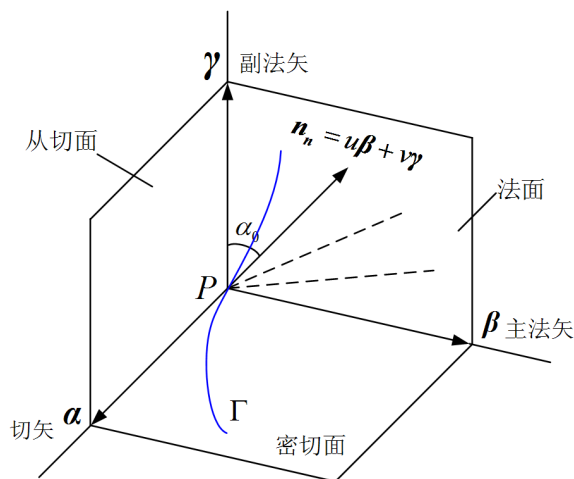


图 2.5 空间曲线三棱形

Fig 2.5 Space curve trihedron

假定曲线 Γ 在给定坐标系下的曲线表达式为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2.15)$$

其中, t 为曲线变量参数, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} 分别是 x, y, z 坐标轴的单位矢量。

根据曲线几何学知识, 可以写出 α 、 β 、 γ 的表达式:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \mathbf{i} + \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \mathbf{j} \\ & + \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\beta = \beta_{x(t)}\mathbf{i} + \beta_{y(t)}\mathbf{j} + \beta_{z(t)}\mathbf{k} \quad (2.17)$$

式(2.17)中

$$\begin{cases} \beta x(t) = \frac{x''(t)[y'^2(t) + z'^2(t)] - x'(t)[y'(t)y''(t) + z'(t)z''(t)]}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^2} \\ \beta y(t) = \frac{y''(t)[x'^2(t) + z'^2(t)] - y'(t)[x'(t)x''(t) + z'(t)z''(t)]}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^2} \\ \beta z(t) = \frac{z''(t)[x'^2(t) + y'^2(t)] - z'(t)[x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)]}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^2} \end{cases}$$

要求解副法向矢量 $\boldsymbol{\gamma}$ ，可以通过变换关系 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ 得到：

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_{x(t)} \mathbf{i} + \gamma_{y(t)} \mathbf{j} + \gamma_{z(t)} \mathbf{k} \quad (2.18)$$

其中

$$\begin{cases} \gamma_{x(t)} = -\frac{y'(t)z''(t) - z'(t)y''(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \\ \gamma_{y(t)} = -\frac{x'(t)z''(t) - z'(t)x''(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \\ \gamma_{z(t)} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

曲线在啮合点处的相对位置具有多样性，即曲线在啮合点处可以沿不同的接触方向接触，则在不同的接触方向上存在无数条法线。可以利用主、副法向矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 的线性组合，来表示这些存在的不同法向量，即

$$\mathbf{n}_n = u\boldsymbol{\beta} + v\boldsymbol{\gamma} \quad (2.19)$$

其中， u 、 v 是参数，不同的取值表示不同的接触方向。由图 2.5，可以定义曲线上任意点的法面内任意法线与副法线方向的夹角为接触角 α_0 ，则有

$$\begin{cases} u = T \sin \alpha_0 \\ v = T \cos \alpha_0 \end{cases}$$

式中， T 表示单位长度。

于是，法平面中任意的法向矢量可以写成

$$\mathbf{n}_n = (u\beta_{x(t)} + v\gamma_{x(t)})\mathbf{i} + (u\beta_{y(t)} + v\gamma_{y(t)})\mathbf{j} + (u\beta_{z(t)} + v\gamma_{z(t)})\mathbf{k} \quad (2.20)$$

具体到各坐标系下，相应的接触法向量表达式：

动坐标系 S_1 下

$$\mathbf{n}_1 = (u\beta_{x_1(t)} + v\gamma_{x_1(t)})\mathbf{i}_1 + (u\beta_{y_1(t)} + v\gamma_{y_1(t)})\mathbf{j}_1 + (u\beta_{z_1(t)} + v\gamma_{z_1(t)})\mathbf{k}_1 \quad (2.21)$$

固定坐标系 S 下

$$\mathbf{n} = (u\beta_{x(t)} + v\gamma_{x(t)})\mathbf{i} + (u\beta_{y(t)} + v\gamma_{y(t)})\mathbf{j} + (u\beta_{z(t)} + v\gamma_{z(t)})\mathbf{k} \quad (2.22)$$

2.3.4 啮合方程

对于作啮合运动的一对共轭曲线 Γ_1 与 Γ_2 ，在点 P 处相切接触时，该点处的沿给定接触方向公共法矢量 \mathbf{n} ，与 P 点处的相对速度 $\mathbf{v}^{(12)}$ 之间应该满足公式(2.23)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{(12)} = 0 \quad (2.23)$$

这说明，一对共轭曲线在啮合点处相对运动速度在法平面内的投影等于零。如果该条件不成立，那么在法矢量方向上就会存在相对速度，共轭曲线有可能在法向分离或嵌入，共轭运动即不复存在。在运动学方法中，将式(2.23)称作啮合方程，是共轭曲线正确啮合的必要条件。

在一定条件下，式(2.23)也是充分条件，在文献^[36]中给出了相应的证明过程。此处直接使用这个结论进行设计计算，即在接触点处沿给定接触方向的法矢量与相对运动速度矢量满足下式：

$$\mathbf{n}_{\alpha_i} \cdot \mathbf{v}_i^{(12)} = 0 \quad (2.24)$$

式中 i 为坐标系下标，表示不同的坐标系。

于是我们可以将内啮合传动形式下的共轭曲线啮合方程具体地计算出来，将前式(2.13)与(2.21)代入(2.24)中，可以得到

$$\begin{aligned} & [-(\omega_1 - \omega_2)y_1 + \omega_2 a \sin \phi_1](u\beta_{x_1} + v\gamma_{x_1}) \\ & + [(\omega_1 - \omega_2)x_1 + \omega_2 a \cos \phi_1](u\beta_{y_1} + v\gamma_{y_1}) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

通常情况下 ω_1 、 ω_2 不为 0，且有

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.26)$$

其中， i_{21} 表示齿轮 2 与齿轮 1 的传动比。于是可以得到化简的啮合方程为

$$\begin{aligned} & i_{21}a(u\beta_{y_1} + v\gamma_{y_1})\cos\phi_1 + i_{21}a(u\beta_{x_1} + v\gamma_{x_1})\sin\phi_1 \\ & = (1 - i_{21})[y_1(u\beta_{x_1} + v\gamma_{x_1}) - x_1(u\beta_{y_1} + v\gamma_{y_1})] \end{aligned} \quad (2.27)$$

对式(2.27)可以作如下变换：

$$\begin{cases} E = i_{21}a(u\beta_{y_1} + v\gamma_{y_1}) \\ F = -i_{21}a(u\beta_{x_1} + v\gamma_{x_1}) \\ M = (1 - i_{21})[y_1(u\beta_{x_1} + v\gamma_{x_1}) - x_1(u\beta_{y_1} + v\gamma_{y_1})] \end{cases}$$

那么式(2.27)变为

$$E \cos \phi_1 - F \sin \phi_1 = M \quad (2.28)$$

2.3.5 共轭曲线方程与啮合线方程

曲线的参数 t 与运动参数 ϕ 之间存在数学关系，这个关系已经由所求解的啮合方程(2.28)确定。在给定齿轮 1 上的曲线后，我们可以联立已经得到的变换矩阵方

程 $\mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_{21} \mathbf{r}_1$ 与啮合方程式 (2.28), 从而可以得到内啮合状态下给定曲线的共轭曲线通用表达式

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - y_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) - a \cos(\phi_2) \\ y_2 = x_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + y_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) + a \sin(\phi_2) \\ z_2 = z_1 \\ E \cos \phi - F \sin \phi = M \end{cases} \quad (2.29)$$

啮合运动中, 齿面上的理论接触点的运动轨迹称为接触迹线, 而理论接触点在固定坐标系下的集合称为啮合线^[36]。由此定义可知, 可以通过进行坐标变换的方法求得啮合线方程。根据式(2.1)可以得到啮合线方程

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \phi_1 - y_1 \sin \phi_1 \\ y = x_1 \sin \phi_1 + y_1 \cos \phi_1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

2.4 实例验证

选择平面渐开线和空间圆柱螺旋线验证上述结论, 分别按照内啮合曲线对构齿轮基本原理, 分别计算得到相应的共轭曲线方程, 并通过在 MATLAB 软件中编写程序并输出图像, 观察曲线啮合情况是否与理论描述相吻合。

2.4.1 平面渐开线内啮合形式

渐开线是最常见的齿廓曲线之一, 渐开线齿轮也是应用最为广泛的齿轮传动形式, 具有传动比恒定、中心距可分、互换性强等优点。渐开线圆柱齿轮既可以应用于外啮合传动形式, 又能进行内啮合传动。因此, 可以利用渐开线来验证内啮合曲线对构齿轮啮合基本原理的正确性。

假定渐开线内齿轮 1 上的渐开线方程为:

$$\mathbf{r}_{involute1} = x_{involute1} \mathbf{i}_1 + y_{involute1} \mathbf{j}_1 + z_{involute1} \mathbf{k}_1 \quad (2.31)$$

式中

$$\begin{cases} x_{involute1} = R_b \cos \theta + R_b \theta \sin \theta \\ y_{involute1} = R_b \sin \theta - R_b \theta \cos \theta \\ z_{involute1} = 0 \end{cases}$$

其中: R_b ——渐开线所在基圆的半径;

θ ——渐开线展开角变量参数。

将式(2.31)代入(2.13)中可计算出相对运动速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{involute1}^{(12)} = & [-(\omega_1 - \omega_2)(R_b \sin \theta - R_b \theta \cos \theta) + \omega_2 a \sin \phi_1] \mathbf{i}_1 \\ & + [(\omega_1 - \omega_2)(R_b \cos \theta + R_b \theta \sin \theta) + \omega_2 a \cos \phi_1] \mathbf{j}_1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

可以化简为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{involute1}^{(12)} = & [-\omega_1(1-i_{21})(R_b \sin \theta - R_b \theta \cos \theta) + i_{21}\omega_1 a \sin \phi_1] \mathbf{i}_1 \\ & + [\omega_1(1-i_{21})(R_b \cos \theta + R_b \theta \sin \theta) + i_{21}\omega_1 a \cos \phi_1] \mathbf{j}_1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

根据 2.3.3 小节内容求解法向矢量。可以求得方程式(2.31)对参数 θ 的一、二阶导函数如下:

$$\begin{cases} x_1' = R_b \theta \cos \theta \\ y_1' = R_b \theta \sin \theta \\ z_1' = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} x_1'' = R_b \cos \theta - R_b \theta \sin \theta \\ y_1'' = R_b \sin \theta + R_b \theta \cos \theta \\ z_1'' = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

分别代入主、副法向矢量计算公式(2.17)和(2.18)中, 求得主法向矢量与副法向矢量表达式如下:

$$\begin{cases} \beta_{x1} = -\sin \theta / R_b \theta \\ \beta_{y1} = \cos \theta / R_b \theta \\ \beta_{z1} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

和

$$\begin{cases} \gamma_{x1} = 0 \\ \gamma_{y1} = 0 \\ \gamma_{z1} = 1 / R_b \theta \end{cases} \quad (2.37)$$

可以求得法向矢量为

$$\mathbf{n}_{involute1} = -u \frac{\sin \theta}{R_b \theta} \mathbf{i}_1 + u \frac{\cos \theta}{R_b \theta} \mathbf{j}_1 + v \frac{1}{R_b \theta} \mathbf{k}_1 \quad (2.38)$$

将式(2.33)、(2.38)代入啮合方程中, 计算并化简后可以得到以下关系:

$$\cos(\phi_1 + \theta) - \frac{(i_{21}-1)R_b}{i_{21}} = 0 \quad (2.39)$$

进一步内齿轮渐开线的共轭曲线方程为

$$\begin{cases} x_2 = R_b \cos[(1-i_{21})\phi_1 + \theta] + R_b \theta \sin[(1-i_{21})\phi_1 + \theta] - a \cos(i_{21}\phi_1) \\ y_2 = R_b \sin[(1-i_{21})\phi_1 + \theta] - R_b \theta \cos[(1-i_{21})\phi_1 + \theta] + a \cos(i_{21}\phi_1) \\ z_2 = 0 \\ \phi_1 = \arccos \frac{(i_{21}-1)R_b}{i_{21}} - \theta \end{cases} \quad (2.40)$$

啮合线方程为

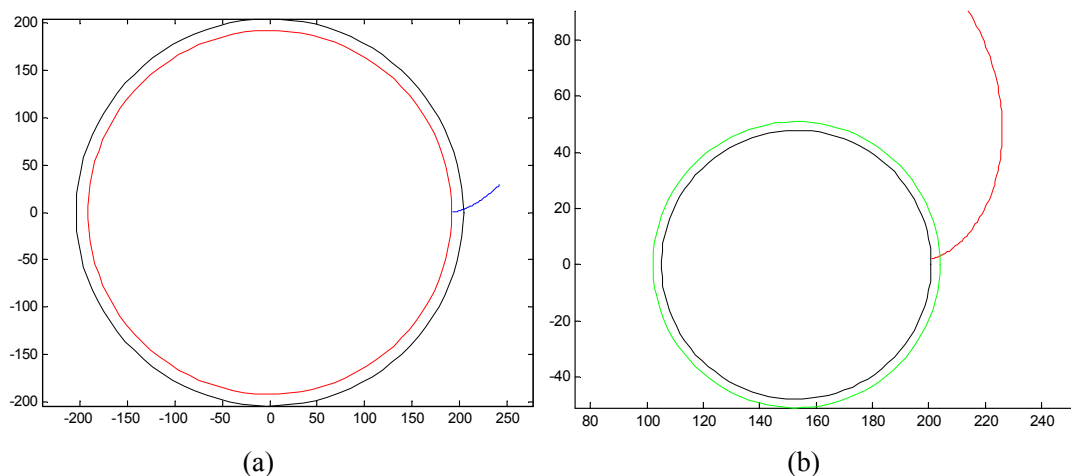
$$\begin{cases} x_{line} = R_b \cos(\phi_1 + \theta) + R_b \theta \sin(\phi_1 + \theta) \\ y_{line} = R_b \sin(\phi_1 + \theta) - R_b \theta \cos(\phi_1 + \theta) \\ z_{line} = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

给定表 2.1 中所示渐开线参数, 通过 MATLAB 数值软件编写相关程序, 并利用图像输出功能得到曲线基本啮合示意图, 结果如图 2.6 所示。

表 2.1 平面渐开线参数

Table 2.1 Parameters of planar involute curves

变量参数	参数值
模数 $m/(\text{mm})$	6
压力角 $\alpha/(\circ)$	20
内齿轮 1 齿数 z_1	68
小齿轮 2 齿数 z_2	17
传动比 i_{21}	4
内齿轮 1 分度圆半径 $R_1/(\text{mm})$	204
小齿轮 2 分度圆半径 $R_2/(\text{mm})$	51
内齿轮 1 基圆半径 $R_{b1}/(\text{mm})$	191.70
小齿轮 2 基圆半径 $R_{b2}/(\text{mm})$	47.92
中心距 $a/(\text{mm})$	153
渐开线参数 $\theta/(\text{rad})$	$0 \sim \pi/2$



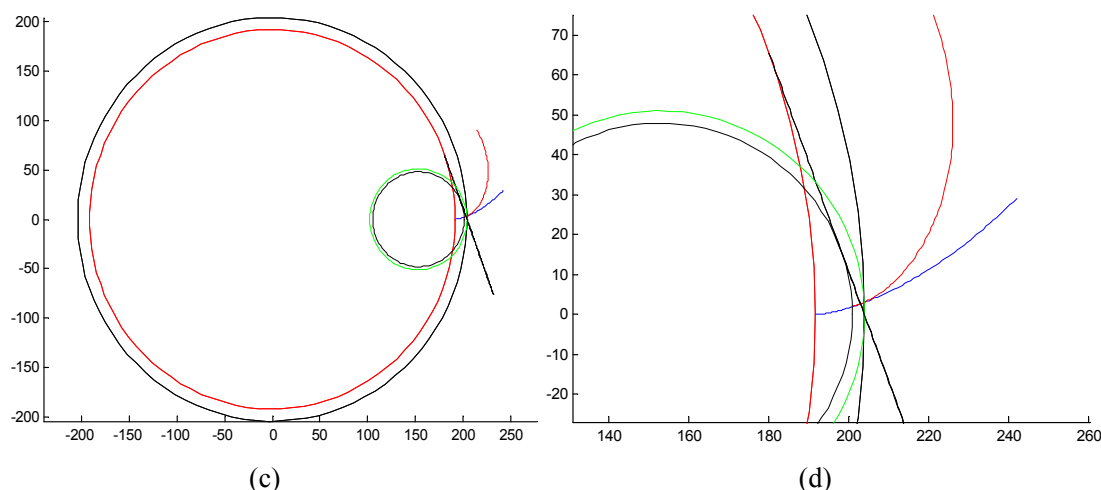


图 2.6 渐开线内啮合图形

Fig 2.6 Internal engagement of involute curves

图 2.6 (a)为内齿轮 1 上的渐开线图像, (b)为小齿轮 2 上的渐开线; (c)为平面渐开线的啮合示意图, (d)为啮合部分放大图。可以观察到, 两渐开线啮合在一点处; 啮合线为两齿轮副基圆的公切线, 同时它也是两渐开线的发生线和两渐开线在啮合点处的公法线。上述特点基本符合渐开线性质, 从而验证内啮合共轭曲线基本原理可行。

