材料力学

第四章　弯曲内力

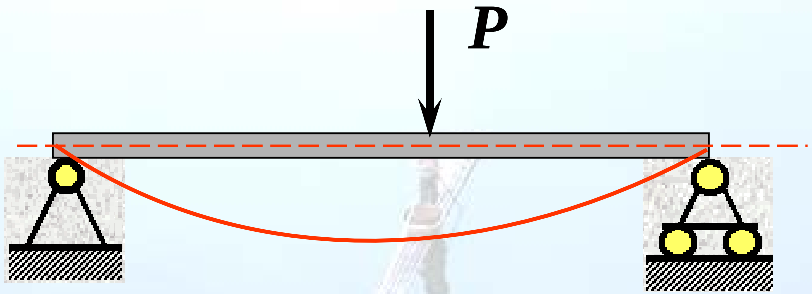
第四章　　　弯曲内力

§ 4–1　弯曲的概念和实例

一、弯曲的概念

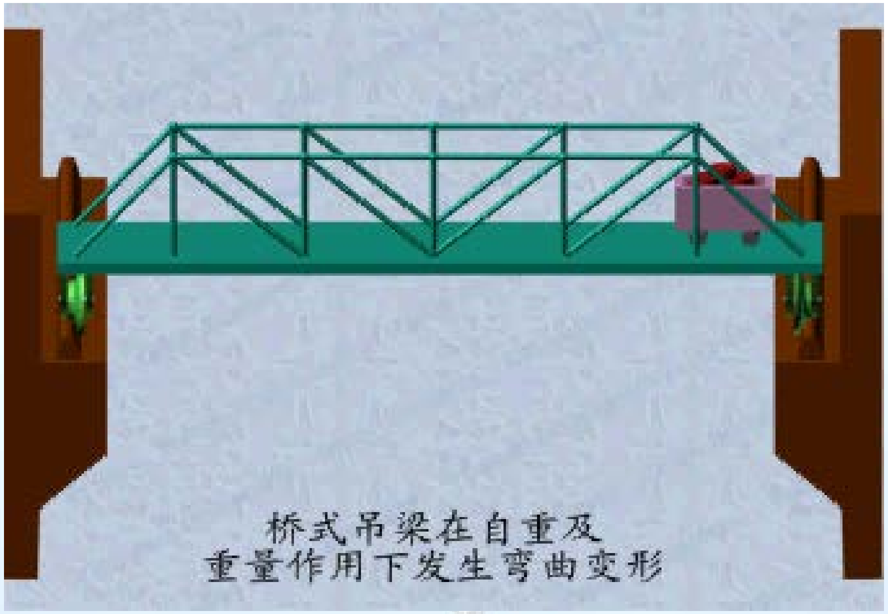
受力特点：杆件受垂直于轴线的外力（包括外力偶）的作用。

变形特点：轴线变成了曲线。



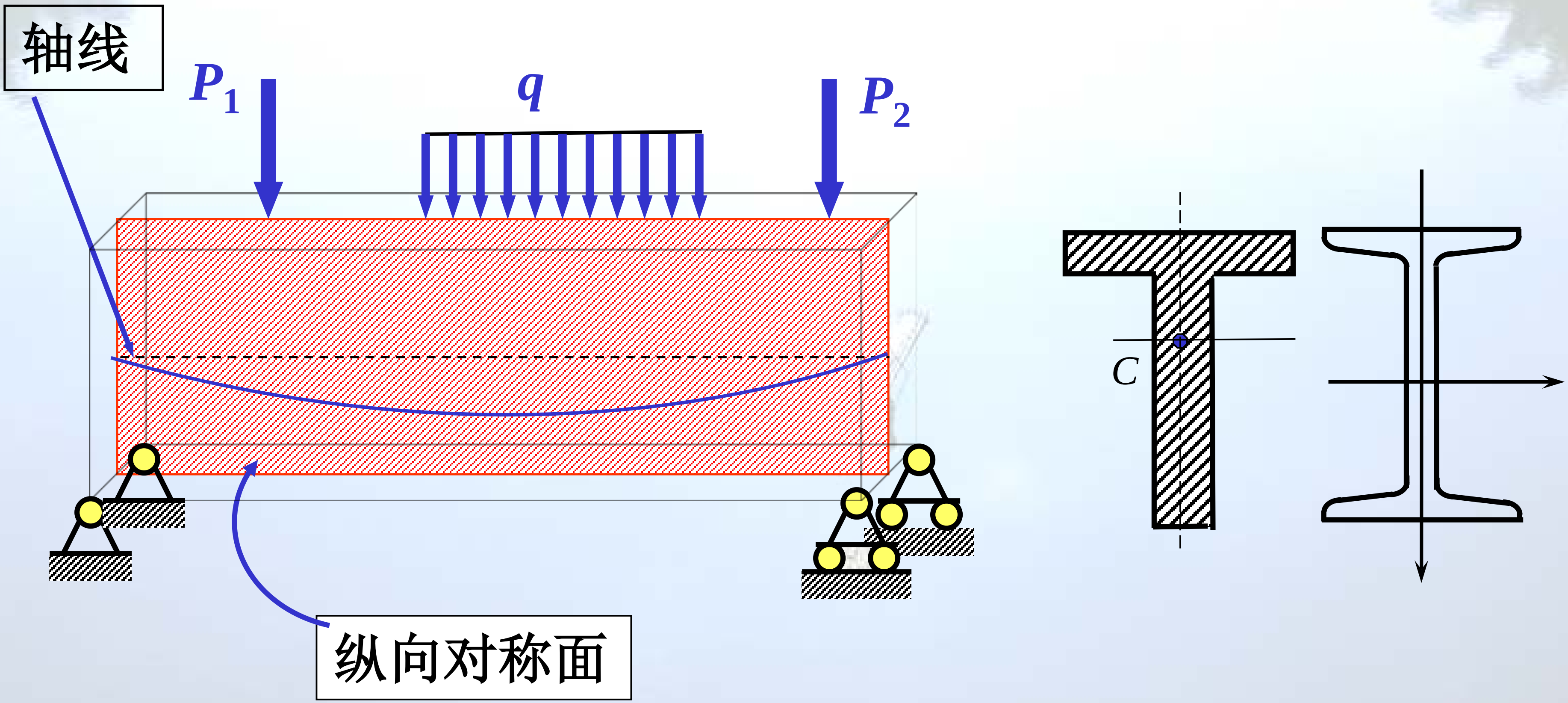
梁：以弯曲变形为主要变形的构件通常称为梁。

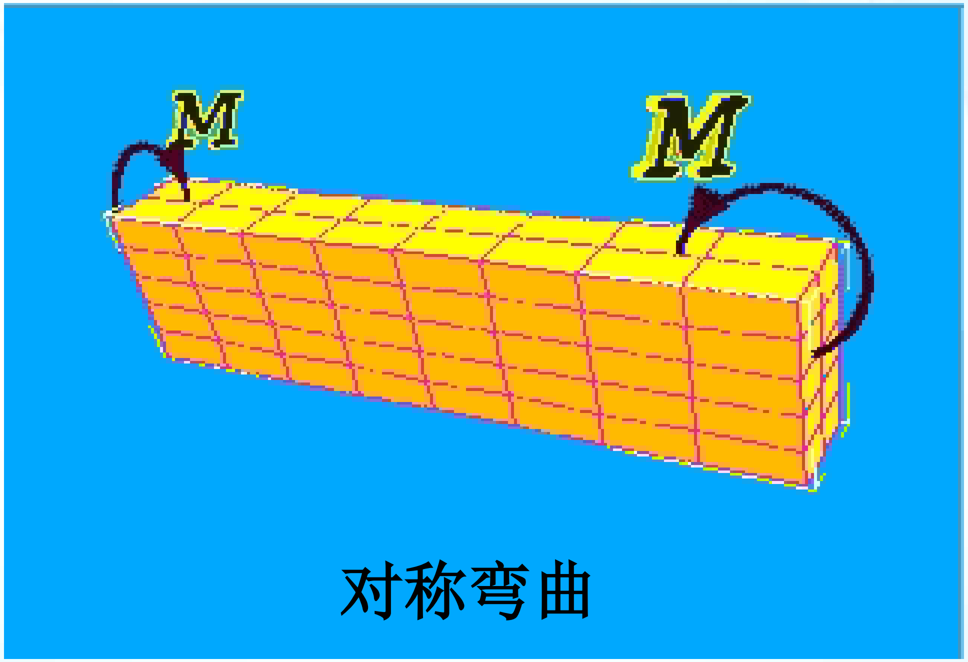
3. 工程实例



4. 平面弯曲：

梁的横截面有一对称轴，外载荷作用在纵向对称面内，杆发生弯曲变形后，轴线仍然在纵向对称面内，是一条平面曲线。





非对称弯曲—— 若梁不具有纵对称面，或者，梁虽具有纵对称面但外力并不作用在对称面内，这种弯曲则统称为非对称弯曲。

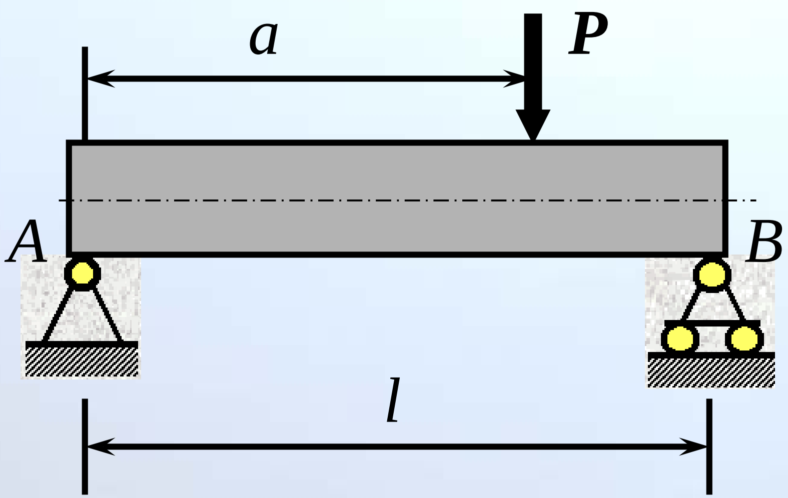
下面几章中，将以对称弯曲为主，讨论梁的应力和变形计算。

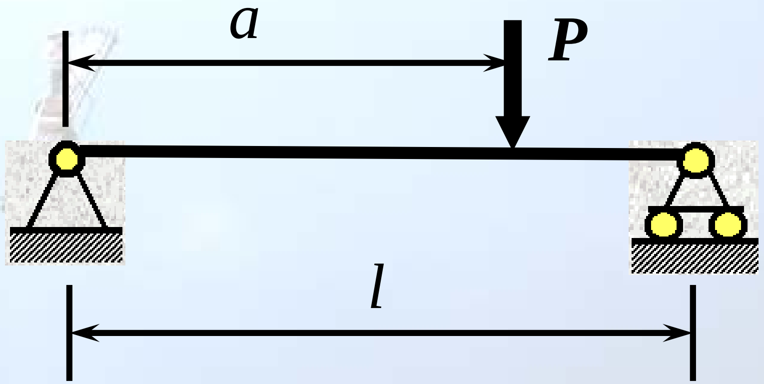
§ 4–2　受弯杆件的简化

梁的支承条件与载荷情况一般都比较复杂，为了便于分析计算，应进行必要的简化，抽象出计算简图。

1.　构件本身的简化

通常取梁的轴线来代替梁。



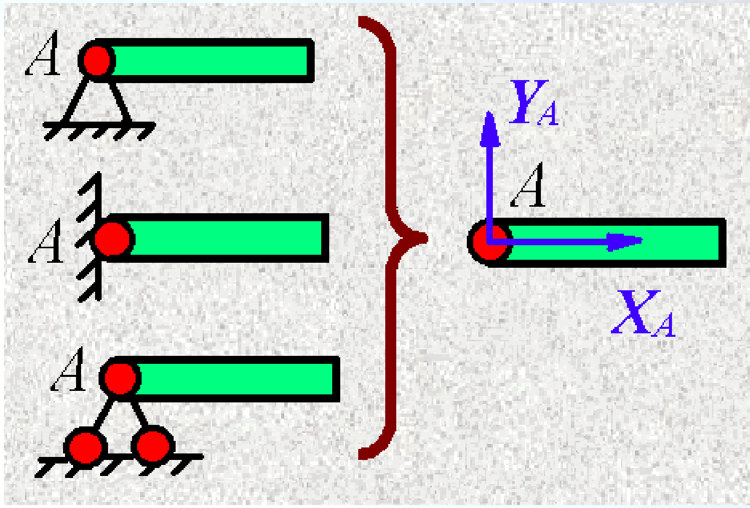


2. 支座简化

(1)固定铰支座

2个约束，1个自由度。

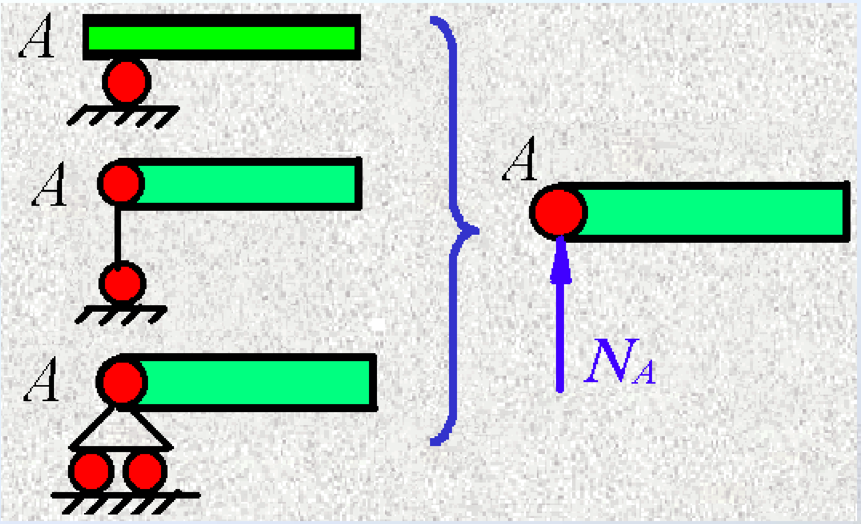
如：桥梁下的固定支座，止推滚珠轴承等。



(2)可动铰支座

1个约束，2个自由度。

如：桥梁下的辊轴支座，滚珠轴承等。

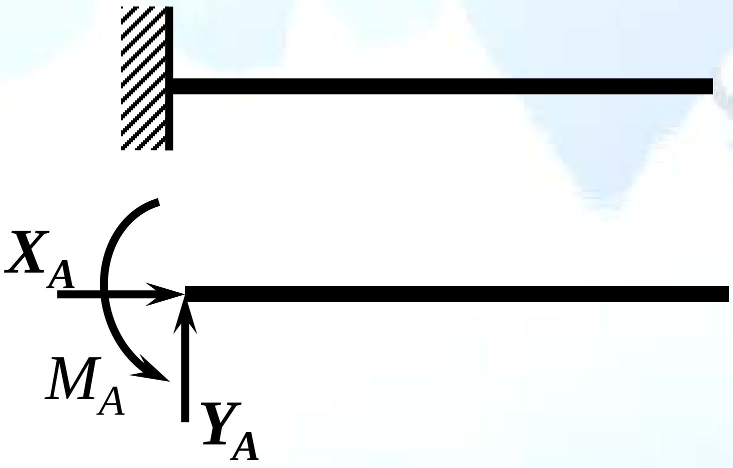


(3)固定端

3个约束，0个自由度。

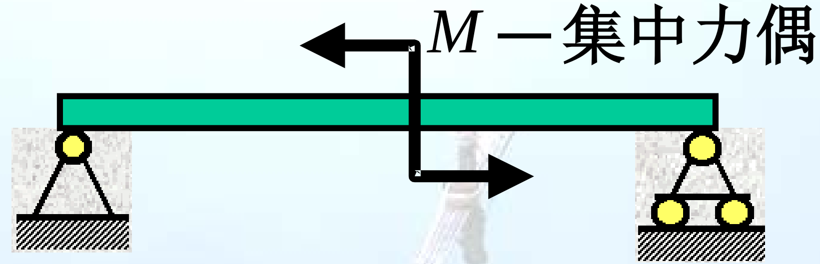
如：游泳池的跳水板支座，

木桩下端的支座等。

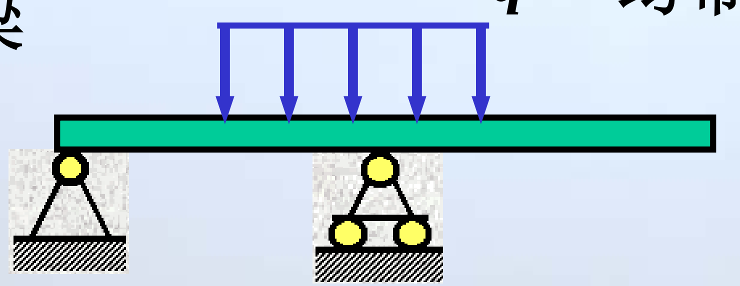


3. 梁的三种基本形式

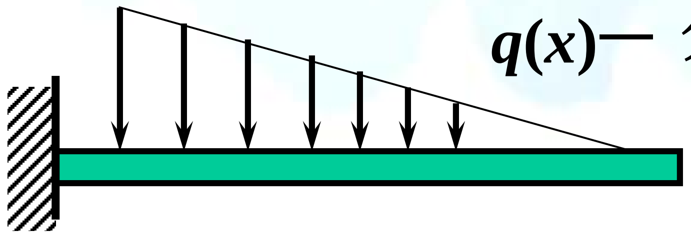
(1)简支梁



(2)外伸梁

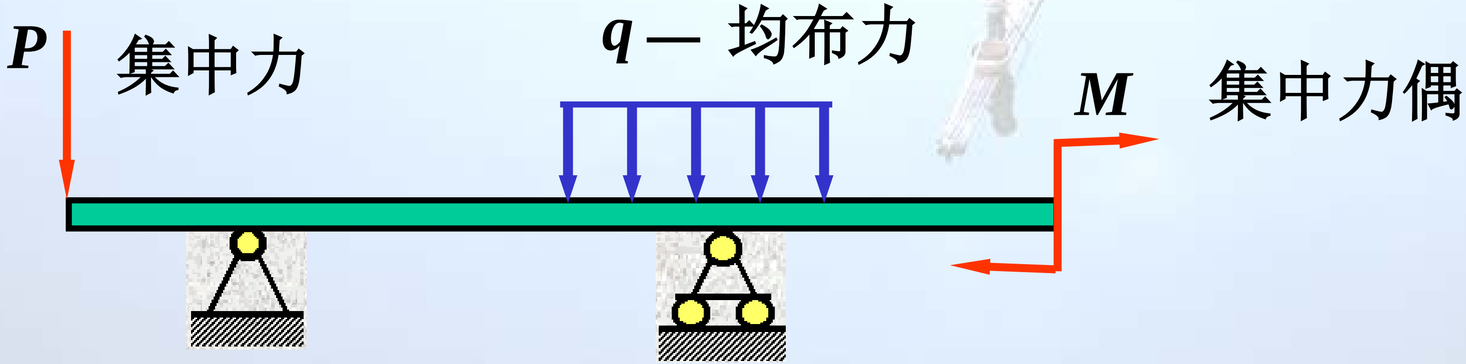


(3)悬臂梁



4. 载荷简化

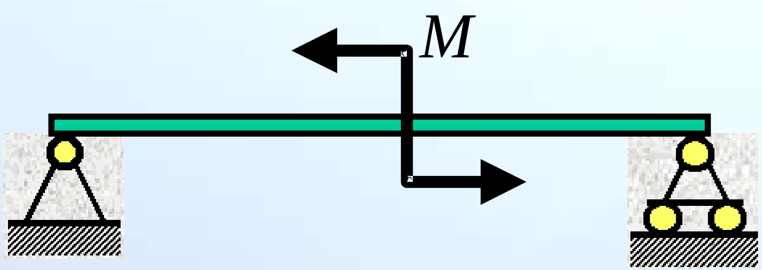
作用于梁上的载荷（包括支座反力）可简化为三种类型：集中力、集中力偶和分布载荷。

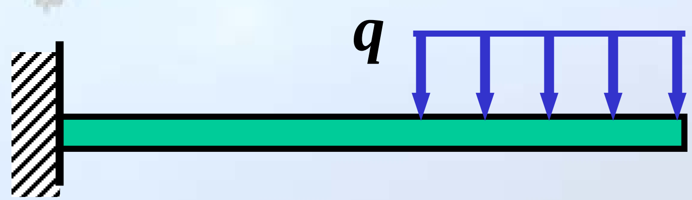


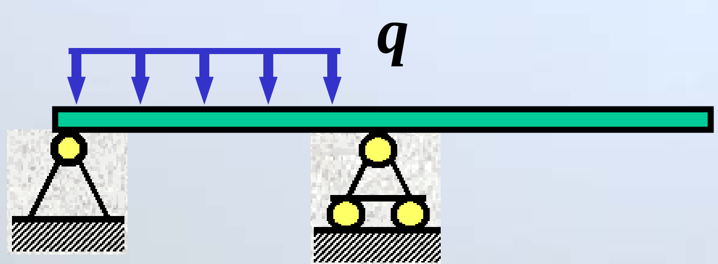
5. 静定梁与超静定梁

静定梁：由静力学方程可求出支反力，如上述三种基本形式的静定梁。

超静定梁：由静力学方程不可求出支反力或不能求出全部支反力。





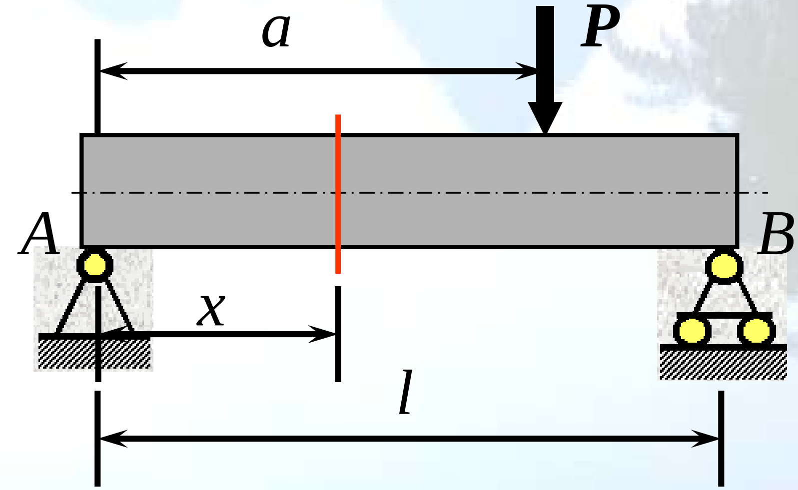


§ 4–3　剪力和弯矩

弯曲内力

已知：$\boldsymbol{P}$，a，l。

求：距A端x处截面上内力。

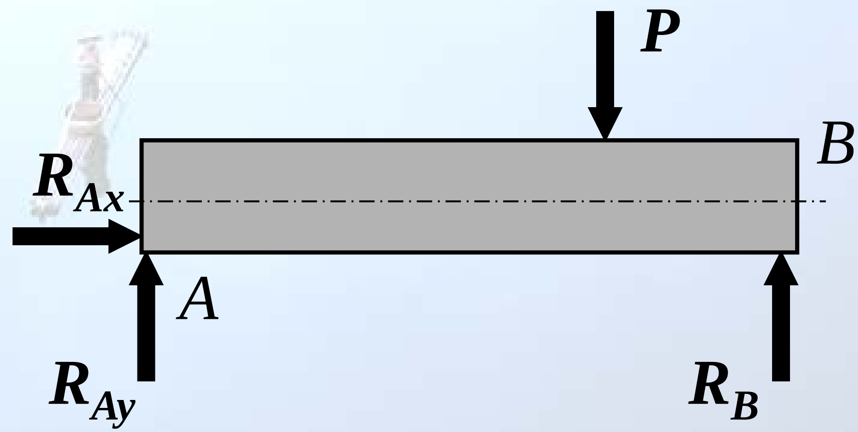


解：(1)求支座反力

$$\sum X=0,\ \therefore\ R_{Ax}=0$$

$$\sum m_A=0,\ \therefore\ R_B=\frac{Pa}{l}$$

$$\sum Y=0,\ \therefore\ R_{Ay}=\frac{P(l-a)}{l}$$

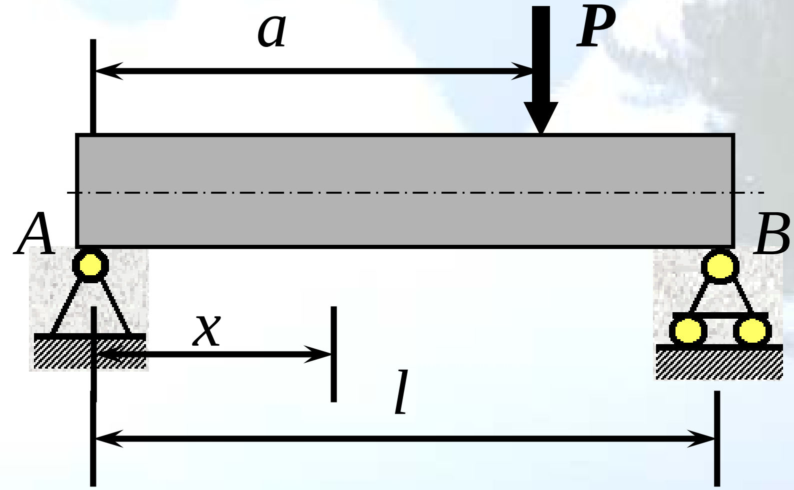


§ 4–3 剪力和弯矩

