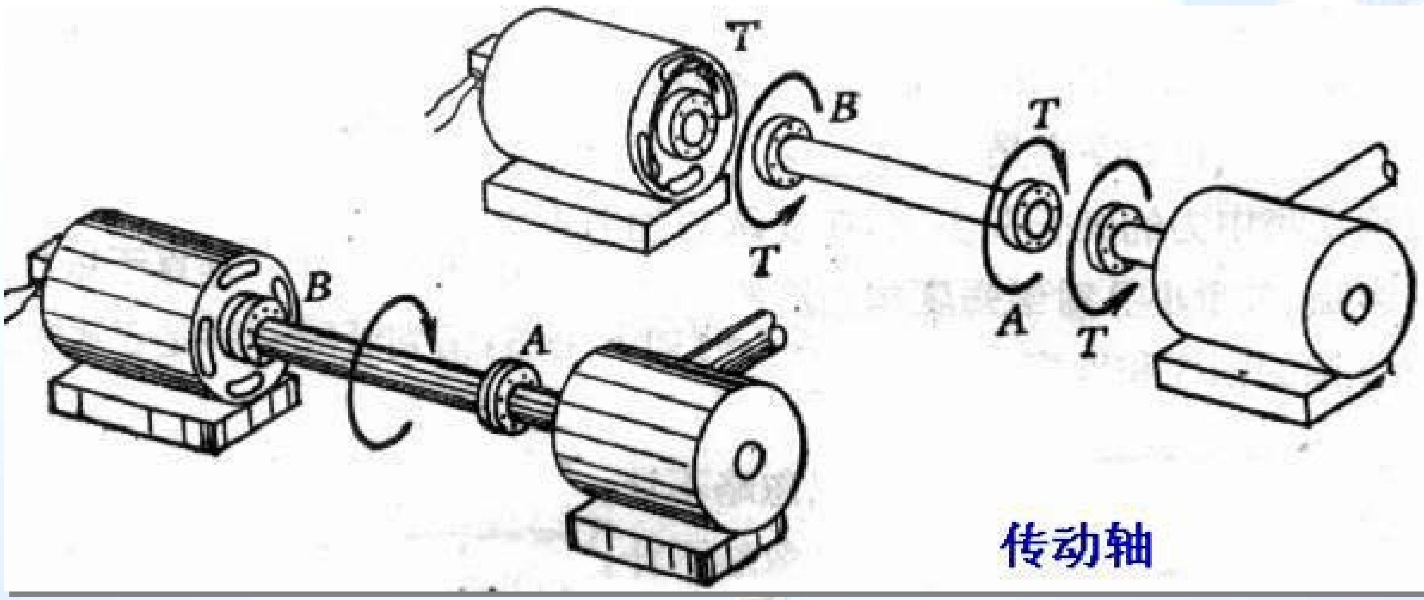
材料力学

第三章　扭转

第三章　扭 转

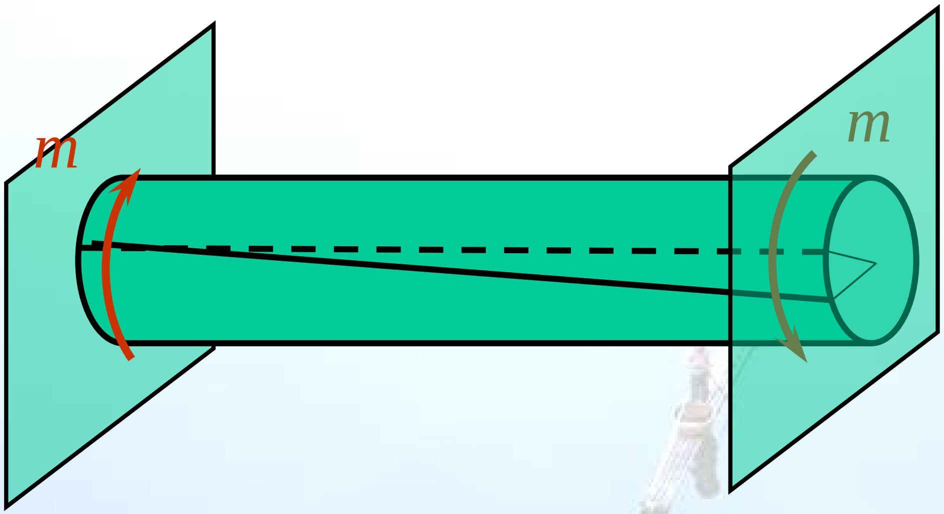
§ 3–1 扭转的概念和实例

工程实例



受力特点：在垂直于杆件轴线的平面内作用有力偶。

变形特点：杆件各截面绕轴线发生相对转动。



轴：工程中以扭转为主要变形的构件称为轴。

如：机器中的传动轴、石油钻机中的钻杆等。

§3–2 外力偶矩的计算　　扭矩和扭矩图

一、传动轴的外力偶矩

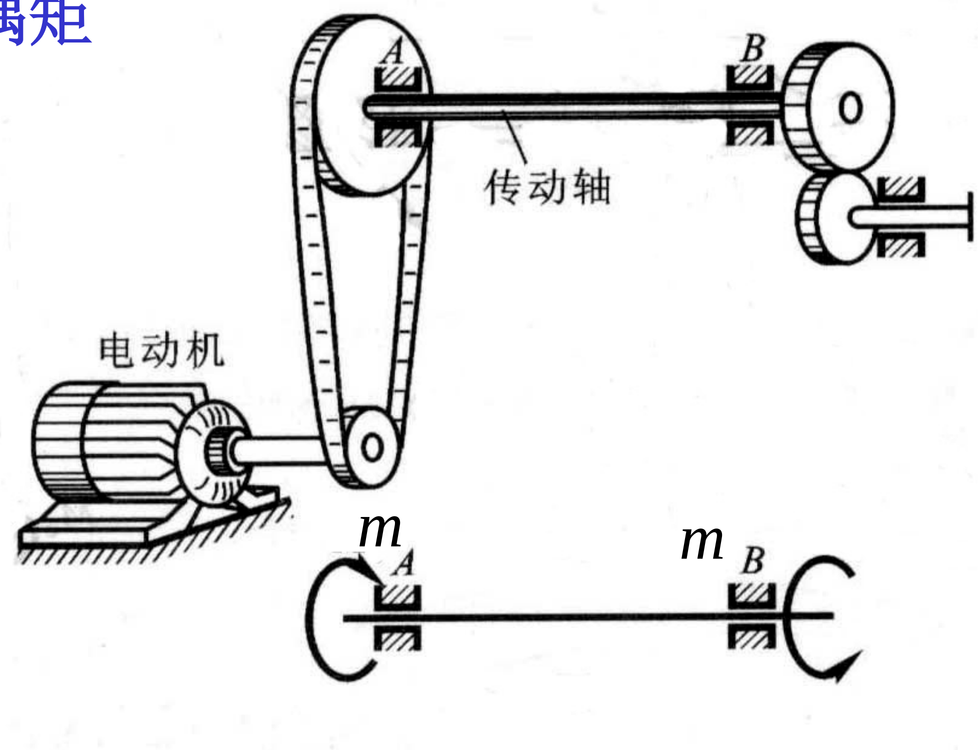


图　3.3

已知：轴的传递功率P（kW）、转速n（rpm），

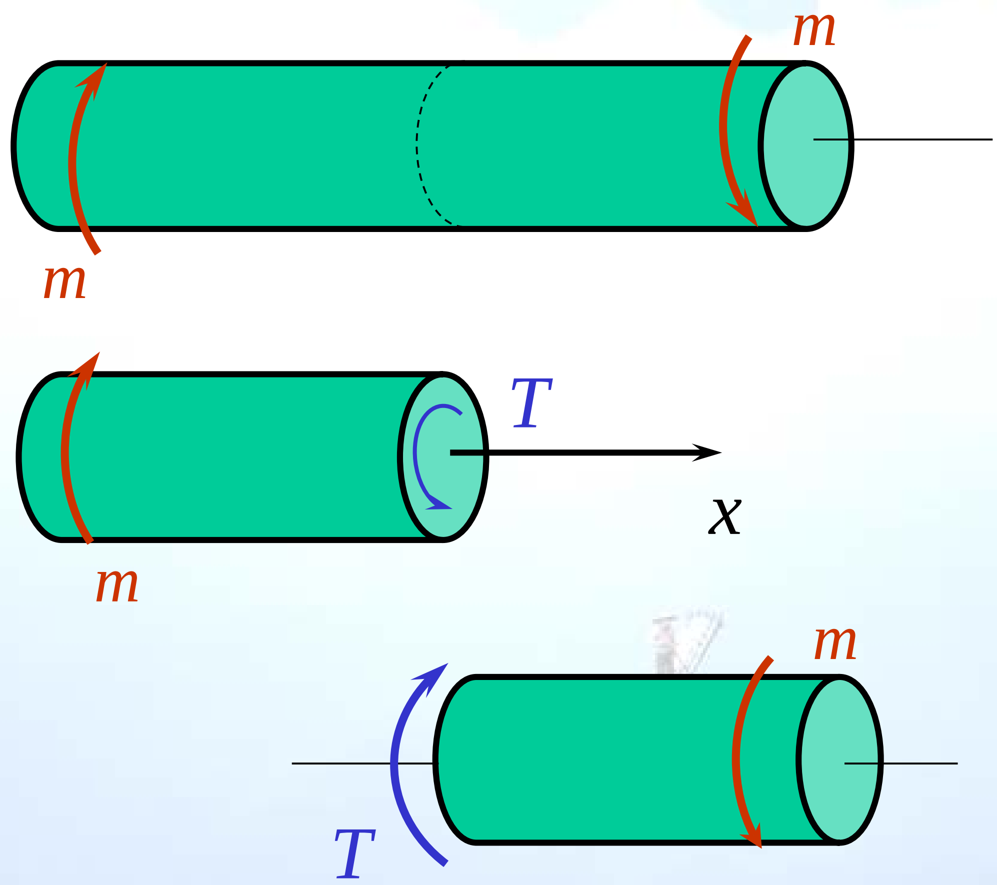
求：外力偶矩m（N•m）

$$m = 9549\frac{P}{n} \quad (\mathrm{N\cdot m})$$

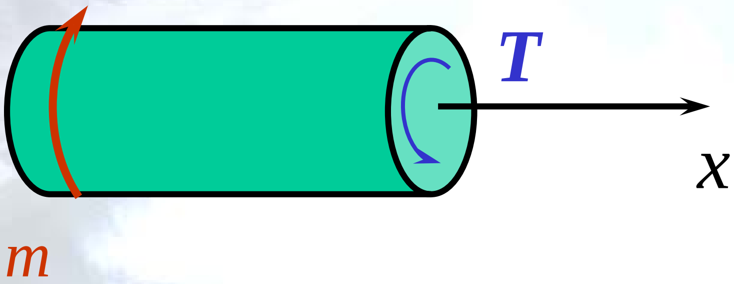
其中：P — 功率，千瓦（kW）

n — 转速，转/分（rpm）

二、扭转时的内力——扭矩



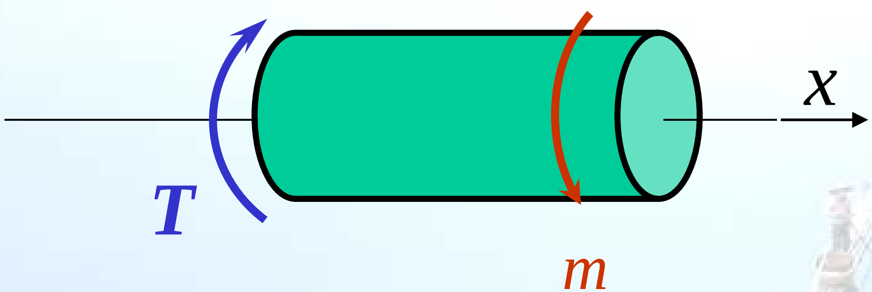
构件受扭时，横截面上的内力为力偶，称为扭矩，记作“*T*”。



取左段： $\sum m_x = 0,$

$$T - m = 0$$

$$\therefore T = m$$



取右段： $\sum m_x = 0,$

$$m - T = 0$$

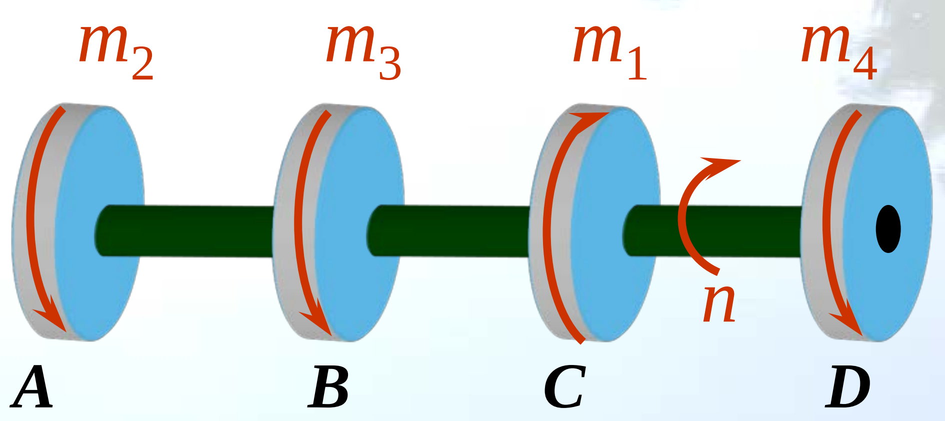
$$\therefore T = m$$

扭矩的正负规定：

以右手螺旋法则，沿截面外法线方向为正，反之为负。

三、扭矩图

[例3] 已知：一传动轴，n =300r/min，主动轮C输入P_1=500kW，从动轮A、B、D输出 P_2=P_3=150kW，P_4=200kW，试作扭矩图。