2.4.2 空间圆柱螺旋线内啮合形式

在齿轮传动中常见的曲线中, 圆柱螺旋线主要应用于平行轴圆柱齿轮中如渐开线斜齿轮, 具有一般螺旋线的特点, 既可实现外啮合, 又能进行内啮合。下面以空间圆柱螺旋线作为实例, 验证内啮合共轭曲线基本原理。

假定空间圆柱螺旋线 1(内齿轮上)的一般方程为

$$\mathbf{r}_{c1} = x_{c1}\mathbf{i}_1 + y_{c1}\mathbf{j}_1 + z_{c1}\mathbf{k}_1 \quad (2.42)$$

式中

$$\begin{cases} x_{c1} = r \cos \theta_c \\ y_{c1} = r \sin \theta_c \\ z_{c1} = p\theta_c \end{cases}$$

其中: r ——圆柱螺旋线所在分度圆柱半径;

θ_c ——螺旋线角度参数;

p ——螺旋线参数。

将式(2.32)代入式(2.13)中, 计算得出相对运动速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{c1}^{(12)} = & [-(\omega_1 - \omega_2)r \sin \theta_c + \omega_2 a \sin \phi_1]\mathbf{i}_1 \\ & + [(\omega_1 - \omega_2)r \cos \theta_c + \omega_2 a \cos \phi_1]\mathbf{j}_1 \end{aligned} \quad (2.43)$$

然后，求解沿指定接触方向的法向矢量关系，将式(2.32)对 θ_c 求一阶、二阶导函数，结果如下：

$$\begin{cases} x_{c1}' = -r \sin \theta_c \\ y_{c1}' = r \cos \theta_c \\ z_{c1}' = p \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} x_{c1}'' = -r \cos \theta_c \\ y_{c1}'' = -r \sin \theta_c \\ z_{c1}'' = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

于是，可以计算得到主法向矢量、副法向矢量分别为

$$\begin{cases} \beta_{x1} = -\frac{r \cos \theta_c}{r^2 + p^2} \\ \beta_{y1} = -\frac{r \sin \theta_c}{r^2 + p^2} \\ \beta_{z1} = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\begin{cases} \gamma_{x1} = \frac{rp \sin \theta_c}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \gamma_{y1} = -\frac{rp \cos \theta_c}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \gamma_{z1} = \frac{r^2}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (2.47)$$

因此，可以得到沿指定接触角方向的法向矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{ca_0} = & \left[-u \frac{r \cos \theta_c}{r^2 + p^2} + v \frac{rp \sin \theta_c}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathbf{i}_1 + \left[-u \frac{r \sin \theta_c}{r^2 + p^2} - v \frac{rp \cos \theta_c}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathbf{j}_1 \\ & + v \frac{r^2}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (2.48)$$

将式(2.33)与式(2.38)代入式(2.27)中，计算并化简可以得到相应啮合方程的表达式为

$$u \sin(\theta_c + \phi_1) = m - m \cos(\theta_c + \phi_1) \quad (2.49)$$

式中

$$m = \frac{vp}{(r^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

依照公式(2.29)和(2.30)分别求得圆柱螺旋线 1 在内啮合条件下的共轭曲线方程为

$$\begin{cases} x_2 = r \cos[(1-i_{21})\phi_1 + \theta_c] - a \cos(i_{21}\phi_1) \\ y_2 = r \sin[(1-i_{21})\phi_1 + \theta_c] + a \cos(i_{21}\phi_1) \\ z_2 = p\theta_c \\ \sin(\theta_c + \phi_1) = \frac{m}{u} - \frac{m}{u} \cos(\theta_c + \phi_1) \end{cases} \quad (2.50)$$

啮合线方程为

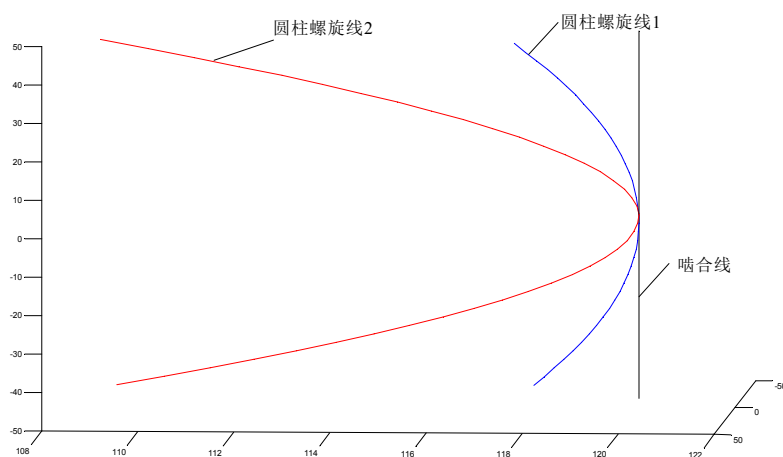
$$\begin{cases} x_{line} = r \cos(\phi_1 + \theta_c) \\ y_{line} = r \sin(\phi_1 + \theta_c) \\ z_{line} = p\theta_c \end{cases} \quad (2.51)$$

给出圆柱螺旋线参数如表 2.2 所示, 编制 MATLAB 程序并输出结果观察分析。

表 2.2 圆柱螺旋线参数

Table 2.2 Parameters of cylindrical spiral curve	
变量参数	参数值
圆柱螺旋线 1 分度圆柱半径 r_1 /(mm)	120
圆柱螺旋线 2 分度圆柱半径 r_2 /(mm)	24
中心距 a /(mm)	96
传动比 i_{21}	5
螺旋角 β /(°)	26.68
螺旋线角度参数 θ_c /(rad)	$-2\pi \sim 2\pi$
接触角主法向矢量方向系数 u	$-\cos 25^\circ$
接触角副法向矢量方向系数 v	$-\sin 25^\circ$

程序输出结果如图所示



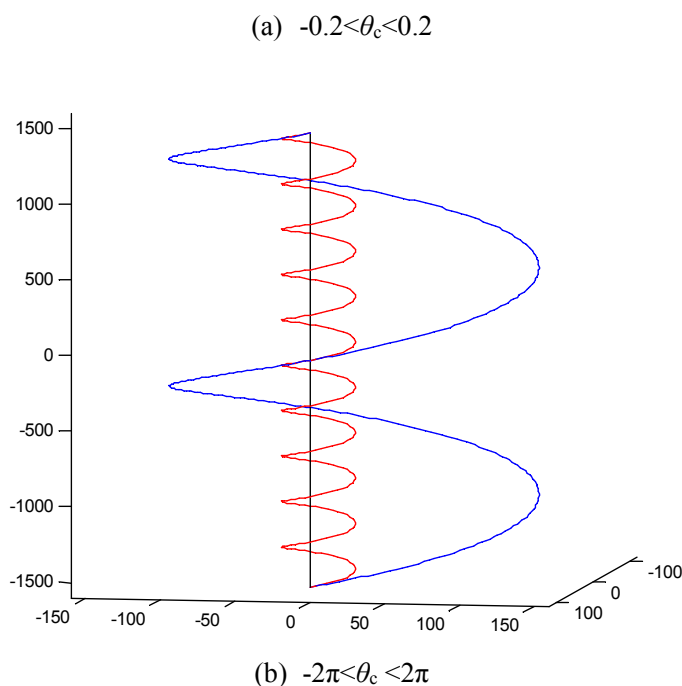


图 2.7 圆柱螺旋线内啮合图形

Fig 2.7 Inner engagement of cylindrical spiral curves

从图 2.7 (a)中可以观察到,两配对的空间圆柱螺旋线是点接触形式,它们的啮合线是过接触点沿 z 轴方向的空间直线;图 2.7(b)中表示了在 $(-2\pi < \theta_c < 2\pi)$ 参数范围中,两圆柱螺旋线的内啮合状况,其啮合图形很清晰地显示出一对空间圆柱螺旋曲线在内啮合条件下能够满足连续的运动及啮合条件。进一步验证了内啮合共轭曲线基本原理的可行性与正确性。

综上所述,通过实例分析,验证了内啮合共轭曲线基本原理在平面及空间内啮合传动中应用的可行性。本章研究内容为后文进一步进行内齿轮齿形、齿廓的选择与设计,完善本文研究内容奠定了基础。

2.5 本章小结

本章在共轭曲线啮合理论的研究基础上,开展内啮合曲线对构齿轮基本啮合原理的数学描述,主要包括内啮合传动坐标系建立及坐标变换关系、相对运动条件确定、接触点处沿给定接触方向法矢量推导、啮合函数关系建立、共轭曲线及啮合线方程形成等,并通过平面及空间曲线实例验证了相关结论,为后续齿面及模型构建与分析奠定理论基础。

主要内容有:

① 完成了内啮合曲线对构齿轮基本啮合原理的数学描述:建立了内啮合曲线啮合传动坐标系,并且详细推导得到了各坐标之间的矩阵变换关系;分析确定了

内啮合状态下，两曲线接触点处相对运动速度的数学表达式；推导了曲线接触点处沿给定接触角方向的法矢量表达式；建立了描述两曲线内啮合运动的啮合方程式；给出了给定曲线在内啮合状态下的共轭曲线一般方程，及两曲线的啮合线方程式。

② 以平面渐开线、空间圆柱螺旋线为实例，基于 MATLAB 数值图像分析，分别验证了内啮合共轭曲线基本原理的正确性与可行性。

3 内啮合齿面成型理论与基本方法

3.1 引言

作为几何图形,曲线与曲面都以作为接触元素。但与曲面相比,一对具备共轭运动关系的曲线并不能直接应用于齿轮传动中,因为曲线的几何性质使得它不能直接承载,无法满足齿轮传递运动和动力的需求。事实上,齿轮传动依靠的是彼此满足啮合基本定律的一对齿面进行啮合接触来完成的。要获得一对满足啮合基本定律的齿面,我们需要利用选定的齿廓曲线,通过运用一定的齿面成形方法来最终构建出这样一对齿面。要构建一对满足传动需求的轮齿齿面,我们需要运用齿面成形方法解决以下两个问题:首先是一条曲线无法单独确定一个曲面,需要找到相应的方法建立曲线与曲面的“联系”;二是,要保证构建出的曲面要继承共轭曲线所具有的优良啮合特性。

本章将提出齿面成型基本理论及一般方法,以空间圆柱螺旋线为共轭曲线对,构建用于内啮合曲线对构齿轮传动的点啮合凸凹齿轮副。分别介绍等距包络法、齿廓螺旋运动法及轮齿基本齿条法构的基本内容,并运用三种方法分别建立内啮合曲线对构齿轮的啮合齿轮副,建立相应的基本数学模型。

3.2 等距包络法

共轭曲线啮合管齿面的概念,是在共轭曲线基本啮合原理和齿轮传递动力实际需求的基础上提出的;啮合管齿面是通过以适当半径的球面沿曲线的指定等距线运动包络形成的,主要分为两个步骤:求解共轭曲线法向等距曲线和单参数球族的包络面成形^[36]。

3.2.1 求解共轭曲线法向等距曲线

如图 3.1 所示,求解共轭曲线沿指定接触方向的法向等距线,是构建啮合管齿面的第一步。在第二章 2.3.3 小节中,我们已经求解了共轭曲线沿指定接触方向的法向量公式(2.19),将其按照公式(3.1)进行单位化。

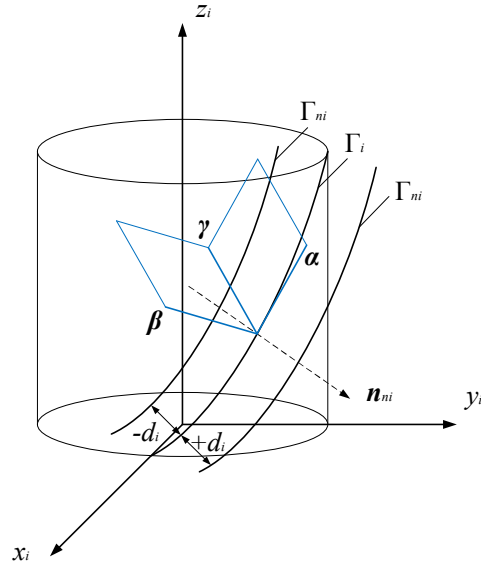


图 3.1 共轭曲线的法向等距线

Fig 3.1 The normal equidistance line of the conjugate curve

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|} = e_{x_i} \mathbf{i}_i + e_{y_i} \mathbf{j}_i + e_{z_i} \mathbf{k}_i \quad (3.1)$$

式中

$$\begin{cases} e_{x_i} = \frac{u\beta_{x_i(t)} + v\gamma_{x_i(t)}}{\sqrt{(u\beta_{x_i(t)} + v\gamma_{x_i(t)})^2 + (u\beta_{y_i(t)} + v\gamma_{y_i(t)})^2 + (u\beta_{z_i(t)} + v\gamma_{z_i(t)})^2}} \\ e_{y_i} = \frac{u\beta_{y_i(t)} + v\gamma_{y_i(t)}}{\sqrt{(u\beta_{x_i(t)} + v\gamma_{x_i(t)})^2 + (u\beta_{y_i(t)} + v\gamma_{y_i(t)})^2 + (u\beta_{z_i(t)} + v\gamma_{z_i(t)})^2}} \\ e_{z_i} = \frac{u\beta_{z_i(t)} + v\gamma_{z_i(t)}}{\sqrt{(u\beta_{x_i(t)} + v\gamma_{x_i(t)})^2 + (u\beta_{y_i(t)} + v\gamma_{y_i(t)})^2 + (u\beta_{z_i(t)} + v\gamma_{z_i(t)})^2}} \end{cases}$$

式(3.1)可计算共轭曲线对中的任意一条曲线的指定接触方向的法向矢量,特别地,根据第二章坐标系变换关系, \mathbf{e}_1 与 \mathbf{e}_2 存在如下关系:

$$\begin{cases} e_{x_2} = \cos[(1-i_{21})\phi]e_{x_1} - \sin[(1-i_{21})\phi]e_{y_1} \\ e_{y_2} = \sin[(1-i_{21})\phi]e_{x_1} + \cos[(1-i_{21})\phi]e_{y_1} \\ e_{z_2} = e_{z_1} \end{cases} \quad (3.2)$$

共轭曲线法向等距线是通过共轭曲线上的每一个点均向它的指定接触方向的法向方向等距偏移得到的,于是我们可以写出共轭曲线的等距线方程

$$\mathbf{r}_{di} = \mathbf{r}_i \pm d_i \mathbf{e}_i \quad (3.3)$$

式中

$$\begin{cases} x_{di} = x_i(t) \pm d_i e_{x_i} \\ y_{di} = y_i(t) \pm d_i e_{y_i} \\ z_{di} = z_i(t) \pm d_i e_{z_i} \end{cases}$$

其中 i 为编号取 1 或 2; d_i ——偏移距离; “ \pm ” 分别指等距方向与指定接触方向的法向矢量相同或相反。

综上所述, 只要选取合适的等距方向与偏移距离, 我们可以计算得到一对内啮合的共轭曲线的等距曲线, 再而构建相应的啮合管面。

3.2.2 单参数球族的包络面成形

如图 3.2 所示, 在共轭曲线所在直角坐标系 S_i 中, 新建立一个球面动坐标系 $S_r(O_r-x_r, y_r, z_r)$, 其原点 O_r 是位于共轭曲线的法向等距线上的点, 各坐标轴的正方向与 S_i 各轴对应相同。当球面沿共轭曲线的法向等距曲线运动, 就可以形成一个啮合管面。

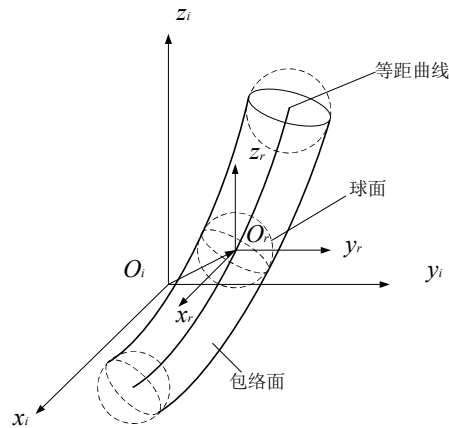


图 3.2 球面族的包络面

Fig 3.2 Enveloping surface of sphere family

假定在 S_r 下, 球面方程为

$$\begin{cases} x_r = h_i \cos \varphi \cos \alpha \\ y_r = h_i \cos \varphi \sin \alpha \\ z_r = h_i \sin \varphi \end{cases} \quad (3.4)$$

式中, h_i 为球面半径, 与上文等距线偏移距离 d_i 相等; φ 、 α 为球面参数, 范围分别为 $-\pi/2 \sim \pi/2$, $0 \sim 2\pi$ 。