弯曲内力

已知：***P***，*a*，*l*。

求：距*A*端*x*处截面上内力。

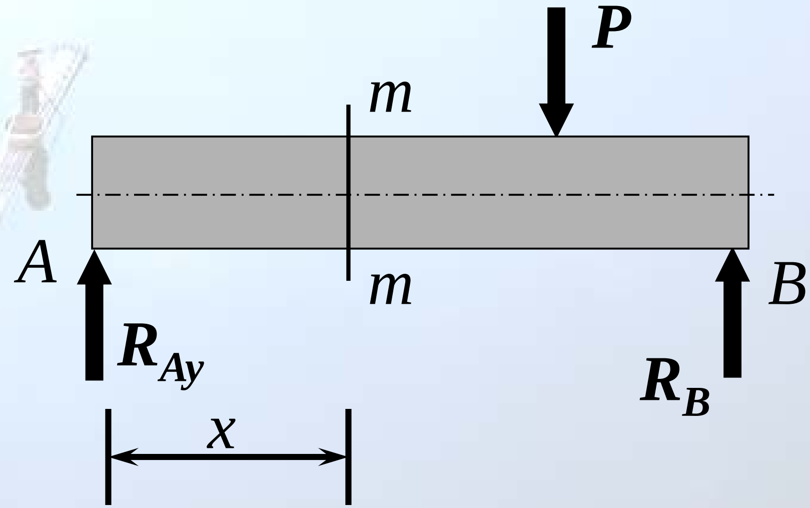


解：(1)求支座反力

$$\sum X = 0, \quad \therefore \ R_{Ax} = 0$$

$$\sum m_A = 0, \quad \therefore \ R_B = \frac{Pa}{l}$$

$$\sum Y = 0, \quad \therefore \ R_{Ay} = \frac{P(l-a)}{l}$$



（2）求内力——截面法

$$\begin{cases} \text{剪力}Q \\ \text{弯矩}M \end{cases}$$

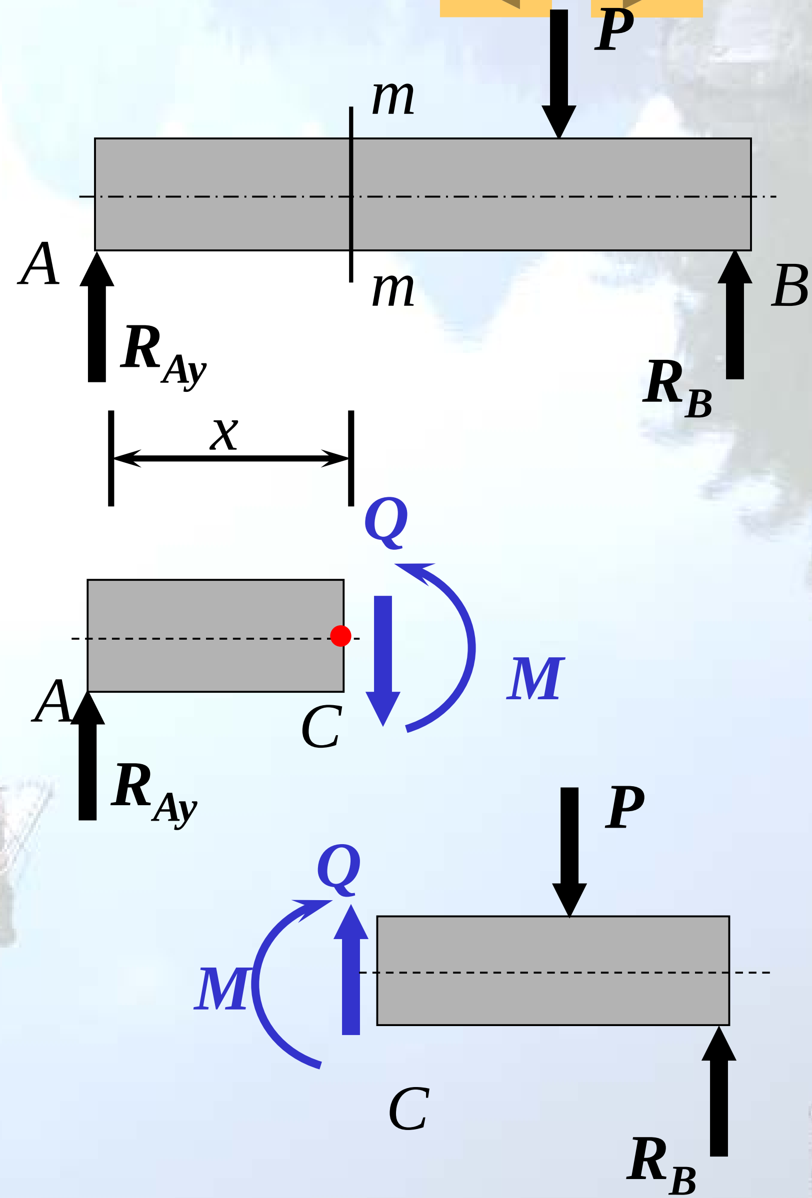
取左段：

$\sum Y=0$， $R_{Ay}-Q=0$

$$\therefore\ Q=R_{Ay}=\frac{P(l-a)}{l}$$

$\sum m_C=0$， $-R_{Ay}\cdot x+M=0$

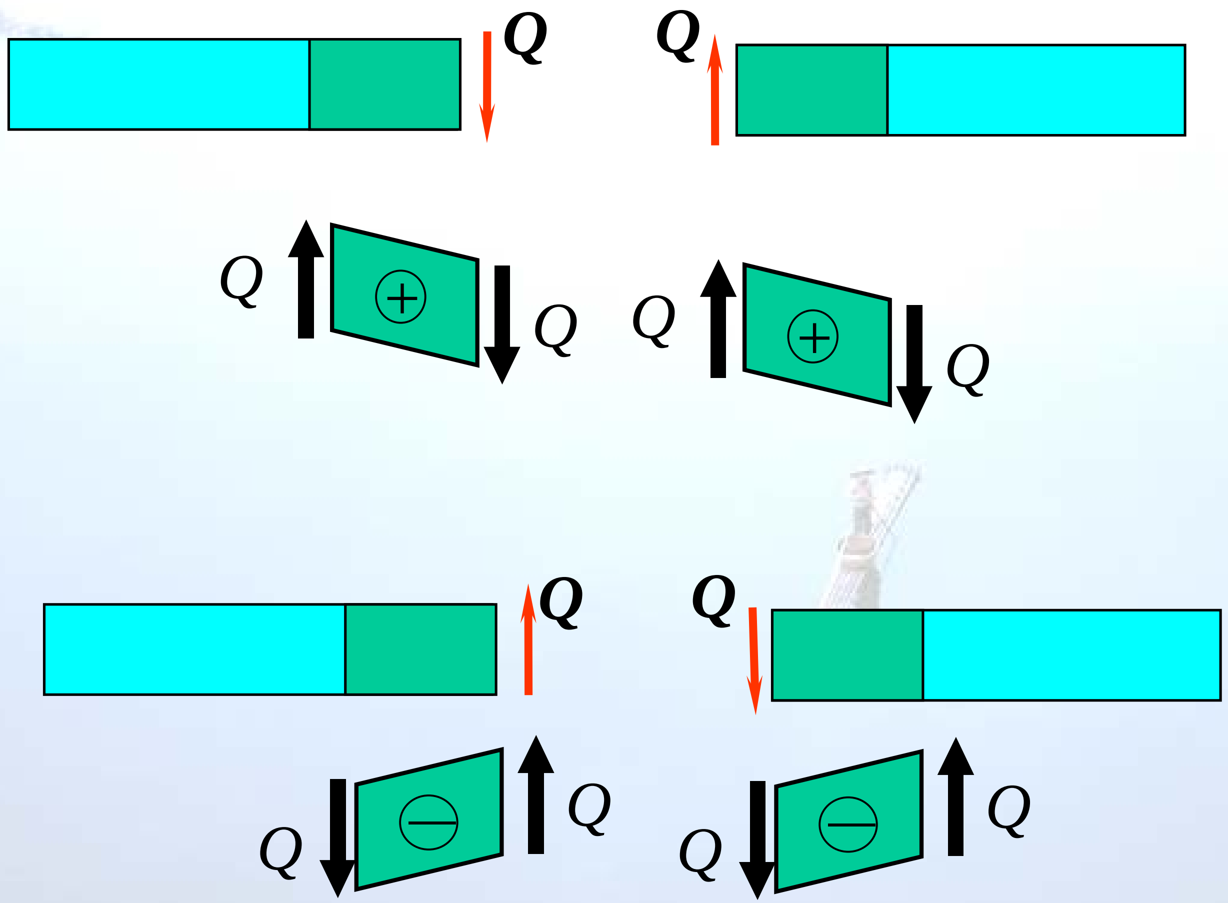
$$\therefore\ M=R_{Ay}\cdot x$$



内力的正负规定:

①剪力Q:　左上右下为正;反之为负。

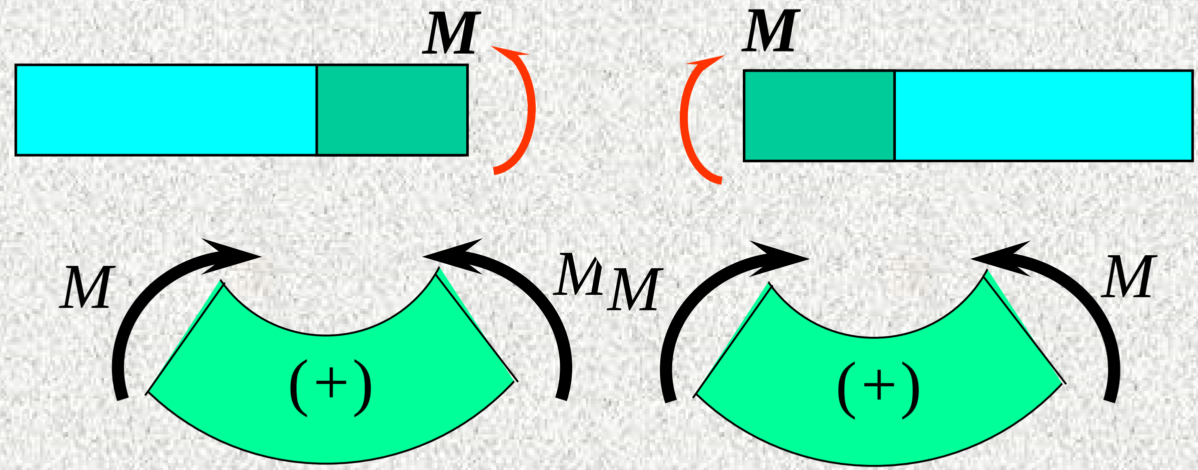
左上右下为正

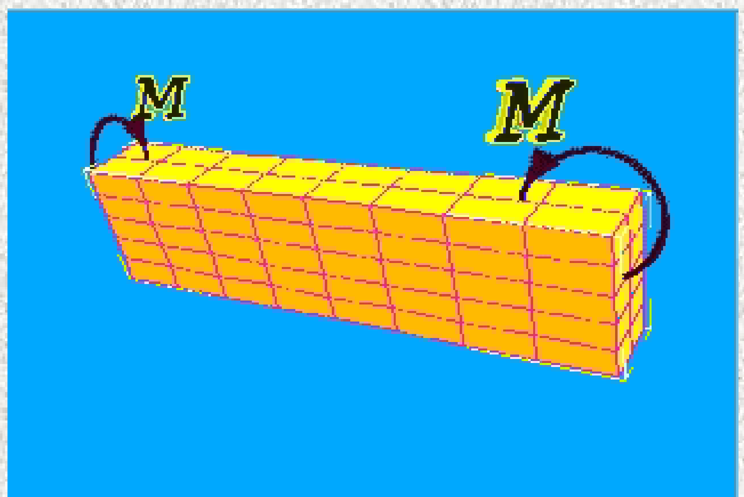


②弯矩M：使梁变成上凹下凸的为正弯矩；反之为负弯矩。

左顺右逆为正

可以装水为正

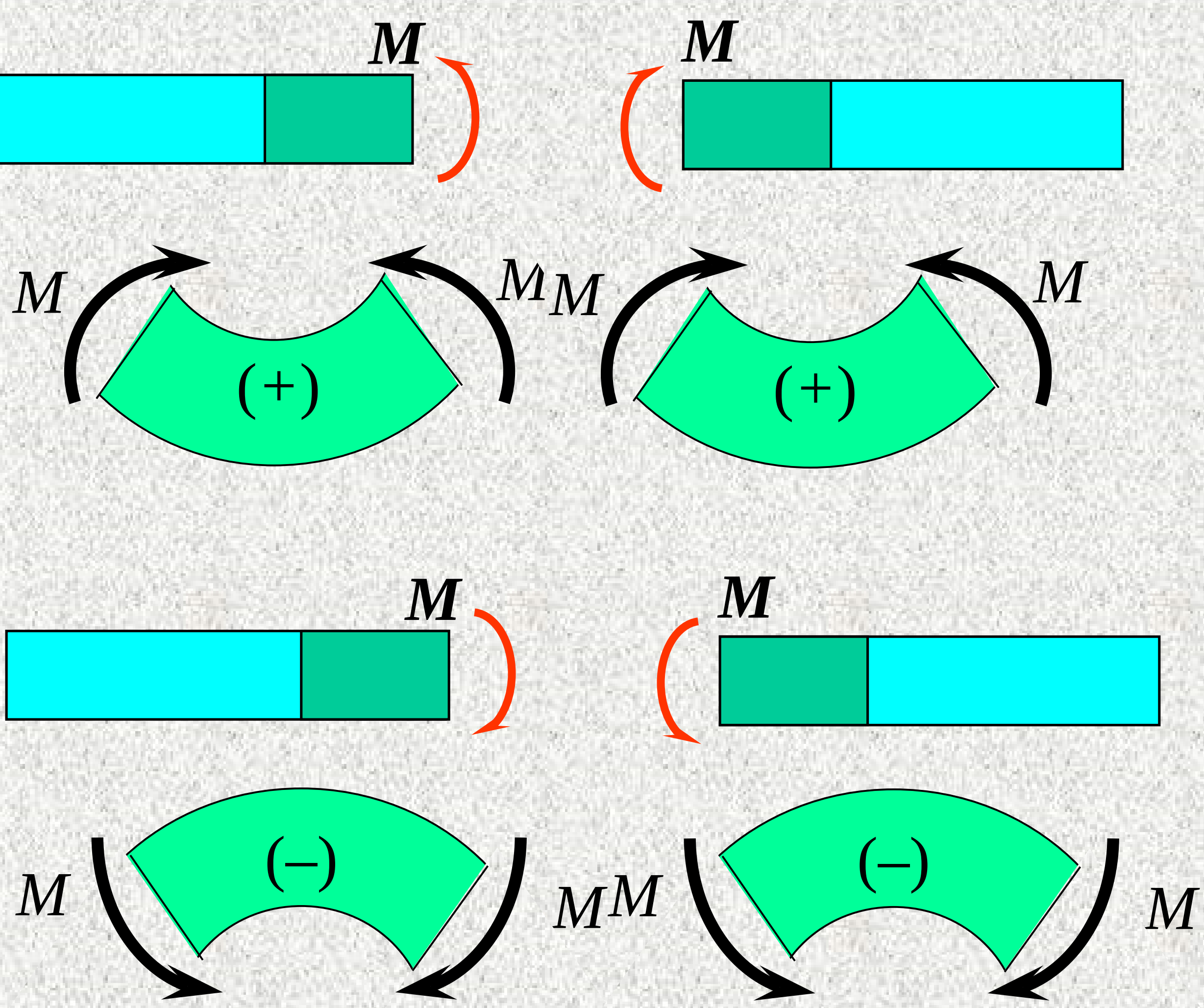




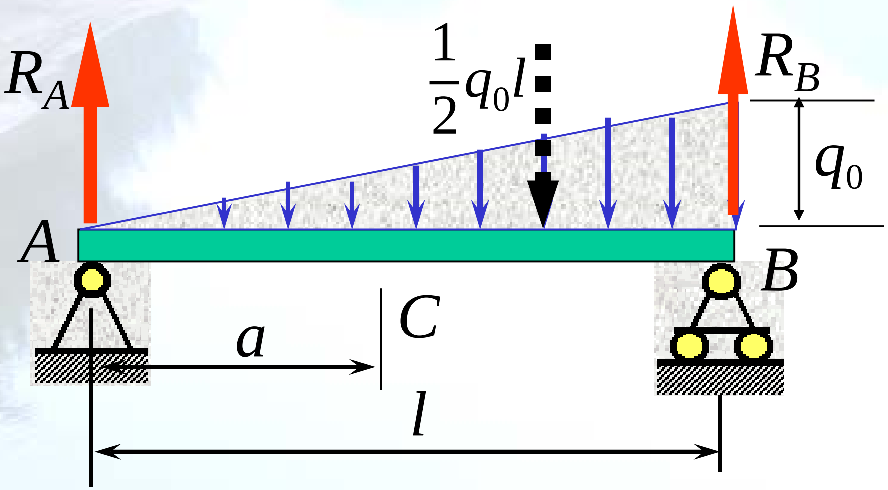
②弯矩*M*：使梁变成上凹下凸的为正弯矩；反之为负弯矩。

左顺右逆为正

可以装水为正



[例1]　求C截面上的内力。



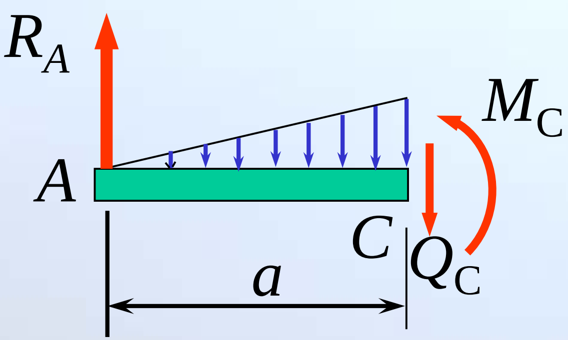
解：$\sum m_A = 0$，$R_B \cdot l - \frac{q_0 l}{2}\times\frac{2l}{3} = 0$，

$$\therefore\ R_B = \frac{1}{3}q_0 l$$

$\sum Y = 0$，$R_A + R_B - \frac{q_0 l}{2} = 0$，

$$\therefore\ R_A = \frac{1}{6}q_0 l\ ,$$

截面法求C截面内力：



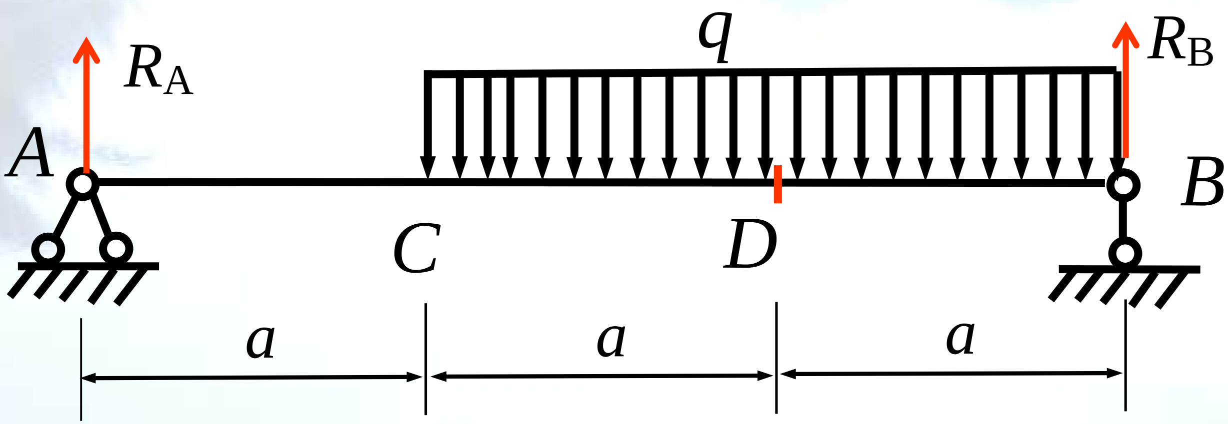
取左段：$\sum Y = 0$，$R_A - \frac{1}{2}\cdot q \cdot \frac{a}{l}\cdot a - Q_C = 0$，

$$Q_C = R_A - \frac{q_0 a^2}{2l}$$

$\sum m_C = 0$，$-R_A \cdot a + \frac{q_0 a^2}{2l}\times\frac{a}{3} + M_C = 0$，

$$M_C = R_A \cdot a - \frac{q_0 a^2}{2l}\times\frac{a}{3}$$

[例2] 求D截面上的内力。

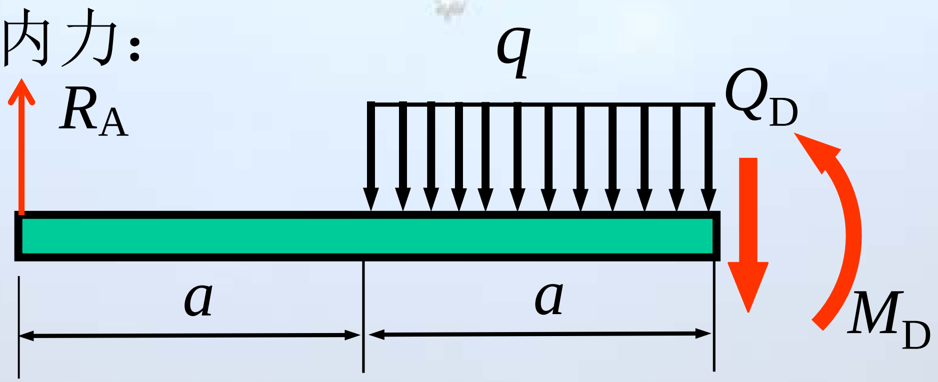


解：$\sum m_B = 0$ ，$3R_A \cdot a - 2qa^2 = 0$ ，$\therefore\ R_A = \dfrac{2}{3}qa$

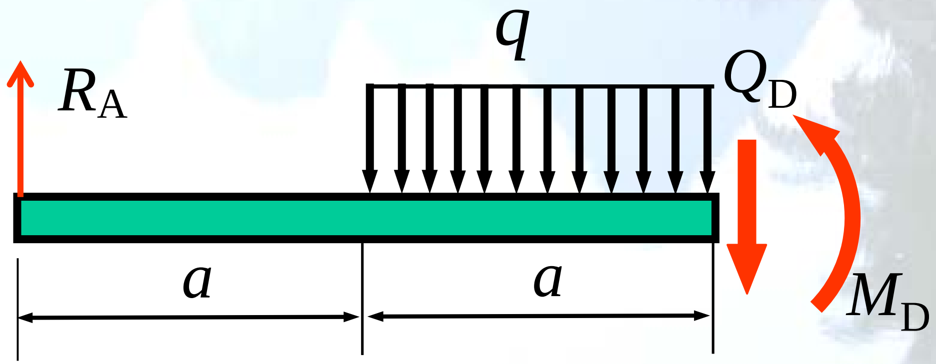
$\sum Y = 0$ ，$R_A + R_B - 2qa = 0$ ，$\therefore\ R_B = \dfrac{4}{3}qa$ ，