解:(1)计算外力偶矩

$$m_1 = 9549\frac{P_1}{n} = 9549\times\frac{500}{300}$$

$$= 15.9\times10^3(\mathrm{N\cdot m})$$

$$= 15.9(\mathrm{kN\cdot m})$$

$$m_2 = m_3 = 4.78\,(\mathrm{kN\cdot m})$$

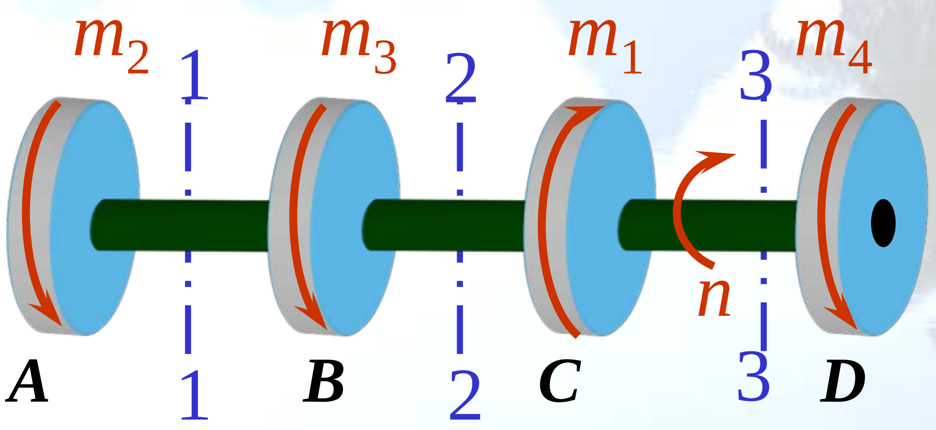
$$m_4 = 6.37\,(\mathrm{kN\cdot m})$$

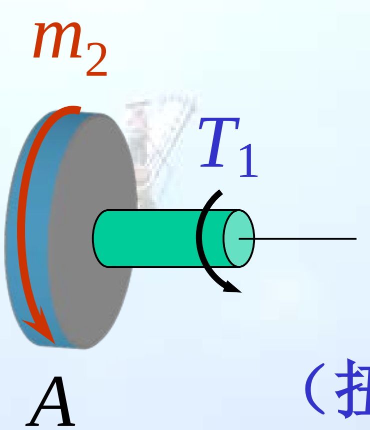
(2)求扭矩

1-1截面：

$\sum m_x=0$ ， $T_1+m_2=0$

$$T_1=-m_2=-4.78\text{kN}\cdot\text{m}$$





（扭矩按正方向假设）

2-2截面：

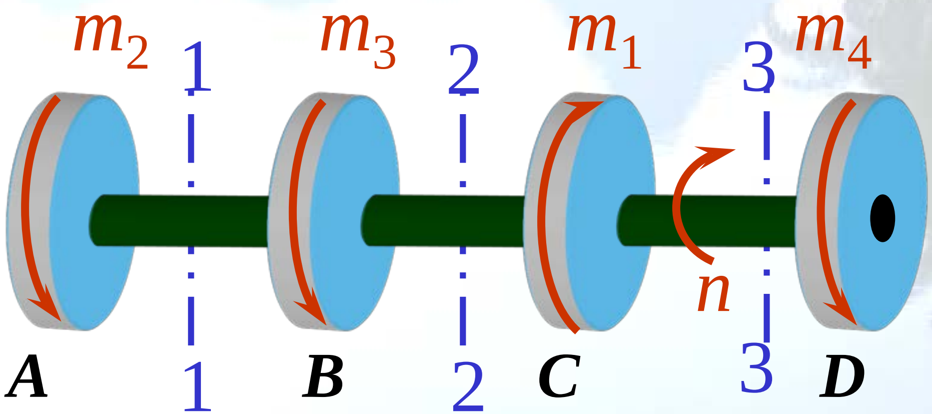
$$\sum m_x = 0 \ ,$$

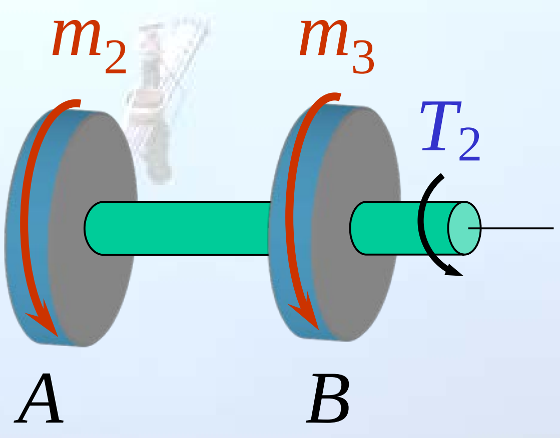
$$T_2 + m_2 + m_3 = 0 \ ,$$

$$\therefore T_2 = -m_2 - m_3$$

$$= -(4.78 + 4.78)$$

$$= -9.56 \, \text{kN} \cdot \text{m}$$



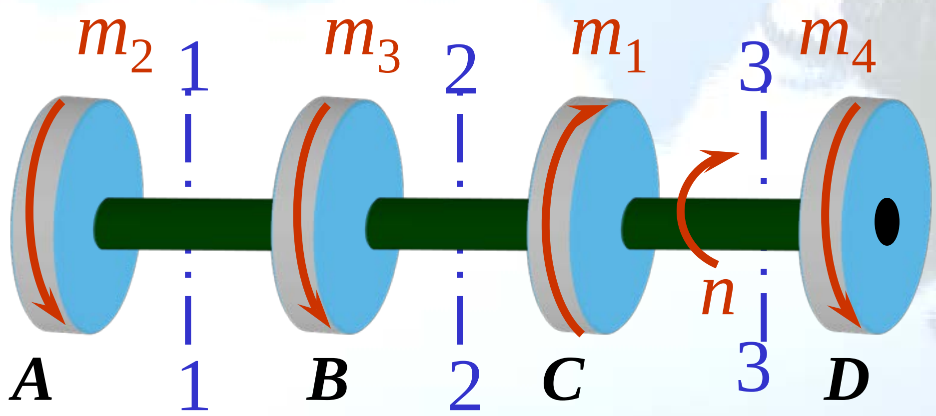


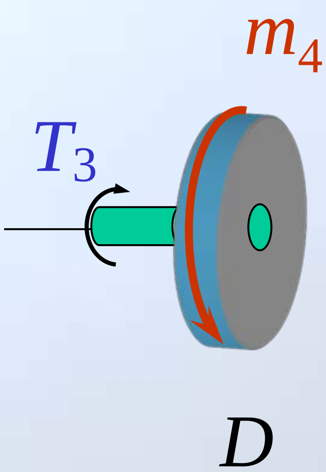
3-3截面：

$$\sum m_x = 0 \ ,$$

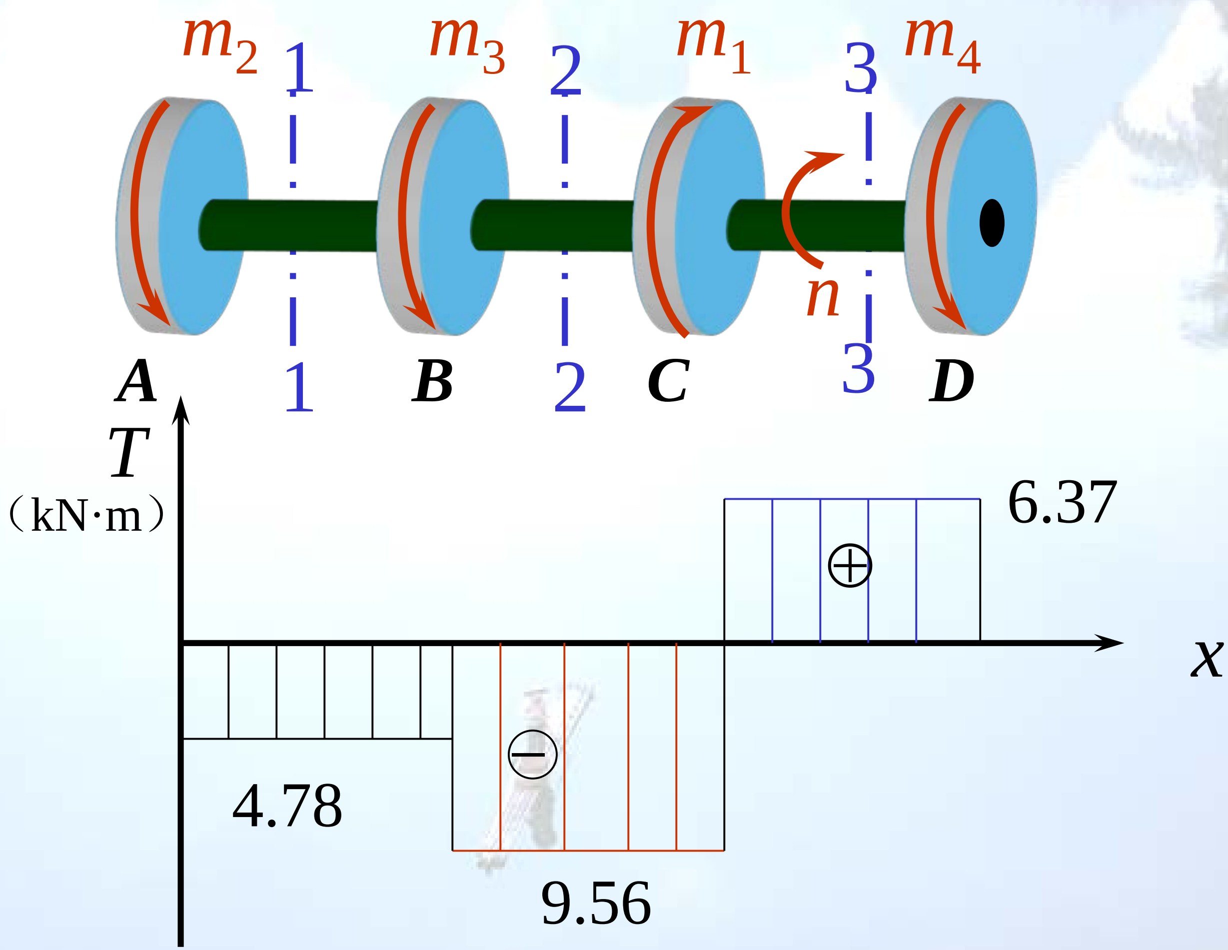
$$m_4 - T_3 = 0 \ ,$$

$$T_3 = m_4 = 6.37\,\text{kN}\cdot\text{m}$$





(3)绘制扭矩图

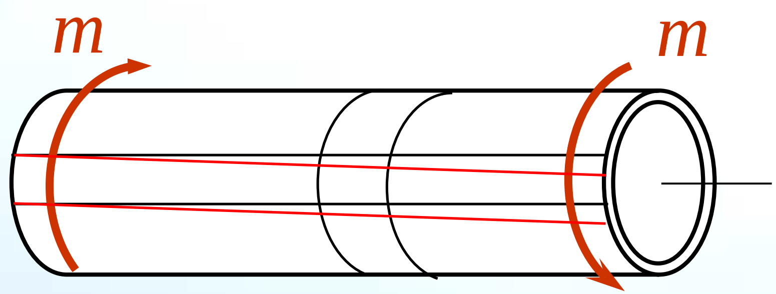


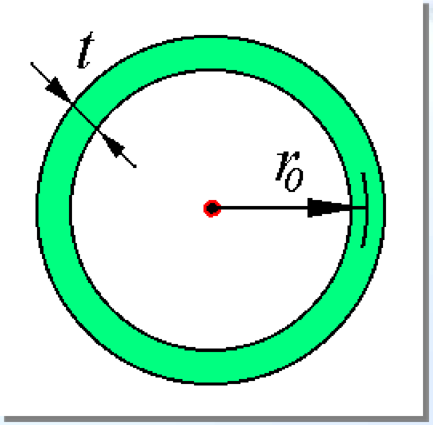
***BC*段为危险截面：** $\left|T\right|_{\max} = 9.56\,\mathrm{kN\cdot m}$

§ 3–3　纯剪切

一、薄壁圆管扭转应力分析

薄壁圆筒： 壁厚 $t \le \frac{1}{10} r_0$ （r_0：为平均半径）





观察变形：

1.加载前： 纵向线为直线，周向线为圆；

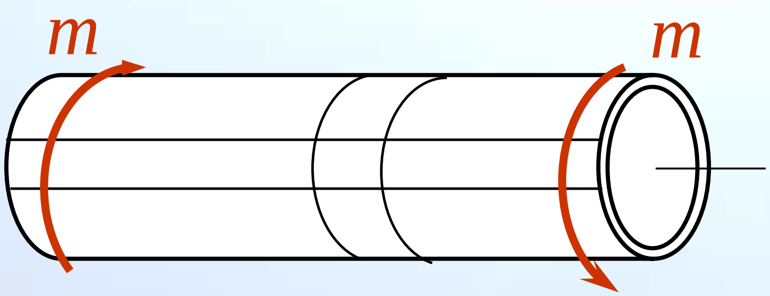
2.加载后： 纵向线倾斜了一微小角度， 变成斜直线；周向线仍是圆，圆周线的形状、大小和间距均未改 变，只是绕轴线作了相对转动。

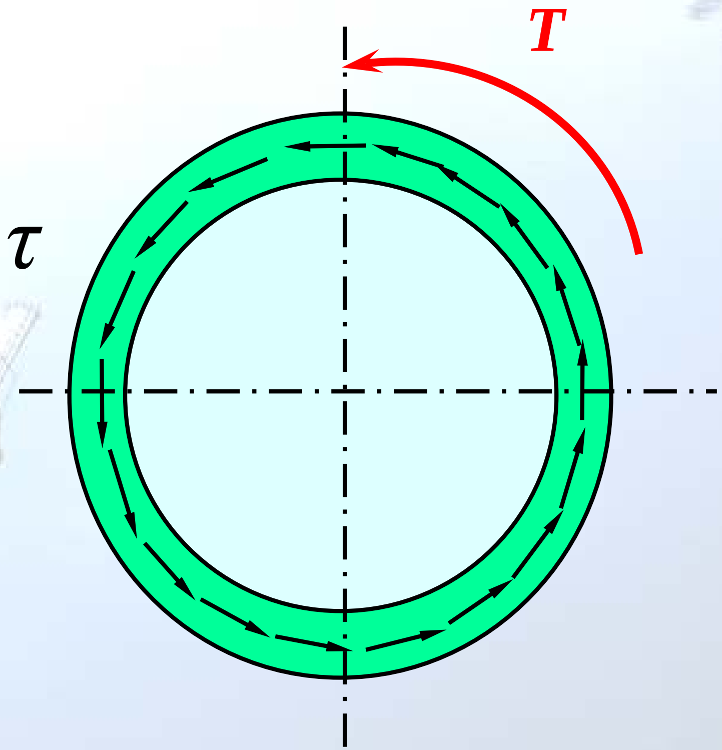
应力分布规律：横截面上无正应力，只存在剪应力 τ；

剪应力的方向与圆周相切，与内力T一致；

剪应力沿壁厚方向的数值不变；

沿圆周剪应力的大小也不变。



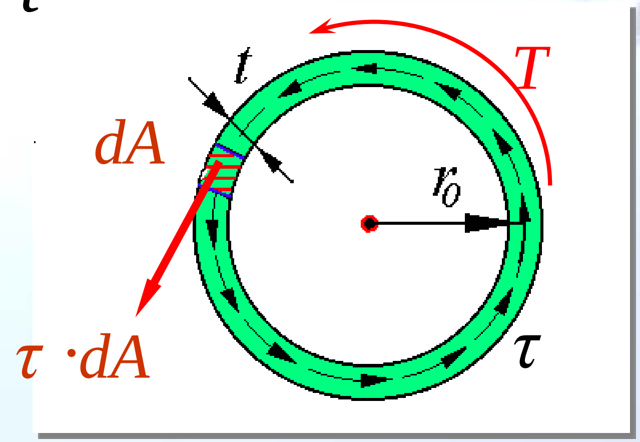


计算剪应力τ的大小：

$$T=\int_A \tau\cdot \mathrm{d}A\cdot r_0$$

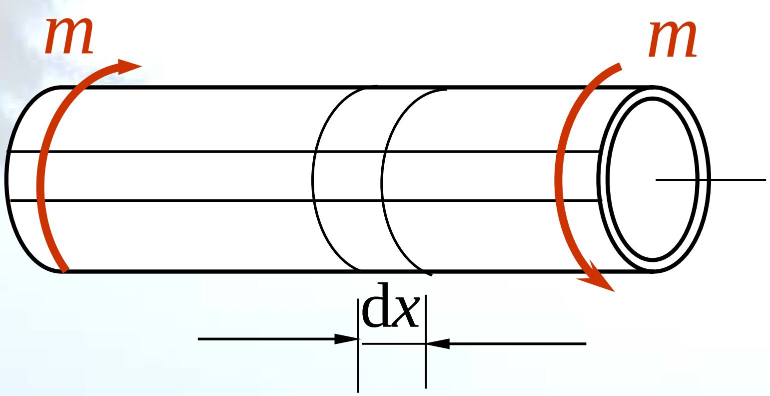
$$\therefore\quad T=\tau\cdot r_0\cdot\int_A \mathrm{d}A=\tau\cdot r_0\cdot 2\pi r_0\cdot t$$