可以写出坐标系 S_r 到 S_i 变换关系

$$\mathbf{r}_{ri} = \mathbf{M}_{ir} \mathbf{r}_r \quad (3.5)$$

式中

$$\mathbf{M}_{ir} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{di}(t) \\ 0 & 1 & 0 & y_{di}(t) \\ 0 & 0 & 1 & z_{di}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进一步地，式(3.5)可以写成

$$\begin{cases} x_{ri} = x_r + x_{di}(t) \\ y_{ri} = y_r + y_{di}(t) \\ z_{ri} = z_r + z_{di}(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

根据微分几何中的知识，如果球面族 $\{\Sigma_r\}$ 的包络面存在，则有如下方程式(3.7)成立。

$$\Phi(\alpha, \varphi, t) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{ri}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{ri}}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{ri}}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

其中，可以计算得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_{ri}}{\partial \alpha} &= \{-d_i \cos \varphi \sin \alpha, d_i \cos \varphi \cos \alpha, 0\} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{ri}}{\partial \varphi} &= \{-d_i \sin \varphi \cos \alpha, -d_i \sin \varphi \sin \alpha, d_i \cos \varphi\} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{ri}}{\partial t} &= \{x'_{di}(t), y'_{di}(t), z'_{di}(t)\} \end{aligned}$$

于是，联立式(3.6)与(3.7)，我们可以写出啮合管面方程

$$\begin{cases} x_{\Sigma i} = x_{di}(t) + d_i \cos \varphi \cos \alpha \\ y_{\Sigma i} = y_{di}(t) + d_i \cos \varphi \sin \alpha \\ z_{\Sigma i} = z_{di}(t) + d_i \sin \varphi \\ \Phi(\alpha, \varphi, t) = 0 \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (3.8)$$

得到一对共轭曲线的啮合管面后，我们可以在根据齿轮参数确定齿顶、齿根圆半径后，用齿顶圆柱面和齿根圆柱面去截取相应的啮合管面，即可得到相应的共轭齿面。

通过改变两啮合管面的相对位置及半径，可以获得凸-凸接触、凸-平接触和凸-凹接触三种不同的接触方式，明显凸凹接触的方式齿面接触强度更高，更适合应用于生产实际。

3.2.3 内啮合管实例

在第二章我们以圆柱螺旋线为例验证了得到的内啮合曲线对构齿轮的基本啮合原理，本小节我们再次以圆柱螺旋线为例，计算得到相应的啮合管齿面。

将第二章中的一对共轭圆柱螺旋线式(2.32)与式(2.40)，分别代入等距曲线求解

公式(3.3)中, 由于两曲线是内啮合形式, 两等距曲线方程中均选择“+”号。等距曲线方程具体如下:

$$\begin{cases} x_{d1} = r \cos \theta_c + d_1 \frac{n_{x_1}}{\sqrt{n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2}} \\ y_{d1} = r \cos \theta_c + d_1 \frac{n_{y_1}}{\sqrt{n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2}} \\ z_{d1} = p\theta_c + d_1 \frac{n_{z_1}}{\sqrt{n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2}} \end{cases} \quad (3.9)$$

与

$$\begin{cases} x_{d2} = (r-a) \cos(i_{21}\theta_c) + d_2 \frac{n_{x_2}}{\sqrt{n_{x_2}^2 + n_{y_2}^2 + n_{z_2}^2}} \\ y_{d2} = (r-a) \sin(i_{21}\theta_c) + d_2 \frac{n_{y_2}}{\sqrt{n_{x_2}^2 + n_{y_2}^2 + n_{z_2}^2}} \\ z_{d2} = p\theta_c + d_2 \frac{n_{z_2}}{\sqrt{n_{x_2}^2 + n_{y_2}^2 + n_{z_2}^2}} \end{cases} \quad (3.10)$$

再将上两式分别代入式(3.8)中, 可以得到相应的啮合管面方程:

$$\begin{cases} x_{g1} = r \cos \theta_c + d_1 \frac{n_{x_1}}{\sqrt{n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2}} + d_1 \cos \varphi_1 \cos \alpha_1 \\ y_{g1} = r \cos \theta_c + d_1 \frac{n_{y_1}}{\sqrt{n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2}} + d_1 \cos \varphi_1 \sin \alpha_1 \\ z_{g1} = p\theta_c + d_1 \frac{n_{z_1}}{\sqrt{n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2}} + d_1 \sin \varphi_1 \\ \varphi_1 = \varphi_1(\theta_c, \alpha) \end{cases} \quad (3.11)$$

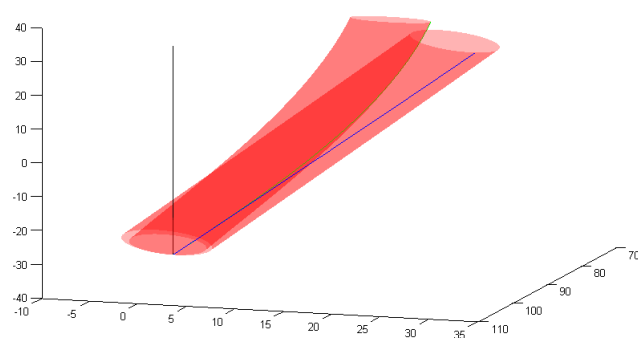
与

$$\begin{cases} x_{g2} = (r-a) \cos(i_{21}\theta_c) + d_2 \frac{n_{x_2}}{\sqrt{n_{x_2}^2 + n_{y_2}^2 + n_{z_2}^2}} + d_2 \cos \varphi_2 \cos \alpha_2 \\ y_{g2} = (r-a) \sin(i_{21}\theta_c) + d_2 \frac{n_{y_2}}{\sqrt{n_{x_2}^2 + n_{y_2}^2 + n_{z_2}^2}} + d_2 \cos \varphi_2 \sin \alpha_2 \\ z_{g2} = p\theta_c + d_2 \frac{n_{z_2}}{\sqrt{n_{x_2}^2 + n_{y_2}^2 + n_{z_2}^2}} + d_2 \sin \varphi_2 \\ \varphi_2 = \varphi_2(\theta_c, \alpha_2) \end{cases} \quad (3.12)$$

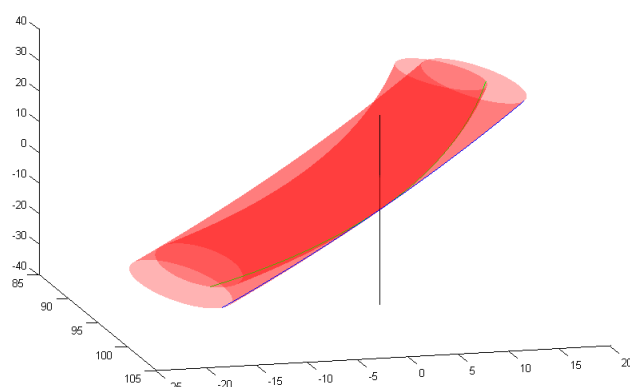
选取如表 3.1 参数。将各参数代入相应方程表达式中，在 MATLAB 中编写程序输出啮合管面图像。

表 3.1 内啮合管面参数

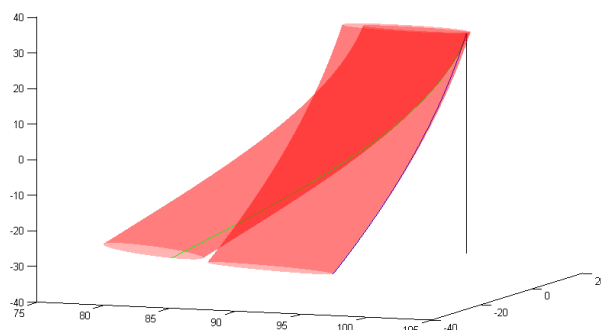
Table 3.1 Parameters of internal meshing tubular surfaces	
变量参数	参数值
圆柱螺旋线 1 分度圆柱半径 r_1/mm	100
圆柱螺旋线 2 分度圆柱半径 r_2/mm	20
中心距 a/mm	80
圆柱螺旋线 1 法向等距距离 d_1/mm	4.8
圆柱螺旋线 2 法向等距距离 d_2/mm	4
传动比 i_{21}	5
法面模数 m_n/mm	6
螺旋角 $\beta/^\circ$	25.841
内齿轮 1 齿数 z_1	30
小齿轮 2 齿数 z_2	6
参数取值范围 θ_c/rad	-0.15~0.15
接触角主法矢量方向参数 u	$-\cos 30^\circ$
接触角副法矢量方向参数 v	$-\sin 30^\circ$



(a)



(b)



(c)

图 3.3 啮合管面内啮合图像

Fig 3.3 Internal meshing schematic of meshing tubular surfaces

如图 3.3 所示, (a)为两啮合管在初始点位置啮合, (b)为在中间位置啮合, (c)为在末端位置啮合。可以发现, 两啮合的啮合点是两共轭曲线的啮合点, 随着管面的转动, 沿啮合线不断上升, 这说明这一对内啮合管面可以满足连续啮合的要求, 能够作为一对齿面元素进行传动。

3.3 齿廓螺旋运动法

等升距圆柱螺旋面(后文简称圆柱螺旋面)是圆柱齿轮传动中最常用的齿面, 齿廓曲线作等速圆柱螺旋运动所得到曲面就是等升距圆柱螺旋面。下面将给出该圆柱螺旋面的数学推导过程。

3.3.1 基本原理

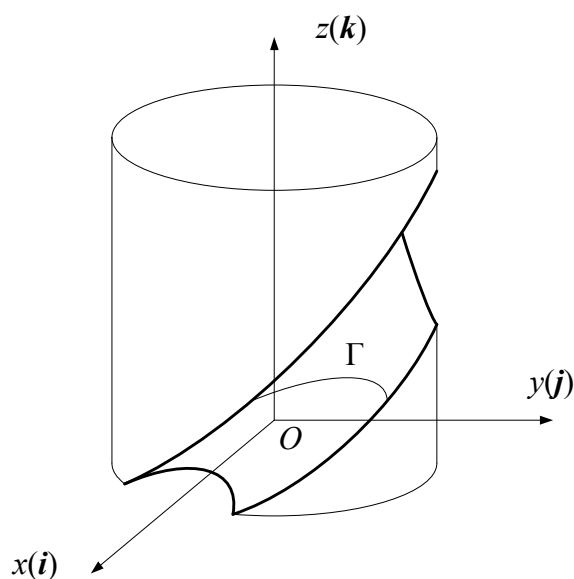


图 3.4 曲线螺旋运动形成圆柱螺旋面

Fig 3.4 Cylindrical spiral surface formed by curvilinear spiral motion

如图 3.4 所示，一个空间固定三维直角坐标系 $S(O-x,y,z)$ ，其坐标轴单位方向矢量分别为 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} 。坐标系 S 中有一段空间齿廓曲线 Γ ，它的方程为

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t) \quad (3.13)$$

式中

$$\begin{cases} x_0 = x_0(t) \\ y_0 = y_0(t) \\ z_0 = z_0(t) \end{cases}$$

其中， t 为曲线变量参数。

令曲线 Γ 一方面绕 z 轴等速转动，同时又沿 z 轴等速移动，这样的运动称为螺旋运动^[62]。此时，曲线 Γ 的空间运动轨迹就是等升距圆柱螺旋面，它的轴线是 $z(k)$ 轴，而曲线 Γ 是圆柱螺旋面的母线。当曲线 Γ 的移动和转动方向符合右手法则，即右手拇指指向为移动方向，其余四指弯曲方向为转动方向，那么这个螺旋面为右旋螺旋面；反之，螺旋面即为左旋螺旋面。

利用矢量回转公式^[62]，可以写出右旋螺旋面的方程式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)(\mathbf{k}, \theta)^R + p\theta\mathbf{k} \quad (3.14)$$

式中

$$\begin{cases} x = x_0(t)\cos\theta - y_0(t)\sin\theta \\ y = x_0(t)\sin\theta + y_0(t)\cos\theta \\ z = z_0(t) + p\theta \end{cases}$$

其中, θ 为转角变量参数, 它表示母线由起始位置绕 z 轴转过的角度, 以顺时针方向转动为正; p 为螺旋参数, 表示为当母线 Γ 绕 z 轴转过单位角度时, 母线在轴线方向上移动的距离。

对于左旋面, 只需要更改式(3.14)中的 $p\theta$ 的符号为负号即可。

3.3.2 圆弧齿廓螺旋面

当选择圆弧齿廓时, 曲线对构齿轮就是圆弧齿轮。在正常齿形的圆弧齿轮传动中, 凸齿法面圆弧圆心与节点重合, 凹齿法面圆弧圆心不与节点重合, 如图 3.5 所示: $S_{nl}(O_{nl}-x_{nl}, y_{nl}, z_{nl})$ 与 $S_{nr}(O_{nr}-x_{nr}, y_{nr}, z_{nr})$ 与齿轮固联的法平面坐标系, O_n 在齿轮节圆弧上, 圆弧圆心的坐标为 (e, l) , 对于凸齿有 $e=l=0$; 对于凹齿, e 与 l 均不为 0。

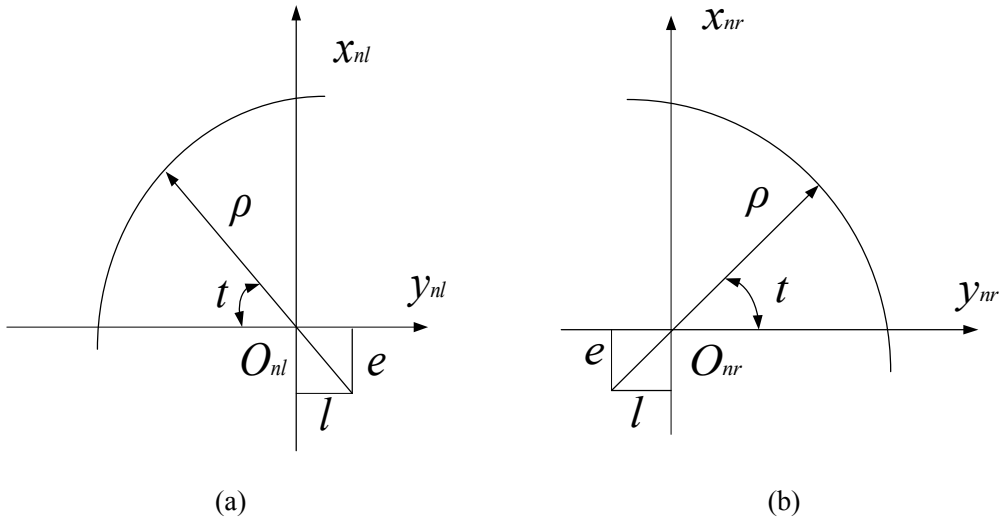


图 3.5 法面圆弧齿廓: (a)左侧; (b)右侧

Fig 3.5 Circular arc in the normal plane:(a) Left-side;(b)Right-side

于是, 可以写出法面圆弧齿廓的方程

$$\begin{cases} x_n = \rho \sin t - e \\ y_n = \pm(-\rho \cos t + l) \\ z_n = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

式中, 左侧齿廓方程取上侧符号, 右侧齿廓方程取下侧符号, 下同。需要注意的是在运用以上两式, 求解左右两侧齿面时, 它们所在法面坐标系原点是不重合的。

得到法面齿廓后, 需要将它变换到齿轮端面上, 具体变换关系^[37]如下

$$\mathbf{r}_0 = M_{0n} \mathbf{r}_n \quad (3.16)$$

式中

$$M_{0n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以写出圆弧齿廓在端面的具体方程式为

$$\begin{cases} x_0 = \rho \sin t - e + r \\ y_0 = \pm(-\rho \cos t + l) \cos \beta \\ z_0 = \mp(-\rho \cos t + l) \sin \beta \end{cases} \quad (3.17)$$

于是可以得到圆弧齿廓的圆柱螺旋面方程

$$\begin{cases} x = (\rho \sin t - e + r) \cos \theta \mp (-\rho \cos t + l) \cos \beta \sin \theta \\ y = (\rho \sin t - e + r) \sin \theta \pm (-\rho \cos t + l) \cos \beta \cos \theta \\ z = \pm(-\rho \cos t + l) \sin \beta + r \theta \cot \beta \end{cases} \quad (3.18)$$

3.3.3 抛物线齿廓螺旋面

除了圆弧之外，抛物线也可以作为齿廓曲线，当抛物线与圆弧啮合时，在理论上可以存在两个接触点，从而实现双点接触，如图 3.6 所示。

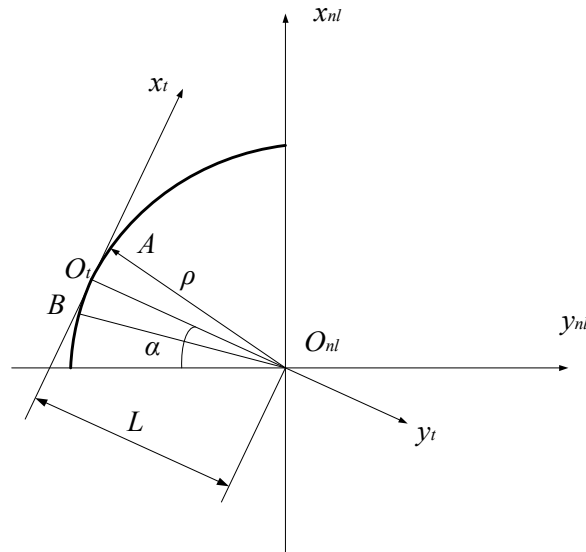


图 3.6 法面抛物线齿廓

Fig 3.6 Parabolic curve in normal plane

$S_{nl}(O_{nl}-x_{nl}, y_{nl}, z_{nl})$ 为左侧法面齿廓坐标系， $S_t(O_t-x_t, y_t, z_t)$ 也法平面内， y_t 轴与 y_{nl} 轴相交成角 α ，原点 O_t 与 O_{nl} 之间的距离为 L 。

