武汉理工大学数值分析课程
复习大纲（一）

绪论部分：

1.了解数值计算中误差来源及避免误差危害，

2.掌握基本算法设计技术，

3.对误差进行简单定性分析。

例 1. 计算机求解科学技术问题的过程中每一步都会不可避免地产生一定的误差，在数值计算环节的误差主要来源于（　　）。

A. 模型误差和截断误差　　B. 观测误差和舍入误差

C. 截断误差和舍入误差　　D. 观测误差和截断误差

【答：C.】

例 2. 算法设计好坏不但影响计算结果精度，还可大量节省时间。以下常用算法中，充分体现"减少计算量"这一原则的是（　　）。

A. 秦九韶算法　B. 迭代法　C. 线性化方法　D. 加权松驰技术

【答：A.】

例 3. 若取 $\sqrt{3} \approx 1.7$，对 $f=(2-\sqrt{3})^6$ 的数值计算中，有 $f \approx 0.00073$。但将 f 作恒等变形成如下各式后，能得到 f 最好数值结果的是（　　）。

A. $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^6}$　B. $(7-4\sqrt{3})^3$　C. $\dfrac{1}{1351+780\sqrt{3}}$　D. $(26-15\sqrt{3})^2$

【答：C.】【提示：记 $\sqrt{3}=1.7+\delta$，分别用各式替换产生的误差 $f(\sqrt{3})-f(1.7) \approx f'(1.7)\delta$，题干中误差约 -0.015δ，各选项误差分别约为 $-0.00063\delta, -0.48\delta, -0.00011\delta, -15\delta$，精度从好到坏显然为 CABD】

插值与拟合部分：

1. 知道插值问题的提法；

2. 掌握拉格朗日基函数的构成及拉格朗日插值函数的构造公式，及其余项表达式。

3.掌握埃特金(Aitken)算法，会用埃特金插值表求插值函数在给定点处的值；

4.熟记牛顿插值公式，掌握差商（均差）表的构造（包括已知节点有直到某阶的导数的情形，即埃尔米特（Hermite）插值），能根据此表写出插值多项式表达式及其余项。

5. 知道曲线拟合问题的提法；

6. 掌握最小二乘法求解拟合曲线的正则方程组的建立。

基本结论和例题：

1. 区间 $[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 的函数值 $y_i = f(x_i)$，则满足 $p(x_i)=y_i$ 的 n 次插值多项式 $p(x)$ 存在且唯一。

例 1. 证明上述结论。

【语法提示：将节点条件代入构造的 n 次多项式中得到一个以多项式系数为未知量的（n+1）元线性方程组，其系数行列式为范德姆行列式不为 0，方程组存在唯一解。】

2. 掌握 n 次插值多项式的拉格朗日插值基函数的形式和性质：

$$l_i(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{k=n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \text{ 及 } l_i(x_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$$

3. 满足 1.中条件的 n 次插值多项式为 $p(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)$ ，其余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

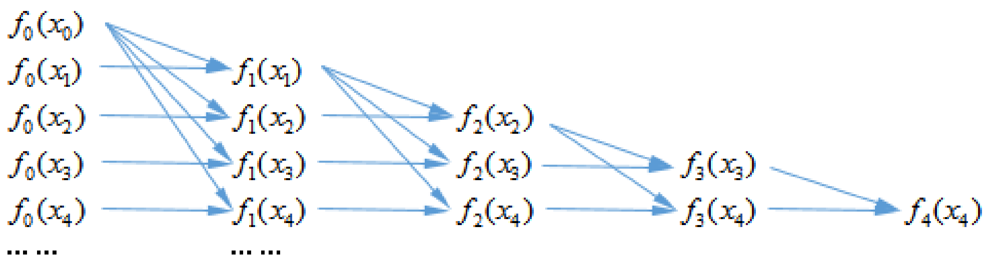
例 2.. 设 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,4)$ 是以 $x_i(i=0,1,\cdots,4)$ 为节点的拉格朗日插值基函数，则

$\sum_{i=0}^{4}x_i l_i(x)=$______， $\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)l_i(x)=$_____，