截面法求D截面内力：

取左段：



$\sum Y=0$ ， $R_A-qa-Q_D=0$ ，



$$\boxed{Q_D=R_A-qa}$$

$$=\frac{2}{3}qa-qa=-\frac{1}{3}qa$$

$\sum m_O=0$， $R_A\cdot 2a-\frac{1}{2}qa^2-M_D=0$，

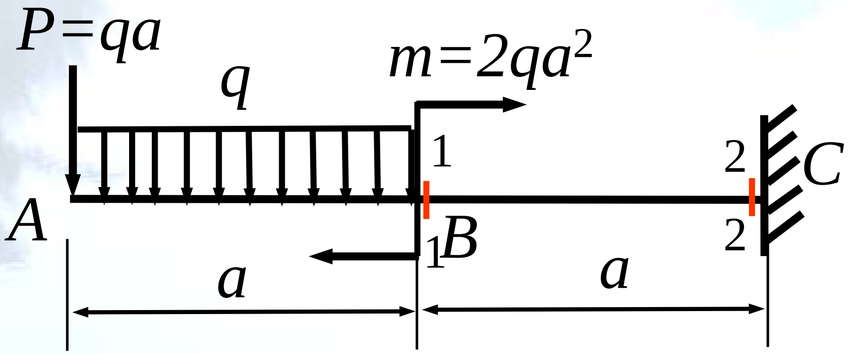
$$\boxed{M_D=R_A\cdot 2a-\frac{1}{2}qa^2}$$

$$=\frac{2}{3}qa\cdot 2a-\frac{1}{2}qa^2=\frac{5}{6}qa^2$$

剪力=截面左侧所有外力在*y*轴上投影代数之和，向上为正。

弯矩=截面左侧所有外力对该截面之矩的代数和，顺时针为正。

[例3] 求1-1、2-2截面上的内力。

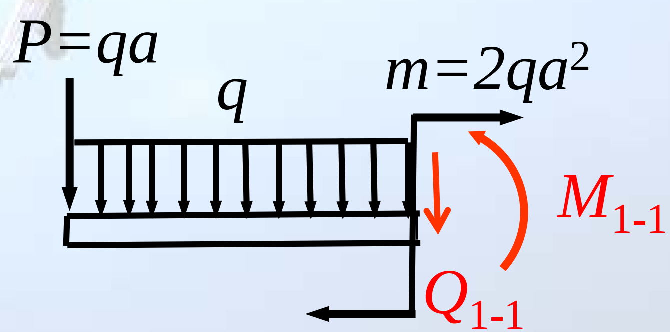


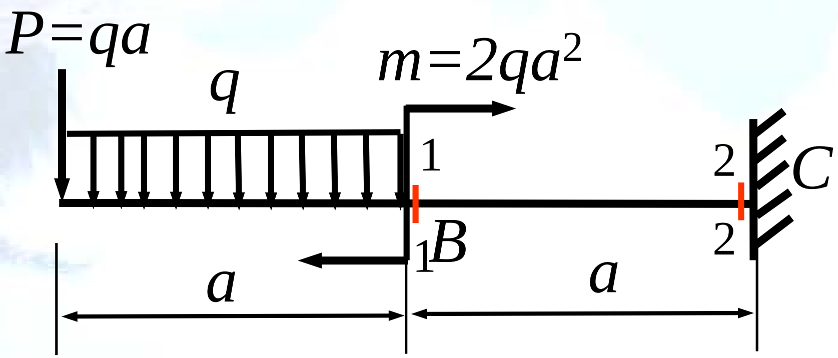
解：$Q_{1-1} = -P - qa \quad = -qa - qa = -2qa$

$$M_{1-1} = -P \cdot a - \frac{1}{2}qa^2 + m$$

$$= -qa \cdot a - \frac{1}{2}qa^2 + 2qa^2$$

$$= \frac{1}{2}qa^2$$



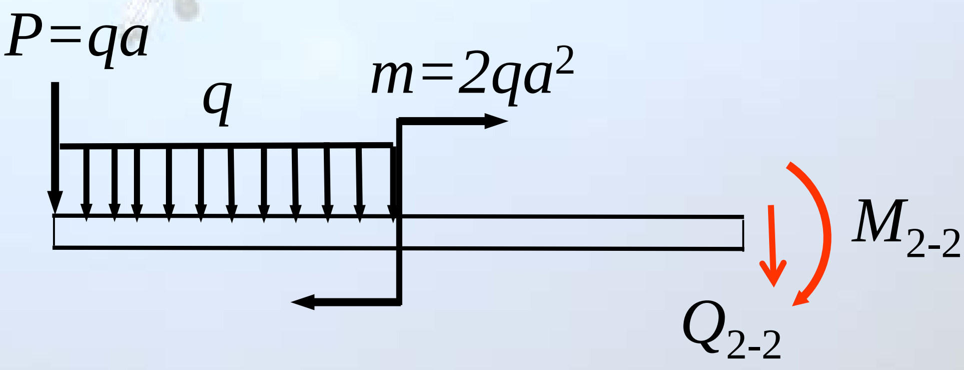


$$Q_{2-2} = -P - qa = -qa - qa = -2qa$$

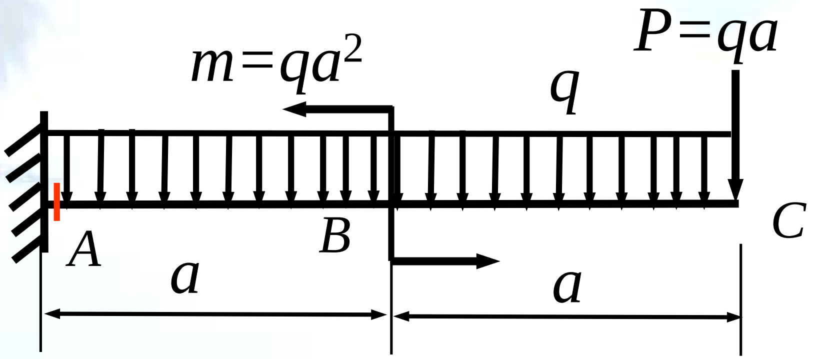
$$M_{2-2} = -P\cdot 2a - qa\cdot\frac{3}{2}a + m$$

$$= -qa\cdot 2a - \frac{3}{2}qa^2 + 2qa^2$$

$$= -\frac{3}{2}qa^2$$



[例4]　求A截面上的内力。



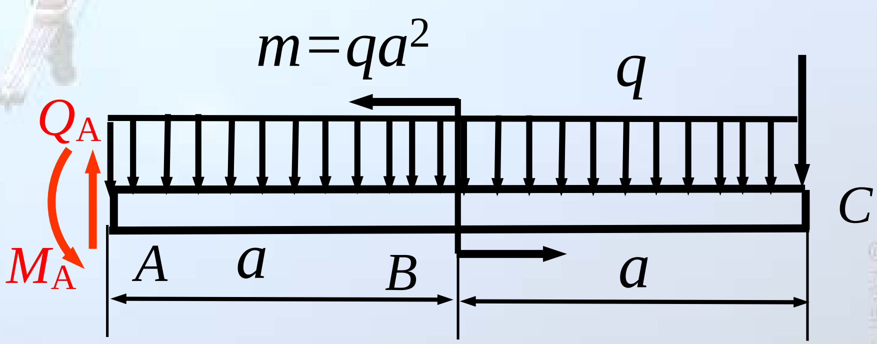
解：

$$Q_A = P + q\cdot 2a \quad = qa + 2qa = 3qa$$

$$M_A = -P\cdot 2a - \frac{1}{2}q(2a)^2 + m$$

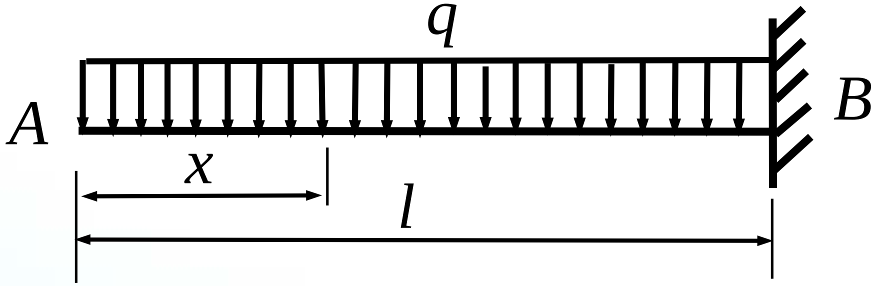
$$= -qa\cdot 2a - \frac{1}{2}q(2a)^2 + qa^2$$

$$= -3qa^2$$



§ 4–4　剪力方程和弯矩方程　剪力图和弯矩图

[例]



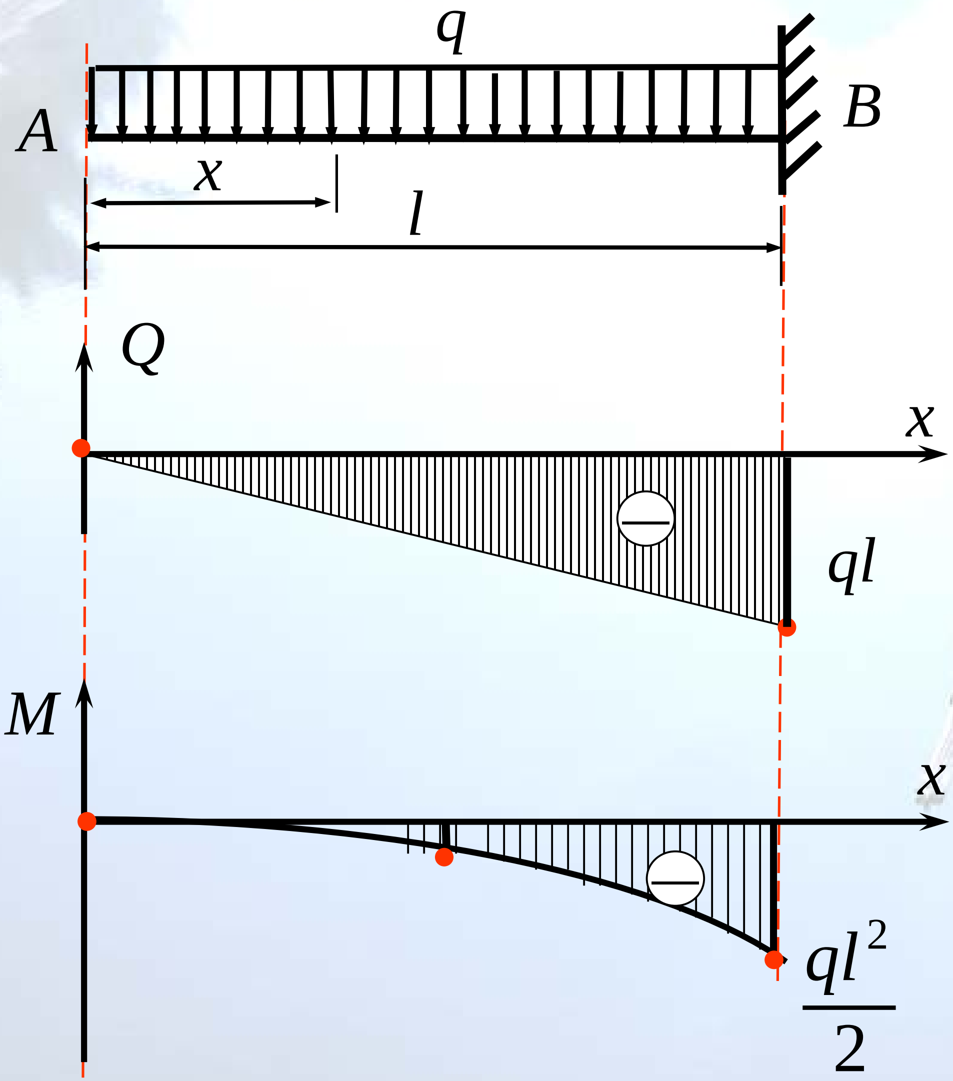
求x截面上的内力。

解：
$$Q = -qx$$

$$M = -\frac{q}{2}x^2$$

$$\begin{cases} Q = Q(x) \text{ —— 剪力方程} \\ M = M(x) \text{ —— 弯矩方程} \end{cases}$$

剪力图和弯矩图：



$$Q=-qx$$

$$M=-\frac{q}{2}x^2$$

$x=0$， $Q=0$

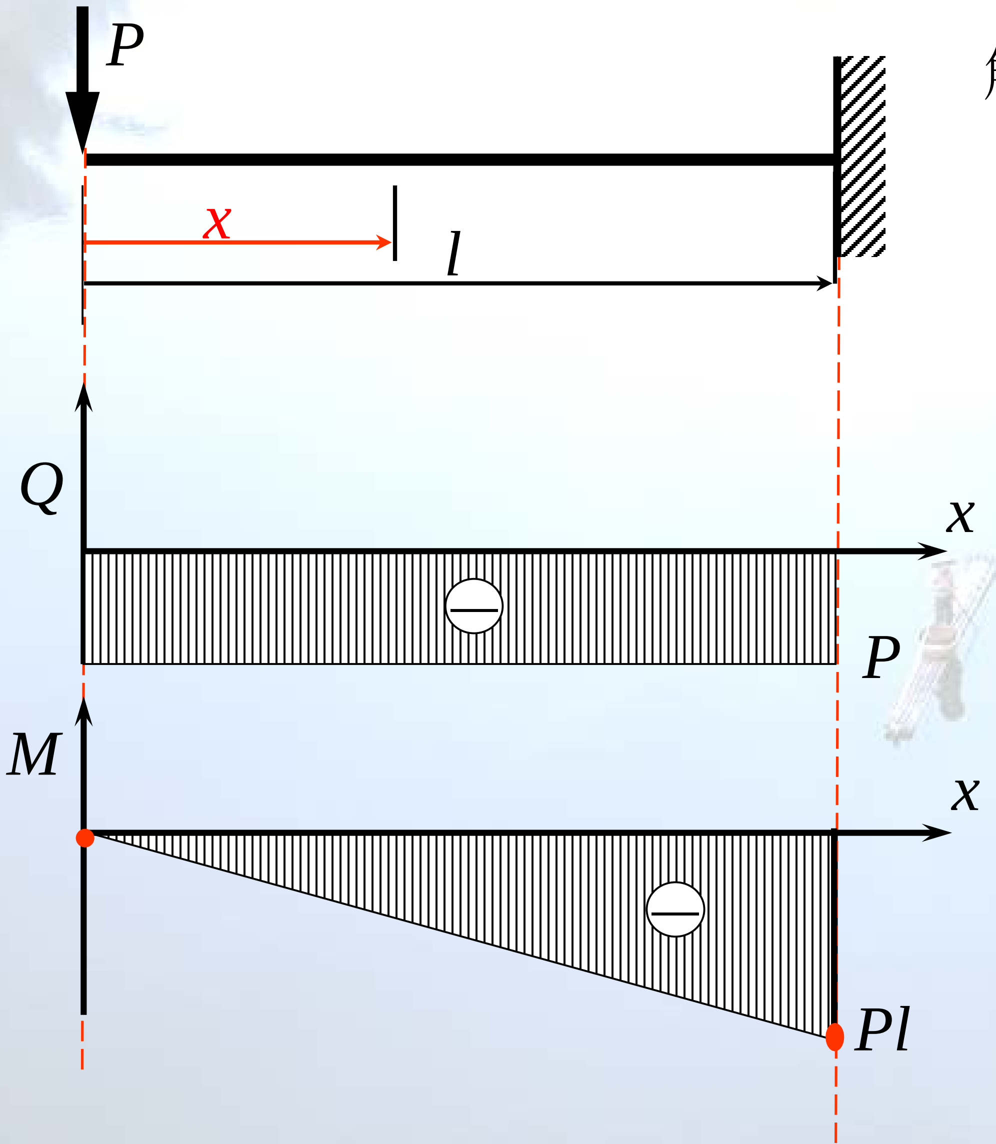
$x=l$ ， $Q=-ql$

$x=0$， $M=0$

$x=l$ ， $M=-\frac{1}{2}ql^2$

$x=\frac{l}{2}$ ，$M=-\frac{1}{8}ql^2$

[例5] 求梁的内力方程并画出内力图。



解： 写出内力方程

$$Q(x) = -P$$

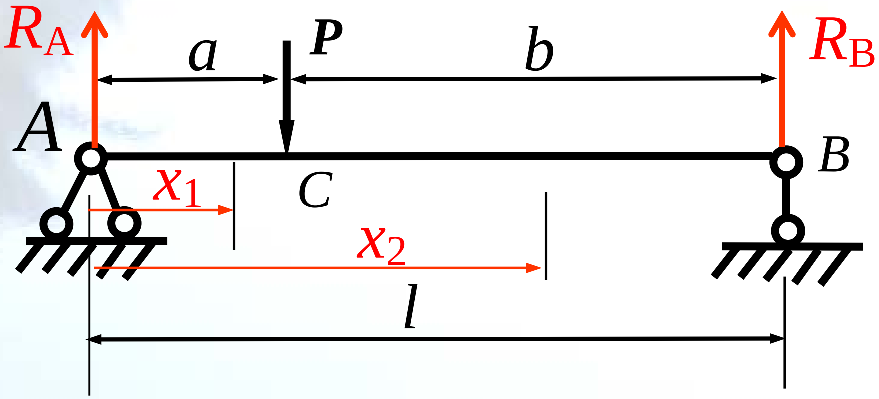
$$M(x) = -Px$$

根据方程画内力图

$$x=0\text{，}\ M=0$$

$$x=l\ \text{，}\ M=-Pl$$

[例4-2](P119)　求梁的内力方程并画出内力图。



解:(1)求支座反力

$$R_A=\frac{b}{l}P$$

$$R_B=\frac{a}{l}P$$

(2)写出内力方程

AC段:

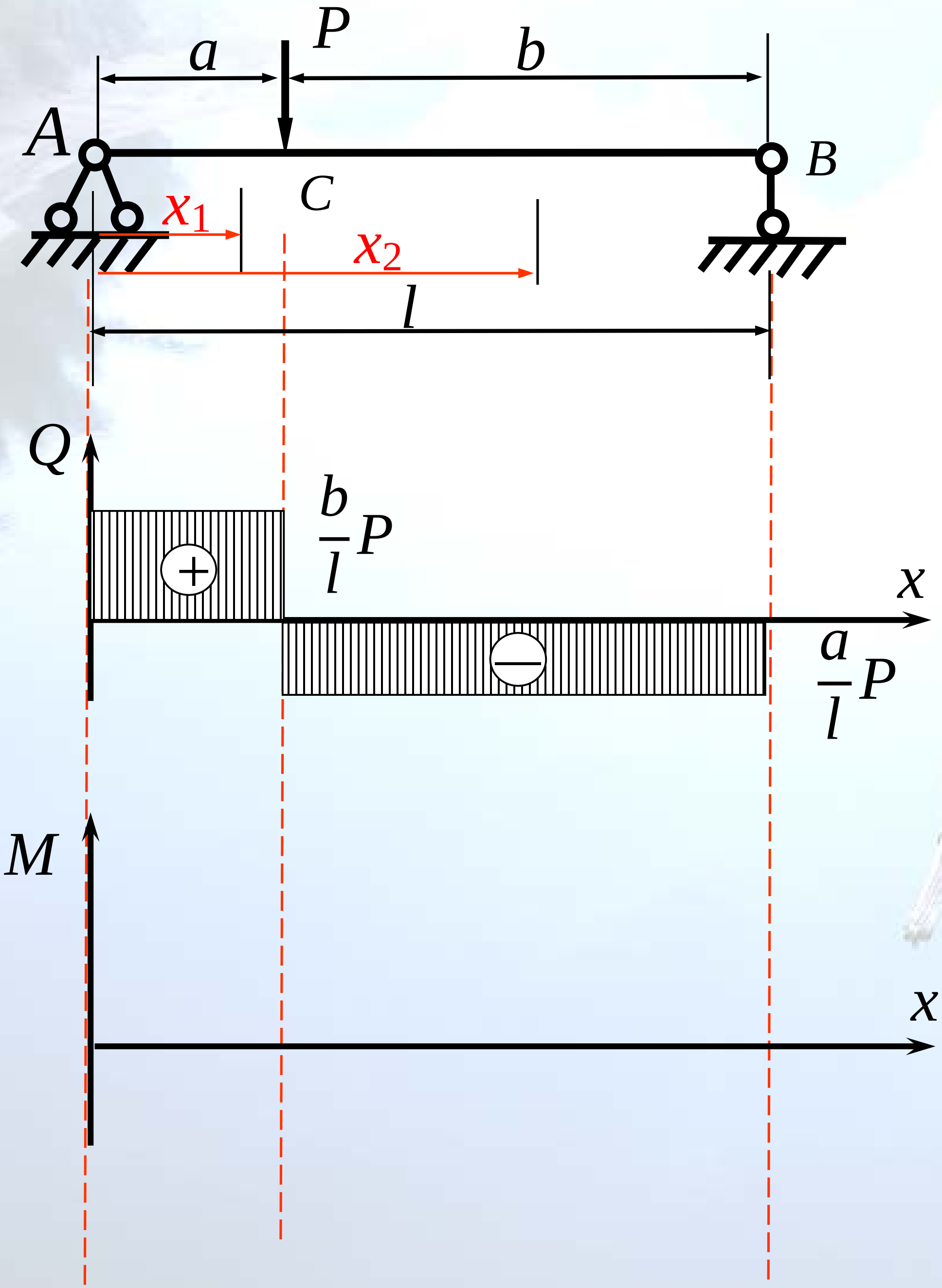
$$Q(x_1)=R_A=\frac{b}{l}P$$

$$M(x_1)=R_Ax_1=\frac{b}{l}Px_1$$

CB段:

$$Q(x_2)=R_A-P=\frac{b}{l}P-P=\frac{b-l}{l}P=-\frac{a}{l}P$$

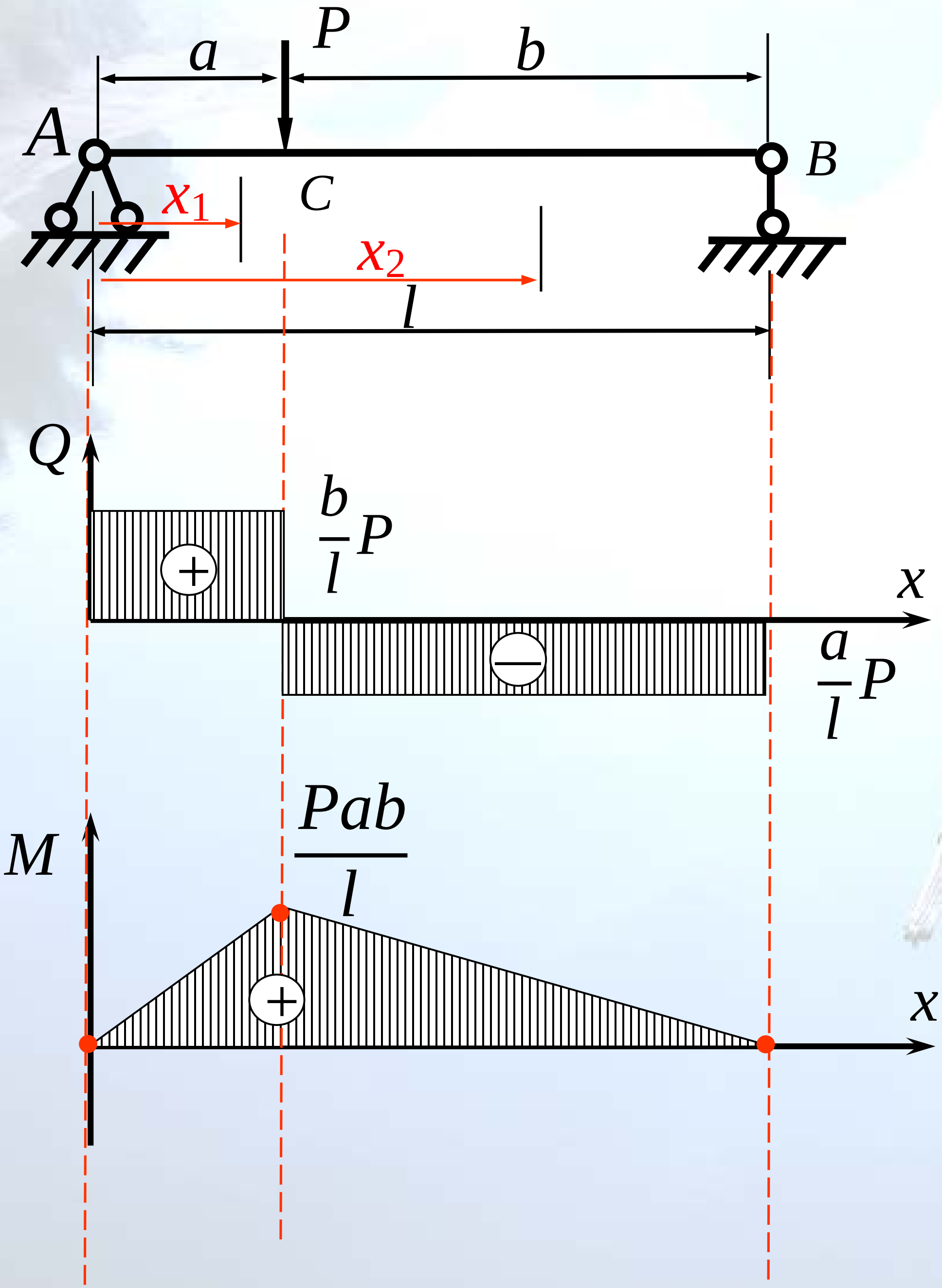
$$M(x_2)=R_B(l-x_2)=\frac{a}{l}P(l-x_2)$$



