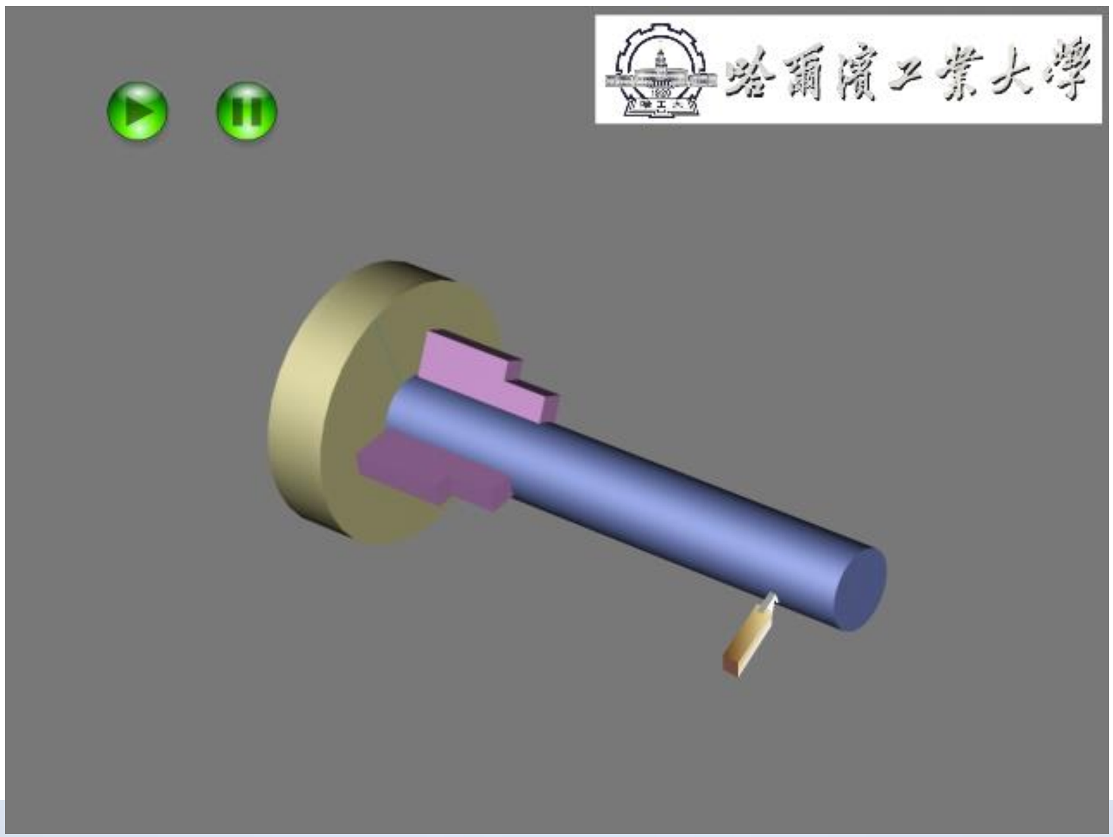
第二篇 《运动学》

第七章　点的合成运动

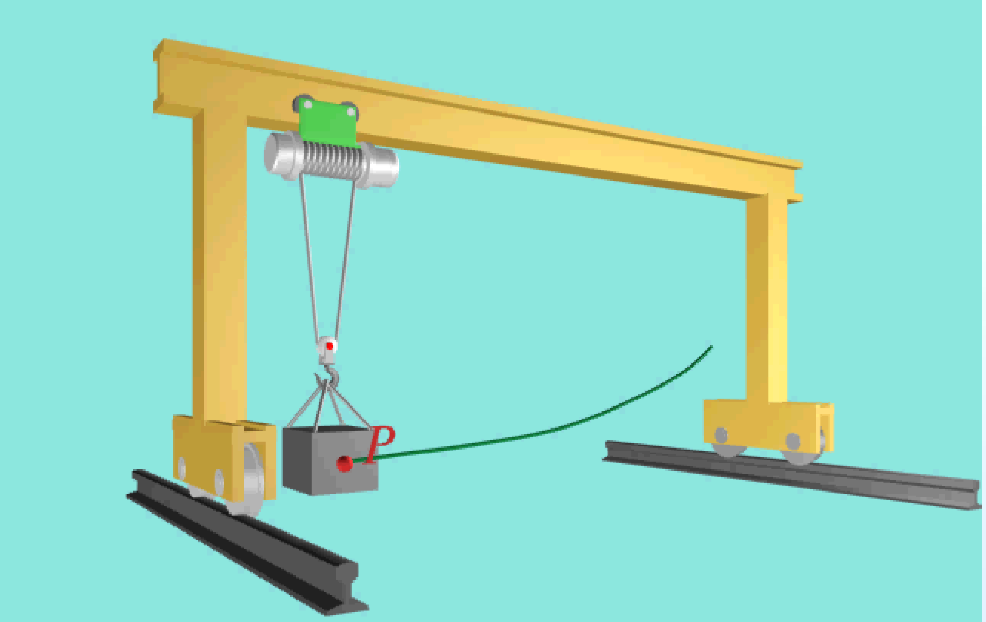
§7-1　相对运动·牵连运动·绝对运动

运动的相对性：物体对于不同的参考体具有不同的运动。



§7-1　相对运动·牵连运动·绝对运动

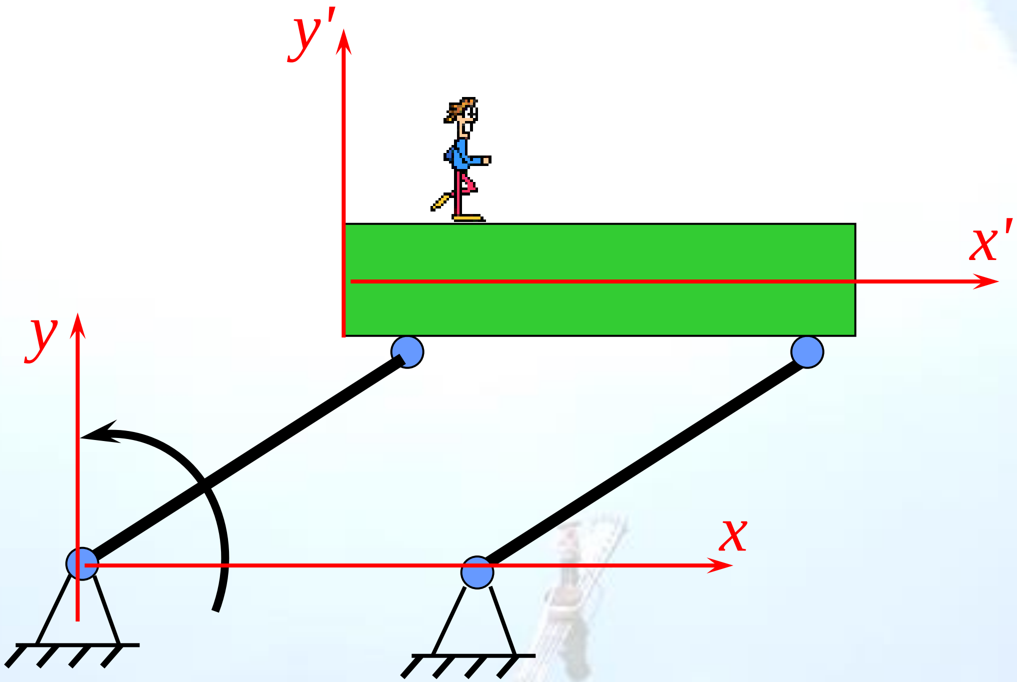
运动的相对性：物体对于不同的参考体具有不同的运动。



被起重机吊起的重物上P点运动分析

相对于某一参考体的运动可以由相对于其他参考体的几个运动组合而成，称这种运动为合成运动。

相对于某一参考体的运动可以由相对于其他参考体的几个运动组合而成，称这种运动为合成运动。



相对于某一参考体的运动可以由相对于其他参考体的几个运动组合而成，称这种运动为合成运动。

几个概念：

一．动点：所要研究的运动的点(如重物A、轮子上某点、人)。

二．坐标系：

1.定坐标系：把固结于地面上的坐标系称为定坐标系(定系)。

2.动坐标系：把固结于相对于地面运动物体（如小车）上的坐标系，称为动坐标系，简称动系。

三．三种运动：

1)**绝对运动**：动点对定系的运动。

2)**相对运动**：动点对动系的运动。例如：人在行驶的汽车里走动。

（以上两种：点的运动）

3)**牵连运动**：动系相对于静系的运动。例如：行驶的汽车相对于地面的运动。 ⟶ 刚体的运动

四、三种速度和三种加速度

1）绝对速度$\bar{v}_{\mathrm{a}}$和绝对加速度$\bar{a}_{\mathrm{a}}$

动点在绝对运动中的速度和加速度。

2）相对速度$\bar{v}_{\mathrm{r}}$和相对加速度$\bar{a}_{\mathrm{r}}$

动点在相对运动中的速度和加速度。

3）牵连速度$\bar{v}_{\mathrm{e}}$和牵连加速度 $\bar{a}_{\mathrm{e}}$

动坐标系中与动点相重合的点(牵连点，不是动点)的速度和加速度。

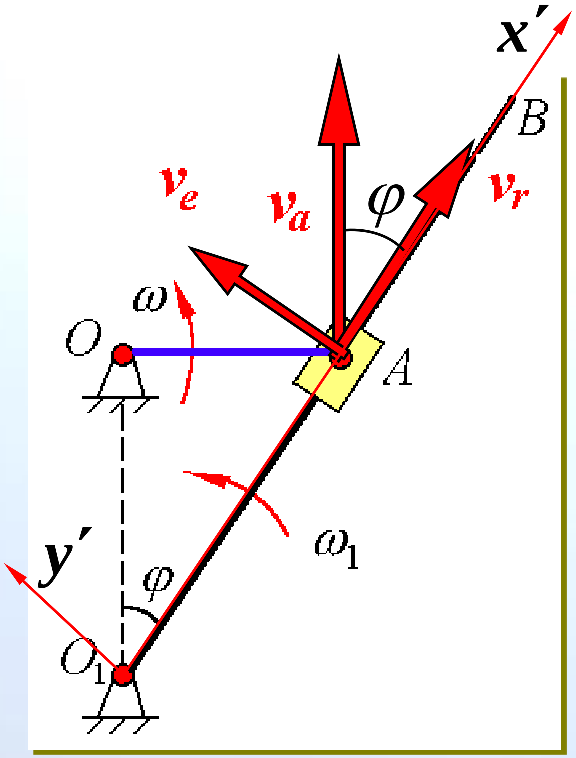
五．两种运动的轨迹

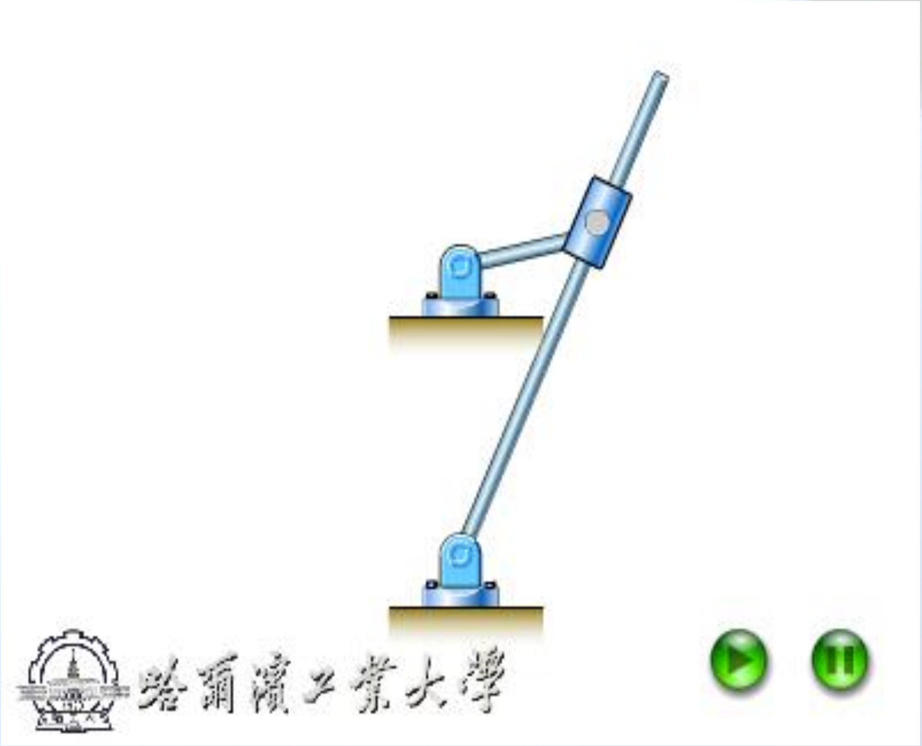
动点在相对运动中的轨迹称为相对运动轨迹。动点在绝对运动中的轨迹称为绝对运动轨迹。

六．动点的选择原则：

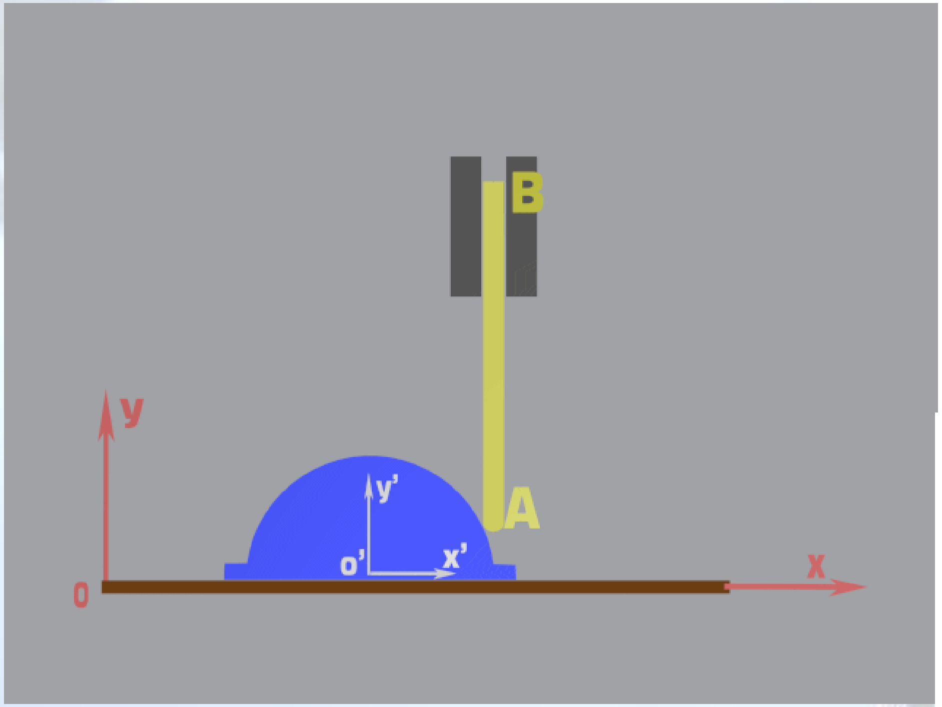
一般选择主动件与从动件的连接点，动点是对两个坐标系都有运动的点。相对运动的轨迹是已知的，或者能直接看出的。