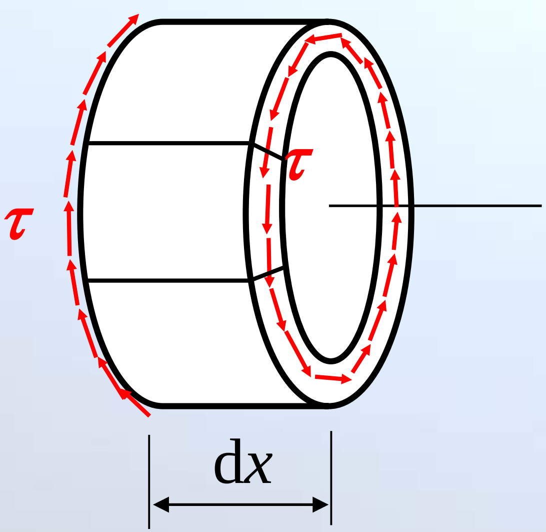
$$\therefore\quad \tau=\frac{T}{2\pi r_0^2 t}=\frac{T}{2A_0 t}$$

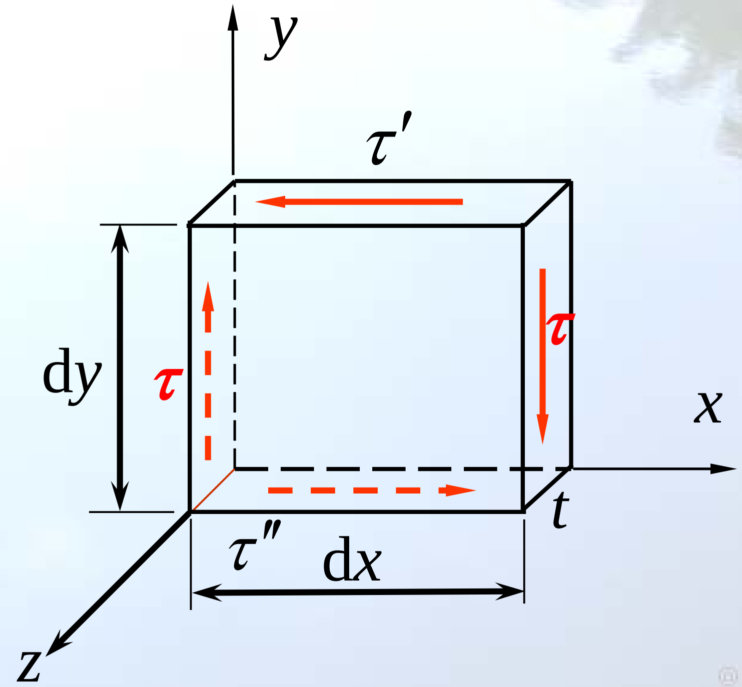


式中A_0为中线所围面积

二、剪应力互等定理





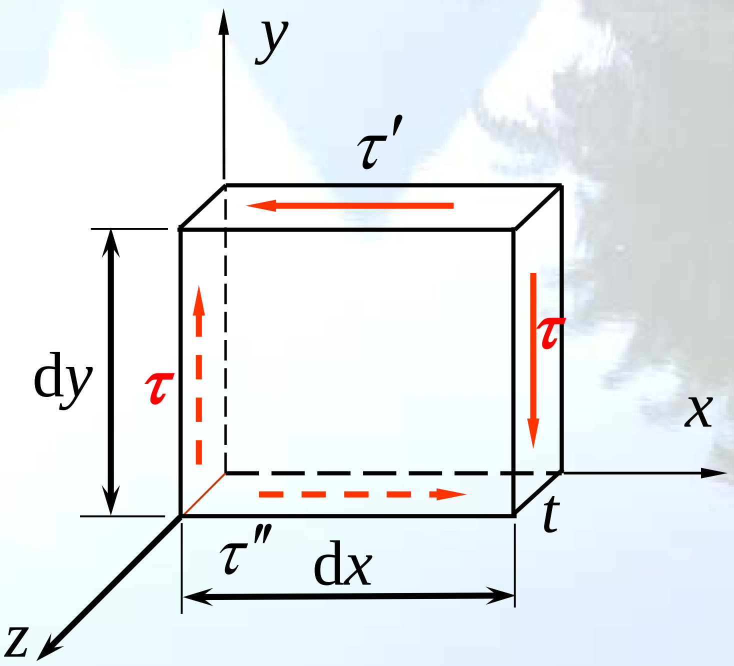


$$\sum m_z = 0, \quad \tau' \cdot t dx \cdot dy - \tau \cdot t dy \cdot dx = 0$$

$$\therefore \qquad \tau' = \tau$$

$$\sum X = 0, \quad \tau'' \cdot t \cdot dx - \tau' \cdot t \cdot dx = 0$$

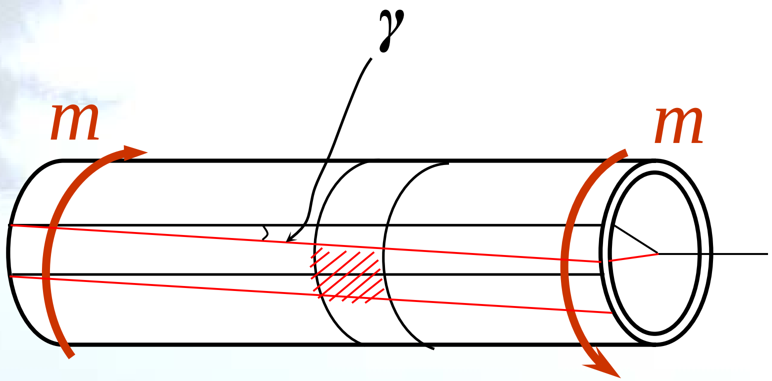
$$\therefore \qquad \tau'' = \tau' = \tau$$

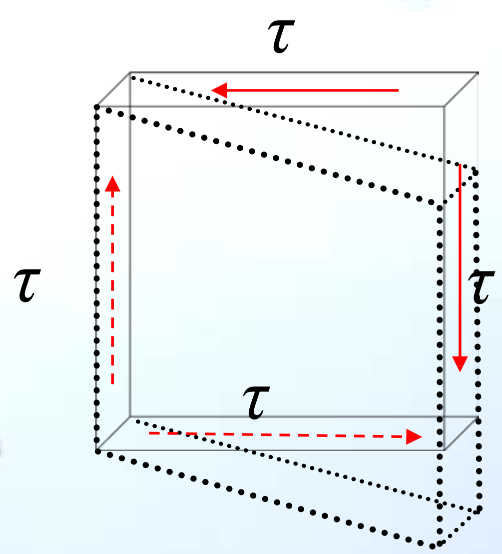


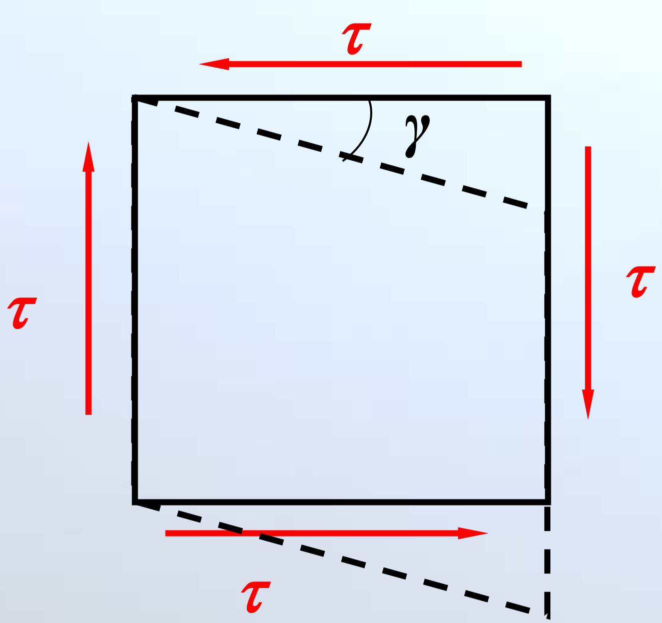
上式称为剪应力互等定理。

该定理表明：在两个相互垂直的面上，剪应力必然成对出现，且数值相等，两者都垂直于两平面的交线，其方向为共同指向或共同背离该交线。

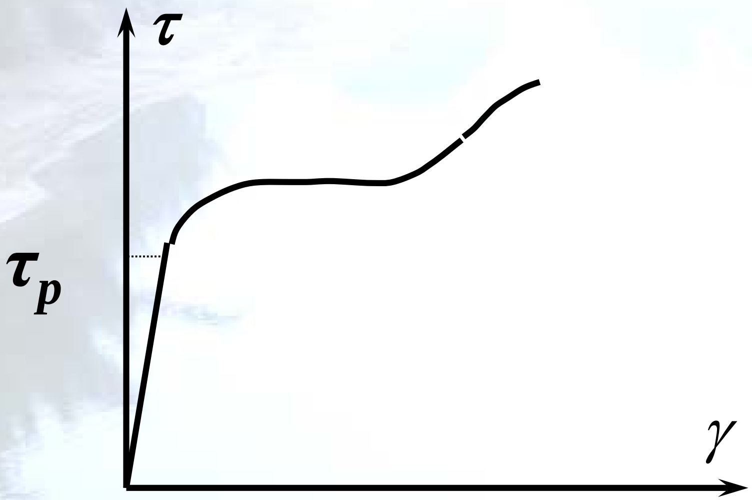
三、剪切胡克定律：

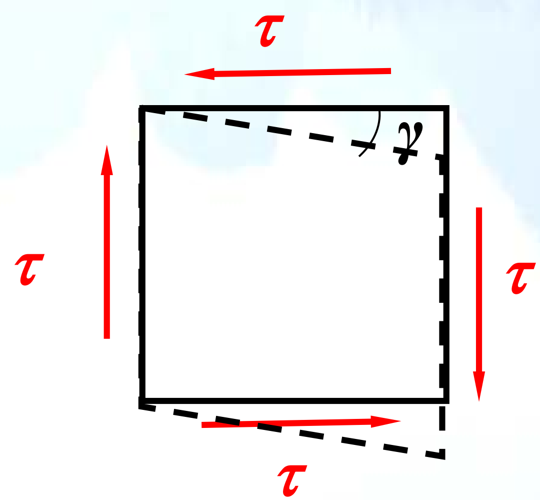






γ——剪应变(无量纲量)





当 $\tau \le \tau_p$ 时 $\tau \propto \gamma$

$$\tau = G\gamma$$ ——剪切胡克定律

剪切胡克定律：当剪应力不超过材料的剪切比例极限时（$\tau \le \tau_p$），剪应力与剪应变成正比关系。

G是材料的一个弹性常数，称为剪切弹性模量，因γ 无量纲，故G的量纲与τ相同，不同材料的G值可通过实验确定，钢材的G值约为80GPa。

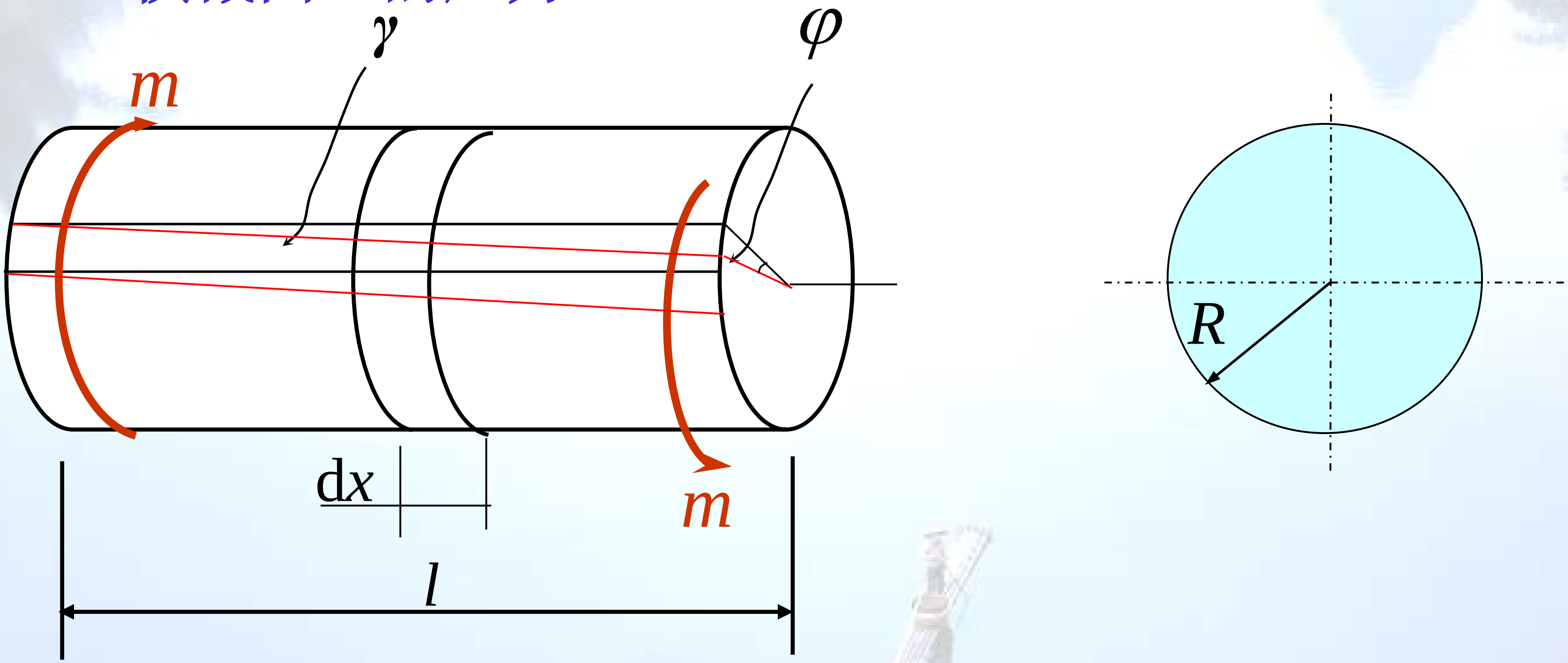
剪切弹性模量G、弹性模量E和泊松比μ是表明材料弹性性质的三个常数。对各向同性材料，这三个弹性常数之间存在下列关系（推导详见后面章节）：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

