第三篇　《动力学》

第九章	质点动力学的基本方程
第十章	动量定理
第十一章	动量矩定理
第十二章	动能定理
第十三章	达朗贝尔原理
第十四章	虚位移原理

理论力学

第十二章 动能定理

第十二章　动能定理

§12–1　力的功

§12–2　质点和质点系的动能

§12–3　动能定理

§12–6　普遍定理的综合应用举例

§ 12-1　力的功

一．常力的功

二．变力的功

三．常见力的功

1．重力的功

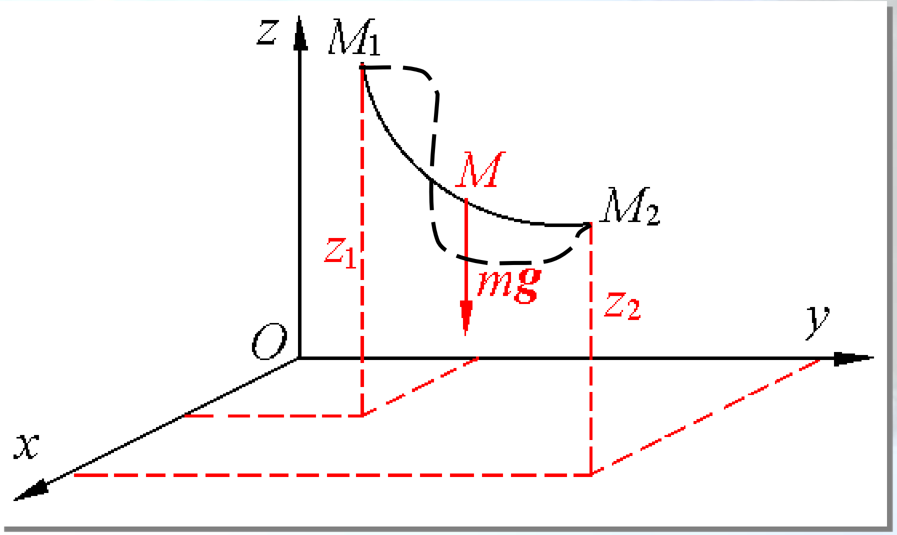
2．弹性力的功

3．定轴转动刚体上作用力的功，力偶的功

三. 常见力的功

1. 重力的功

质点：重力在三轴上的投影：



$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$$

$$W = \int_{z_1}^{z_2} -mg\,\mathrm{d}z \quad = mg(z_1 - z_2)$$

与运动轨迹无关

$$W = \int_{M_1}^{M_2} (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$$

质点系：

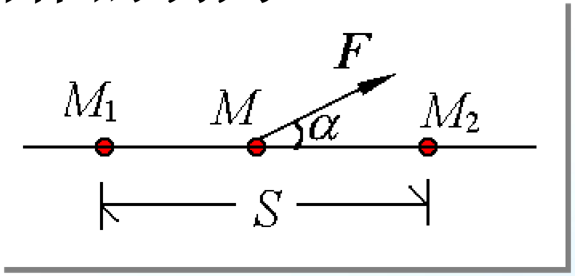
$W = Mg(z_{C1} - z_{C2})$ 式中：z_{c1}、z_{c2}为质点系的质心坐标

质点系重力的功，等于质点系的重量与其在始末位置重心的高度差的乘积，而与各质点的路径无关。

一．常力的功

质点作直线运动，路程为S，$(M_1 \to M_2)$，力在位移方向上的投影为$F\cos\alpha$，力F在路程S 中所作的功为：

$$W = FS\cos\alpha = \overline{F} \cdot \overline{S}$$



功的单位是J，1J=1N·m

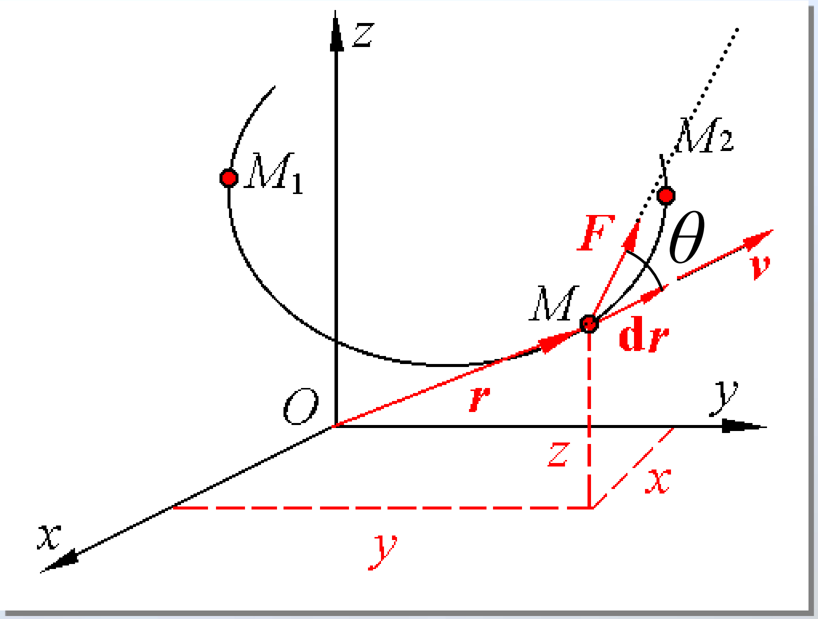
力的功是代数量:

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ 时,正功； $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,功为零； $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时,负功。

二．变力的功

设质点M在变力F的作用下作曲线运动。将曲线分成无限多个微小段ds，力F在微段上可视为常力，所作的微小的功称为元功：

$$\delta W = F\cos\theta \mathrm{d}s = \overline{F} \cdot \mathrm{d}\overline{r}$$



2. 弹性力的功

质点M与弹簧联接，弹簧自然长l_0，现伸长δ，弹簧作用于质点的弹性力 $\bar{F}$ 的大小与弹簧的变形量δ 成正比，即：

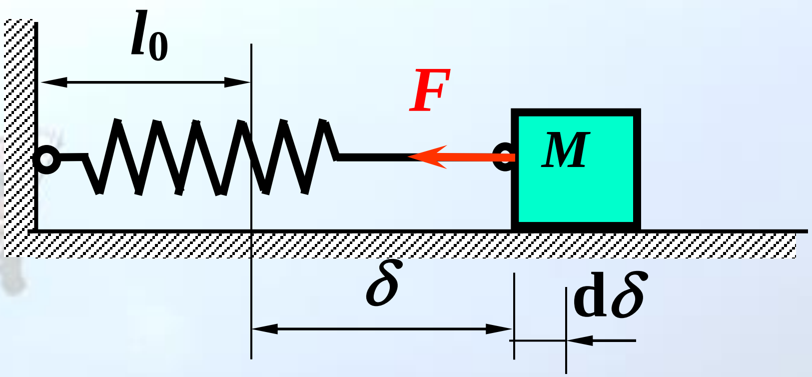
$$F = k\delta$$

k—弹簧的刚度系数，

F的方向指向弹簧自然位置。

当弹簧长度增加dδ时，弹性力的元功：

$$\delta W = -F\mathrm{d}\delta = -k\delta\mathrm{d}\delta$$

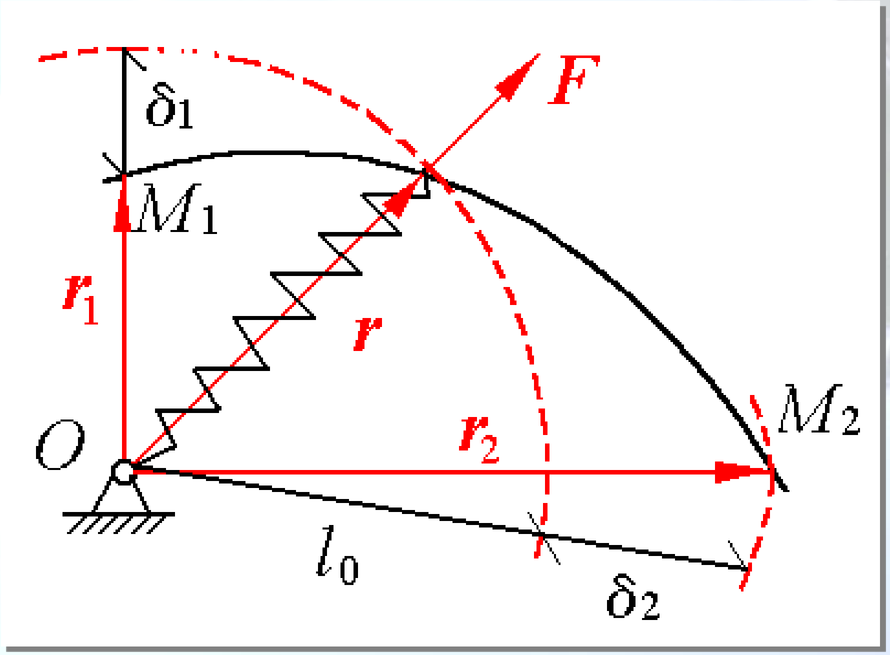


$$\therefore \quad W = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \mathrm{d}W = \int_{\delta_1}^{\delta_2} -k\delta\mathrm{d}\delta$$

$$\boxed{\text{即} \quad W = \frac{k}{2}(\delta_1^{\,2} - \delta_2^{\,2})}$$

当质点的运动轨迹为曲线时也成立：

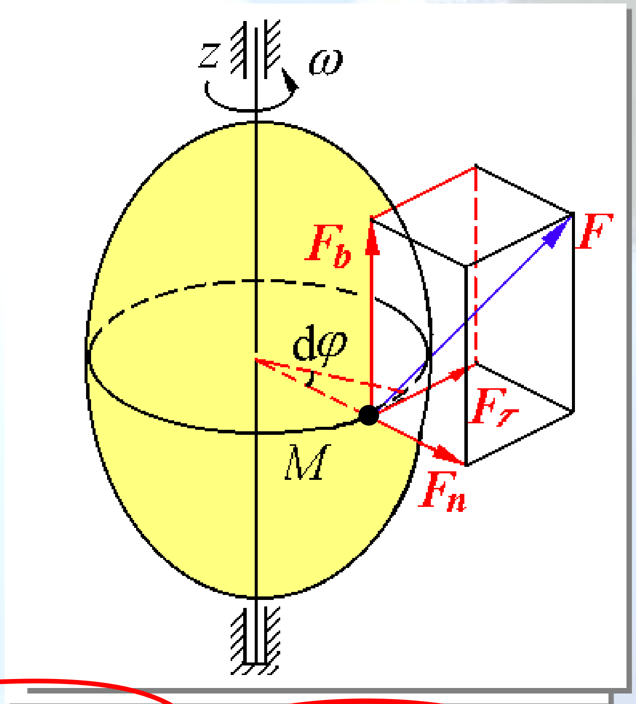
即 $W=\frac{k}{2}(\delta_1{}^2-\delta_2{}^2)$



弹性力的功只与弹簧的起始变形和终了变形有关，而与质点运动的路径无关。

3. 定轴转动刚体上作用力的功 ·力偶的功

设刚体绕 z 轴转动，在M点作用有力$\bar{F}$，计算刚体转过一角度φ时力$\bar{F}$所作的功。



质点的轨迹为圆，圆的切线方向为 $\bar{\tau}$ 。

元功：$\delta W = F_\tau \mathrm{d}s = F_\tau R\mathrm{d}\varphi = M_z(\bar{F})\mathrm{d}\varphi$

$$\therefore W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\bar{F})\mathrm{d}\varphi$$

$\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\varphi$

当F 是常力时，得

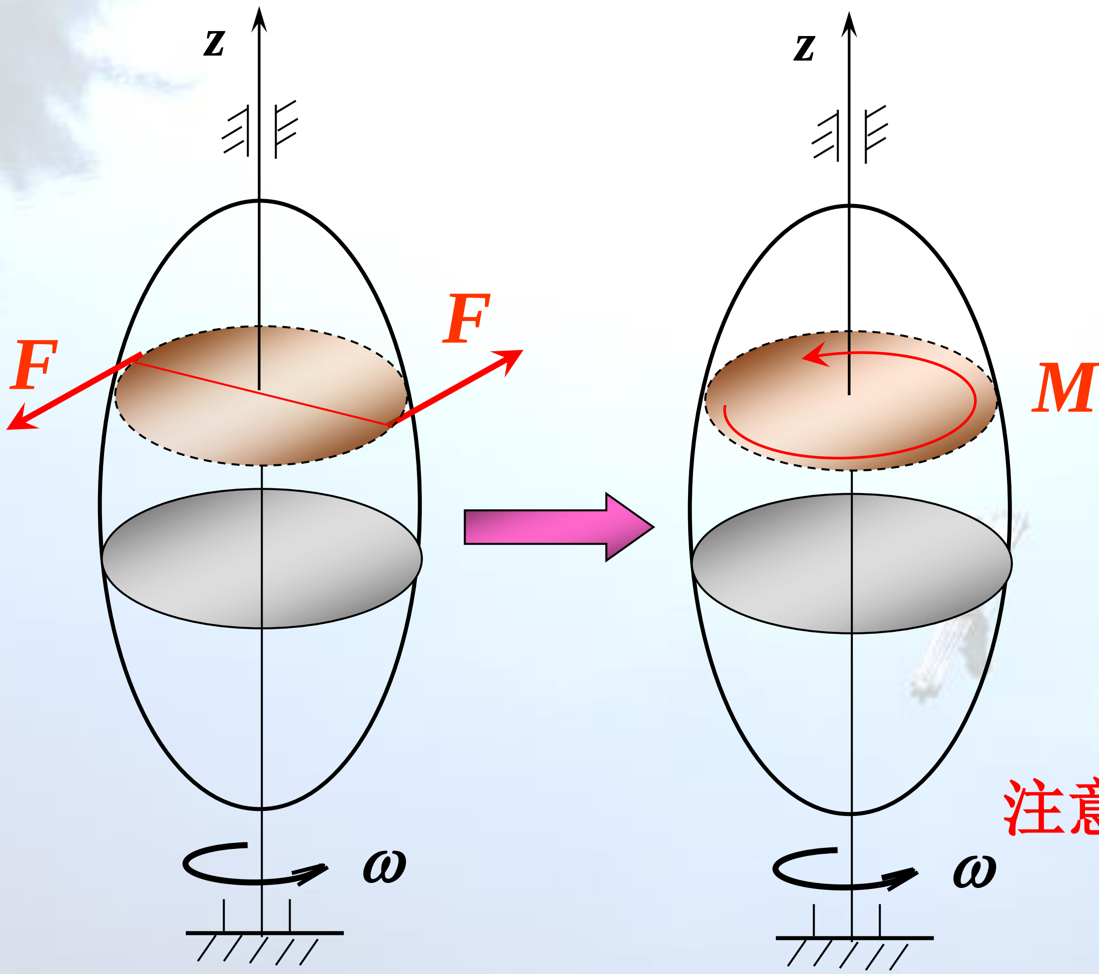
$$W = M_z(\bar{F})(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= M_z(\bar{F})\cdot\varphi$$

（其中$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$）　$M_z(\bar{F}) = F_\tau R$

定轴转动刚体上作用力的功等于：
力对转轴的矩乘以转过的角度φ 。

如果作用力偶M，且力偶的作用面垂直转轴



$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \mathrm{d}\varphi$$

若M = 常量，则

$$W = M(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= M \cdot \varphi$$

$$(\varphi = \varphi_2 - \varphi_1)$$

注意：功的正负号的确定。

§12-2　质点和质点系的动能

物体的动能是由于物体运动而具有的能量，是机械运动强弱的又一种度量。

一．质点的动能

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

动能是瞬时量，是与速度方向无关的正标量，具有与功相同的量纲，单位也是J。

二．质点系的动能

$$T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2$$

三．刚体的动能

1．平移刚体

$v_i=v_C$

$$T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}\sum m_iv_C^2=\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_C^2$$

$$\therefore\quad \boxed{T=\frac{1}{2}mv_C^2}$$

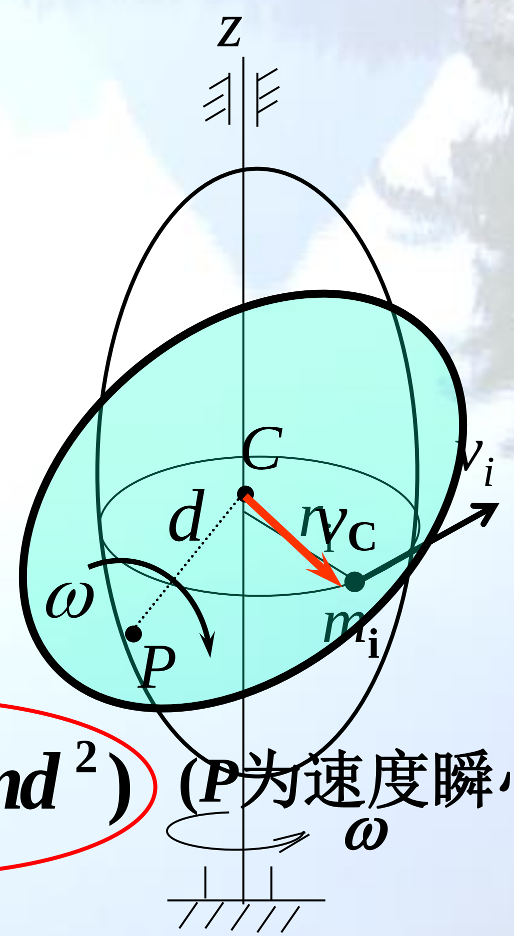
2．定轴转动刚体

$v_i = r_i \omega$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \omega^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

$$\therefore \boxed{T = \frac{1}{2} J_z \omega^2}$$



3．平面运动刚体

$$T = \frac{1}{2} J_P \omega^2$$

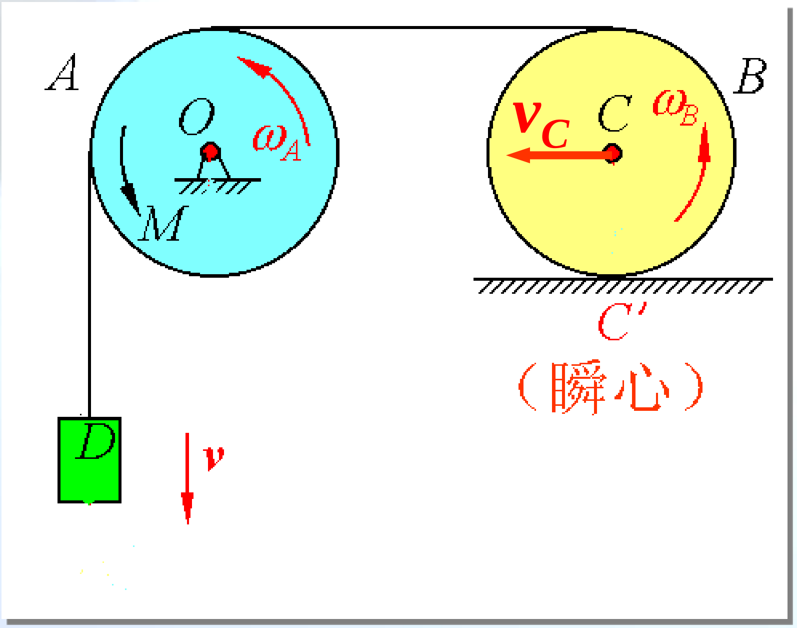
$(J_P = J_C + md^2)$ (P为速度瞬心)

$$= \frac{1}{2}(J_C + md^2)\omega^2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} m (d \cdot \omega)^2$$

$$\therefore \boxed{T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2}$$

$v_C = d \cdot \omega$

[例1] 图示系统中,均质圆盘A、B质量均为m，半径均为R, 重物D质量为m_1，下降速度为v。求系统的总动能。



解：重物D: $T=\dfrac{1}{2}m_1v^2$

圆盘A: $T=\dfrac{1}{2}J_O\omega_A^2$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{2}mR^2)(\dfrac{v}{R})^2$

$=\dfrac{1}{4}mv^2$

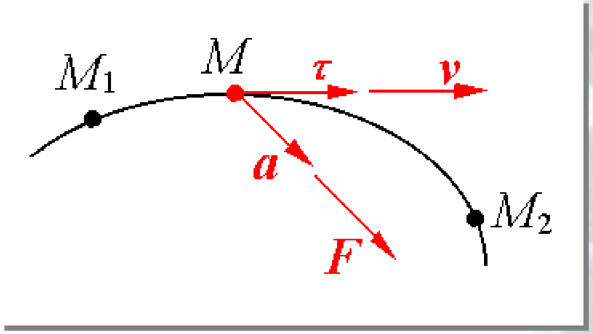
$$v_C=\frac{v}{2}\ ,\ \omega_B=\frac{v_C}{R}\ ,\ J_C=\frac{1}{2}mR^2$$

圆盘B: $T=\dfrac{1}{2}J_C\omega_B^2+\dfrac{1}{2}mv_C^2$

$=\dfrac{3}{16}mv^2$

$\therefore$总动能 $T=\dfrac{v^2}{16}(8m_1+7m)$

§ 12-3　动能定理



1. 质点的动能定理

$$m\bar{a}=\bar{F} \Rightarrow m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}$$

两边点乘以$d\bar{r}$，

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot d\bar{r}=\bar{F}\cdot d\bar{r} \Rightarrow m\,d\bar{v}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$m\,d\bar{v}\cdot\bar{v}=\bar{F}\cdot d\bar{r} \Rightarrow \frac{1}{2}m\,d\bar{v}\cdot\bar{v}+\frac{1}{2}m\bar{v}\cdot d\bar{v}=\bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$\Rightarrow d(\frac{1}{2}m\bar{v}\cdot\bar{v})=\bar{F}\cdot d\bar{r} \Rightarrow \boxed{d(\frac{1}{2}mv^2)=\delta W}$$ 动能定理的微分形式

将上式沿路径$\overset{\frown}{M_1M_2}$积分，$\int_{v_1}^{v_2}d(\frac{1}{2}mv^2)=W_{12}$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=W_{12}}$$ 动能定理的积分形式

2. 质点系的动能定理

对质点系中的任一质点m_i： $\mathrm{d}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)=\delta W_i$

对整个质点系，有： $\sum \mathrm{d}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)=\sum \delta W_i$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2)=\sum \delta W_i$$

$\therefore$ $\boxed{\mathrm{d}T=\sum \delta W_i}$ 质点系动能定理的微分形式

将上式沿路径$\overset{\frown}{M_1 M_2}$积分，可得

$\boxed{T_2-T_1=\sum W_i}$ 质点系动能定理的积分形式

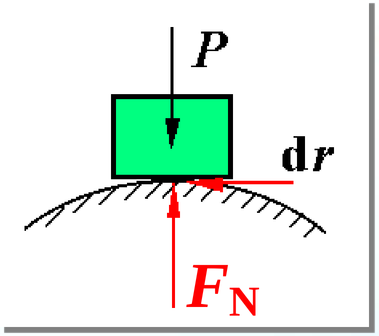
$\sum W_i$为全部力所作功的和

3.理想约束及内力作功

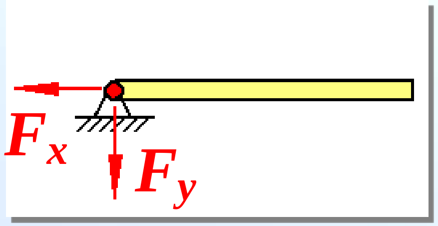
约束力元功为零或元功之和为零的约束称为理想约束。

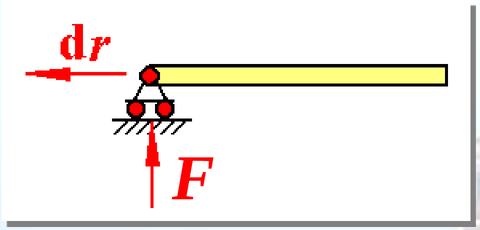
1)光滑固定面约束

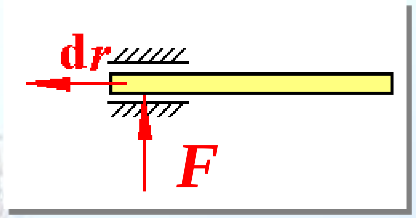
$$\delta W = \overline{F}_{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{d}\overline{r} = 0 \quad (\overline{F}_{\mathrm{N}} \perp \mathrm{d}\overline{r})$$



