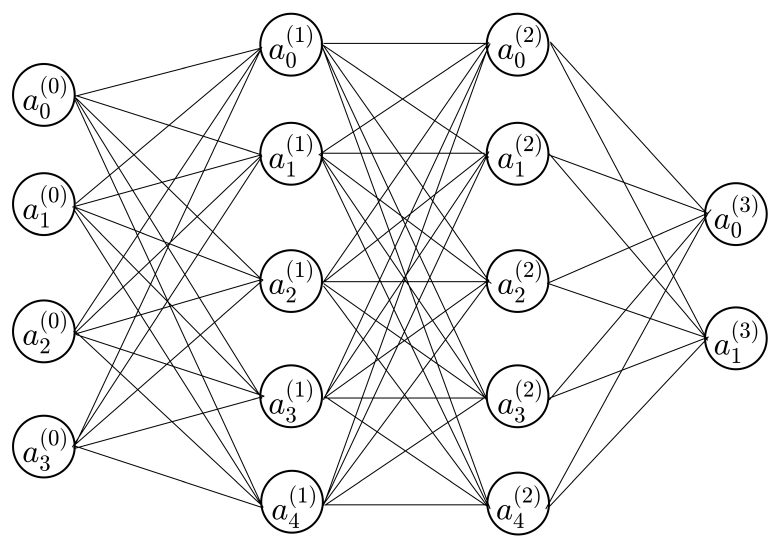


姓名	学号	班级
付清晨	0121618380615	机设1606

## 可选作业二

构建一个四层的BP人工神经网络，不少于16个神经元结点，自定义一个样本，模拟计算一次完整的样本训练过程，整个过程必须包括各个神经元结点的输入值、输出值以及反馈过程中对权向量的修改情况。

### 构建的网络



其中：

- 输入层  $a^{(0)} = [4 \ 3 \ 2 \ 1]^T$
- 权重  $w^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.06 & 0.11 & 0.16 \\ 0.02 & 0.07 & 0.12 & 0.17 \\ 0.03 & 0.08 & 0.13 & 0.18 \\ 0.04 & 0.09 & 0.14 & 0.19 \\ 0.05 & 0.10 & 0.15 & 0.20 \end{bmatrix}$ ,  $w^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.22 & 0.23 & 0.24 & 0.25 \\ 0.16 & 0.17 & 0.18 & 0.19 & 0.20 \\ 0.11 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.15 \\ 0.06 & 0.07 & 0.08 & 0.09 & 0.10 \\ 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.04 & 0.05 \end{bmatrix}$ ,  $w^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.21 \\ 0.17 & 0.22 \\ 0.18 & 0.23 \\ 0.19 & 0.24 \\ 0.20 & 0.25 \end{bmatrix}^T$
- 期望输出层  $y^{(3)} = [0.10 \ 0.24]^T$
- 每个节点没有偏置
- 节点激活函数  $\sigma(x) = 1/(1 + e^{-x})$ , 导数  $\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$

### 符号说明

- $a_i^{(L)}$ : 第 (L) 层节点的第 i 个元素的 **输出值**
- $z_i^{(L)}$ : 第 (L) 层节点的第 i 个元素的 **输入值**
- $w_{ij}^{(L)}$ : 第 (L-1) 层的第 i 个节点到第 (L) 层的第 j 个节点的 **权重**

# 正向传播

## 0层→1层

第一层输入值为：

$$\begin{aligned} z^{(1)} = \begin{bmatrix} z_0^{(1)} \\ z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \\ z_3^{(1)} \end{bmatrix} &= w^{(1)} a^{(0)} = \begin{bmatrix} w_{00}^{(1)} & w_{01}^{(1)} & w_{02}^{(1)} & w_{03}^{(1)} \\ w_{10}^{(1)} & w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} & w_{13}^{(1)} \\ w_{20}^{(1)} & w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} & w_{23}^{(1)} \\ w_{30}^{(1)} & w_{31}^{(1)} & w_{32}^{(1)} & w_{33}^{(1)} \\ w_{40}^{(1)} & w_{41}^{(1)} & w_{42}^{(1)} & w_{43}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0^{(0)} \\ a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ a_3^{(0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0.06 & 0.11 & 0.16 \\ 0.02 & 0.07 & 0.12 & 0.17 \\ 0.03 & 0.08 & 0.13 & 0.18 \\ 0.04 & 0.09 & 0.14 & 0.19 \\ 0.05 & 0.10 & 0.15 & 0.20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

第一层输出值为：

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \end{bmatrix} = \sigma \left( z^{(1)} \right) = \sigma \left( \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.6457 \\ 0.6682 \\ 0.6900 \\ 0.7109 \\ 0.7311 \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 1层→2层