可见，在三个弹性常数中，只要知道任意两个，第三个量就可以推算出来。

§ 3–4　圆轴扭转时的应力

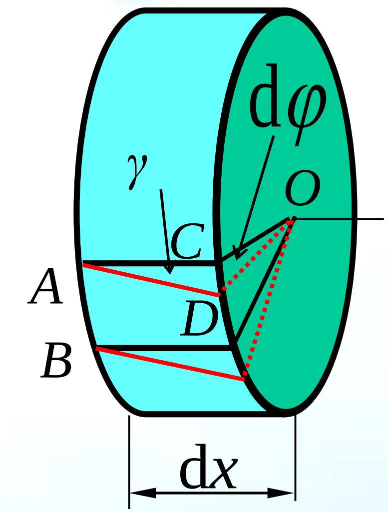
一、横截面上的应力

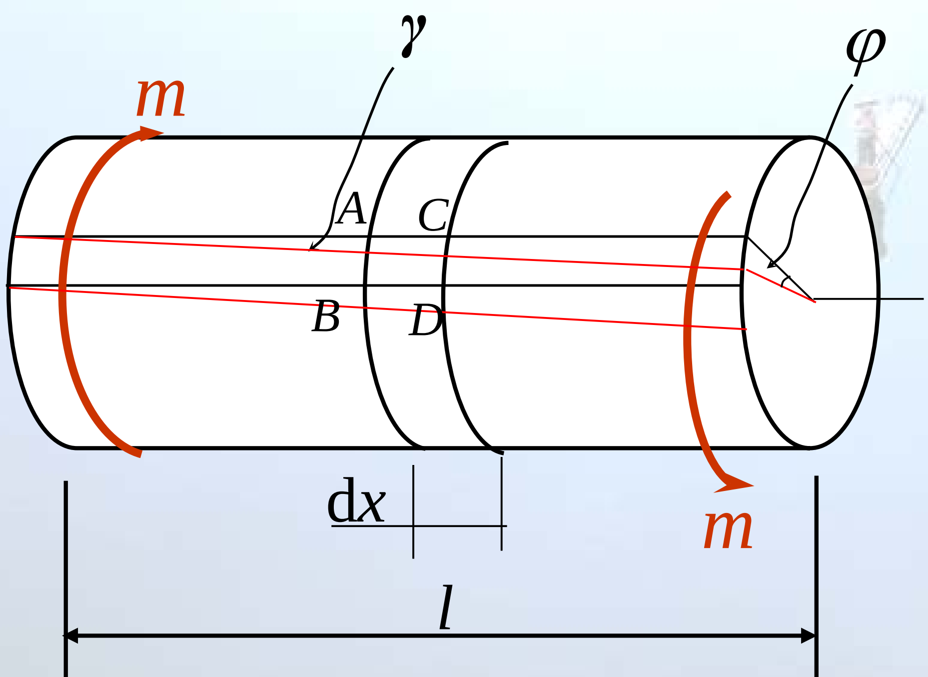


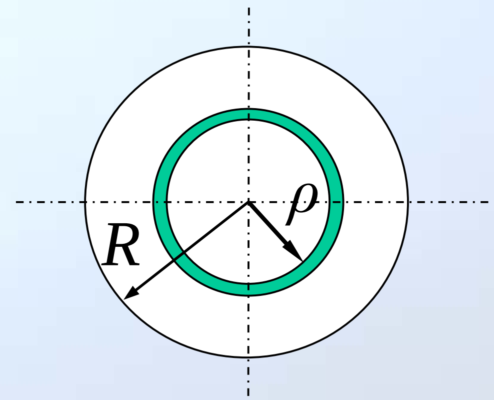
观察变形： 纵向线倾斜了一微小角度， 变成斜直线；周向线仍是圆，圆周线的形状、大小和间距均未改变，只是绕轴线作了相对转动。

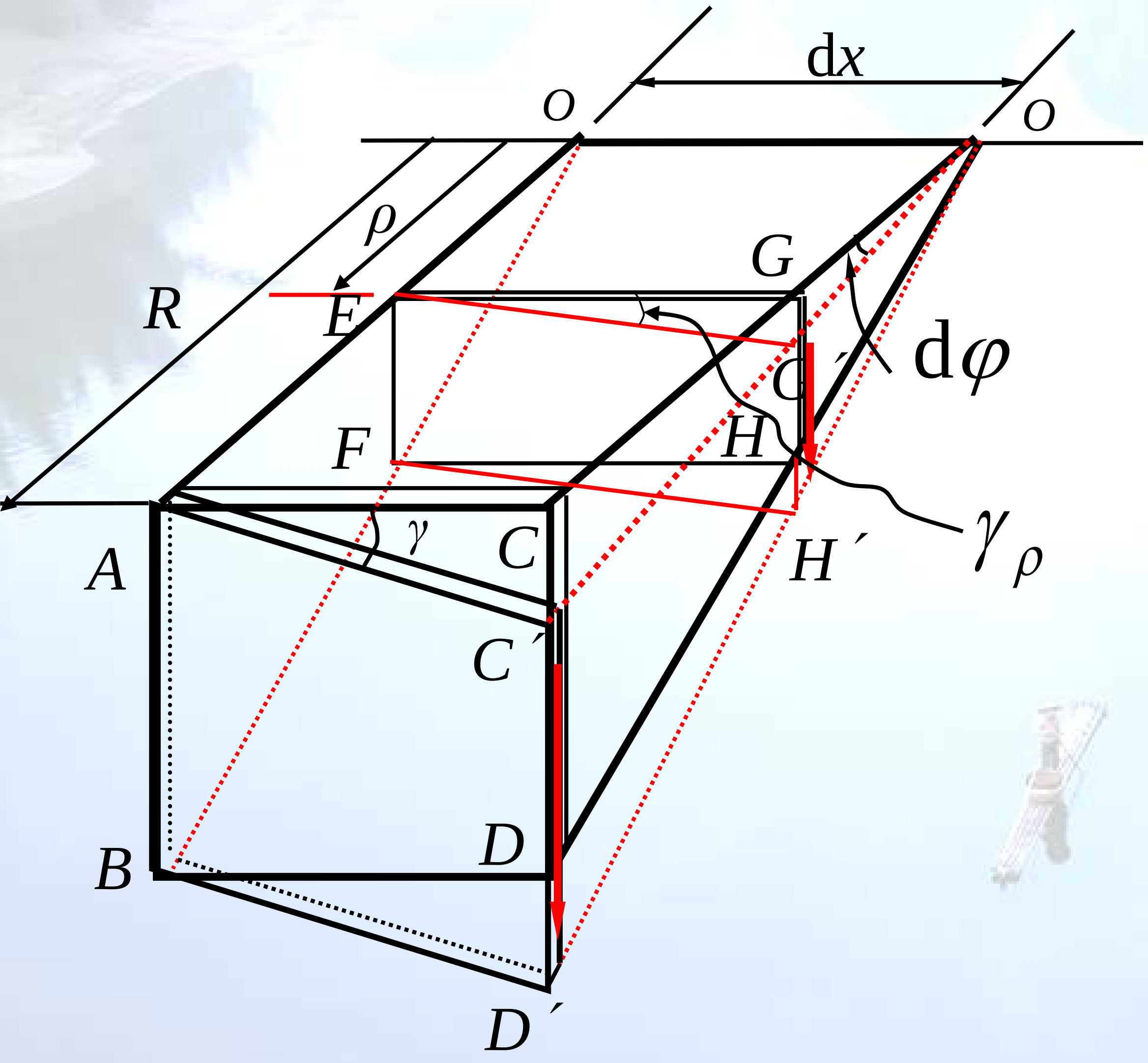
平面假设：横截面 变形后仍为平面；

1. 变形几何关系：

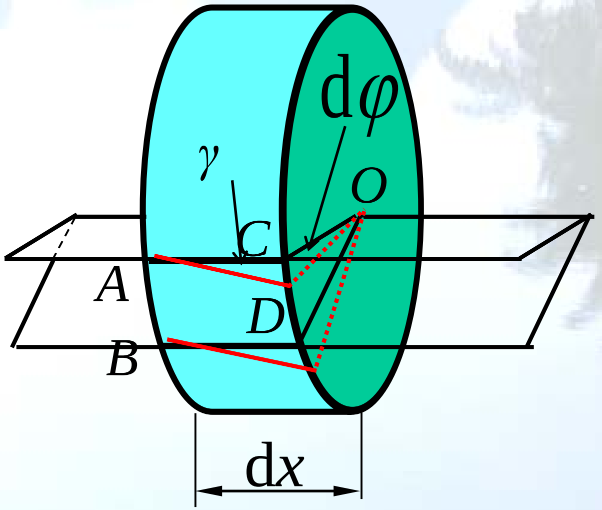




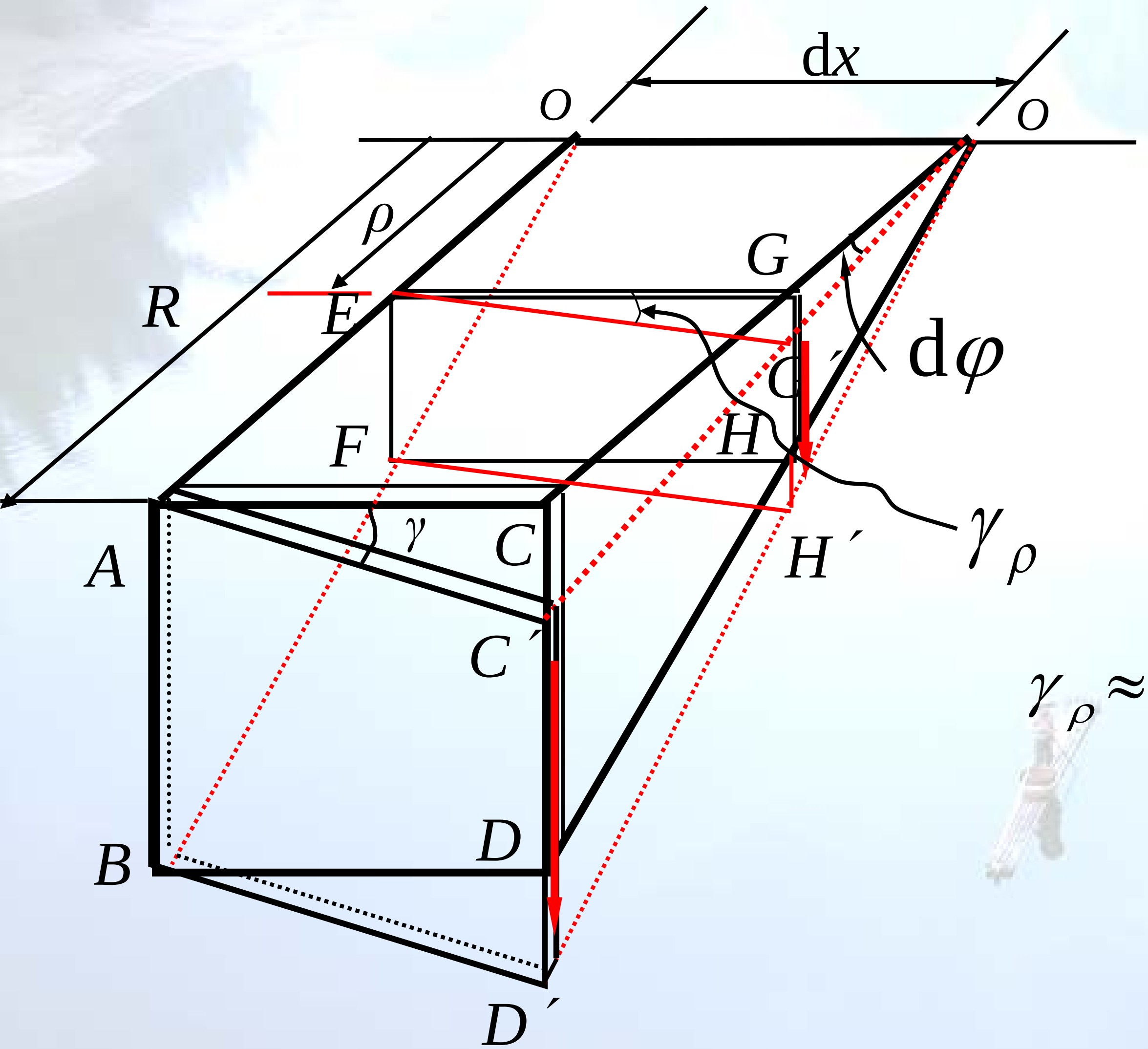




dx
O
O
ρ
G
R
E
dφ
C′
F
H
γ
C
H′
γ_ρ
A
C′
D
B
D′



dφ
γ
O
C
A
D
B
dx



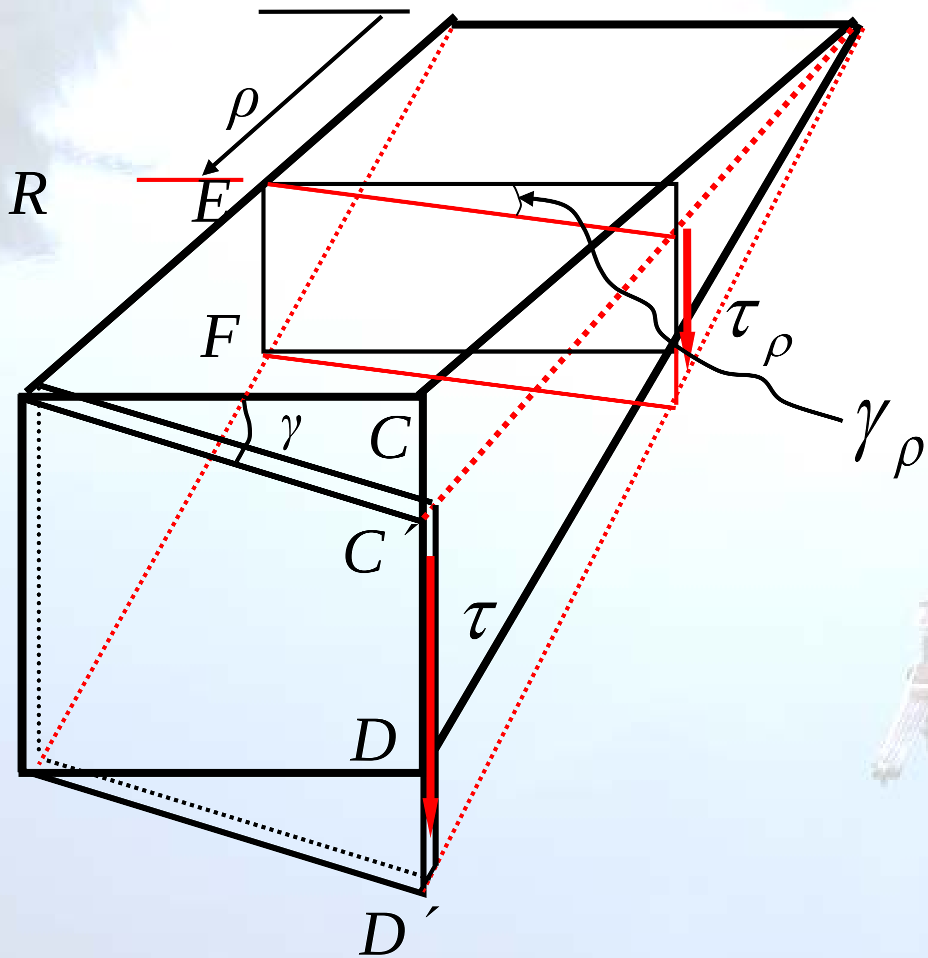
$$\gamma \approx \mathrm{tg}\gamma = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}}$$

$$= \frac{R \cdot \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

$$\gamma_\rho \approx \mathrm{tg}\gamma_\rho = \frac{\overline{GG'}}{\overline{EG}} = \frac{\rho \cdot \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\gamma_\rho = \rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$—— 扭转角$\varphi$ 沿长度方向变化率。