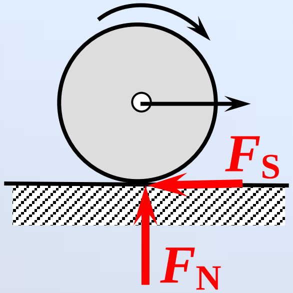
2)活动铰支座、固定铰支座和向心轴承







3)刚体沿固定面作纯滚动

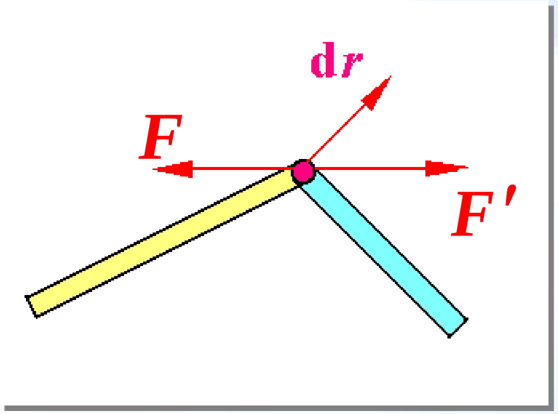


纯滚动时摩擦力不作功

4). 联接刚体的光滑铰链（中间铰）

$$\sum \delta W = \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{r} + \bar{F}' \cdot \mathrm{d}\bar{r}$$

$$= \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{r} - \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{r} = 0$$



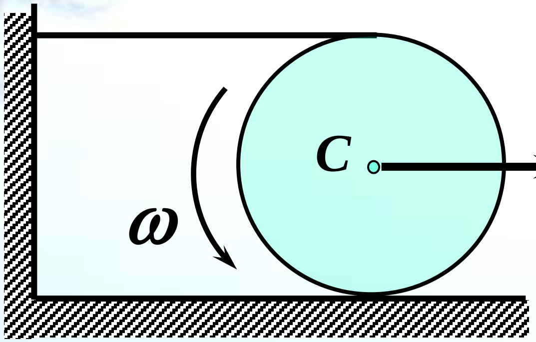
5). 柔索约束（不可伸长的绳索）和二力杆

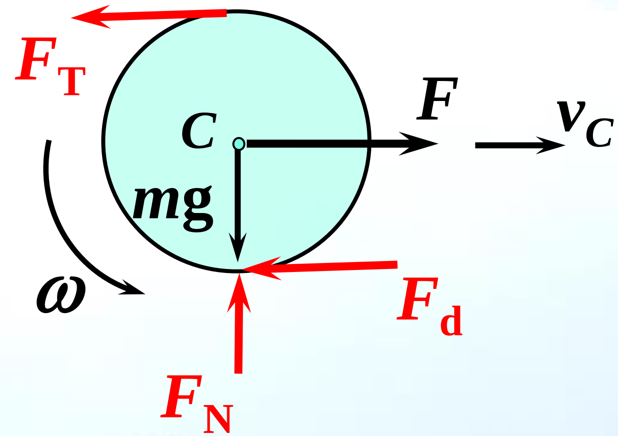
拉紧时，内部拉力的元功之和恒等于零。

在某些情况下，内力虽然等值反向，但所作功的和不等于零。

刚体所有内力作功的和等于零。

[例12-3] 均质圆盘半径为R，质量为m，圆盘与地面间的动滑动摩擦因数为f，力F为常量，初始静止。求圆盘走过路程 s 时，圆盘的角速度、角加速度及盘心C的加速度。





$$v_C = R\omega \qquad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2 = \frac{3}{4}mv_C^2$$

$$W_{12} = Fs - 2F_d s = Fs - 2mgfs$$

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

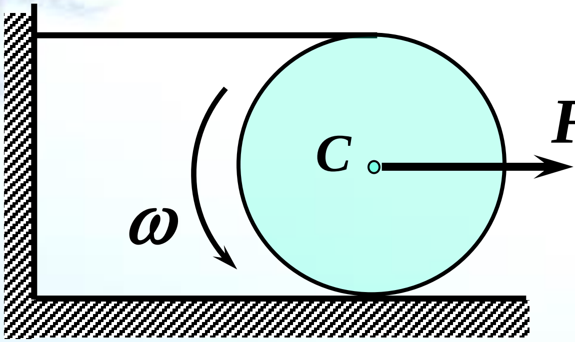
$$F_d = mgf$$

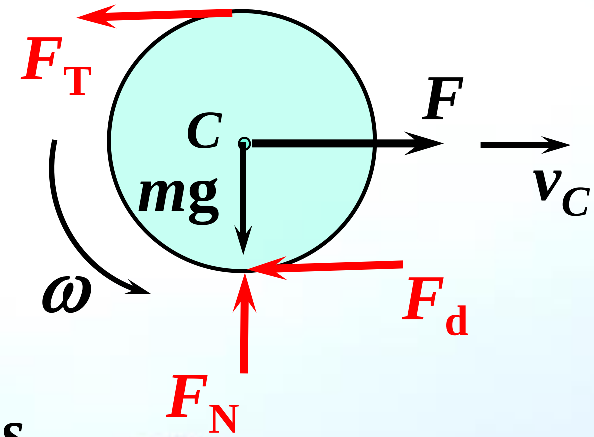
$$\frac{3}{4}mv_C^2 = Fs - 2mgfs \quad \text{------(1)}$$

$$v_C = \sqrt{\quad} \qquad \omega = \frac{v_C}{R}$$

将（1）式两边对时间求一阶导数：

[例12-3] 均质圆盘半径为R，质量为m，圆盘与地面间的动滑动摩擦因数为f，力F为常量，初始静止。求圆盘走过路程 s 时，圆盘的角速度、角加速度及盘心C的加速度。





$$\frac{3}{2}mv_C\cdot\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=F\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-2mgf\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$v_C=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\qquad a_C=\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$$

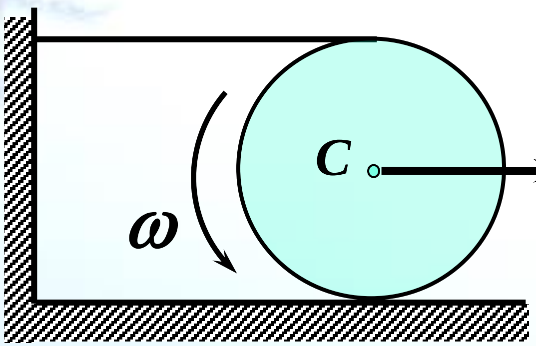
$$\frac{3}{2}m\cancel{v_C}\cdot a_C=F\cancel{v_C}-2mgf\cancel{v_C}$$

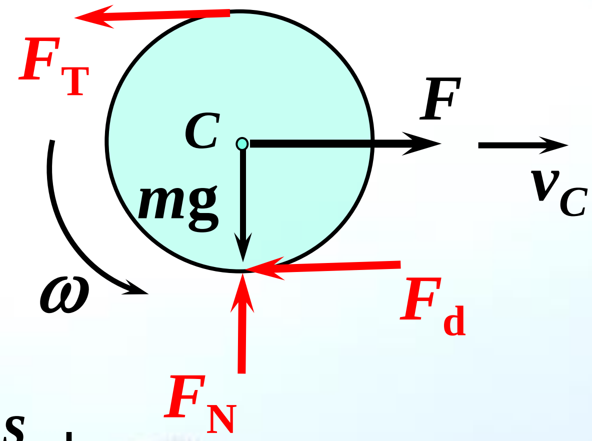
$$\frac{3}{4}mv_C^2=Fs-2mgfs \quad \text{------(1)}$$

$$v_C=\sqrt{}\qquad \omega=\frac{v_C}{R}$$

将（1）式两边对时间求一阶导数：

[例12-3] 均质圆盘半径为R，质量为m，圆盘与地面间的动滑动摩擦因数为f，力F为常量，初始静止。求圆盘走过路程 s 时，圆盘的角速度、角加速度及盘心C的加速度。





$$\frac{3}{2}mv_C\cdot\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=F\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-2mgf\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$v_C=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\qquad a_C=\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$$

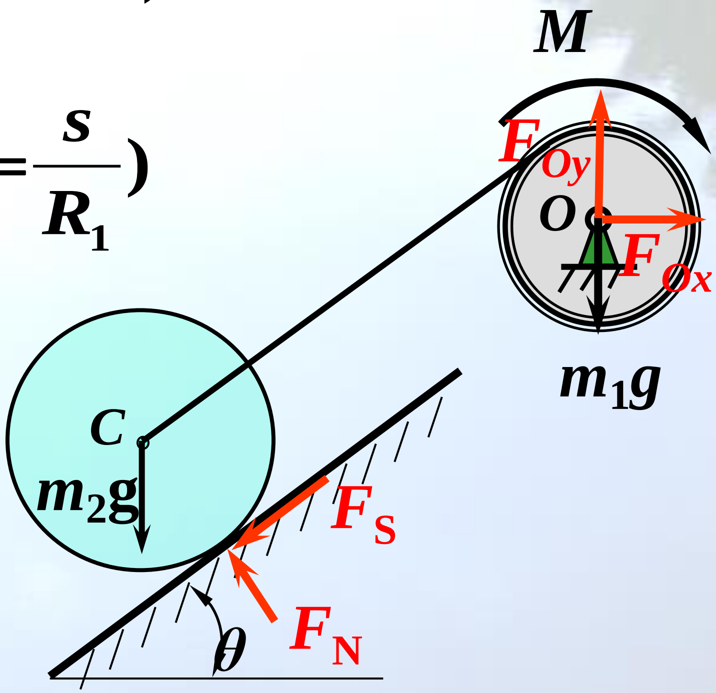
$$\frac{3}{2}m\cancel{v_C}\cdot a_C=F\cancel{v_C}-2mgf\cancel{v_C}$$

$$a_C=\frac{2}{3m}(F-2mgf)$$

$$\alpha=\frac{a_C}{R}=\frac{2}{3mR}(F-2mgf)$$

[例12-5] 卷扬机，鼓轮上作用常力偶M，鼓轮半径为R_1，质量为m_1，质量分布在轮缘上；圆柱半径为R_2，质量为m_2，质量均匀分布。求圆柱中心C经过路程s时的速度和加速度。(盘C作纯滚动，初始时系统静止)

解：取系统为研究对象



$$W_{12}=M\varphi-m_2g\sin\theta\cdot s \qquad (\varphi=\frac{s}{R_1})$$

$$=M\frac{s}{R_1}-m_2g\sin\theta\cdot s$$

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+(\frac{1}{2}m_2v_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_2^2)$$

$$J_1=m_1R_1^2,\quad J_C=\frac{1}{2}m_2R_2^2,$$

$$\omega_1=\frac{v_C}{R_1},\quad \omega_2=\frac{v_C}{R_2}$$

$$\therefore\ T_2=\frac{v_C^2}{4}(2m_1+3m_2)$$

由动能定理：$T_2 - T_1 = W_{12}$

$$\therefore \frac{v_C^2}{4}(2m_1 + 3m_2) - 0 = M\frac{s}{R_1} - m_2 g\sin\theta \cdot s \quad \text{------------} \quad (a)$$

$$\therefore \quad v_C = 2\sqrt{\frac{(M - m_2 g R_1 \sin\theta)s}{R_1(2m_1 + 3m_2)}}$$

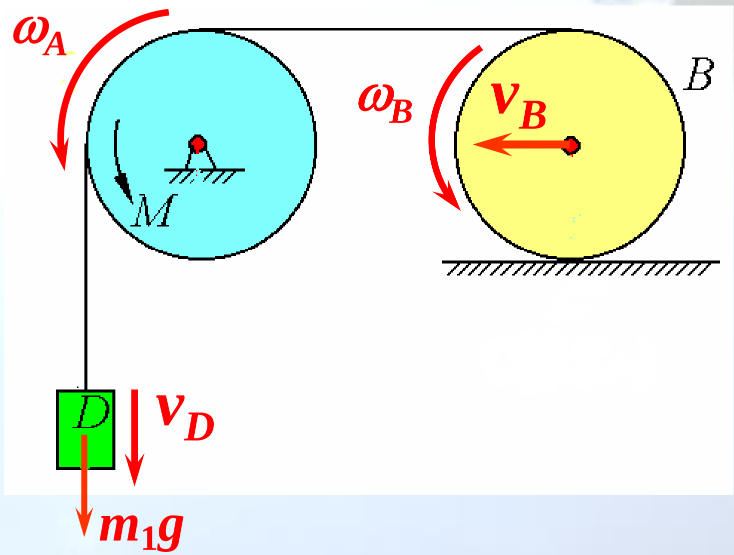
将（a）式两边对时间求一阶导数：

$$\frac{\cancel{v_C}}{2}(2m_1+3m_2)\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{R_1}\cancel{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} - m_2 g\sin\theta \cdot \cancel{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

$$\because \quad a_C = \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \qquad v_C = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(2m_1+3m_2)a_C = \frac{M}{R_1} - m_2 g\sin\theta \qquad \therefore a_C = \frac{2(M - m_2 g R_1 \sin\theta)}{(2m_1+3m_2)R_1}$$

[例3] 图示系统中,均质圆盘A、B质量均为m，半径均为R, 两盘中心在同一高度, 盘A上作用一常力偶，力偶矩为M； 重物D质量为m_1。求重物D下落距离h时的速度与加速度。(绳重不计，绳不可伸长，盘B作纯滚动，初始时系统静止)



解：取系统为研究对象

$$W_{12} = M\varphi + m_1gh = \frac{Mh}{R} + m_1gh$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{8m_1 + 7m}{16} v_D^2 \qquad (\varphi = \frac{h}{R})$$

由$T_2 - T_1 = W_{12}$

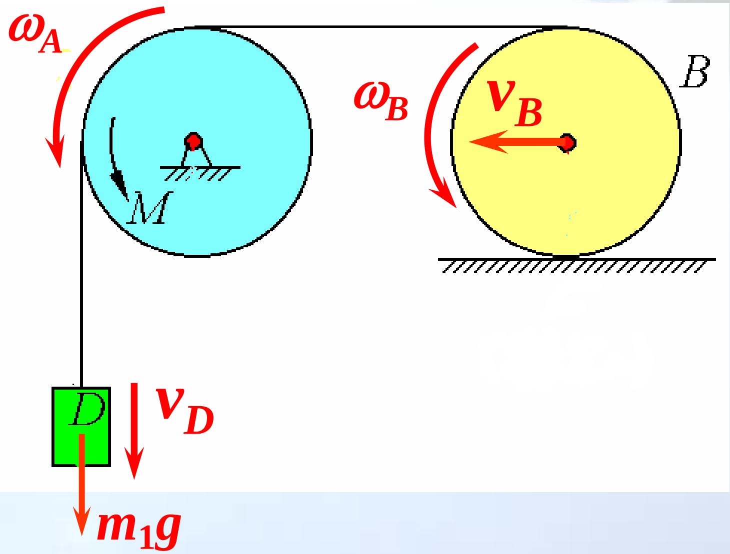
$$\therefore \frac{8m_1 + 7m}{16} v_D^2 - 0 = \frac{Mh}{R} + m_1gh \quad \text{---------} \quad (1)$$

$$\therefore v_D = 4\sqrt{\frac{(M/R + m_1g)h}{8m_1 + 7m}}$$

解：取系统为研究对象

$$W_{12}=M\varphi+m_1gh=\frac{Mh}{R}+m_1gh$$

$$T_1=0，T_2=\frac{8m_1+7m}{16}v_D^2 \qquad (\varphi=\frac{h}{R})$$



由$T_2-T_1=W_{12}$

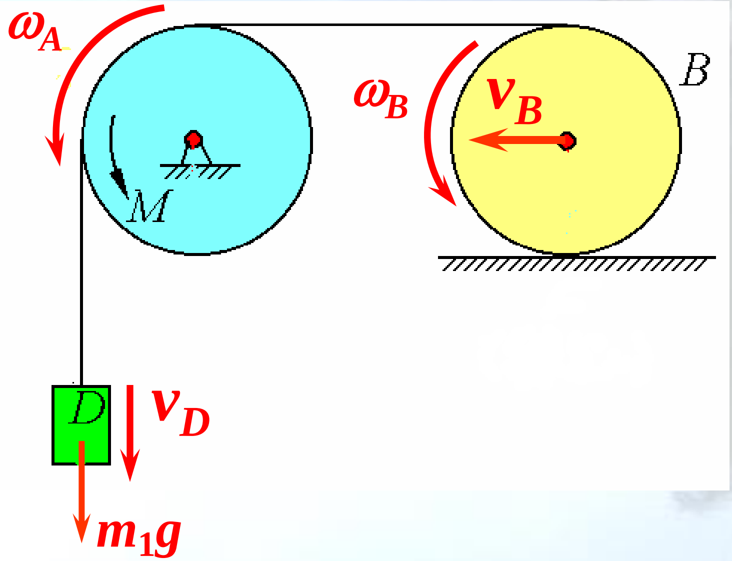
$$\therefore \frac{8m_1+7m}{16}v_D^2-0=\frac{Mh}{R}+m_1gh \text{---------} \quad (1)$$

$$\therefore v_D=4\sqrt{\frac{(M/R+m_1g)h}{8m_1+7m}}$$

解：取系统为研究对象

$$W_{12}=M\varphi+m_1gh=\frac{Mh}{R}+m_1gh$$

$$T_1=0,\ T_2=\frac{8m_1+7m}{16}v_D^2 \qquad (\varphi=\frac{h}{R})$$



由 $T_2-T_1=W_{12}$

$$\therefore \frac{8m_1+7m}{16}v_D^2-0=\frac{Mh}{R}+m_1gh \quad \text{---------} \quad (1)$$

$$\therefore v_D=4\sqrt{\frac{(M/R+m_1g)h}{8m_1+7m}}$$

将（1）式两边对 t 求导得：

$$\frac{8m_1+7m}{16}\cdot 2\cancel{v_D}\frac{dv_D}{dt}=(\frac{M}{R}+m_1g)\frac{d\cancel{h}}{dt}$$

$$\therefore a_D=\frac{dv_D}{dt}=\frac{8(M+m_1gR)}{(8m_1+7m)R}$$

如何求两轮子之间绳子的拉力？

[例9] 均质圆轮，半径为R，质量为m，与刚度为k的弹簧相连，OC与铅垂线OC'成60º角时弹簧无变形，长度为l，此时圆盘无初速地滚下(不滑动)。求轮子在C'位置时轮心的速度。

解：利用动能定理

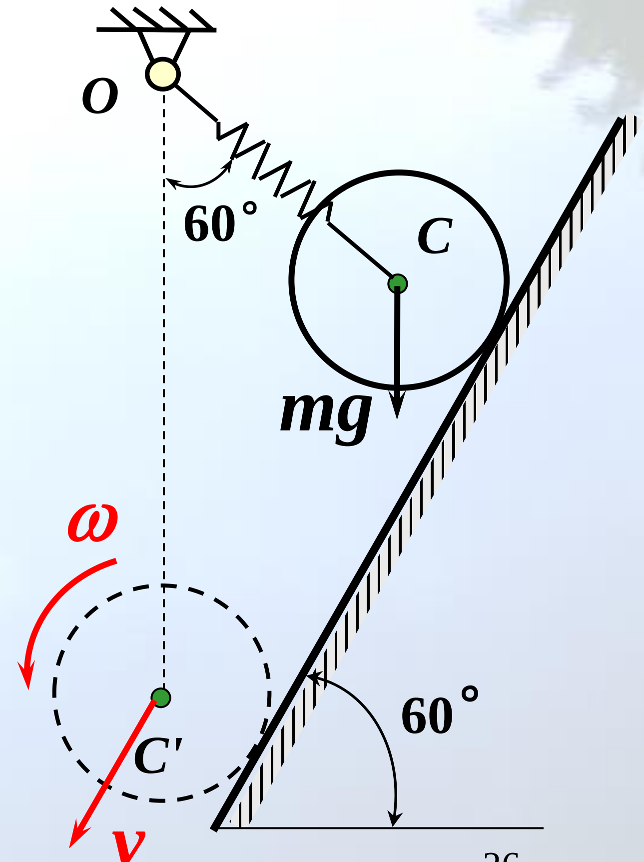
$$W_{12}=mg(2l-\frac{l}{2})-\frac{1}{2}kl^2$$

$$=\frac{3}{2}mgl-\frac{1}{2}kl^2$$

$$T_1=0,\qquad T_2=\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{3}{4}mv^2$$



解：利用动能定理

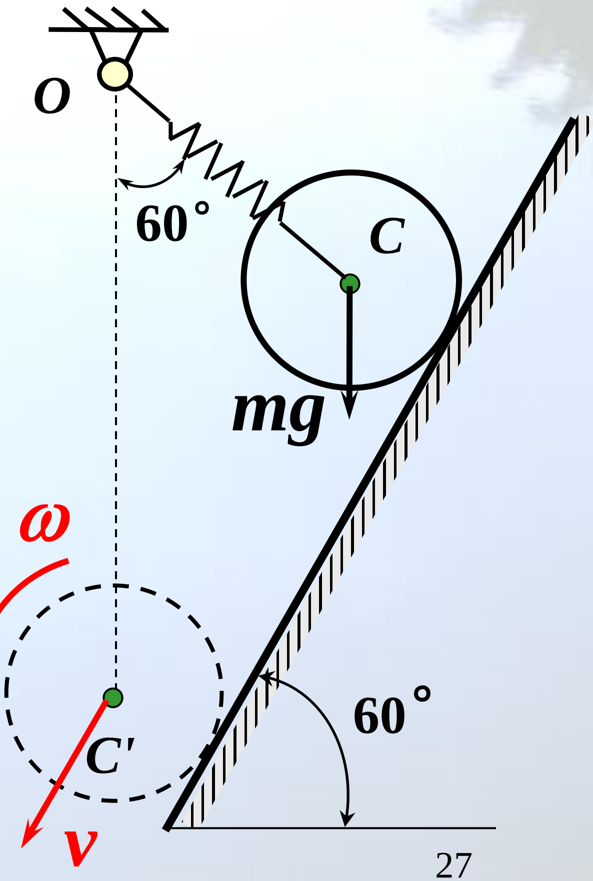
$$W_{12}=mg(2l-\frac{l}{2})-\frac{1}{2}kl^2$$

$$=\frac{3}{2}mgl-\frac{1}{2}kl^2$$

$$T_1=0,\qquad T_2=\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{3}{4}mv^2$$