$\sum_{i=0}^{4}x^5 l_i(x_i)=$________， $\sum_{i=0}^{4}x_i^5 l_i(x)=$_____。

【分别得： $x;0;5x^5;x^5-(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_4)$ 】

4. 下面是埃特金插值表：



其中， $f_0(x_j)=f(x_j), f_{i+1}(x_j)=\frac{x-x_j}{x_i-x_j}f_i(x_i)+\frac{x-x_i}{x_j-x_i}f_i(x_j),(j>i)$

5. 牛顿插值公式及余项形式为：

$$f(x)\approx f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$
$$\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})=p_n(x),$$
$$R_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

公式中允许节点重复。

在重复节点处，差商使用导数方式定义： $f[\underbrace{x,x,\cdots,x}_{n}]=f^{(n)}(x)/n!$

6. 差商表制作：

$f[x_0]$				
$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$			
$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
$f[x_4]$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$

其中，$f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_j]=\dfrac{f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{j-1}]-f[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_j]}{x_j-x_i}(x_i\neq x_j)$

利用以上方法对教材中例题和习题进行练习加以掌握。

7. 如果 $\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\}$ 是线性的连续函数簇，已知函数 $f(x)$ 在 m 个节点的函数值 $f(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,m;m>n)$ ，通过使 $z=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x_i)-y_i)^2$ 最小化的方法确定出 a_k 构造的函数 $S(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数。这种方法称为最小二乘法。这种方法中的近似函数系数 a_k 满足一组正则方程（也称法方程），其形式为：

$$\sum_{k=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_k)a_k=(f,\varphi_i),(i=0,1,\cdots,n)$$

其中，$(\varphi_i,\varphi_k)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_i(x_j)\varphi_k(x_j),(f,\varphi_i)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_i(x_j)f(x_j),(i=0,1,\cdots,n;k=0,1,\cdots,n)$ 。

例 3.在 $\varphi=\{1,x,x^3\}$ 时构造曲线拟合函数。

【得到的正则方程组为：

$$\begin{cases} a_0m+a_1\sum_{j=1}^{m}x_j+a_2\sum_{j=1}^{m}x_j^3=\sum_{j=1}^{m}y_j \\ a_0\sum_{j=1}^{m}x_j+a_1\sum_{j=1}^{m}x_j^2+a_2\sum_{j=1}^{m}x_j^4=\sum_{j=1}^{m}x_jy_j \\ a_0\sum_{j=1}^{m}x_j^3+a_1\sum_{j=1}^{m}x_j^4+a_2\sum_{j=1}^{m}x_j^6=\sum_{j=1}^{m}x_j^3y_j \end{cases}$$

解出 a_0,a_1,a_2 后就得到了拟合函数 $f(x)\approx S(x)=a_0+a_1x+a_2x^3$ 。】

待续……

武汉理工大学数值分析课程
复习大纲（二）

数值积分与微分部分:

1. 了解数值积分的基本方法：用若干节点处的函数值的加权平均值与积分区间长度之积近似计算定积分—机械求积。能够判断积分公式的代数精度。

2. 掌握插值型求积公式的形式，求积系数的计算方法，以及代数精度。

形式：$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$

系数：$A_k = \int_a^b l_k(x)dx (k = 0, 1, \cdots, n)$ 或是用 $f(x) = x^m$ ，m =0，1，2，……，n 依次代入求积公式建立方程求解得到。

代数精度：至少 n 次，至多 2n+1 次。（记法是，考虑求积公式中待定求积系数个数，以及求积节点个数，得到需要用 $f(x) = x^m$ ，m 从 0，1，2，……的多少个函数代入求积公式使之准确成立，m 的最大取值即为代数精度）