取套筒A点为动点，摆杆O_1B为动系， 基座为定系。





下面举例说明以上各概念：

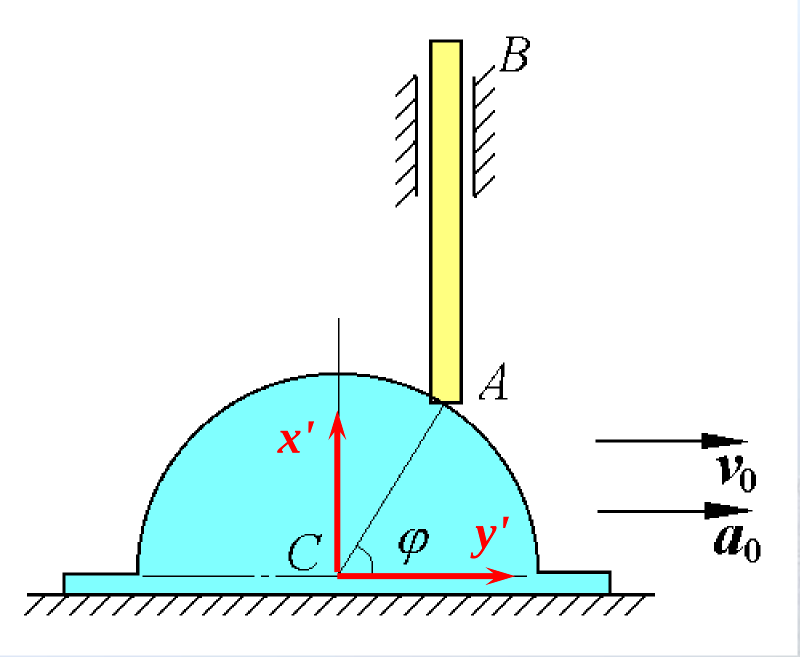


影片：801

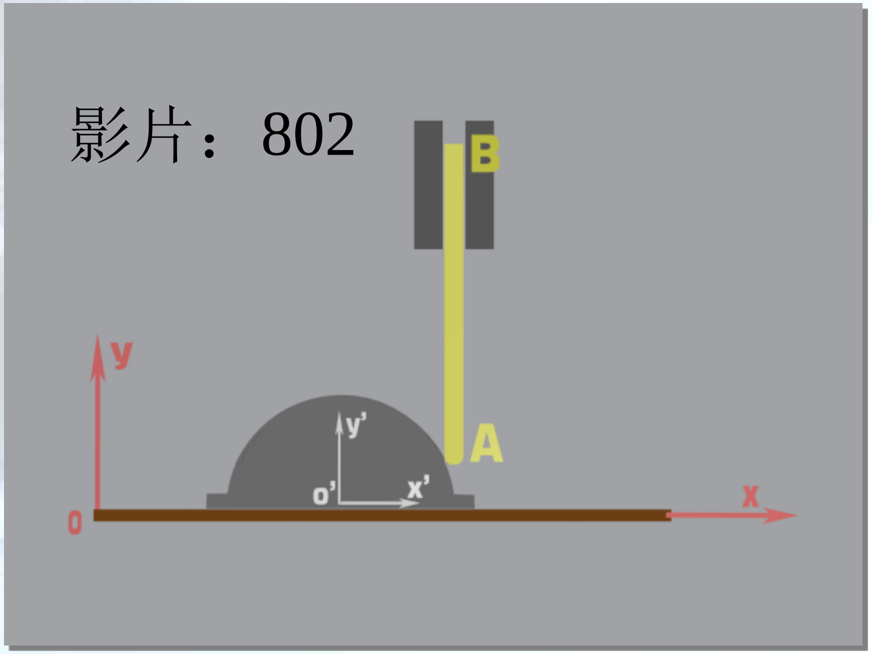
动点：*AB*杆上*A*点

动系：固结于凸轮 *O*'上

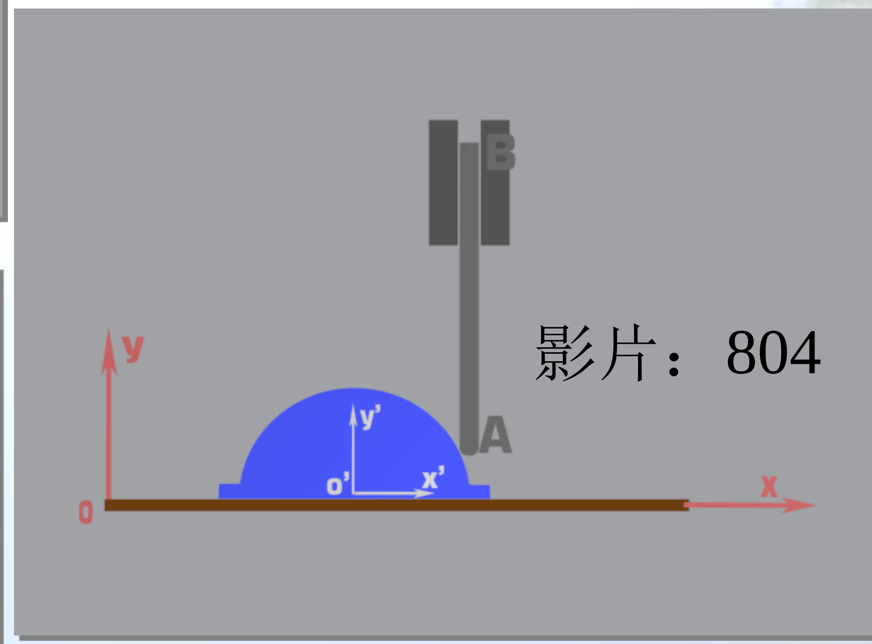
定系：固结在地面上

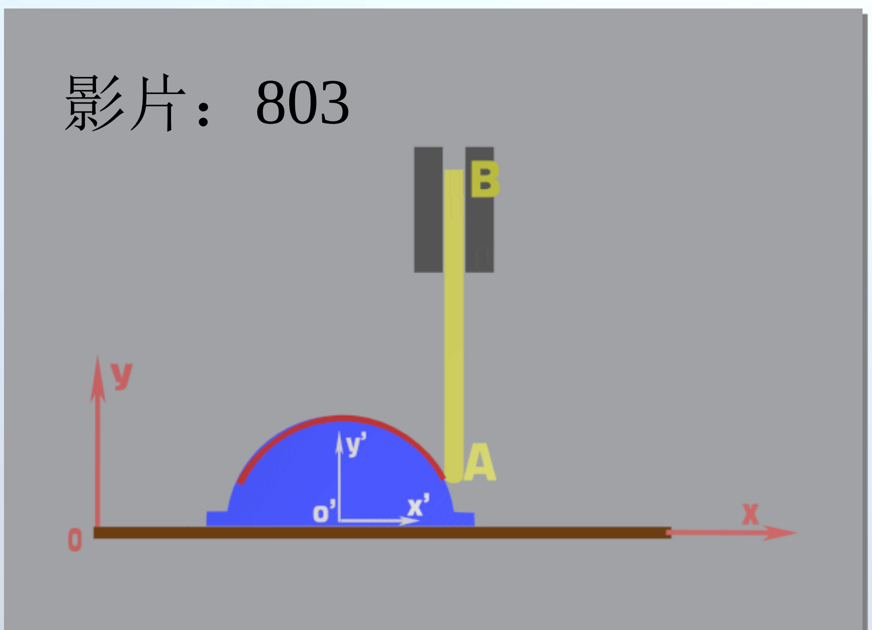


绝对运动：　直线



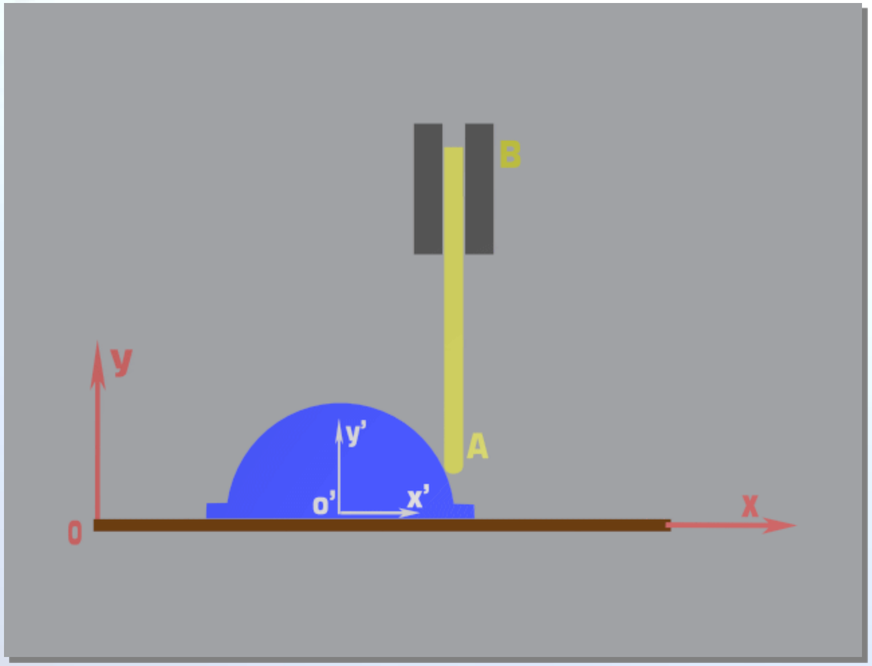
牵连运动：　平动



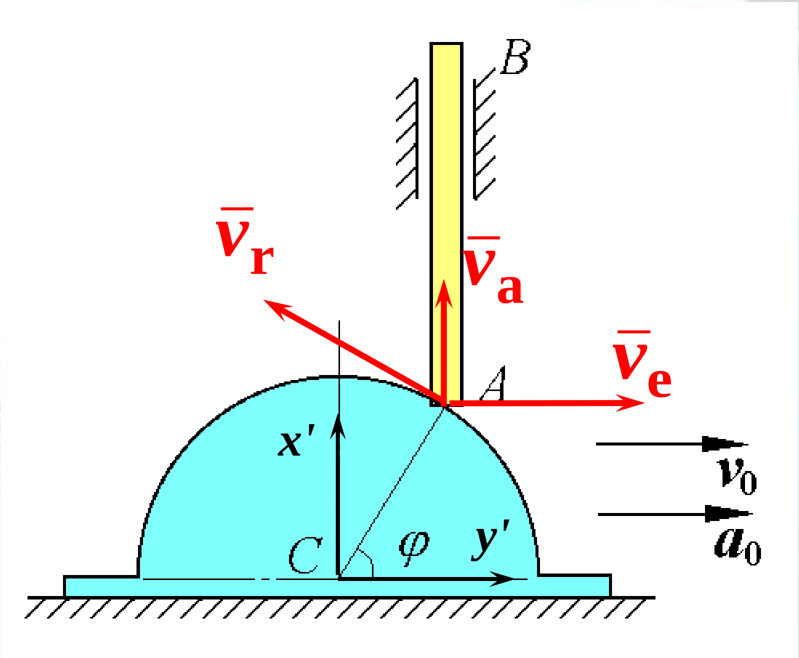


相对运动：　曲线（圆弧）

绝对速度：$\bar{v}_a$　　相对速度：$\bar{v}_r$　　牵连速度：$\bar{v}_e$

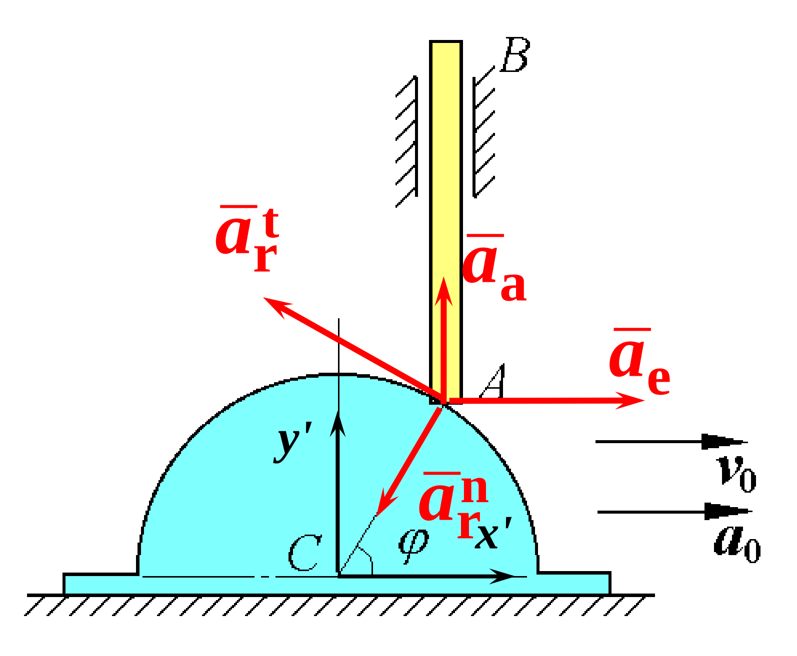


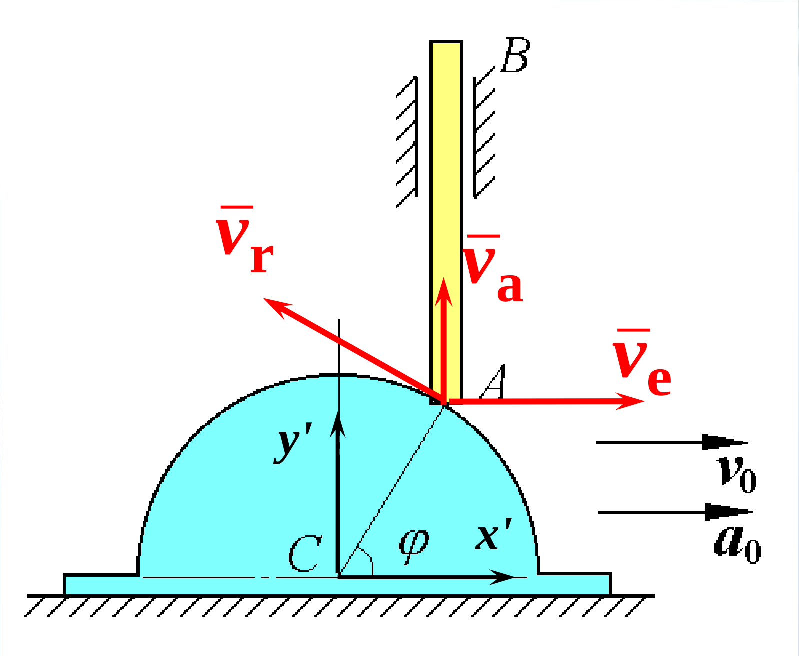
影片：805

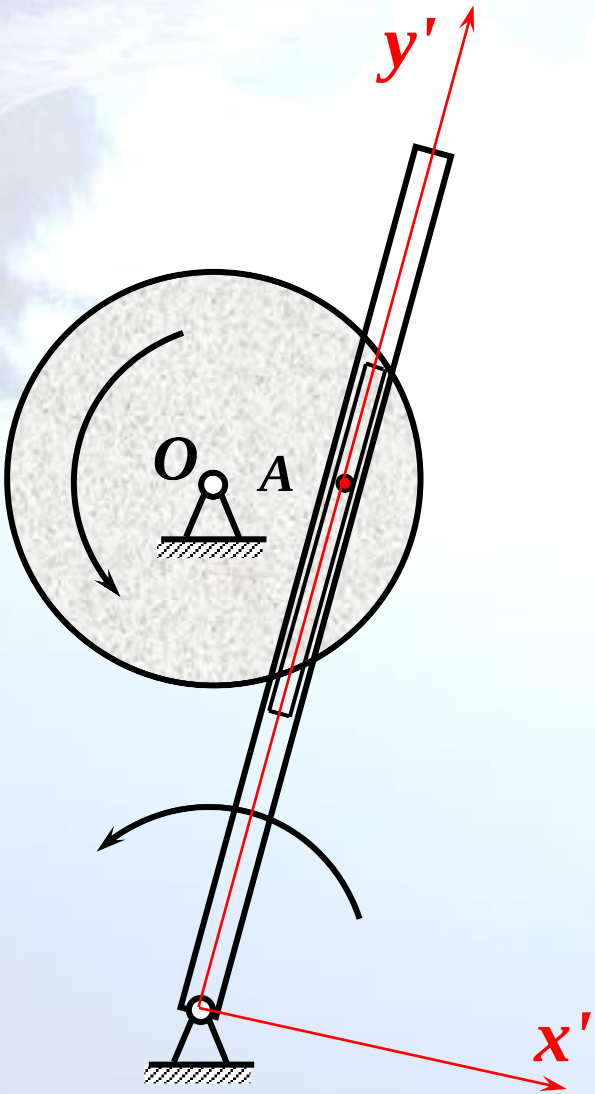


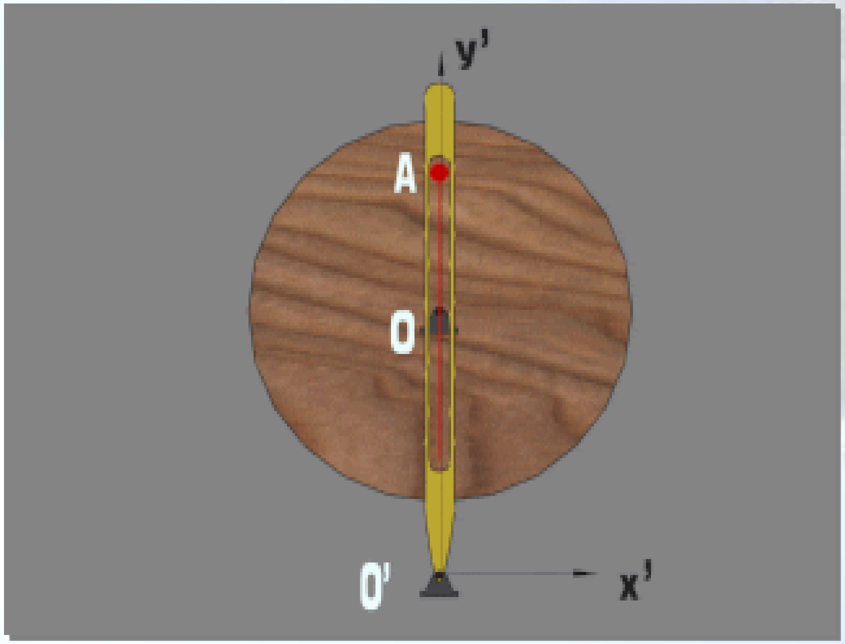
绝对速度：$\bar{v}_a$　　相对速度：$\bar{v}_r$　　牵连速度：$\bar{v}_e$

绝对加速度：$\bar{a}_a$　相对加速度：$\bar{a}_r$　　牵连加速度：$\bar{a}_e$









动点：*A*（在圆盘上)