解：利用动能定理

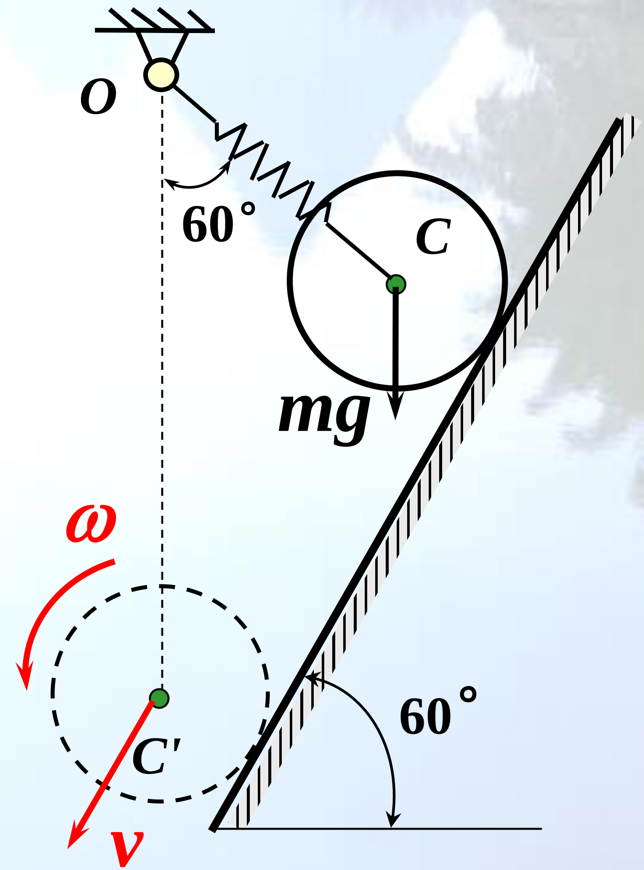
$$W_{12}=mg(2l-\frac{l}{2})-\frac{1}{2}kl^2$$

$$=\frac{3}{2}mgl-\frac{1}{2}kl^2$$

$$T_1=0,\qquad T_2=\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

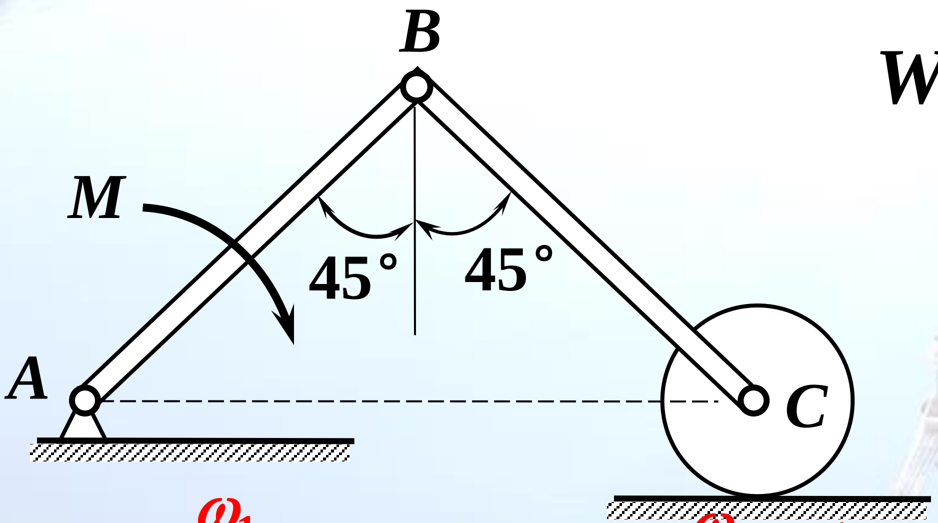
$$=\frac{3}{4}mv^2$$



$$T_2-T_1=W_{12}\qquad \frac{3}{4}mv^2=\frac{3}{2}mgl-\frac{1}{2}kl^2$$

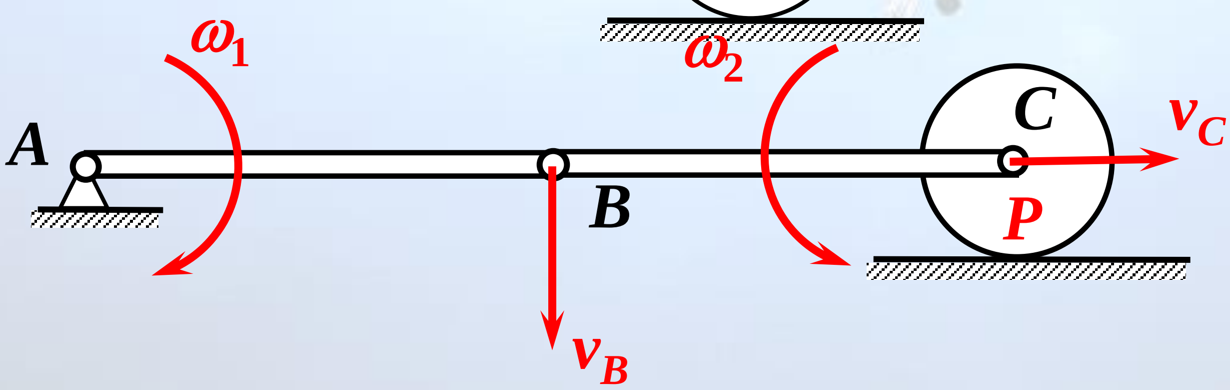
$$\therefore\ v=\sqrt{}$$

[例] 图示机构位于铅垂面内，杆*AB*、*BC*的质量均为*m*，长度均为*l*，均质圆盘*C*的质量为*m*，半径为*R*，可在粗糙水平直线轨道上做纯滚动，杆*AB*上作用一力偶*M*。求：系统从图示位置由静止开始运动到*ABC*三点一直线时，杆*AB*和杆*BC*的角速度。



$$W_{12}=mg\times\frac{\sqrt{2}l}{4}\times2+M\times\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}mgl+\frac{\pi M}{4}$$



$$T_1=0,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_A\omega^2 + \frac{1}{2}J_P\omega^2$$

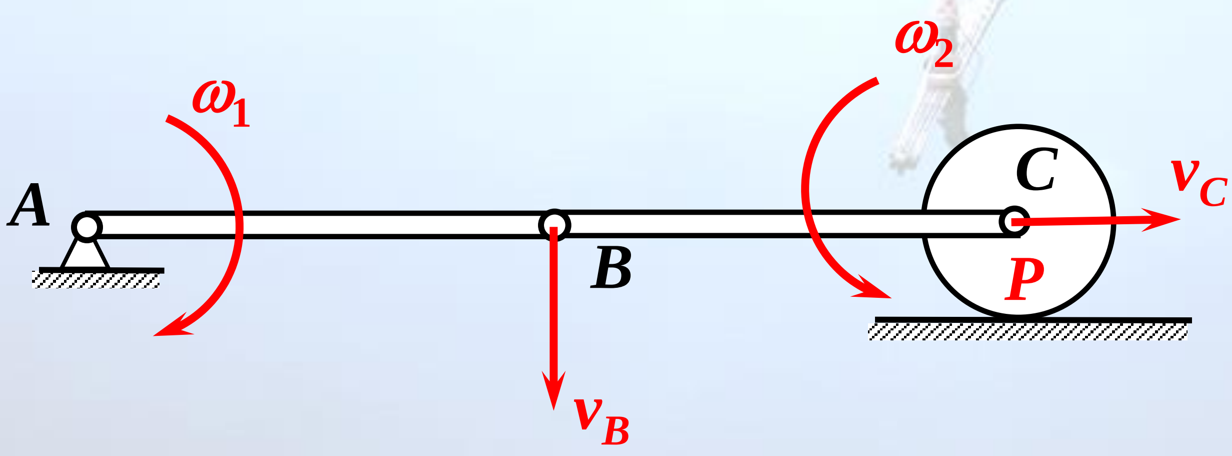
$$= \frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$J_A = J_P = \frac{1}{3}ml^2$$

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

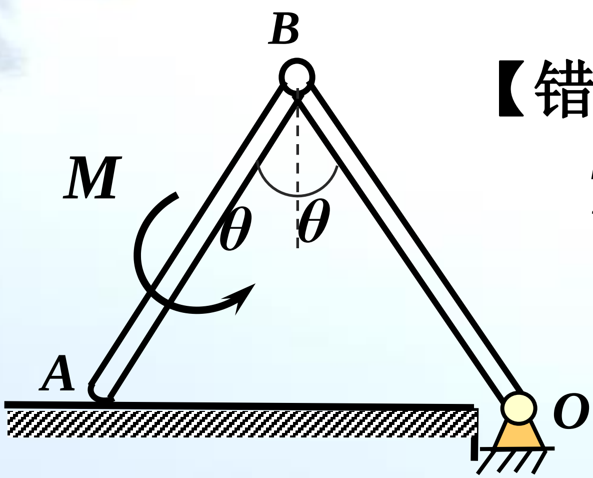
$$\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}mgl + \frac{\pi M}{4}$$



$$\therefore \omega = \sqrt{}$$

[题12-6]（P319）

两均质杆*AB*和*BO*,长均为*l*，质量均为*m*，杆*AB*上作用一力偶，在铅垂平面内运动，从图示位置由静止开始作运动，不计摩擦，求当杆端*A*即将碰到铰支座*O*时杆端*A*的速度。



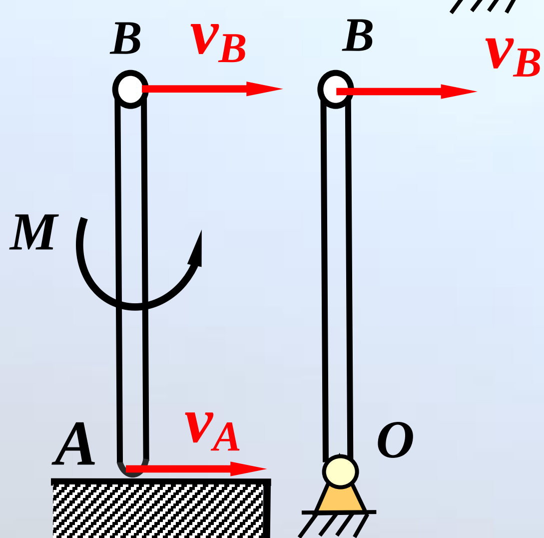
【错误解法】

$$T_1=0,$$

$$T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2+\frac{1}{2}mv_A^2$$

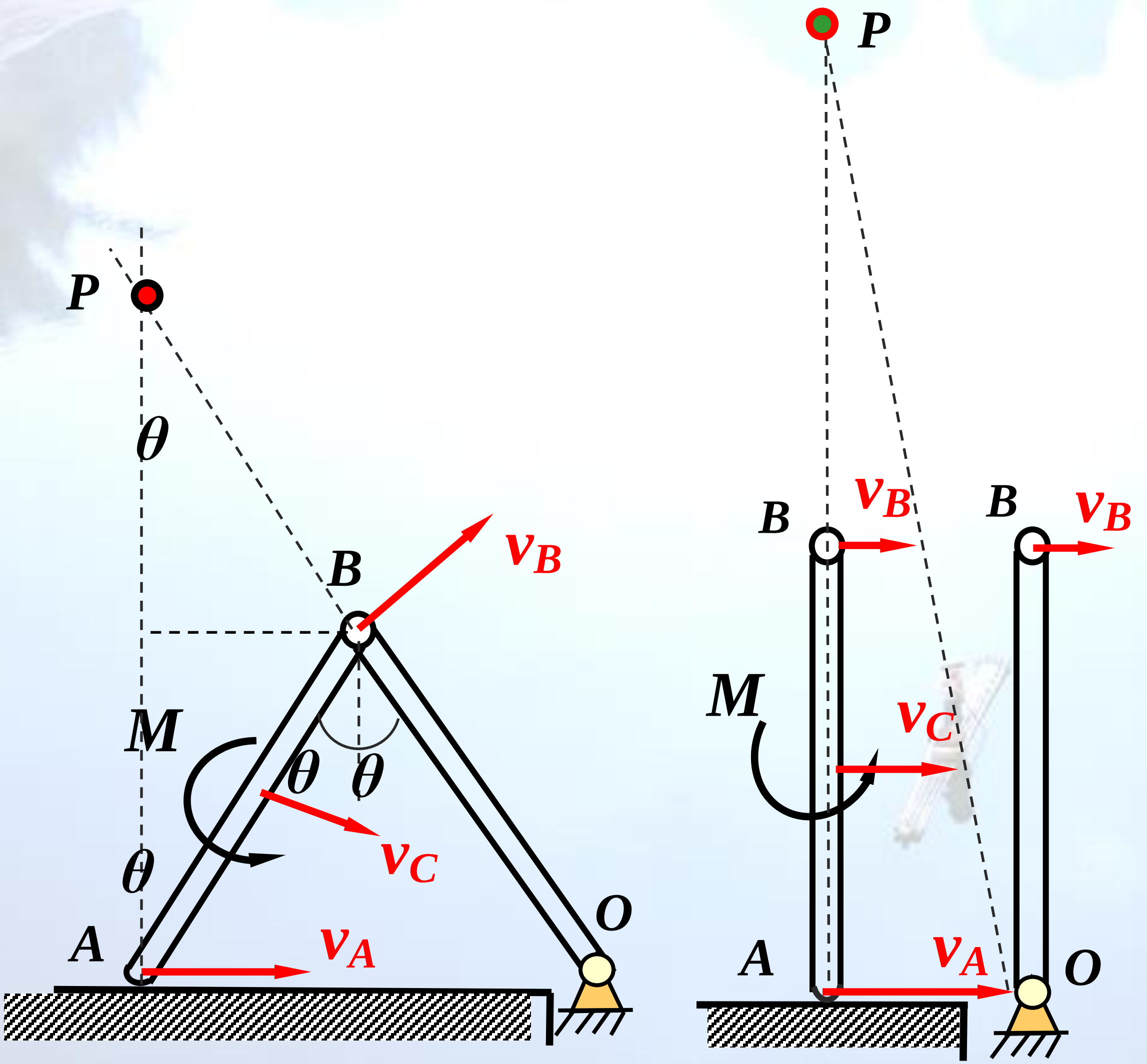
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\cdot\left(\frac{v_A}{l}\right)^2+\frac{1}{2}mv_A^2$$

$$=\frac{2}{3}mv_A^2$$



*AB*杆不是平动

[题12-6]（P319）



$$PA = 2BA = 2l$$

$$v_A = 2v_B$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{2l}$$

$$v_C = \frac{3}{4} v_A$$

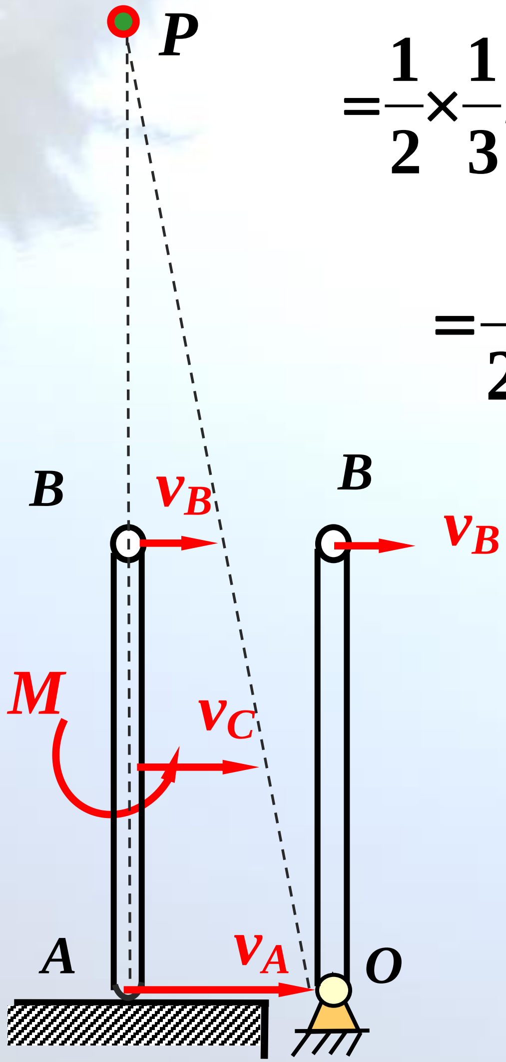
$$\omega_O = \frac{v_B}{l} = \frac{v_A}{2l}$$

【正确解法】

$$T_1=0,\quad T_2=\frac{1}{2}J_O\omega_O^2+\left[\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_{AB}^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v_A}{2l}\right)^2+\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{3v_A}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}ml^2\left(\frac{v_A}{2l}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{24}mv_A^2+\left[\frac{9}{32}mv_A^2+\frac{1}{96}mv_A^2\right]=\frac{1}{3}mv_A^2$$



$$T_2-T_1=W_{12}$$

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{2l}$$

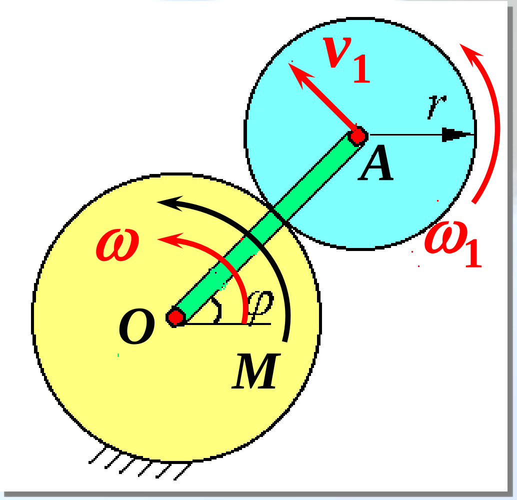
$$\frac{1}{3}mv_A^2=M\theta-mgl(1-\cos\theta)$$

$$v_C=\frac{3}{4}v_A$$

$$v_A=\sqrt{\frac{3}{m}\left[M\theta-mgl(1-\cos\theta)\right]}$$

$$\omega_O=\frac{v_B}{l}=\frac{v_A}{2l}$$

[题12-12]（P321） 行星齿轮传动机构, 放在*水平面*内。 动齿轮半径r ,质量为m_1, 视为均质圆盘； 曲柄质量为m_2, 长l , 作用一力偶矩为M(常量)的力偶。 曲柄由静止开始转动； 求曲柄的角速度 (以转角φ 的函数表示) 和角加速度。



解：取整个系统为研究对象　$W_{12}=M\varphi$

$$T_1=0 \qquad T_2=\frac{1}{2}\frac{m_2}{3}l^2\omega^2+(\frac{1}{2}m_1v_1{}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1}{2}r^2\omega_1{}^2)$$

$$v_1=l\omega\ , \qquad \omega_1=\frac{v_1}{r}=\frac{l}{r}\omega$$

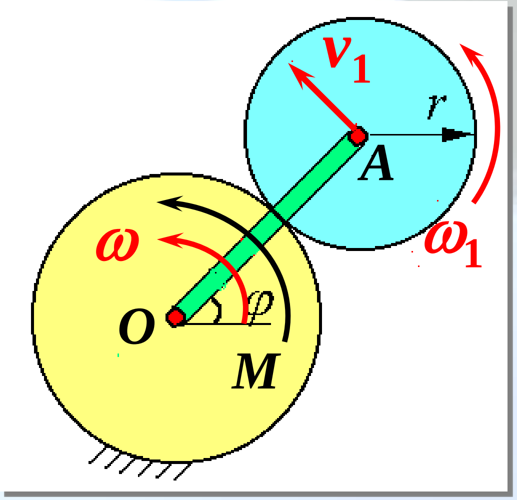
$$T_2=\frac{m_2}{6}l^2\omega^2+\frac{m_1}{2}(l\omega)^2+\frac{m_1r^2}{4}(\frac{l}{r}\omega)^2=\frac{2m_2+9m_1}{12}l^2\omega^2$$

根据动能定理，得 $\frac{2m_2+9m_1}{12}l^2\omega^2-0=M\varphi$ －－－－－ (1)

$$\therefore\omega=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{3M\varphi}{2m_2+9m_1}}$$

$$\frac{2m_2+9m_1}{12}l^2\omega^2-0=M\varphi \quad ----- (1)$$

将(1)式两边对t求导数，则得

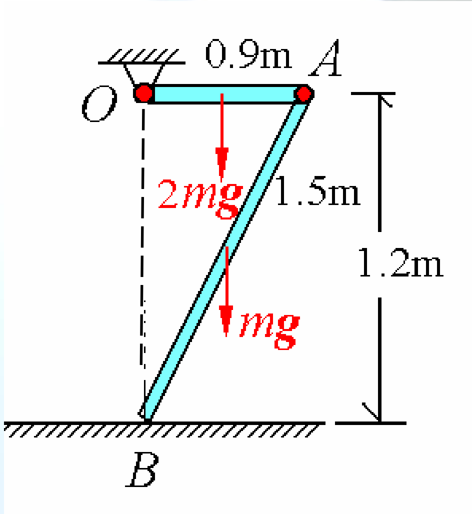


$$\frac{2m_2+9m_1}{12}l^2\times 2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\alpha \ , \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega$$

$$\therefore \alpha=\frac{6M}{(2m_2+9m_1)l^2}$$

[例7] 两根均质直杆如图示；*OA*杆质量是*AB*杆质量的两倍，各处摩擦不计，在图示位置从静止释放，求当*OA*杆转到铅垂位置时，*AB*杆*B* 端的速度。



解：取整个系统为研究对象

$$W_{12}=2mg\frac{0.9}{2}+mg(0.6-0.15)=1.35mg$$

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{5}{6}mv^2$$

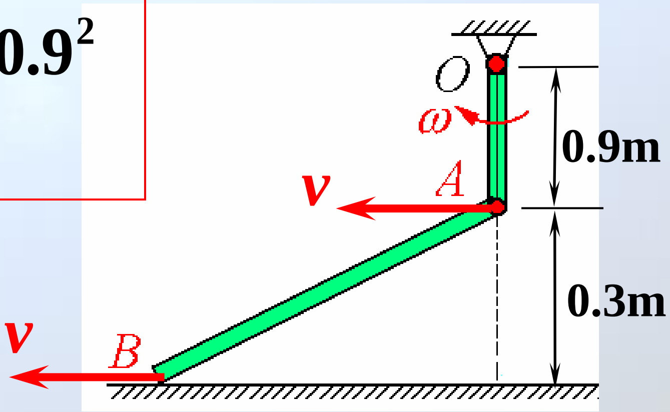
$$J_O=\frac{1}{3}\times 2m\times 0.9^2$$

$$v=0.9\omega$$

$$T_2-T_1=W_{12}$$

$$\frac{5}{6}mv^2-0=1.35mg$$

$$\therefore\ v=3.98\,(\mathrm{m/s})$$



[例5] 图示的均质杆*OA*的质量为30kg，杆在铅垂位置时弹簧处于自然状态。设弹簧常数*k* =3kN/m，为使杆能由铅直位置*OA*转到水平位置*OA*′，问在铅直位置时的角速度至少应为多大？