余项：$R[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) dx$

3. 了解牛顿-柯特斯公式的形式，柯特斯系数的性质，柯特斯求积公式的代数精度，以及低阶（n=1，2，4）柯特斯公式的余项形式。能利用这些公式进行复化求积。

4. 会使用龙贝格（Romberg）算法将粗糙的梯形积分结果加速 成龙贝格值。

5.掌握高斯型求积公式的高斯点求法及求积系数求法。了解高斯点的基本特性，熟悉勒让德（Legendre）多项式的性质。

高斯积分形式：$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$

求积系数：$A_k = \int_{-1}^{1} l_k(x)dx (k = 1, \cdots, n)$，高斯公式中的求积系数都是正数，故计算稳定。

代数精度：2n-1

勒让德多项式性质：

（1）$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$ 是一个勒让德多项式

（2）$P_n(\pm 1) = \frac{(\pm 2)^n (n!)^2}{(2n)!}$

（3）$P_n(x)$ 与一切次数低于 n 次的多项式在[-1,1]上正交。

（4）$P_n(x)$ 的 n 个零点都在（-1，1）上且都是单根。

（5）有递推式：$P_{n+1}(x) = xP_n - \frac{n^2}{4n^2 - 1} P_{n-1}(x)$ 。

4. 熟悉数值微分的数值计算的常用差商方法：向前 差商、向后差商、中心差商。了解它们计算微分的代数精度，能够用松弛技术对其加速。

5. 了解数值微分的误差来源及数值微分计算中如何对步长进行选取。
典型例题：

例 1. 设计求积公式 $\int_0^4 f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$，使公式具有最高代数精度。

解：将 $f(x) = 1, x, x^2$ 分别代入求积公式并令能准确成立，则有方程组：

$$\begin{cases} 4 = A_1 + A_2 \\ 8 = A_1 x_1 + A_2 \\ 64/3 = A_1 x_1^2 + A_2 \end{cases}$$

解得：$x_1 = 10/3, A_1 = 12/7, A_2 = 16/7$ 。

当将 $f(x) = x^3$ 代入积分公式，左$=64 \neq$右，故公式最高代数精度是 2 次。

例 2. 给出两点高斯求积公式，并说明其代数精度。

解：两点高斯公式形式为：$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ ，

方法一、将 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 代入公式并令其准确成立，可得

$$\begin{cases} 2 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 x_1 + A_2 x_2 \\ 2/3 = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 \\ 0 = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 \end{cases}$$

解得：$A_1 = A_2 = 1, x_{1,2} = \pm\sqrt{3}/3$ 。

将 $f(x) = x^4$ 代入公式知左边=2/5$\neq$ 右边，从而其代数精度是 3 次的。

方法二、二次勒让德多项式 $P_2(x) = \frac{2!}{4!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = x^2 - 1/3$，令多项式为 0，得高斯点为 $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}/3$，再代入 $\begin{cases} 2 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 x_1 + A_2 x_2 \end{cases}$ 即可解得 $A_1 = A_2 = 1$。

再由勒让德多项式的正交性质可知二点高斯公式代数精度是 3 次的。

例 3. 证明：勒让德多项式的性质（1）~（5）。

证明：令 $\varphi_n(x) = (x^2-1)^n$ ，显然它在 $x = \pm 1$ 都有 n 重根，

因此，$\varphi_n^{(k)}(\pm 1) = 0 (k = 0, 1, \cdots, n-1)$ ，

对于任何次数小于 n 次的多项式 $p(x)$ ，

$$\int_{-1}^1 p(x)P_n(x)dx = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^1 p(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^1 p(x)d\varphi_n^{(n-1)}(x)$$

$$= \frac{n!}{(2n)!}[p(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi_n^{(n-1)}(x)dp(x)] = -\frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^1 p'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)dx$$

$$= \cdots = (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^1 p^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx = 0$$

这正好证明了性质（3）

由于n 点高斯公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ 具有$2n-1$ 次代数精度，而$p(x)P_n(x)$ 是次数低于$2n$ 次的多项式，故$\sum_{i=1}^{n} A_i p(x_i)P_n(x_i)=0$ ，由$p(x)$ 的任意性知$P_n(x_i)=0$ 。故$P_n(x)$ 是以高斯点为零点的函数，因此是n次勒让德多项式。这就证明了性质（1）。

由于$\varphi_n^{(n)}(x)=[(x-1)^n(x+1)^n]^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}[(x-1)^n]^{(i)}[(x+1)^n]^{(n-i)}$ ，