动系：*O*'*A*摆杆

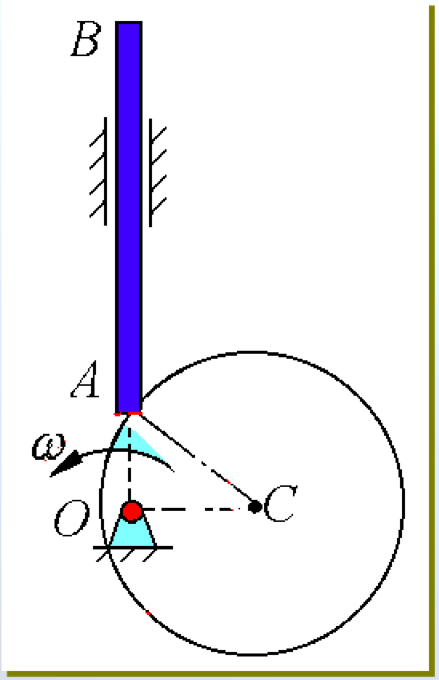
定系：机架

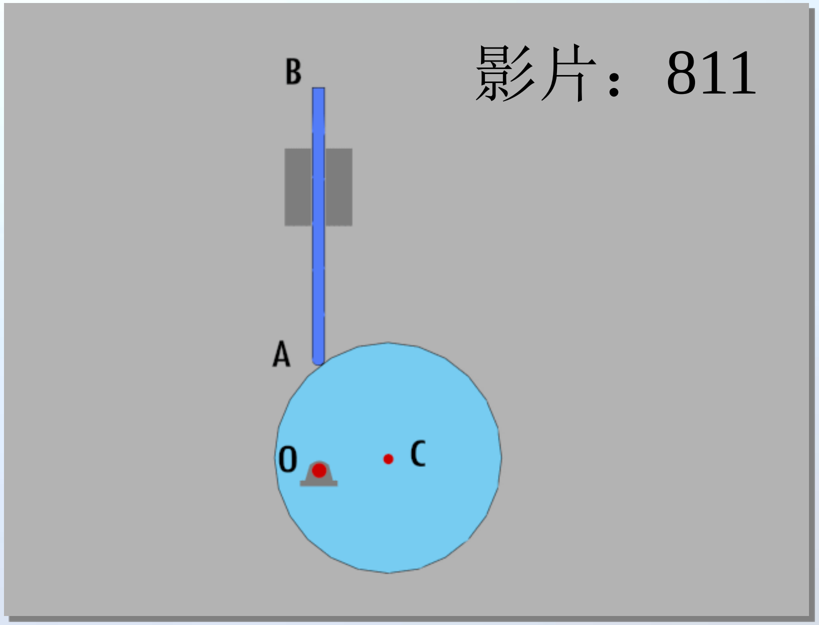
绝对运动：曲线（圆周）

相对运动：直线

牵连运动：定轴转动

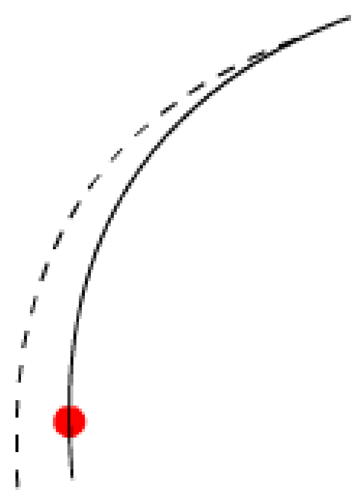
动　　点：*A*(在*AB*杆上) [注] 应说明动点在哪个物体上。
动　　系：偏心轮
定　　系：地面
绝对运动：直线
相对运动：圆周（曲线）
牵连运动：定轴转动





§ 7-2 点的速度合成定理

速度合成定理将建立动点的绝对速度，相对速度和牵连速度之间的关系。



当$t \to t+\Delta t$ ，$AB \to A'B'$

动点　$M \to M'$

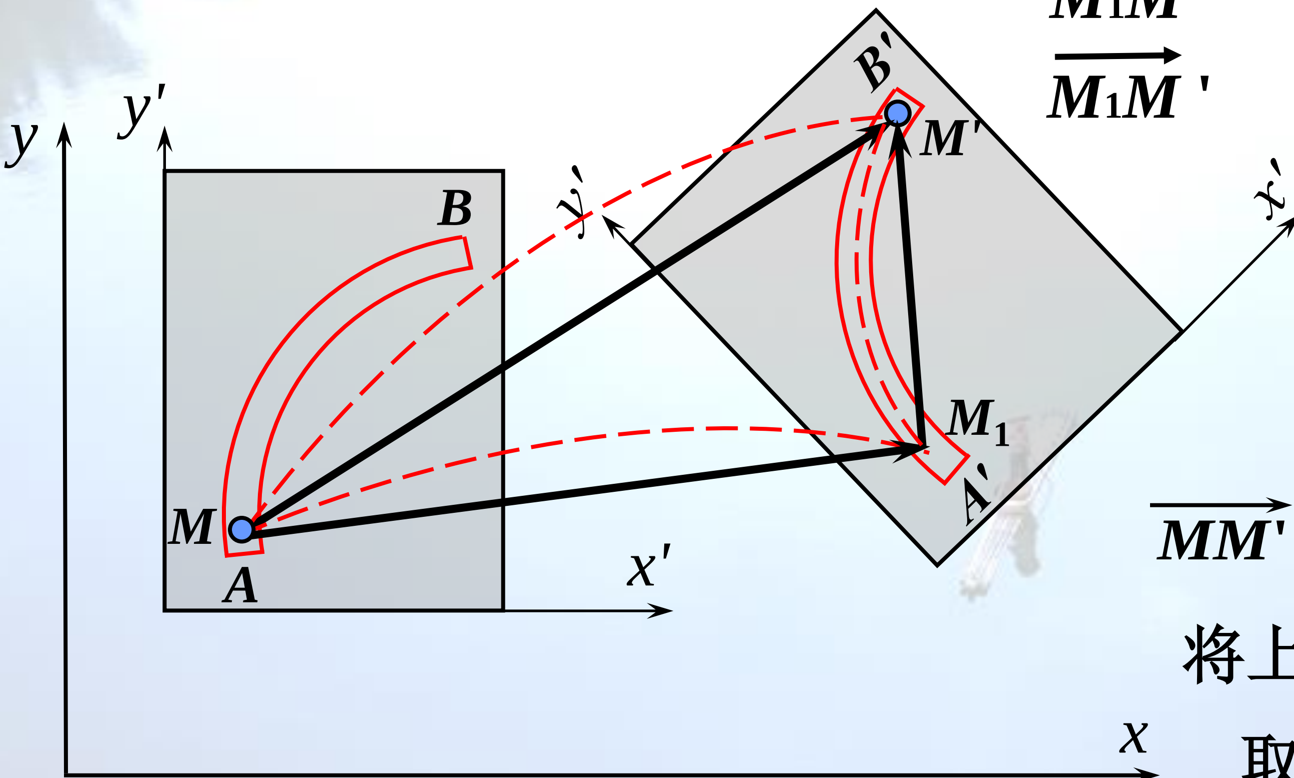
也可看成$M \to M_1 \to M'$

$\overset{\frown}{MM'}$　为绝对轨迹

$\overrightarrow{MM'}$　为绝对位移

$\overset{\frown}{M_1M'}$　为相对轨迹

$\overrightarrow{M_1M'}$　为相对位移



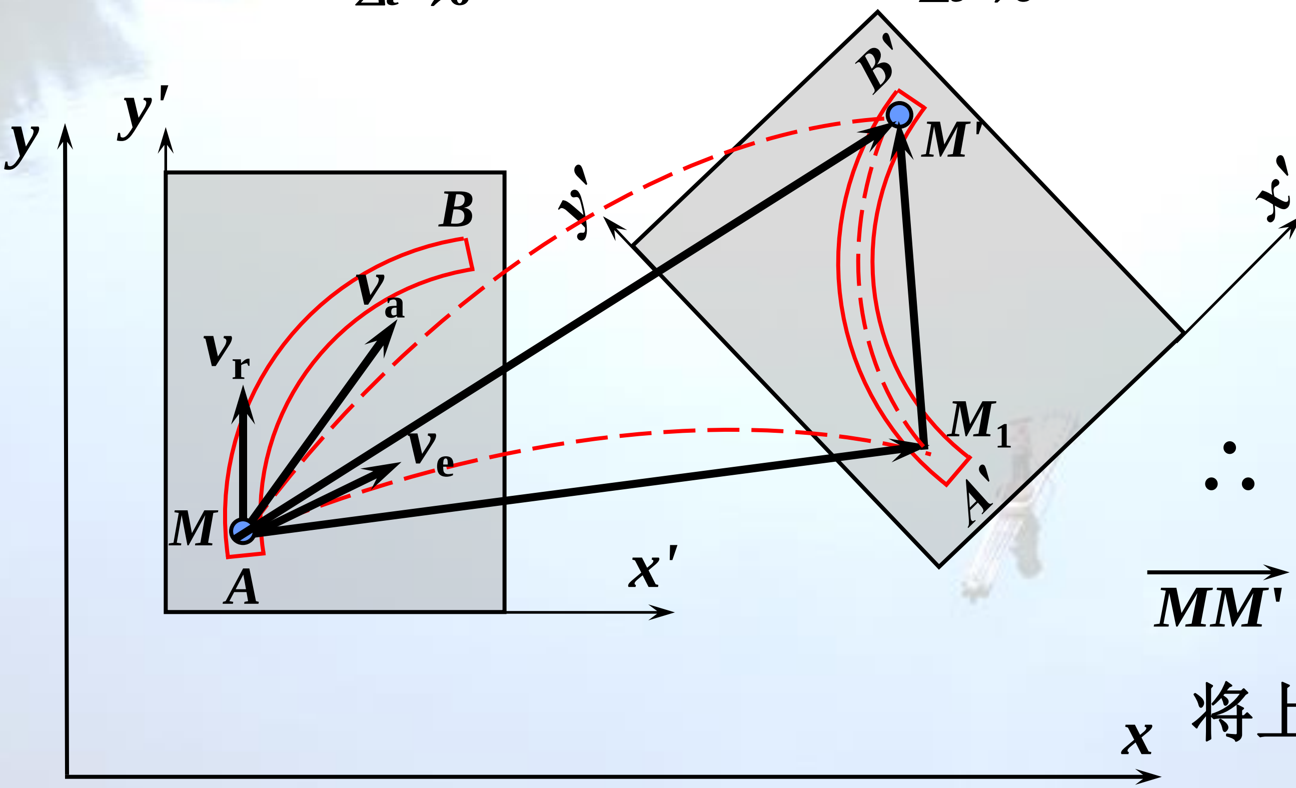
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$

将上式两边同除以Δt

取 $\Delta t \to 0$ 时的极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t}$$

$$\bar{v}_a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}\qquad \bar{v}_r=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t}\qquad \bar{v}_e=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$$



$$\therefore\quad \bar{v}_a=\bar{v}_e+\bar{v}_r$$

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M'}$$

将上式两边同除以Δt

点的速度合成定理：

动点在某瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和。

$$\boxed{\bar{v}_{\mathrm{a}} = \bar{v}_{\mathrm{e}} + \bar{v}_{\mathrm{r}}}$$

速度合成定理建立了动点的绝对速度，相对速度和牵连速度之间的关系。

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$$

说明：(1) v_a—动点的绝对速度；

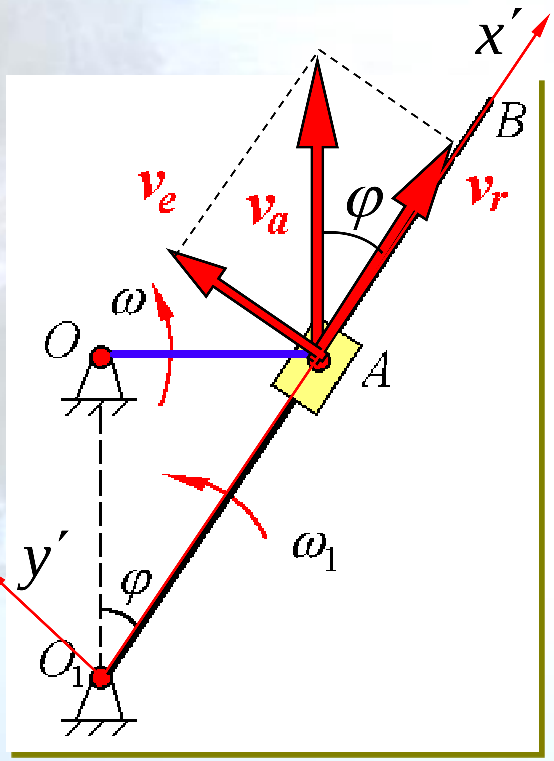
(2) v_r—动点的相对速度；

(3) v_e—动点的牵连速度，是动系上一点(牵连点)的速度

I) 动系作平动时，动系上各点速度都相等。

II) 动系作转动时，v_e 是该瞬时动系上与动点相重合点的速度。

(4) 点的速度合成定理是瞬时矢量式，共包括大小、方向六个元素，已知任意四个元素，就能求出其他两个。



[例7-4]（P178）

曲柄摆杆机构

已知：$OA=r$, ω, $OO_1=l$，图示瞬时$OA\perp OO_1$

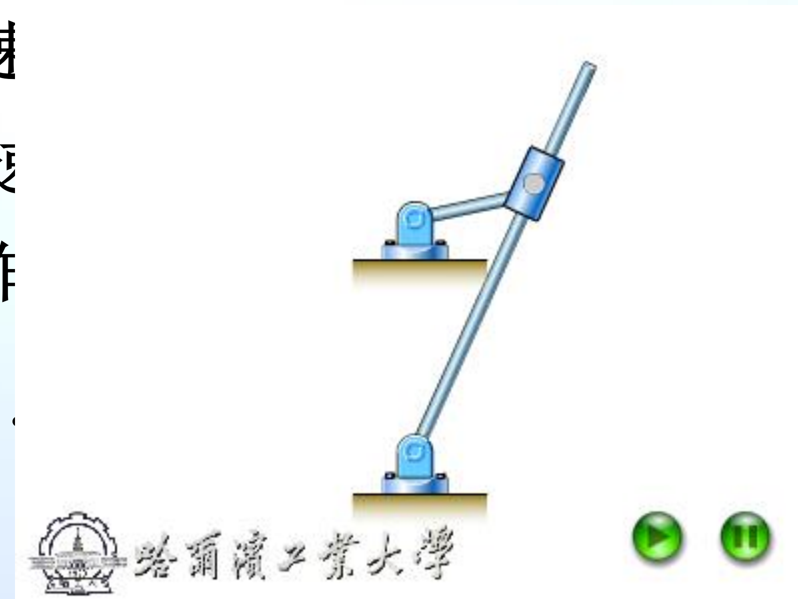
求：摆杆O_1B角速度ω_1

解：取套筒A点为动点，摆杆O_1B为动系，基座为定系。

绝对速度 $v_a = r\,\omega$　　方向⊥OA

相对速

牵连速



由速度合成定理 $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ 作

$$v_e = v_a \sin\varphi = r\omega\cdot$$

又$\because v_e = O_1A\cdot\omega_1$,

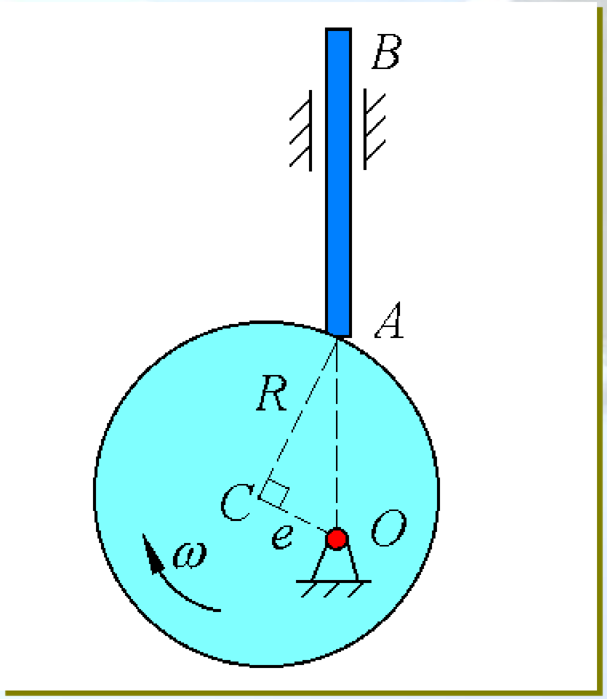
$$\therefore \omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{1}{\sqrt{r^2+l^2}}\cdot\frac{r^2\omega}{\sqrt{r^2+l^2}} = \frac{r^2\omega}{r^2+l^2}\ (\curvearrowleft)$$