解：研究*OA*杆

$$W_{12}=mgh+\frac{1}{2}k(\delta_1{}^2-\delta_2{}^2)=30\times9.8\times1.2+\frac{1}{2}\times3000\times[0^2-(2.4-1.2\sqrt{2})^2]$$

$$=-388.4(\mathrm{J})$$

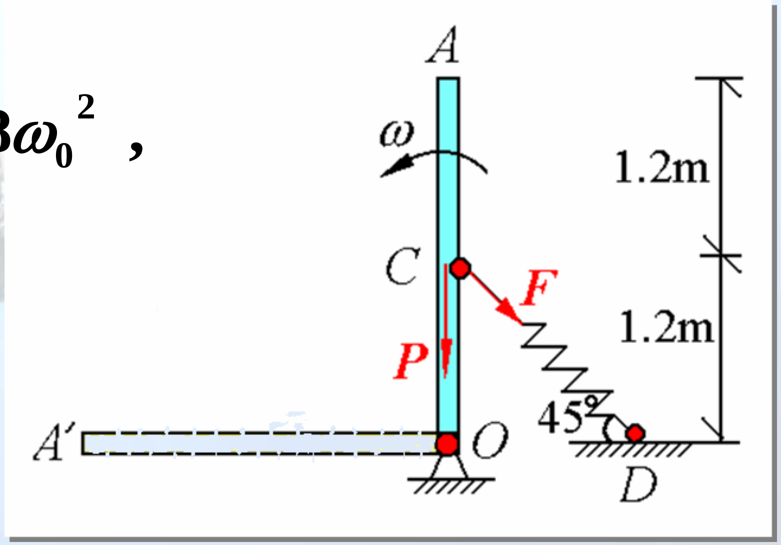
$$T_1=\frac{1}{2}J_O\omega_0{}^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times30\times2.4^2\omega_0{}^2=28.8\omega_0{}^2\ ,$$

$$T_2=0$$

由动能定理 $T_2-T_1=W_{12}$

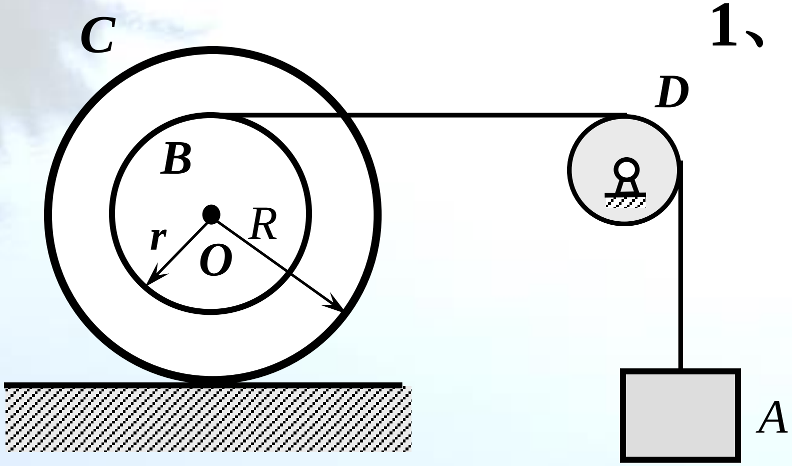
$$0-28.8\omega_0{}^2=-388.4$$

$$\omega_0=3.67\mathrm{rad/s}$$



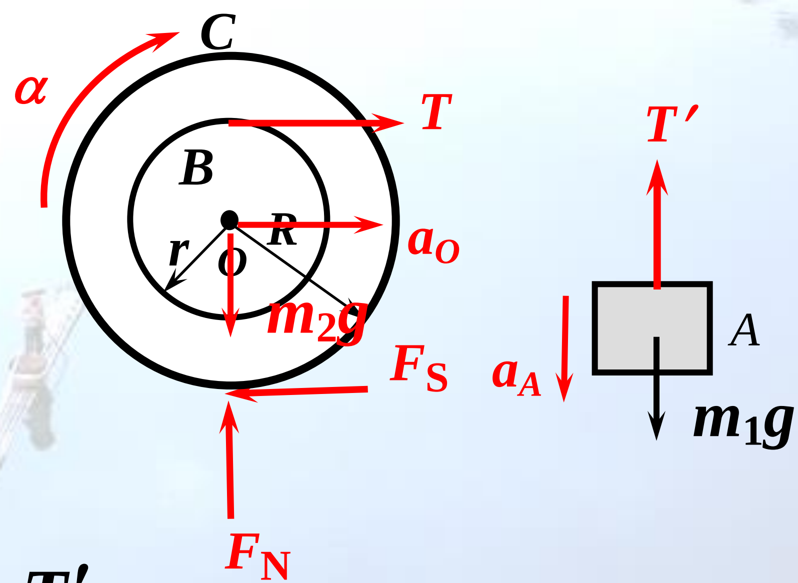
[题11-12] (P283)

重物*A*质量为m_1， 轮*C*作纯滚动， 轮*C*和轮*B*的总质量为m_2，对O轴的回转半径为ρ， 求重物*A*的加速度。轮*D*和绳子的质量不计。



1、应用刚体平面运动微分方程求解

分别取轮子和重物为研究对象：



[轮子]

$$J_O\alpha = Tr + F_S R$$

$$m_2 a_O = T - F_S$$

[重物]

$$m_1 a_A = m_1 g - T'$$

运动学关系：$\alpha = \dfrac{a_O}{R}$ ，

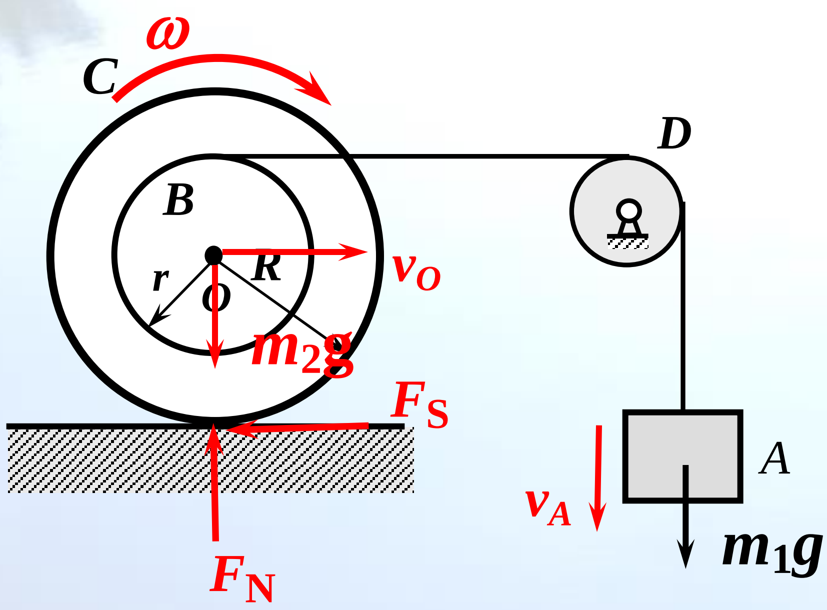
$$a_O = \frac{R}{R+r} a_A$$

[题11-12]
(P283)

重物A质量为m_1，轮C作纯滚动，轮C和轮B的总质量为m_2，对O轴的回转半径为ρ，求重物A的加速度。轮D和绳子的质量不计。

2、应用动能定理求解

解：研究对象：整体，初始静止，



$$W_{12}=m_1gh$$

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_1v_A^2+[\frac{1}{2}m_2v_O^2+\frac{1}{2}J_O\omega^2]$$

$$\because J_O=m_2\rho^2\ ,\quad v_A=v_O+r\omega$$

$$\omega=\frac{v_A}{R+r},\quad v_O=\frac{R}{R+r}v_A$$

$$\therefore T_2=\frac{1}{2}m_1v_A^2+\frac{1}{2}m_2(\frac{R}{R+r})^2v_A^2+\frac{1}{2}m_2(\frac{\rho}{R+r})^2v_A^2$$

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{R}{R+r}\right)^2 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\rho}{R+r}\right)^2 v_A^2 = m_1 g h$$

两边对 t 求导得:

$$m_1 \cancel{v_A}\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} + m_2\left(\frac{R}{R+r}\right)^2 \cancel{v_A}\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} + m_2\left(\frac{\rho}{R+r}\right)^2 \cancel{v_A}\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = m_1 g \cancel{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}$$

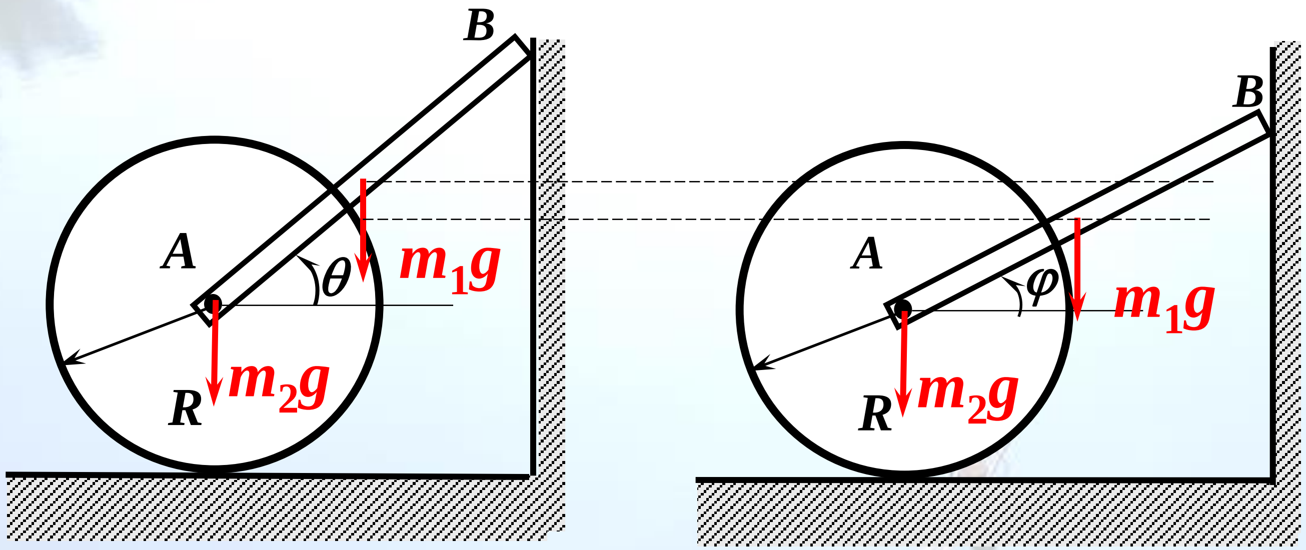
$$(\because\ v_A = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t})$$

$$\left[m_1 + m_2\left(\frac{R}{R+r}\right)^2 + m_2\left(\frac{\rho}{R+r}\right)^2\right]a_A = m_1 g$$

$$\therefore a_A = \frac{m_1 g (R+r)^2}{m_1 (R+r)^2 + m_2(\rho^2 + R^2)}$$

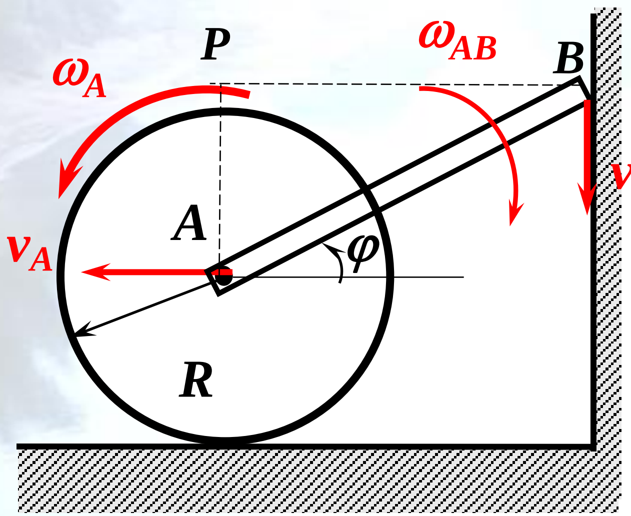
[题12-15] P321

均质细杆AB长为l，质量为m_1， 上端B靠在光滑的墙上，下端以铰链与均质圆柱的中心相连，圆柱质量为m_2，半径为R。从图示位置由静止开始作纯滚动，$\theta=45°$，求点A在初瞬时的加速度。



解：取整体为研究对象，

$$W_{12}=m_1g\frac{l}{2}(\sin 45°-\sin\varphi)$$



初始静止，$T_1=0$

$$T_2=[\frac{1}{2}m_2v_A^2+\frac{1}{2}J_A\omega_A^2]+\frac{1}{2}J_P\omega_{AB}^2$$

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{l\sin\varphi} \qquad J_P=\frac{m_2}{12}l^2+m_2(\frac{l}{2})^2$$

化简得 $T_2=\frac{3}{4}m_2v_A^2+\frac{1}{6}m_1\frac{v_A^2}{\sin^2\varphi}$

$$\frac{3}{4}m_2v_A^2+\frac{1}{6}m_1\frac{v_A^2}{\sin^2\varphi}=m_1g\frac{l}{2}(\sin45°-\sin\varphi)$$

两边对 t 求导：

$$\frac{3}{2}m_2v_A\frac{dv_A}{dt}+[\frac{1}{3}m_1\frac{v_A}{\sin^2\varphi}\frac{dv_A}{dt}-\frac{1}{3}m_1\frac{v_A^2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}]=-m_1g\frac{l}{2}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dv_A}{dt}=a_A \quad ,且 \quad \frac{d\varphi}{dt}=-\omega_{AB}=-\frac{v_A}{l\sin\varphi}$$

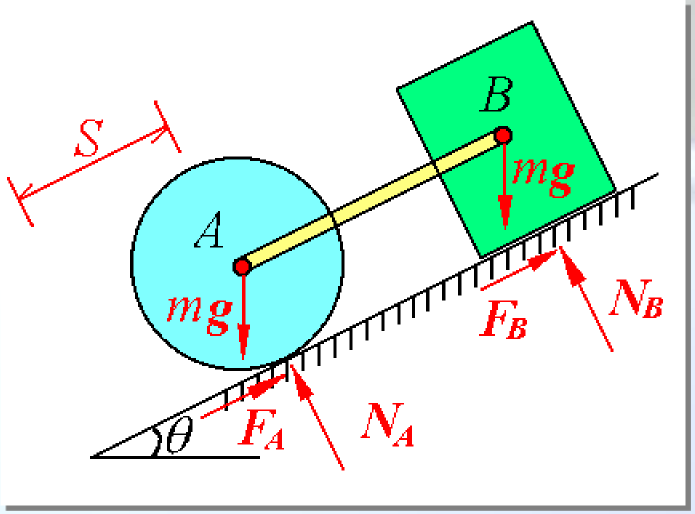
$$\frac{3}{2}m_2v_Aa_A+[\frac{1}{3}m_1\frac{v_A}{\sin^2\varphi}a_A+\frac{1}{3}m_1\frac{v_A^3\cos\varphi}{l\sin^4\varphi}]=\frac{1}{2}m_1gv_A\cot\varphi$$

$\varphi=45°$ ， $v_A=0$,

解得 $a_A=\dfrac{3m_1g}{4m_1+9m_2}$

[例6] 均质圆盘A和滑块B 的质量均为m，圆盘半径为r，杆AB质量不计，平行于斜面。滑块摩擦系数为f，圆盘作纯滚动，系统从静止开始运动。求：滑块B的加速度。

解：选系统为研究对象



$$W_{12} = 2mg\,S\sin\theta - f\,mgS\cos\theta$$

$$= mg\,S\,(2\sin\theta - f\cos\theta)$$

$$T_1 = 0,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

运动学关系：$v = r\omega$ $\qquad \therefore T_2 = \frac{5}{4}mv^2$

由动能定理：$\frac{5}{4}mv^2 - 0 = mgS(2\sin\theta - f\cos\theta)$

等式两边对 t 求导，得 $a = (\frac{4}{5}\sin\theta + \frac{2}{5}f\cos\theta)g$

§ 12-4　功率 ·功率方程

一、功率：力在单位时间内所作的功（它是衡量机器工作能力的一个重要指标）。功率是代数量，并有瞬时性。

$$P=\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$

$$\delta W=\bar{F}\cdot \mathrm{d}\bar{r}$$

$$\delta W=M\cdot \mathrm{d}\varphi$$

或：$P=\dfrac{\delta W}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\bar{F}\cdot \mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}\cdot\bar{v}=F_{\mathrm{t}}v$

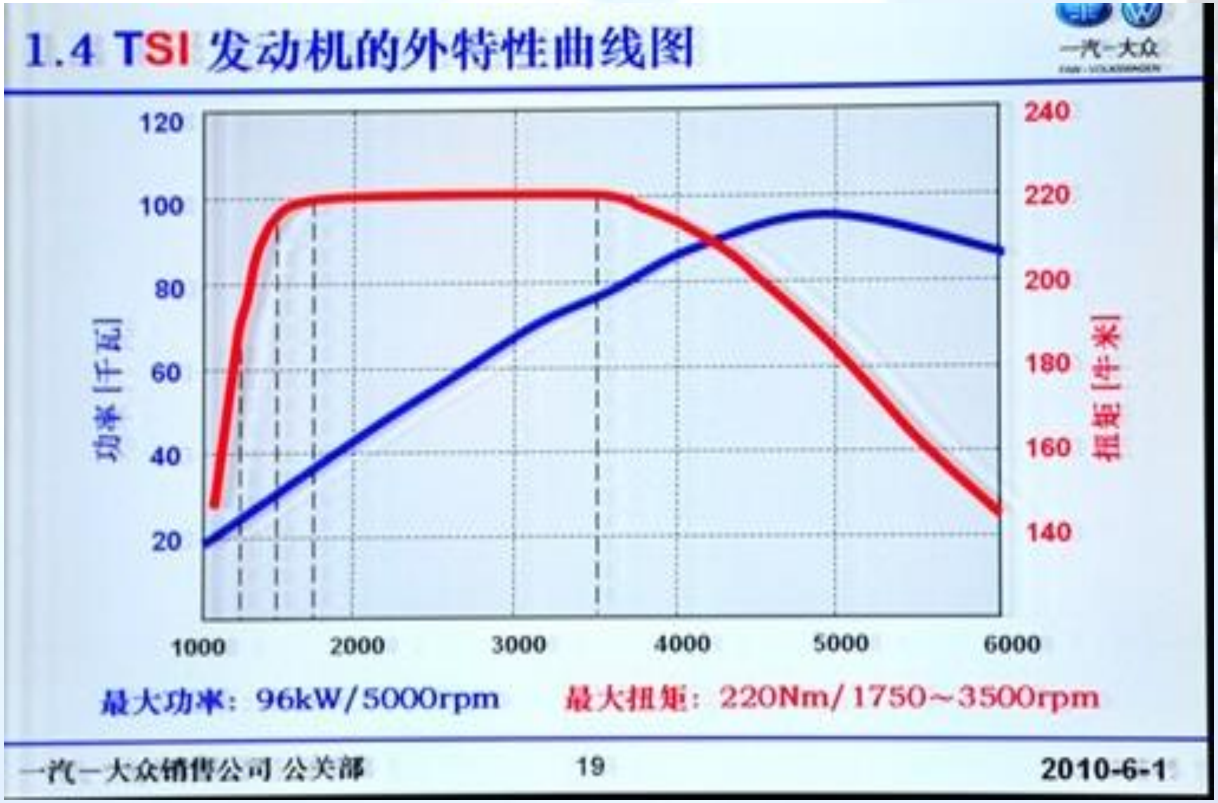
$$P=\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}=M_z\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=M_z\omega$$

功率的单位：瓦特（W），千瓦（kW），1 W= 1 J/s 。

功率是代数量，并有瞬时性。


Tr/min x 100
km/h
P
104.3
104
汽车之家 AUTOHOME.COM.CN

功率、扭矩曲线



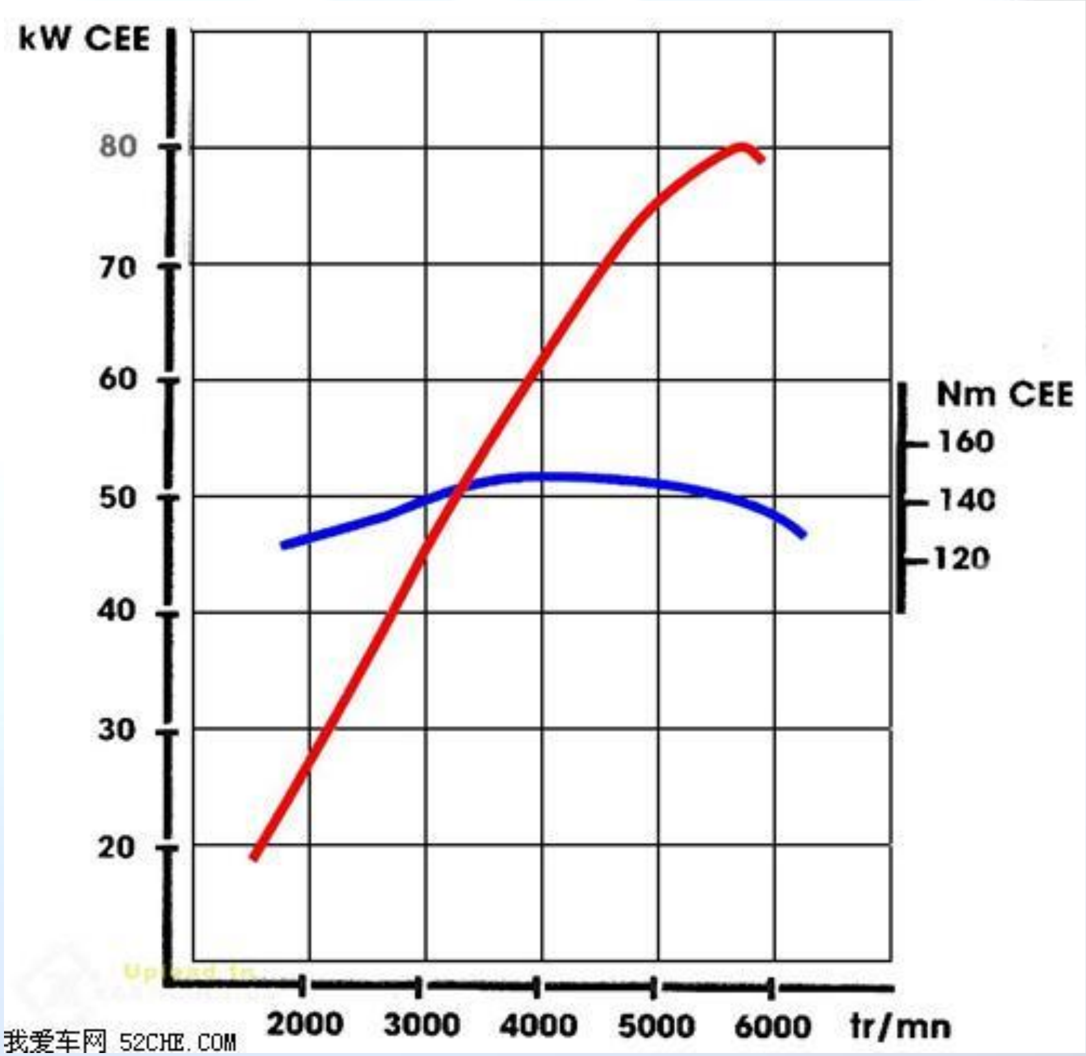
新宝来
1.4T

最大功率96kW/5000rpm

最大扭矩220Nm/1750~3500rpm

功率、扭矩曲线

东风标致307 1.6L



最大功率80kW/5800rpm

最大扭矩144Nm/4000rpm

功率、扭矩曲线

宝马 1.6T

最大功率132kW/5500rpm

最大扭矩240Nm/1600~5000rpm

二、功率方程

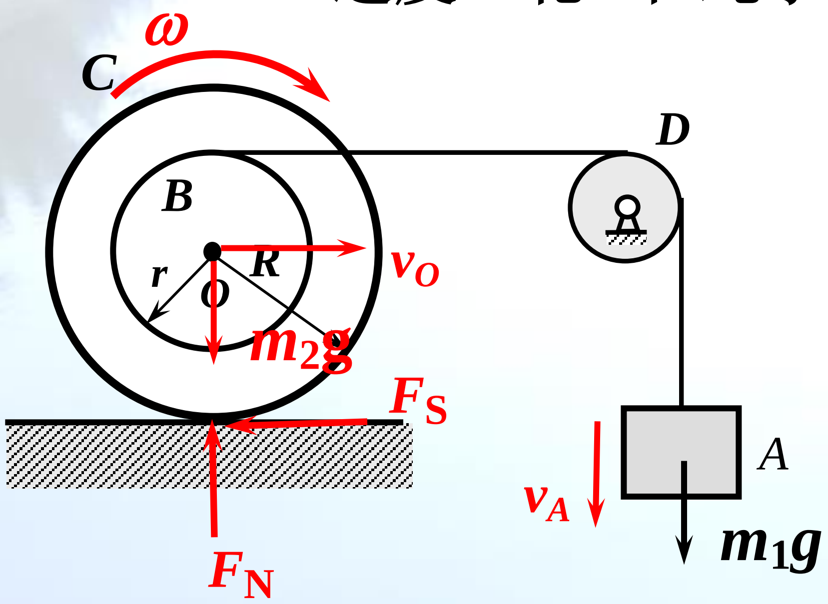
由动能定理的微分形式 $\mathrm{d}T=\sum\delta W_i$ 两边同除以$\mathrm{d}t$ 得：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum\delta W_i}{\mathrm{d}t}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum P_i$$