所以，$\varphi_n^{(n)}(\pm 1)=n!(\pm 2)^n$ ，则$P_n(\pm 1)=\dfrac{(\pm 2)^n(n!)^2}{(2n)!}$ ，这即性质（2）。

利用罗尔定理考察$\varphi_n(x),\varphi_n'(x),\cdots,\varphi_n^{(n-1)}(x)$ 可知存在$(-1,1)$内n个不同的点x使$\varphi_n^{(n)}(x)=0$ ，从而知$P_n(x)$ 的n 个零点都在$(-1,1)$内且各不相同。证得了性质（4）。

最后，证明性质（5）如下：因为$P_n(x)$ 是最高项（n次项）系数为 1 的多项式，则应该存在常数$a_n,\cdots,a_1,a_0$ 使$P_{n+1}(x)=xP_n(x)+a_nP_n(x)+a_{n-1}P_{n-1}(x)+\cdots+a_1P_1(x)+a_0$ 。

由勒让德多项式的正交性，

$$0=\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_k(x)dx=\int_{-1}^{1}(xP_n(x)+a_nP_n(x)+\cdots+a_kP_k(x)+\cdots+a_0)P_k(x)dx$$

$$=a_k\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx(k=0,1,\cdots,n-2)$$

从而$a_0=a_1=\cdots=a_{n-2}=0$ ，且取$k=n$ 时，

$$0=\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_n(x)dx=\int_{-1}^{1}(xP_n(x)+a_nP_n(x)+\cdots+a_kP_k(x)+\cdots+a_0)P_n(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} xP_n^2(x)dx+a_n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx=a_n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

得$a_n=0$ ，故有：$P_{n+1}(x)=xP_n+a_{n-1}P_{n-1}(x)$。将

$$P_{n+1}(1)=\frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!},P_{n+1}(1)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!},P_{n-1}(1)=\frac{2^{n-1}[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}$$ 代入得

$$a_{n-1}=-\frac{n^2}{4n^2-1}$$ 。

例 3. 求证高斯求积公式中求积系数全是正数。

证明：因为 n 个节点的高斯公式代数精度是 2n-1 次的，而拉格朗日插值基函数的平方是 2n-2 次的非负连续函数且不恒等于 0，所以将$f(x)=l_k^2(x)$ 代入高斯公式是准确成立的，即$\int_{-1}^{1} l_k^2(x)dx=\sum_{i=1}^{n} A_i l_k^2(x_i)=A_k$ 。可见$A_k>0$ 。

例 4. (1)微分数值计算中前差公式代数精度是多少？

（2）写出微分数值计算中的后差公式余项。

（3）利用加速技术将微分计算的中点差商公式进行加速。

解法：略

常微分方程数值解法部分：

1. 了解离散化步进式差分方法是求微分方程数值解的重要一类方法。

2. 熟悉欧拉方法及其隐式方法、两步方法、改进方法和变形的欧拉方法的计算公式的差分格式，了解它们的精度。
3. 了解龙格-库塔方法的设计思想，能求二阶、三阶、四阶龙格-库塔方法的差分格式。
4. 了解亚当姆斯方法的设计思想，能够导出二阶、三阶及四阶的亚当姆斯格式，并熟悉相应阶的隐式亚当姆斯格式。
5. 能利用泰勒展开进行差分格式的精度分析。

例 5.（1）选取参数 p,λ，构造一个微分方程 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 形如

$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h[(1-\lambda)K_1+\lambda K_2] \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+h/3,y_n+phK_1) \end{cases}$ 形式的二阶龙格-库塔格式，并估计其局部截断误差。

（2）利用（1）的方法，对微分方程 $\begin{cases} y'=x^2-y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 取步长 $h=0.1$，计算 $y(0.2)$ 的近似值。（保留小数点后面 4 位）

解：（1）题中所给格式相应离散关系式为 $\begin{cases} y(x_{n+1})\approx y(x_n)+h[(1-\lambda)K_1+\lambda K_2] \\ K_1=f(x_n,y(x_n)) \\ K_2=f(x_n+h/3,y(x_n)+phK_1) \end{cases}$