[例2] 圆盘凸轮机构

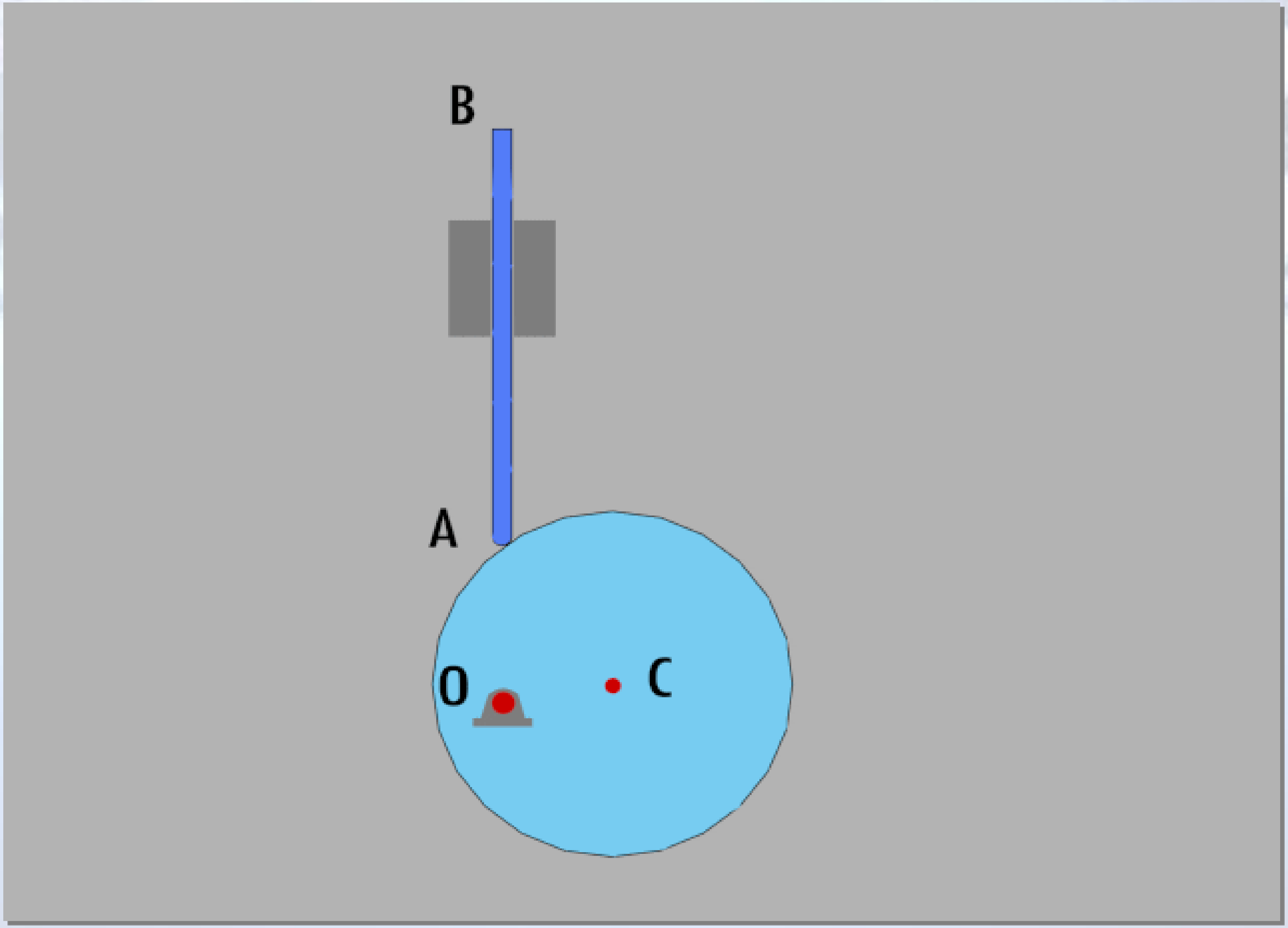
已知：$OC=e$，$R=\sqrt{3}e$，ω（匀角速度）

图示瞬时，$OC \perp CA$ 且 O、A、B三点共线。

求：从动杆AB的速度。



（翻页请看动画）



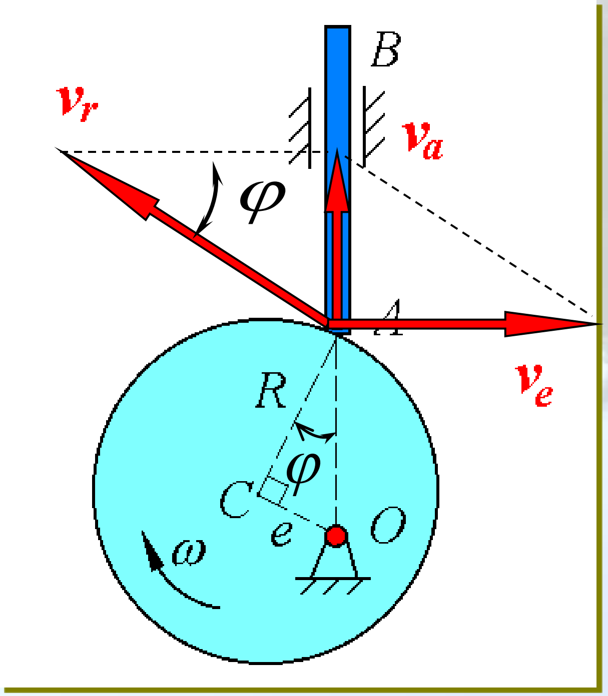
影片：811

[例2] 圆盘凸轮机构

已知：$OC=e$, $R=\sqrt{3}e$, ω（匀角速度）

图示瞬时, $OC \perp CA$ 且 O、A、B三点共线。

求：从动杆AB的速度。



解：动点取直杆上A点，动系固结于圆盘，

定系固结于基座。

绝对速度 $v_a=?$ 待求， 方向$//AB$

相对速度 $v_r=?$ 未知， 方向$\perp CA$

牵连速度 $v_e=OA\cdot\omega=2e\cdot\omega$ 方向$\perp OA$

由速度合成定理 $\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_e$

作出速度平行四边形 如图示。

$$\tan\varphi=\frac{e}{R}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$v_a=v_e\cdot\tan\varphi=\frac{(2e\omega)}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore v_{AB}=\frac{2}{\sqrt{3}}e\omega\ (\uparrow)$$

由上述例题可看出，求解合成运动的速度问题的一般步骤为:

(1) 选取动点，动系和定系;

(2) 三种运动的分析;

(3) 三种速度的分析;

(4) 根据速度合成定理$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$作出速度平行四边形;

(5) 根据速度平行四边形，求出未知量。

恰当地选择动点、动系和定系是求解合成运动问题的关键。

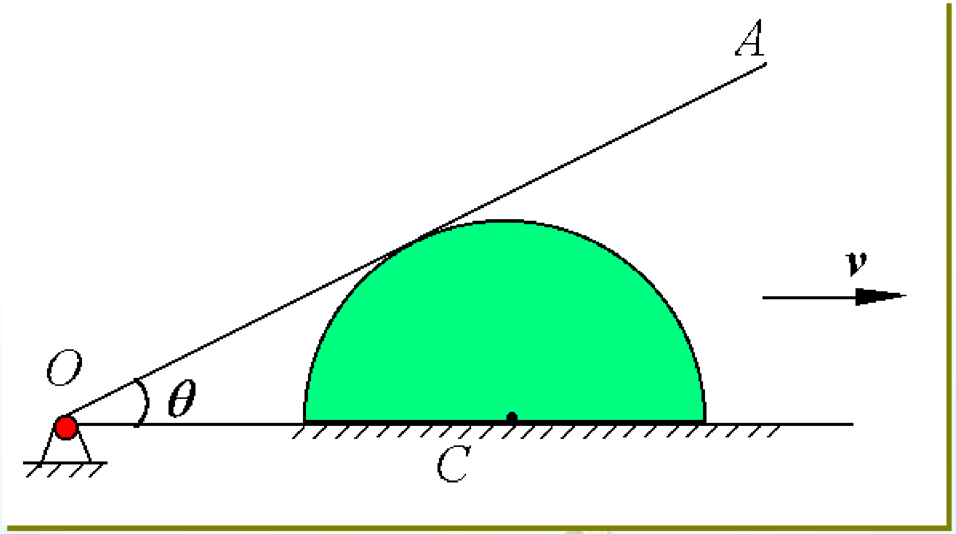
动点、动系和静系的选择原则

(1) 动点、动系和静系必须分别属于三个不同的物体，否则绝对、相对和牵连运动中就缺少一种运动，不能成为合成运动

(2) 动点相对动系的相对运动轨迹易于直观判断（已知绝对运动和牵连运动求解相对运动的问题除外）。

[例3] 已知: 凸轮半径r，图示时$\bar{v}$，$\theta=30°$，杆OA靠在凸轮上。

求：杆OA的角速度。



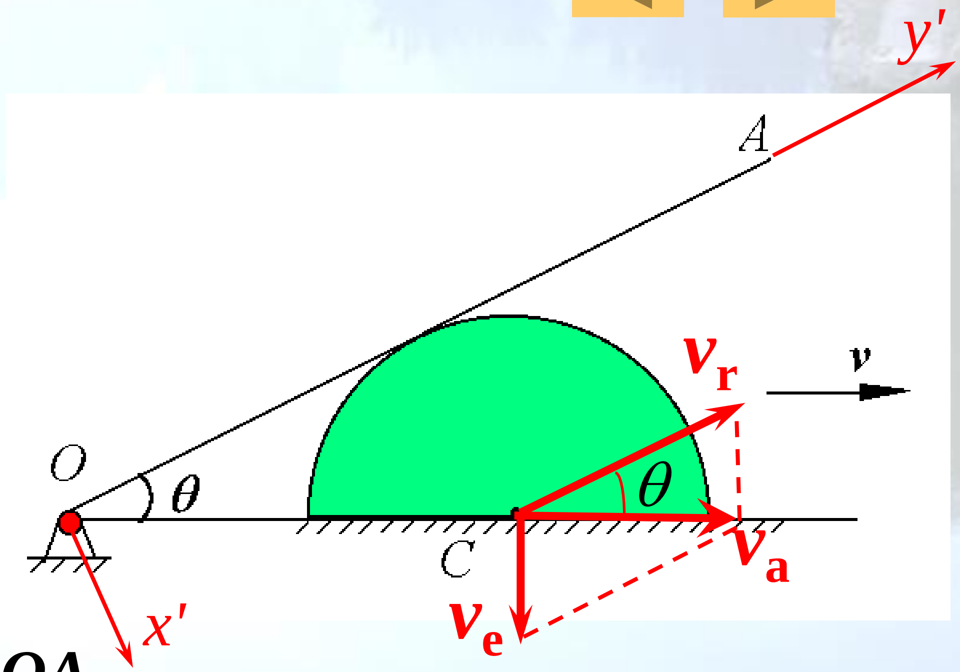
分析：相接触的两个物体的接触点位置都随时间而变化，因此两物体的接触点都不宜选为动点，否则相对运动的分析就会很困难。

这种情况下，需选择满足上述两条原则的非接触点为动点。

解: 取凸轮上C点为动点,

动系固结于OA杆上,

定系固结于基座。



绝对运动： 直线运动,

绝对速度：$v_a = v$, 方向→

相对运动：直线运动,

相对速度：v_r 未知, 方向// OA

牵连运动：定轴转动, 牵连速度：$v_e = OC \cdot \omega$ 未知, ω待求, 方向⊥OC

根据速度合成定理 $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$, 做出速度平行四边形 如图示。

$$v_e = v_a \cdot \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} v \ , \quad \text{又} v_e = OC \cdot \omega \ = \frac{r}{\sin\theta} \cdot \omega = 2r\omega,$$

$$\therefore \ \omega = \frac{v_e}{2r} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} v = \frac{\sqrt{3}v}{6r} \quad (\ \ )$$

§7-3　牵连运动是平动时点的加速度合成定理

牵连运动为平动时点的**加速度合成定理：**

当牵连运动为平动时，动点的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。

$$\bar{a}_{\mathrm{a}} = \bar{a}_{\mathrm{e}} + \bar{a}_{\mathrm{r}}$$

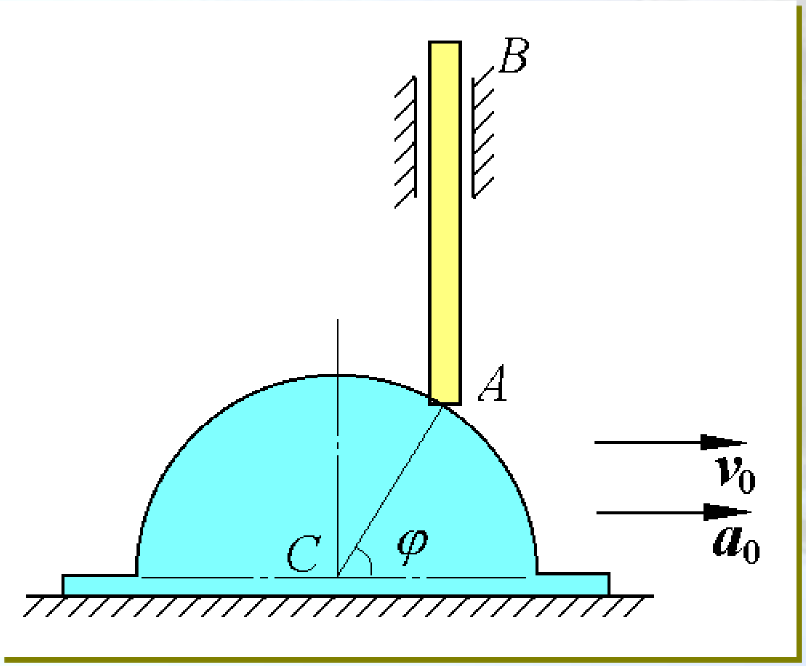
$$\because \ \bar{a} = \bar{a}^{\mathrm{t}} + \bar{a}^{\mathrm{n}}$$

∴一般式可写为 $\boxed{\bar{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} + \bar{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} = \bar{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \bar{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}} + \bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}}$

牵连运动为平动时点的加速度合成定理是瞬时矢量式，共包括大小、方向12个元素，已知任意10个元素，就能求出其他两个。

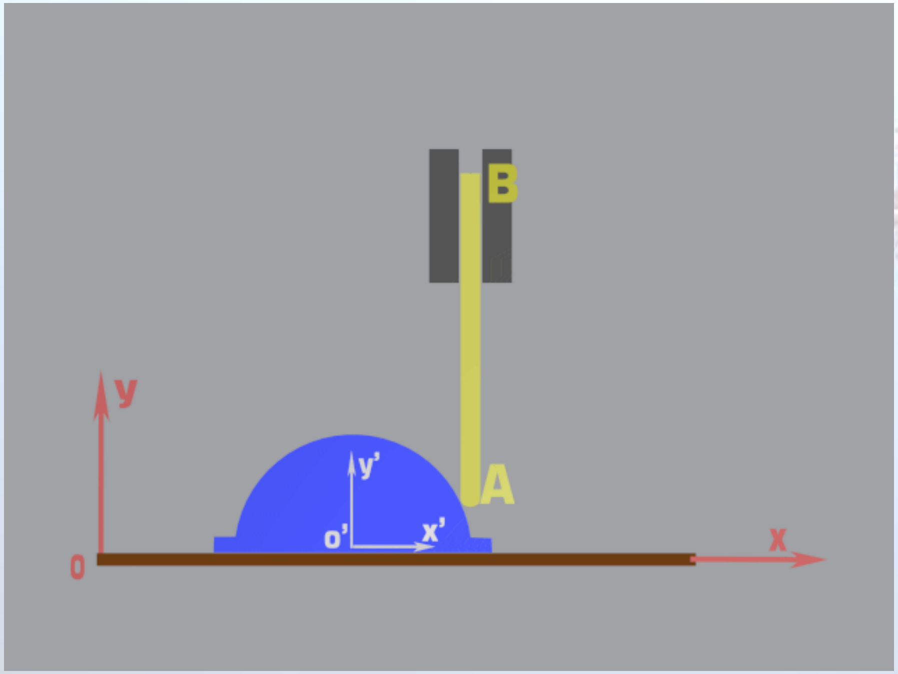
[例4] 已知：凸轮半径 $R,\bar{v}_0,\bar{a}_0$

求：$\varphi=60^{\circ}$时，顶杆*AB*的加速度。



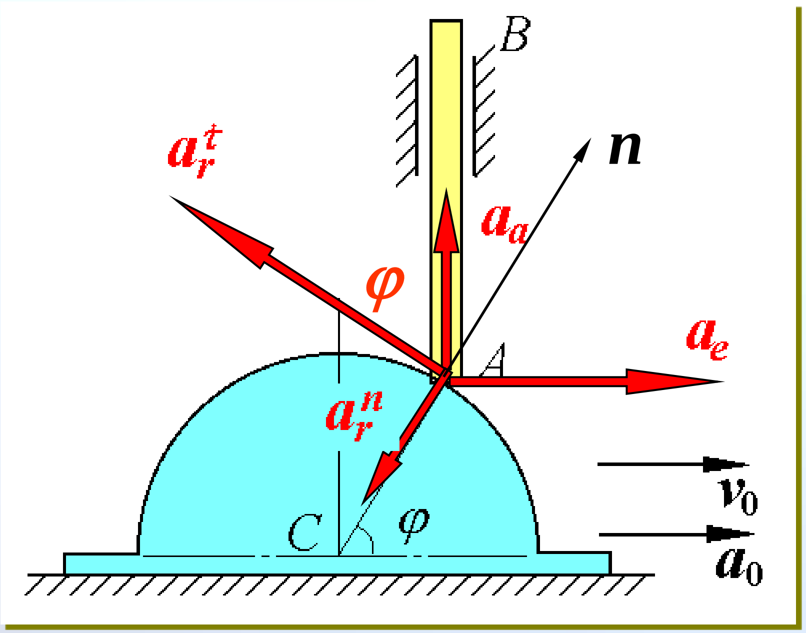
分析：取杆上的*A*点为动点，
动系与凸轮固连。

影片：801



请看动画

绝对加速度	a_a=? , 待求量。	方向∥*AB*，
相对加速度	a_r^t=?	方向⊥*CA*
	$a_r^n = v_r^2 / R$	方向沿*CA*指向*C*
牵连加速度	$a_e = a_0$,	方向水平向右



因牵连运动为平动，故有

$$\underset{?}{\bar{a}_{\mathrm{a}}} = \underset{\surd}{\bar{a}_{\mathrm{e}}} + \underset{?}{\bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}} + \underset{?}{\bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}}$$

将上式投影到法线 *n* 上，得

$$a_{\mathrm{a}} \sin\varphi = a_{\mathrm{e}} \cos\varphi - a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}$$