(3)根据方程画内力图

$$Q(x_1)=\frac{b}{l}P$$

$$Q(x_2)=-\frac{a}{l}P$$



$$M(x_1)=\frac{b}{l}Px_1$$

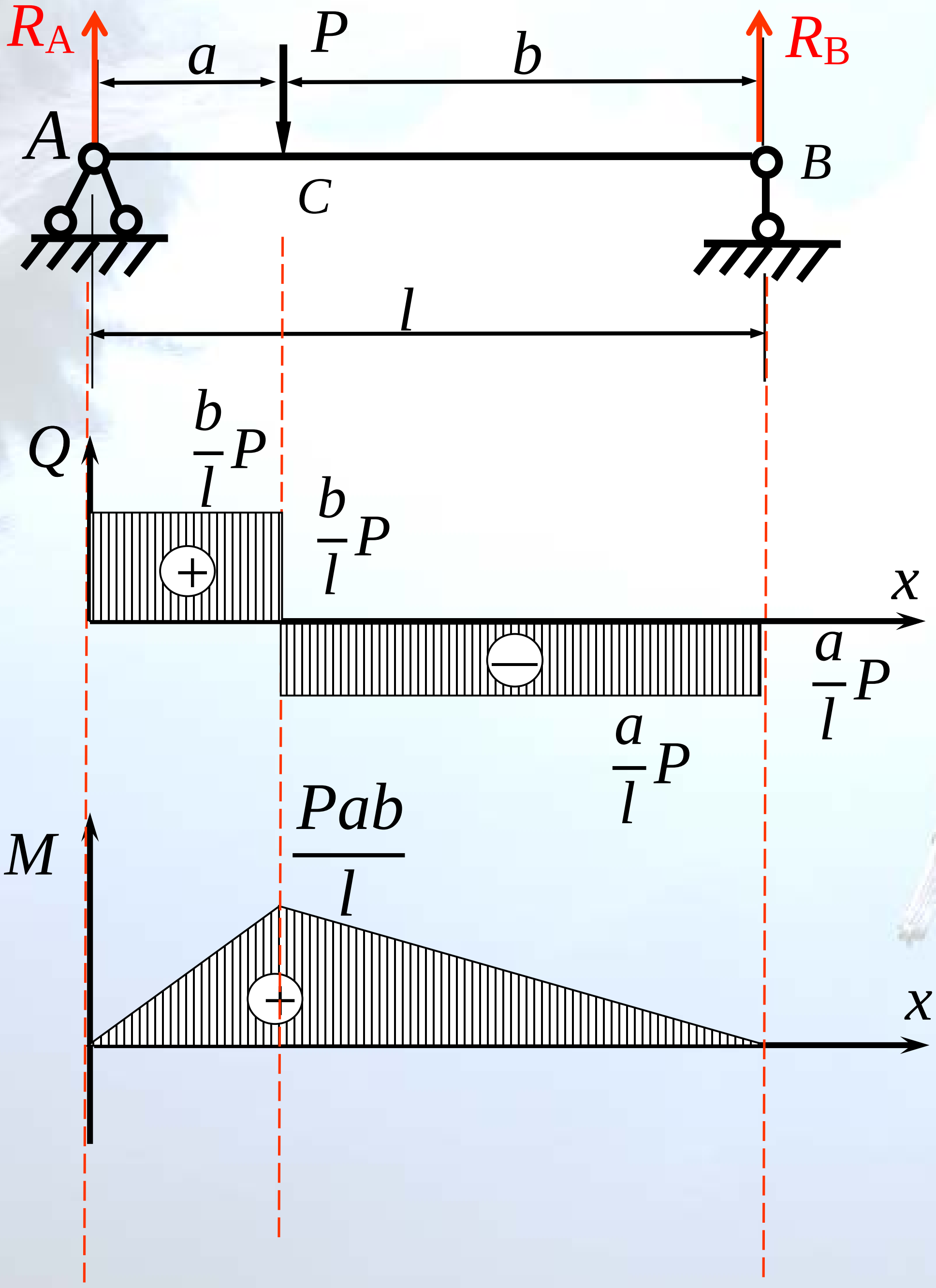
$$M(x_2)=\frac{a}{l}P(l-x_2)$$

$$x_1=0\ ,\quad M=0$$

$$x_1=a\ ,\quad M=\frac{Pab}{l}$$

$$x_2=a\ ,\quad M=\frac{Pab}{l}$$

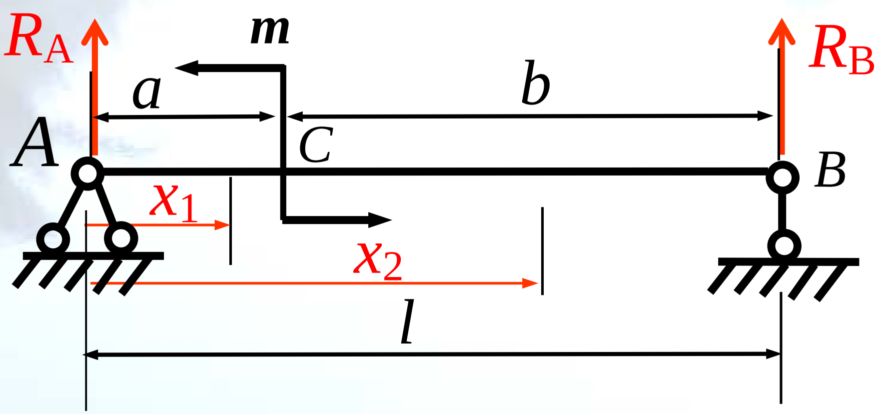
$$x_2=l\ ,\quad M=0$$



(4) 内力图特征：

在集中力作用的地方，剪力图有突变，***P***力向下，***Q***图向下变，变化值=***P***值；弯矩图有折角。

[例6]　　　求梁的内力方程并画出内力图。



解：(1)求支座反力

$$R_A = \frac{m}{l}$$

$$R_B = -\frac{m}{l}$$

(2)写出内力方程

AC段：

$$Q(x_1) = R_A = \frac{m}{l}$$

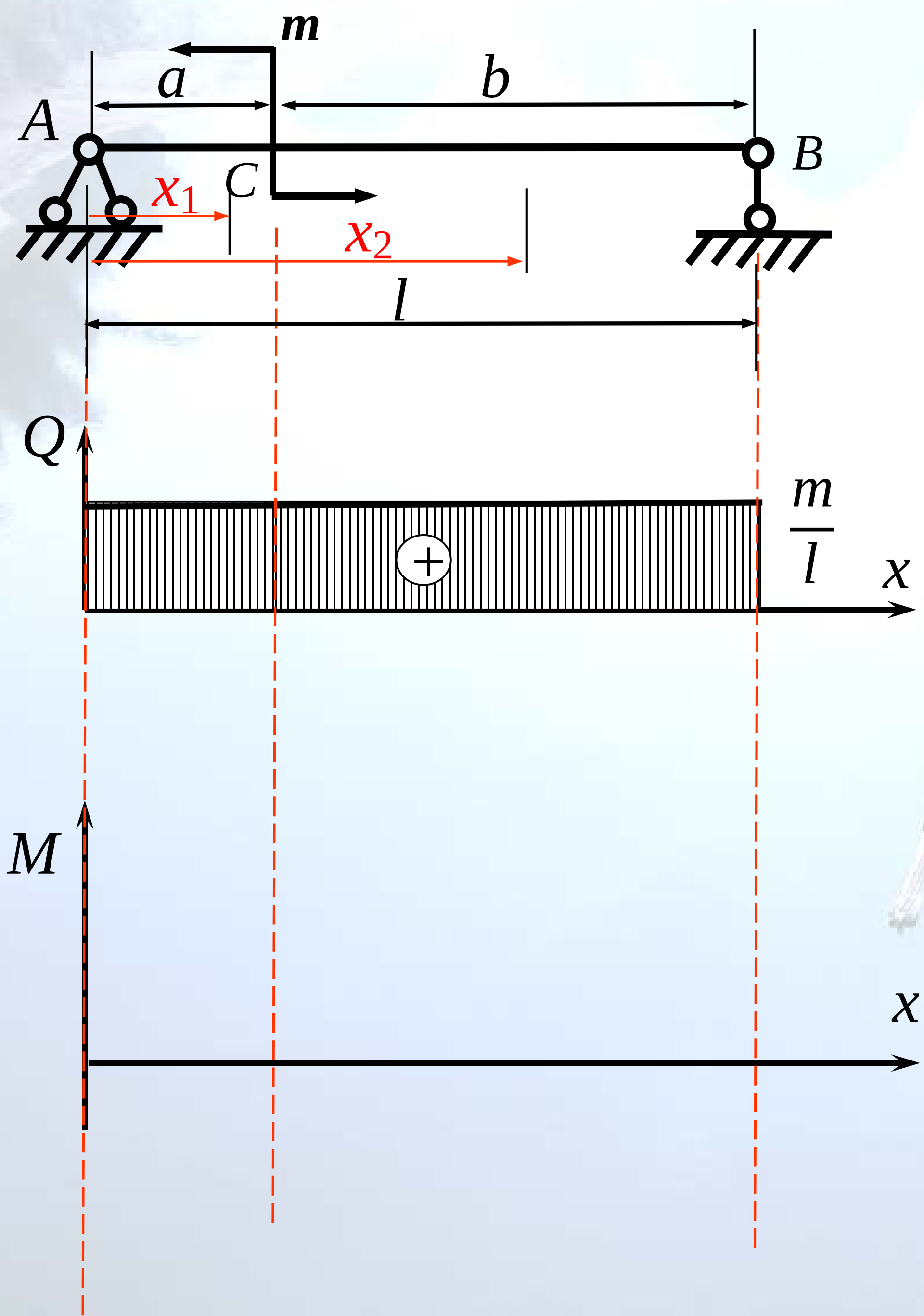
$$M(x_1) = R_A x_1 = \frac{m}{l} x_1$$

CB段：

$$Q(x_2) = -R_B = \frac{m}{l}$$

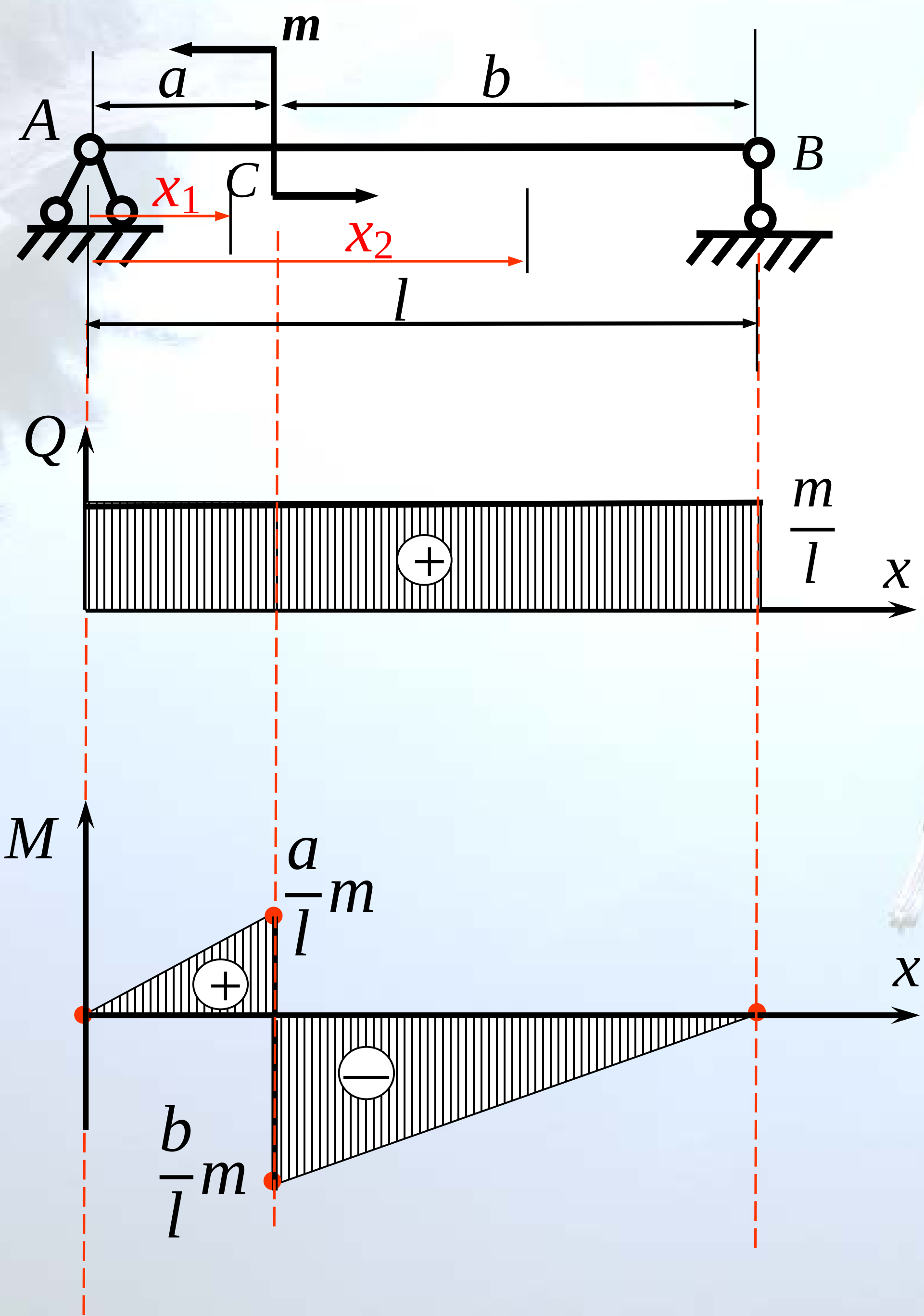
$$M(x_2) = R_B(l - x_2) = -\frac{m}{l}(l - x_2)$$