[题11-12]
(P283)

重物A质量为m_1，轮C作纯滚动，轮C和轮B的总质量为m_2，对O轴的回转半径为ρ，求重物A的加速度。轮D和绳子的质量不计。（应用功率方程求解）



解：研究对象：整体，

$$T=\frac{1}{2}m_1v_A^2+[\frac{1}{2}m_2v_O^2+\frac{1}{2}J_O\omega^2]$$

$$\because J_O=m_2\rho^2\ ,\quad \omega=\frac{v_A}{R+r},$$

$$v_O=\frac{R}{R+r}v_A$$

$$v_A=v_O+r\omega$$

$$\therefore T=\frac{1}{2}m_1v_A^2+\frac{1}{2}m_2(\frac{R}{R+r})^2v_A^2+\frac{1}{2}m_2(\frac{\rho}{R+r})^2v_A^2$$

$$P=m_1g\,v_A$$

由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=P$

$$[m_1\cancel{v_A}+m_2(\frac{R}{R+r})^2\cancel{v_A}+m_2(\frac{\rho}{R+r})^2\cancel{v_A}]\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t}=m_1g\,\cancel{v_A}$$

§ 12-6　普遍定理的综合应用举例

质点系的动量定理：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \bar{F}_i^{(e)}$$

质心运动定理

$$m\bar{a}_C=\sum \bar{F}_i^{(e)}$$

质点系的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\bar{F}^{(e)})$$

刚体平面运动微分方程

$$ma_{Cx}=\sum F_x\ ,$$

$$ma_{Cy}=\sum F_y\ ,$$

$$J_C\alpha=\sum M_C(\bar{F}_i^{(e)})$$

质点系动能定理

$$T_2-T_1=\sum W_i$$

§ 12-6　普遍定理的综合应用举例

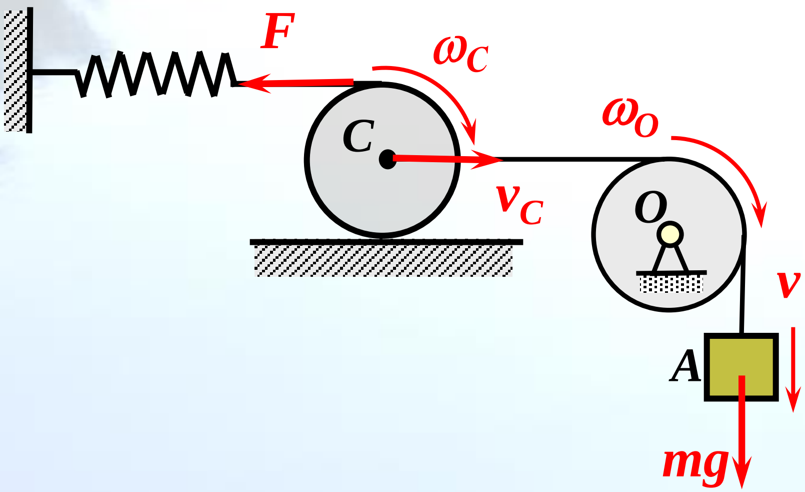
动力学普遍定理包括质点和质点系的动量定理、动量矩定理和动能定理。动量定理和动量矩定理是矢量形式，动能定理是标量形式，他们都可应用研究机械运动，而动能定理还可以研究其它形式的运动能量转化问题。

动力学普遍定理提供了解决动力学问题的一般方法。动力学普遍定理的综合应用，大体上包括两方面的含义：一是能根据问题的已知条件和待求量，选择适当的定理求解，包括各种守恒情况的判断，相应守恒定理的应用。避开那些无关的未知量，直接求得需求的结果。二是对比较复杂的问题，能根据需要选用两、三个定理联合求解。

求解过程中,要正确进行运动分析,提供正确的运动学补充方程。

[例12-11] P312

物块和两均质轮的质量皆为m，轮半径皆为R，弹簧刚度为k，C 轮作纯滚动。现于弹簧的原长处释放重物，求重物下降h 时的速度、加速度以及C 轮与地面间的摩擦力。



解: (1)取整体为研究对象，

利用动能定理

$$W_{12}=mgh+[0-\frac{1}{2}k(2h)^2\ ]$$

$$=mgh-2kh^2$$

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J_O\omega_O^2+(\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2)$$

$$\because\ v_C=v\ ,\ \omega_C=\omega_O=\frac{v}{R}\ ,\ J_C=J_O=\frac{1}{2}mR^2$$

$$\therefore T_2=\frac{3}{2}mv^2$$

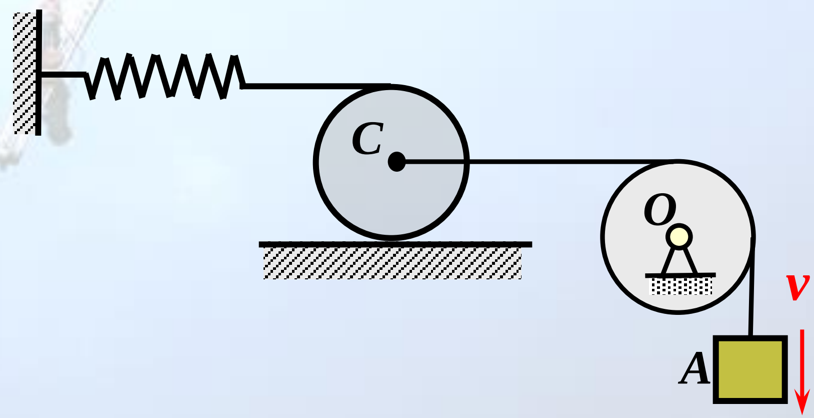
由动能定理：$\frac{3}{2}mv^2-0=mgh-2kh^2$ ……………（1）

解得速度：$v=\sqrt{\frac{2(mg-2kh)h}{3m}}$

将（1）式两端对时间求一次导数：

$$3m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(mg-4kh)\cancel{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}$$

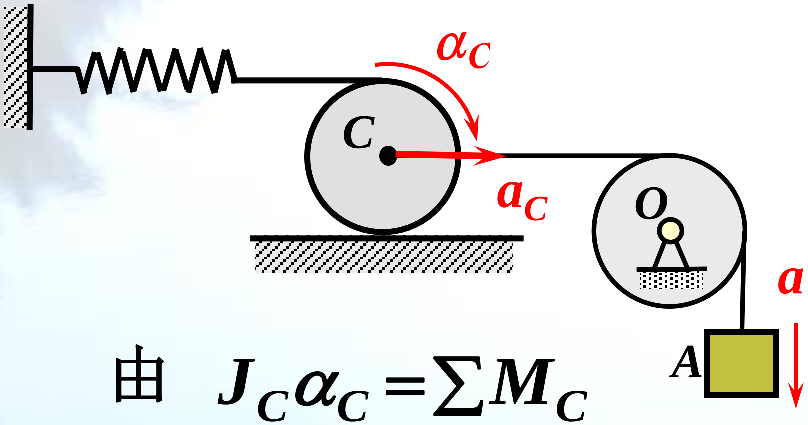
解得加速度：$a=\frac{g}{3}-\frac{4kh}{3m}$

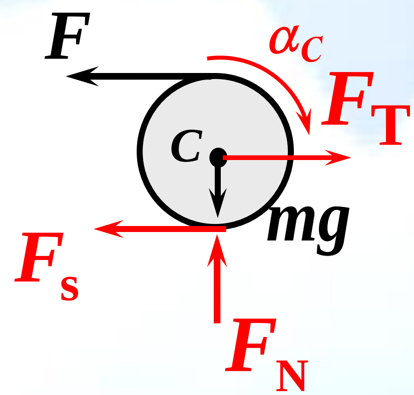


加速度a不是常数

（2）求C轮与地面间的摩擦力

取C轮为研究对象





由 $J_C\alpha_C=\sum M_C$

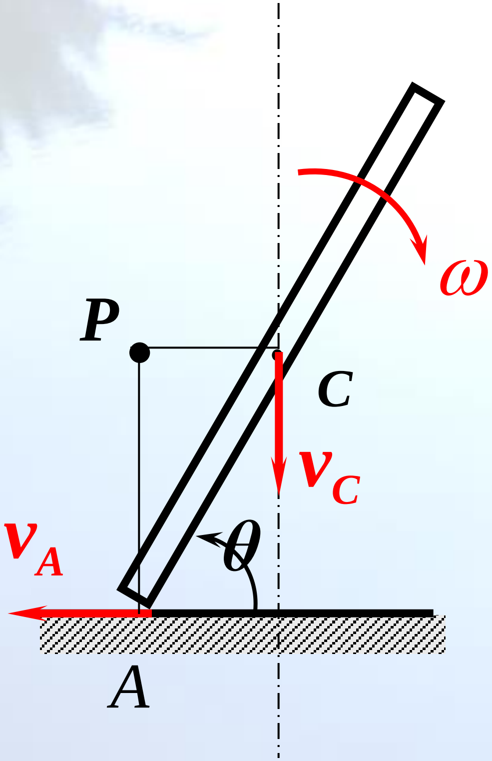
即 $\frac{1}{2}mR^2\alpha=(F_S-F)R$

而 $R\alpha=a_C=a=\frac{g}{3}-\frac{4kh}{3m}$，$F=2kh$

$\therefore$地面摩擦力：$F_S=\frac{mg}{6}+\frac{4}{3}kh$

[例12-12]（P313）

均质细杆长为 l，质量为m，静止直立于光滑水平面上。当杆受微小干扰而倒下时，求杆刚刚达到地面时的角速度和地面约束力。



【本题有多种解法】

解：(1) 利用动能定理求角速度

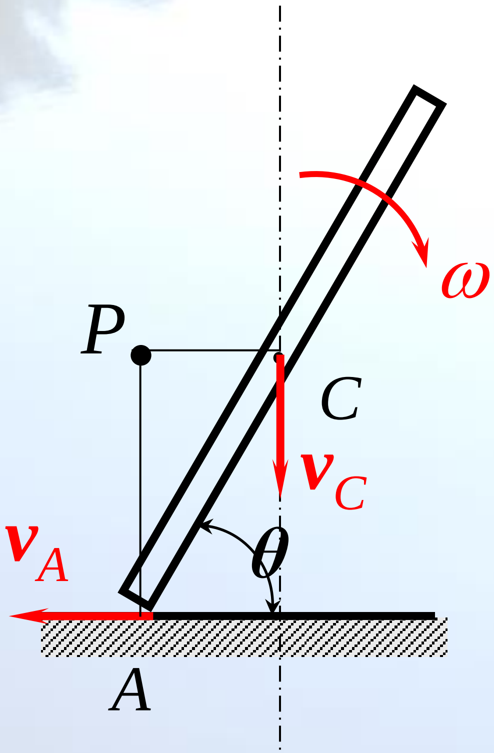
【有两种方法：任意时刻(书)和特定时刻】

$$W_{12}=mg(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\sin\theta)=mg\,\frac{l}{2}(1-\sin\theta)$$

$$T_1=0,\qquad T_2=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$$

$$\because\ \omega=\frac{v_C}{CP}=\frac{2v_C}{l\cos\theta}$$

$$\therefore\ T_2=\frac{1}{2}m(1+\frac{1}{3\cos^2\theta})v_C^2$$



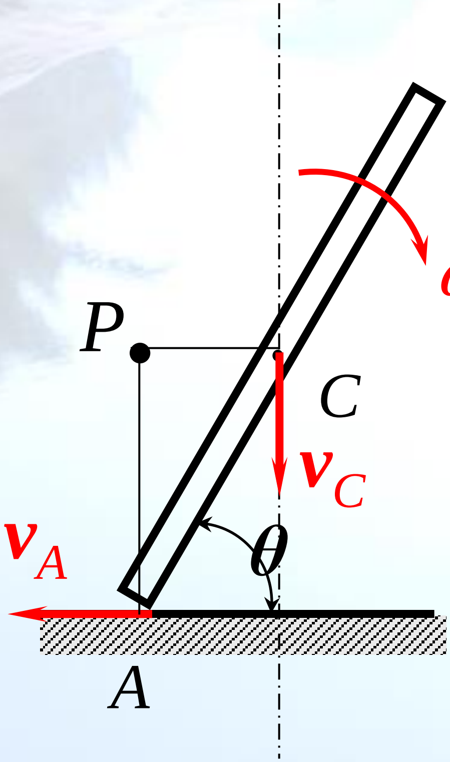
解：(1) 利用动能定理求角速度

$$W_{12} = mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sin\theta\right) = mg\,\frac{l}{2}(1-\sin\theta)$$

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

$$\because\ \omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{2v_C}{l\cos\theta}$$

$$\therefore\ T_2 = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\cos^2\theta}\right)v_C^2$$



解：(1) 利用动能定理求角速度

$$W_{12} = mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sin\theta\right) = mg\,\frac{l}{2}(1-\sin\theta)$$

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

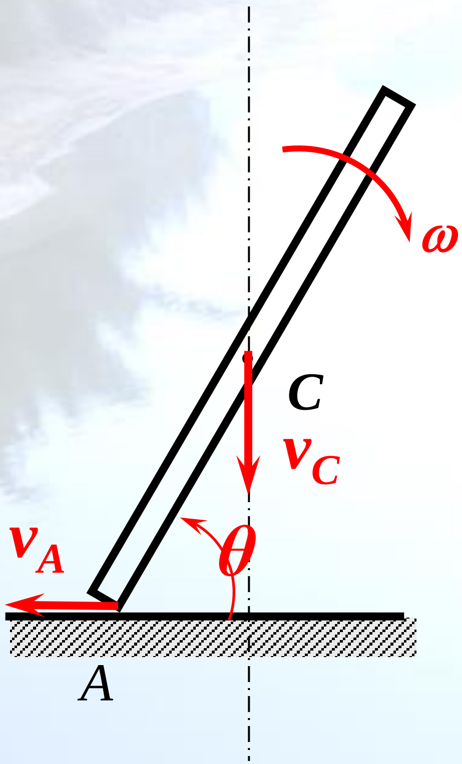
$$\because \omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{2v_C}{l\cos\theta}$$

$$\therefore T_2 = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\cos^2\theta}\right)v_C^2$$

由动能定理：$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\cos^2\theta}\right)v_C^2 = mg\,\frac{l}{2}(1-\sin\theta)$

取θ=0，解出： $v_C = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$ $\quad\therefore \omega = \frac{2v_C}{l} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

能否求出加速度和角加速度？



或：另一解法直接写出θ=0时动能

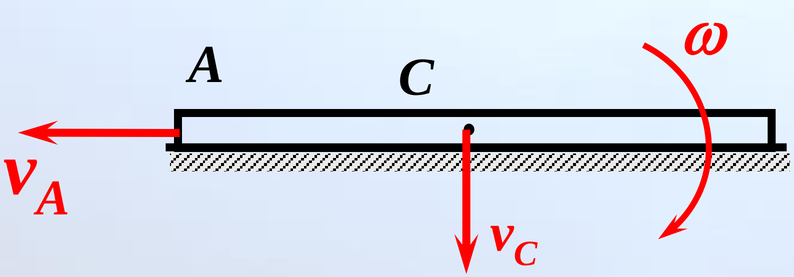
$$T_1=0,$$

θ=0时瞬心在A点， $v_A=0$， $v_C=\dfrac{l}{2}\omega$

$$T_2=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$$

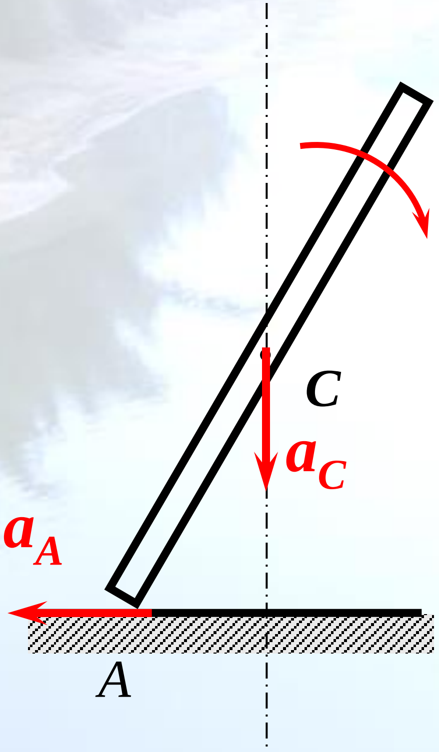
$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

(或：$T_2=\dfrac{1}{2}J_A\omega^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{ml^2}{3}\omega^2=\dfrac{1}{6}ml^2\omega^2$)



$$W_{12}=mg\frac{l}{2}$$

$$\therefore\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$



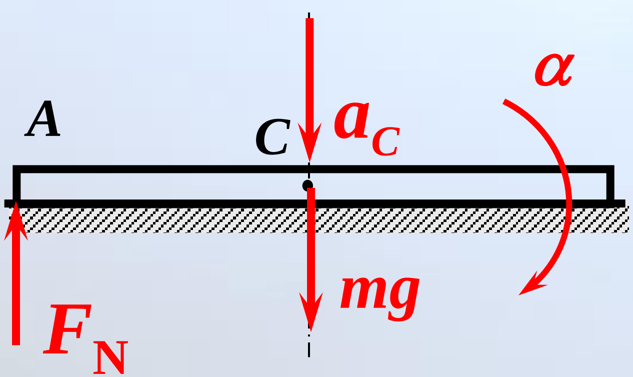
(2) 利用刚体平面运动微分方程求地面约束力。

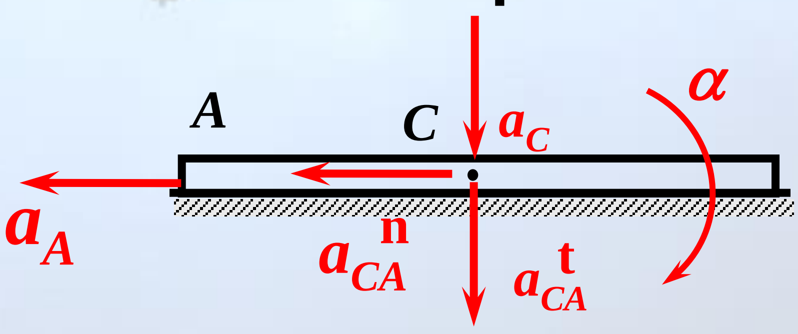
取θ=0时
$$\begin{cases} ma_C = mg - F_{\mathrm{N}} & \text{-------} \quad (a) \\ J_C\alpha = F_{\mathrm{N}} \cdot \dfrac{l}{2} & \text{-------} \quad (b) \end{cases}$$

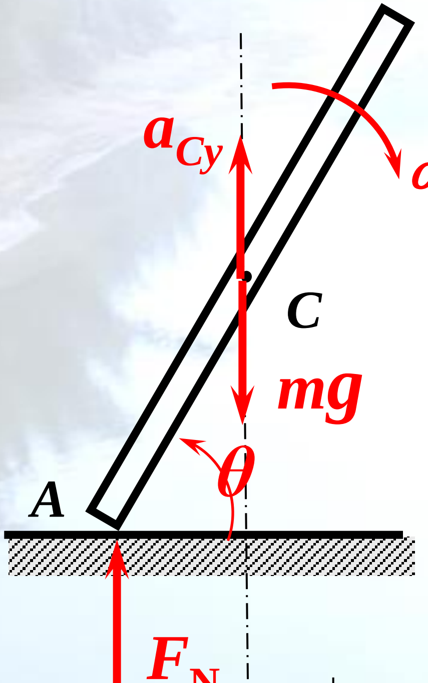
由运动学：$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{\mathrm{n}} + \bar{a}_{CA}^{\mathrm{t}}$

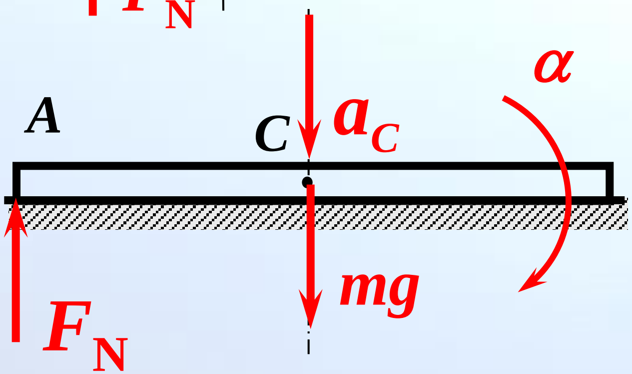
在铅直方向投影：$a_C = a_{CA}^{\mathrm{t}} = \dfrac{l}{2}\alpha$

代入(*a*)联立(*b*),得：$F_{\mathrm{N}} = \dfrac{mg}{4}$









$$\begin{cases} m a_{Cy} = \sum F_y \\ J_C \alpha = \sum M_C \end{cases}$$

(3) 利用刚体平面运动微分方程

(求地面约束力的另一解法)

取θ任意时

$$y_C = \frac{l}{2}\sin\theta \qquad v_{Cy} = -\frac{l\omega}{2}\cos\theta$$

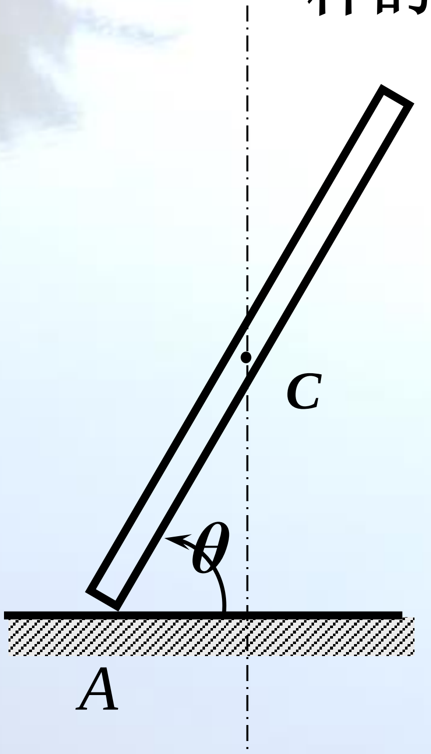
$$a_{Cy} = -\frac{l\alpha}{2}\cos\theta - \frac{l\omega^2}{2}\sin\theta$$