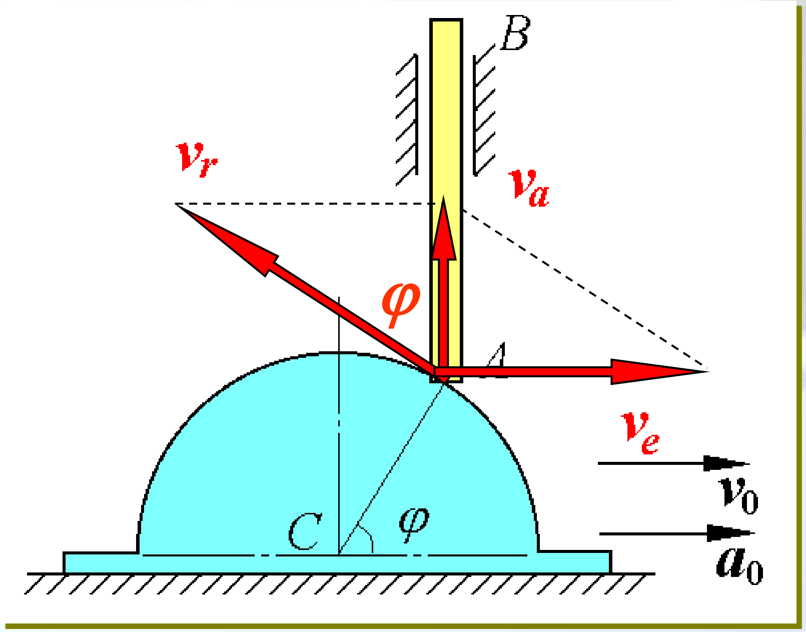
因此，必须先求得 $a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}$

解：取杆上的A点为动点，
动系与凸轮固连。

绝对速度v_a = ? , 方向∥AB ;

相对速度v_r = ? , 方向⊥CA;

牵连速度v_e=v_0 , 方向 → ;



由速度合成定理：$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$，

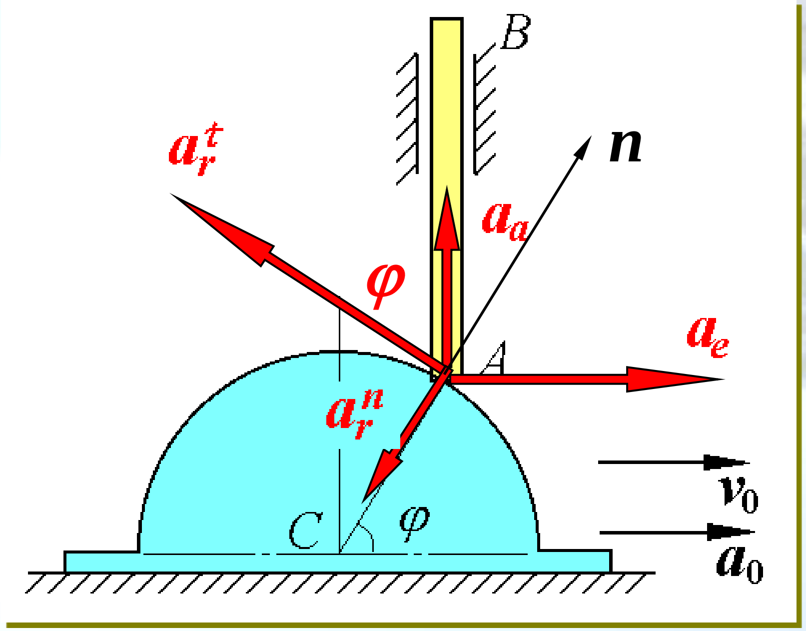
做出速度平行四边形,如图示。

$$v_r = \frac{v_e}{\sin\varphi} = \frac{v_0}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}} v_0$$

加速度分析如图：

因牵连运动为平动，故有

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r^t + \bar{a}_r^n$$



将上式投影到法线 n上，得

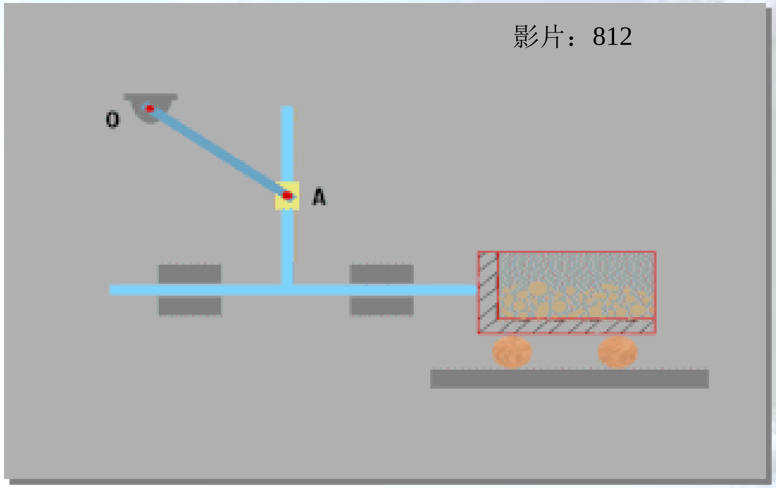
$$a_a \sin\varphi = a_e \cos\varphi - a_r^n$$

其中：$a_r^n = \dfrac{v_r^2}{R} = (\dfrac{2}{\sqrt{3}} v_0)^2 / R = \dfrac{4v_0^2}{3R}$

$$\therefore\ a_a = (a_e \cos\varphi - a_r^n)/\sin\varphi = (a_0 \cos 60^\circ - \frac{4v_0^2}{3R})/\sin 60^\circ$$

整理得 $a_{AB} = a_a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(a_0 - \dfrac{8}{3}\dfrac{v_0^2}{R})$

[例5] 曲柄滑杆机构



已知：曲柄$OA=l$，$\varphi=45^{\circ}$时，角速度ω、角加速度α

求：小车的速度与加速度。

解：动点：OA杆上 A点(套筒)；

动系：固结在小车上；

定系：固结在机架上。

请看动画

绝对运动：圆周运动，$v_a = l\omega$ (方向⊥OA)

$a_a^t = l\alpha$ (方向⊥OA)，$a_a^n = l\omega^2$ (沿AO指向O)

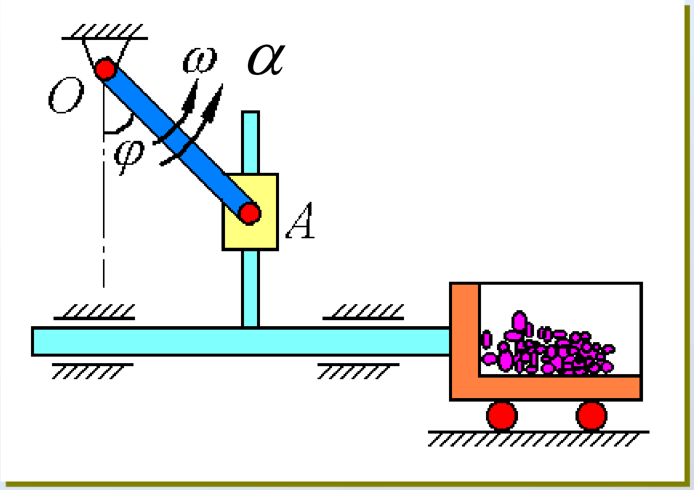
相对运动：直线运动，

$v_r = ?\quad a_r = ?$ 铅直方向

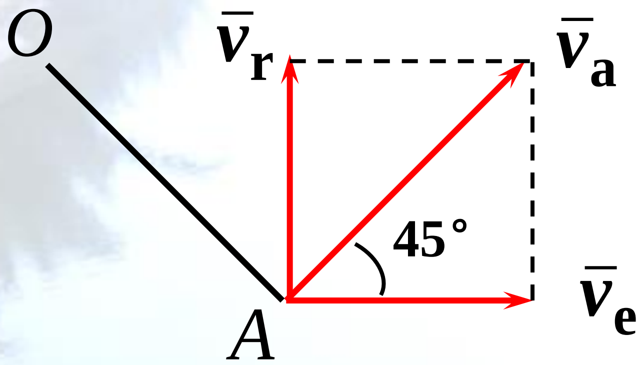
牵连运动：平动；

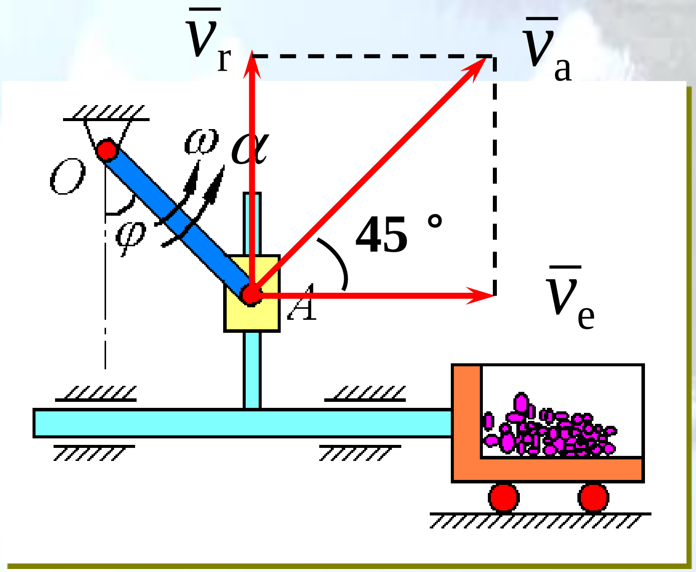
$v_e = ?\quad a_e = ?$

待求量，方向水平



根据分析作速度图



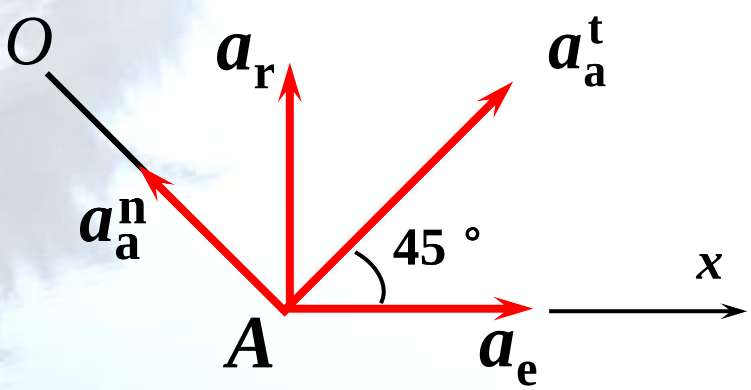


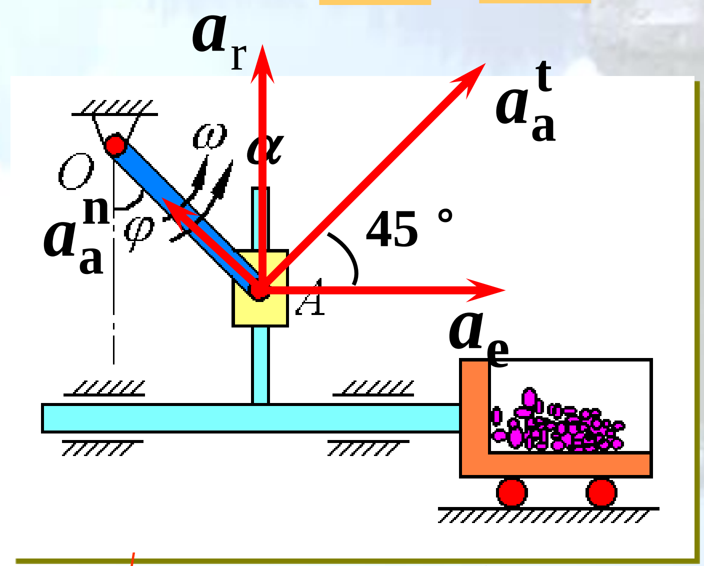
$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$$

$$v_e = v_a \cos 45° = l\omega \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} l\omega \quad (\rightarrow)$$

小车的速度: $\bar{v} = \bar{v}_e = \dfrac{\sqrt{2}}{2} l\omega \ (\rightarrow)$

根据分析作加速度图





根据牵连平动的加速度合成定理 $\overset{\surd}{\bar{a}_a^t}+\overset{\surd}{\bar{a}_a^n}=\overset{?}{\bar{a}_e}+\overset{?}{\bar{a}_r}$

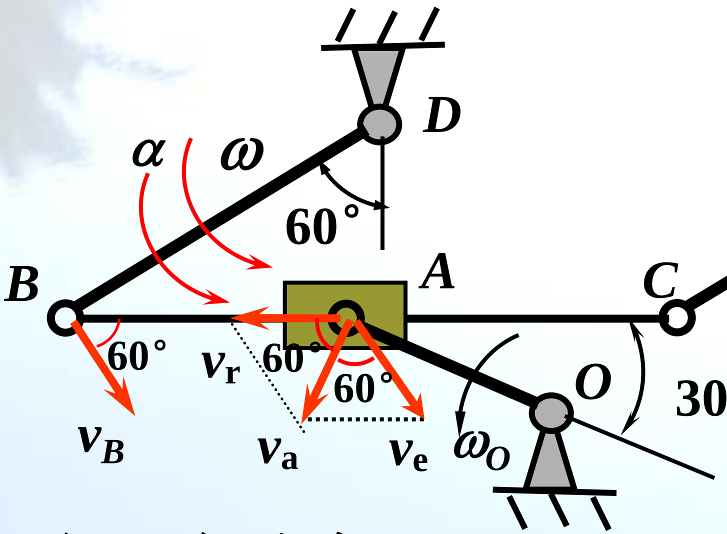
在x轴上投影：$a_a^t\cos 45° - a_a^n \sin 45° = a_e$

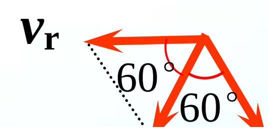
其中：$a_a^t = l\alpha$ ， $a_a^n = l\omega^2$

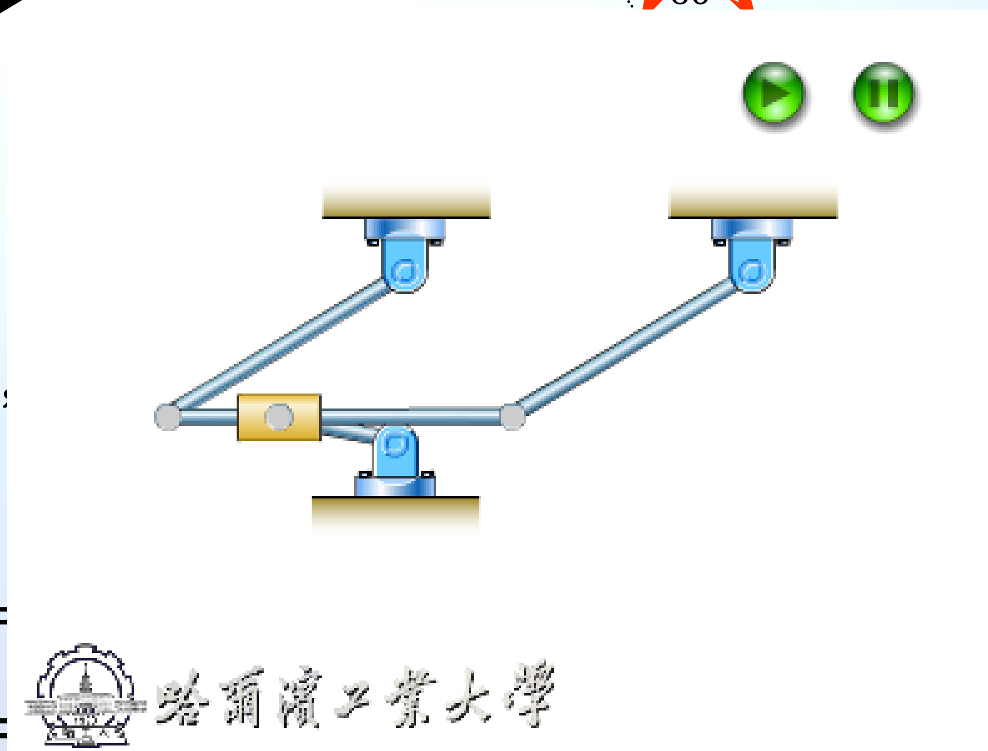
$\therefore a_e = l\alpha\cos 45^\circ - l\omega^2 \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-\omega^2)l$ 方向如图示

小车的加速度：$\bar{a} = \bar{a}_e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\alpha-\omega^2)l$