(3)根据方程画内力图



$$Q(x_1)=\frac{m}{l}$$

$$Q(x_2)=\frac{m}{l}$$



$$M(x_1)=\frac{m}{l}x_1$$

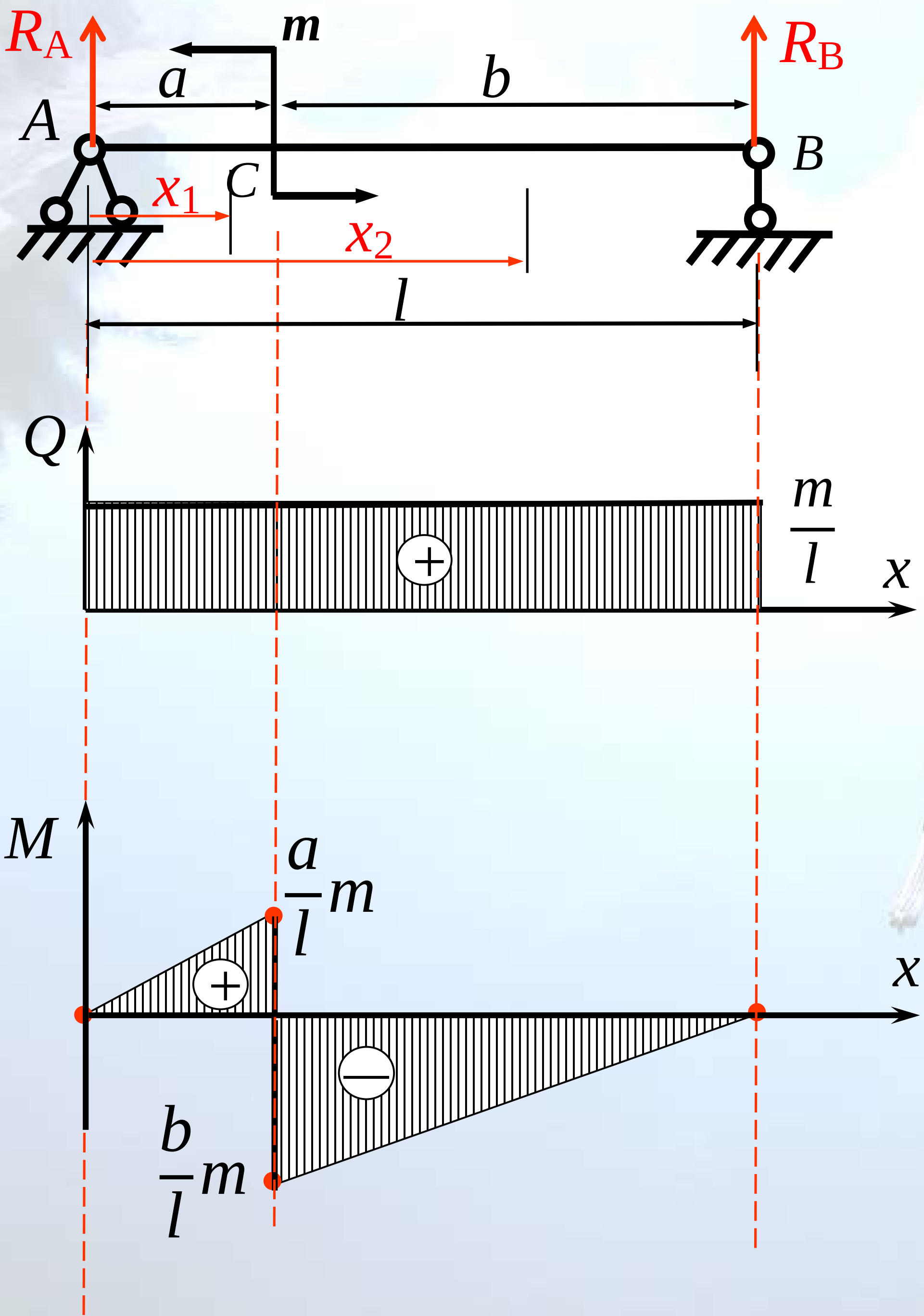
$$M(x_2)=-\frac{m}{l}(l-x_2)$$

$$x_1=0\ ,\quad M=0$$

$$x_1=a\ ,\quad M=\frac{a}{l}m$$

$$x_2=a\ ,\quad M=-\frac{b}{l}m$$

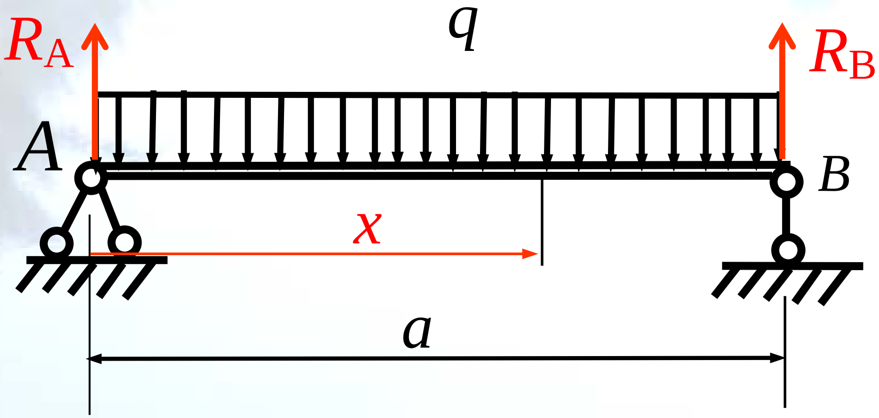
$$x_2=l\ ,\quad M=0$$



(4) 内力图特征：

在集中力偶作用的地方，剪力图无突变；弯矩图有突变，*m*逆时针转，*M*图向下变，变化值=*m*值。

[例7] 求梁的内力方程并画出内力图。



解：(1)求支座反力

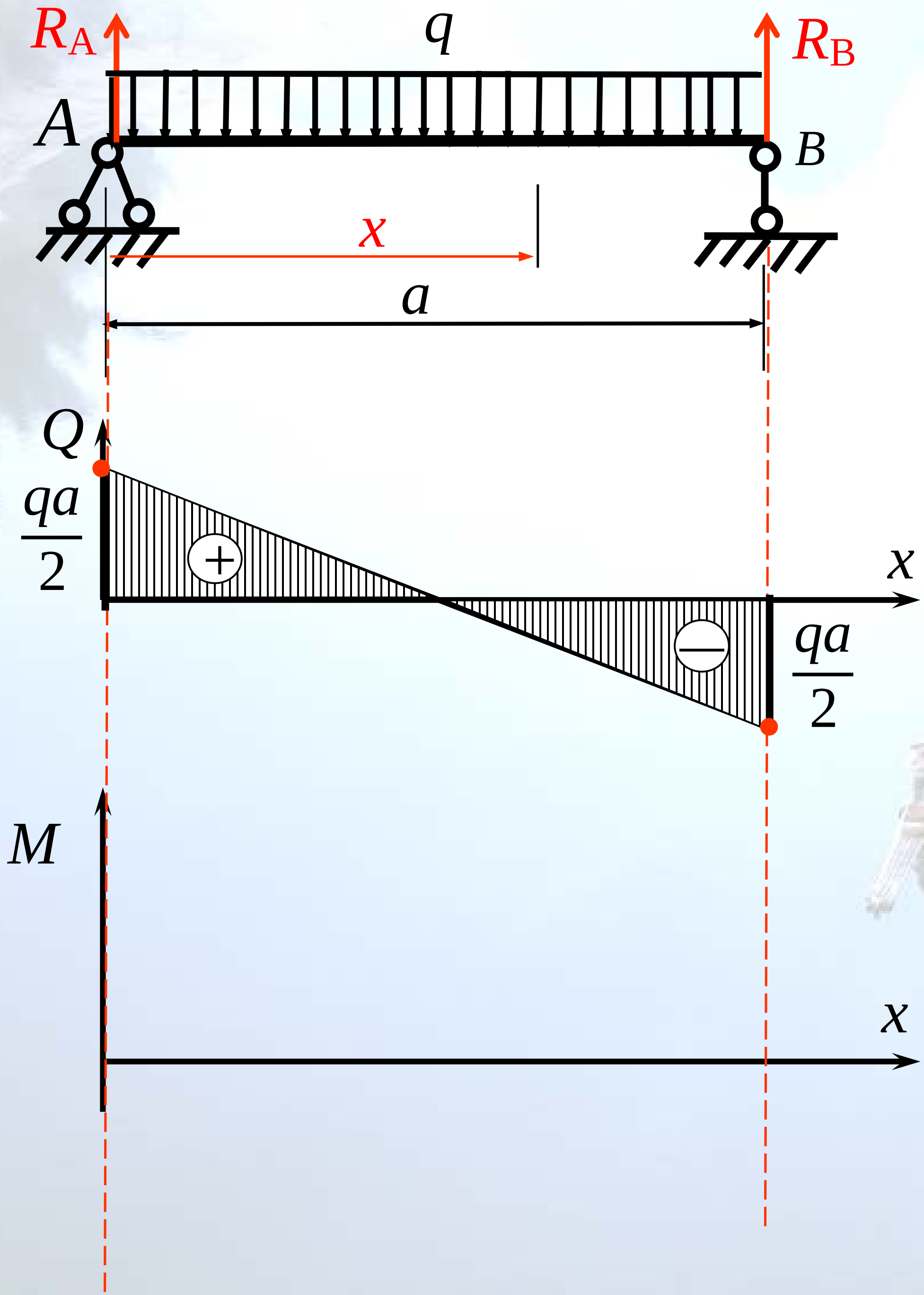
$$R_A = R_B = \frac{qa}{2}$$

(2)写出内力方程

$$Q(x) = R_A - qx = \frac{qa}{2} - qx$$

$$M(x) = R_A x - \frac{1}{2}qx^2$$

$$= \frac{1}{2}qax - \frac{1}{2}qx^2$$

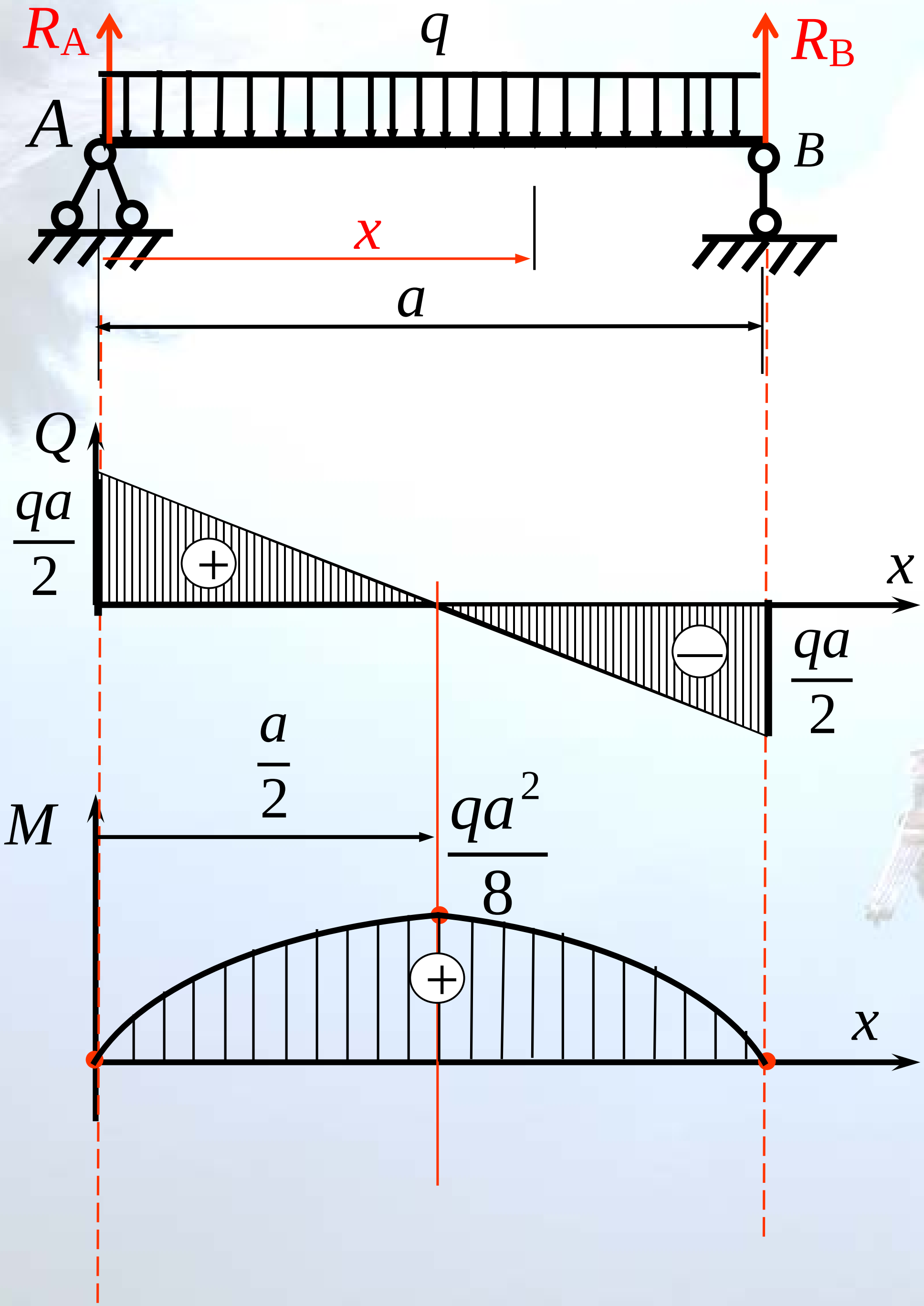


（3）根据方程画内力图

$$Q(x) = \frac{qa}{2} - qx$$

$$x=0\ ,\quad Q=\frac{qa}{2}$$

$$x=a\ ,\ Q=-\frac{qa}{2}$$

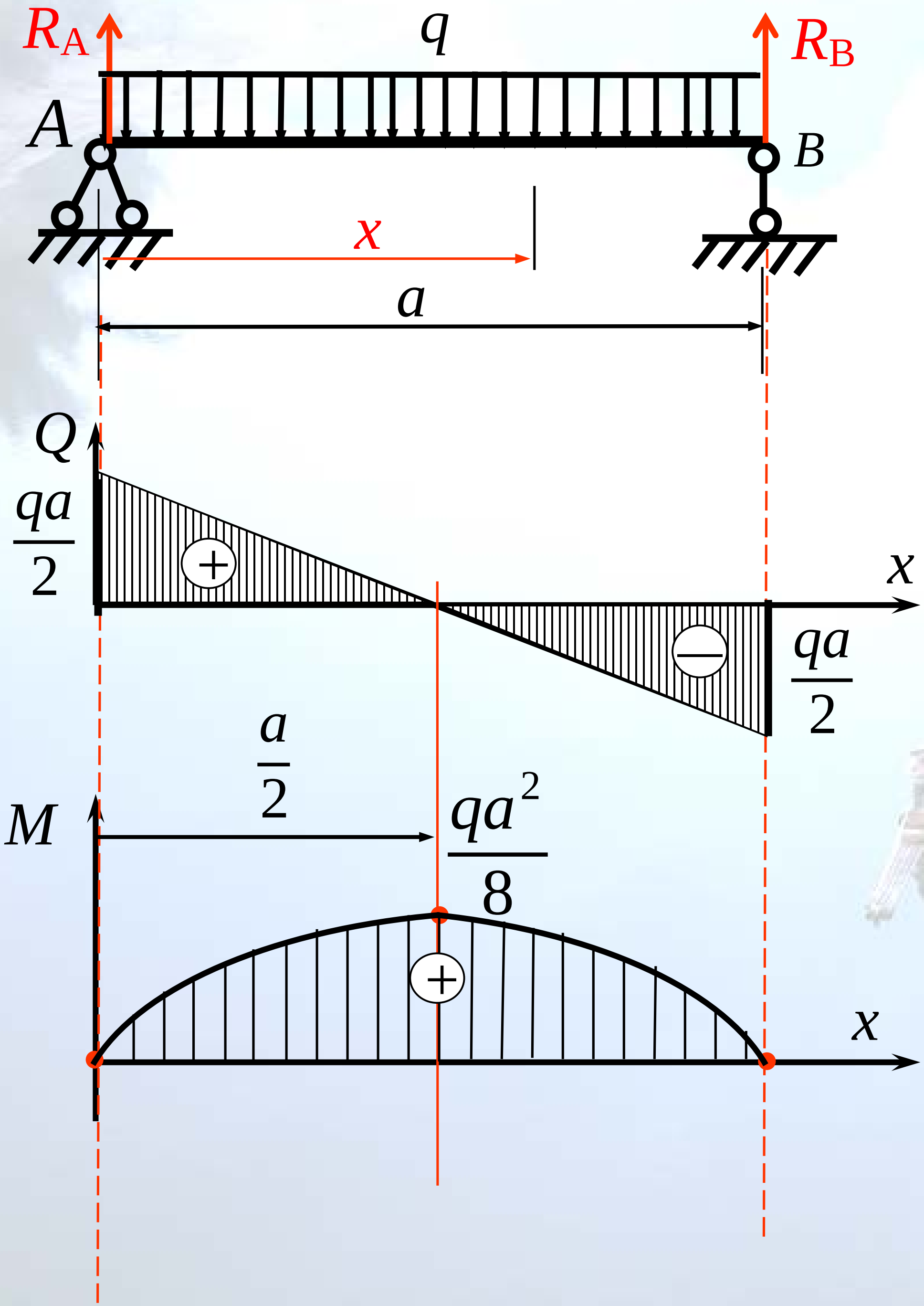


$$M(x)=\frac{1}{2}qax-\frac{1}{2}qx^2$$

$x=0$, $M=0$

$x=a$, $M=0$

$x=\frac{a}{2}$, $M=\frac{qa^2}{8}$

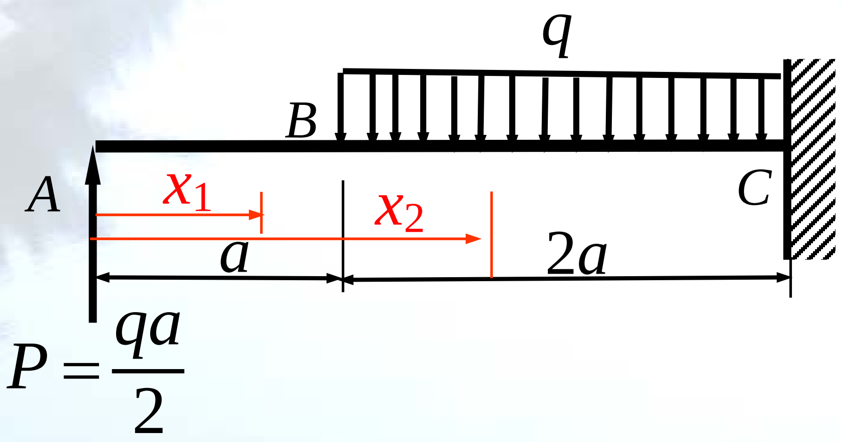


(4) 内力图特征：

在均布力作用的梁段上，剪力图为斜直线；弯矩图为二次抛物线，均布力向下作用，抛物线开口向下。

抛物线的极值在剪力为零的截面上。

[例8] 求梁的内力方程并画出内力图。



解：(1) 写出内力方程

$$Q(x_1) = P = \frac{qa}{2}$$

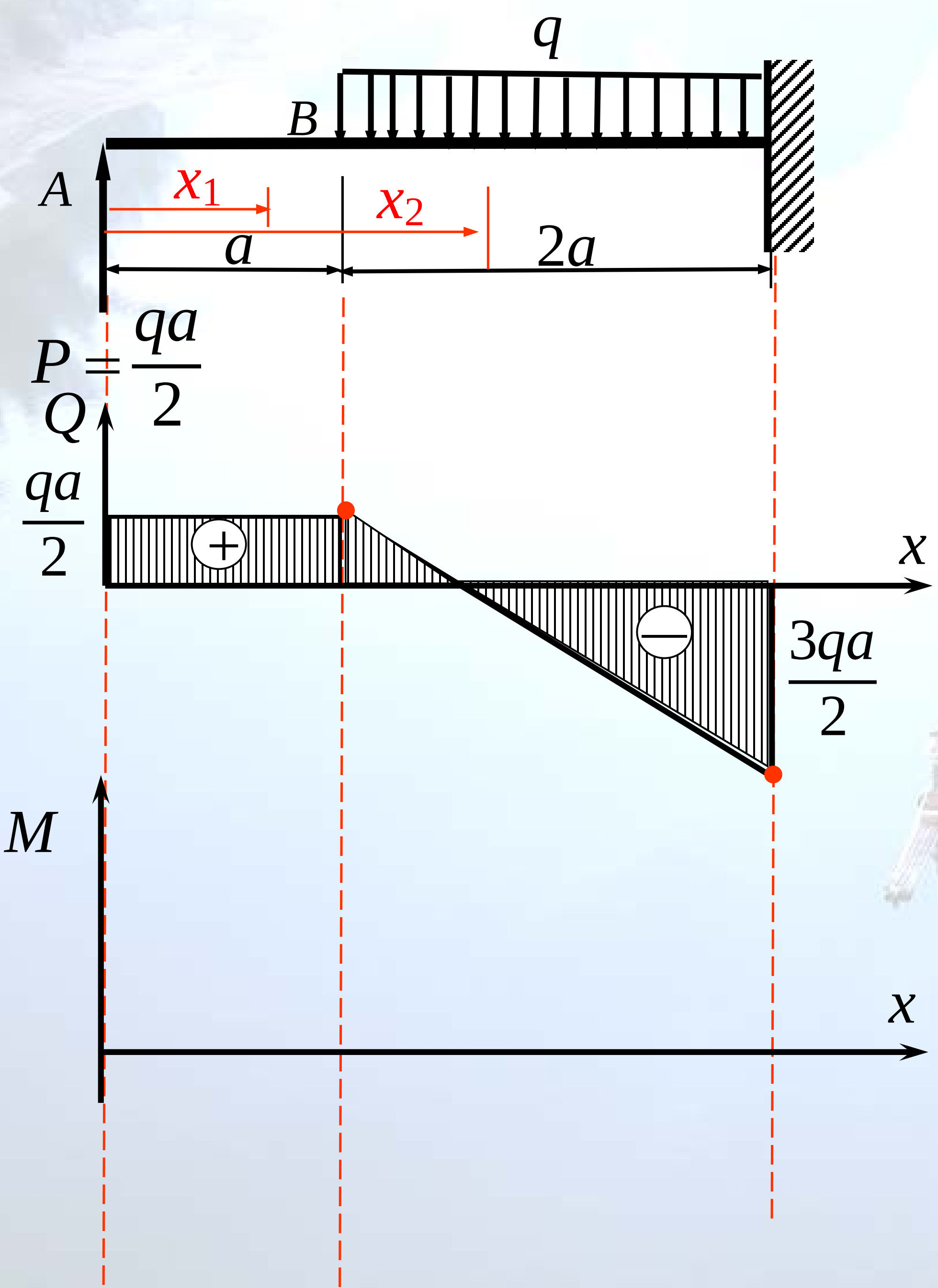
$$M(x_1) = Px_1 = \frac{1}{2}qax$$

$$Q(x_2) = P - q(x_2 - a) = \frac{qa}{2} - q(x_2 - a)$$

$$M(x_2) = Px_2 - \frac{1}{2}q(x_2 - a)^2$$

$$= \frac{1}{2}qax_2 - \frac{1}{2}q(x_2 - a)^2$$

(2)根据方程画内力图

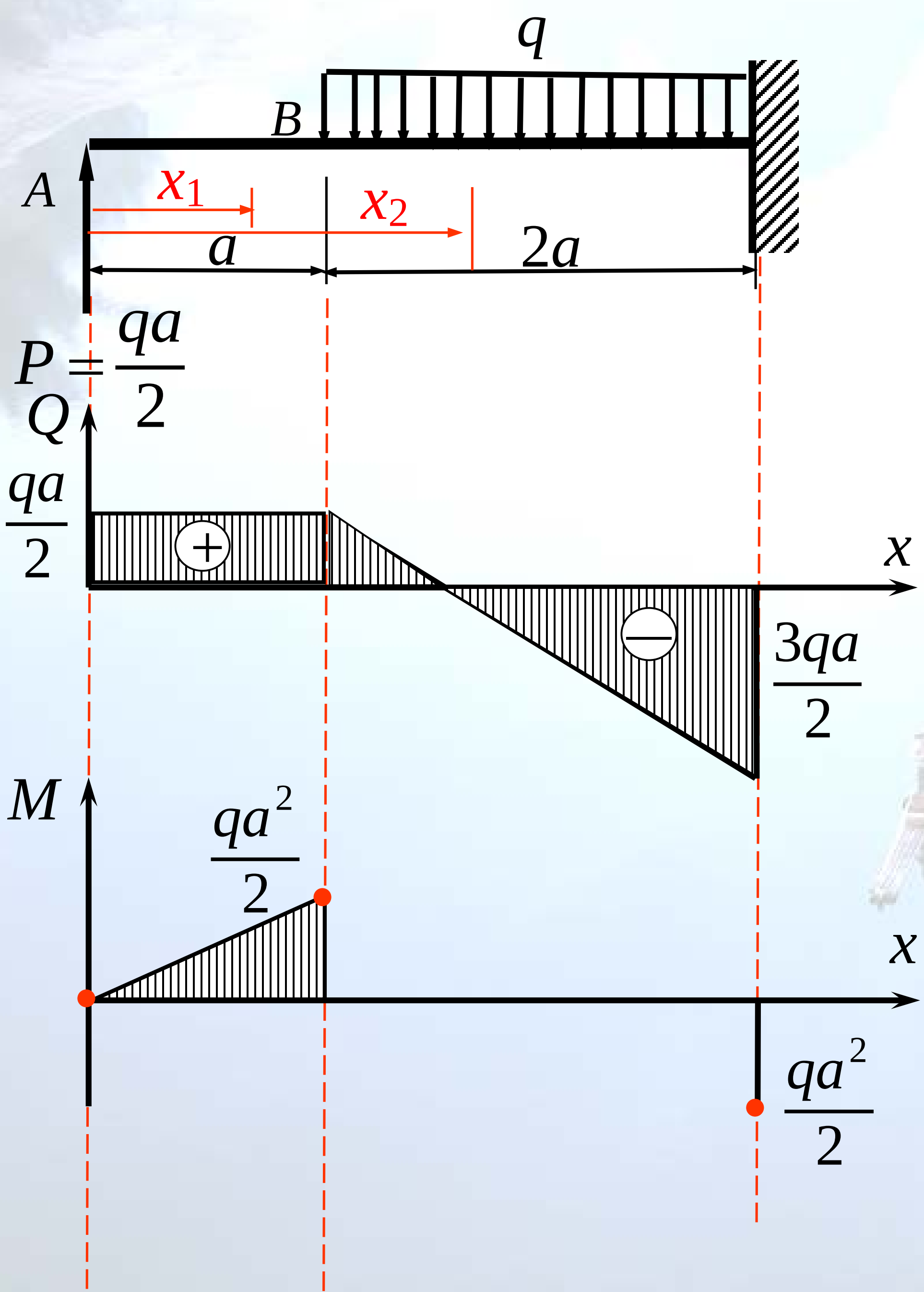


$$Q(x_1)=\frac{qa}{2}$$

$$Q(x_2)=\frac{qa}{2}-q(x_2-a)$$

$$x_2=a\ ,Q=\frac{qa}{2}$$

$$x_2=3a\ ,Q=-\frac{3qa}{2}$$



$$M(x_1)=\frac{1}{2}qax$$

$$M(x_2)=\frac{1}{2}qax_2-\frac{1}{2}q(x_2-a)^2$$

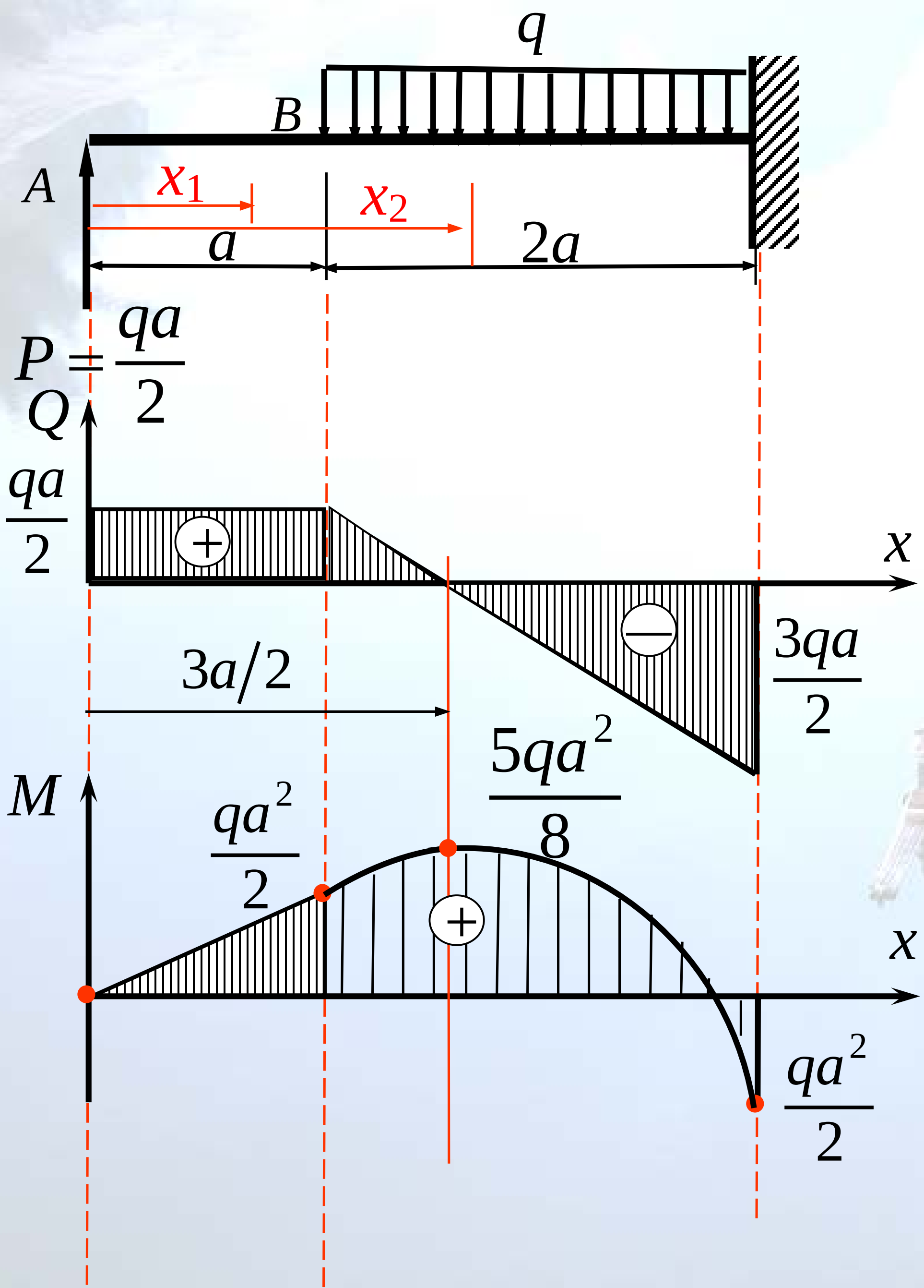
$$x_1=0\ ,M=0$$

$$x_1=a\ ,M=\frac{qa^2}{2}$$

$$x_2=a\ ,M=\frac{qa^2}{2}$$

$$x_2=3a\ ,M=-\frac{qa^2}{2}$$

二次抛物线的升降，
开口方向，极值点



$$M(x_2)=\frac{1}{2}qax_2-\frac{1}{2}q(x_2-a)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x_2)}{\mathrm{d}x_2}=\frac{qa}{2}-q(x_2-a)$$

$$=Q(x_2)$$

极值点： 令 $Q(x_2)=0$

即：$\frac{qa}{2}-q(x_2-a)=0$

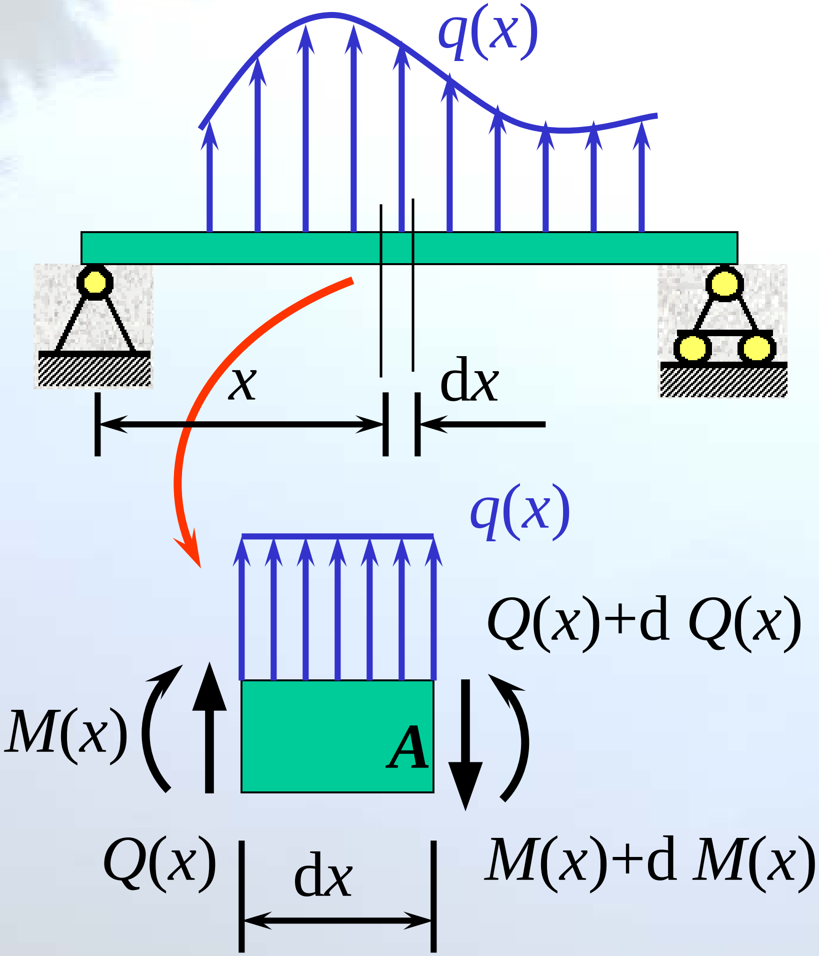
得：$x_0=\frac{3}{2}a$

$$M_0=\frac{5}{8}qa^2$$

§ 4–5 载荷集度、剪力和弯矩间的关系

一、 剪力、弯矩与分布荷载间的关系

取一微段dx， 进行平衡分析。



$$\sum Y = 0$$

$$Q(x) + q(x)\mathrm{d}x - [Q(x) + \mathrm{d}Q(x)] = 0$$

$$q(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}Q(x)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)}$$

剪力的导数等于该点处荷载集度的大小。

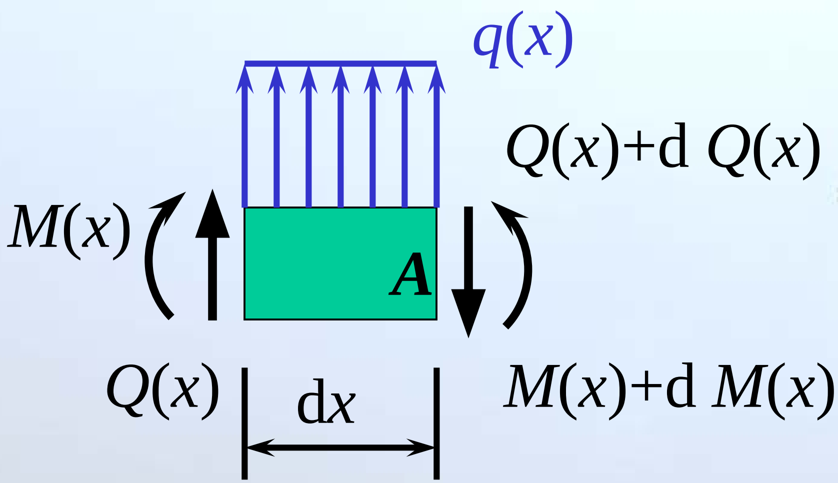
$\sum m_A = 0$,

省略高阶微量

$$Q(x)\mathrm{d}x + \boxed{\frac{1}{2}q(x)(\mathrm{d}x)^2} + \cancel{M}(x) - [\cancel{M}(x) + \mathrm{d}M(x)] = 0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x)}$$

弯矩图的导数等于该点处剪力的大小。



弯矩与荷载集度的关系是：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M^2(x)}{\mathrm{d}x^2} = q(x)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = q(x) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}M^{2}(x)}{\mathrm{d}x^{2}} = q(x) \end{cases}$$