当$\theta=0$时，$a_{Cy} = -\dfrac{l\alpha}{2}$，

$$\begin{cases} -m\dfrac{l}{2}\alpha = F_N - mg \\ \dfrac{1}{12}ml^2\alpha = F_N \cdot \dfrac{l}{2} \end{cases}$$

$$\therefore F_N = \frac{mg}{4}$$

【考题】 均质细杆长为 l，质量为m，静止直立于光滑水平面上。当杆受微小干扰而倒下时，求：$\theta=45°$时杆的角速度和地面约束力。

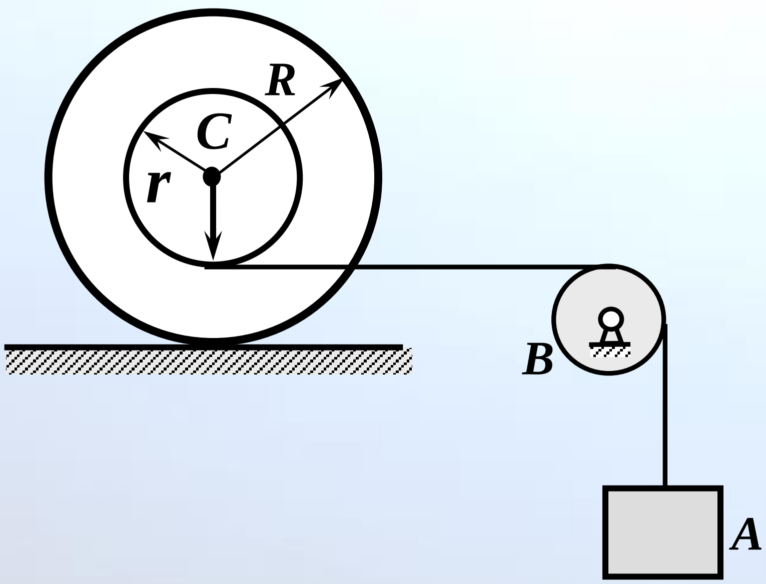


解：(1) 利用动能定理求角速度

(2) 利用刚体平面运动微分方程求地面约束力。

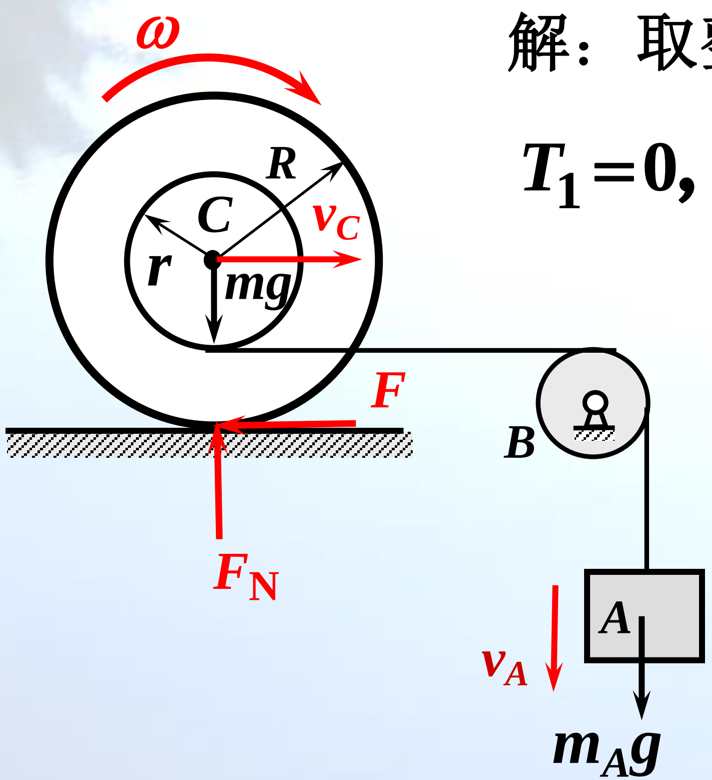
[例12-13] (P314)

塔轮质量m=200kg，R=600mm，r=300mm，ρ_C=400mm，重物A质量m_A=80kg,不计绳子和滑轮B的质量。求:(1)若塔轮纯滚动，求轮心加速度a_C，绳子张力F_T和摩擦力F；(2)纯滚动条件；（3）若静滑动摩擦因数f_S=0.2，动滑动摩擦因数f=0.18,求绳子张力F_T



[例12-13] (P314)

求:(1)若塔轮纯滚动轮心加速度a_C，绳子张力F_T和摩擦力F； (2)纯滚动条件； （3）若 f_S=0.2，f=0.18，求绳子张力F_T



解：取整体为研究对象，初始静止，

$$T_1=0,\qquad T_2=\frac{1}{2}m_1v_A^2+[\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2]$$

$$v_C=R\omega,\qquad v_A=(R-r)\omega$$

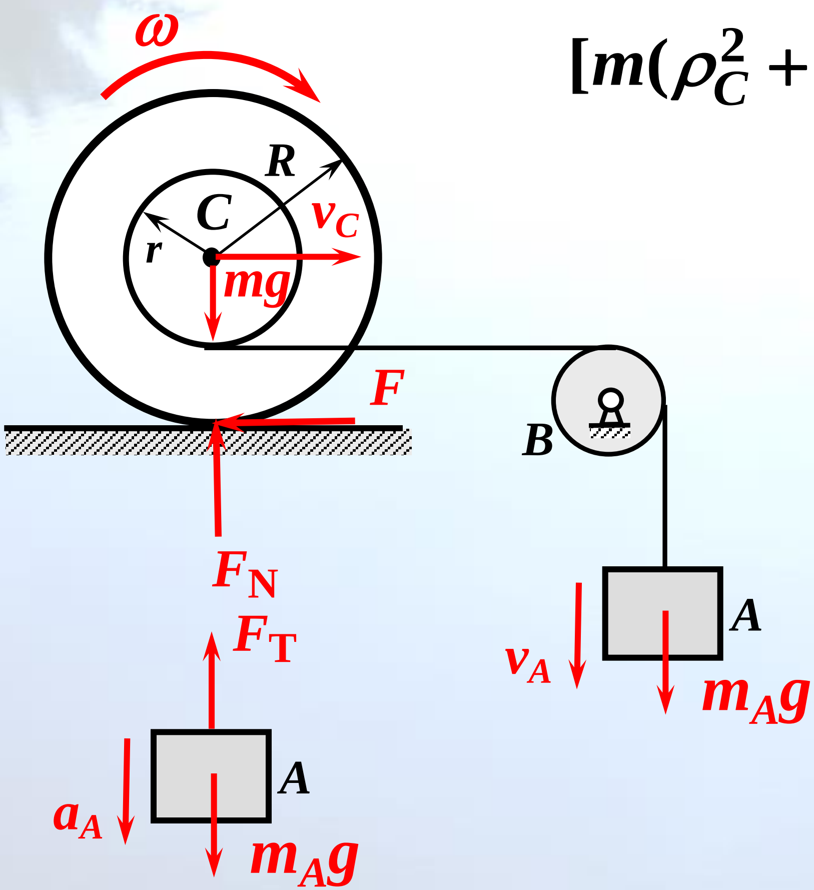
$$a_C=R\alpha,\qquad a_A=(R-r)\alpha$$

$$T_2=\frac{1}{2}[m(\rho_C^2+R^2)+m_A(R-r)^2]\omega^2$$

$$W_{12}=m_Ag\cdot s$$

$$T_2-T_1=W_{12}$$

$$\frac{1}{2}[m(\rho_C^2+R^2)+m_A(R-r)^2]\omega^2=m_Ag\cdot s$$



$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

$$\frac{1}{2}[m(\rho_C^2 + R^2) + m_A(R-r)^2]\omega^2 = m_A g \cdot s$$

$$[m(\rho_C^2 + R^2) + m_A(R-r)^2]\omega\alpha = m_A g \cdot v_A$$

$$\therefore \alpha = 2.115\,\text{rad/s}$$

$$a_C = R\alpha = 1.269\,\text{m/s}^2$$

$$a_A = (R-r)\alpha = 0.635\,\text{m/s}^2$$

取重物A为研究对象

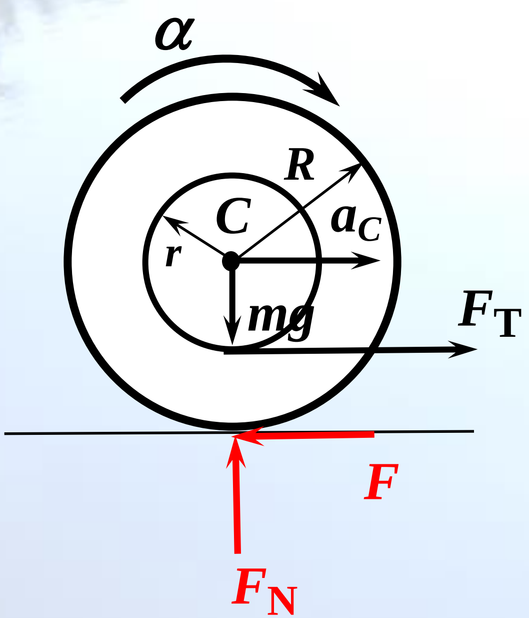
$$m a_A = m_A g - F_T$$

$$F_T = m_A(g - a_A) = 733\,\text{N}$$

[例12-13]
(P314)

求:(1)轮心加速度a_C，绳子张力F_T和摩擦力F；
(2)纯滚动条件；（3）若 f_S=0.2，f=0.18,求绳子张力F_T

解：(2)摩擦力F和纯滚动条件



取轮子C为研究对象

$$ma_C = F_T - F$$

$$\therefore F = F_T - ma_C = \boxed{479.4\text{N}}$$

书上有误

不滑的条件：$F \le F_{s,max}$

$$F_N = mg$$

$$F_{s,max} = f_S F_N = f_S \cdot mg$$

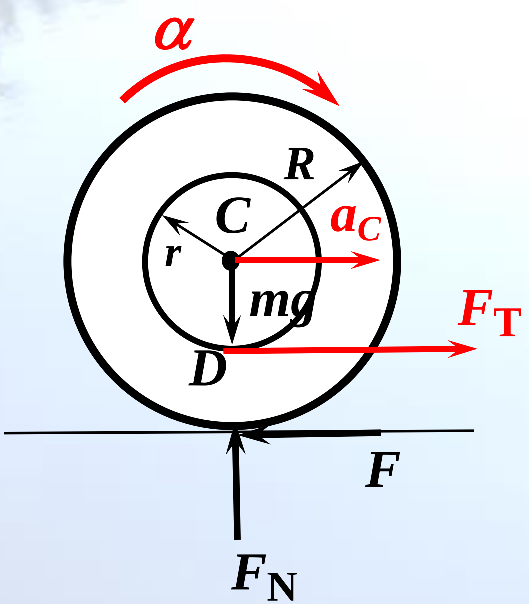
$$F \le f_S \cdot mg \qquad \therefore f_S \geqslant 0.245$$

[例12-13]
(P314)

求（3）若 f_S=0.2，f=0.18,求绳子张力F_T

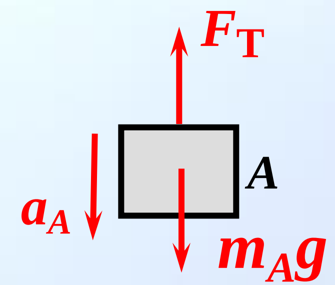
解：(3) 因为f_S<0.245

所以轮子连滚带滑 $F = f \cdot F_N = f \cdot mg$



[轮子] $\begin{cases} ma_C = F_T - F \\ J_C\alpha = F \cdot R - F_T r \end{cases}$

[物体A] $m_A a_A = m_A g - F_T$



运动学方程：

$\boxed{a_C = R\alpha,}$

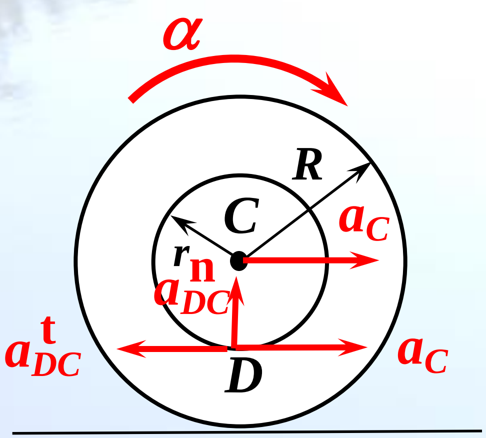
$v_C = v_D + r\omega$ 两边求导 $\therefore a_C = a_D + r\alpha$

$= a_A + r\alpha$

或：加速度基点法

[例12-13]
(P314)

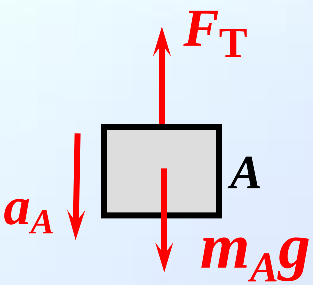
求（3）若 f_S=0.2，f=0.18,求绳子张力F_T



解：(3)轮子连滚带滑 $F = f \cdot F_N = f \cdot mg$

[轮子] $\begin{cases} ma_C = F_T - F \\ J_C\alpha = F \cdot R - F_T r \end{cases}$

[物体A] $m_A a_A = m_A g - F_T$



运动学方程：

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^t + \bar{a}_{DC}^n$$

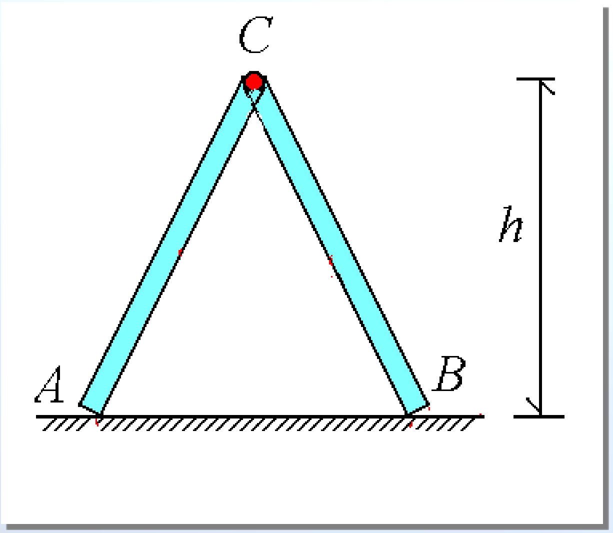
在x轴上投影：$a_{Dx} = a_C - r\alpha$

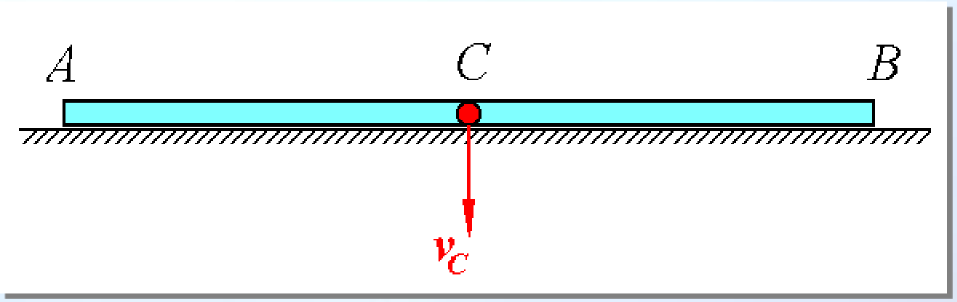
又∵ $a_{Dx} = a_A$

∴ $a_A = a_C - r\alpha$

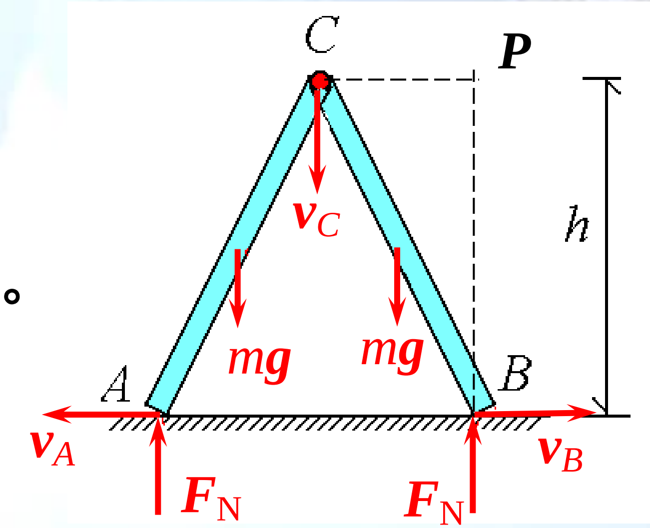
得：$F_T = 1668\text{N}$

[例8] 两根均质杆*AC*和*BC*质量均为*m*，长为*l*，在*C* 处光滑铰接，置于光滑水平面上，设两杆轴线始终在铅垂面内，初始静止，*C*点高度为*h*，求铰*C* 到达地面时的速度。





解：研究对象：整体

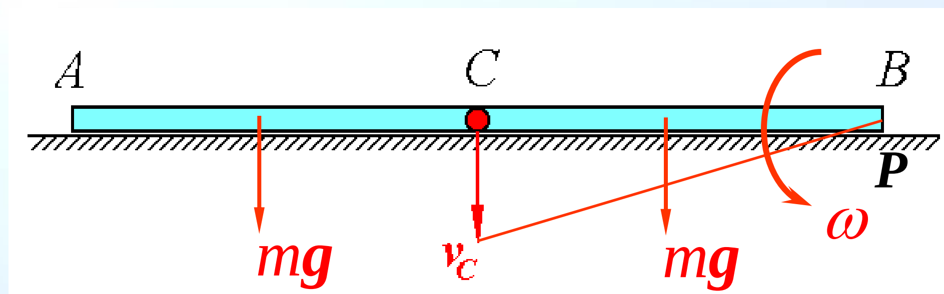


受力分析：$\sum F_x^{(e)}=0$ ，运动分析：

初始静止，所以水平方向质心位置守恒。

$$W_{12}=mg\cdot\frac{h}{2}\times 2=mgh$$

$$T_1=0$$

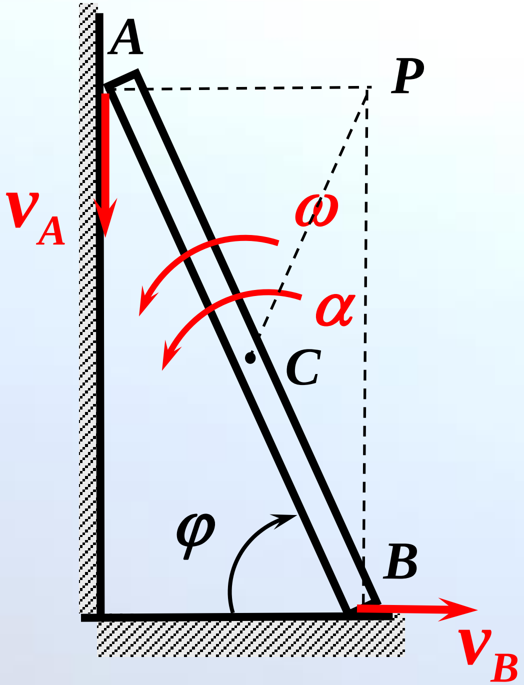


$$T_2=(\frac{1}{2}J_B\omega^2)\times 2=\frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

$$\because v_C=l\omega \qquad \therefore T_2=\frac{1}{3}mv_C^2$$

代入动能定理：$\frac{1}{3}mv_C^2-0=mgh$ $\qquad \therefore v_C=\sqrt{3gh}$

[题11-15] (P283) 均质细杆长为 l，质量为m，放在铅直平面内，A靠在光滑的墙面上，B在光滑水平面上，与水平面成 φ_0 角。杆由静止倒下，求：(1)杆在任意位置时的角加速度和角速度；(2)当杆脱离墙时杆与水平面的夹角。



解：(1) 利用动能定理求角速度

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}J_P\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

$$[\because\ J_P=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{2})^2=\frac{1}{3}ml^2]$$

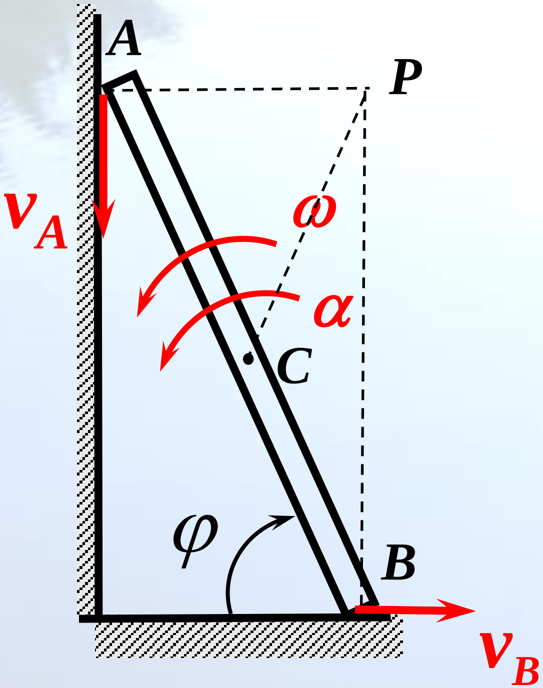
$$W_{12}=mg\frac{l}{2}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)$$

动能定理： $T_2-T_1=W_{12}$

$$\frac{1}{6}ml^2\omega^2=mg\frac{l}{2}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)$$

动能定理：

$$T_2 - T_1 = W_{12} \qquad \frac{1}{6}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) \quad \text{------} \quad (1)$$



$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$$

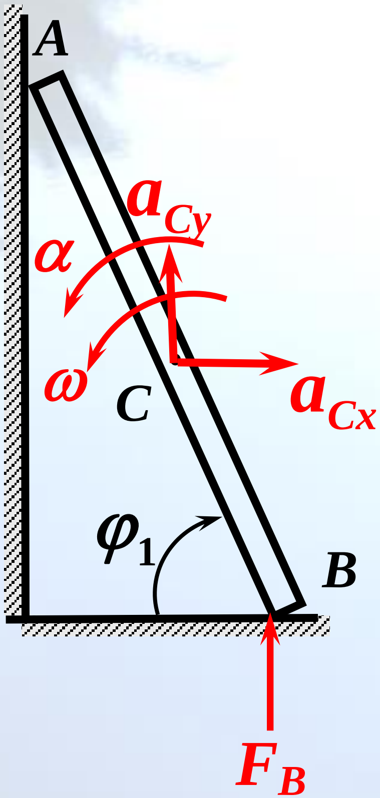
将(1)式两边对 t 求导得：

$$\frac{1}{3}\cancel{m}l^2\cancel{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\cancel{m}g\frac{l}{2}\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cancel{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\omega$$

得：$\frac{l}{3}\alpha = \frac{g}{2}\cos\varphi$ $\qquad \therefore \alpha = \frac{3g}{2l}\cos\varphi$

(2) 利用质心运动定理求杆脱离墙时杆与水平面的夹角



$$ma_x = 0$$

$$x = \frac{l}{2}\cos\varphi \qquad \dot{x} = -\frac{l}{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{l\omega}{2}\sin\varphi$$

$$\ddot{x} = \frac{l}{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\sin\varphi + \frac{l\omega}{2}\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{l\alpha}{2}\sin\varphi - \frac{l\omega^2}{2}\cos\varphi$$