可以写出抛物线方程

$$\begin{cases} x_n = t \cos \alpha - \frac{t^2}{2p} \sin \alpha + L \sin \alpha \\ y_n = \pm(t \sin \alpha + \frac{t^2}{2p} \cos \alpha - L \cos \alpha) \\ z_n = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

式中, t 为抛物线变量参数; p 为抛物线参数; 左侧齿廓取“+”, 右侧齿廓取“-”。

于是可以写出抛物线螺旋面方程

$$\begin{cases} x = (t \cos \alpha - \frac{t^2}{2p} \sin \alpha + L \sin \alpha) \cos \theta - [\pm(t \sin \alpha + \frac{t^2}{2p} \cos \alpha - L \cos \alpha) \cos \beta] \sin \theta \\ y = (t \cos \alpha - \frac{t^2}{2p} \sin \alpha + L \sin \alpha) \sin \theta + [\pm(t \sin \alpha + \frac{t^2}{2p} \cos \alpha - L \cos \alpha) \cos \beta] \cos \theta \\ z = -[\pm(t \sin \alpha + \frac{t^2}{2p} \cos \alpha - L \cos \alpha)] \sin \beta + r \theta \cot \beta \end{cases} \quad (3.20)$$

3.4 基本齿条法

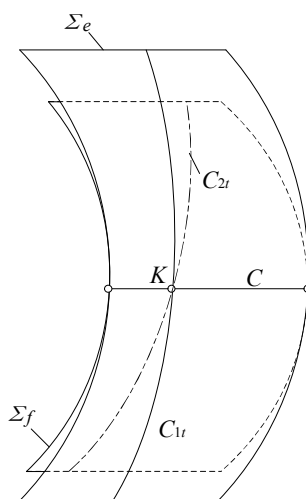


图 3.7 间接包络法形成共轭曲面

Fig 3.7 The formation of conjugate surface
by indirect envelope method

如图 3.7 所示, 为间接包络法生成共轭曲面的原理图。使一对辅助曲面 Σ_e 、 Σ_f 在保持沿一条曲线 C 相切接触的基础上固连在一起; 当 Σ_e 与齿面 1 一起作共轭运动时, 会形成曲面 Σ_1 , 而在每一个时刻 t , Σ_e 与 Σ_1 的接触线为 C_{1t} ; 同样地, Σ_f 与

齿面 2 作共轭运动时, 会形成曲面 Σ_2 , 在每一个时刻 t , Σ_f 与 Σ_2 的接触线为 C_{2t} ; 由于 Σ_e 、 Σ_f 是固定连接在一起的, 因此 C_{1t} 与 C_{2t} 均相交于曲线 C 上一点 K , 即 Σ_1 、 Σ_2 在 C 上均有一个接触点 K ; 将辅助面 Σ_e 、 Σ_f 抽去后, 曲面 Σ_1 与 Σ_2 将通过点 K 进行啮合运动。我们将这些辅助曲面称为假想齿条的齿面, 将假想齿条称为基本齿条, 齿条上某截面内的齿形称为基本齿廓^[64]。可以运用这个方法构建内啮合曲线对构齿轮的轮齿齿面。

3.4.1 坐标系及变换关系

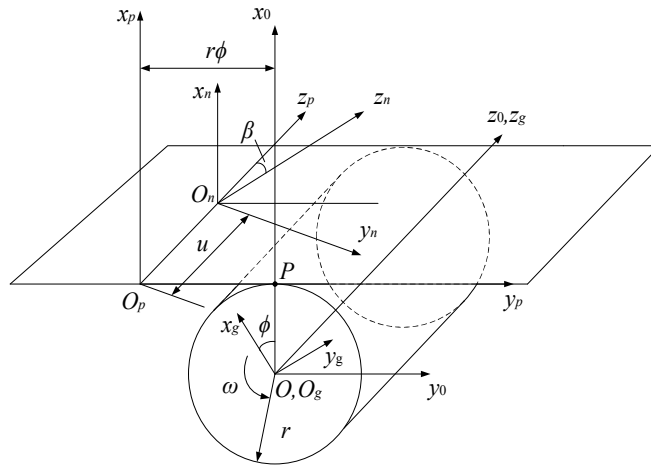


图 3.8 基本齿条展成轮齿齿面

Fig 3.8 Spreading tooth surface from basic rack

如图 3.8 建立坐标系: $S_n(O_n-x_n, y_n, z_n)$ 为齿条的法截面坐标系, 基本齿廓建立在这个坐标系中, $O_n x_n y_n$ 平面与齿条端面夹角为螺旋角 β ; $S_p(O_p-x_p, y_p, z_p)$ 为与齿条固连的动坐标系; $S_g(O_g-x_g, y_g, z_g)$ 为与齿轮固连的动坐标系; $S(O-x, y, z)$ 为固定坐标系。

可以写出各坐标系变换关系

S_n 与 S_p 之间:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{pn}(u) \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{np}(u) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

其中

$$\mathbf{M}_{pn}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & u \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & u \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{np}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & -u \sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & -u \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S_p 与 S_g 之间:

$$\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{gp}(\phi) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{pg}(\phi) \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

其中

$$\mathbf{M}_{gp}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & r(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & r(\sin \phi - \phi \cos \phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{pg}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & -r(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & -r(\sin \phi - \phi \cos \phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4.2 求解啮合方程

齿轮与齿条的共轭运动就是齿轮节圆柱平面与齿条节平面之间相互纯滚动，在齿面共轭运动中，接触点 K 处必有以下条件成立：该点处两齿面的相对运动速度应该位于通过该点的两齿面的公切面内^[64]，即为满足：在 S_p 下

$$\Phi(t, u, \phi) = \mathbf{n}_{pg} \cdot \mathbf{v}_{pg} = 0 \quad (3.25)$$

式中 \mathbf{n}_{pg} 为公法线矢量； \mathbf{v}_{pg} 为相对运动速度矢量。

分别求解 \mathbf{n}_{pg} 与 \mathbf{v}_{pg} ，

$$\mathbf{n}_{pg} = \frac{\partial \mathbf{r}_p(u, t)}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}_p(u, t)}{\partial u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_p & \mathbf{j}_p & \mathbf{k}_p \\ x_n'(t) & y_n'(t) \cos \beta & -y_n'(t) \sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} y_n'(t) \\ -x_n'(t) \cos \beta \\ x_n'(t) \sin \beta \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{v}_{pg} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{PK} = \boldsymbol{\omega} \begin{bmatrix} y_p(u, t) \cos \beta - r\phi \\ -x_p(u, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

式中 \mathbf{PK} 为节点 P 到接触点 K 的矢量，为 $\mathbf{PK} = x_p(u, t)\mathbf{i}_p + (y_p(u, t) - r_1\phi_1)\mathbf{j}_p + z_p(u, t)\mathbf{k}_p$ ； $\boldsymbol{\omega}$ 为齿轮角速度矢量， $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{k}_p$ 。

于是可以求得啮合方程为

$$\phi = \frac{1}{r} [u \sin \beta + y_n(t) \cos \beta + \frac{x_n(t)x_n'(t)}{y_n'(t)} \cos \beta] \quad (3.28)$$

3.4.3 齿面方程

齿轮齿面是假想齿条上满足啮合方程的点通过坐标变换得到的，联立式(3.19)、(3.21)与(3.26)，可以得到齿面方程为

$$\begin{cases} x_g(t, \phi) = x_n(t) \cos \phi - [y_n(t) \cos \beta + u \sin \beta] \sin \phi + r(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ y_g(t, \phi) = x_n(t) \sin \phi + [y_n(t) \cos \beta + u \sin \beta] \cos \phi + r(\sin \phi - \phi \cos \phi) \\ z_g(t, \phi) = -y_n(t) \sin \beta + u \cos \beta \\ \phi = \frac{1}{r} [u \sin \beta + y_n(t) \cos \beta + \frac{x_n(t)x_n'(t)}{y_n'(t)} \cos \beta] \end{cases} \quad (3.29)$$

因此，当我们给定齿轮的法截面齿廓方程后，可以运用基本齿条法求解出相应的圆柱螺旋齿面方程。

以上三种齿面成形方法，等距球族包络法成形的啮合管齿面是继承了共轭曲线优良啮合性质，是一种新型的齿面，其接触点位于节圆柱面上，理论上可以实现纯滚动接触，具有优良的传动性能，但是单啮合管啮合不能实现多点接触，有一定的限制。齿廓螺旋运动法是通过齿廓曲线按给定的螺旋参数进行螺旋运动来获得齿面的，没有运用包络原理，因此方法相对比较简单，也可以实现单点和多点接触，成形的齿面具有多样性。基本齿条法基于共轭曲面啮合原理，属于间接包络法，可以成形多种齿面，单点接触与多点接触均可以实现，是一种成熟的齿面成形方法，但是利用这种方法成形的齿面与理论齿面是有一定误差的。

3.5 本章小结

本章提出齿面成型基本理论及一般方法,分别介绍了等距包络法、齿廓螺旋运动法及轮齿基本齿条法的基本内容,并运用这三种方法分别构建内啮合曲线对构齿轮的啮合副,建立了相应的齿面数学模型;分析了三种齿面成型方法的特点。

本章的主要内容:

① 论述了等距包络法的基本原理和啮合管齿面的构建方法,建立了等距曲线与啮合管面的数学方程,并运用该数学模型构建了内啮合的曲线对构齿轮的齿面副,并进行了齿面啮合分析;

② 介绍了齿廓螺旋运动法的基本原理与数学模型,并运用该模型分别讨论了以圆弧和抛物线为法面齿廓的情形,分别建立了圆弧螺旋齿面方程与抛物线螺旋齿面方程;

③ 介绍了间接包络法成型曲面的原理,详细阐述了轮齿基本齿条法构的内容,完成了成型坐标系构建及坐标变换关系推导、齿面相对运动关系函数建立和齿轮齿面数学方程的构建。

④ 针对等距包络法、齿廓螺旋运动法和轮齿基本齿条法,分析了三种方法及构建的齿面存在的优缺点。

4 内啮合共轭齿面齿形设计与基本模型

4.1 引言

齿形是齿轮传动设计中的重要环节之一，也是齿轮传动发展进程的标志之一。与渐开线齿轮传动不同，曲线对构齿轮是依靠轴向重合度完成连续性传动，在端面上不存在重合度，即其端面齿廓不是共轭齿廓，因此我们需要对它的齿形进行设计；依照基本齿条法，将法平面内的齿条齿形规定为内啮合曲线对构齿轮的基本廓，在此基础上进行齿形设计。齿轮传动方案的确定，同样需要进行齿轮基本几何参数的选取，齿轮各几何参数之间存在着紧密联系，各参数的取值对齿轮传动质量高低有着极其密切的关系；因此讨论齿轮基本几何参数的选取方法，获得合理齿轮几何参数方案，对于内啮合曲线对构齿轮传动的设计同样是必不可少的内容。

本章提出内啮合曲线对构齿轮齿形设计方案，简要分析内啮合曲线对构齿轮齿形设计原则，开展几何及齿形参数设计，完成单点接触和双点接触两种形式的基本齿廓构型，建立齿轮三维实体模型并进行运动仿真分析。

4.2 齿轮几何参数与齿形参数

4.2.1 齿轮基本几何参数

内啮合曲线对构齿轮的主要几何参数有：法面模数 m_n 、小齿轮齿数 z_1 、螺旋角 β 、纵向重合度 ε_β 、齿宽系数 φ_d (或 φ_a)等，各参数间有如下关系成立：

$$d = \frac{m_n z}{\cos \beta} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{b}{p_x} = \frac{b \sin \beta}{\pi m_n} \quad (4.2)$$

$$\varphi_d = \frac{b}{d} = \frac{\pi \varepsilon_\beta}{z \tan \beta} \quad (4.3)$$

$$\varphi_a = \frac{b}{a} = \frac{2}{1+u} \varphi_d = \frac{2\pi \varepsilon_\beta}{(z_1 + z_2) \tan \beta} \quad (4.4)$$

式(4.4)中， a 为中心距； u 为齿轮副齿数之和。

① 法面模数 m_n 与小齿轮齿数 z_1

法面模数的取值对轮齿的强度影响较大，在齿轮的分度圆直径 d 、螺旋角 β 和齿宽 b 等参数值确定的情况下，取较大的模数，可以明显提高轮齿的弯曲强度；但是，模数增大时，齿数较少时，传动重合度将会降低，传动平稳性减弱，容易

导致齿面产生胶合等问题。因此，一般在保证弯曲强度足够的情况下，应该选用较小的法面模数，并且应优先选用第一系列的模数值。

曲线对构齿轮在理论上不存在根切现象，因此小齿轮的齿数可以取到较小的值，可以根据实际需求选取。但是，齿数过少，模数较大时，齿轮传动重合度不容易保证；在高速、平稳性要求高的传动场合中，一般取较多的齿数和较小的模数，增大重合度，保证传动的平稳性满足要求。

② 纵向重合度 ε_β

由公式(4.2)可知，纵向重合度与齿宽及螺旋角关系紧密。纵向重合度一般包含整数与尾数部分：

$$\varepsilon_\beta = \mu_\varepsilon + \Delta\varepsilon \quad (4.5)$$

式中， μ_ε 为整数部分一般取 1~6；重合度尾数部分 $\Delta\varepsilon$ 一般取值为 0.25~0.35， $\Delta\varepsilon$ 过小时，在端部啮合时，会导致轮齿端部压力过大，容易引起端部崩角，不利于传动平稳； $\Delta\varepsilon$ 过大时，齿端接触时并不会改善接触状况，反而会引起齿轮齿宽过大。

纵向重合度的大小，对于传动平稳性的影响很大。对于传动速度不高的场合，一般保证纵向重合度大于 2 即可；对于传动速度较高的场合，需要保证传动平稳性，必须要求齿数多而模数较小，从而保证重合度较大，但此时齿宽加大，齿距误差、齿向误差、轴线平行度与变形误差需要严格限制，以保证接触均匀。

③ 螺旋角 β

螺旋角是齿面相对曲率半径的主要影响因素，直接影响接触迹在轴向的宽度，从而对齿面接触强度产生影响。增大螺旋角，相对曲率半径减小，轴向接触迹宽度减小，接触应力增大；同时，由于螺旋角值过大，会导致轴向分力增大，使轴承载荷增加，其使用寿命会减少。但是在另一方面，在保证齿宽一定时，螺旋角适当增大，齿轮纵向重合度同样会增大，这使得传动变得更加平稳，同时在一定程度上提高了轮齿的弯曲与接触强度，这个增强效应对弯曲强度更有利。

因此，可以知道螺旋角的选取也是一个综合考量的过程，必须根据具体的传动要求，把齿面接触强度、轮齿弯曲强度及轴承的承载与寿命一起考虑进来。

④ 齿宽系数 $\varphi_d(\varphi_a)$

齿宽系数的值同样会影响传动重合度，进一步影响传动平稳性。简单而言，齿宽系数的取值应该保证：满足齿轮传动具有大重合度的要求，以及轮齿螺旋角的取值合适。齿轮传动类型、载荷特性，轮齿加工精度和传动结构刚度等因素，也应该在取值时进行综合考虑。

选取较大的齿宽系数，可以将齿轮的直径值取得更小，从而可以降低圆周速度、减小传动外廓尺寸，使传动整体结构更加紧凑；但是，过大的齿宽，会导致

小齿轮刚性变差, 齿面变形量增大, 容易造成齿向上的偏载, 同时加工时齿轮精度不易保证。

综上所述, 内啮合曲线对构齿轮各几何参数之间关联密切, 需要综合选取。各参数的选取对齿轮传动的质量有很大的影响, 需要认真对待。可以采用计算机优化算法, 对各参数取值进行优化, 得到一个比较合理的方案。

4.2.2 齿形参数设计与选取原则

在设计内啮合曲线对构齿轮齿形时, 需要遵循的基本原则为: 由各参数取值所确定的方案应使得齿面接触强度与轮齿弯曲强度相协调, 满足等强度的设计原则; 凸凹齿形之间, 在传动过程中不能发生干涉, 要保证传动平稳; 同时制造的角度出发, 也要求齿形能尽可能容易地被加工出来, 具备经济性。

确定内啮合曲线对构齿轮齿形所需要的参数有: 齿高、接触点齿厚与齿槽宽、名义压力角、齿廓半径、齿廓曲率半径差、齿廓圆心移距量、齿侧间隙等。

① 全齿高 h

轮齿的齿高是影响齿面接触强度与齿根弯曲强度的直接因素: 齿高增大, 啮合时两工作齿面间的接触区域必然会扩大, 齿面接触应力必然随之减小, 接触强度自然增强; 但是相应的, 弯曲应力的作用力臂也会变大, 从而降低轮齿弯曲强度。