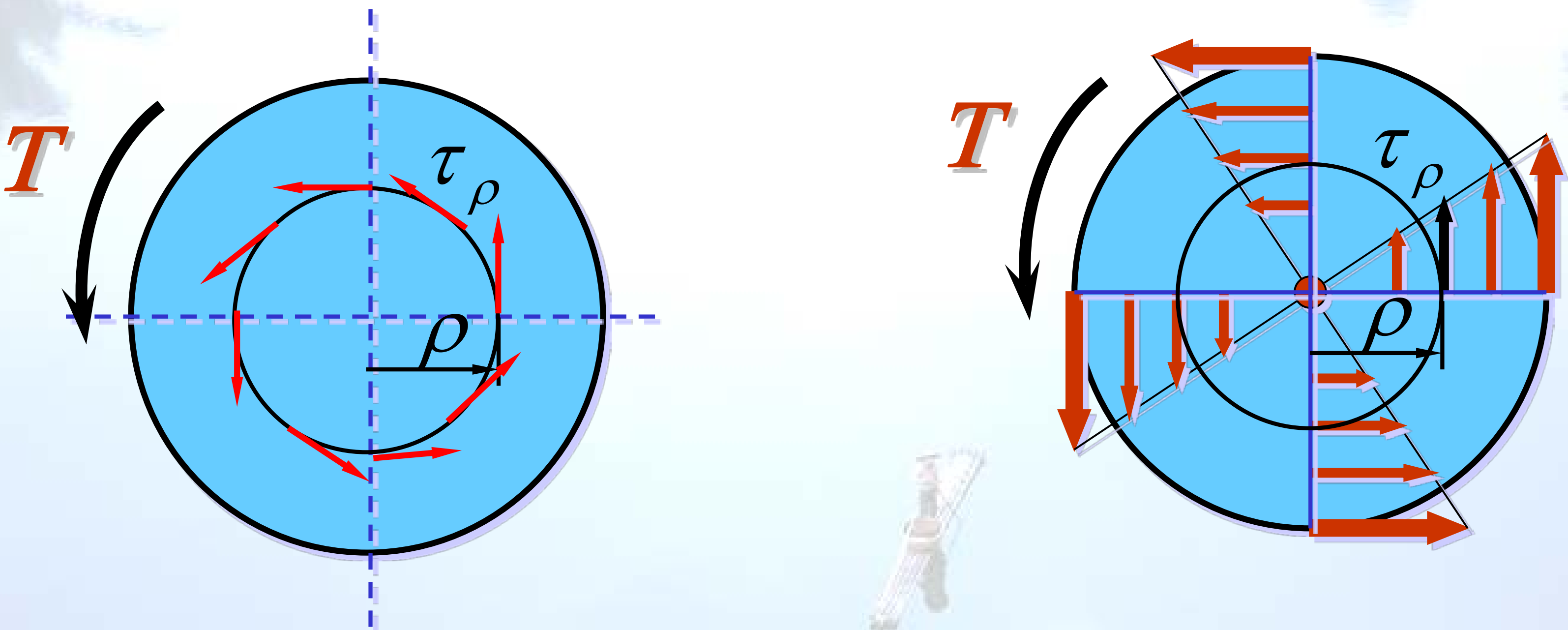
2. 物理关系：

虎克定律：$\tau = G \cdot \gamma$

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho$$

$$= G \cdot \rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

$$\therefore \tau_\rho = \rho G \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$



剪应力在横截面上的分布

3. 静力学关系：

$$T=\int_A(\tau_\rho\cdot dA)\cdot\rho$$

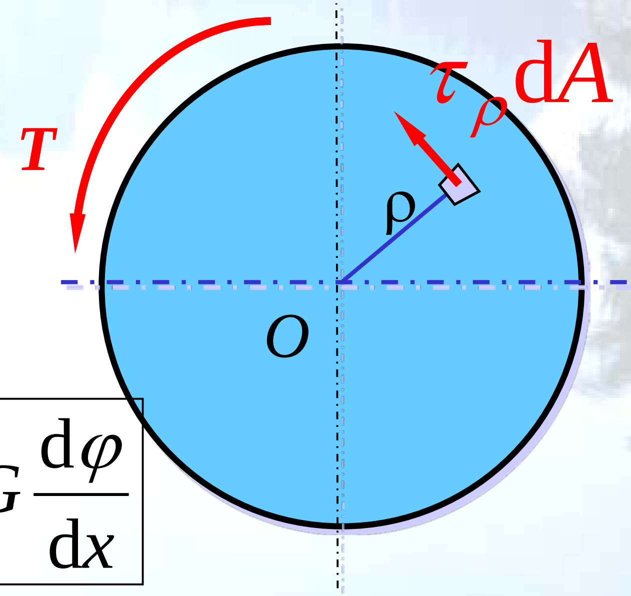
$$=\int_A G\rho^2\frac{d\varphi}{dx}dA$$

$$=G\frac{d\varphi}{dx}\int_A\rho^2 dA$$

记 $I_p=\int_A\rho^2 dA$

I_p —— 横截面的极惯性矩

$$\therefore\ T=GI_p\frac{d\varphi}{dx}$$



代入

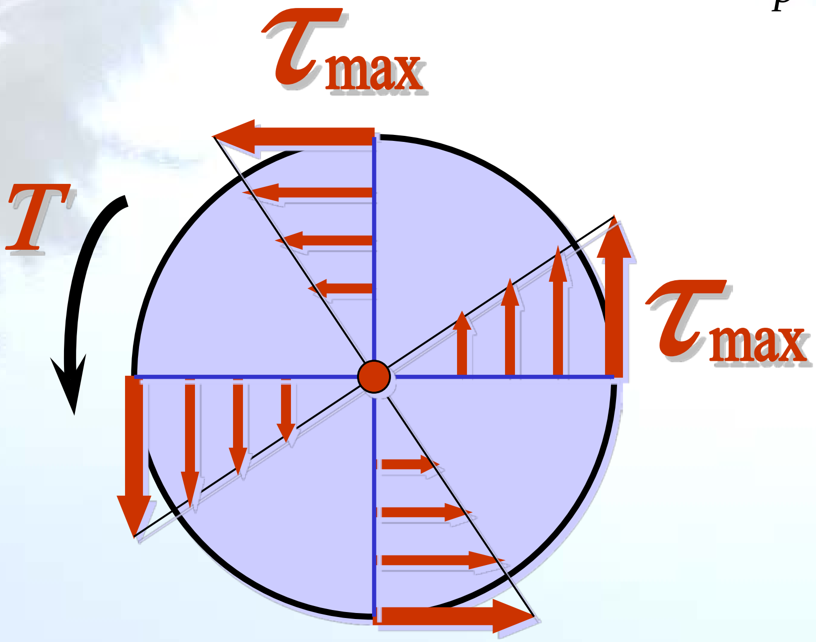
$$\boxed{\tau_\rho=\rho G\frac{d\varphi}{dx}}$$

即：$\dfrac{d\varphi}{dx}=\dfrac{T}{GI_p}$

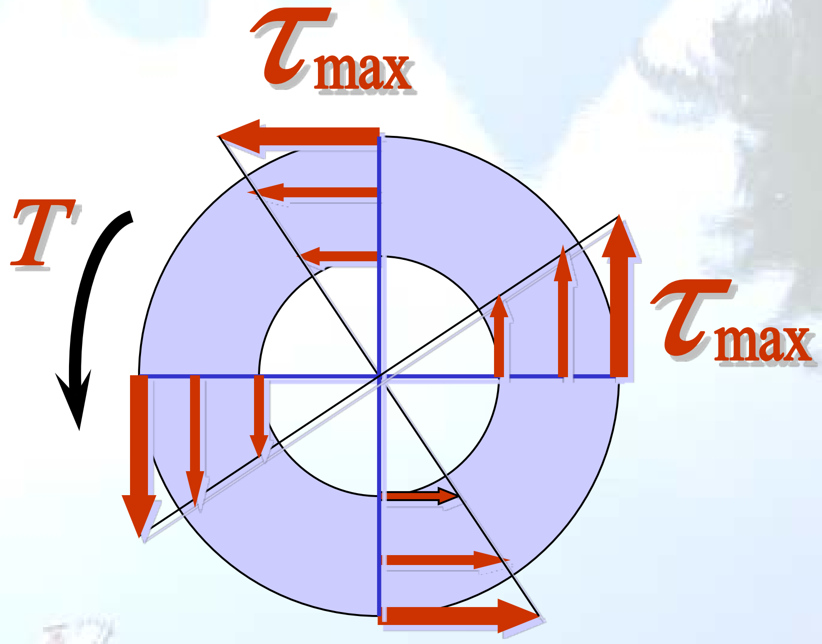
代入物理关系式 $\tau_\rho=\rho G\dfrac{d\varphi}{dx}$

得：$$\boxed{\tau_\rho=\frac{T\cdot\rho}{I_p}}$$

4、应力分布 $\tau_\rho = \dfrac{T \cdot \rho}{I_p}$

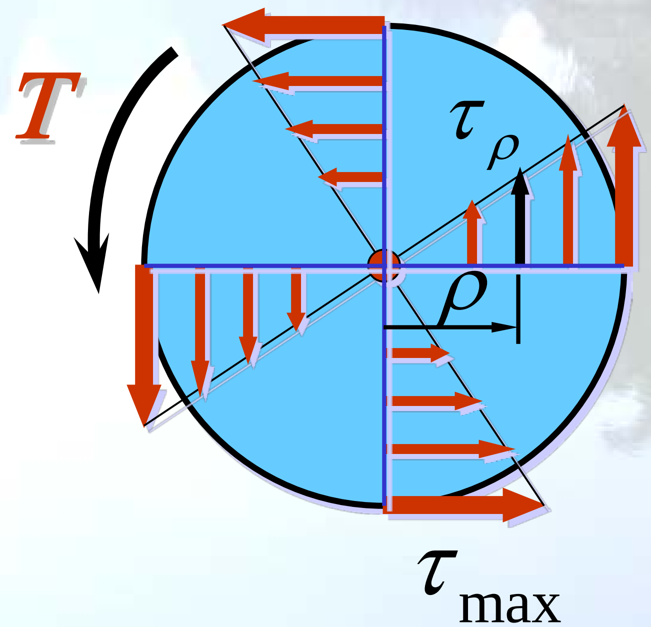


（实心截面）



（空心截面）

最大剪应力：　当 $\rho=R=\dfrac{d}{2}$ 时，



$$\tau_{\max}=\frac{T\cdot\frac{d}{2}}{I_p}$$ 或： $$\tau_{\max}=\frac{T}{I_p\Big/\frac{d}{2}}$$

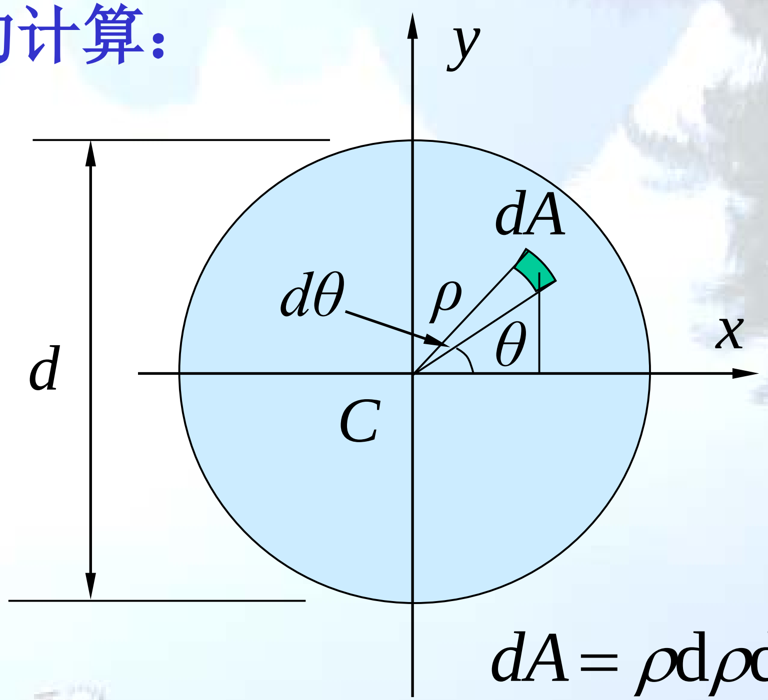
记：$W_t=I_p\Big/\dfrac{d}{2}$

W_t 称为抗扭截面系数，几何量，单位：mm³ 或 m³。

$$\boxed{\tau_{\max}=\frac{T}{W_t}}$$

二、极惯性矩和抗扭截面系数的计算：

（1）实心圆截面：



$$dA = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

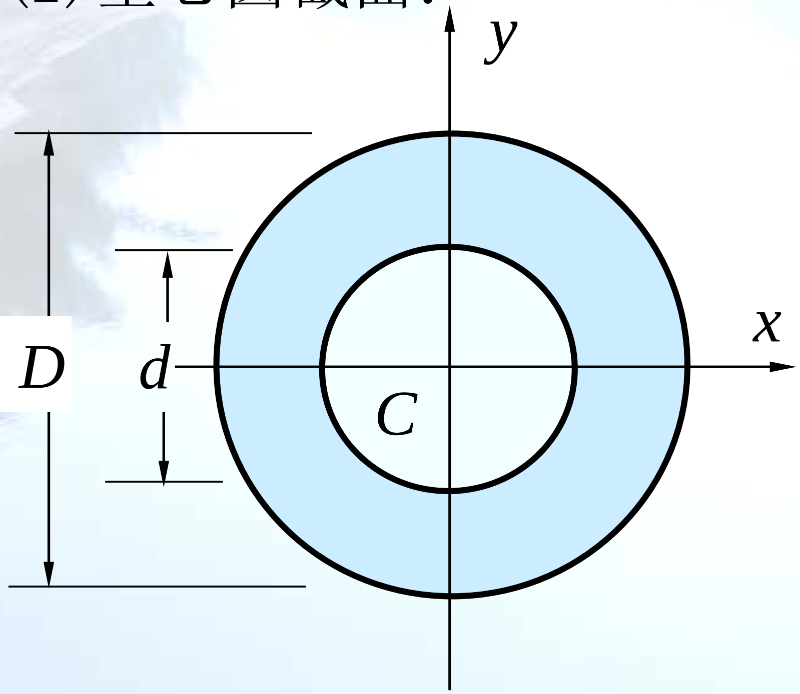
$$I_p = \int_A \rho^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{d}{2}}$$