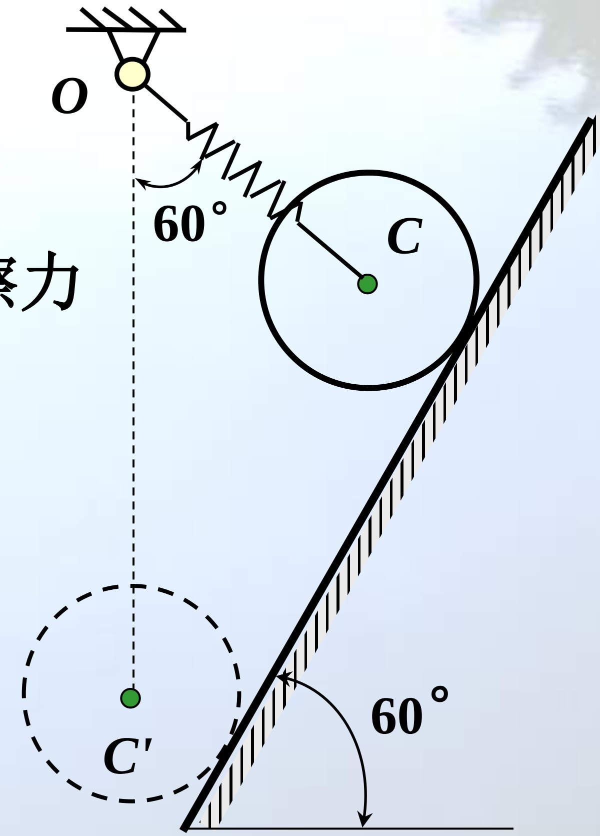
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha$$

$$\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi = 0$$

$$\therefore \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\varphi_0\right)$$

[例9] 均质圆轮，半径为R，质量为m，与刚度为k的弹簧相连，OC与铅垂线OC'成60°角时弹簧无变形，长度为l，此时圆盘无初速地滚下(不滑动)。求：1)轮子在C'位置时轮心的速度；2)此时轮子与斜面的摩擦力；3）轮子与斜面的静摩擦系数f满足什么条件时轮子在点C'只滚不滑。



解：(1) 利用动能定理求速度

(2) 利用刚体平面运动微分方程求摩擦力

(3)只滚不滑的条件是

$$F_S \leqslant fF_N$$

解：(1) 利用动能定理求速度

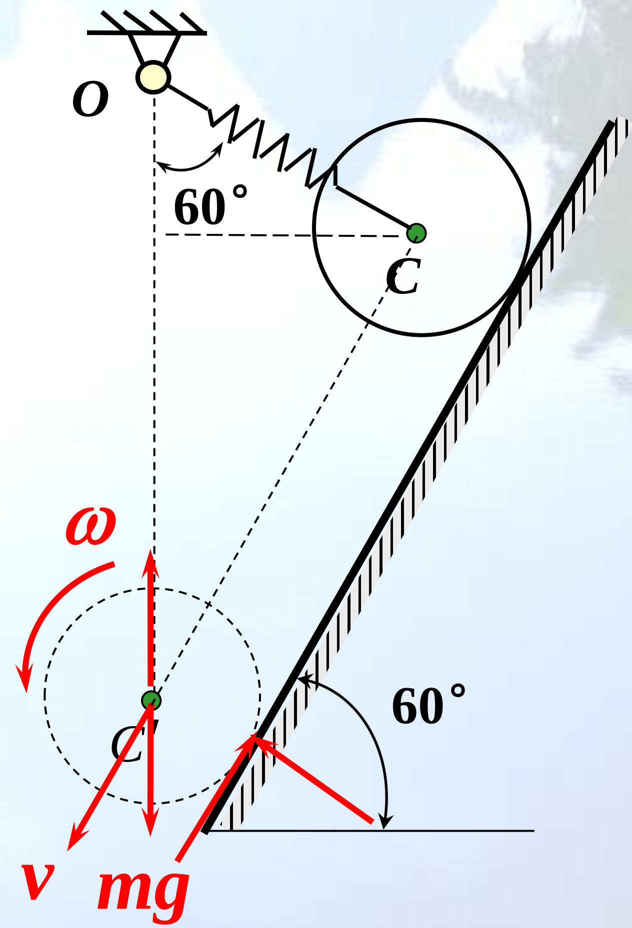
$$W_{12}=mg(2l-\frac{l}{2})-\frac{1}{2}kl^2$$

$$=\frac{3}{2}mgl-\frac{1}{2}kl^2$$

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{3}{4}mv^2$$

$$T_2-T_1=W_{12}$$ 解出速度v



能否通过对v求导得到加速度？

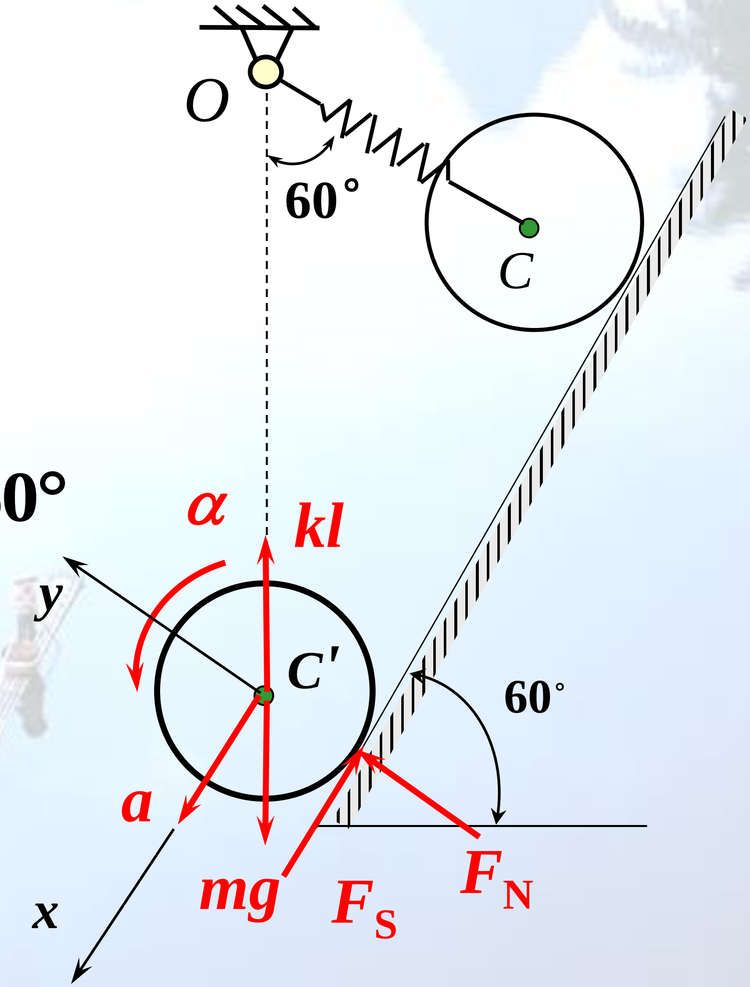
(2) 利用刚体平面运动微分方程求摩擦力

$$\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_x \\ ma_{Cy}=\sum F_y \\ J_C\alpha=\sum M_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma=(mg-kl)\cos 30°-F_S \\ 0=F_N+kl\cos 60°-mg\cos 60° \\ \frac{1}{2}mR^2\alpha=F_S\cdot R \end{cases}$$

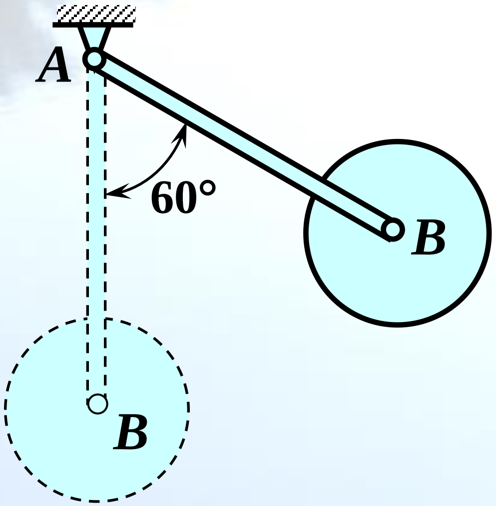
其中：$\alpha=\frac{a}{R}$，$a_{Cy}=0$

解出F_N 和F_s，



(3)只滚不滑的条件是 $F_s \leqslant fF_N$

[例10] 均质圆盘和均质杆*AB*的质量均为*m*,杆长为*l*,杆*AB*在*B*处用铰链与圆盘相连,可绕*B*自由旋转. 系统由图示位置静止释放。求*B*点经过最低位置时圆盘质心的速度及支座*A*的约束力。



分析：（1）用动能定理求速度

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

圆盘作什么运动?

（2）由质心运动定理求支座反力。

$$\begin{cases} \sum m_i a_{ix} = \sum F_{ix} \ , \\ \sum m_i a_{iy} = \sum F_{iy} \ , \end{cases}$$

杆和圆盘质心的加速度?

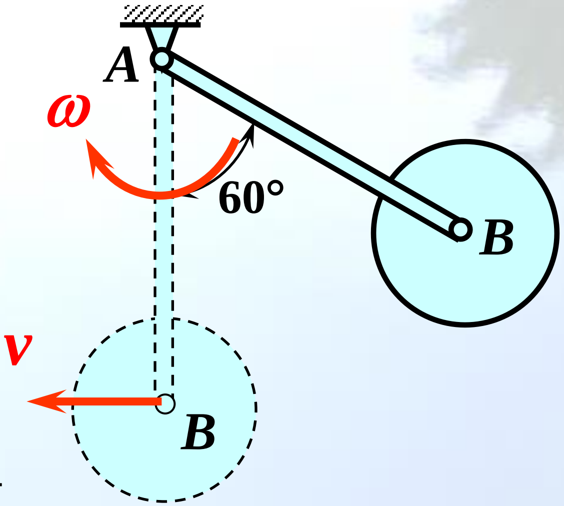
解题步骤：1.[圆盘]动量矩定理

2.[整体]动能定理

3.[整体]动量矩定理

4.[整体]质心运动定理

[例10] 均质圆盘和均质杆*AB*的质量均为*m*,杆长为*l*,杆*AB*在*B*处用铰链与圆盘相连,可绕*B*自由旋转. 系统由图示位置静止释放。求*AB*杆经过最低位置时圆盘质心的速度及支座*A*的约束力。



解: （1）取圆盘为研究对象

$$\sum M_B(\overline{F})=0，\ J_B\alpha_B=0 \quad \therefore\ \alpha_B=0$$

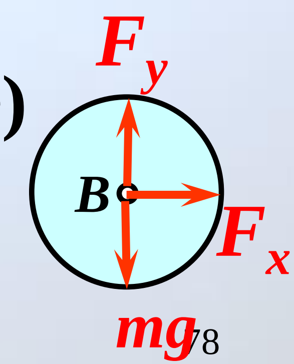
$$\omega_B=0 \quad ，\text{圆盘平动。}$$

（2）用动能定理求速度

$$W_{12}=mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\sin 30^\circ\right)+mg(l-l\sin 30^\circ)=\frac{3mgl}{4}$$

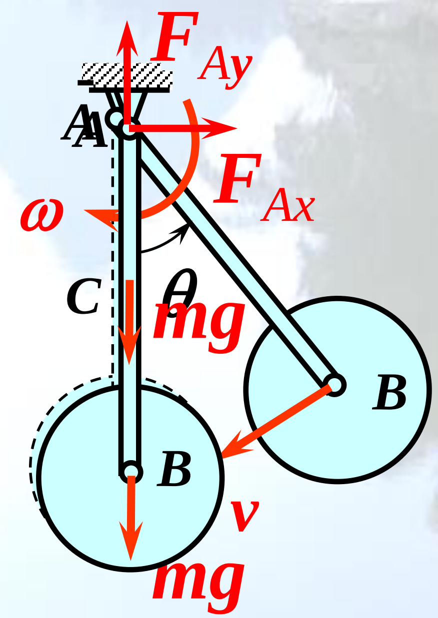
$$J_B\alpha_B=\sum M_B$$

$$T_1=0\ ,\ T_2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{2}{3}mv_B^2 \quad (\because\ v=l\omega)$$



$$T_2-T_1=W_{12}\ ,\quad \frac{2}{3}mv^2-0=\frac{3}{4}mgl \quad \therefore v=\sqrt{\frac{9}{8}gl}$$

（3）用动量矩定理求杆的角加速度α



$$L_A=\frac{1}{3}ml^2\omega+mvl=\frac{4}{3}ml^2\omega$$

$$\sum M_A(\overline{F}^{(e)})=mg\cdot\frac{l}{2}\sin\theta+mg\cdot l\sin\theta$$

$$\because\ \frac{dL_A}{dt}=\sum M_A(\overline{F}^{(e)})\qquad \therefore\theta=0\text{时}\,\alpha=0$$

杆质心 C的加速度： $a_C=a_C^n=\frac{l}{2}\omega^2\uparrow$ $\qquad(a_C^t=0)$

盘质心加速度： $a_B=a_B^n=l\omega^2\uparrow$ $\qquad(a_B^t=0)$

$$\omega=\frac{v_B}{l}=\sqrt{\frac{9g}{8l}}$$

$$\sum m_i a_{ix}=\sum F_{ix}\ ,$$

$$\sum m_i a_{iy}=\sum F_{iy}\ ,$$

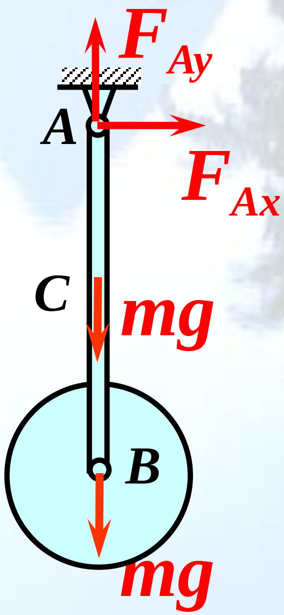
须求出C、B两点的加速度。

应该求出AB杆的角加速度。

（4）由质心运动定理求支座反力。

研究整个系统。

$$\begin{cases} \sum m_i a_{ix} = \sum F_{ix} \ , \\ \sum m_i a_{iy} = \sum F_{iy} \ , \end{cases}$$



$$\begin{cases} ma_C^t + ma_B^t = F_{Ax} \ , \\ m\frac{l}{2}\omega^2 + ml\omega^2 = F_{Ay} - mg - mg \end{cases}$$

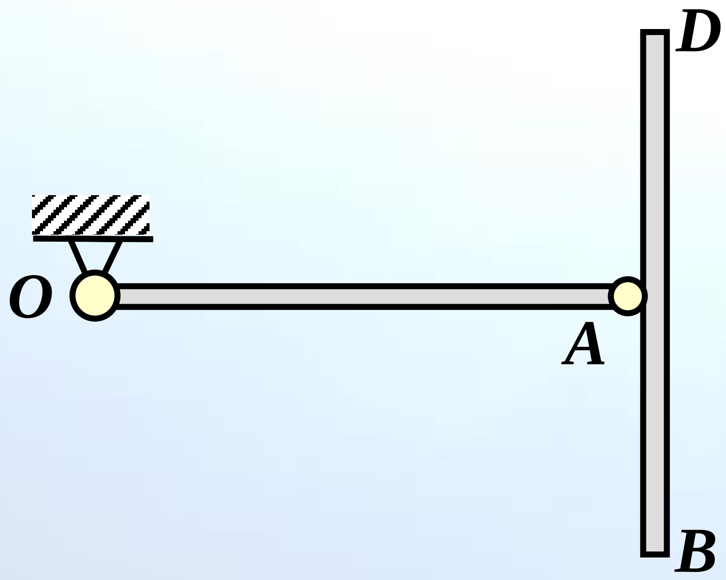
$$(a_C^t = 0, \quad a_B^t = 0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9g}{8l}}$$

解得： $F_{Ax} = 0,$

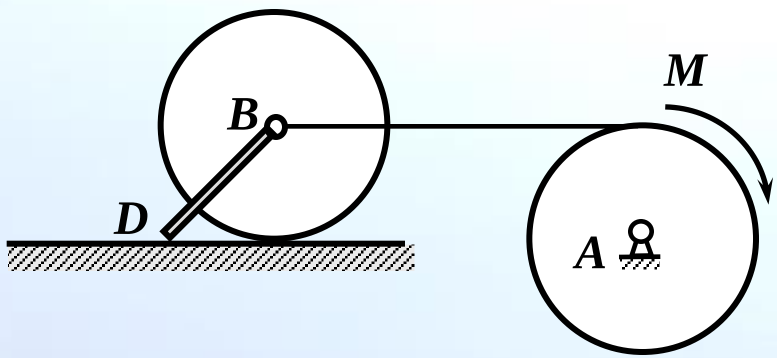
$$F_{Ay} = \frac{51}{16}mg$$

【例】 均质杆*OA*和*DB*的质量均为*m*，长均为*l*，在*A*处用铰链相连,可绕*A*自由旋转。杆*OA*处在水平位置时静止释放，在铅垂面内运动 。求杆*OA*转至铅垂位置时*O*处的支座反力。



[例]

两均质圆轮质量同为$3m$，半径均为R，均质杆BD质量为m，长$\sqrt{2}R$ ，与B轮光滑铰接。在轮A上作用一不变力偶M（ $M=mg\cdot R$ ），带动轮B沿水平面纯滚动，并拖动杆BD，不计BD杆D端与地面的摩擦，并略去绳的重量和轴中的摩擦。试求：1. A 轮的角加速度；2. 两个轮间绳子的拉力；3. BD杆端D对支撑面的作用力。



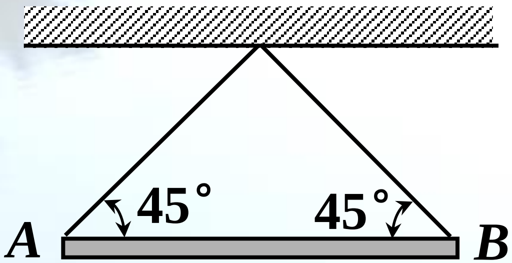
$$T_2=\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\right)mR^2\omega^2$$

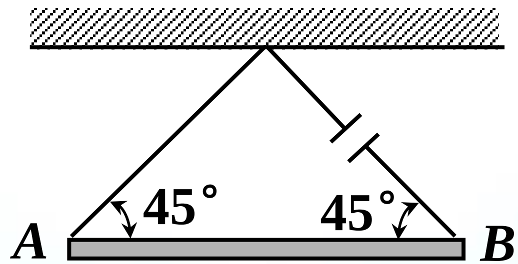
$$=\frac{7}{2}mR^2\omega^2$$

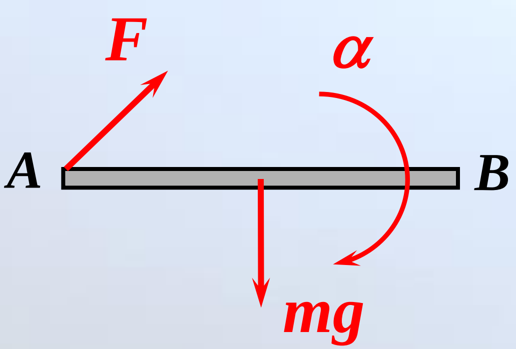
$$\alpha=\frac{g}{7R} \qquad a_B=\frac{g}{7}$$

$$F_T=\frac{11}{14}mg \qquad F_D=\frac{3}{7}mg$$

[例11] 均质杆AB的质量为m，长为l，其两端悬挂在两条长度相等的绳上，杆处在水平位置。如其中一绳突然断了，求此瞬时杆的角加速度和另一绳的张力。





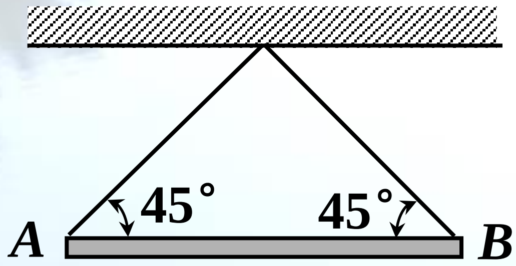


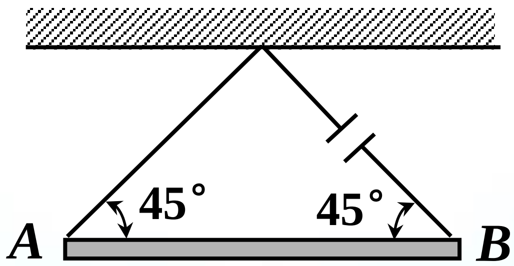
$$J_A\alpha=\sum M_A$$

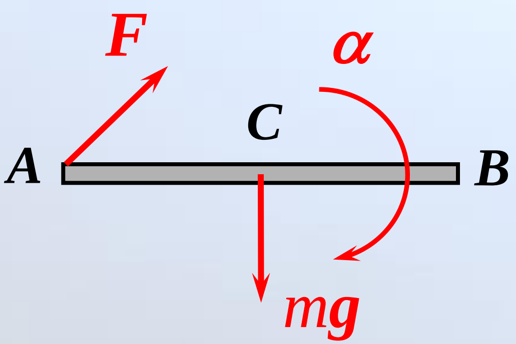
$$\frac{1}{3}ml^2\alpha=mg\cdot\frac{l}{2}$$

$$\alpha=\cancel{\frac{3g}{2l}}$$

[例11] 均质棒AB的质量为m，长为l，其两端悬挂在两条长度相等的绳上，棒处在水平位置。如其中一绳突然断了，求此瞬时棒的角加速度和另一绳的张力。

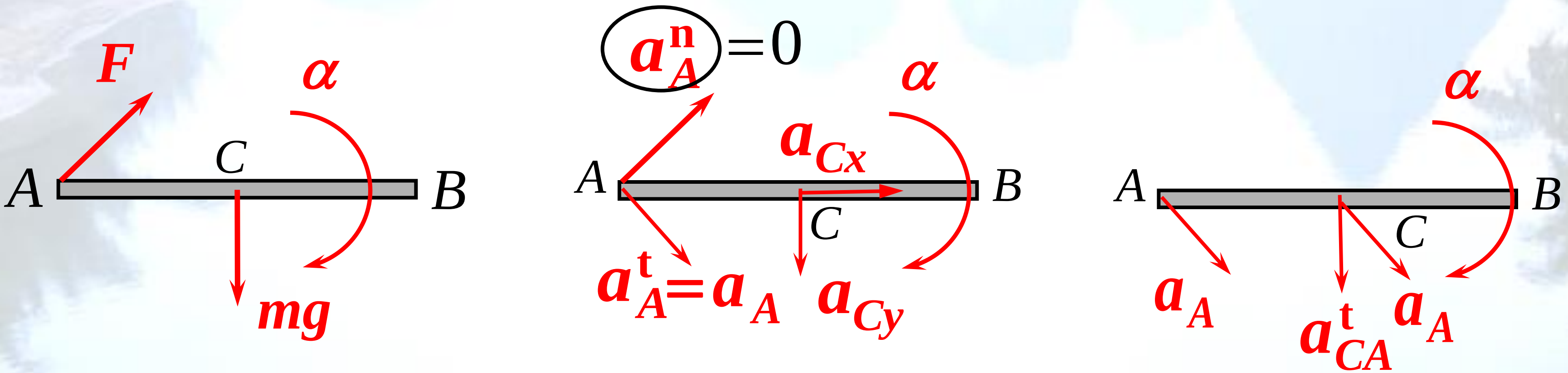






$$J_C\alpha=\sum M_C$$

$$\frac{1}{12}ml^2\underline{\alpha}=\underline{F}\cos45^\circ\cdot\frac{l}{2}$$



刚体平面运动微分方程

$$\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_x \\ ma_{Cy}=\sum F_y \\ J_C\alpha=\sum M_C \end{cases}$$

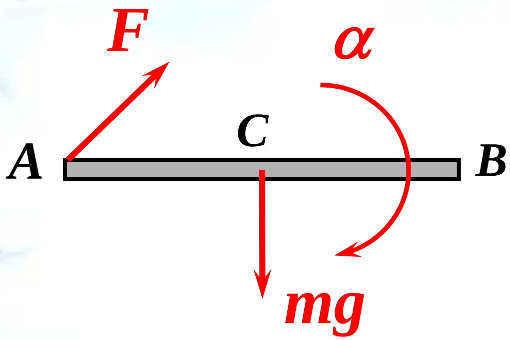
$$\bar{a}_C=\bar{a}_A+\bar{a}_{CA}^n+\bar{a}_{CA}^t$$