将 K_1,K_2 泰勒展开：$K_1=y_n'$，

$$K_2=f_n+(\frac{h}{3}\frac{\partial f}{\partial x}+phK_1\frac{\partial f}{\partial y})_n+\frac{1}{2}(\frac{h^2}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{2ph^2}{3}K_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+p^2h^2K_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_n+O(h^3)$$

代入离散关系右端，并记得到的结果为 y_{n+1}^*，有

$$y_{n+1}^*=y_n+hy_n'+\lambda h^2(\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}+pK_1\frac{\partial f}{\partial y})_n+\frac{\lambda h^3}{2}(\frac{1}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{2p}{3}K_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+p^2K_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_n+O(h^4)$$

$$=y_n+hy_n'+\frac{\lambda h^2}{3}y_n''+(p-\frac{1}{3})\lambda h^2(\frac{\partial f}{\partial y}y')_n+\frac{\lambda h^3}{2}(\frac{1}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{2p}{3}K_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+p^2K_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_n+O(h^4)$$

它与 $y(x_{n+1})=y_n+hy_n'+\frac{h^2}{2}y_n''+\frac{h^3}{6}y_n'''+O(h^4)$ 比较可知，当 $\lambda=\frac{3}{2},p=\frac{1}{3}$ 时，两式系数可以符合到二次项，即这个二阶龙格-库塔格式为：$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(-K_1+3K_2) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\frac{h}{3},y_n+\frac{h}{3}K_1) \end{cases}$，此时其局部截断误差为 $y(x_{n+1})-y_{n+1}^*=\frac{h^3}{12}y_n'''+O(h^4)$。

（2）代函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 到（1）中计算格式，得：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(-K_1 + 3K_2) \\ K_1 = x_n^2 - y_n^2 \\ K_2 = (x_n + \dfrac{h}{3})^2 - (y_n + \dfrac{h}{3}K_1)^2 \end{cases}$$

取 $h = 0.1, x_0 = 0, y_0 = 1$ 进行递推，有：

第一次： $K_1 = -1, K_2 = -0.9333, y_1 = 0.9100$ ；

第二次： $K_1 = -0.8181, K_2 = -0.7614, y_2 = 0.8367$

武汉理工大学数值分析课程
复习大纲（三）

方程求根的迭代法部分：

方程求根中常常利用根的一个或几个近似值来迭代产生一个方程根的更好的近似值，这样形成一个迭代序列。反复迭代就可得到方程满足一定精度的近似值。这就是方程求根的迭代法。

1. 了解方程与迭代格式之间的关系，能用压缩映像原理判断迭代格式是否收敛到指定的根。
2. 掌握迭代过程的局部收敛原理及其使用。
3. 能够差别迭代过程的收敛速度。
4. 会对迭代公式进行加速，了解埃特金（Aitken）加速算法。
5. 掌握求方程根的牛顿迭代法，了解简化牛顿法、牛顿下山法。
6. 掌握方程求根的弦截法及快速弦截法。

例 1 （1）使用迭代函数 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)f'(x)}{f'^2(x)-f(x)f''(x)}$ 求多项式函数 $f(x)$ 的根 x^* 时，试讨论所得迭代序列的敛散性及收敛速度。

（2）利用以上结果求方程 $(x^2-2)^2=0$ 的根。（取 $x_0=1,$ 取精度为 10^{-4} ）

（3）将（2）的结果与牛顿法的结果进行比较。

（4）试将（3）的结果使用埃特金方法加速。埃特金加速方法的收敛速度是多少？

（5）写出用弦截法和快速弦截法的迭代格式。

解：（1）首先，$\varphi'(x)=-\dfrac{f(x)[f'^2(x)f''(x)-2f(x)f''^2(x)+f(x)f'(x)f'''(x)]}{[f'^2(x)-f(x)f''(x)]^2}$.