[例7-9] (P181) 曲柄$OA= r$，以匀角速度ω_o转动，$BC=DE$，$BD=CE=l$。求图示位置时，杆BD的角速度和角加速度。







解：角速度

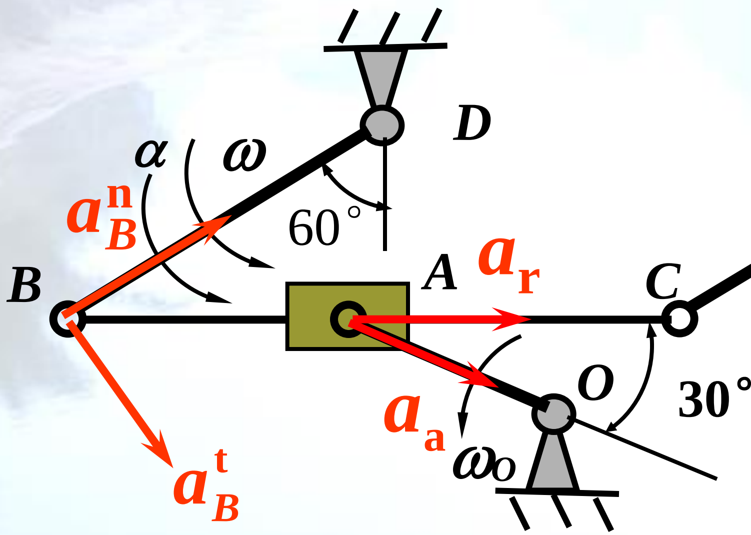
$DBCE$为平行四边形，

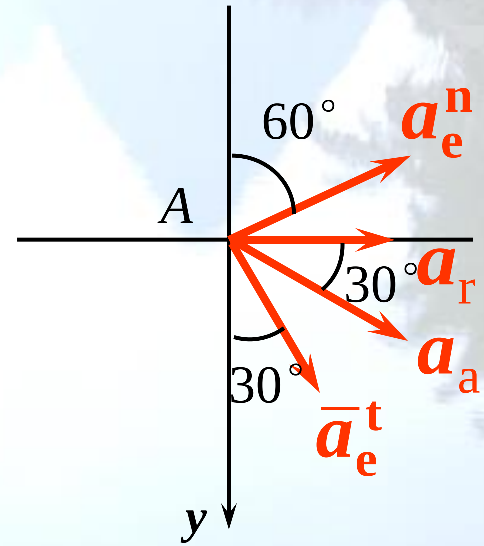
动系固结在BC杆上，

绝对速度: $v_a=r\omega_O$

$v_e= v_r =$

$v_B=v_e=$





角加速度：

*A*点绝对运动作匀速圆周运动；相对运动为直线运动；

*B*点作圆周运动。其加速度方向如图；

$$\bar a_a = \bar a_e + \bar a_r$$

或：$\bar a_a = \bar a_e^t + \bar a_e^n + \bar a_r \cdots\cdots (1)$

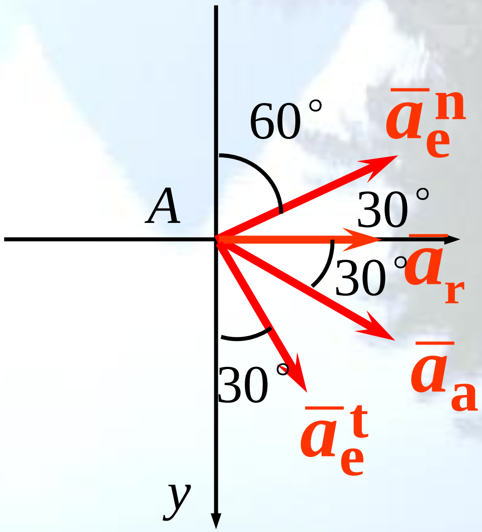
√ ？ √ ？

其中：$a_a = \omega_O^2 r$ $\quad a_e^n = \omega^2 l = \dfrac{\omega_O^2 r^2}{l}$

将 $\bar a_a = \bar a_e^t + \bar a_e^n + \bar a_r$ 在*y*轴上投影

$$\alpha = \frac{a_B^t}{l} = \frac{a_e^t}{l}$$

将 $\bar{a}_{\mathrm{a}} = \bar{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \bar{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \bar{a}_{\mathrm{r}}$ 在y轴上投影：



$$a_{\mathrm{a}} \sin 30° = a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} \cos 30° - a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} \sin 30°$$

$$\therefore\ a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} = \frac{(a_{\mathrm{a}} + a_{\mathrm{e}}^{n}) \sin 30°}{\cos 30°}$$

$$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} = \frac{\sqrt{3}\omega_o^2 r(l+r)}{3l}$$ （隐含正号，方向假设正确）

BD杆的角加速度：$\alpha = \dfrac{a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}}{l} = \dfrac{\sqrt{3}\omega_o^2 r(l+r)}{3l^2}$

[例6]　　曲柄$OA=R=10\text{cm}$，以匀角速度$\omega=4\pi$ rad/s 转动，求θ=30°时BC的速度和加速度。

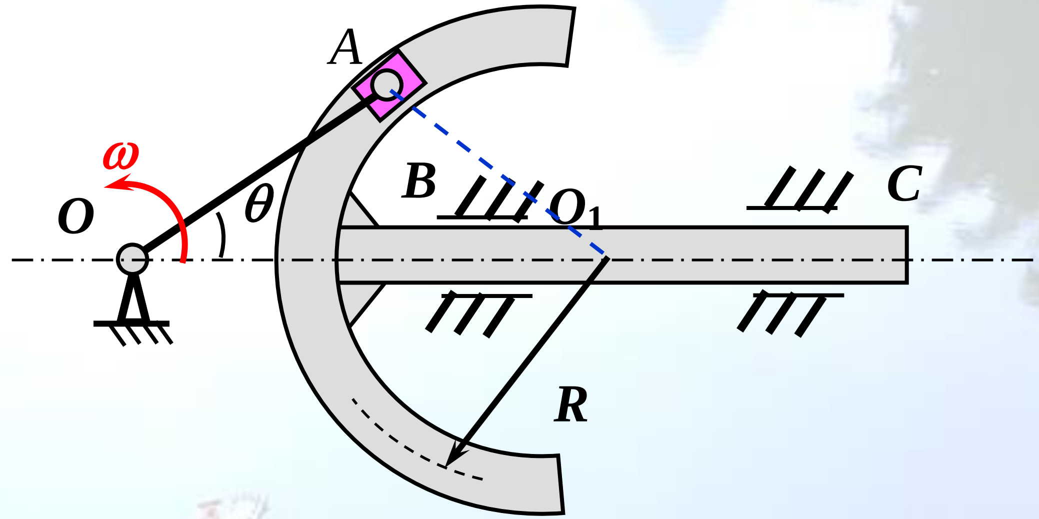
解：动点——滑块A

动系固结于BC

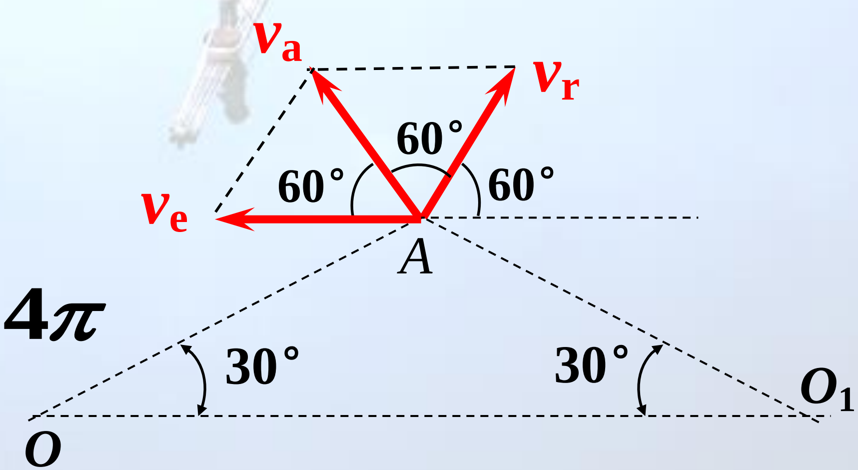
绝对运动：

牵连运动：

相对运动：



(1)速度分析图：

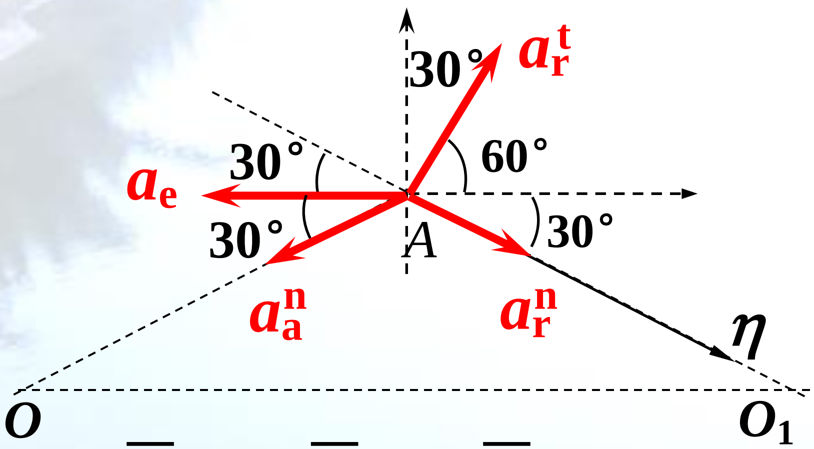


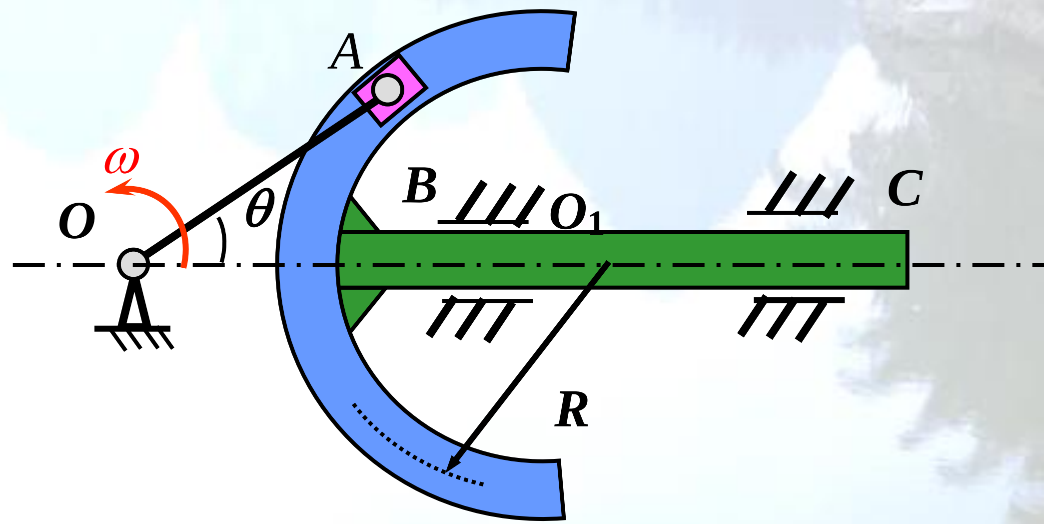
$$\therefore v_a = v_r = v_e$$

$$= OA \cdot \omega = 10 \times 4\pi$$

$$= 1.256\text{m/s}$$

(2)加速度分析图





$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e$$

$$\bar{a}_a^n = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^t + \bar{a}_e \text{ - - - - - - } (1)$$

√ √ ? ?

$$a_a^n = OA \cdot \omega^2 = 15.77 \text{m/s}^2$$

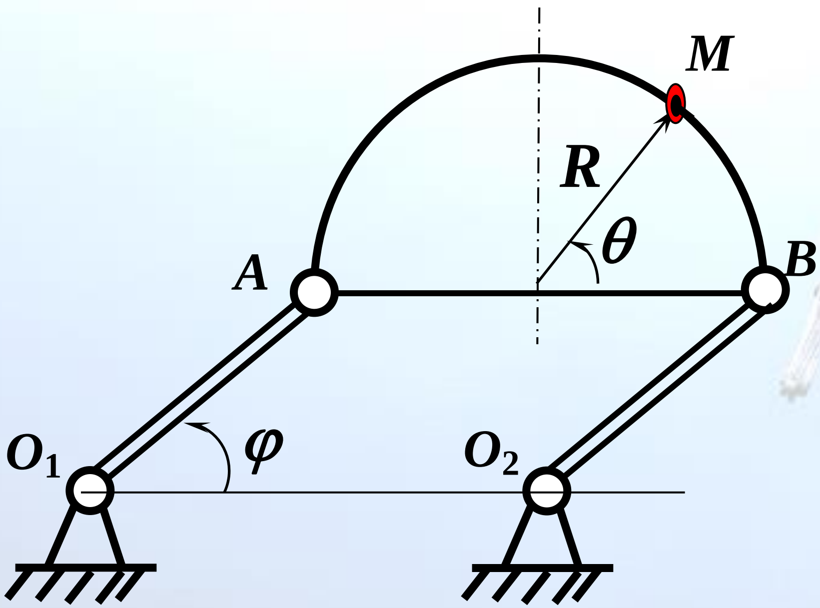
$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = 15.77 \text{m/s}^2$$

将(1)式在η轴上投影：

$$-a_a^n \cos 60^\circ = a_r^n - a_e \cos 30^\circ$$

$$\therefore \quad a_e = 27.3 \text{ m/s}^2$$

［例］已知平面平行四边形机构，曲柄O_1A的转动方程为$\varphi=\dfrac{\pi t}{18}$（rad），动点$M$沿圆弧运动，$B$为起点，$R$=18cm，运动规律为$s=\pi t^2$ cm，求：t=3s时动点M的绝对速度和绝对加速度。

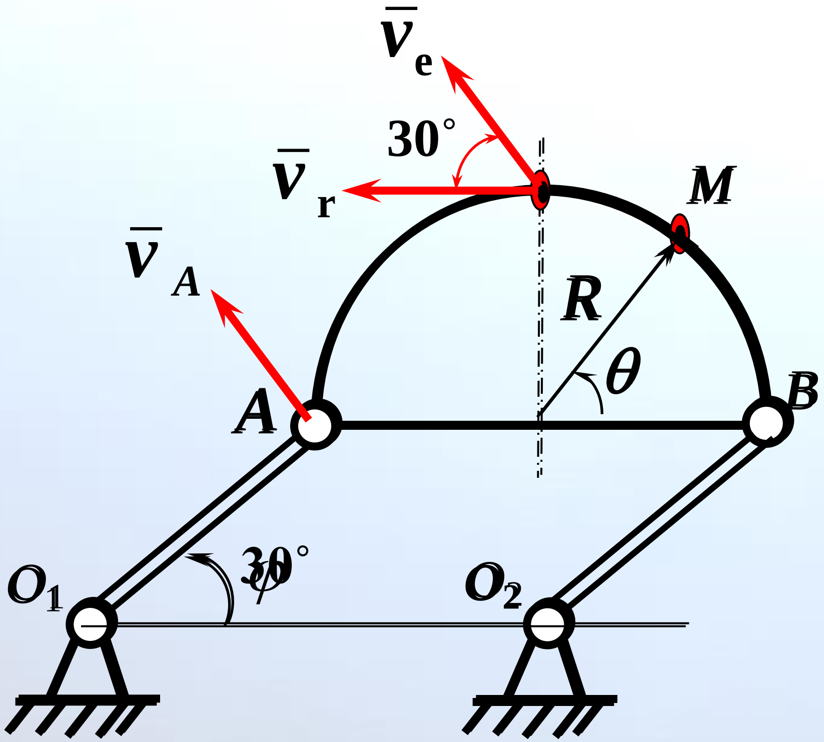


解：t =3s 时，$s=9\pi$ cm

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{\pi}{2}$$

$$t=3\text{s}\,,\varphi=\frac{\pi}{6}$$

［例］已知平面平行四边形机构，曲柄O_1A的转动方程为$\varphi=\dfrac{\pi t}{18}$（rad），动点$M$沿圆弧运动，$B$为起点，$R$=18cm，运动规律为$s=\pi t^2$ cm，求：t=3s时动点M的绝对速度和绝对加速度。



解：t =3s 时，$s=9\pi$ cm

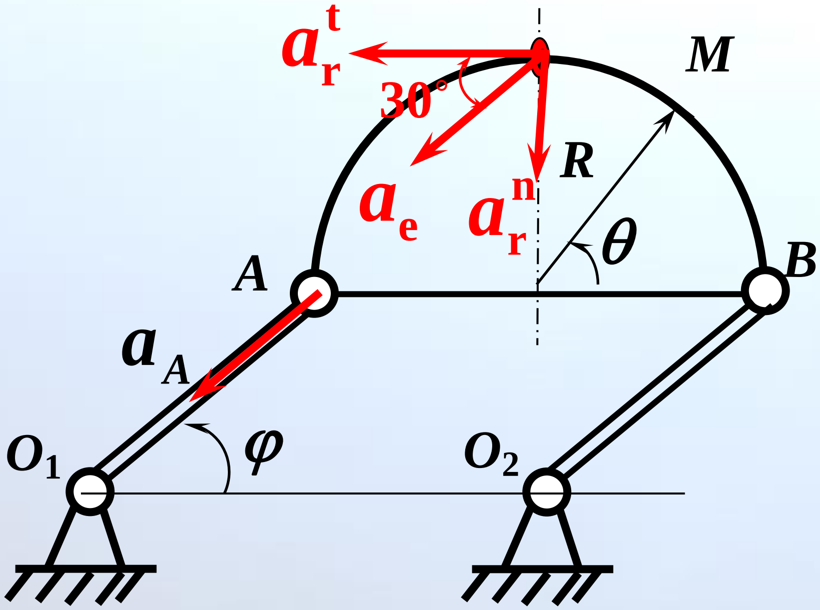
$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{\pi}{2}$$

$$t=3\text{s}\,,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$$

$$\bar{v}_M=\bar{v}_e+\bar{v}_r$$

$$\bar{v}_x+\bar{v}_y=\bar{v}_e+\bar{v}_r$$

［例］已知平面平行四边形机构，曲柄O_1A的转动方程为$\varphi=\dfrac{\pi t}{18}$（rad），动点$M$沿圆弧运动，$B$为起点， R=18cm，运动规律为$s=\pi t^2$ cm，求：t=3s时动点M的绝对速度和绝对加速度。



$$\bar{a}=\bar{a}_r^n+\bar{a}_r^t+\bar{a}_e$$

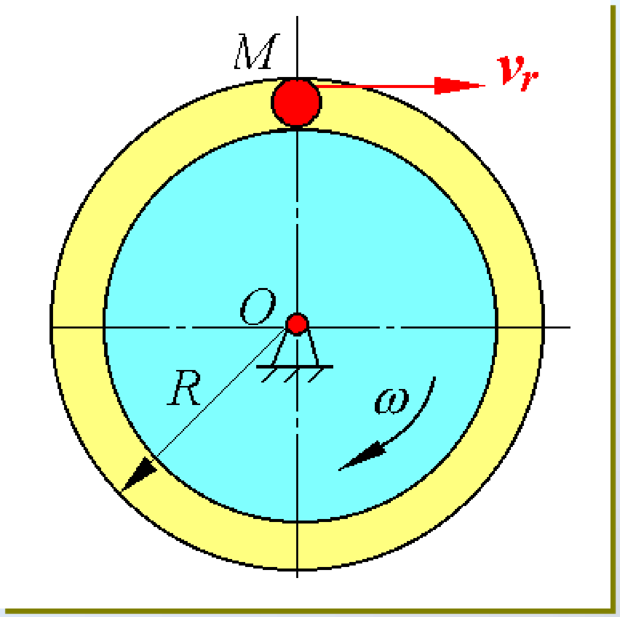
$$\bar{a}_x+\bar{a}_y=\bar{a}_r^n+\bar{a}_r^t+\bar{a}_e$$