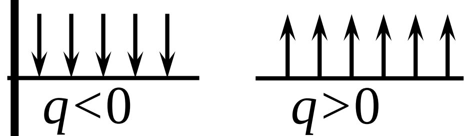
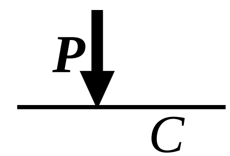
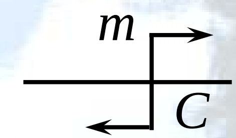
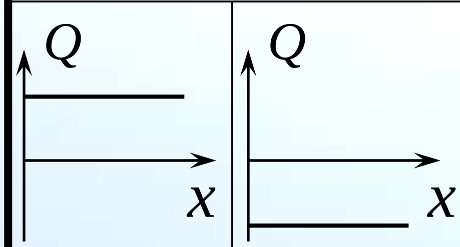
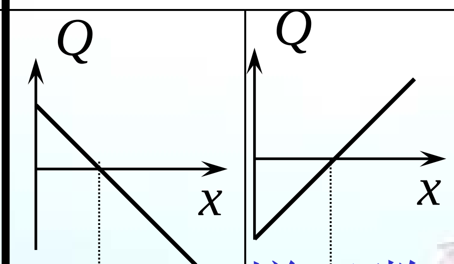
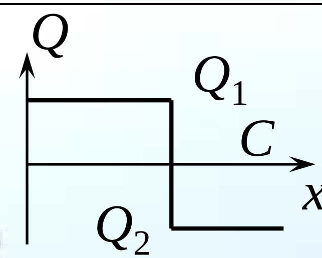
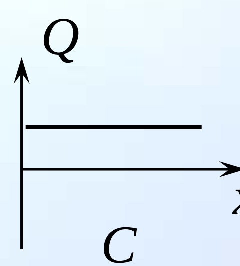
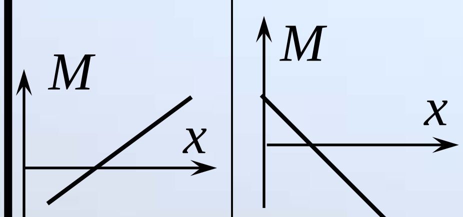
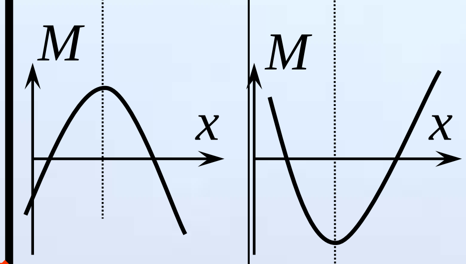
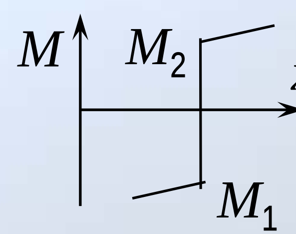
1、若q=0，则Q=常数，M是直线；

2、若q=常数，则Q是斜直线，

M为二次抛物线；

3、M的极值发生在Q=0的截面上。

二、剪力、弯矩与外力间的关系

外力	无外力段	均布载荷段	集中力	集中力偶
	$q=0$			
Q图特征	水平直线	斜直线	向下突变	无变化
	 $Q>0$ $Q<0$	 降函数 增函数	 $Q_1-Q_2=P$	
M图特征	斜直线	曲线	有折角	向上突变
	 增函数 降函数			 $M_2-M_1=m$

4、将微分关系转为积分关系：

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=Q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)$$

$$\mathrm{d}M(x)=Q(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}Q(x)=q(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{M_a}^{M_b}\mathrm{d}M(x)=\int_a^b Q(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{Q_a}^{Q_b}\mathrm{d}Q(x)=\int_a^b q(x)\mathrm{d}x$$

$$M_b-M_a=\int_a^b Q(x)\mathrm{d}x$$

$$Q_b-Q_a=\int_a^b q(x)\mathrm{d}x$$

$=ab$区间上Q的面积

$=ab$区间上q的面积

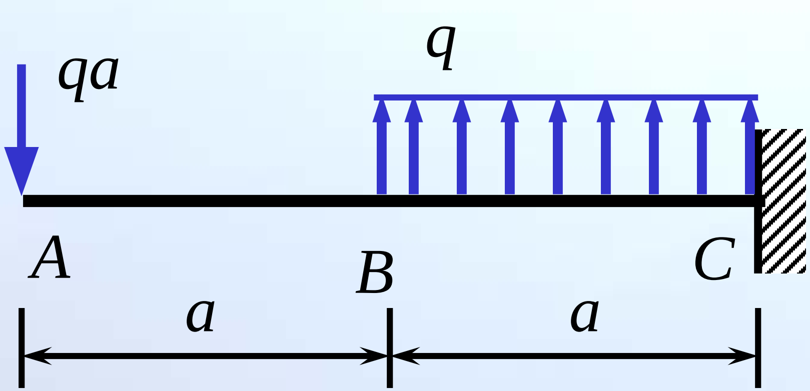
$M_b=M_a+ab$区间上Q的面积

$Q_b=Q_a+ab$区间上q的面积

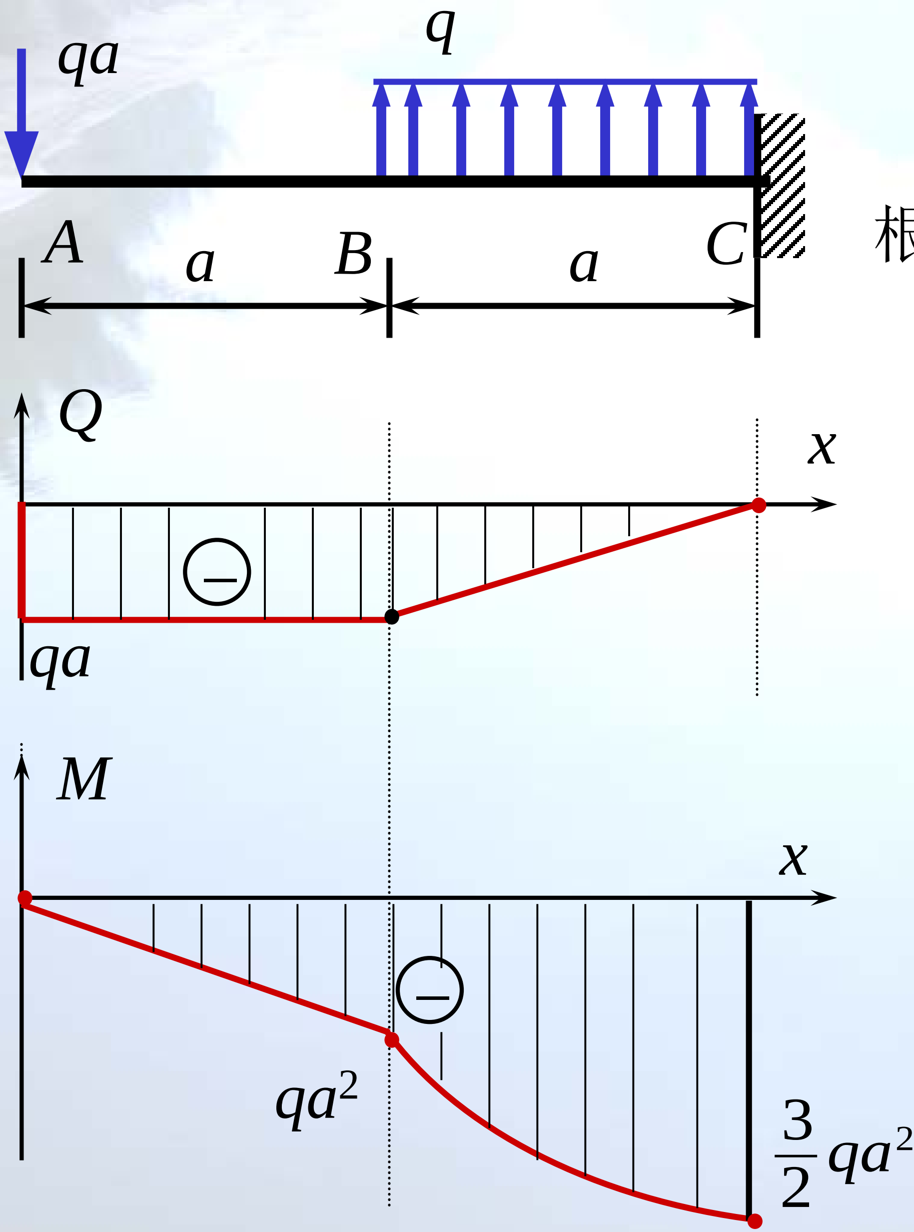
简易作图法： 利用内力和外力的关系及**特殊点**的内力值来作图的方法。

特殊点：端点、分区点（外力变化点）和驻点等。

[例4] 用简易作图法画下列各图示梁的内力图。



解：



根据
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=Q(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}M^2(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x) \end{cases}$$

及Q图和M图的特征作图。

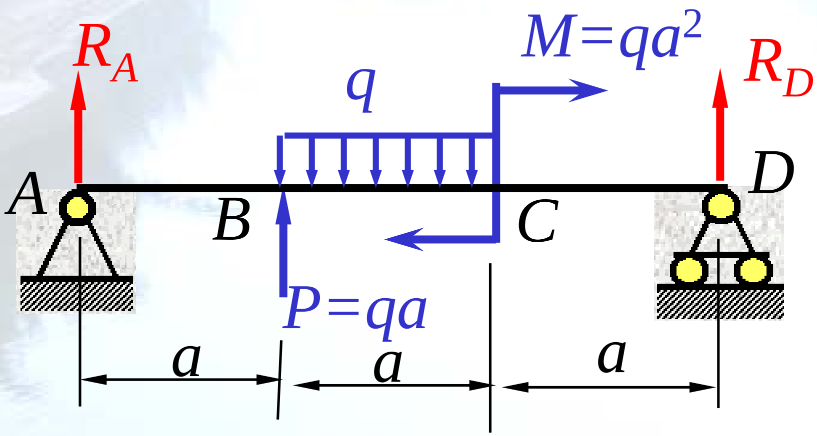
$$Q_C=0$$

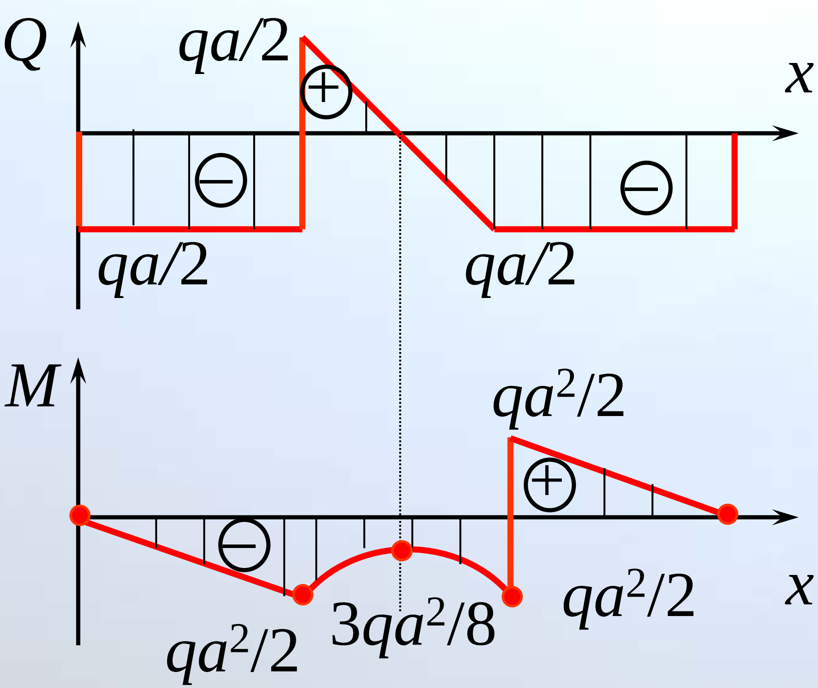
$$M_B=-qa^2$$

$$M_C=M_B-\frac{qa^2}{2}$$

$$=-\frac{3qa^2}{2}$$

[例9] 用简易作图法画下列各图示梁的内力图。





解：求支反力

$$R_A=-\frac{qa}{2}\downarrow\ ;\ R_D=\frac{qa}{2}\uparrow$$

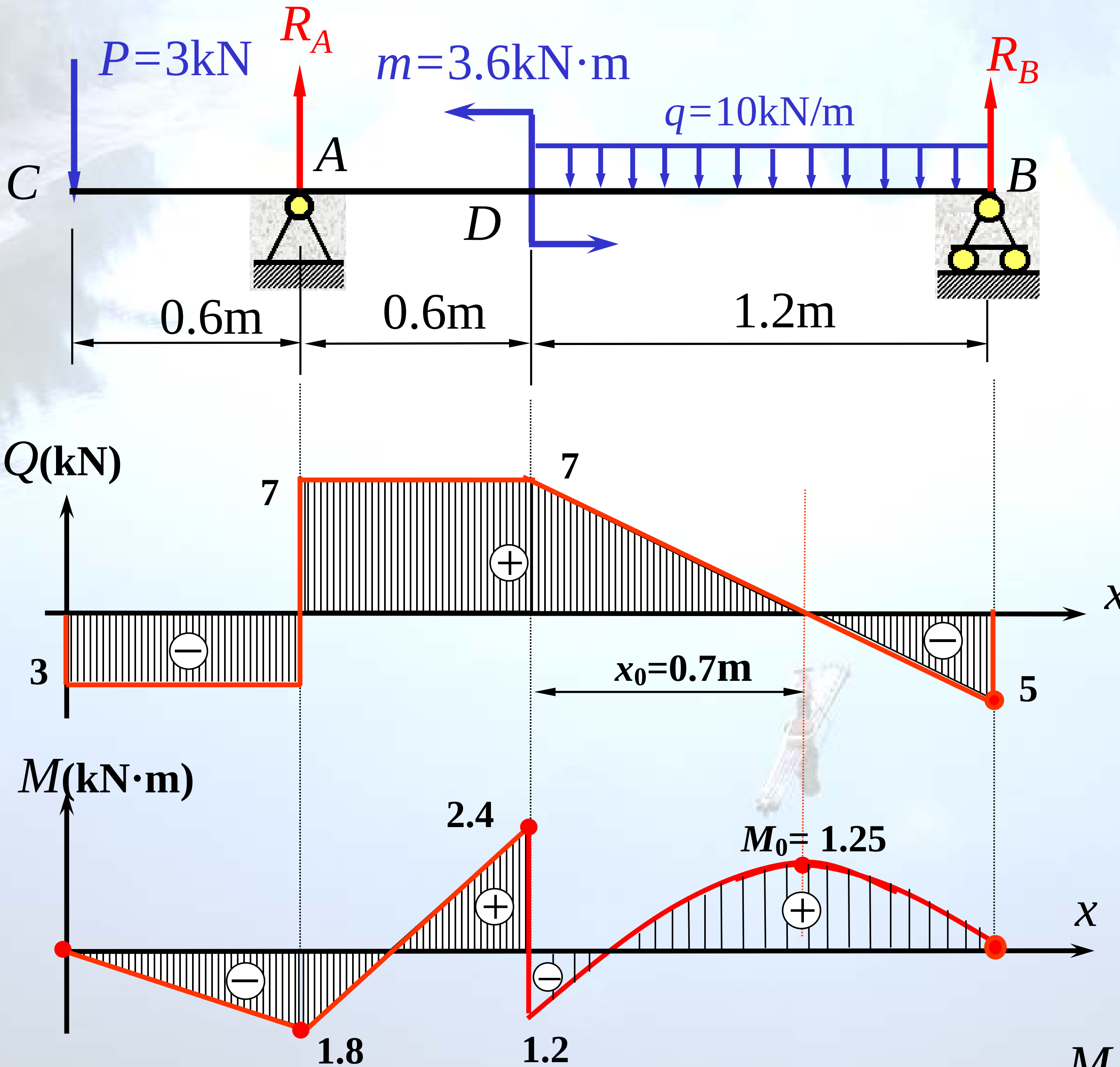
$$Q_C=\frac{qa}{2}-qa=-\frac{qa}{2}$$

$$M_B=-\frac{qa^2}{2}$$

$$M_C^-=-\frac{qa^2}{2}$$

$$M_0=-\frac{qa^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{qa}{2}\cdot\frac{a}{2}$$

$$=-\frac{3qa^2}{8}$$



[例10]

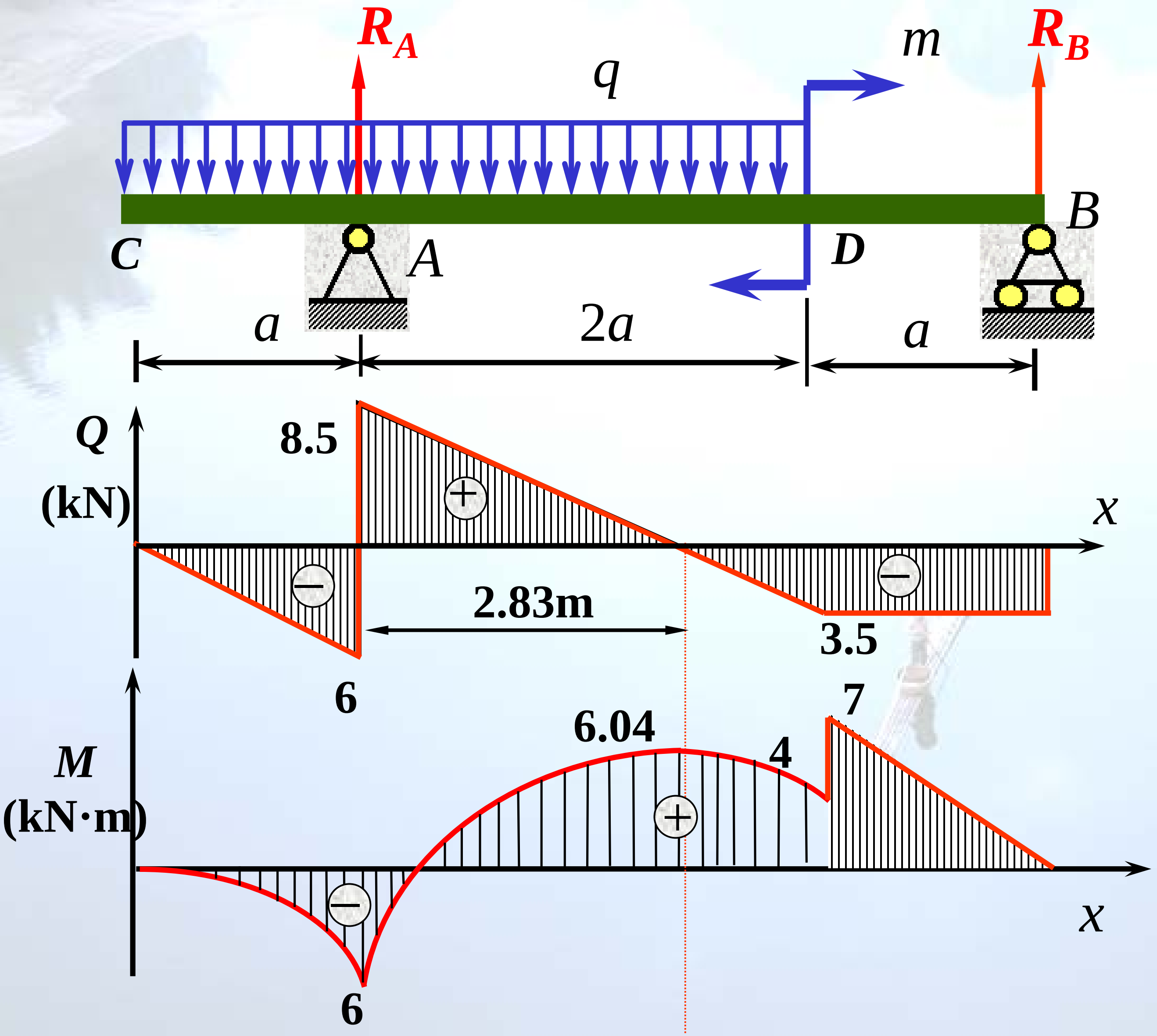
R_A=10kN

R_B=5kN

$$0 = 7 - q \cdot x_0$$

$$M_0 = -1.2 + \frac{7 \times 0.7}{2}$$

[例4-4] （P122)



q=3kN/m

m=3kN·m

a=2m

R_A=14.5kN;

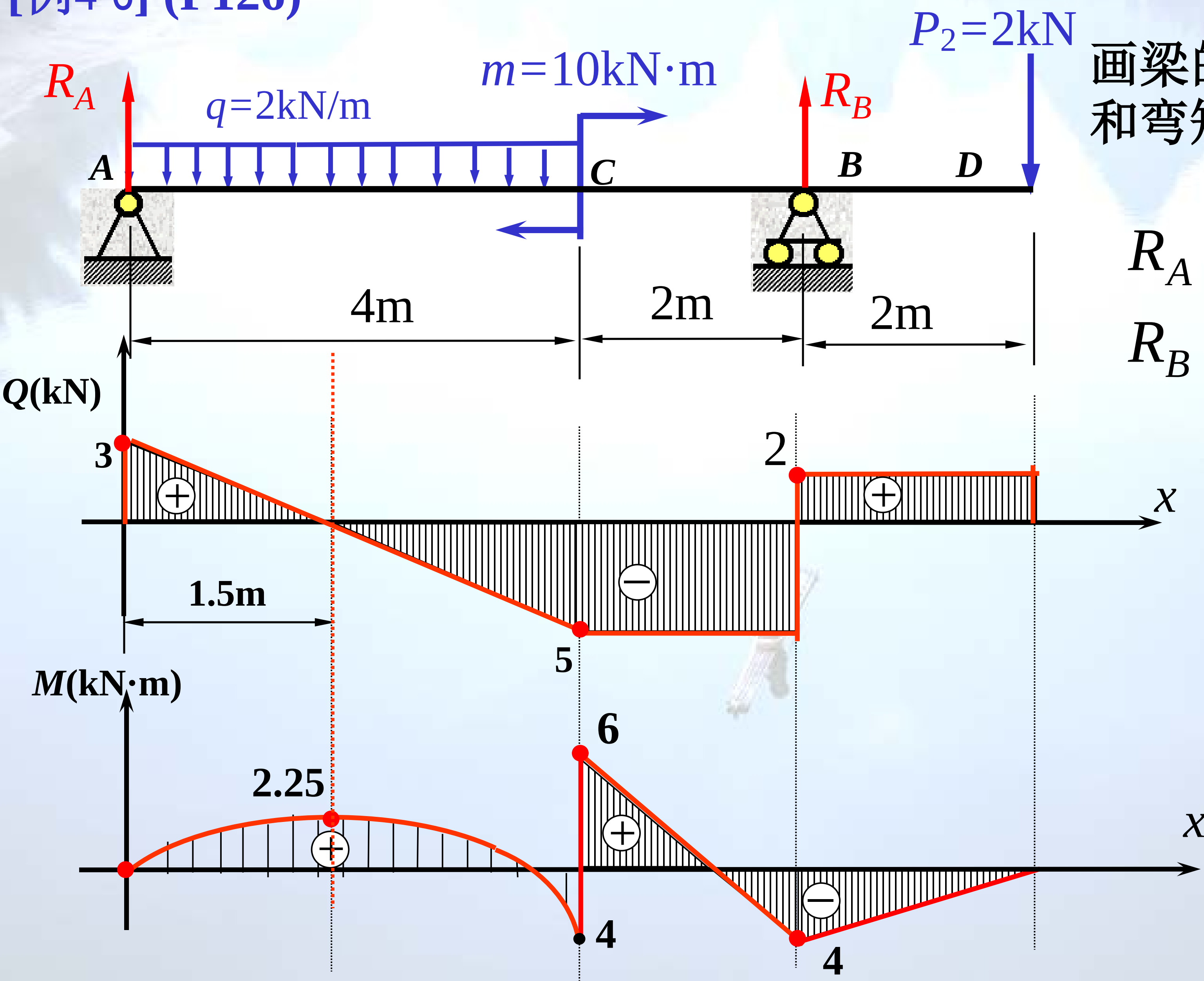
R_B=3.5kN

[例4-6] (P126)