当 $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$ 时，因 $\varphi'(x^*)=0$ 可知迭代 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 局部收敛，且是平方收敛的。

当 $f(x^*)=0, f'(x^*)=0$ 时，不妨设 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$ ，其中 $g(x^*)\neq 0$ ，则

$$\varphi(x)=x-\frac{(x-x^*)[1+(x-x^*)\dfrac{g'(x)}{mg(x)}]}{1+(x-x^*)^2\dfrac{g'^2(x)-g(x)g''(x)}{mg^2(x)}}$$

$$=x-(x-x^*)[1+(x-x^*)\frac{g'(x)}{mg(x)}][1-(x-x^*)^2\frac{g'^2(x)-g(x)g''(x)}{mg^2(x)}+O((x-x^*)^4)]$$

$$=x^*-(x-x^*)^2\frac{g'(x)}{mg(x)}+(x-x^*)^3\frac{g'^2(x)-g(x)g''(x)}{mg^2(x)}+O((x-x^*)^4)$$

可见，$\varphi'(x^*)=0, \varphi''(x^*)=-\dfrac{2g'(x)}{mg(x)}$ 。

因此，迭代也是 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 局部收敛，且是平方收敛的。

另外，$\varphi(x)$ 的不动点还有使 $f'(x)=0$ 的点。不妨设 $f'(a)=0$ 但 $f(a)\neq 0$ ，此时

$\varphi'(a)=2>1$ ，由迭代序列收敛定理知，迭代序列不收敛到 a ，除非迭代初值正好取成 $x_0=a$ 。

（2）当 $f(x)=(x^2-2)^2$ 时，利用以上方法的迭代格式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n^2-2)^2 4x_n(x_n^2-2)}{[4x_n(x_n^2-2)]^2-(x_n^2-2)^2(12x_n^2-8)}=\frac{4x_n}{x_n^2+2},$$

取 $x_0=1$ ，得 $x_1\approx 1.3333, x_2\approx 1.4118, x_3\approx 1.4142, x_4\approx 1.4142$ 。

（3）如果使用牛顿法，迭代格式为 $x_{n+1}=x_n-(x_n^2-2)^2/(4x_n(x_n^2-2))=\dfrac{3x_n^2+2}{4x_n}$ ，

取 $x_0=1$ ，得

$x_1=1.25, x_2=1.3375, x_3=1.3770, x_4=1.3958, x_5=1.4051, x_6=1.4097, x_7=1.4119, \cdots$ 。

可见利用牛顿法的求根效果比本题效果差得多。事实上，要使牛顿法的结果达到 10^{-4} 的精度，因牛顿法格式中迭代函数 $\varphi(x)=\dfrac{3x^2+2}{4x}, \varphi'(x)=\dfrac{3x^2-2}{4x^2}$ ，在 $x^*=\sqrt{2}$ 附近约为 $1/2$ ，要使 $|x_n-\sqrt{2}|\approx\dfrac{1}{2}|x_{n-1}-\sqrt{2}|\approx\cdots\approx\dfrac{1}{2^n}|x_0-\sqrt{2}|=\dfrac{1}{2^n}|1-\sqrt{2}|<10^{-4}$, n 值应不小于 14。

（4）将（3）的结果用埃特金方法加速，记 x_n^0 为牛顿迭代序列中将 x_{n-1}, x_n, x_{n+1} 加速的结果，有加速迭代格式：$x_n^0=x_{n+1}-(x_{n+1}-x_n)^2/(x_{n+1}-2x_n+x_{n-1})$ ，可得

$x_1^0=1.3846, x_2^0=1.4094, x_3^0=1.4132, x_4^0=1.4140, x_5^0=1.4142, x_6^0=1.4142$ 。

因 $x_n^0=x_{n+1}-(x_{n+1}-x_n)^2/(x_{n+1}-2x_n+x_{n-1})=\dfrac{4+14x_{n-1}^2}{10x_{n-1}+3x_{n-1}^2}$,

$x_n^0-\sqrt{2}=-\dfrac{3\sqrt{2}x_{n-1}-2}{10x_{n-1}+3x_{n-1}^2}(x_{n-1}-\sqrt{2})^2$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^0-\sqrt{2}}{(x_{n-1}-\sqrt{2})^2}=-\dfrac{2}{5\sqrt{2}+3}$

可见埃特金加速后的格式是平方收敛的。

（5）略。