§7-4　牵连运动是转动时点的加速度合成定理

上一节我们介绍了牵连运动为平动时的点的加速度合成定理，那么当牵连运动为转动时，$\bar{a}_{\mathrm{a}}=\bar{a}_{\mathrm{e}}+\bar{a}_{\mathrm{r}}$ 是否还适用呢？

下面我们来分析一特例：

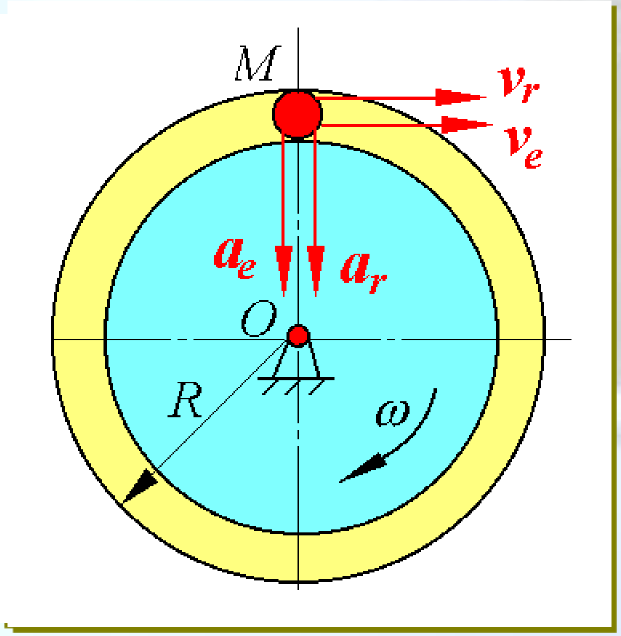
设一圆盘以匀角速度ω绕定轴 O顺时针转动，盘上圆槽内有一点M以大小不变的速度 v_{r}沿槽作圆周运动，那么M点相对于静系的绝对加速度应是多少呢？



选点M为动点，动系固结与圆盘上，

则M点的牵连运动为匀速转动

$v_e = R\omega$, $\boxed{a_e = R\omega^2}$ （方向如图）



相对运动为匀速圆周运动，

$v_r =$常数， $\boxed{a_r = \frac{v_r^2}{R}}$ （方向如图）

由速度合成定理可得出

$$v_a = v_e + v_r = \omega R + v_r = \text{常数}$$

即绝对运动也为匀速圆周运动，所以

$$a_a = \frac{v_a^2}{R} = \frac{(R\omega + v_r)^2}{R} = \boxed{R\omega^2} + \boxed{\frac{v_r^2}{R}} + 2\omega v_r$$ 方向指向圆心 O 点

$$\bar{a}_a \overset{?}{=} \bar{a}_e + \bar{a}_r$$

$$a_{\mathrm{a}}=\frac{v_{\mathrm{a}}^{2}}{R}=\frac{(R\omega+v_{\mathrm{r}})^{2}}{R}=\boxed{R\omega^{2}}+\boxed{\frac{v_{\mathrm{r}}^{2}}{R}}+2\omega v_{\mathrm{r}}$$

分析上式：$a_{\mathrm{r}}=\dfrac{v_{\mathrm{r}}^{2}}{R}$，$a_{\mathrm{e}}=R\omega^{2}$，多出一项$2\omega v_{\mathrm{r}}$。

可见，当牵连运动为转动时，动点的绝对加速度 $\bar{a}_{\mathrm{a}}$ 并不等于 牵连加 速度 $\bar{a}_{\mathrm{e}}$ 和相对加速度 $\bar{a}_{\mathrm{r}}$ 的矢量和。

所以，当牵连运动为转动时，加速度合成定理为

$$\boxed{\bar{a}_{\mathrm{a}}=\bar{a}_{\mathrm{e}}+\bar{a}_{\mathrm{r}}+\bar{a}_{\mathrm{C}}}$$

$$\boxed{\bar{a}_{\mathrm{C}}=2\bar{\omega}\times\bar{v}_{\mathrm{r}}}$$

$\bar{a}_{\mathrm{C}}$ 称为科利奥里加速度，简称科氏加速度。

一般式 $$\boxed{\bar{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}+\bar{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}=\bar{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}+\bar{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}+\bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}+\bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}+\bar{a}_{\mathrm{C}}}$$

$$\boxed{\bar{a}_{\mathrm{C}}=2\bar{\omega}\times\bar{v}_{\mathrm{r}}}$$

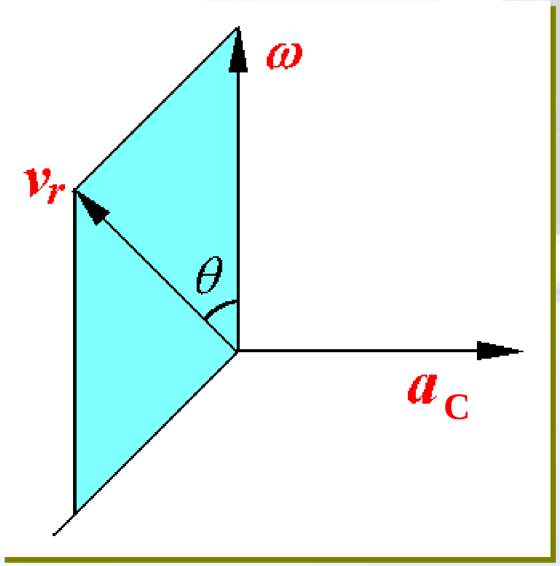
$\bar{a}_C$的大小和方向

大小：$a_C = 2\omega v_r \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r)$

方向：按右手法则确定。

当$\theta = 90^\circ$时$(\bar{\omega} \perp \bar{v}_r)$，$a_C = 2\omega v_r$

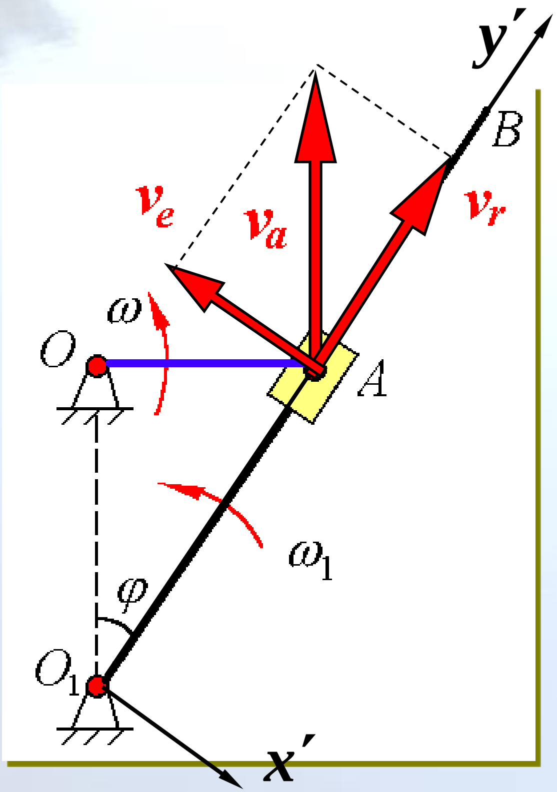
当$\theta = 0^\circ$或180°时$(\bar{\omega} // \bar{v}_r)$，$a_C = 0$



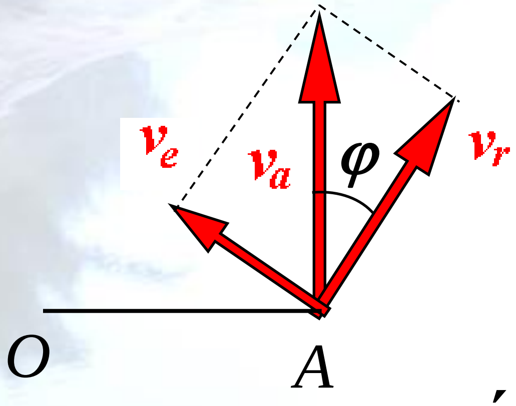
[例7-11]（PP185-186）

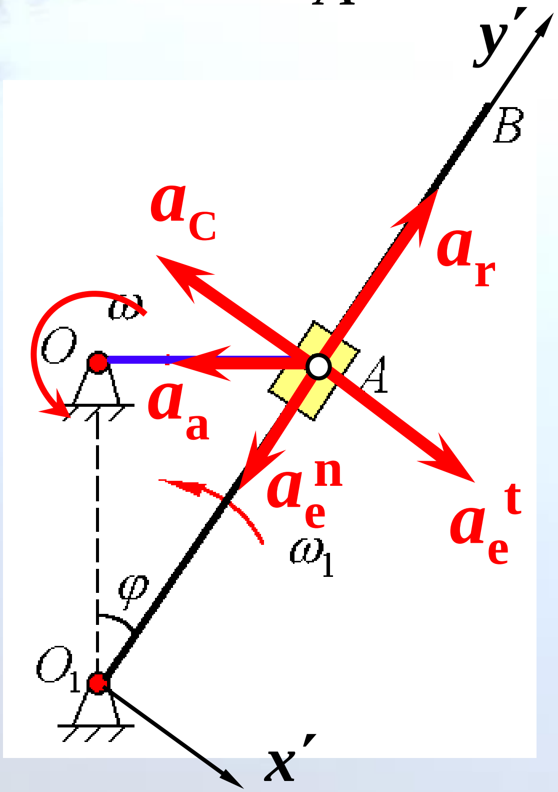
求例7-4中摆杆O_1B在图示位置时的角加速度

已知：$OA=r$, ω, $OO_1=l$，图示瞬时$OA\perp OO_1$



分析：取套筒A点为动点，摆杆O_1B为动系，基座为定系。





分析：取套筒A点为动点，摆杆O_1B为动系， 基座为定系。

$$\overset{\surd}{\bar{a}_a} = \overset{?}{\bar{a}_e^t} + \cancel{\bar{a}_e^n} + \overset{?}{\bar{a}_r} + \bar{a}_c$$

在 x'方向投影

$$-a_a \cos\varphi = a_e^t - a_C$$

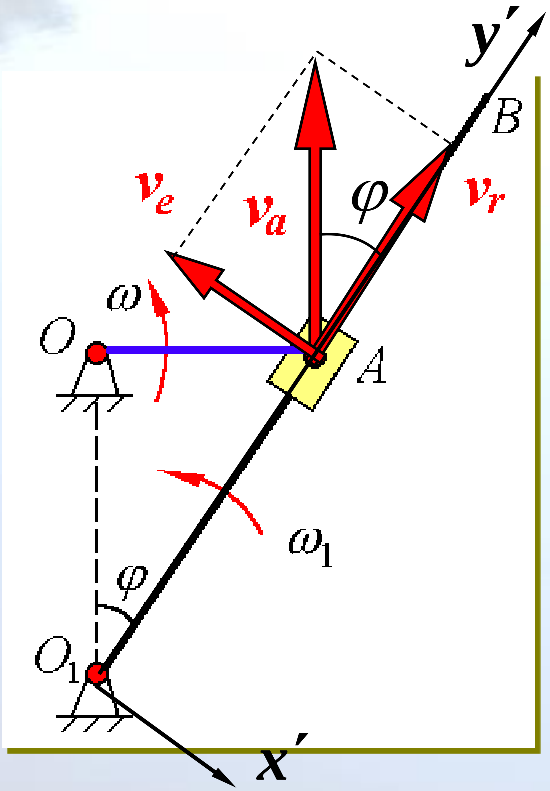
绝对加速度 $a_a = r\,\omega^2$

科氏加速度$a_C = 2\,\omega_1 v_r$?

[例7-11]（P186）

求例7-4中摆杆O_1B在图示位置时的角加速度

已知：$OA=r$，ω，$OO_1=l$，图示瞬时$OA\perp OO_1$



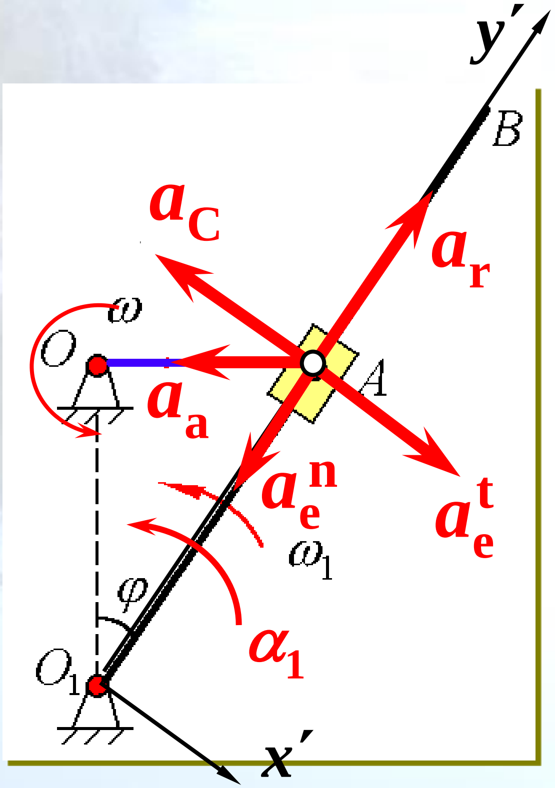
解：取套筒A点为动点，摆杆O_1B为动系，基座为定系。

$$v_a = r\,\omega$$

$$v_r = v_a\cos\varphi = r\omega\frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

$$v_e = v_a\sin\varphi = r\omega\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

$$\therefore \omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{r^2\omega}{r^2+l^2}$$



$$\boxed{a_e^t = O_1A \cdot \alpha_1}$$

$$\overset{\surd}{\bar{a}_a} = \overset{?}{\bar{a}_e^t} + \bar{a}_e^n + \overset{?}{\bar{a}_r} + \bar{a}_C$$

$$-a_a \cos\varphi = a_e^t - a_C$$

科氏加速度$a_C = 2\,\omega_1 v_r$

绝对加速度 $a_a = r\,\omega^2$

$$a_e^t = a_C - a_a \cos\varphi$$

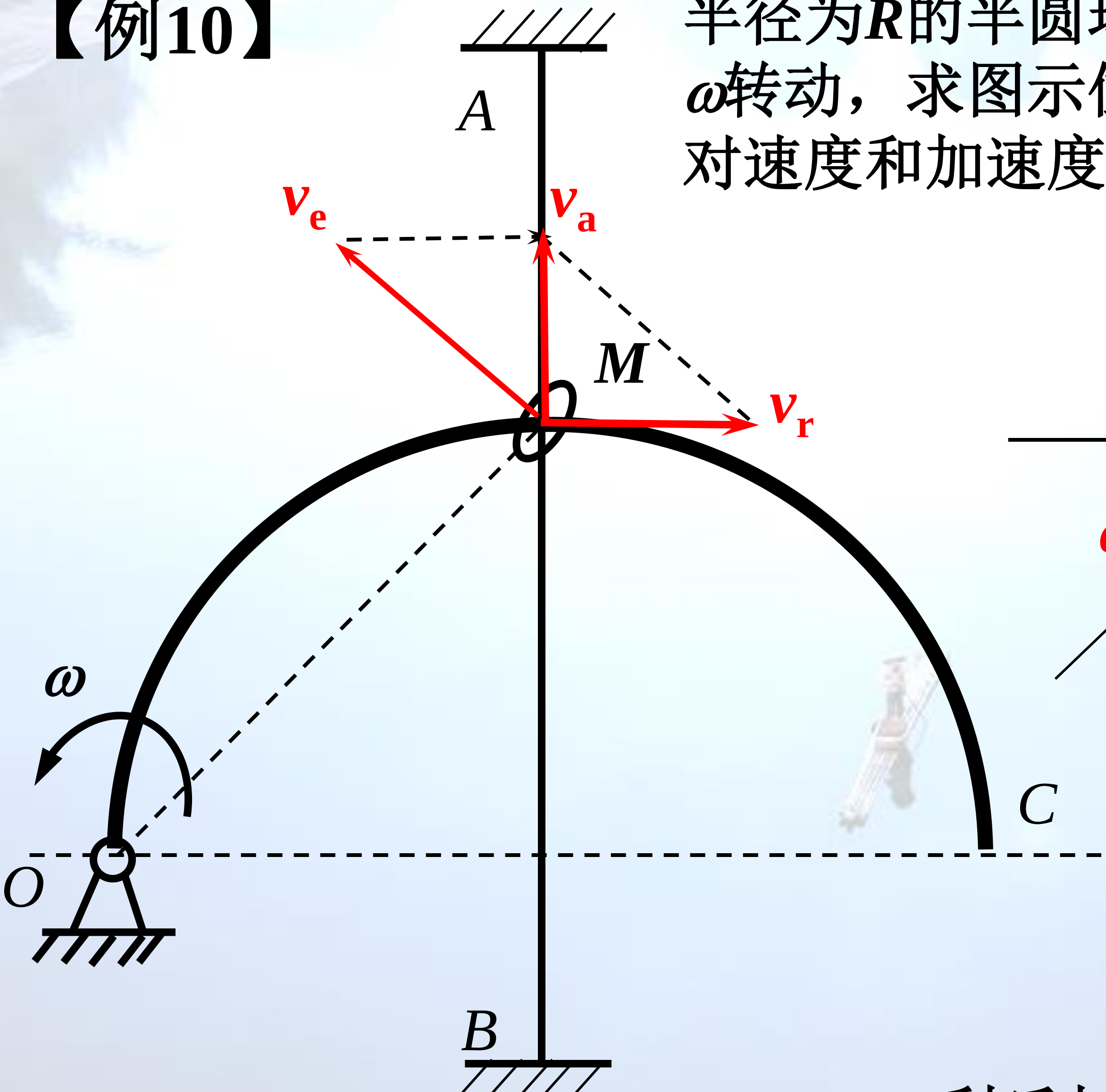
$$= -\omega^2 \cdot \frac{rl(l^2 - r^2)}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