第二层输入值为：

$$\begin{aligned} z^{(2)} = \begin{bmatrix} z_0^{(2)} \\ z_1^{(2)} \\ z_2^{(2)} \\ z_3^{(2)} \\ z_4^{(2)} \end{bmatrix} &= w^{(2)} a^{(1)} = \begin{bmatrix} w_{00}^{(2)} & w_{01}^{(2)} & w_{02}^{(2)} & w_{03}^{(2)} & w_{04}^{(2)} \\ w_{10}^{(2)} & w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} & w_{13}^{(2)} & w_{14}^{(2)} \\ w_{20}^{(2)} & w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} & w_{23}^{(2)} & w_{24}^{(2)} \\ w_{30}^{(2)} & w_{31}^{(2)} & w_{32}^{(2)} & w_{33}^{(2)} & w_{34}^{(2)} \\ w_{40}^{(2)} & w_{41}^{(2)} & w_{42}^{(2)} & w_{43}^{(2)} & w_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_4^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.21 & 0.22 & 0.23 & 0.24 & 0.25 \\ 0.16 & 0.17 & 0.18 & 0.19 & 0.20 \\ 0.11 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.15 \\ 0.06 & 0.07 & 0.08 & 0.09 & 0.10 \\ 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.04 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6457 \\ 0.6682 \\ 0.6900 \\ 0.7109 \\ 0.7311 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7947 \\ 0.6224 \\ 0.4501 \\ 0.2778 \\ 0.1055 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

第二层输出值为：

$$a^{(2)} = \begin{bmatrix} a_0^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ a_3^{(2)} \end{bmatrix} = \sigma \left( z^{(2)} \right) = \sigma \left( \begin{bmatrix} 0.7947 \\ 0.6224 \\ 0.4501 \\ 0.2778 \\ 0.1055 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.6888 \\ 0.6508 \\ 0.6107 \\ 0.5690 \\ 0.5264 \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2层→3层

第三层输入值为：

$$\begin{aligned} z^{(3)} &= \begin{bmatrix} z_0^{(3)} \\ z_1^{(3)} \end{bmatrix} = w^{(3)} a^{(2)} = \begin{bmatrix} w_{00}^{(3)} & w_{01}^{(3)} & w_{02}^{(3)} & w_{03}^{(3)} & w_{04}^{(3)} \\ w_{10}^{(3)} & w_{11}^{(3)} & w_{12}^{(3)} & w_{13}^{(3)} & w_{14}^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ a_3^{(2)} \\ a_4^{(2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.16 & 0.17 & 0.18 & 0.19 & 0.20 \\ 0.21 & 0.22 & 0.23 & 0.24 & 0.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6888 \\ 0.6508 \\ 0.6107 \\ 0.5690 \\ 0.5264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5441 \\ 0.6964 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

第三层输出值为：

$$a^{(3)} = \begin{bmatrix} a_0^{(3)} \\ a_1^{(3)} \end{bmatrix} = \sigma \left( z^{(3)} \right) = \sigma \left( \begin{bmatrix} 0.5441 \\ 0.6964 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.6328 \\ 0.6674 \end{bmatrix} \quad (6)$$

## 误差

$$\begin{aligned} C^{(3)} &= \sum_i \frac{1}{2} (y_i^{(3)} - a_i^{(3)})^2 \\ &= \frac{1}{2} (0.6328 - 0.10)^2 + \frac{1}{2} (0.6674 - 0.24)^2 = 0.2332 \end{aligned} \quad (7)$$

## 反向传播

### 3层→2层

有以下数学关系：

$$\begin{aligned} C^{(3)} &= \frac{1}{2} (y^{(3)} - a^{(3)})^2 \\ a^{(3)} &= \sigma(z^{(3)}) \\ z^{(3)} &= w^{(3)} a^{(2)} \end{aligned} \quad (8)$$

因此 权重梯度

$$\begin{aligned} \nabla w_{ij}^{(3)} &= \frac{\partial C^{(3)}}{\partial w_{ij}^{(3)}} = \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(3)}} \frac{\partial a_i^{(3)}}{\partial z_i^{(3)}} \frac{\partial z_i^{(3)}}{\partial w_{ij}^{(3)}} = (a_i^{(3)} - y_i^{(3)}) \sigma(z_i^{(3)}) [1 - \sigma(z_i^{(3)})] a_j^{(2)} \\ \nabla w^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0.0853 & 0.0806 & 0.0756 & 0.0704 & 0.0652 \\ 0.0654 & 0.0617 & 0.0579 & 0.0540 & 0.0499 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

修正后权重：

$$w^{(3)'} = w^{(3)} - \nabla w^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0747 & 0.0894 & 0.1044 & 0.1196 & 0.1348 \\ 0.1446 & 0.1583 & 0.1721 & 0.1860 & 0.2001 \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 2层→1层