选取齿高参数, 齿面的状态是一个重要的考虑因素。一般而言, 对于硬齿面传动类型, 齿面接触强度相对较高, 可以取较小的齿高值, 以便增强弯曲强度; 相对地, 对于软齿面传动, 由于曲线对构齿轮是点啮合制传动, 应当优先考虑齿面接触强度, 需要选择较大的齿高, 增大接触面积。

另外, 工作场合与载荷状况也是必须考虑的因素。在重型机械中, 载荷高, 为防止轮齿过载折断, 应选取较小的齿高, 以保证弯曲强度满足承载能力的要求; 在传动速度高的工作场合, 对传动稳定性的有更高的要求, 此时齿高应取较大值, 此时轮齿易受载变弯, 轮齿具有较好的柔性, 能够充分减小啮合冲击所产生的动载荷, 并且能够减弱齿向误差导致的载荷集中现象以及降低传动噪声, 这对于高速精密传动场合, 意义十分重大。

齿高确定后, 需要分配相应的齿顶与齿根的高度值。此时, 应使齿轮的径向间隙保持在 $(0.15 \sim 0.3)m_n$ 之间。

② 名义压力角 α_0

当内啮合共轭曲线齿轮仅有一个接触点时, 接触点应放在工作齿廓的中点。如图 4.1 所示, 当轮齿全齿高一定时, 增大名义压力角的数值, 会使齿廓曲率半径减小; 若减小名义压力角的数值, 则齿廓曲率半径会增大。于是, 在齿高一定时, 如何处理好压力角和齿廓曲率半径这一对参数值的选取, 使得整体齿形具有更好

的传动性能，是一个需要仔细讨论的问题。

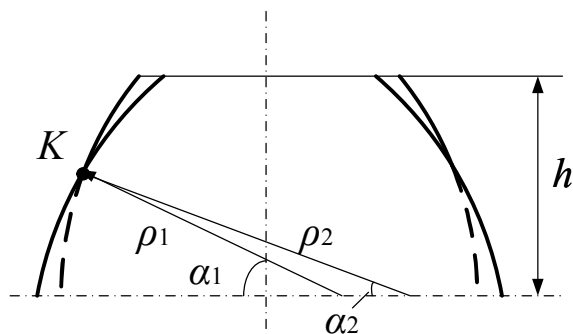


图 4.1 名义压力角与曲率半径的关系

Fig 4.1 The relationship between pressure angle and radius

由图 4.1 可以看出， α_0 大， ρ 值较小的齿形，其齿顶厚度较小显得“细尖”，而齿根较厚，轮齿抗弯能力更好，适用于重载场合；反之，名义压力角小而齿廓曲率半径大的齿形，两齿面间的相对曲率半径较大，会使得齿面接触强度较高，抗疲劳点蚀的能力更好。因此，全齿高较大时，名义压力角应取较小值；全齿高较小时，取较大的名义压力角。另外，名义压力角不能过大，否则会使齿面径向分力过大，增大齿轮轴轴承受载，影响其使用寿命。

对于双点接触的内啮合曲线对构齿轮，两个接触点的相对位置对齿轮跑合性能、接触与弯曲强度有直接的影响。当齿廓曲线为抛物线时，两个接触点的位置会直接决定抛物线的形状，两接触点如果相隔太远，会使齿面接触和弯曲强度降低；如果两接触点距离太近，会使抛物线齿廓过于贴近凸齿圆弧齿廓，那么会增加制造精度要求。对于软齿面，可以适当增加两接触点的距离，方便加工；而对于硬齿面，齿面接触强度占优，因此两点距离可以适当减小，从而增强弯曲强度。

③ 凸齿齿廓曲率半径

一般将曲线对构齿轮的凸齿齿廓设计为圆弧，其半径 ρ_a 决定了凸凹齿面理论接触点与节点的距离，与齿面间的滑动速度有关。在图 4.2 中，假定内齿轮 1 固定不动，小齿轮 2（凸齿）上理论接触点 K 绕瞬时回转中心 P （节点）旋转的角速度是 $\omega_2 - \omega_1$ （ ω_1 、 ω_2 分别为内齿轮 1 与小齿轮 2 的角速度），则齿面滑动速度为 $v_c = \rho_a(\omega_2 - \omega_1)$ 。由此可以看出凸齿圆弧半径越大，齿面滑动速度越大，因而对齿面磨损有一定的影响。

对于一般软齿面齿轮，齿高可以取得较大，凸齿圆弧半径 ρ_a 取值范围为 $(1.15 \sim 1.5)m_n$ ，特殊情况可以超出；硬齿面齿轮，齿高较短， ρ_a 值可小于 $1m_n$ 。凹齿齿廓曲率半径 ρ_f 要比 ρ_a 大 $\Delta\rho$ ， $\Delta\rho$ 为凸凹齿面齿廓曲率半径差；对于软齿面中、

小模数齿轮, $\Delta\rho$ 一般取值为 $0.1\rho_a$ 。

综上所述, 全齿高 h , 名义压力角 α_0 , 凸齿齿廓圆弧半径是决定齿形的三项主要参数, 三者相互关联。合理的设计方案应保证: 在具体条件下, 轮齿应力沿齿高方向均匀分布, 弯曲与接触强度符合等强度设计原则, 啮合时传动平稳。

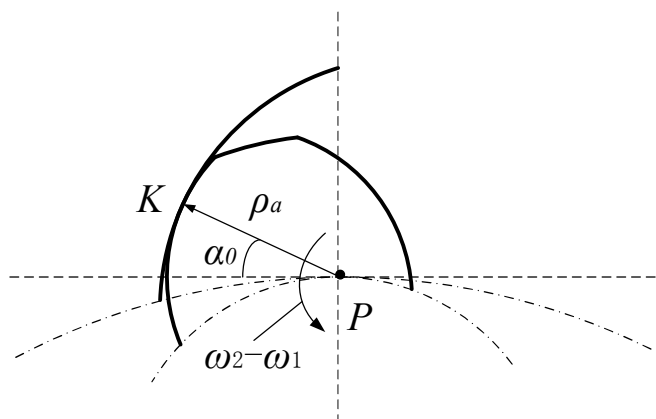


图 4.2 凸齿曲率半径与滑动速度的关系

Fig 4.2 The relationship between the radius of the convex tooth and the sliding velocity

④ 接触点齿厚 S_k 与齿槽宽 w_k 、齿廓曲率中心移距量与偏移量

接触点的齿厚与齿槽宽之和为接触点处齿距。内啮合曲线对构齿轮的接触点处齿距取为标准值 $3.1416m_n$; 在分配齿厚时, 一般使得齿厚较齿槽宽较小; 凸齿齿厚较凹齿齿槽宽要小一个侧向间隙 j 值

齿廓圆心移距量是指齿廓曲率中心偏离节线的距离, 记为 e 。对于齿廓曲率中心与节线的总移距量 e , 凸凹齿之间需要满足式(4.6), 才能保证正常啮合。

$$e = e_a + e_f = (\rho_f - \rho_a) \sin \alpha_0 \quad (4.6)$$

一般而言, 凸齿齿廓曲率中心在节线上($e_a=0$), 凹齿齿廓曲率中心位于节线以下, e_f 具体值可由式(4.6)计算得到。

齿廓曲率中心与轮齿法面对称线的距离称为齿廓曲率中心偏移量, 记为 l 。 l 与齿廓曲率半径、接触点齿厚、齿槽宽和名义压力角相关, 可以由式(4.7)、(4.8)计算得到。

$$l_a = \rho_a \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} S_{ak} \quad (4.7)$$

$$l_f = \rho_f \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} w_{fk} \quad (4.8)$$

⑤ 齿侧间隙

由于是依靠轴向重合度进行连续传动，内啮合曲线对构齿轮凸凹齿廓没有被设计成共轭齿廓，端面不存在重合度，从而不具有中心距可分性，不能在加工中通过改变刀具与齿轮毛坯的相对位置来获得侧向间隙，不然会导致名义接触点会偏移，从而影响传动精度。因此，必须在齿廓设计时规定所需要的侧向间隙值。曲线对构齿轮啮合时，两齿面在轴向以非常高的速度滚动，能够形成比较厚的润滑油膜，需要较大的侧向间隙。一般而言，取侧向间隙为 $j=(0.04\sim0.06)m_n$ ，同时保证绝对间隙值大于 $0.3mm$ 。在这个范围里，模数大时，齿侧间隙系数 $j^*=j/m_n$ 取小值，模数小时取大值。

在不同的工况下，侧向间隙取值也有所不同。在双向运转的齿轮传动中，就取较小的侧向间隙值，以减小冲击；而在高速共轭曲线齿轮传动中，轮齿的弹性变形与热变形都比较大，需要存在较大的侧向间隙，来保证非工作齿面不发生接触，值可以取到 $(0.07\sim0.08)m_n$ 。

侧向间隙 j 的值，与基本齿廓中的参数 l_a 、 l_f 、 S_a 的值相关。

4.3 齿形设计

4.3.1 单点接触轮齿齿廓及方程

①单点接触基本齿廓

单点接触的内啮合曲线对构齿轮工作齿廓，我们小齿轮为凸圆弧，内齿轮为凹圆弧，如图 4.3 所示。结合上述齿形参数选取原则及方法开展主要齿形设计过程如下：

1) 全齿高 h

根据齿高选取原则，选取凸、凹齿全齿高为： $h_1=1.5m_n$ 、 $h_2=1.53m_n$ ；

相应的齿顶与齿根高确定为：

$$ha_1=1.234m_n \quad hf_1=0.266m_n$$

$$ha_2=0.166m_n \quad hf_2=1.364m_n$$

可知满足顶隙大于 $0.15 m_n$ 的要求。

2) 名义压力角 α_0

名义压力角 α_0 的数值会影响轮齿齿根处的齿厚及名义接触点的位置，从而影响轮齿弯曲强度。为了适应较小齿数外齿轮的设计，将名义压力角取为

$$\alpha_0=25^\circ$$

3) 凸齿圆弧半径及半径差

凸齿圆弧半径会影响齿面滑动速度，选取 ρ_a 的值为

$$\rho_a=1.5 m_n$$

为了防止内啮合凸凹齿面间发生干涉，需要保证凸凹齿廓存在一定的半径差，

取

$$\Delta\rho=0.15 m_n$$

则凹齿圆弧半径取为

$$\rho_f=1.65 m_n$$

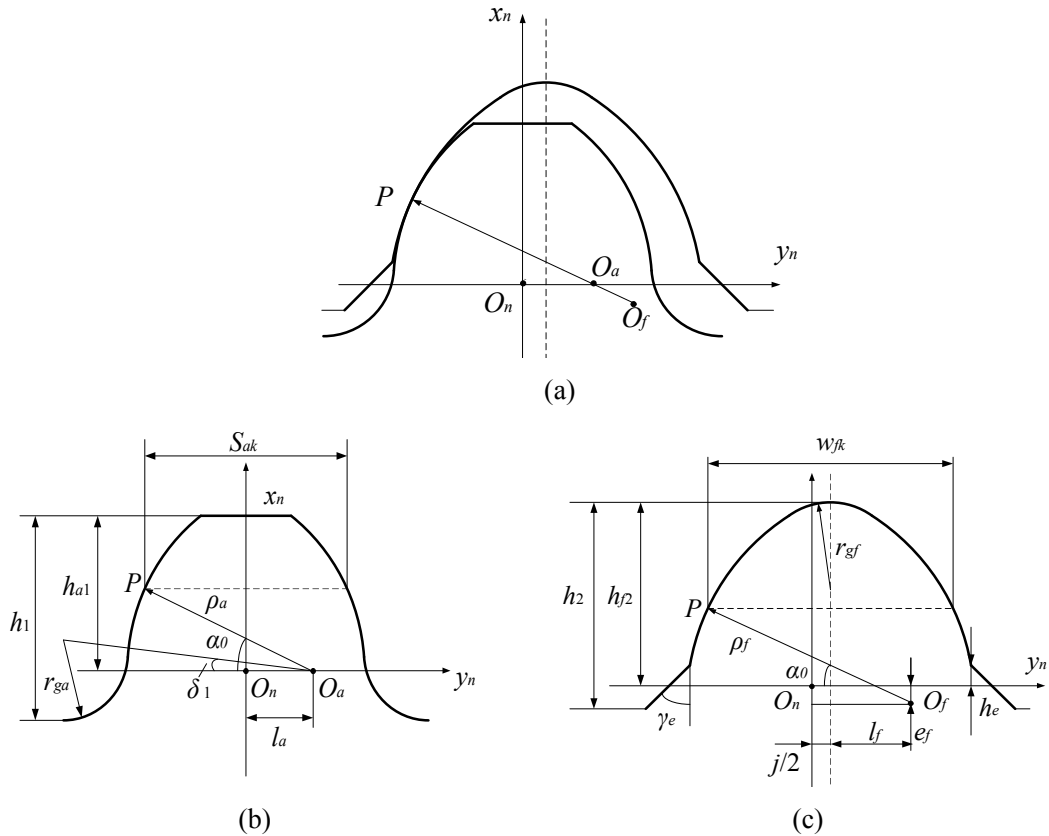


图 4.3 单圆弧凸凹齿廓: (a)单点接触; (b)凸齿齿廓; (c)凹齿齿廓

Fig 4.3 Convex and concave tooth profile with single arc:

(a)Single point contact;(b)Convex tooth profile;(c)Concave tooth profile.

4) 接触点齿厚、齿槽宽及侧向间隙

选取凸、凹齿廓相应的接触点齿厚与齿槽宽:

$$S_{ak}=1.54 m_n \quad S_{fk}=1.5416 m_n$$

$$w_{ak}=1.6016 m_n \quad w_{fk}=1.60 m_n$$

可知, 齿侧间隙为

$$j=w_{fk}-S_{ak}=0.06 m_n$$

5) 齿廓圆心移距量与偏移量

按照前述原则及公式(4.6), 齿廓圆心移距量为

$$e_a=0 \quad e_f=0.0634 m_n$$

按照公式(4.7)、(4.8)可以计算得到齿廓圆心偏移量为

$$l_a=0.5895 m_n \quad l_f=0.6954 m_n$$

然后确定其他齿廓参数，综合具体如表 4.1 所示。

表 4.1 单点接触内啮合曲线对构齿轮齿廓基本参数

Table 4.1 Basic parameters of internal curve pair gear tooth profile
with single point contacted

参数名称	凸齿	凹齿
名义压力角 α_0	25°	25°
全齿高 h_1	$1.5m_n$	$1.52m_n$
齿顶高 h_{a1}, h_{a2}	$1.234m_n$	$0.166m_n$
齿根高 h_{f1}, h_{f2}	$0.266m_n$	$1.364m_n$
齿廓圆弧曲率半径 ρ_a, ρ_f	$1.5m_n$	$1.65m_n$
齿廓圆心移距量 e_a, e_f	0	$0.0634m_n$
齿廓圆心偏移量 l_a, l_f	$0.5895m_n$	$0.6954m_n$
接触点齿厚 S_{ak}, S_{fk}	$1.54m_n$	$1.5416m_n$
接触点齿槽宽 w_{ak}, w_{fk}	$1.6016m_n$	$1.60m_n$
侧向间隙 j	/	$0.06m_n$
齿根曲率半径 r_{ga}, r_{gf}	$0.4m_n$	$0.452m_n$
凸齿工艺角 δ_1	4°	/
凹齿齿顶倒角 γ_e	/	45°
凹齿齿顶倒角高度 h_e	/	$0.15m_n$

② 齿廓方程

1) 凸齿齿廓方程

凸齿齿廓分为工作圆弧与齿根圆弧两段，方程具体如下：

工作圆弧方程

$$\begin{cases} x_{a1} = \rho_a \sin \theta_{a1} \\ y_{a1} = \rho_a \cos \theta_{a1} + l_a \\ z_{a1} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

式中，对于 l_a 值，左侧圆弧方程取正值，右侧圆弧方程取负值； θ_{a1} 为圆弧角度变量参数，对于左、右两侧圆弧，范围分别为 (δ_1, δ_2) 与 $(180^\circ - \delta_2, 180^\circ - \delta_1)$ 。 δ_2 的值可由公式(4.10)计算得到

$$\sin \delta_2 = \frac{h_{a1}}{\rho_a} \quad (4.10)$$

齿根圆弧方程为

$$\begin{cases} x_{a2} = r_{ga} \sin \theta_{a2} + (\rho_a + r_{ga}) \sin \delta_1 \\ y_{a2} = r_{ga} \cos \theta_{a2} - (\rho_a + r_{ga}) \cos \delta_1 + l_a \\ z_{a2} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

式中, l_a 值左侧取正, 右侧取负; 参数 θ_{a2} 的范围为: 左侧($360^\circ - \delta_1, 270^\circ$), 右侧($180^\circ + \delta_1, 270^\circ$)。

2) 凹齿齿廓方程

凹齿齿廓分为齿顶倒角、工作圆弧与齿根圆弧三段, 方程具体如下:

工作圆弧方程

$$\begin{cases} x_{f1} = \rho_f \sin \theta_{f1} - e_f \\ y_{f1} = \rho_f \cos \theta_{f1} + l_f \\ z_{f1} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