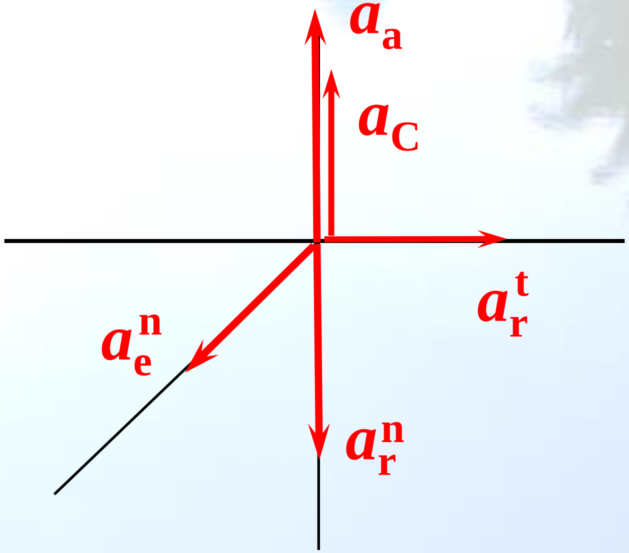
负号表示真实方向与假设方向相反

$$\therefore \alpha_1 = \frac{a_e^t}{O_1A} = \omega^2 \cdot \frac{rl(l^2 - r^2)}{(r^2 + l^2)^2} \quad (\curvearrowleft)$$

【例10】

半径为R的半圆环OC，以匀角速度ω转动，求图示位置时小环M的绝对速度和加速度的大小。



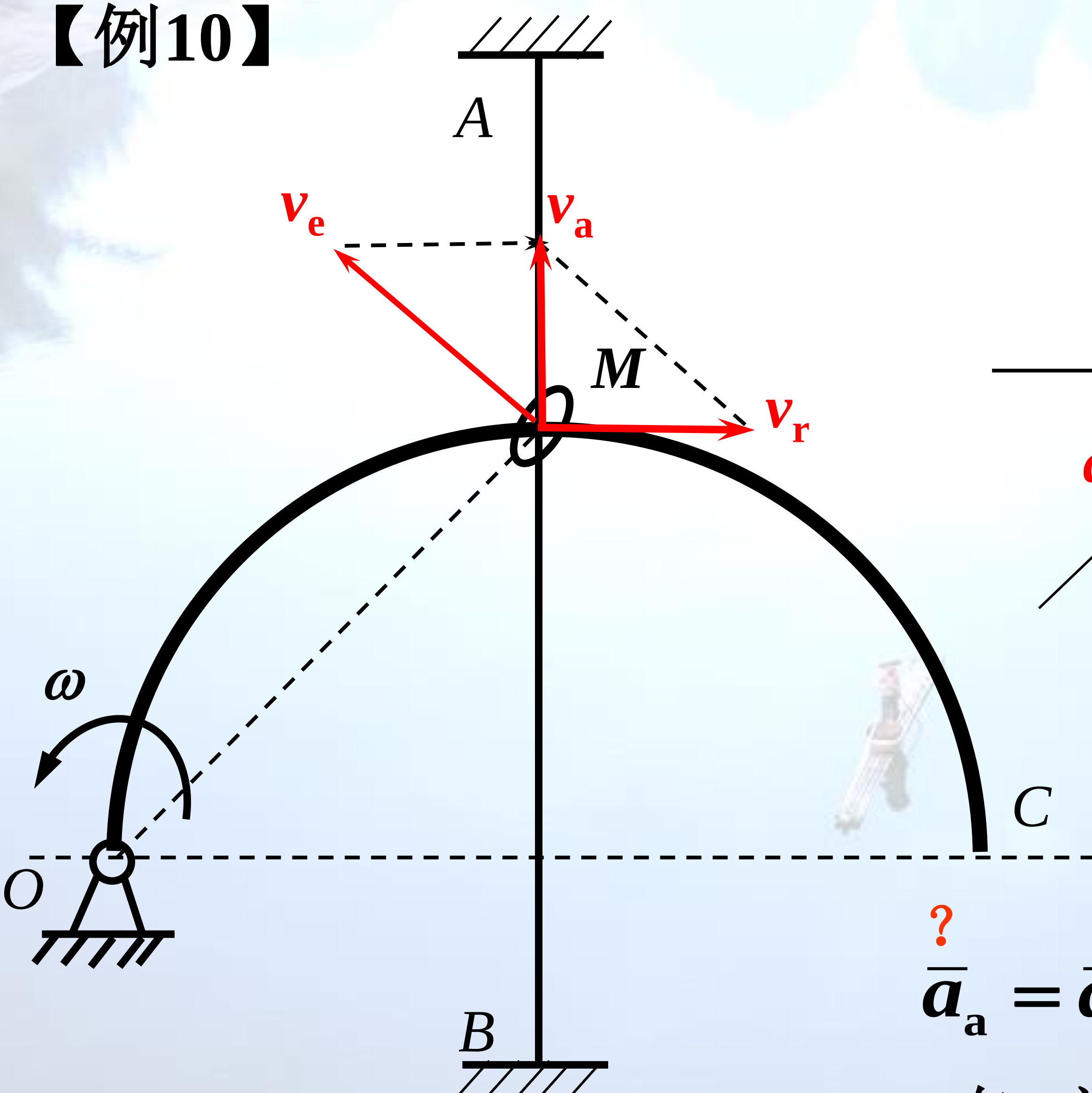


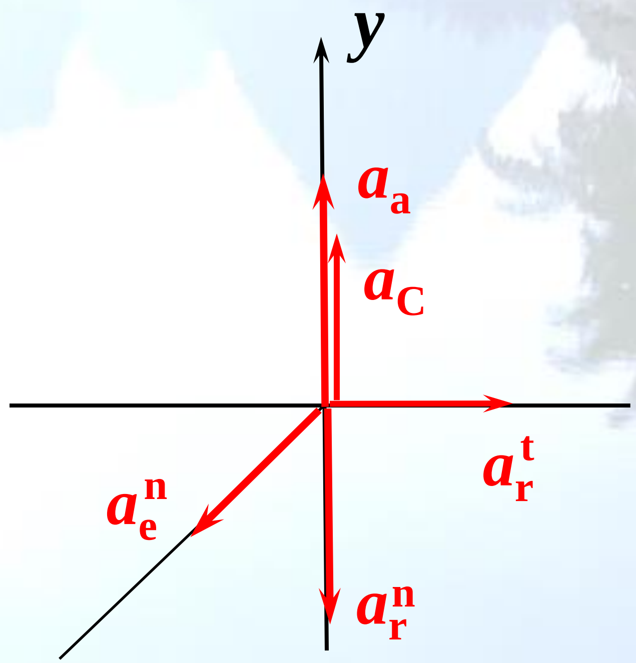
$$v_e = OM \cdot \omega$$

$$v_a = v_r = \frac{v_e}{\sqrt{2}}$$

科氏加速度 $a_C = 2\,\omega\, v_r$

【例10】



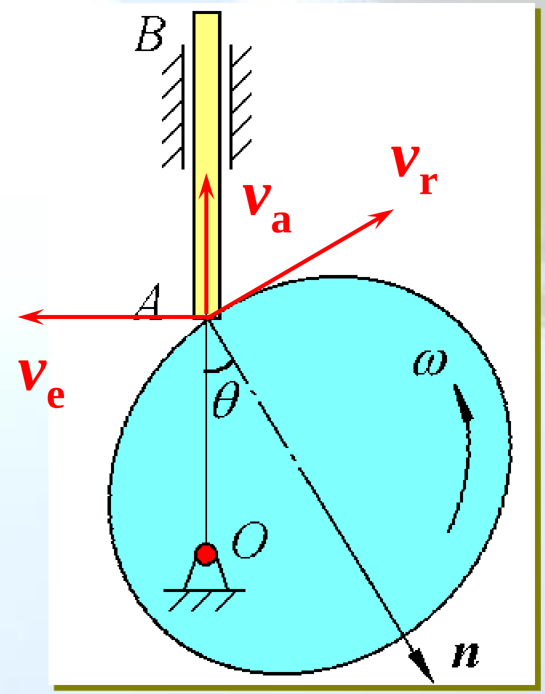


$$a_C = 2\,\omega v_r$$

$$\overset{?}{\bar{a}_a} = \overset{\surd}{\bar{a}_e^n} + \overset{\surd}{\bar{a}_r^n} + \overset{?}{\bar{a}_r^t} + \overset{\surd}{\bar{a}_C}$$

在 y方向投影

[例7-12](P187) 已知：凸轮机构以匀 ω 绕O轴转动，图示瞬时$OA= l$，A点曲率半径ρ_A , θ 已知。求：该瞬时顶杆 AB的速度和加速度。



解: 动点：顶杆上A点；

动系：凸轮；

静系：地面。

绝对运动: 直线;

绝对速度: v_a=? 待求, 方向//AB;

相对运动: 曲线;

相对速度: v_r=? 方向⊥n;

牵连运动: 定轴转动;

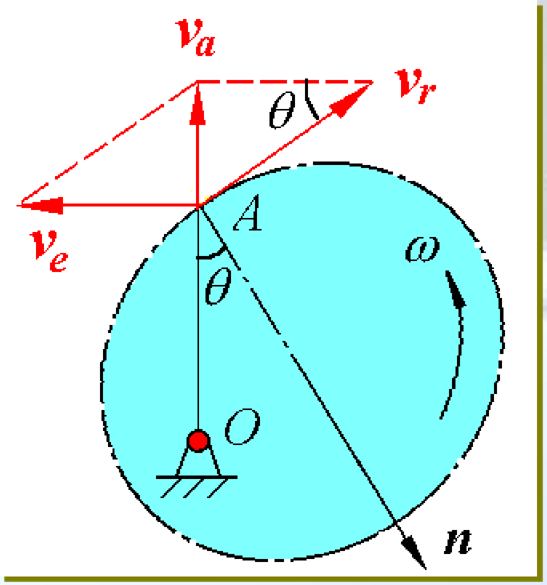
牵连速度: $v_e= l\omega$ ， 方向⊥OA,

根据速度合成定理 $\bar{v}_{\mathrm{a}} = \bar{v}_{\mathrm{e}} + \bar{v}_{\mathrm{r}}$

做出速度平行四边形

$$v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{e}} \cdot \tan\theta = l\omega \cdot \tan\theta$$

$$v_{\mathrm{r}} = \frac{v_{\mathrm{e}}}{\cos\theta} = \frac{l\omega}{\cos\theta}$$



$$v_{\mathrm{e}} = l\omega$$

作加速度矢量图

绝对加速度: $a_a = ?$, 方向 // AB

相对加速度: $a_r^n = \dfrac{v_r^2}{\rho_A} = \dfrac{\omega^2 l^2}{\rho_A \cos^2\theta}$ 方向同n

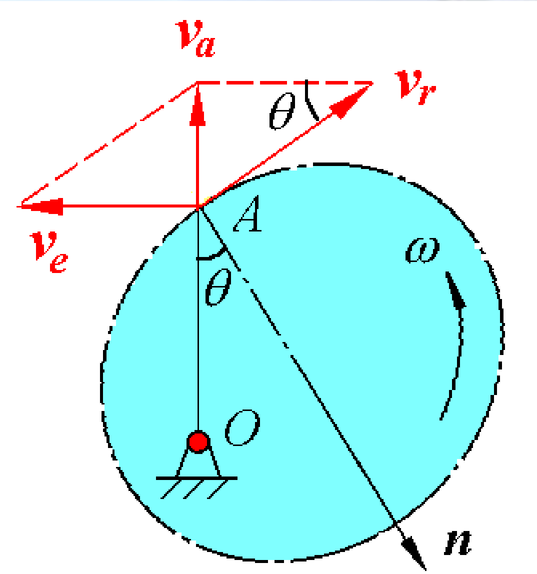
$a_r^t = ?$ 方向⊥$\bar{n}$

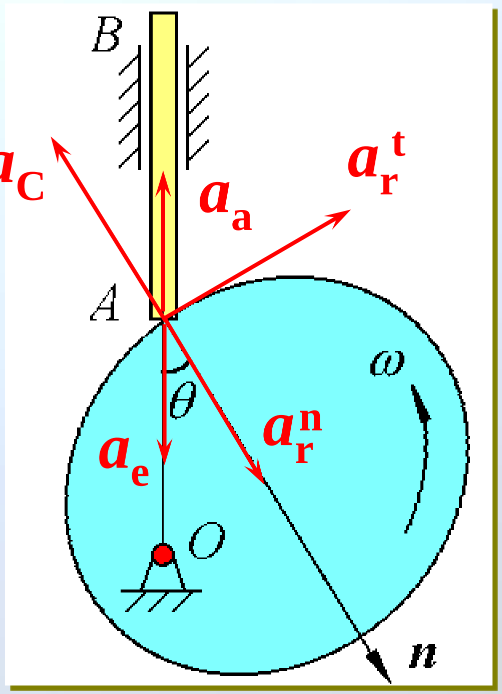
牵连加速度: $a_e^t = 0$,

$a_e^n = l\omega^2$, 方向指向轴心O;

科氏加速度: $a_C = 2\omega v_r = \dfrac{2l\omega^2}{\cos\theta}$

方向// $\bar{n}$, 指向与n相反。





由牵连运动为转动时的加速度合成定理

$$\overset{?}{\bar{a}_{\mathrm{a}}} = \overset{\surd}{\bar{a}_{\mathrm{e}}} + \overset{?}{\bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}} + \overset{\surd}{\bar{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}} + \overset{\surd}{\bar{a}_{\mathrm{C}}}$$

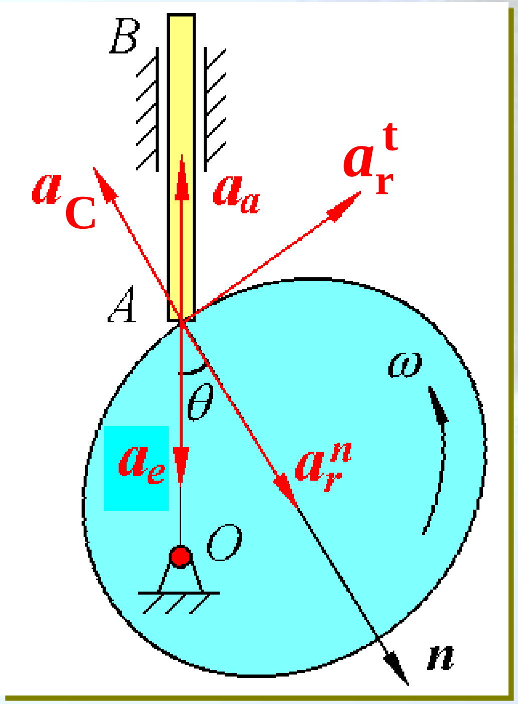
向 $\bar{n}$ 轴投影:

$$-a_{\mathrm{a}}\cos\theta = a_{\mathrm{e}}\cos\theta + a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{C}}$$

$$a_{\mathrm{a}} = -\frac{a_{\mathrm{e}}\cos\theta + a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{C}}}{\cos\theta}$$

$$= -\frac{\left(\omega^2 l\cos\theta + \dfrac{\omega^2 l^2}{\rho_A\cos^2\theta} - \dfrac{2\omega^2 l}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta}$$

$$= -\omega^2 l\left(1 + \frac{l}{\rho_A\cos^3\theta} - \frac{2}{\cos^2\theta}\right)$$



解题步骤：

1. 选择动点、动系、定系。

2. 分析三种运动：绝对运动、相对运动和牵连运动。

3. 作速度分析, 画出速度平行四边形,求出有关未知量 (速度, 角速度）。

4. 作加速度分析，画出加速度矢量图，求出有关的加速度、角加速度未知量。

第八章结束