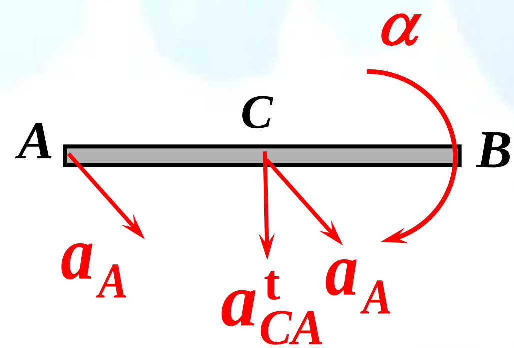
$$\bar{a}_{Cx}+\bar{a}_{Cy}=\bar{a}_A^t+\cancel{\bar{a}_A^n}+\cancel{\bar{a}_{CA}^n}+\bar{a}_{CA}^t$$

$$a_A^n=0,\qquad a_{CA}^n=0,\qquad a_{CA}^t=\frac{l}{2}\alpha,$$

$$a_A=a_A^t$$

$$\boxed{\therefore a_{Cx}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_A \qquad a_{Cy}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a_A-\frac{l}{2}\alpha}$$





刚体平面运动微分方程

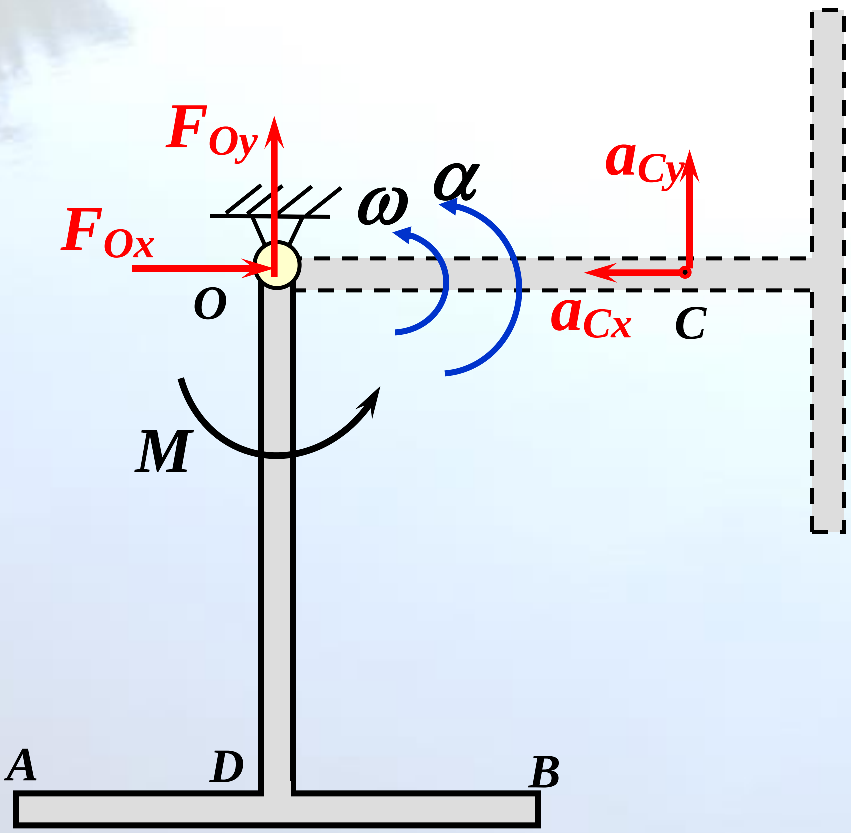
$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_x \\ ma_{Cy} = \sum F_y \\ J_C\alpha = \sum M_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ -m\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_A + \dfrac{l}{2}\alpha\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F - mg \\ \dfrac{1}{12}ml^2\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F \cdot \dfrac{l}{2} \end{cases}$$

$$\therefore a_{Cx} = \frac{\sqrt{2}}{2}a_A \quad a_{Cy} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_A - \frac{l}{2}\alpha$$

$$\alpha = \frac{6g}{5l} \quad F = \frac{\sqrt{2}}{5}mg$$

[例12] 匀质杆*AB*和*OD*，长都为*l*，质量均为*m*，*D*为*AB*的中点，置于铅垂面内，开始时静止，*OD*杆铅垂，在一常力偶*M*的作用下转动，$M=\frac{20}{\pi}mgl$，求*OD*杆转至水平位置时，支座*O*处的反力。



解题思路

1、应用质心运动定理可求反力

$$\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_x \\ ma_{Cy}=\sum F_y \end{cases}$$

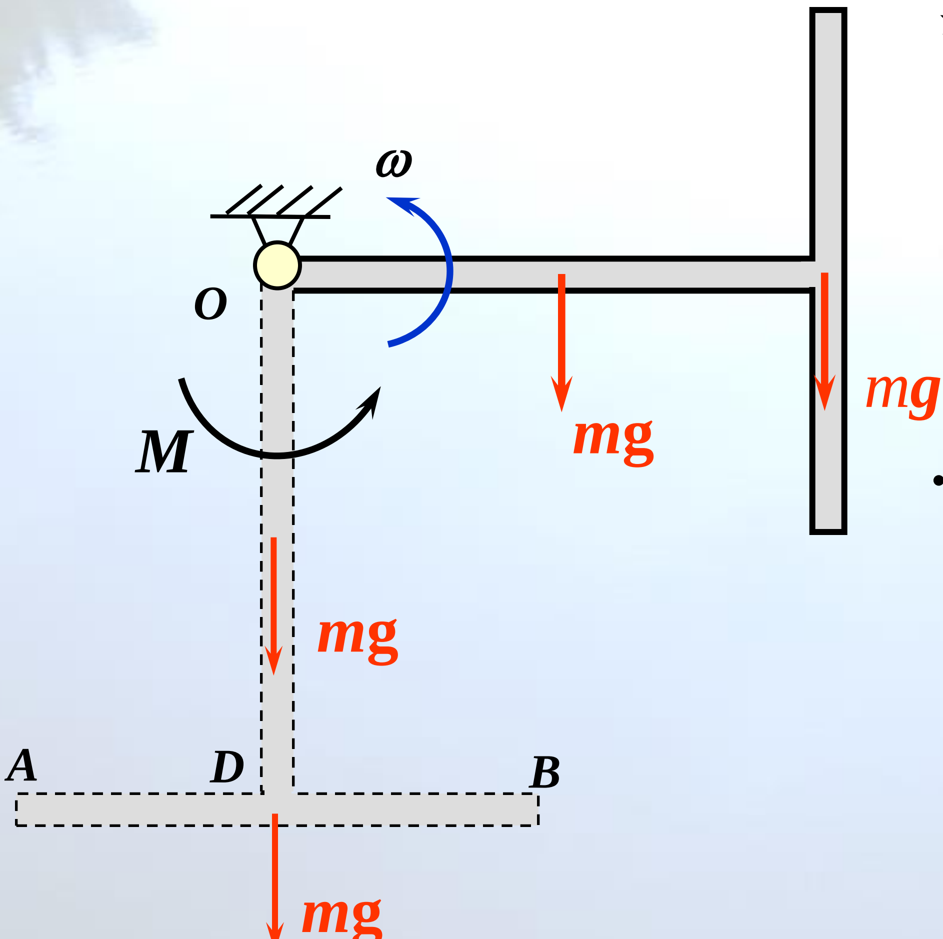
2、应用定轴转动微分方程求角加速度

$$J_O\alpha=\sum M_O(\overline{F})$$

3、应用动能定理求角速度

解： 1、应用动能定理求角速度

$$W_{12}=M\times\frac{\pi}{2}-mg\frac{l}{2}-mgl\ ,\qquad T_1=0,\qquad T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2$$



$$其中J_O=\frac{1}{3}ml^2+(\frac{1}{12}ml^2+ml^2)$$

$$=\frac{17}{12}ml^2$$

$$T_2-T_1=W_{12}$$

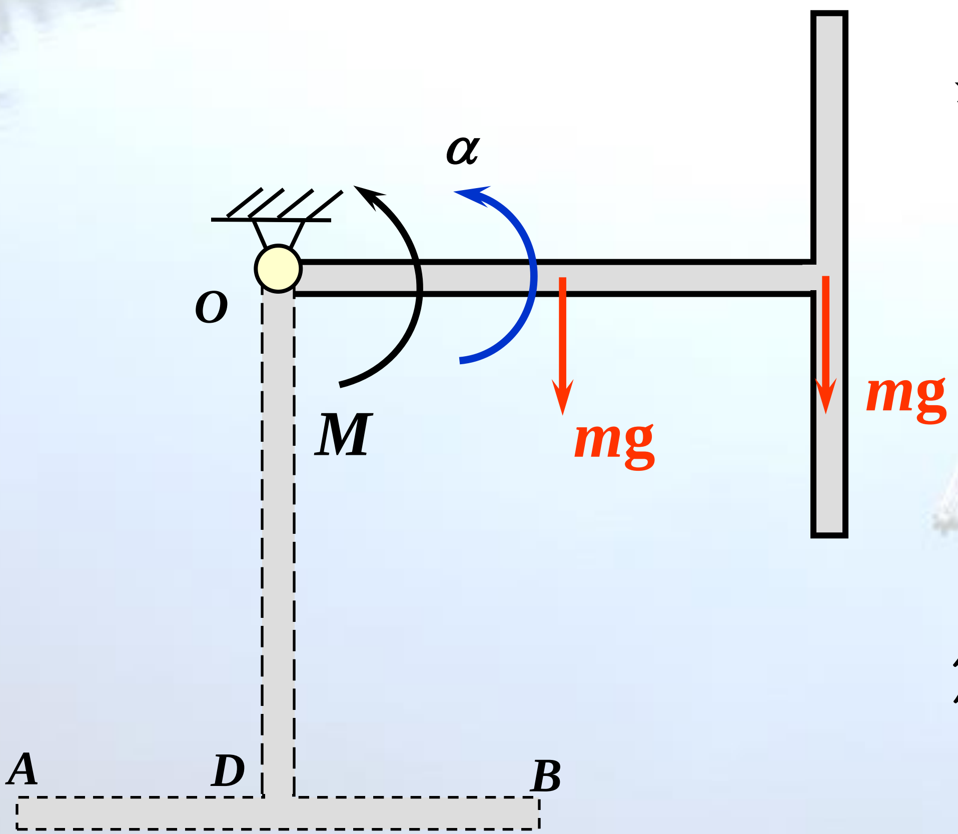
$$\therefore\frac{17}{24}ml^2\omega^2=M\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}mgl$$

$$\boxed{M=\frac{20}{\pi}mgl}$$

$$解得:\omega=2\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

2、应用定轴转动微分方程求角加速度

$$J_O\alpha=\sum M_O(\bar{F})$$



其中 $J_O=\dfrac{17}{12}ml^2$,

$$\sum M_O(\bar{F})=M-mg\frac{l}{2}-mgl$$

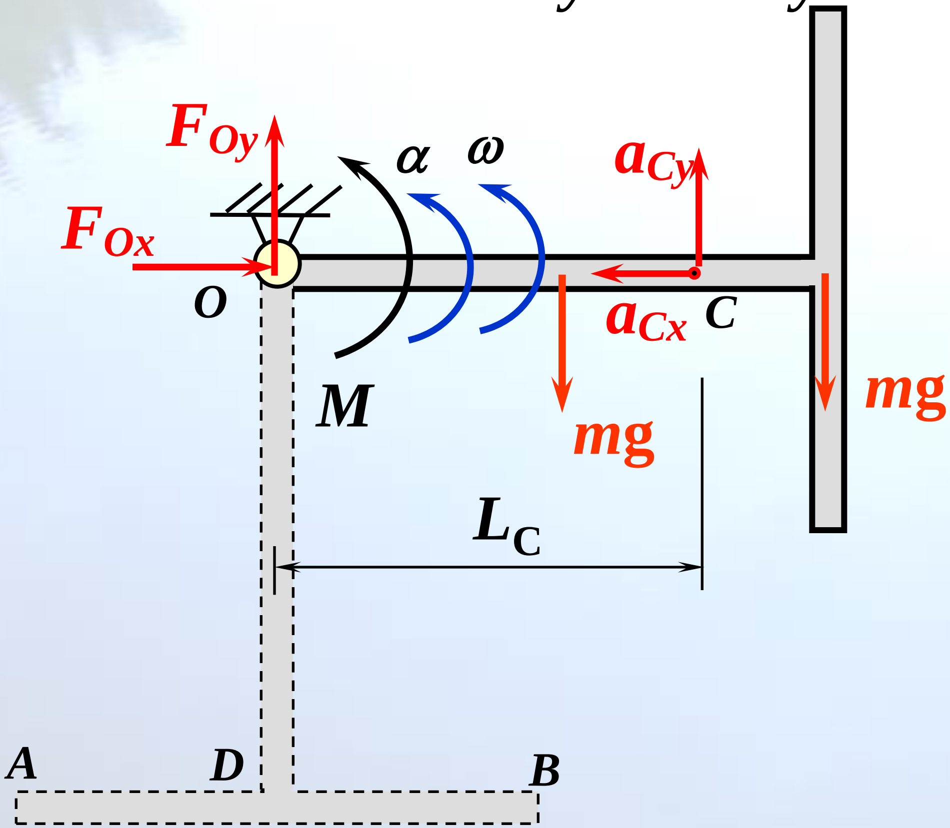
$$\therefore\quad \frac{17}{12}ml^2\alpha=M-\frac{3}{2}mgl$$

解得 $\alpha=\dfrac{6g}{17\pi l}(40-3\pi)$

3、应用质心运动定理求反力

$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_x \\ ma_{Cy} = \sum F_y \end{cases}$$

$$L_C = \frac{m \cdot \frac{l}{2} + ml}{2m} = \frac{3l}{4}$$



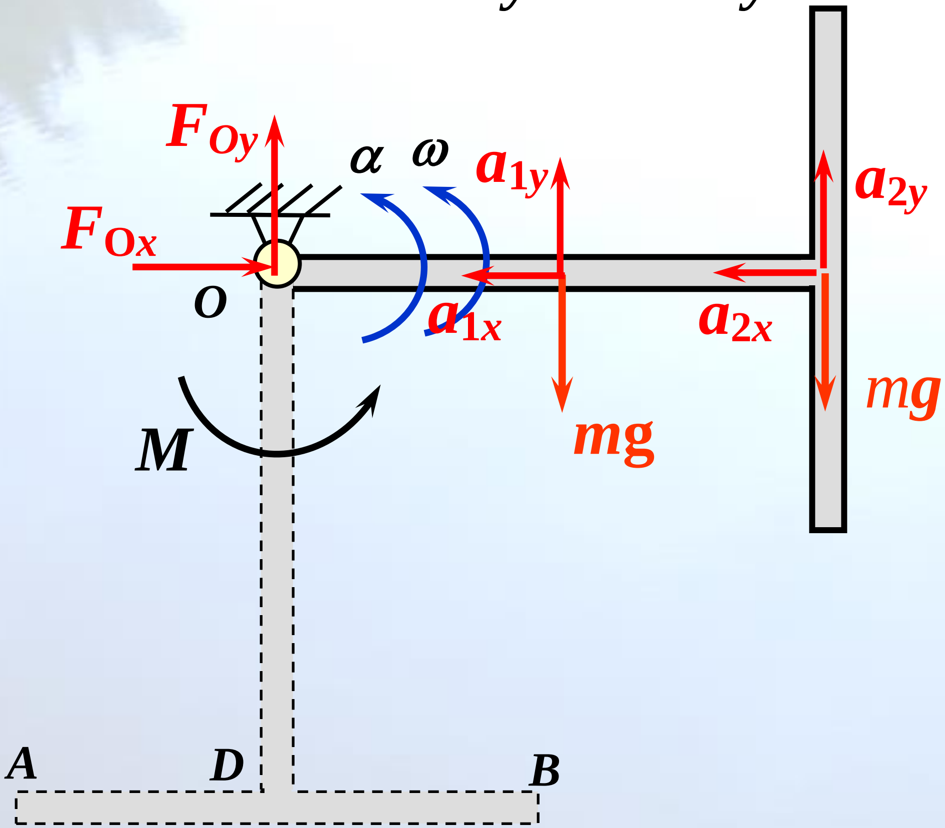
$$\begin{cases} -2m(\frac{3}{4}l)\omega^2 = F_{Ox} \\ 2m(\frac{3}{4}l)\alpha = F_{Oy} - 2mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Ox} = -18mg \\ F_{Oy} = 2mg - \frac{9mg}{17\pi}(40 - 3\pi) \end{cases}$$

或者：

$$\begin{cases} \sum m_i a_{Cxi} = \sum F_x \\ \sum m_i a_{Cyi} = \sum F_y \end{cases}$$

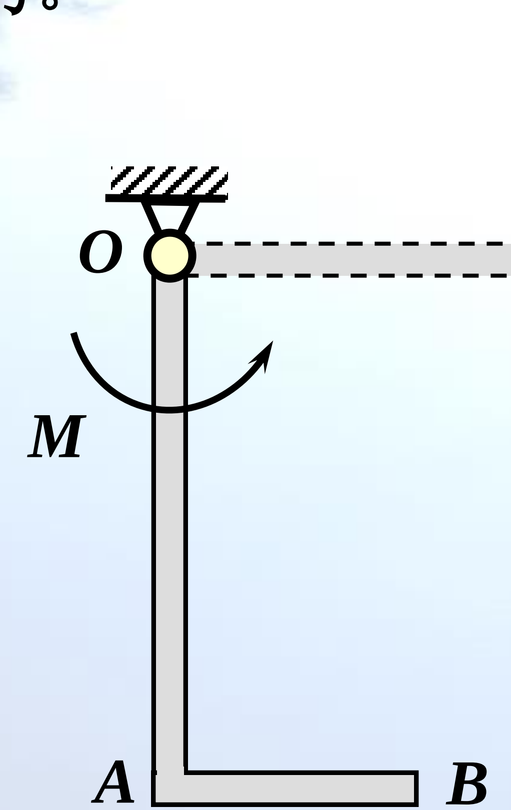
其中 $\begin{cases} a_{1x} = \frac{1}{2} l\omega^2 \ , a_{2x} = l\omega^2 \\ a_{1y} = \frac{1}{2} l\alpha \ , a_{2y} = l\alpha \end{cases}$



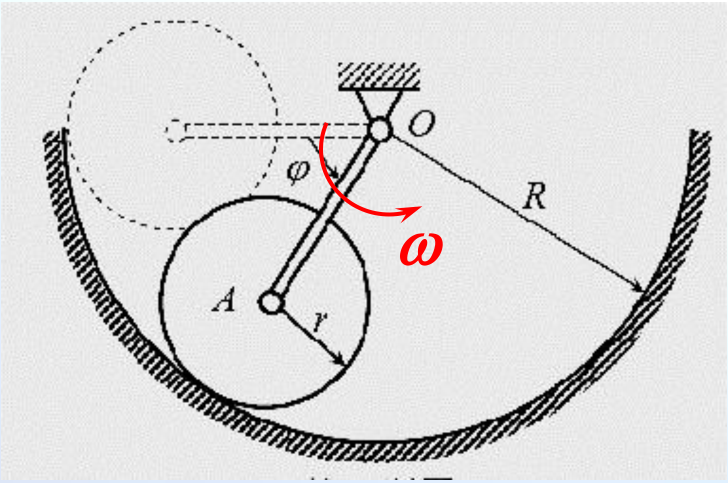
$$\begin{cases} -ma_{1x} - ma_{2x} = F_{Ox} \\ ma_{1y} + ma_{2y} = F_{Oy} - mg - mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Ox} = -18mg \\ F_{Oy} = 2mg - \dfrac{9mg}{17\pi}(40 - 3\pi) \end{cases}$$

【例】 均质杆*OA*长为2*l*，质量为2*m*，均质杆*AB*长为*l*，质量为*m*，置于铅垂面内，开始时静止，*OA*杆铅垂，在一常力偶*M*的作用下转动，求*OA*杆转至水平位置时，支座*O*处的反力。



【例】如图所示的平面机构，均质轮*A*的质量为*m*，半径为*r*，在半径为*R*的固定圆弧面上作纯滚动，均质细杆*OA*的质量也为*m*，长*l*=2*r*，其*A*端与轮心光滑铰接，另一端*O*位于固定圆弧面的圆心，系统静止地从*OA*处于水平的位置释放，求当杆*OA*运动到φ=60 时，（1）杆*OA*的角速度和角加速度；（2）轮*A*所受到的摩擦力。

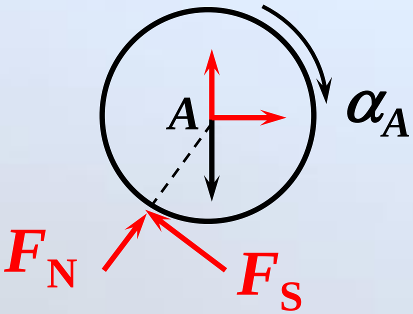


解:整体

$$W_{12}=3mgr\sin\varphi\ ,\qquad T_1=0$$

$$T_2=\frac{11}{3}mr^2\omega^2$$

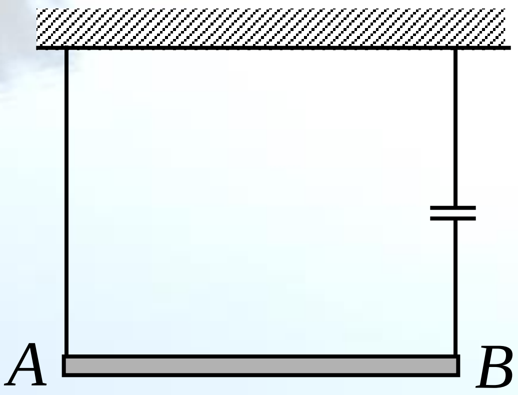
解得 $\omega=\sqrt{\dfrac{9\sqrt{3}g}{22r}}$ $\qquad \alpha=\dfrac{9g}{44r}$



A轮子 $J_A\alpha_A=\sum M_A(\overline{F})$

$$F_S=\frac{9}{44}mg$$

[题综-8]（P324） 均质棒*AB*的质量为*m*=4kg，其两端悬挂在两条平行绳上，棒处在水平位置。设其中一绳突然断了，求此瞬时另一绳的张力。

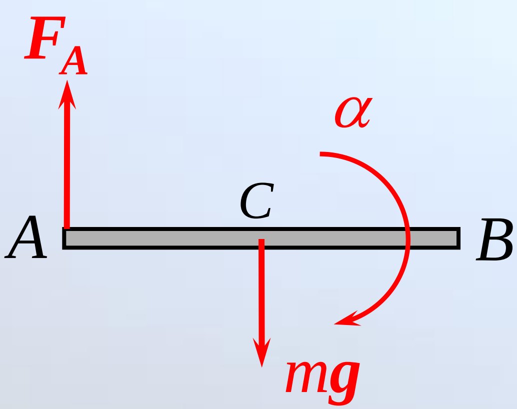


刚体的平面运动微分方程

$$ma_x=\sum F_x$$

$$ma_y=\sum F_y$$

$$J_C\alpha=\sum M_C$$



$$\cancel{J_A\alpha=\sum M_A}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\alpha=mg\cdot\frac{l}{2}$$

$$\cancel{\alpha=\frac{3g}{2l}}$$


第十二章结束
© Keren Su/Corbis