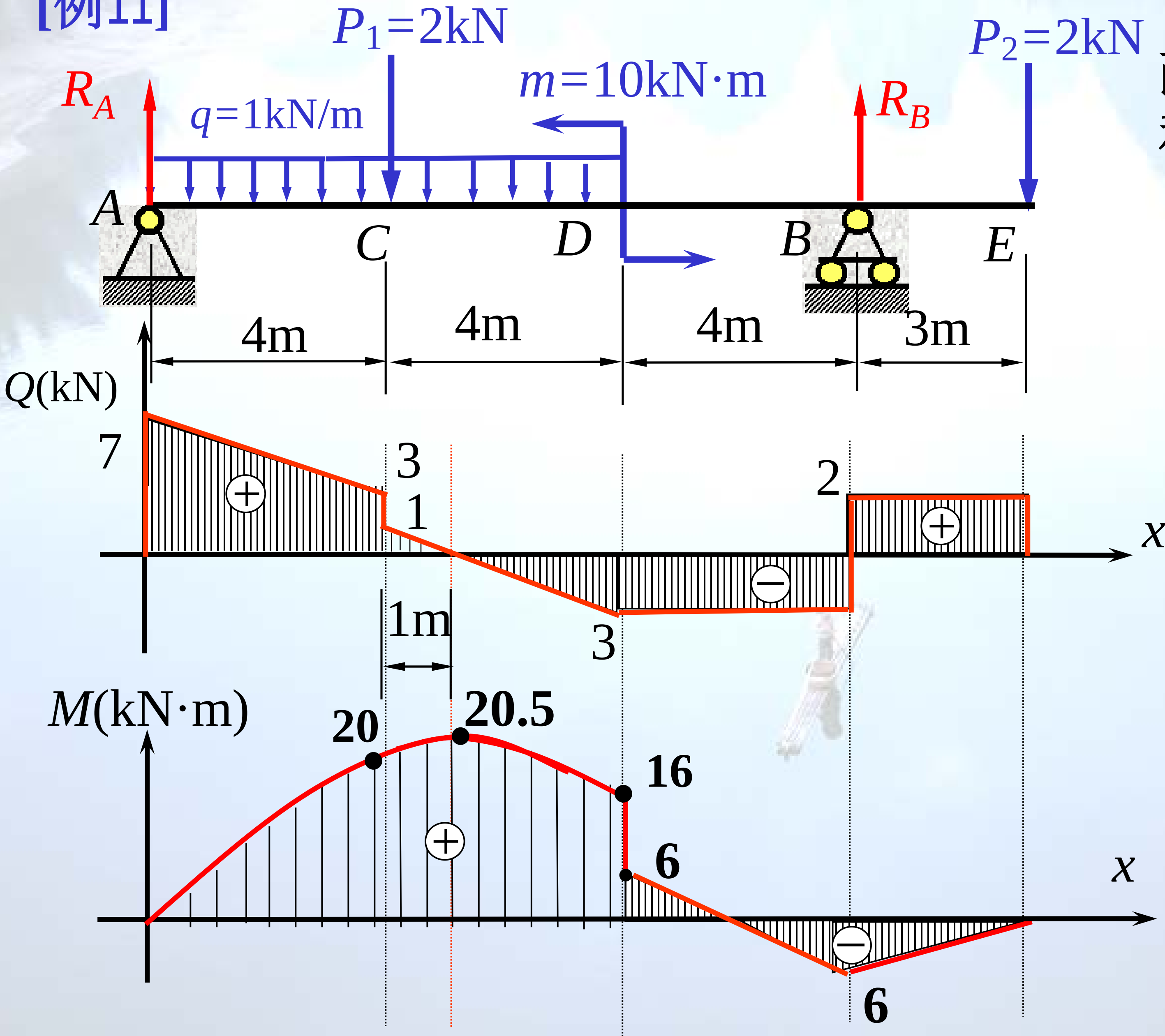
画梁的剪力图和弯矩图

$R_A = 3\text{kN}$

$R_B = 7\text{kN}$



[例11]