$$\boxed{I_p = \frac{\pi d^4}{32}}$$

(2)空心圆截面：



$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

$$= \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}}$$

$$= \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$$

$$= \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

$$\boxed{I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)}$$

$$(\alpha = \frac{d}{D})$$

抗扭截面系数W_t

实心圆截面：

$$W_t = I_p \Big/ \frac{d}{2}$$

$$W_t = \frac{\pi d^4}{32} \Big/ \frac{d}{2}$$

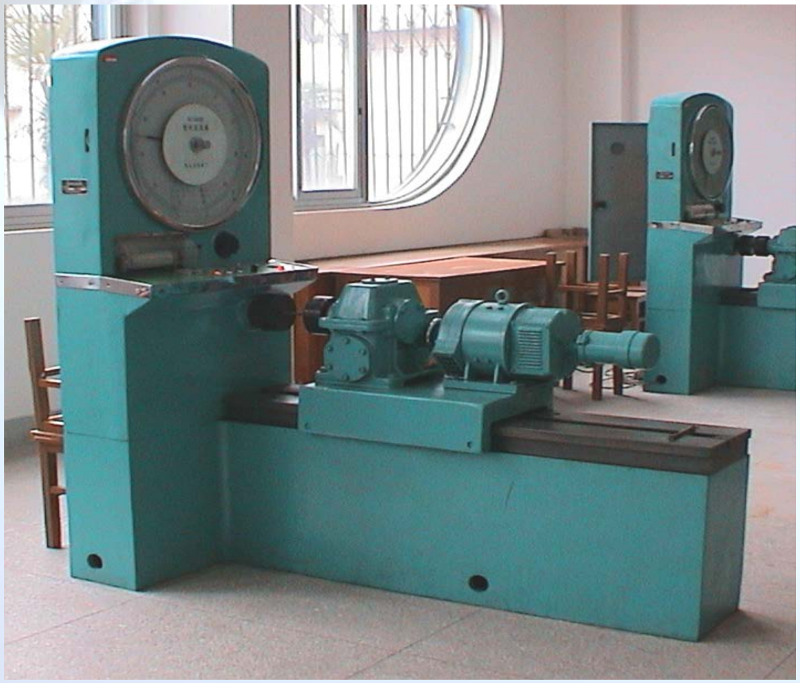
$$\boxed{W_t = \frac{\pi d^3}{16}}$$

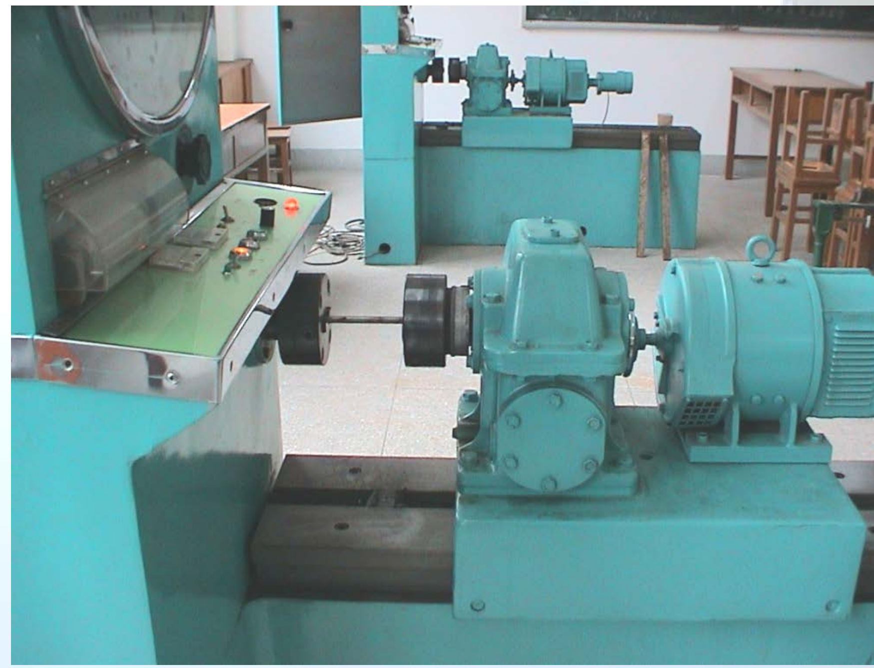
空心圆截面：

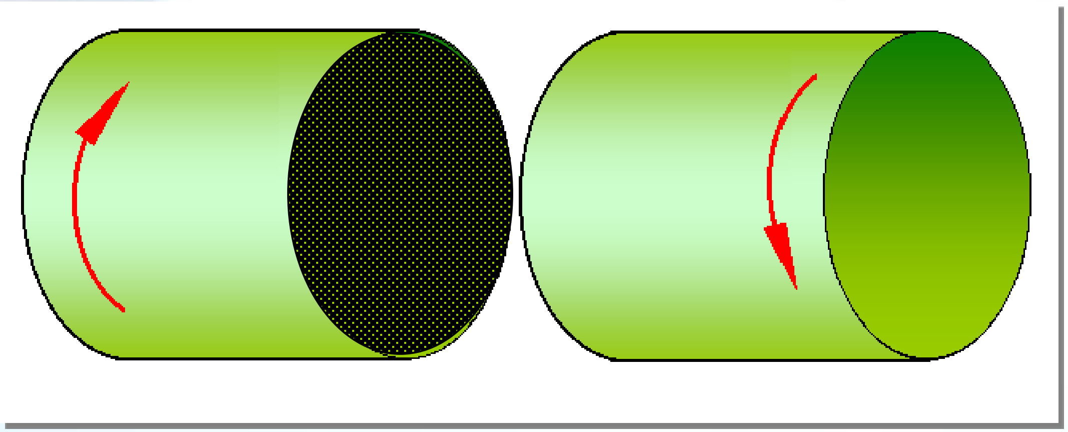
$$W_t = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \Big/ \frac{D}{2}$$

$$\boxed{W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)}$$

三、扭转破坏试验

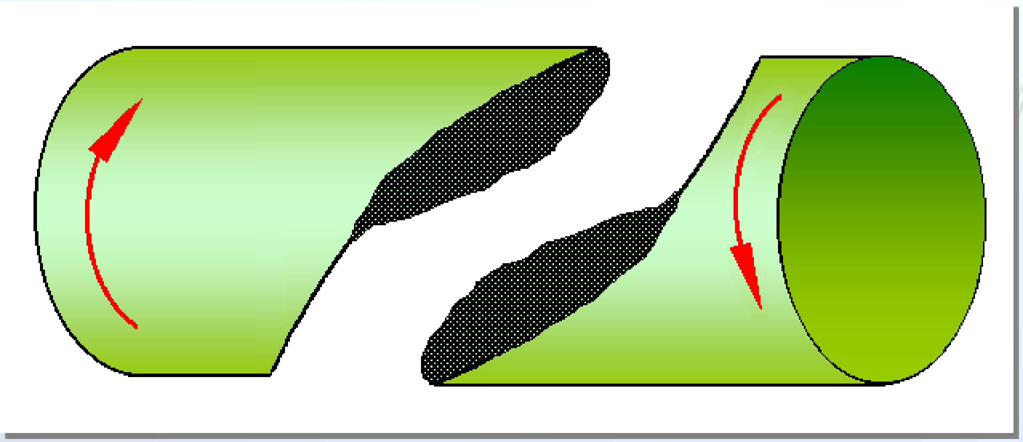






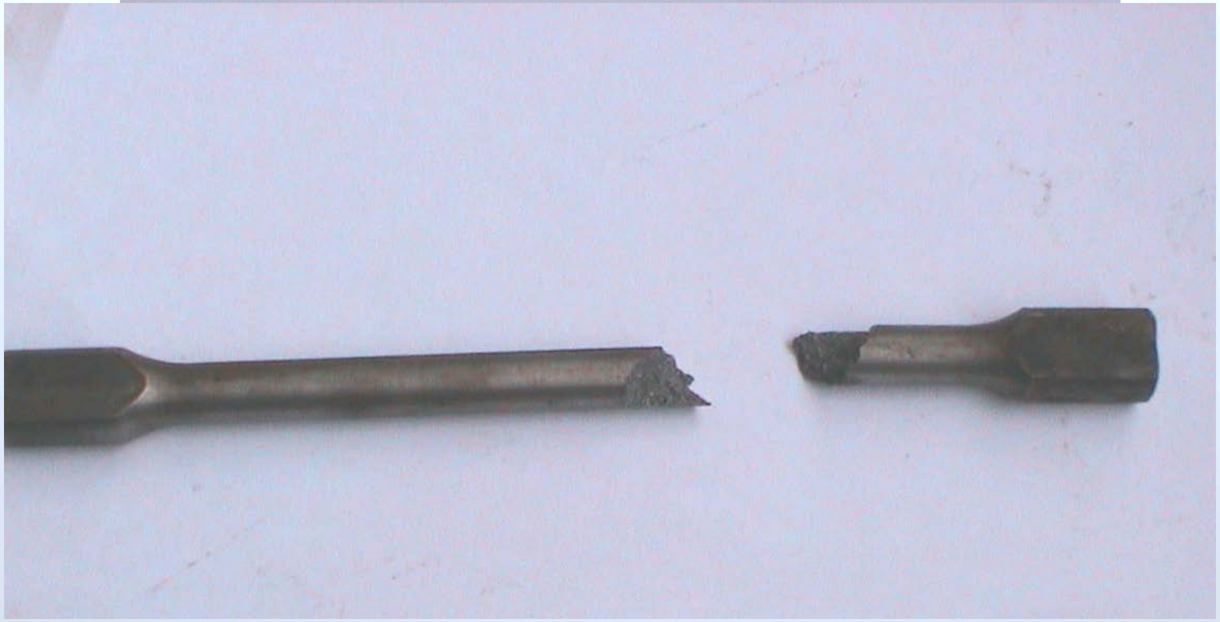
低碳钢试件：

沿横截面断开。



铸铁试件：

沿与轴线约成45°的螺旋线断开。



四、圆轴扭转时的强度计算

强度条件： $\tau_{\max} \le [\tau]$

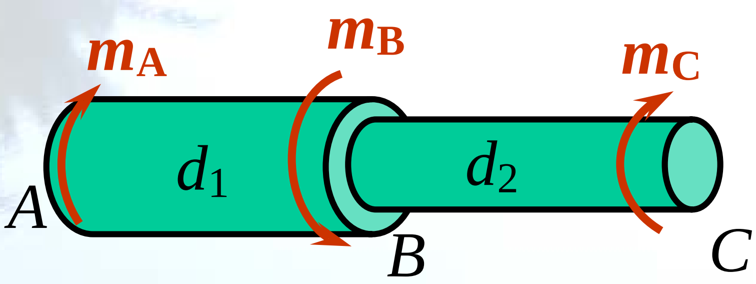
$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \le [\tau]$$

（$[\tau]$ 称为许用剪应力。）

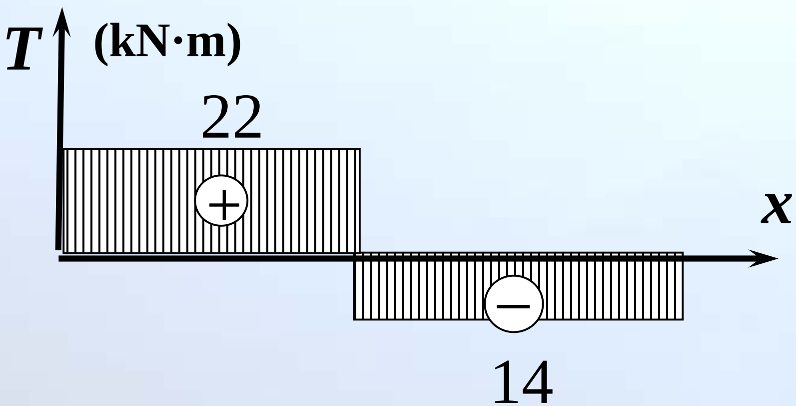
塑性材料 $[\tau] = \dfrac{\tau_s}{n}$

脆性材料 $[\tau] = \dfrac{\tau_b}{n}$

[例3] d_1=120mm，d_2=100mm， m_A=22kN·m，m_B=36kN·m，m_C=14kN·m， 许用剪应力［τ］=80M Pa， 试校核强度。



解:(1)画扭矩图



（2）*AB*段的强度

$$\tau_{1max}=\frac{T_1}{W_{t1}}=\frac{22\times10^6}{\frac{\pi\times120^3}{16}}=65\text{MPa}<[\tau]$$

（3）*BC*段的强度

$$\tau_{2max}=\frac{T_2}{W_{t2}}=\frac{14\times10^6}{\frac{\pi\times100^3}{16}}=71\text{MPa}<[\tau]$$

∴此轴满足强度要求。

[例] 有一根轴，T=1.5kN·m，［τ］=50M Pa，按两种方案确定轴截面尺寸，并比较重量：（1）实心轴；（2）α=0. 9的空心轴。

解：（1）**实心轴** $$\tau_{\max}=\frac{T}{W_t}=\frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}}\le[\tau]$$

$$\therefore\ d\ge\sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}=53.5(\mathrm{mm})$$

（2）**空心轴** $$\tau_{\max}=\frac{T}{W_t}=\frac{T}{\frac{\pi D_1^3}{16}(1-\alpha^4)}\le[\tau]$$

$$\therefore\ D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = 76(\mathrm{mm})$$