式中, l_f 值左侧取正, 右侧取负; 参数 θ_{f1} 取值范围为: 左侧(γ_1, γ_2), 右侧($180^\circ - \gamma_2, 180^\circ - \gamma_1$)。 γ_1 与 γ_2 的值可以由公式(4.13)、(4.14)求得

$$\sin \gamma_1 = \frac{h_e - h_{a2} + e_f}{\rho_f} \quad (4.13)$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{l_f}{\rho_f - r_{gf}} \quad (4.14)$$

齿根圆弧方程

$$\begin{cases} x_{f2} = r_{gf} \sin \theta_{f2} + h_{f2} - r_{gf} \\ y_{f2} = r_{gf} \cos \theta_{f2} \\ z_{f2} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

式中, 参数 θ_{f1} 的取值范围为($\gamma_2, 180^\circ - \gamma_2$)。

齿顶倒角直线方程

$$\begin{cases} x_{f3} = \rho_f \sin \gamma_1 + e_f - l \cos \gamma_e \\ y_{f3} = \rho_f \cos \gamma_1 - l_f + l \sin \gamma_e \\ z_{f3} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

式中, l_f 参数值, 左侧取正, 右侧取负; l 为倒角直线参数, 表示倒角直线段的长度, 以工作圆弧齿顶侧端点为起点。

4.3.2 双点接触轮齿齿廓及方程

① 双点接触基本齿廓

双点接触时，凸齿选择圆弧为工作齿廓，凹齿选择抛物线为工作齿廓，圆弧与抛物线可以有两个理论接触点，如图 4.4 所示。与单点接触的圆弧齿轮不同，以抛物线为凹齿齿廓的双点接触齿形，抛物线参数与凸齿圆弧参数相关。

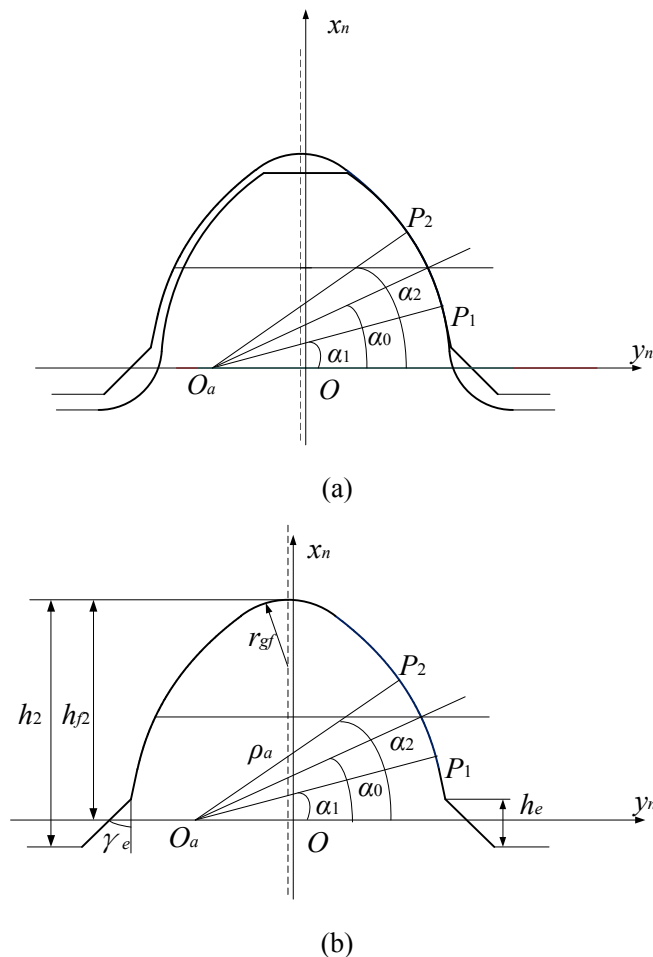


图 4.4 双点接触基本齿廓：(a)双点接触；(b)凹齿齿廓

Fig 4.4 Basic tooth profile with two points contacting:

(a)Two points contact;(b)Concave tooth profile

1) 接触点齿形角与名义压力角 α_0

与单点接触齿形不同，圆弧与抛物线双点接触模型有两个理论接触点，这两个点关于抛物线轴线对称。于是，我们把齿形中两个接触点 1 与 2 的矢径线与基本齿条节线所成的夹角定义为接触点处的齿形角，分别记为 α_1 与 α_2 ；将抛物线顶点处的接触角定义为名义压力角 α_0 ，有如下关系成立

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (4.17)$$

取 α_0 为 25° ，相应 α_1 为 15° ， α_2 为 35° ，同时令 $\theta=(\alpha_2-\alpha_1)/2$ ，可知 θ 表示接触点与抛物线顶点矢径线之间的夹角。

2) 凸齿工作圆弧半径 ρ_a

凸齿工作圆弧半径即为接触点处的曲率半径，确定了后，可以求解抛物线的相关参数。选取 ρ_a 的值与单点接触齿形相同为 $1.5m_n$ 。

3) 抛物线相关参数计算

根据圆弧与抛物线几何关系，可以得到以下公式：

$$p = \rho_a \cos \theta \quad (4.18)$$

$$L = \rho_a \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} + p \quad (4.19)$$

4) 齿廓曲率中心移距量与偏移量

凸齿与凹齿齿廓曲率中心均位于基本齿条节线上，因此有 $e_a=e_f=0$ 成立；

凸齿曲率中心偏移量 l_a 按照公式(4.2)计算得到 $l_a=0.5895m_n$ ；

当凸凹齿廓接触时，两齿廓曲率中心重合，凹齿曲率半径为 ρ_a ，于是，凹齿曲率中心偏移量 l_f 按照公式(4.3)计算得到 $l_f=0.5595m_n$ ，可以发现 l_a 比 l_f 值大了 $j/2$ 。

综合选取其他各参数，具体列表如表 4.2 所示。

表 4.2 双点接触曲线对构齿轮基本齿廓参数

Table 4.2 Basic parameters of internal curve pair gear tooth profile

with two points contacted		
参数名称	凸齿	凹齿
名义压力角 α_0	25°	25°
接触点处齿形角 α_1, α_2	$15^\circ, 35^\circ$	$15^\circ, 35^\circ$
全齿高 h_1	$1.5m_n$	$1.52m_n$
齿顶高 h_{a1}, h_{a2}	$1.234m_n$	$0.166m_n$
齿根高 h_{f1}, h_{f2}	$0.266m_n$	$1.354m_n$
齿廓接触点曲率半径 ρ_a, ρ_f	$1.5m_n$	$1.5m_n$
齿廓圆心移距量 e_a, e_f	0	0
齿廓圆心偏移量 l_a, l_f	$0.5895m_n$	$0.5595m_n$
接触点齿厚 S_{ak}, S_{fk}	$1.54m_n$	$1.5416m_n$
接触点齿槽宽 w_{ak}, w_{fk}	$1.6016m_n$	$1.60m_n$
侧向间隙 j	/	$0.06m_n$
齿根曲率半径 r_{ga}, r_{gf}	$0.4m_n$	$0.452m_n$
凸齿工艺角 δ_1	4°	/
凹齿齿顶倒角 γ_e	/	45°

凹齿齿顶倒角高度 h_e	/	$0.15m_n$
----------------	---	-----------

② 齿廓方程

1) 凸齿齿廓方程

凸齿齿廓包括工作圆弧与齿根圆弧两部分，与单点接触凸齿相同，因此齿廓方程通用，选用表 4.2 中的相应参数，利用公式(4.9)、(4.10)和(4.11)计算即可，此处不再赘述。

2) 凹齿齿廓方程

凹齿齿廓包含工作抛物线、齿根圆弧、齿顶倒角直线三部分，其中齿根圆弧与齿顶倒角直线部分与单点接触凹齿相同，故齿廓方程通用，选用表 4.2 中的相应参数，利用公式(4.14)、(4.15)和(4.16)计算即可。

抛物线方程为

$$\begin{cases} x_{fp} = t \cos \alpha_0 - \frac{t^2}{2p} \sin \alpha_0 + L \sin \alpha_0 \\ y_{fp} = \pm(t \sin \alpha_0 + \frac{t^2}{2p} \sin \alpha_0 - L \cos \alpha_0 + l_f) \\ z_{fp} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

式中， t 为抛物线参数；对于左侧齿廓，取“+”，右侧取“-”。

在第三章 3.3.3 节中，我们也讨论过法面内抛物线齿廓，但是要注意的是用于齿廓螺旋运动法和基本齿条法中的法面内抛物线齿廓方程之间是有差别的，因此此处建立基本齿条法工作抛物线的方程。

当我们得到单点及双点接触的曲线对构齿轮的轮齿齿廓方程后，将方程代入第三章 3.4 小节中，依次运用公式(3.23)、(3.31)，可以进一步计算得到相应的齿面方程，可以用于后续建立曲线对构齿轮副的三维实体模型。

4.4 齿轮模型

4.4.1 齿轮三维模型构建方法

构建曲线对构齿轮的三维实体模型，我们需要运用到两个工具软件：MATLAB 和 NX 10.0。MATLAB 的中文名称——矩阵实验室，是一款基于矩阵数据运算的功能强大的数学软件，它对于矩阵运算、数值计算等问题具有极其优秀的处理能力，我们运用该软件求解轮齿齿面的数据点坐标值。NX 10.0 是一款具有强大曲面造型及处理能力的多功能三维 CAD/CAE/CAM 软件，我们可以运用它对 MATLAB 软件求解出的齿面点坐标数据进行处理，重新构造高精度的齿面，并生成我们所

需要的齿轮模型。

在完成齿面方程的推导工作之后，我们可以编制 MATLAB 数值计算程序，计算得到给定齿轮传动参数下齿面点的坐标数据，然后绘制出齿面的图形，初步观察验证后我们将齿面点的坐标数据输出到文件中；将齿面数据文件导入三维建模软件 NX 10.0 中，通过曲面造型命令重新构造齿面模型，依据齿轮设计参数对齿面进行尺寸修剪、曲面缝合等操作，可以生成轮齿模型，再经过阵列及布尔运算最终得到完整的齿轮 CAD 模型。

4.4.2 齿轮模型

首先，我们给定内啮合曲线对构齿轮传动副的设计参数，具体如表 4.3 所示。我们根据表中参数，进行推导计算，分别得到单点接触与双点接触的内啮合曲线对构齿轮传动副模型，如图 4.5 所示。

表 4.3 内啮合曲线对构齿轮主要传动参数

Table 4.3 Main parameters of internal curve pair gear drives	
齿轮传动参数	参数值
法面模数 $m_n/(\text{mm})$	6
中心距 $a/(\text{mm})$	80
小齿轮齿数 z_1	6
内齿轮齿数 z_2	30
传动比 i_{12}	5
螺旋角 $\beta/(^{\circ})$	25.841
齿宽 $B/(\text{mm})$	60

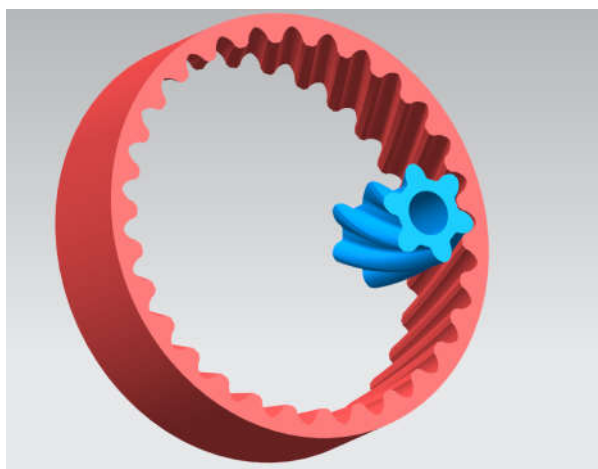


图 4.5 内啮合曲线对构齿轮传动副

Fig 4.5 Internal curve pair gear drive

将小齿轮轮齿处理成半透明的状态，并放处于接触的轮齿，可以观察到凸齿与凹齿面的接触情况。如图 4.6 所示，可以观察到，以圆弧作为齿廓的单点接触齿轮副中，两齿面间存在一个接触点，大致位于齿面中部区域；而以圆弧为凸齿面工作齿廓、抛物线为凹齿面工作齿廓的双点接触齿轮副中，两齿面间存在两个界线分明的接触点。

利用 NX 10.0 的运动分析模块，建立两齿轮的旋转运动副，让它们按给定的转速比运动，可以发现齿面接触点连续在齿面同一高度上运动，并且在一对轮齿尚未退出啮合时，下一对轮齿就已经进入啮合接触了，这说明我们所设计的内啮合曲线对构齿轮满足了定传动比与连续传动的要求。



(a)

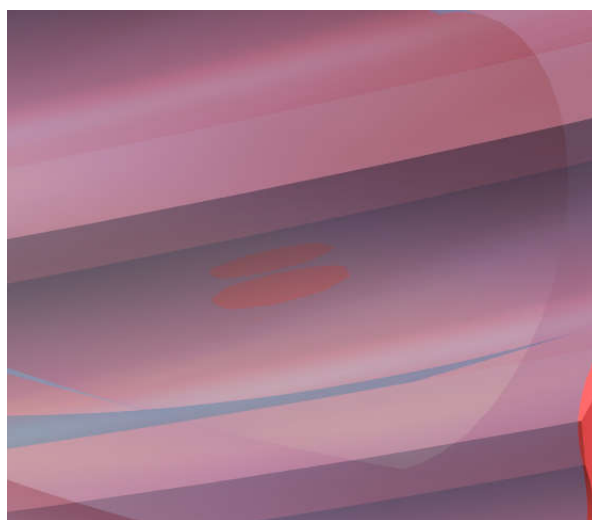


图 4.6 齿面接触状况：(a)单接触点；(b)双接触点。

Fig 4.6 Contact situation between surfaces of two gear teeth:

(a) Single contact point; (b) Two contact points.

4.5 本章小结

本章主要提出内啮合曲线对构齿轮齿形设计方案, 简要分析内啮合曲线对构齿轮齿形设计原则, 开展几何及齿形参数设计与优化, 完成单点接触和双点接触两种形式的基本齿廓构型, 建立齿轮三维实体模型并进行运动仿真分析。

主要的工作内容有:

① 综合分析了曲线对构齿轮的基本几何参数之间的关系, 并分别论述了各参数的选取原则与方法; 同样分析了内啮合曲线对构齿轮的齿形参数间的关系, 分别论述了各参数的选取原则、方法与指导值或计算公式。

② 运用基本齿条法中的基本齿廓定义, 进行各齿形参数的取值并通过建模验证, 来完成内啮合曲线对构齿轮凸凹齿形的设计; 利用凸凹圆弧齿形接触, 获得了单点接触的内啮合曲线对构齿轮传动齿形方案; 在外啮合双点接触曲线对构齿轮齿形方案的基础上, 将其发展成为可用于内啮合传动的曲线对齿轮齿形方案; 给出了两种接触方案的齿廓方程。

③ 利用齿廓方程及第三章的基本齿条法推导的齿面方程, 获得所设计齿形的齿面方程, 运用 MATLAB 软件运算得到齿面点坐标数据, 并在 NX 10.0 建模软件中建立了单点与双点接触的齿轮模型, 并观察验证了两齿轮的接触情况。

5 齿轮强度有限元分析

5.1 引言

曲线对构齿轮是一种点啮合制齿轮，在轮齿啮合时，理论接触点因为轮齿受载而发生弹性形变，从而扩展成为接触点附近面域接触，这对增加轮齿的承载能力是有益的。法面齿形的设计决定了齿面啮合时的接触点个数，当多个点啮合受载时，齿面的受力状况是很复杂的，如果从理论角度进行建模分析齿面接触情况，难度比较大。有限元法是近几十年发展起来的用于解决连续介质中多种问题的极其有效的方法之一，在计算机技术高度发展的基础上，有限元法已经成为 CAD/CAM 的基本组成部分。在进行新装备的性能评估上，运用有限元法进行求解已经成为实际工程应用的大趋势。

在本章，将利用有限元法对前文设计的内啮合曲线对构齿轮进行接触分析，评估其承载性能。首先简单介绍有限元分析方法，然后运用 ANSYS 软件对齿轮模型进行划分网格、处理载荷约束及边界条件，最后得到计算结果并进行分析。

5.2 有限元方法及 ANSYS 接触分析

5.2.1 有限元方法

有限元法是一种高效能的并得到广泛运用的数值计算方法，其基本思想在二十世纪四十年代被提出，伴随电子计算机技术的发展获得真正的应用。有限元法首先被用于航空制造业，在分析飞机结构强度的数值计算中，取得了令人满意的结果，它是结合了结构矩阵分析方法与电子计算机技术的成果。在此之后，有限元法开始在更多的领域中得到运用。

早期的有限元方法是建立在变分原理的基础之上并得到发展的，被广泛运用于以拉普拉斯方程和泊松方程所描述的各种物理场中。在工程师与数学家们的努力下，有限法的理论基础被不断扩充完善，有限元法也因此得到更大的推广，可以应用于任何以微分方程所描述的各类物理场中，可用于解决热传导、流体、电磁等多种问题。

有限元法的基本思想可以分述为离散化、单元分析与整体分析，这也是有限元解决问题的一般步骤^[67]。

离散化指把原来连续的系统划分一定数目的选定形状的单元，即有限的单元数；单元之间的联系称为结点，单元之间只能通过结点发生相互作用，将实际的载荷与边界条件进行转化，在结点处进行相应的处理；从而将连续的变量系统问题转化成有限数量的通过结点相互关联的区域问题。