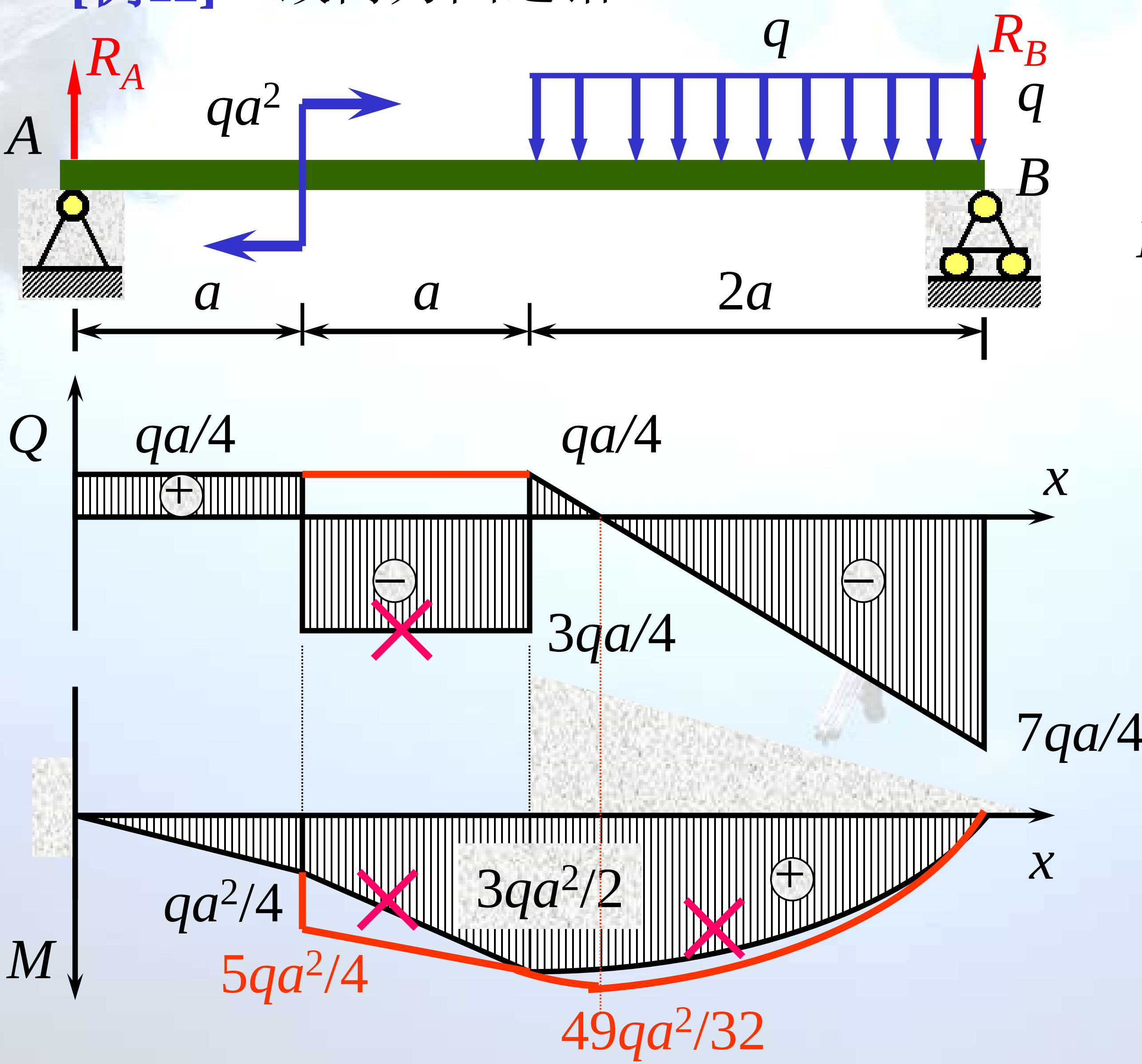


画梁的剪力图和弯矩图

R_A=7kN

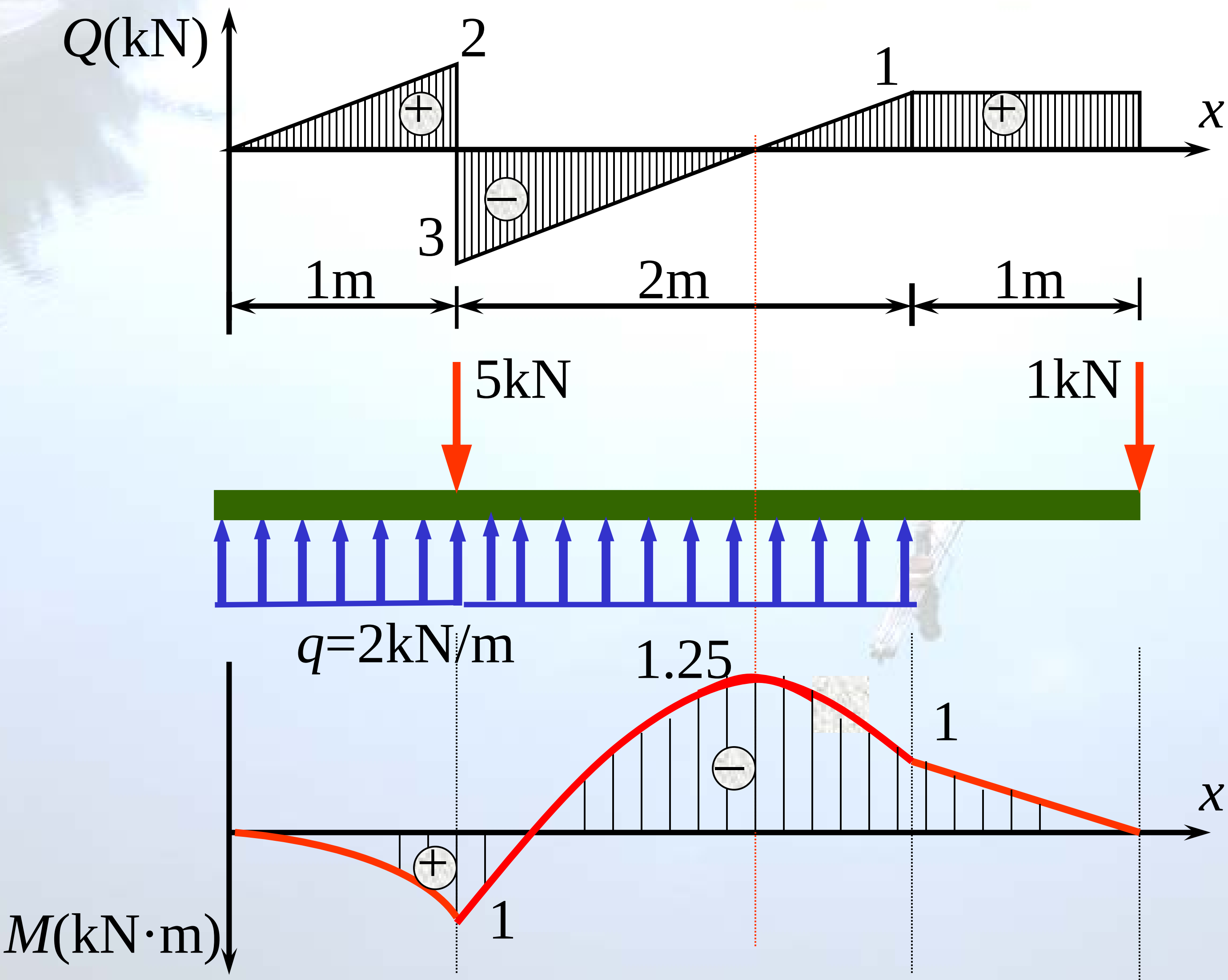
R_B=5kN

[例12] 改内力图之错。



$$R_A=\frac{qa}{4};R_B=\frac{7qa}{4}$$

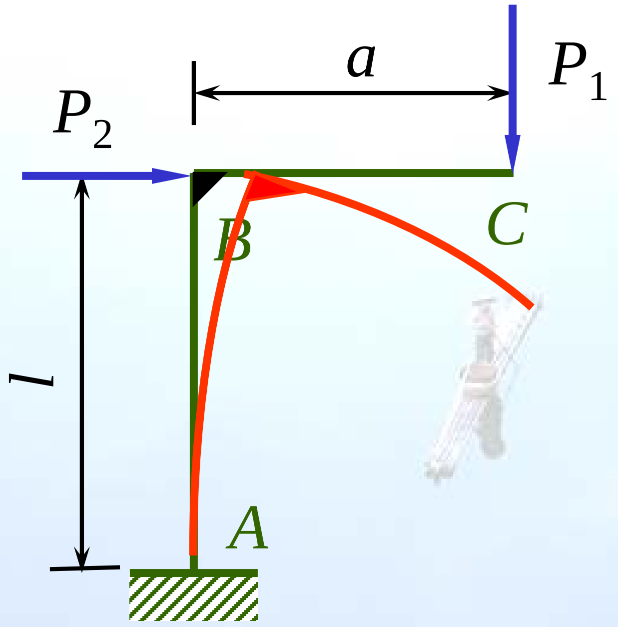
[例13] 已知Q图，求外载及M图（梁上无集中力偶）。



§ 4–6　平面刚架和曲杆的内力图

一、平面刚架

1. 平面刚架：同一平面内，不同取向的杆件，通过杆端相互**刚性连接**而组成的结构。



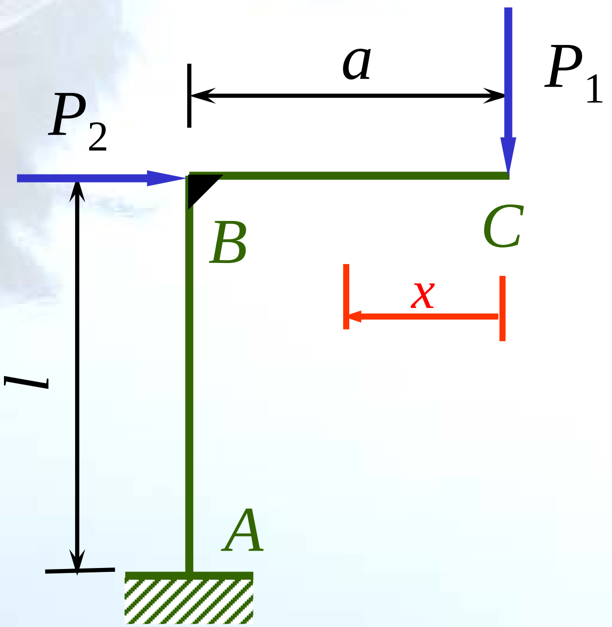
特点：刚架各杆的内力有：Q、M、N。

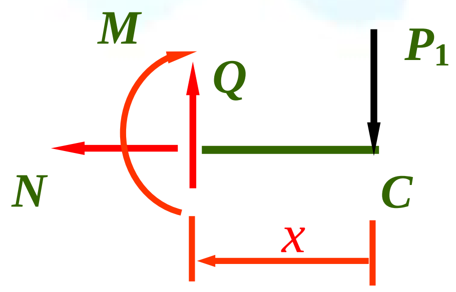
2. 内力图规定：

剪力图及轴力图：可画在刚架轴线的任一侧（通常正值画在刚架的外侧），但须注明正、负号。

弯矩图：通常正值画在刚架的外侧，负值画在刚架的内侧，不注明正、负号。

[例14]　试作图示刚架的内力图。

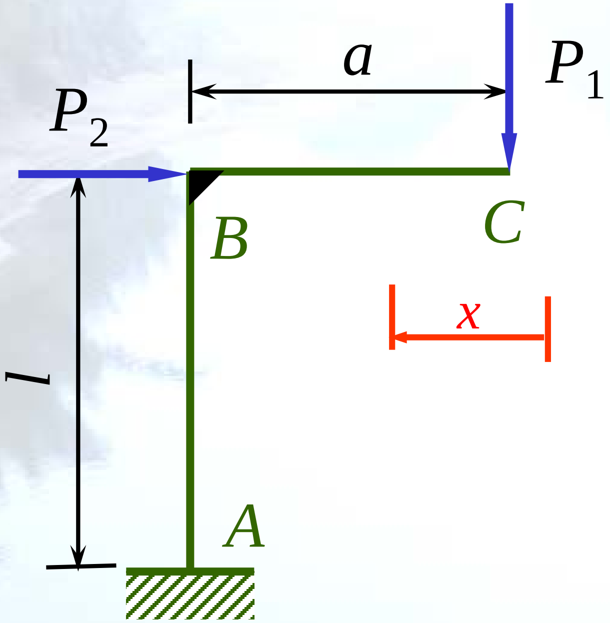


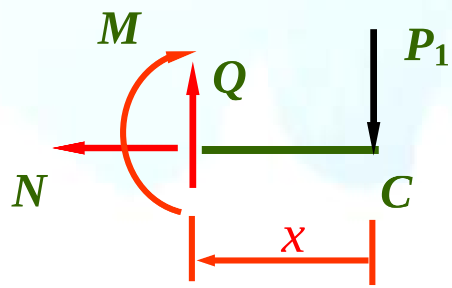


$$N = 0$$

$$Q = P_1$$

$$M = -P_1 x$$



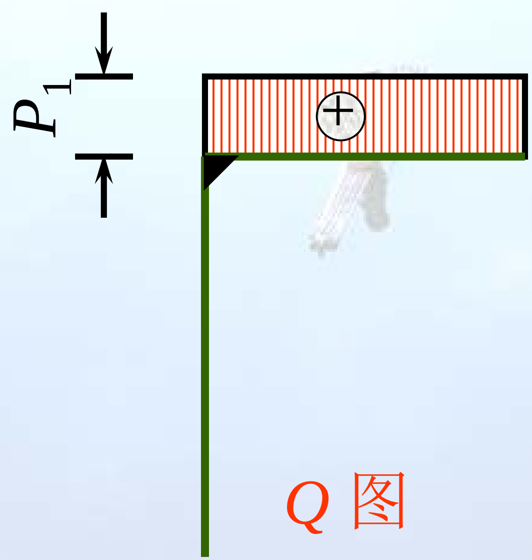


$$N = 0$$

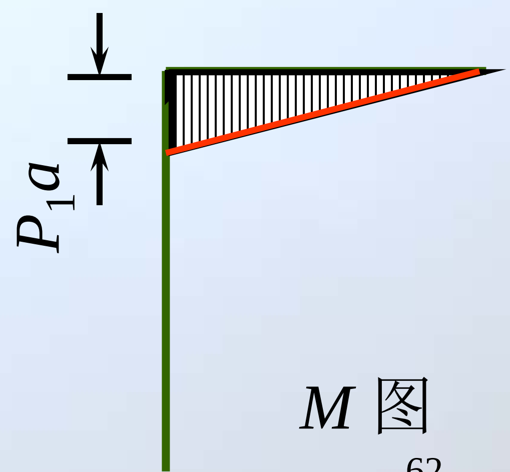
$$Q = P_1$$

$$M = -P_1 x$$

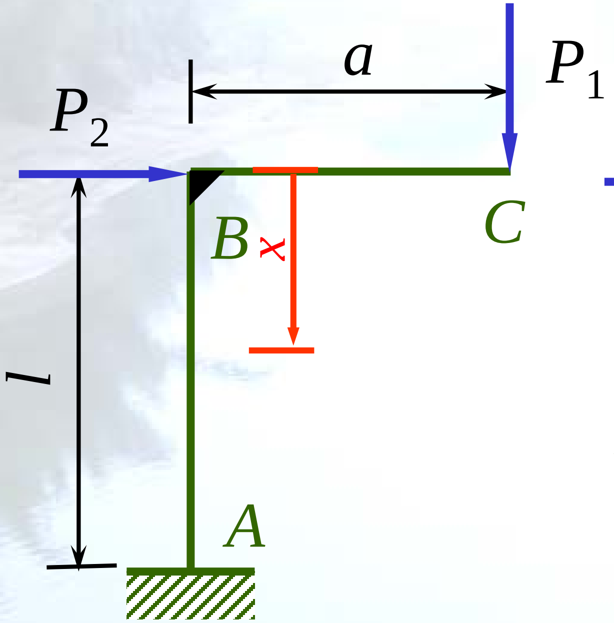
N 图

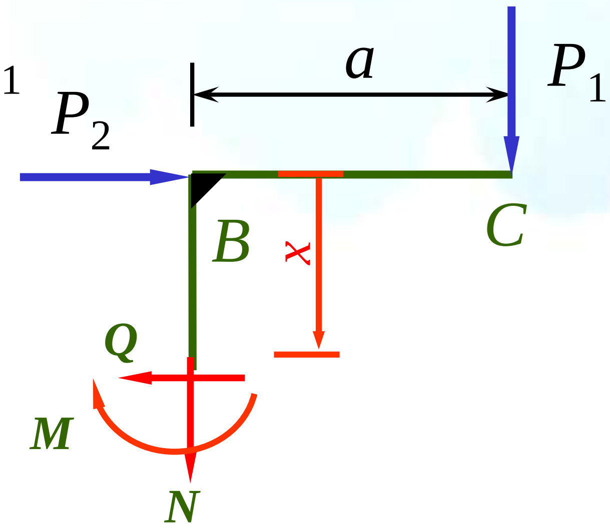


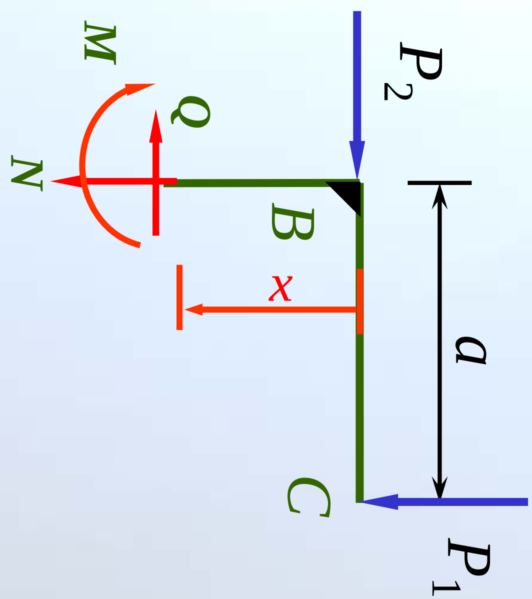
Q 图



M 图



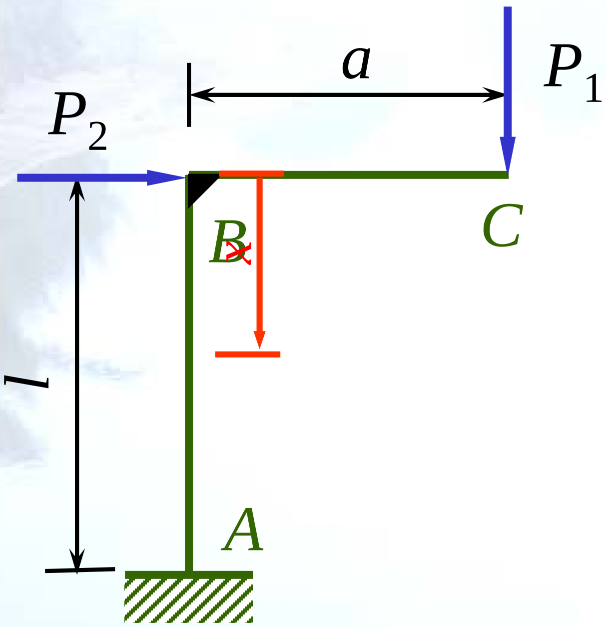




$$N = -P_1$$

$$Q = P_2$$

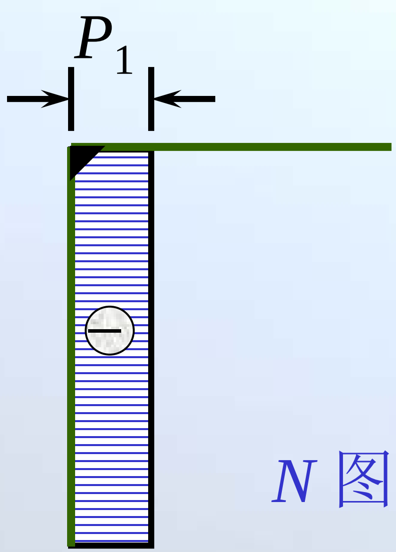
$$M = -P_1 a - P_2 x$$

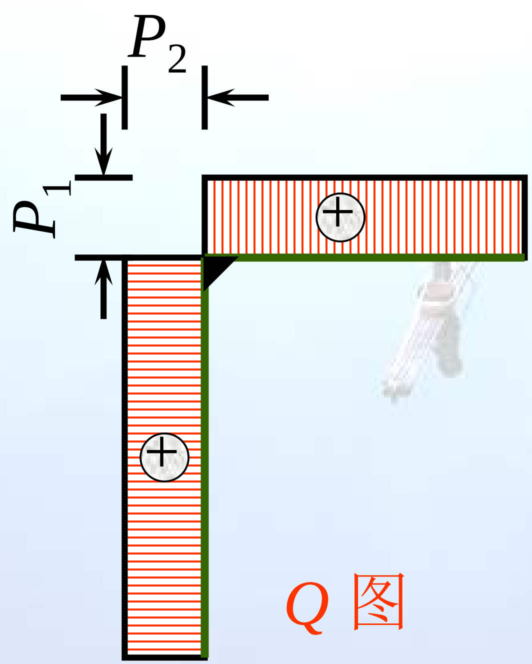


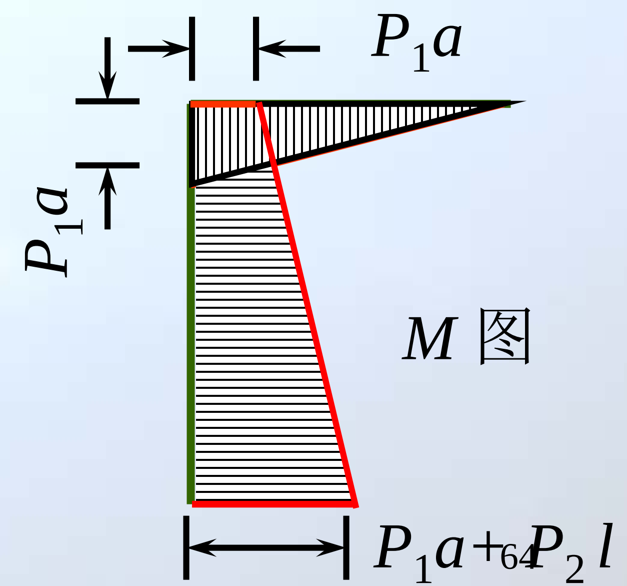
$$N=-P_1$$

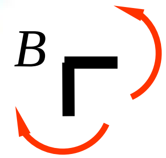
$$Q=P_2$$

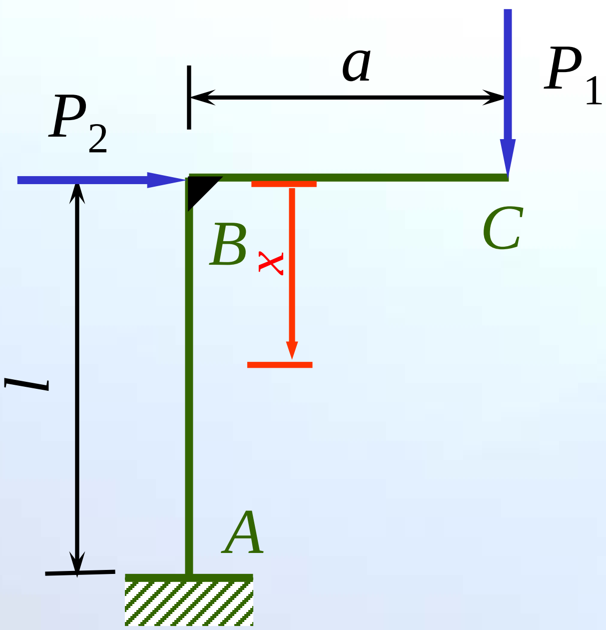
$$M=-P_1a-P_2x$$

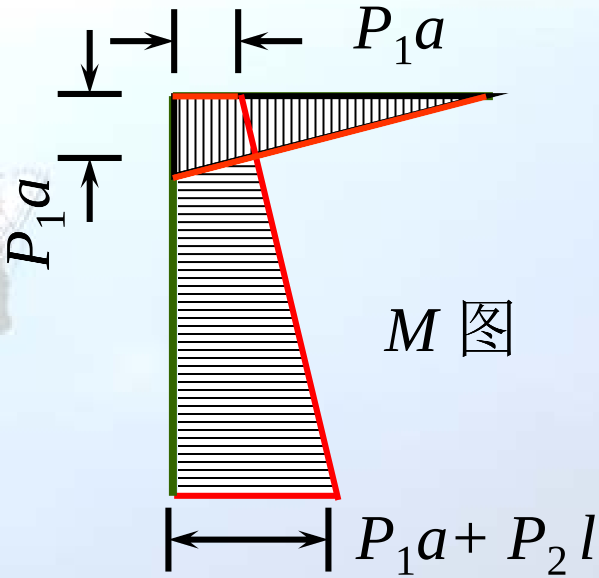




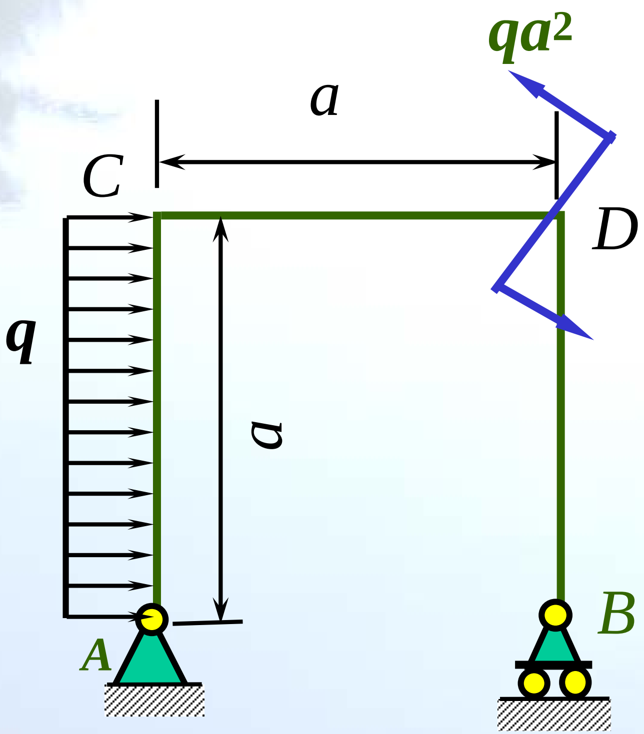



B

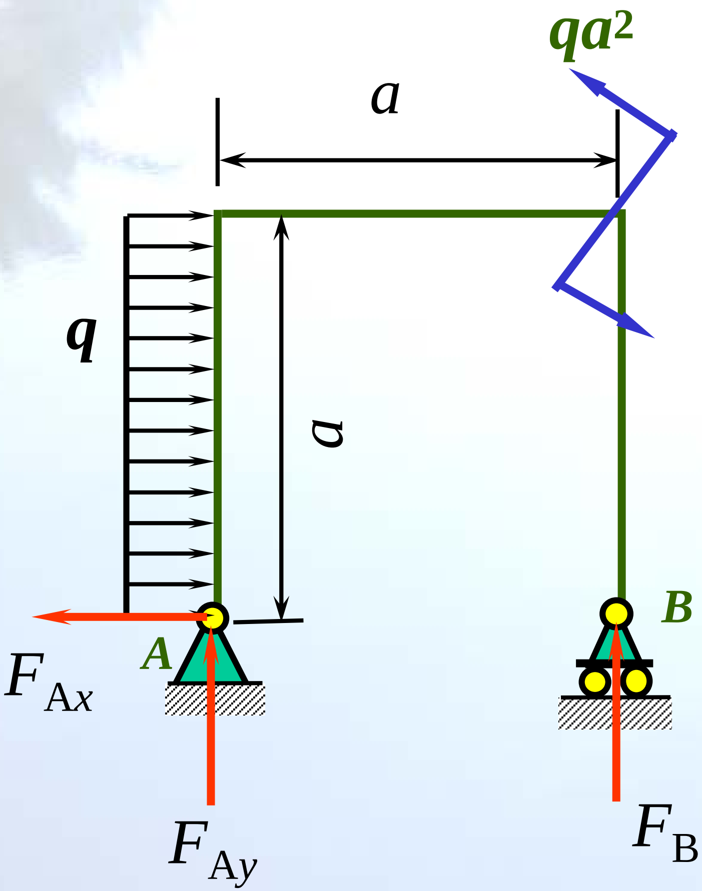

a
P1
P2
B
x
C
l
A


P1a
P1a
M 图
P1a+ P2 l

[例15] 试作图示刚架的弯矩图。



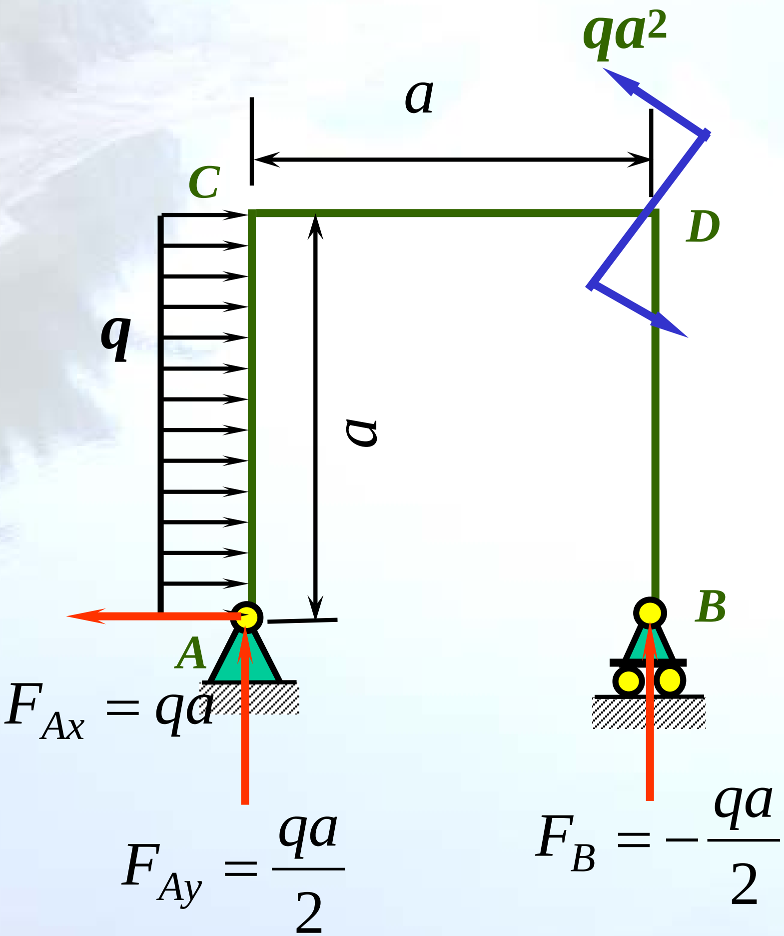
解： 1、先求支反力。

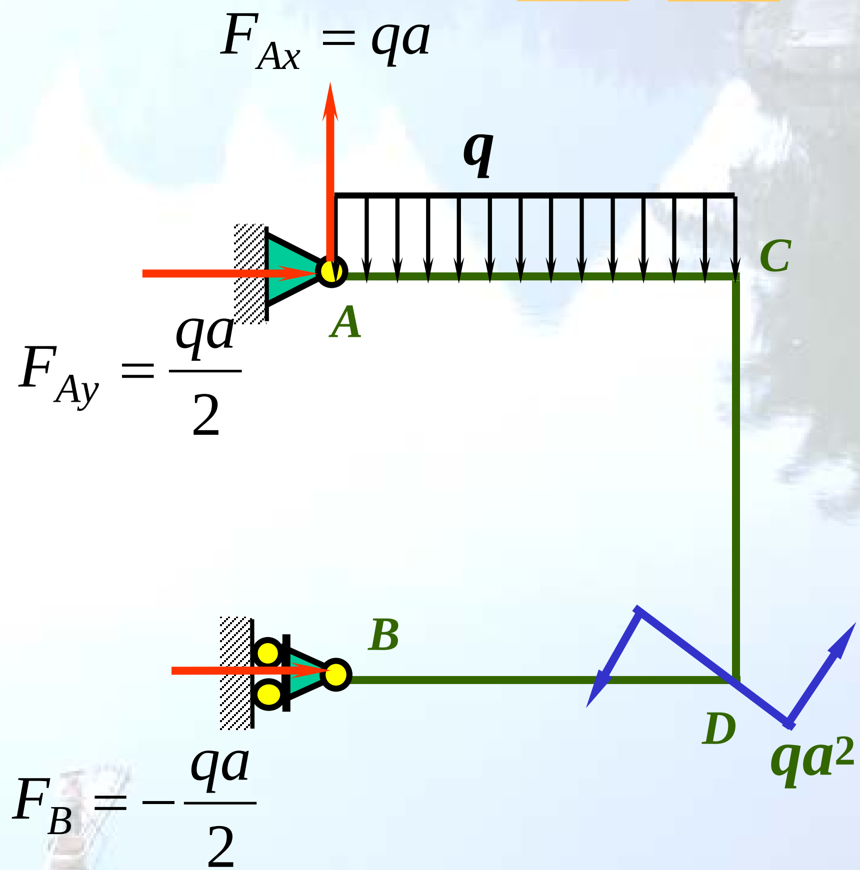


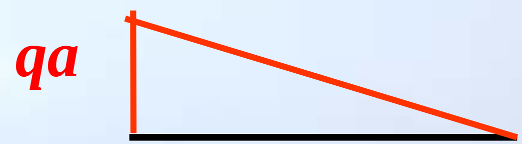
$$F_{Ax} = qa$$

$$F_{Ay} = \frac{qa}{2}$$

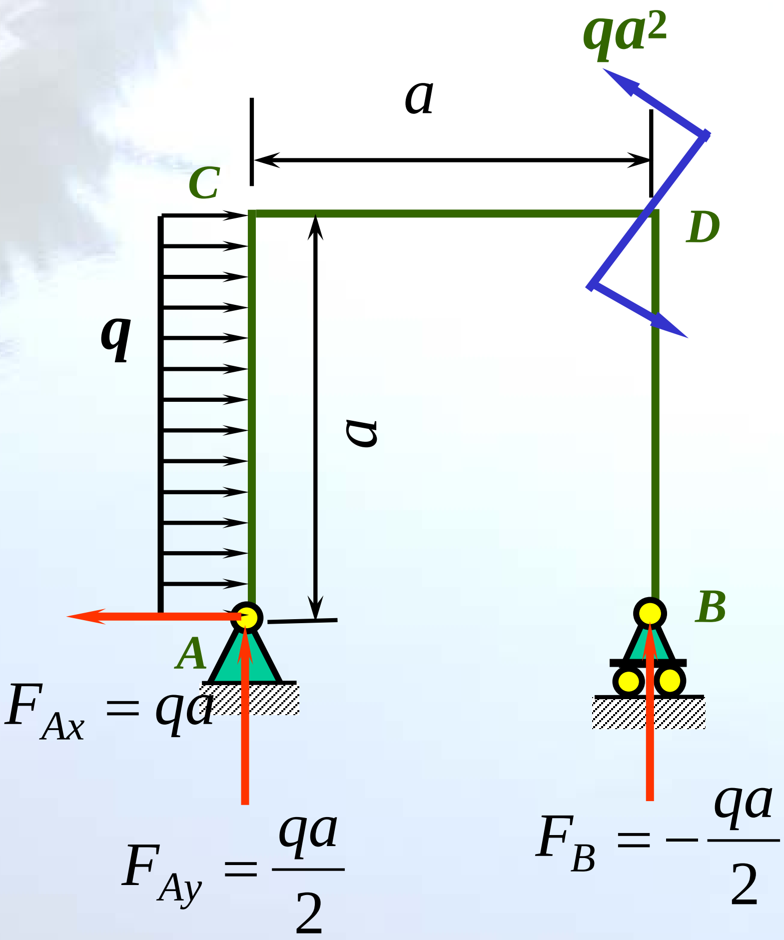
$$F_B = -\frac{qa}{2}$$


qa2
a
C
D
q
a
B
A
$F_{Ax} = qa$
$F_{Ay} = \frac{qa}{2}$
$F_B = -\frac{qa}{2}$

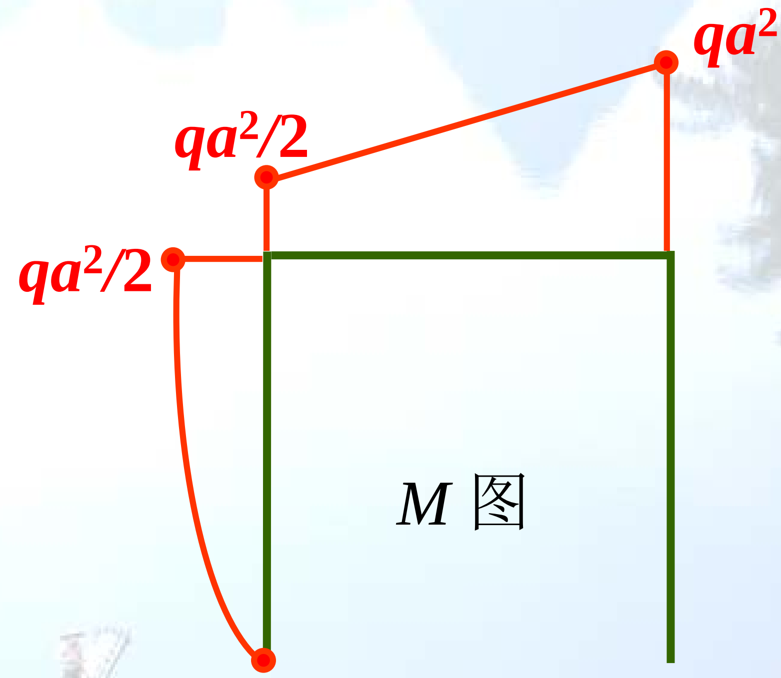

$F_{Ax} = qa$
q
C
A
$F_{Ay} = \frac{qa}{2}$
B
D
qa2
$F_B = -\frac{qa}{2}$


qa


qa2/2



qa²
a
C
D
q
a
A
B
$F_{Ax} = qa$
$F_{Ay} = \frac{qa}{2}$
$F_B = -\frac{qa}{2}$

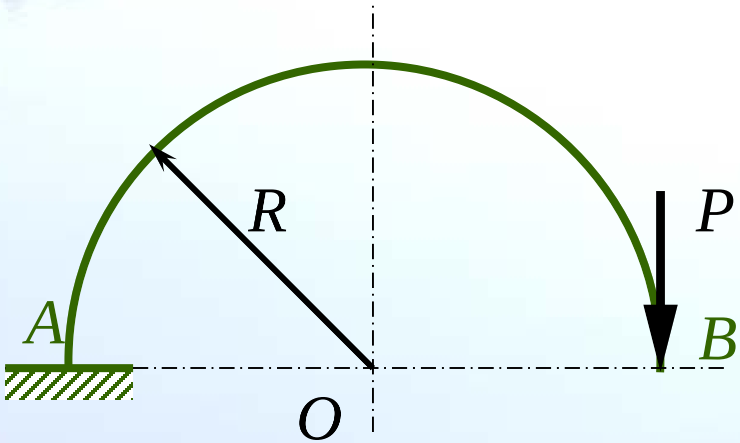


qa²
qa²/2
qa²/2
M 图

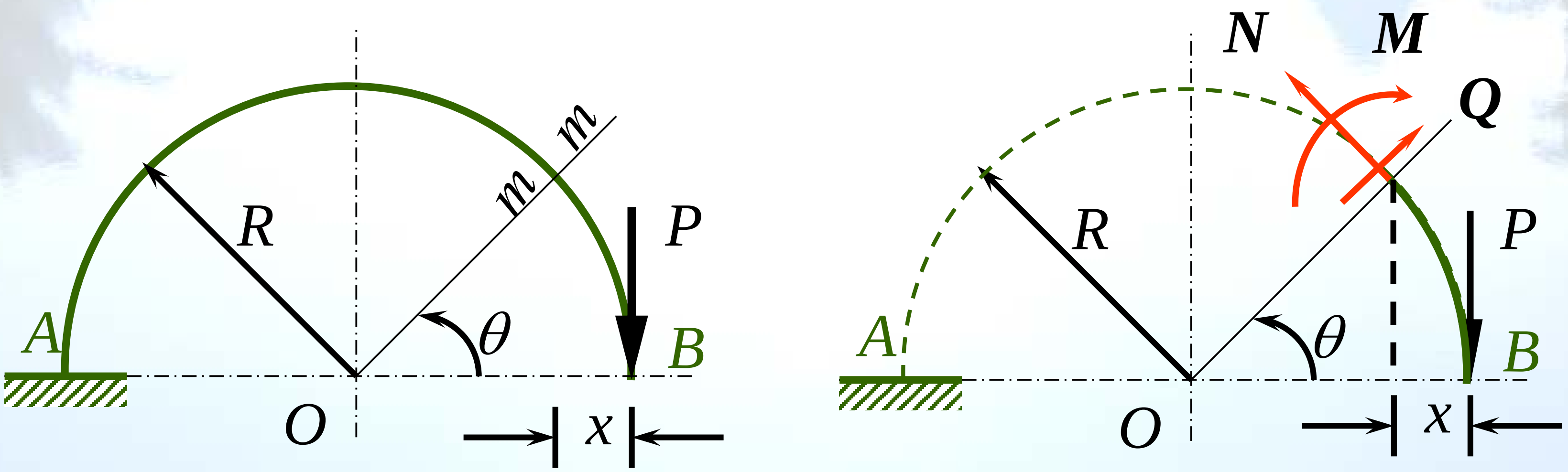
二、曲杆：轴线为曲线的杆件。

内力情况及绘制方法与平面刚架相同。

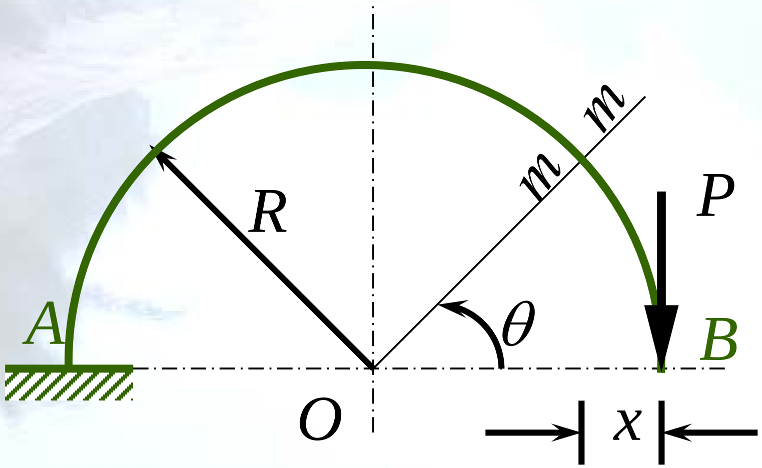
[例16] 已知：如图所示，P及R。试绘制Q、M、N图。

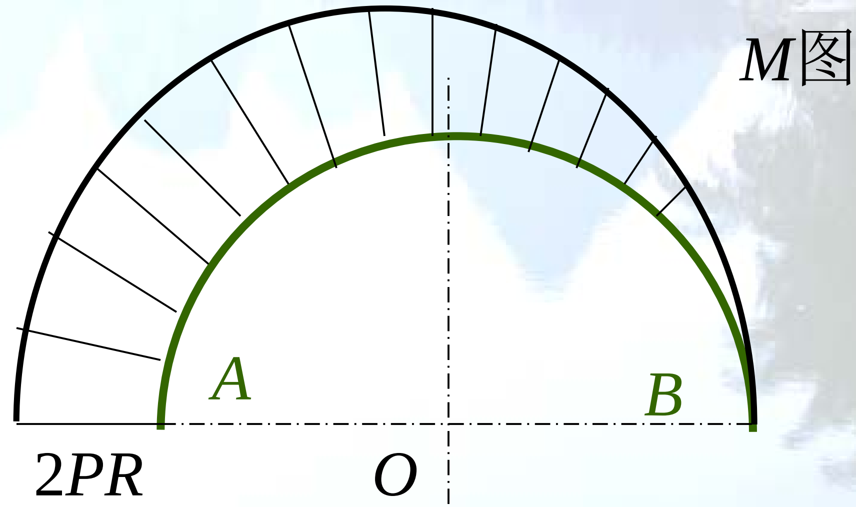


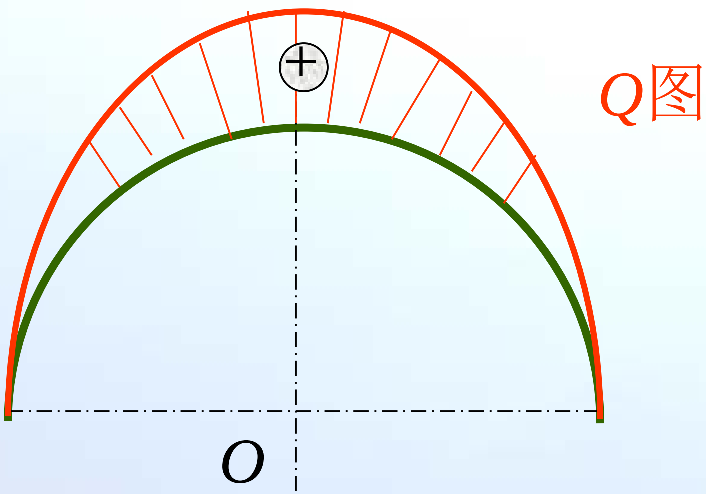
解：建立极坐标，θ表示截面m–m的位置。

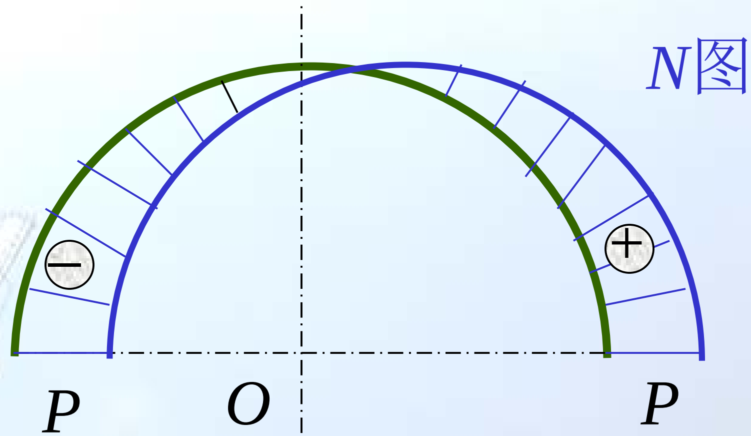


$$
\begin{cases}
M(\theta) = Px = P(R - R\cos\theta) \\
Q(\theta) = P\sin\theta \\
N(\theta) = P\cos\theta
\end{cases}
$$









$$\begin{cases} M(\theta) = Px = P(R - R\cos\theta) \\ Q(\theta) = P\sin\theta \\ N(\theta) = P\cos\theta \end{cases}$$