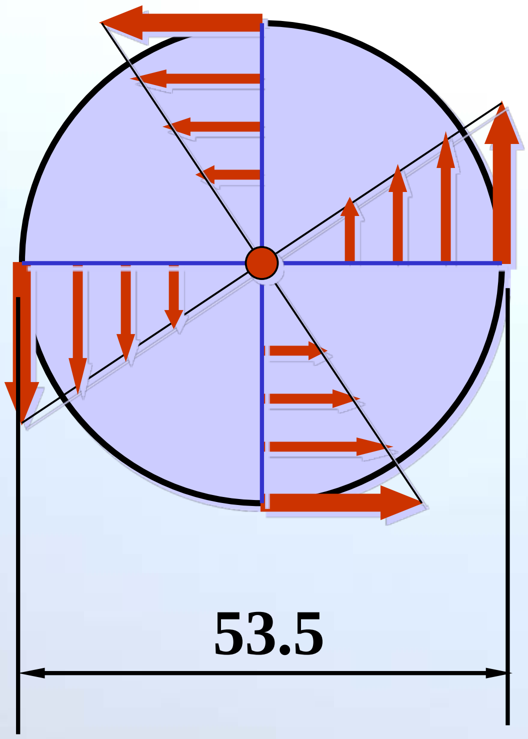
$$d_1 = 0.9D_1 = 68.7(\mathrm{mm})$$

（3）比较重量

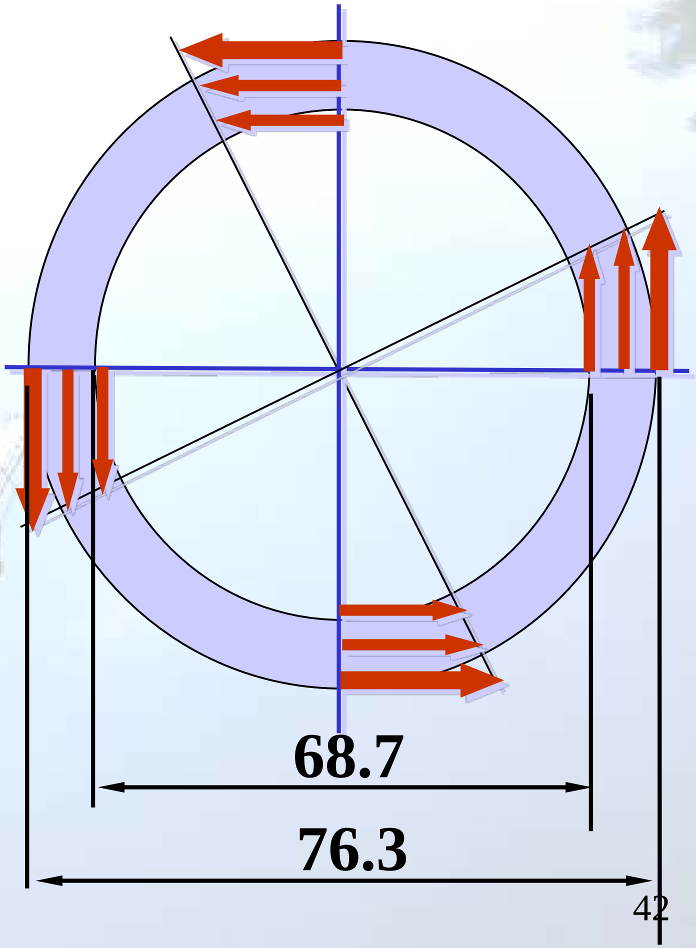
$$\frac{A_{空}}{A_{实}} = \frac{\frac{\pi}{4}(D_1^2 - d_1^2)}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{D_1^2 - d_1^2}{d^2} = 0.385$$

实心轴的重量是空心轴的3倍。

实心截面

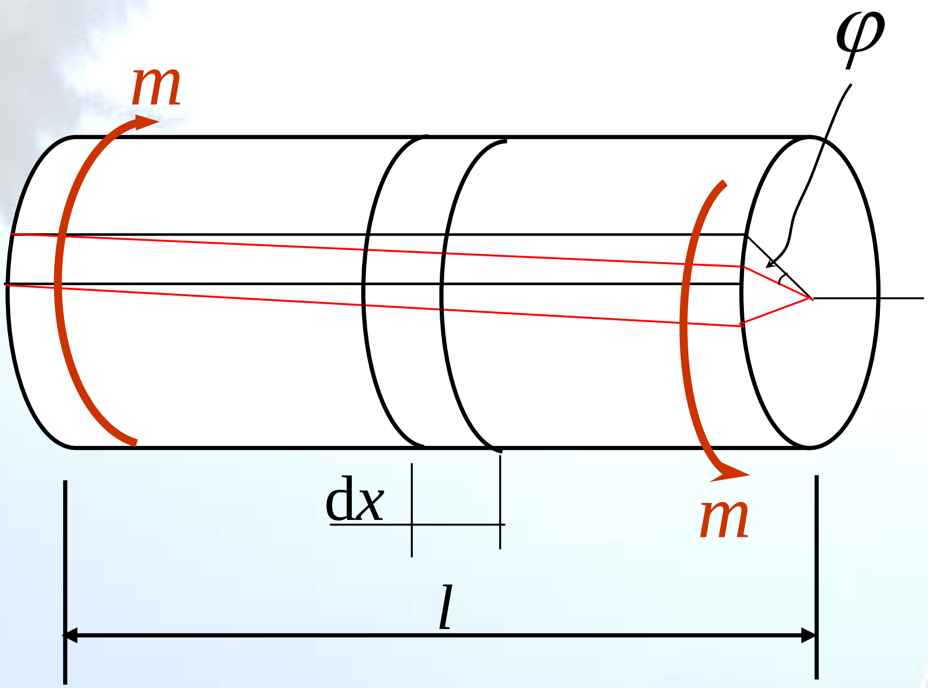


空心截面



§ 3–5　圆轴扭转时的变形

一、扭转时的变形



$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_p}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{T}{GI_p}\mathrm{d}x$$

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int_0^l \frac{T}{GI_p}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{T}{GI_p}\int_0^l \mathrm{d}x = \frac{T\,l}{GI_p}$$

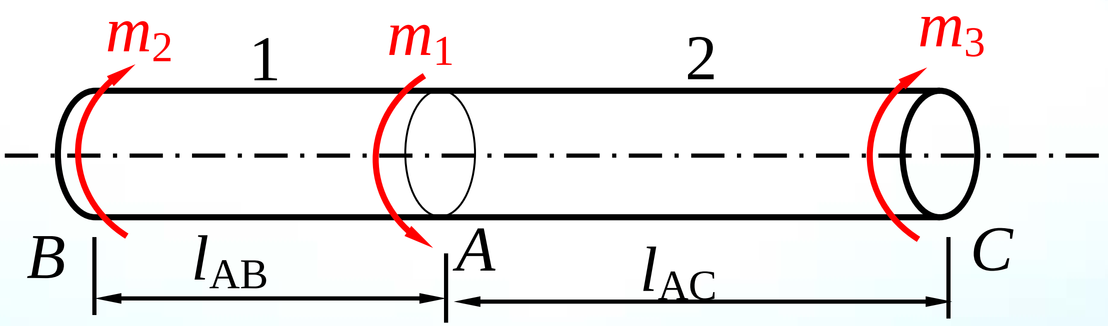
GI_p反映了截面抵抗扭转变形的能力，称为**截面的抗扭刚度**。

即：$\boxed{\varphi = \frac{T\,l}{G\,I_p}}$（rad）

当轴上作用有多个力偶时，进行分段计算，代数相加：

即：$$\boxed{\varphi = \sum \frac{T_i\, l_i}{G\, I_{pi}}}$$

[例3] 已知：m_1=1632N · m，m_2=995N · m，m_3=637N · m，l_{AB}=300mm，l_{AC}=500mm，d=70mm，G=80GPa。试求截面C对B的扭转角。



解：$T_1 = m_2 = 995\ \mathrm{N \cdot m}$

$$T_2 = -m_3 = -637\ \mathrm{N \cdot m}$$

$$I_{P1} = I_{P2} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 70^4}{32} = 2.35\times 10^6\ \mathrm{mm}^4$$

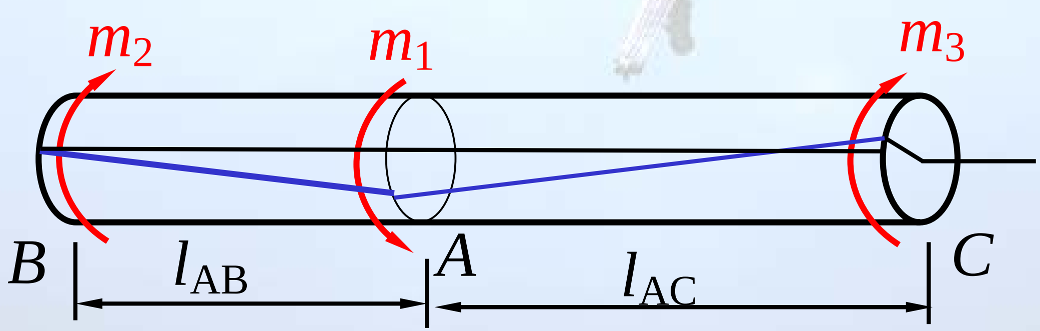
$$\varphi_{CB} = \sum \frac{T_i\, l_i}{G\, I_{pi}} = \frac{T_1\, l_1}{G\, I_{p1}} + \frac{T_2\, l_2}{G\, I_{p2}}$$

$$\varphi_{CB}=\frac{T_1 l_1}{G I_{p1}}+\frac{T_2 l_2}{G I_{p2}}$$

$$=\frac{995\times10^3\times300}{80\times10^3\times2.35\times10^6}+\frac{-637\times10^3\times500}{80\times10^3\times2.35\times10^6}$$

$$=(1.52-1.69)\times10^{-3}\ \text{(rad)}$$

$$=-0.17\times10^{-3}\ \text{(rad)}$$



二、刚度条件

单位长度扭转角 φ'：
$$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{rad/m})$$

或：
$$\boxed{\varphi' = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \quad (°/\text{m})}$$

刚度条件：
$$\boxed{\varphi'_{\max} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \le [\varphi'] \quad (°/\text{m})}$$

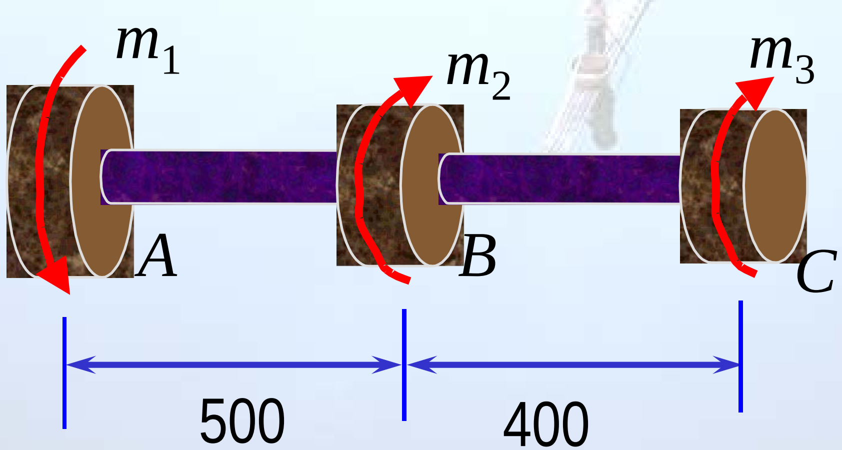
[φ']称为许可单位长度扭转角，取0.15~0.30°/m。

[例3]　某传动轴设计要求转速$n = 500\ \mathrm{r/min}$，输入功率$P_1 = 368$ kW，　输出功率分别 $P_2 = 147\ \mathrm{kW}$及 $P_3 = 221\ \mathrm{kW}$ ，已知：G=80GPa，$[\tau]$=70M Pa，$[\varphi']$=1(°)/m ，试确定：

（1）AB 段直径 d_1和 BC 段直径 d_2 ；

（2）若全轴选同一直径，应为多少？

（3）主动轮与从动轮如何安排合理？

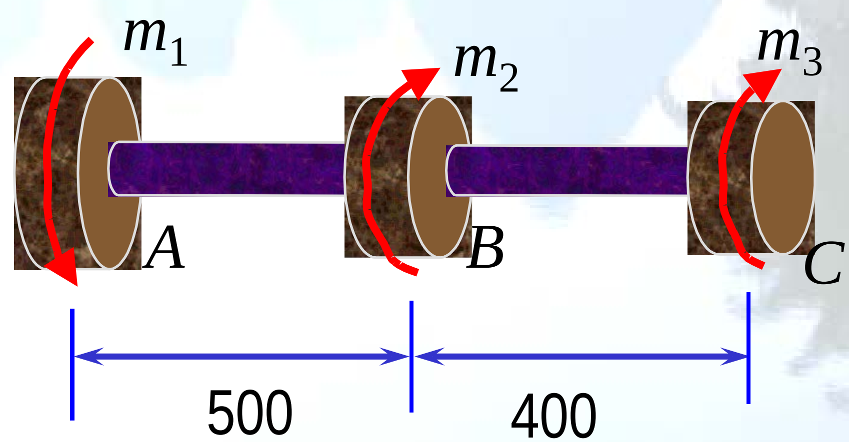


解：由功率和转速计算外力偶矩

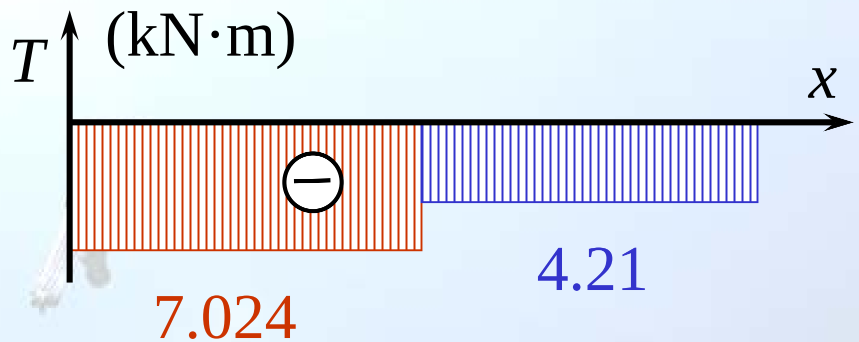
$$m_1 = 9549\frac{P_1}{n} = 7024(\mathrm{N\cdot m})$$

$$m_2 = 9549\frac{P_2}{n} = 2814(\mathrm{N\cdot m})$$

$$m_3 = 9549\frac{P_3}{n} = 4210(\mathrm{N\cdot m})$$



扭矩图如图所示，

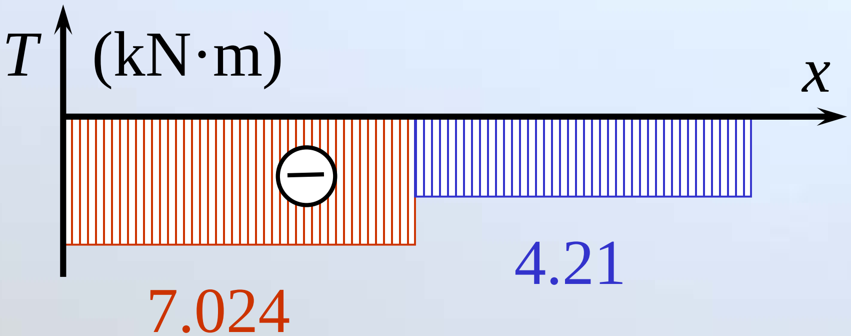


(1) *AB*段：

由强度条件得： $\tau_{\max}=\dfrac{T_1}{W_{t1}}=\dfrac{T_1}{\dfrac{\pi d_1^3}{16}}\le[\tau]\quad \therefore d_1\ge\sqrt[3]{\dfrac{16T_1}{\pi[\tau]}}=80\text{mm}$

由刚度条件得： $\dfrac{T_1}{GI_{p1}}\times\dfrac{180}{\pi}\le[\varphi']$ 即： $\dfrac{32T_1}{G\pi d_1^4}\times\dfrac{180}{\pi}\le[\varphi']$

$$\therefore\quad d_1\ge\sqrt[4]{\frac{32\,T_1\times180}{\pi^2G[\varphi']}}=\sqrt[4]{\frac{32\times7.024\times10^6\times180}{3.14^2\times80\times10^3\times1\times10^{-3}}}=84\text{mm}$$