单元分析是指基于分块近似的思想,对每一个单元按照一定的规则建立待求未知量与结点相互作用之间的关系,这个规则在不同的学科领域中是不同的;用这种方式,在单元区域内利用简化的函数代替原有的复杂函数,对于精度要求较高的区域,可以通过增加该区域的单元数量来获得更高计算精度的解;通过单元分析,目的是建立各个单元结点处的平衡方程,为后续分析作准备。

整体分析是将所有的单元结点关系,按照一定的条件(变形协调条件、平衡条件等)组合起来,构成一组以结点变量为未知量的代数方程组,再引入边界条件,求解这个方程组即可得到有限结点处的待求变量。

通过这样的步骤,有限元法实现了以离散系统的代数方程组替代原有连续系统的微分方程,降低了问题求解以及复杂边界条件处理的难度。

对于复杂曲面间加载接触问题,采用有限法,可以方便地获得所需要变量的近似解,这对于工程实践来说,具有极为重要的意义。

5.2.2 ANSYS 接触分析

ANSYS 是一款功能十分强大的通用有限元分析软件,可以实现多领域中场问题分析,实用性很高。ANSYS 具有优秀的用户开发环境、丰富的 CAD 接口、多种网格划分技术,具备处理各种场问题的能力;其优秀前、后处理模块,具有实现前、后处理及多场分析统一数据库等技术特点。这些特点使得其被广泛应用于航空航天、机械、土木、车辆、造船、生物医学、核工业、电子、能源、水利等多个工业部门及科研领域,拥有广泛的用户群及良好的声誉。

接触问题是一种高度非线性的工程问题,由于接触区域一般是未知、不确定的,伴随载荷、材料、边界条件和其他因素的改变而变化;多数接触问题都伴随着摩擦,摩擦问题同样是非线性的,它的存在使得接触问题的收敛变得更加困难。接触问题一般可以被划分两类:刚性体与柔性体之间的接触,柔性体与柔性体之间的接触。

在 ANSYS 中,能够进行点-点、点-面、面-面三种不同类型接触模型的分析,不同的接触模型适用于不同的实际状况。

点-点接触单元是一种低阶接触单元,用于模拟点-点的接触行为,其使用需要预先知道接触区域,并且两个接触面之间的相对滑动不能够超过一定的范围。

点-面接触单元用于解决二维接触问题,主要用于点-面的接触模型,相对于点-点单元,对于接触位置是否知晓没有要求;两接触面的网格划分可以分别进行,不需要保持一致;同时,也支持接触面之间存在较大相对滑动与变形的情况。

面-面接触单元一般多用于模拟复杂曲面之间的接触问题,是一种高阶的接触单元。在进行接触分析时,对于一对接触表面,需要选择其中一个面作为目标面,另一个面作为接触面,两者具备不同的性质,接触面与目标面的选取对接触分析

的结果影响较大。选定目标面与接触面后, ANSYS 接触对程序会分别为目标面分配目标单元类型, 为接触面分配接触单元类型, 这样的一组目标与接触单元会被识别为一对“接触对”, 用以施加载荷与边界条件。与点-面接触单元相比, 面-面接触单元具有支持高阶六面体单元网格划分, 支持接触面间存在大的相对滑动与摩擦及变形, 并且对刚体表面形状的没有限制, 支持复杂曲面之间的接触问题; 但是相对应的, 为满足精度要求, 接触单元的数目会增加, 从而占用更多的计算资源与时间。

对于内啮合曲线对构齿轮的齿面接触问题, 由于两齿面均为复杂的空间曲面, 在受载接触时, 理论上的接触点会扩展为接触点附近的面域接触, 因而选择面-面的接触单元类型进行分析。

执行一个典型的面-面接触分析计算, 其基本步骤如下:

- ① 建立实体模型;
- ② 选择合适的单元类型, 并定义单元实常数与材料性质;
- ③ 对实体模型进行合适的网格划分, 并检查;
- ④ 识别并建立面-面接触对;
- ⑤ 定义载荷及边界条件;
- ⑥ 定义求解选项与载荷步长, 并求解;
- ⑦ 查看并输出接触分析计算的结果。

5.3 内啮合曲线对构齿轮齿面接触分析

曲线对构齿轮的齿面接触分析是一个复杂的非线性问题, 在本文中只对齿面接触行为做静力学分析。用 ANSYS 软件进行分析时, 会占用大量的计算资源, 耗费较多的时间。为了减小资源占用, 节省时间, 在满足一定的计算精度的要求下, 需要对模型进行一定的处理。将前文 4.4 节中得到的模型进行处理, 根据圣维南原理, 只需要将参与啮合的轮齿及其旁边几个齿纳入计算范围就可以满足精度要求, 于是, 选取内啮合曲线对构齿轮副的三对轮齿进行有限元接触分析, 主要考虑第 2 对(中间)轮齿的接触过程, 并且单对齿啮合时是危险工况, 因此只需考察啮合点位于齿宽中部时的情况即可。

5.3.1 模型网格划分

对三维实体模型进行网格划分, 是关系到齿面接触分析计算能否成功以及计算结果精度的重要内容。将经过处理的内啮合曲线对构齿轮副模型文件导入 ANSYS 软件中, 进行网格划分, 生成单元及节点模型。选定单元类型为 8 节点 Solid 185 六面体实体单元, 该单元类型适合于构造三维实体结构, 每个节点都具有 UX、UY、UZ 三个方向的平移的自由度, 具有描述超弹性、蠕变、应力刚性变化、表

征大变形与大应变的特性，是模拟三维实体解决相应问题最常用的实体单元之一。

为了保证计算的精度，同时降低计算资源的占用，需要对轮齿进行合适尺寸的网格划分，确定网格尺寸为 0.9mm，轮齿模型网格划分结果如图 5.1 所示。

ELEMENTS

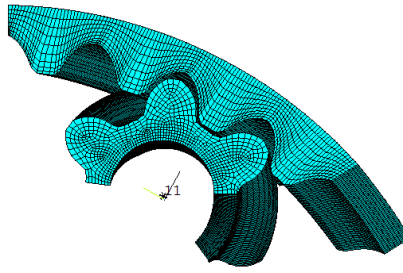


图 5.1 轮齿有限元模型

Fig 5.1 Finite element model of the meshing teeth

将 ANSYS 软件中单位统一设定为毫米，统一选取齿轮副的材料为 40Cr，材料的弹性模量为 $E=2.06 \times 10^5 \text{MPa}$ ，泊松比设置为 $\mu=0.3$ 。

5.3.2 齿面接触对建立

完成轮齿有限元网格划分后，需要建立齿面接触对模型。根据 ANSYS 软件的设定原则，选小齿轮的凸齿面为接触面，内齿轮的凹齿面为目标面；选定之后，ANSYS 会自动为接触面分配接触单元为 CONTA174，为目标面分配接触单元 TARGE170，建立的齿面接触对如图 5.2 所示。

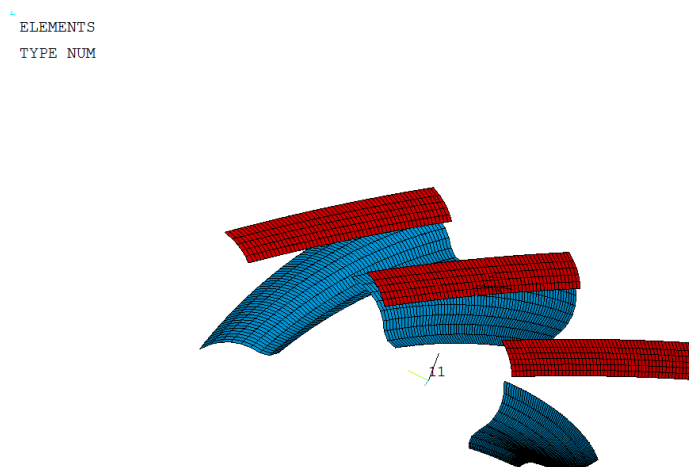


图 5.2 齿面接触对模型

Fig 5.2 Contact pair model of gear tooth surfaces

5.3.3 边界条件及载荷处理

根据文献^[37-38]中有关基于弹性理论的有限元分析方法的论述, 对内啮合曲线对构齿轮副的有限元模型, 进行边界条件及载荷施加处理。

具体内容如下:

- ① 对内齿轮外圈表面上所有的节点进行完全的约束($UX=UY=UZ=0$);
- ② 对小齿轮内圈表面上的所有节点在 UX 与 UZ 方向的自由度, 即径向与轴向进行约束($UX=UZ=0$);
- ③ 在小齿轮内圈表面上的所有结点, 施加一个 UY 方向(切向)的力 F , 其大小可按公式(5.1)计算得到:

$$F = \frac{T}{N \times r_n} \quad (5.1)$$

式中, T 为小齿轮转矩; N 为小齿轮内圈表面上的节点数目; r_n 为小齿轮内圈的半径。

于是, 可以得到内啮合曲线对构齿轮副施加边界条件及载荷后的效果如图 5.3 所示。

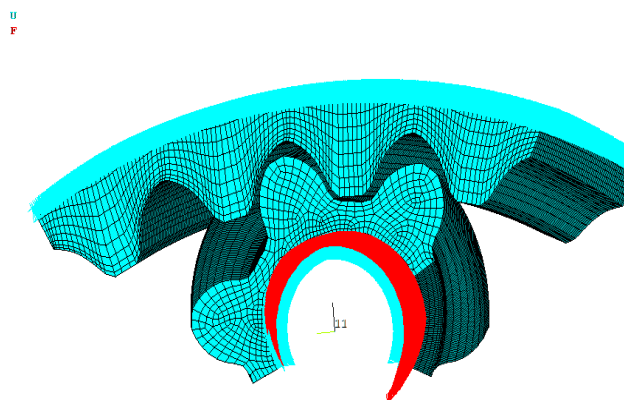


图 5.3 边界条件与载荷

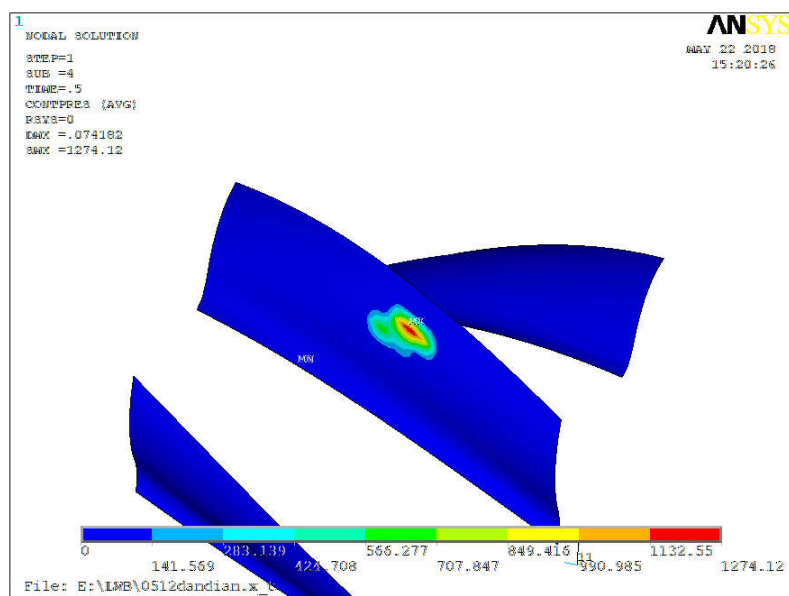
Fig 5.3 Boundary conditions and loads

5.3.4 计算结果分析

完成边界条件与载荷施加，进行计算步长与时间设置，就可以进行计算；在完成计算后，可以利用 ANSYS 的后处理功能输出单点与双点接触的小齿轮齿面接触应力云图。

① 单点接触模型接触分析结果

如图 5.4 所示为单点接触时小齿轮啮合齿面的接触应力云图与等效应力云图：



(a)

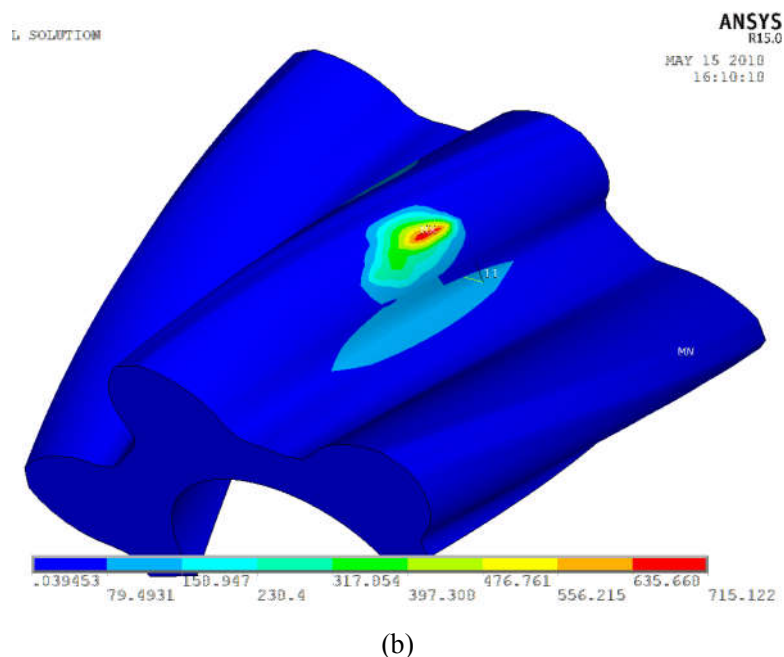


图 5.4 单点接触应力云图: (a)小齿轮接触应力; (b)小齿轮等效应力云图

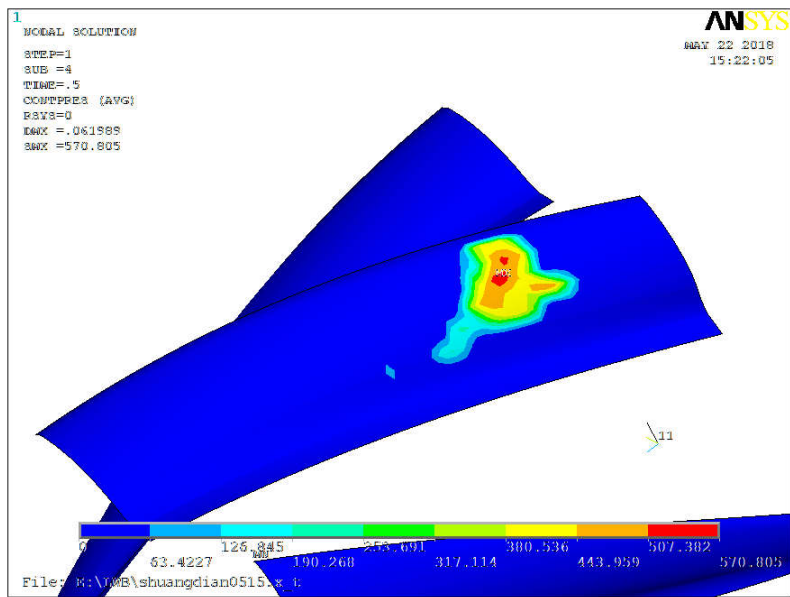
Fig 5.4 The stress nephogram of single point contact:

(a)Contact stress on convex gear; (b) Equivalent stress on convex gear

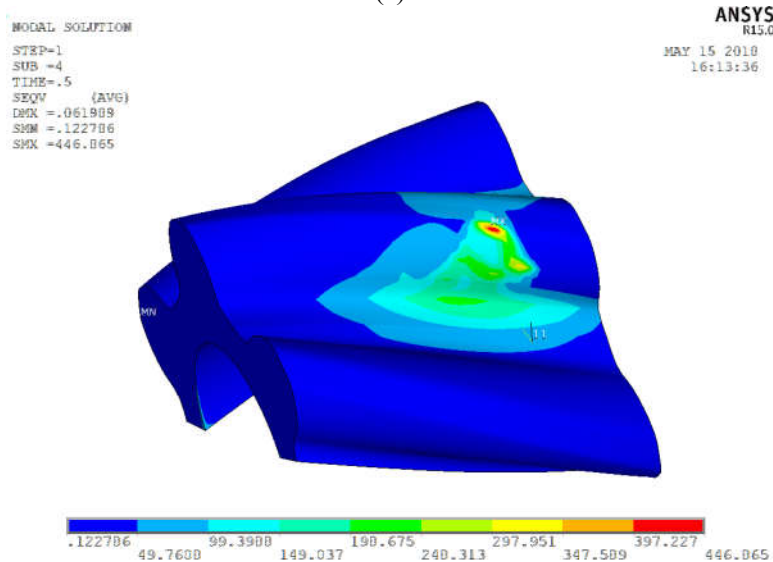
单点接触模型中, 在小齿轮内径加载 200Nm 的输入转矩, 计算得到的接触应力最大值为 1274.12Mpa, 等效应力最大值为 715.122Mpa; 由图中可以清晰地看出, 接触点位于齿面中部位置, 并且沿齿向呈较为规则的椭圆形分布; 应力最大值出现在接触点位置, 并且应力分布区域有向齿根方向扩展的趋势; 齿根部的应力值相对较小, 并且分布区域较大。这可以说明, 4.3.1 小节所设计的单点接触内啮合曲线对构齿轮在受载传动时, 啮合正常; 齿面接触强度是影响轮齿强度的更主要的因素, 在设计时应该更加注重齿面接触强度的考虑, 并且对于齿面进行必要的处理以加强齿面接触强度是十分有必要的。

