绪论部分

- 数值计算环节误差主要来源于 **截断误差、舍入误差**
- 绝对误差 $\delta[g(x^*)] = |g'(x)|\delta(x^*)$
- 相对误差 $\delta^* = \delta / x^*$ （由此可以推导出 $\delta^*[g(x)] = |g'(x)|\delta(x^*)/g(x^*)$）

> x^* 为 x 的近似值，$\delta(x^*) = x^* - x$

插值与拟合部分

- 对于（n+1）个节点，n 次插值多项式存在且唯一

  > 证明：各个节点处建立方程，系数行列式为 范德姆行列式，存在且唯一

  > 如果两个式子次数相同为 n，且对所有（n+1）个节点式子成立，那么这两个式子相等

- 拉格朗日插值基函数 $l_i(x) = \prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x - x_i)/(x_k - x_i)$
  - $\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = x^k (k \leq n), = x^k - \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)(k > n)$
  - $l_i(x_i) = 1$
- 拉格朗日插值多项式 $L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$

  > 线性插值多项式：$L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

- 拉格朗日插值多项式余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$
- k阶插商：$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = (f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}])/(x_k - x_{k-1})$
- 牛顿插值多项式：$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \times (x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$
- 余项：$R_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$
- 重复节点 k 阶插商 $f[x, x, \ldots, x] = f^{(k)}(x)/k!$
- k 阶插商表

	0阶	**1阶**	**...**	**n阶**
x0	f(x0)	f[x0,x1]	...	f[x0,x1,...xn]
x1	f(x1)	f[x1,x2]	...	
...	...	...	...	
xn	f(xn)		...	-

> 埃尔米特插值多项式还可以用 `倒数 / (阶数)!` 代替插商

- 正则方程组

  设有 n 个节点的拟合函数为 $y = a_0 + a_1x+...+a_mx^m$ ：

  - $a_on + a_1\sum\limits_{i=0}^n x_i^{1+0} + a_2\sum\limits_{i=0}^n x_i^{2+0}+...+a_m\sum\limits_{i=0}^n x_i^{m+0} = \sum\limits_{i=0}^n y_ix_i^0$
  - $a_o\sum\limits_{i=0}^n x_i^{0+1} + a_1\sum\limits_{i=0}^n x_i^{1+1} + a_2\sum\limits_{i=0}^n x_i^{2+1}+...+a_m\sum\limits_{i=0}^n x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=0}^n y_ix_i^1$
  - $a_o\sum\limits_{i=0}^n x_i^{0+2} + a_1\sum\limits_{i=0}^n x_i^{1+2} + a_2\sum\limits_{i=0}^n x_i^{2+2}+...+a_m\sum\limits_{i=0}^n x_i^{m+2} = \sum\limits_{i=0}^n y_ix_i^2$
  - ...
  - $a_o\sum\limits_{i=0}^n x_i^{0+m} + a_1\sum\limits_{i=0}^n x_i^{1+2} + a_2\sum\limits_{i=0}^n x_i^{2+m}+...+a_m\sum\limits_{i=0}^n x_i^{m+m} = \sum\limits_{i=0}^n y_ix_i^m$

数值积分与微分

- 机械求积公式 $\int_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^n A_if(x_i)$
- 机械求积公式余项 $R_n[f] = Kf^{(m+1)}(\xi)$ （*m*为代数精度）

  > 其中 $K = \frac{1}{(m+1)!}[\int_a^b f(x)dx - \sum\limits_{i=1}^n A_if(x_i)]$ ，通常化简得
  >
  > $K = \frac{1}{(m+1)!}[\frac{1}{m+2}(b^{m+2} - a^{m+2}) - \sum\limits_{i=1}^n A_if(x_i)]$

- 中矩形公式 $\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a), R_n[f] = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24}(b-a)^3$
- 梯形公式 $\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a), R_n[f] = -\frac{f^{(2)}}{12}(b-a)^3$
- 辛普森公式 $\int_a^b f(x) = \frac{f(a)+4f[(a+b)/2]+f(b)}{6}(b-a), R_n[f] = -\frac{f^{(4)}}{2880}(b-a)^5$
- 插值型机械求积公式 $\int_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^n \int_a^b l_i(x)dxf(x_i), R_n[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod\limits_{i=0}^n(x-x_i)$
- 梯形法递推公式 $T_{2n}(h) = \frac{1}{2}T_n(h) + \frac{h_n}{2}[\sum f(x_{k+\frac{1}{2}})]$
- $S_n = \frac{4T_{2n}-T_n}{3}, C_n = \frac{16S_{2n}-S_n}{15}, R_n = \frac{64C_{2n}-C_n}{63}$
- 高斯求积公式：在高斯求积公式中， 如果选择 n 个节点和求积公式，使其代数精度为 2m-1 ，这样的求积公式叫做高斯求积公式

  > 通常令 $f(x) = 1, x, x^2, ..., x^k$ ，带入 $\int_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^n A_if(x_i)$ 得到方程组，求解得到 A_i, x_i

  > 两点高斯求积公式：$\int_{-1}^1 f(x)dx = 1\cdot f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + 1\cdot f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

- 勒让德多项式 $P_n(x) = \frac{n!}{(2n!)}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$
  - 正交性：$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$，勒让德多项式对一切次数低于 n 次的多项式正交
  - 奇偶性：n 为奇数，Pn(x) 为奇函数；n 为偶数，Pn(x) 为偶函数
  - $P_n(\pm1) = \frac{(\pm2)^nn!}{(2n)!}$
  - 递推公式：$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1}P_{n-1}(x)$
  - Pn(x) 的 n 个零点在（-1,1）上而且都是单根

- 向前差商：$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ；中间差商：$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$
- 利用外推公式求导数$f'(a)$：
    - 先用中间差商法求，得到一个关于 *h* 的函数：$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ，记为 G_0(h)
    - 将步长二分，得到 G_0(h/2)，等等
    - 对 G_0(h) 进行修正，得到 G_1(h) = [4G(h/2) - G(h)] / 3
    - 同理，得到 G_n