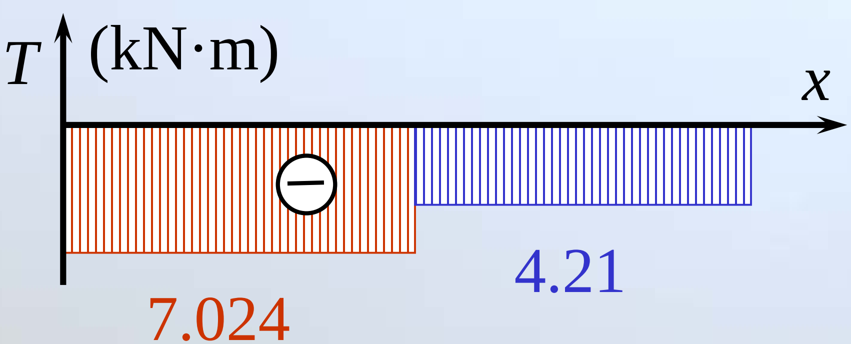
所以*AB* 段直径 $d_1\ge84$**mm**

(1)*BC*段：

由强度条件得：$\tau_{\max}=\dfrac{T_2}{W_{t2}}=\dfrac{T_2}{\dfrac{\pi d_2^3}{16}}\le[\tau]$ $\quad\therefore d_2\ge\sqrt[3]{\dfrac{16T_2}{\pi[\tau]}}=67.4\text{mm}$

由刚度条件得：$\dfrac{T_2}{GI_{p2}}\times\dfrac{180}{\pi}\le[\varphi']$ $\quad$ 即：$\dfrac{32T_2}{G\pi d_2^4}\times\dfrac{180}{\pi}\le[\varphi']$

$$\therefore\quad d_2\ge\sqrt[4]{\frac{32T_2\times180}{\pi^2G[\varphi']}}=\sqrt[4]{\frac{32\times4.21\times10^6\times180}{3.14^2\times80\times10^3\times1\times10^{-3}}}=74.4\text{mm}$$

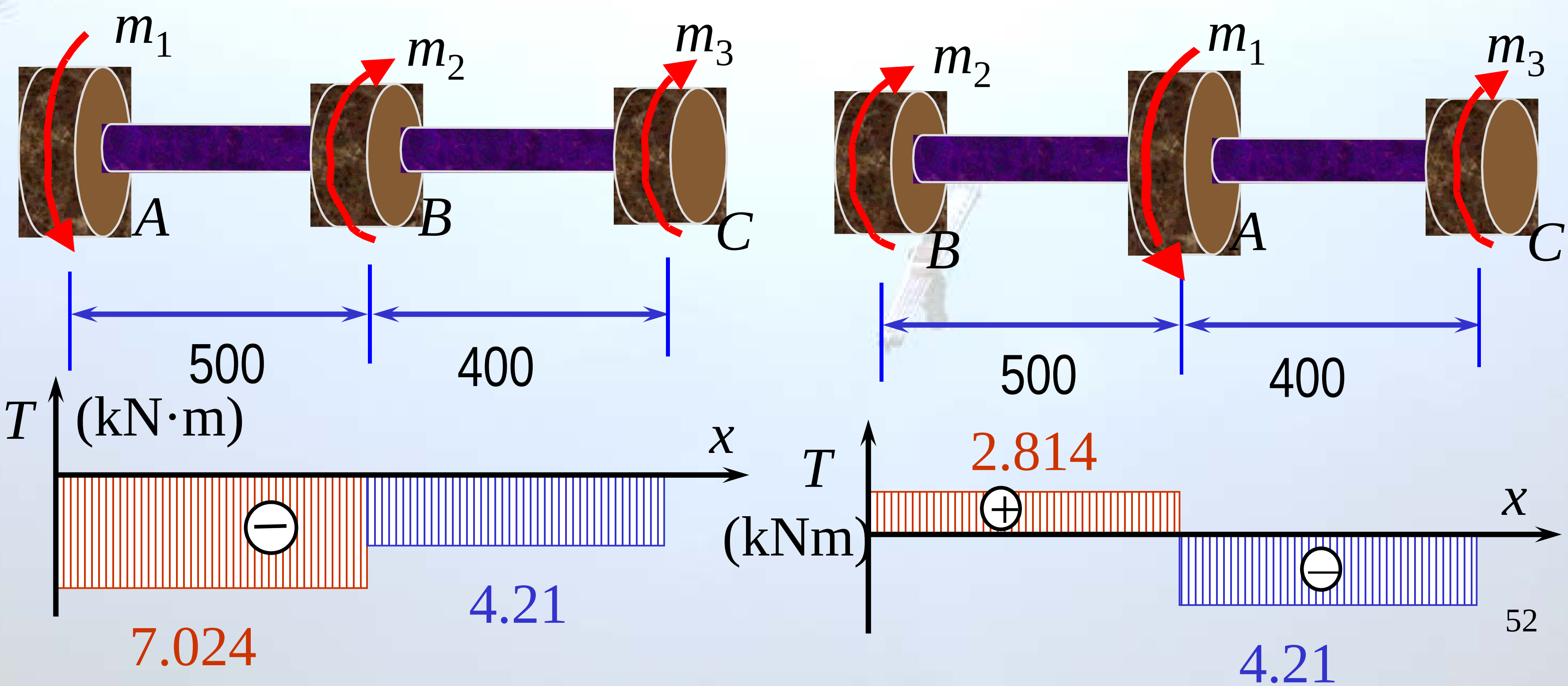


所以***AB*** **段直径** $\boldsymbol{d_2\ge75}$**mm**

(2)全轴选同一直径时　$d \geq 84\text{mm}$

(3) 轴上的扭矩绝对值越小越合理，所以，**1**轮和**2**轮应该换位。

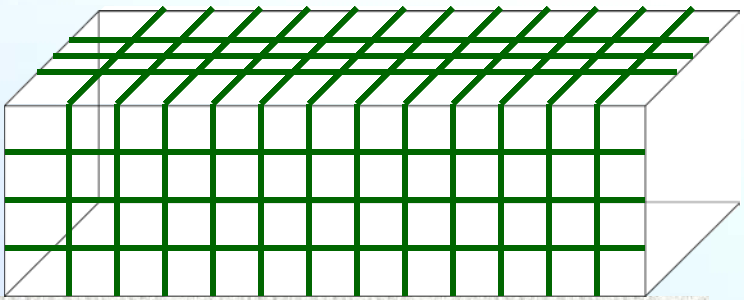
换位后, 轴的扭矩如图所示, 此时, 轴的最大直径为 **75mm**。

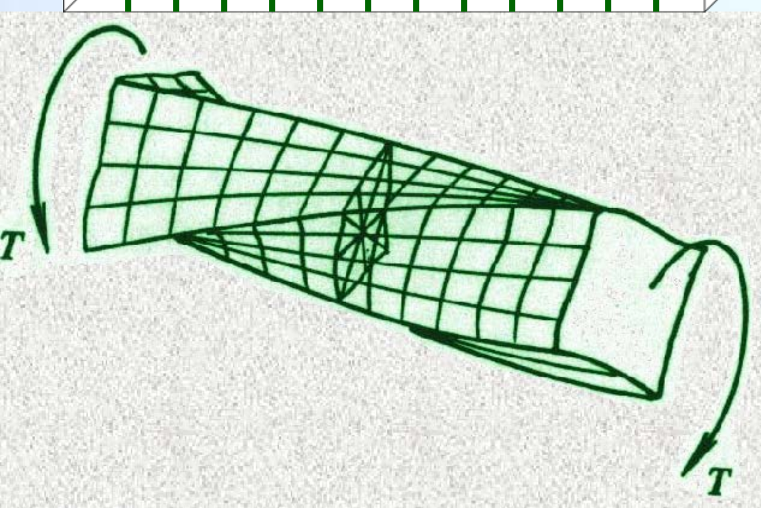


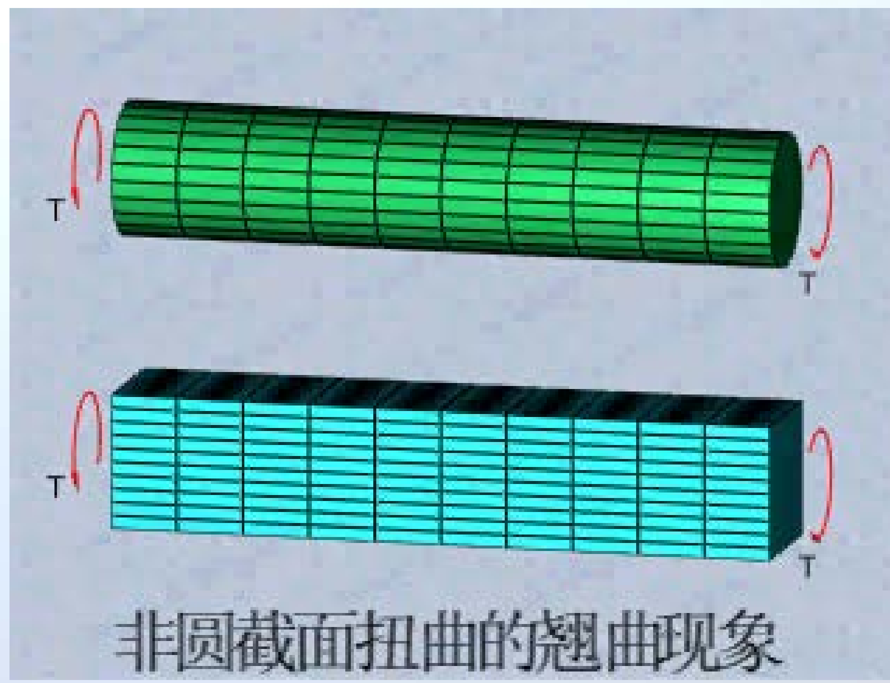
§ 3–7　非圆截面等直杆扭转的概念

非圆截面杆：平面假设不成立。即各截面发生翘曲不保持平面。

因此，由等直圆杆扭转时推出的应力、变形公式不适用，须由弹性力学方法求解。



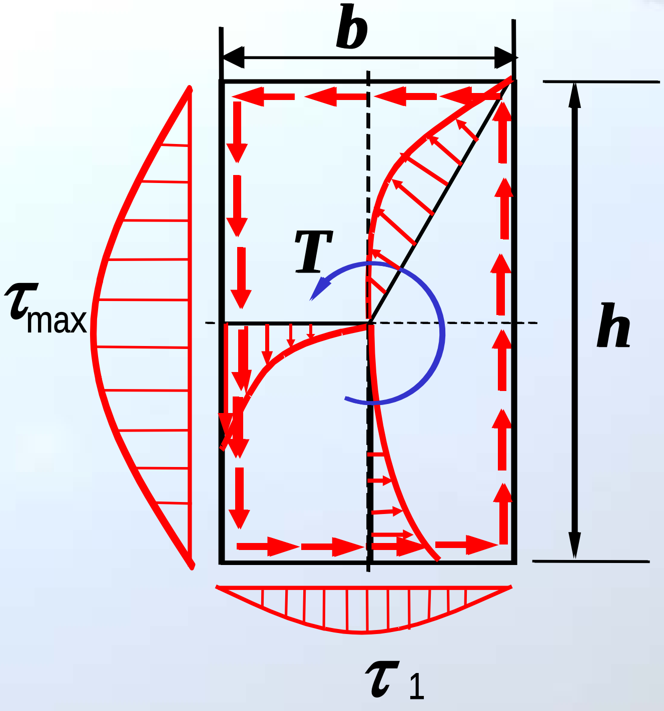




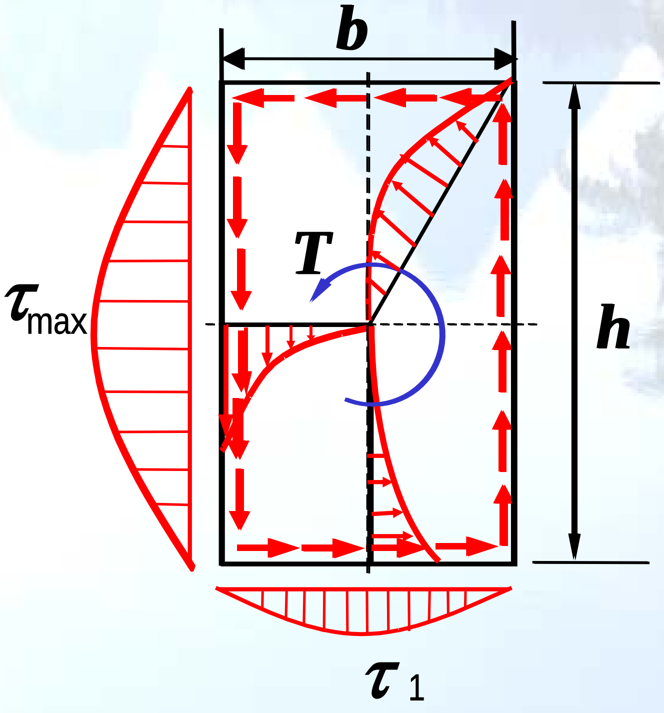
矩形杆横截面上的剪应力:

剪应力分布如图:

1. 周边上的剪应力与周边相切;
2. 四个角点的剪应力为零;
3. 最大剪应力发生在长边中点。



最大剪应力及单位扭转角



由《弹性力学》分析得：

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha h b^2}$$

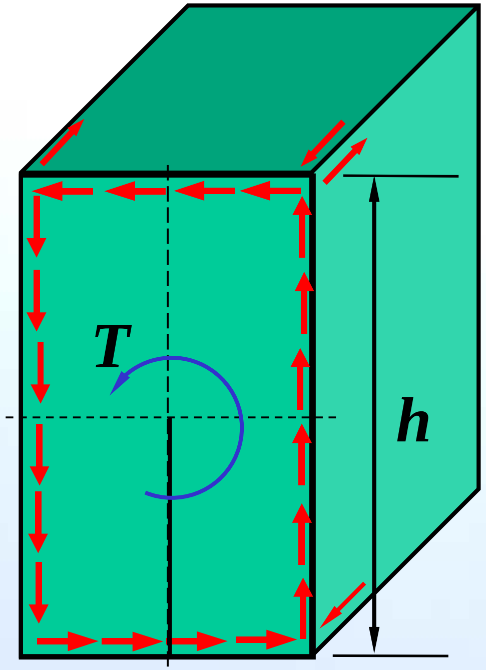
$$\tau_1 = \nu \tau_{max}$$

$$\varphi = \frac{Tl}{G\beta h b^3}$$

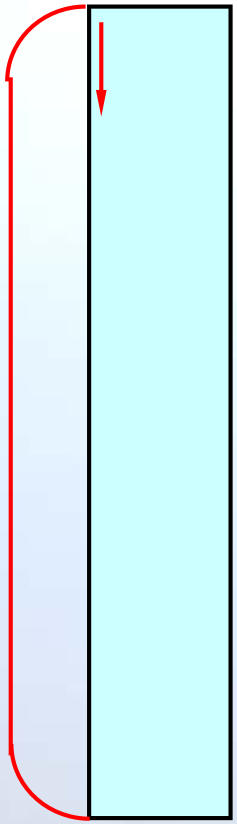
α、β、ν的值与比值h/b有关，见*P*96（表3-2）

四个角点的剪应力为零

由剪应力互等定理得到



对于狭长矩形(即: $\dfrac{h}{b} \geq 10$); $\alpha \approx \beta \approx \dfrac{1}{3}$




MONSHOW
monshow.netease.com