② 双点接触模型接触分析结果

如图 5.5 所示, 为双点接触内啮合曲线对构齿轮受载应力云图:



(a)



(b)

图 5.5 双点接触应力云图: (a)小齿轮接触应力; (b)小齿轮等效应力

Fig 5.5 The stress nephogram of two points contact:

(a)Contact stress on convex gear; (b) Equivalent stress on convex gear

在双点接触模型中, 同样给小齿轮内径施加了 200Nm 的输入转矩, 计算得到的接触应力最大值为 570.805Mpa, 最大等效应力值为 446.865Mpa; 在小齿轮接触齿面上, 可以很清晰地看到两个应力峰值区域, 这是对应两个接触点位置, 位于齿面中部附; 应力分布区域相对比较集中, 有向齿根方向扩展的趋势; 对于等效应力分布, 最大值分布在齿高方向较高的接触点处, 而靠近齿根的接触点处等效应力值比较小。

综合单点接触与双点接触的应力分布情况，可以发现：双点接触时，小齿轮齿面接触应力峰值相对于单点接触时，降低了 55.2%，而等效应力峰值降低了 37.5%。可以知道，相对于单点接触，双点接触的内啮合曲线对构齿轮在齿面承载能力上具有相当大的优势，在工程应用中具有更大的应用前景。

5.4 本章小结

本章主要进行了内啮合曲线对构齿轮的轮齿有限元接触分析，得到了单点接触与双点接触时轮齿的应力计算结果，并对计算结果图像进行了分析，论证了双点接触的内啮合曲线对构齿轮传动的承载优势。

主要包括：

① 简单介绍了有限元方法的发展与有限元方法的基本思想和解决工程问题的一般步骤；同时，对 ANSYS 接触分析原理及方法，进行了简单的介绍。

② 对单点及双点接触的内啮合曲线对构齿轮轮齿模型进行简化、网格划分、齿面接触对建立、载荷及边界条件处理，最终完成接触分析计算；对接触分析计算结果进行了分析，对比了单点接触与双点接触时小齿轮的接触应力与等效应力峰值，得到了双点接触的内啮合曲线对构齿轮传动承载能力非常优秀的结论。

6 结论与展望

6.1 结论

本文在共轭曲线基本原理的研究基础上, 主要开展内啮合曲线对构齿轮传动基本理论的研究: 建立了内啮合曲线对构齿轮基本原理的数学描述, 完成了基本数学模型推导与实例验证; 提出了内啮合曲线对构齿轮轮齿齿面成型的一般原理与方法, 并分别建立了相应的数学模型; 对内啮合曲线对构齿轮的基本几何参数与齿形基本参数选取原则进行了阐述, 设计了单点接触与双点接触的内啮合曲线对构齿轮传动轮齿齿形方案, 并建立了相应的齿轮三维实体模型; 进一步, 基于有限元手段分别对单、双点接触成型齿面开展应力分析, 评估齿面传动性能。

主要研究结论如下:

① 完成了内啮合曲线对构齿轮基本原理的数学描述。建立了内啮合曲线对构齿轮基本坐标系, 推导建立了各坐标系之间的矩阵变换关系; 确定了曲线接触点处相对运动条件, 分析了沿给定接触方向的曲线法向矢量, 进一步建立了内啮合曲线对构齿轮啮合函数关系; 完成了内啮合共轭曲线方程及啮合方程式的推导, 并运用平面渐开线与空间圆柱螺旋线开展了实例分析, 所述结果验证了上述原理的可行性与正确性。

② 完成了内啮合曲线对构齿轮齿面成型理论及一般方法论述。介绍了等距包络法、齿廓螺旋运动法和轮齿基本齿条法三种齿面成型方法及相关过程, 并应用上述理论分别建立了内啮合曲线对构齿轮的轮齿齿面数学模型, 进一步对比阐述了相关方法的优缺点。

③ 完成了内啮合曲线对构齿轮的轮齿齿形设计研究。阐述了内啮合曲线对构齿轮的几何参数与齿形参数选取原则; 设计了单点接触与双点接触的内啮合曲线对构齿轮传动的齿形方案, 给出了相应的齿廓方程与啮合表达式, 构建了齿轮三维实体模型。

④ 完成了内啮合曲线对构齿轮的轮齿有限元强度分析。分别以单点接触与双点接触内啮合曲线对构齿轮为对象, 建立基本啮合齿轮接触对, 简化基础接触形式, 划分接触网格, 处理载荷及边界约束条件, 完成了相应的接触应力计算与分析; 进一步, 通过有限元结果对比, 双点接触内啮合曲线对构齿轮相比单点接触形式具有优良的接触性能, 具有较好的应用前景。

6.2 后续工作展望

本文主要开展了内啮合曲线对构齿轮传动基本理论的研究, 完成其基本啮合

原理、齿面成形理论与方法及传动特性分析，既是对曲线对构齿轮传动理论的补充完善，也能够为开发出更优良的内啮合齿轮传动形式奠定理论基础。研究内容在很多方面仍然存在诸多不足，需进一步通过后续工作来完善。

预期工作计划如下：

① 理论方面：本文阐述了内啮合曲线对构齿轮的几何参数与齿形参数选取原则，设计了单点接触与双点接触的内啮合曲线对构齿轮传动的齿形方案。对于可能存在的齿形干涉与消除方法等理论内容未做深入探讨，后续工作中应当涉及并深入。

② 制造及检测方面：本文主要对内啮合曲线对构齿轮传动基本理论开展了相关研究。对于新型轮齿齿面形式，其加工与检测技术是实现应用及批量生产的关键手段，后续应当着重探讨复杂齿面高效精密制造及检测方法。

致 谢

入学场景似乎尚在昨天，转眼硕士研究生学习生活却即将结束，不得不感慨时光如梭。回首三年的学习与工作，尽管有诸多的不如意，但是自身的成长却依旧是生活的主旋律。在这三年里，导师的在学习、工作与生活中指导与关怀，给予了我前行的勇气与方向，战胜自己的诸多缺点；在日常学习与生活中相处中，师兄师姐们的话语与行动，为我树立的学习与工作的榜样，也同样让我感受到了家的温暖；一起入学的同门们，也用他们年轻向上的心，带动着我一起努力学习与工作！

本文是在我的导师陈老师的悉心指导与关怀下一步一步完成的，陈老师以严谨的学术态度对我进行严格要求，以渊博的学术知识对我的论文进行方向性的指导，我的论文不仅是个人努力的结果，更是陈老师心血凝聚。在这里，向陈老师致以最崇高的敬意与衷心的感谢！

感谢梁栋师兄，对我的论文进行了详细的指导与帮助；同样感谢谭儒龙、彭昌琰、彭帅、张录合几位博士师兄，在其他方面给予的指导与帮助。感谢祝明路、莫绪纶、付杰、杨云几位同门在这三年的陪伴、关心与帮助。也同样感谢研一、研二师弟们的理解与鼓励。

感谢这三年里，在学习、生活及工作上为我提供帮助与指导的老师、同学与朋友们！

感谢我父母这二十多年来的养育、关爱与支持，感谢亲人长辈们对我的关心与爱护，祝你们永远身体健康、开心快乐！

最后，衷心感谢百忙之中评阅论文与参加答辩的各位专家与老师们！

李伟斌

二〇一八年五月 于重庆

参考文献

- [1] 新华网. 中华人民共和国国民经济和社会发展第十二个五年规划纲要[EB/OL]. <http://www.china.com.cn/>. 2011.03.16.
- [2] 中国机械工业年鉴编辑委员会, 中国机械通用零部件工业协会. 中国机械通用零部件工业年鉴 2009[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [3] 李盛其. 中国齿轮行业“十二五”发展规划纲要(下)[J]. 现代零部件, 2011, (2): 30-32.
- [4] 李海翔, 陈兵奎, 谭儒龙. 一种新型齿轮的数学模型及有限元分析[J]. 中国机械工程, 2012, 23(12): 1451-1455.
- [5] 李特文. 齿轮啮合原理 [M]. 第 2 版. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.
- [6] 王树人. 齿轮啮合理论简明教程[M]. 天津: 天津大学出版社, 2005.
- [7] D.W. Dudley. The evolution of the gear art[M]. Washington: American Gear Manufacturers' Association, 1969.
- [8] 代广君. 基于滚齿加工的线接触螺旋锥齿轮研究[D]. 天津: 天津大学, 2008.
- [9] MMR. Chaleat, LE. Krivocheine, D. Mangeron, MN. Oguztoreli. Determinability of solutions to mixed nonlinear integrodifferential with polyvibrating operators and limits of integration containing unknown functions[J]. Bulletin De L Academie Polonaise Des Sciences-Serie Des Sciences Mathematiques Astronomiques Et Physiques, 1976, 24(9): 697-704.
- [10] V.I.Goldfarb. What we know about spiroid gears [C]//Datong QIN, Bingkui CHEN, Chao LIN. Proceeding of the international conference on mechanical transmissions. Chongqing; Science Press. 2006: 19-26.
- [11] E. Wildhaber. Basic relationships of hypoid gears[J]. American Machinist, 1946, 90: 108-115.
- [12] L.M. Baxter. Basic geometry and tooth contact of hypoid gears[J]. Industrial Mathematics, 1961, 11(2): 1-28.
- [13] F.L. Litvin, A. Fuentes. Gear geometry and applied theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [14] F.L. Litvin, A. Fuentes, A. Demenego, D. Vecchiato. New developments in the design and generation of gear drives[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2001, 215(7): 747-757.
- [15] M. Neagoe, D. Diaconescu. On a new cycloidal planetary gear used to fit mechatronic systems of RES[J]. Tokyo Institute of Technology, 2004, 45(7): 1931-1939.

- [16] J. Argyris, A. Fuentes, F.L. Litvin. Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(11-12): 1057-1095.
- [17] F.D. Puccio, M. Gabiccini, M. Guiggiani. Generation and curvature analysis of conjugate surfaces via a new approach[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(4): 382-404.
- [18] N. Ito, K. Takahashi. Differential geometrical conditions of hypoid gears with conjugate tooth surfaces[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(3): 323-330.
- [19] C.W. Musser. The Harmonic Drive: Breakthrough in mechanical drive design[J]. Machine Design, 1960, 32(8): 160-173.
- [20] 吴大任, 骆家舜. 齿轮啮合理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [21] 陈志新. 共轭曲面原理及其应用[M]. 北京: 中国科学出版社, 2008.
- [22] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2009.
- [23] 厉海祥. 点线啮合齿轮传动[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [24] 潘华平, 钱瑞明. 新型圆弧纯滚动啮合齿轮传动的设计[J]. 机械制造与研究, 2003, (1): 20-25.
- [25] 段德荣. 渐开线二次包络弧面蜗杆传动的研究[D]. 太原: 太原理工大学, 1981.
- [26] 刘健. 机械制造中曲面的共轭原理[J]. 大连理工大学学报, 1959, (3): 151-222.
- [27] 李高敬. 螺旋齿轮啮合原理及其应用[J]. 精密制造与自动化, 1979, (4): 34-47.
- [28] Y.Z. Chen, X. Liu, D.G. Chetwynd, et al. Investigation of a novel elastic-mechanical wheel transmission under light conditions[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(11): 1462-1477.
- [29] Y.Z. Chen, X.Y. Xiao, L. Luo. A corrected equation of space curve meshing[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(7): 1348-1359.
- [30] Y.Z. Chen, Q. Hu, L.H. Sun. The design criterion of the space-curve meshing-wheel mechanism based on elastic deformation of the tine[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(5): 054502-054506.
- [31] J. Ding, Y. Chen, Y. Lv. Design of space-curve meshing-wheels with unequal tine radii[J]. Strojniški vestnik-Journal of Mechanical Engineering, 2012, 58(11): 633-641.
- [32] 陈兵奎, 房婷婷, 李朝阳, 王淑妍. 摆线针轮行星传动共轭啮合理论[J]. 中国科学E辑: 技术科学, 2008, 38(1): 148-160.
- [33] B.K. Chen, H. Zhong, J.Y. Liu, C.Y. Li, T.T. Fang. Generation and investigation of a new cycloid drive with double contact[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 49(3): 270-283.

- [34] D. Liang, B.K. Chen, Y.E. Gao. The generation principle and mathematical model of involute-helix gear transmission[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2013, 227(12): 2834-2843.
- [35] 陈兵奎, 易文翠, 钟晖, 谭儒龙. 线面共轭啮合理论及齿面构建方法[J]. 机械工程学报, 2012, 48(19): 17-21.
- [36] 梁栋. 共轭曲线齿轮啮合理论研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2015.
- [37] 高艳娥. 共轭曲线齿轮设计理论及切齿方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2015.
- [38] 谭儒龙. 共轭曲线锥齿轮研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2016.
- [39] F.L. Litvin, A. Fuentes, C. Zanzi, M. Pontiggia. Design, generation, and stress analysis of two versions of geometry of face gear drives[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(10): 1179-1211.
- [40] T. Komori, Y. Ariga, S. Nagata. A new gears profile having zero relative curvature at many contact points (LogiX Tooth Profile)[J]. Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 430-436.
- [41] T. Yeh, D.C.H. Yang, S.H. Tong. Design of new tooth profiles for high-load capacity gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(10): 1105-1120.
- [42] C.B. Tsay, Z.H. Fong. Computer simulation and stress analysis of helical gear with pinion circular arc teeth and gear involute teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 1991, 26(2): 145-154.
- [43] Y. Ariga, S. Nagata. Load capacity of a new W-N gear with basic rack of combined circular and involute profile[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1995, 107(4): 565-572.
- [44] Kapelevich. Geometry and design of involute spur gears with asymmetric teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(1): 117-130.
- [45] 张光辉, 许洪斌, 龙慧. 分阶式双渐开线齿轮[J]. 机械工程学报, 1995, 31(6): 47-52.
- [46] S.M. Luo, Y. Wu, J. Wang. The generation principle and mathematical models of a novel cosine gear drive[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(12): 1543-1556.
- [47] 厉海祥, 罗齐汉, 黄海等. 点线啮合圆柱齿轮传动[J]. 水利电力机械, 2007, 29(6): 640-643.
- [48] 黄小平, 黄爱苹. 纯滚动接触齿轮的齿形研究[J]. 林业机械与木工设备, 2004, 12: 39-41.
- [49] 李海翔. 渐开弧面齿轮传动的基本理论及试验研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2012.
- [50] 陈扬枝, 胡强, 罗亮. 一种基于空间曲线啮合原理的新型传动机构的研究[J]. 机械传动, 2009, 33(2): 1-4.
- [51] 苏进展, 方宗德, 蔡香伟. 三次样条齿线圆柱齿轮齿面接触分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(9): 112-116.

- [52] 王进戈, 张均富, 洪雷. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动机构[P]. 中国专利: CN101290042A. 2008-04-14.
- [53] 张展, 朱景梓, 秦立高. 渐开线内啮合圆柱齿轮传动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991
- [54] Faydor L. Litvin, 'Development of Gear Technology and Theory of Gearing', 1997, Lewis Research Center, NASA, NASA Reference Publication 1406
- [55] Litvin, F. L., and Tsay, C. B., "Helical Gears with Circular Arc Tooth: Simulation of Conditions of Conditions of Meshing and Bearing Contact, ASME Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design, Vol. 107, 556-564, 1985
- [56] Litvin, F. L., Theory of Grating. NASA RP-1212 (AVSCOM 88-C-035) Washington D. C., 1989b.
- [57] Litvin, F. L., and Kim, D. H., "Computerized Design, Generation and Simulation of Meshing of Modified Involute Spur Gears with Localized Bearing Contact and Reduced Level of Transmission Errors,, Trans. ASME, J. Mesh. Des., Vol. 119, pp. 96-100, 1997a.
- [58] 吴昱龙. 双圆弧齿轮之行星齿轮系设计[D]. 台湾: 台湾正修科技大学, 2007.
- [59] 徐文博. 双圆弧齿轮内啮合传动的研究[D]. 郑州: 郑州机械研究所, 2012.
- [60] 康兴虎. 内啮合多圆弧齿轮啮合原理及其成形铣刀的设计研究[D]. 银川: 宁夏大学, 2013.
- [61] 吴凯. 内啮合四圆弧齿廓齿轮的弯曲应力分析[D]. 银川: 宁夏大学, 2014.
- [62] 陈惟荣. 齿轮啮合原理[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1986.
- [63] 陈兵奎, 梁栋, 高艳娥. 齿轮传动共轭曲线原理[J]. 机械工程学报, 2014, 50(1): 130-136.
- [64] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2009. 3.
- [65] 陈维桓. 微分几何[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006. 6.
- [66] 邵家辉. 圆弧齿轮[M]. 北京: 机械工业出版社, 1994. 10.
- [67] 张大可. 现代设计方法[M]. 机械工业出版社, 2014.

附 录

作者在攻读硕士学位期间参与的研究项目

- [1] 国家自然科学基金青年基金项目，内啮合共轭曲线齿轮传动设计制造关键技术研究，51605049, 2017.1~2019.12.
- [2] 横向自然科学类合作项目，共轭曲线齿轮成套关键技术研究, 2015.1~2017.12.