有以下数学关系：

$$\begin{aligned}
C^{(3)} &= \frac{1}{2}(y^{(3)} - a^{(3)})^2 \\
a^{(3)} &= \sigma(z^{(3)}) \\
z^{(3)} &= w^{(3)} a^{(2)} \\
a^{(2)} &= \sigma(z^{(2)}) \\
z^{(2)} &= w^{(2)} a^{(1)}
\end{aligned} \tag{11}$$

因此 权重梯度

$$\begin{aligned}
\nabla w_{ij}^{(2)} &= \frac{\partial C^{(3)}}{\partial w_{ij}^{(2)}} = \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(2)}} \frac{\partial a_i^{(2)}}{\partial z_i^{(2)}} \frac{\partial z_i^{(2)}}{\partial w_{ij}^{(2)}} = \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(2)}} \sigma(z_i^{(2)}) [1 - \sigma(z_i^{(2)})] a_j^{(1)} \\
\nabla w^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0.0032 & 0.0033 & 0.0034 & 0.0035 & 0.0036 \\ 0.0038 & 0.0040 & 0.0041 & 0.0042 & 0.0043 \\ 0.0045 & 0.0046 & 0.0048 & 0.0049 & 0.0051 \\ 0.0051 & 0.0053 & 0.0055 & 0.0057 & 0.0058 \\ 0.0057 & 0.0059 & 0.0061 & 0.0063 & 0.0065 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(2)}} = \sum_i \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(3)}} \frac{\partial a_i^{(3)}}{\partial z_i^{(3)}} \frac{\partial z_i^{(3)}}{\partial a_j^{(2)}} = \sum_i \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(3)}} a_i^{(3)} (1 - a_i^{(3)}) w_{ij}^{(3)'} \tag{13}$$

修正后权重：

$$w^{(2)'} = w^{(2)} - \nabla w^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.2068 & 0.2167 & 0.2266 & 0.2365 & 0.2464 \\ 0.1562 & 0.1660 & 0.1759 & 0.1858 & 0.1957 \\ 0.1055 & 0.1154 & 0.1252 & 0.1351 & 0.1449 \\ 0.0549 & 0.0647 & 0.0745 & 0.0843 & 0.0942 \\ 0.0043 & 0.0141 & 0.0239 & 0.0337 & 0.0435 \end{bmatrix} \tag{14}$$

## 1层→0层

有以下数学关系：

$$\begin{aligned}
C^{(3)} &= \frac{1}{2}(y^{(3)} - a^{(3)})^2 \\
a^{(3)} &= \sigma(z^{(3)}) \\
z^{(3)} &= w^{(3)} a^{(2)} \\
a^{(2)} &= \sigma(z^{(2)}) \\
z^{(2)} &= w^{(2)} a^{(1)} \\
a^{(1)} &= \sigma(z^{(1)}) \\
z^{(1)} &= w^{(1)} a^{(0)}
\end{aligned} \tag{15}$$

因此 权重梯度

$$\nabla w_{ij}^{(1)} = \frac{\partial C^{(3)}}{\partial w_{ij}^{(1)}} = \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(1)}} \frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial z_i^{(1)}} \frac{\partial z_i^{(2)}}{\partial w_{ij}^{(1)}} = \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(1)}} \sigma(z_i^{(1)}) [1 - \sigma(z_i^{(1)})] a_j^{(0)} \quad (16)$$

$$\nabla w^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0029 & 0.0022 & 0.0014 & 0.0007 \\ 0.0031 & 0.0023 & 0.0015 & 0.0008 \\ 0.0033 & 0.0025 & 0.0016 & 0.0008 \\ 0.0034 & 0.0026 & 0.0017 & 0.0009 \\ 0.0036 & 0.0027 & 0.0018 & 0.0009 \end{bmatrix}$$

其中

$$\frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(1)}} = \sum_i \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(2)}} \frac{\partial a_i^{(2)}}{\partial z_i^{(3)}} \frac{\partial z_i^{(2)}}{\partial a_i^{(2)}} = \sum_i \frac{\partial C^{(3)}}{\partial a_i^{(2)}} a_i^{(2)} (1 - a_i^{(2)}) w_{ij}^{(2)} \quad (17)$$

修正后权重：

$$w^{(1)'} = w^{(1)} - \nabla w^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0071 & 0.0578 & 0.1086 & 0.1593 \\ 0.0169 & 0.0677 & 0.1185 & 0.1692 \\ 0.0267 & 0.0775 & 0.1284 & 0.1792 \\ 0.0366 & 0.0874 & 0.1383 & 0.1891 \\ 0.0464 & 0.0973 & 0.1482 & 0.1991 \end{bmatrix} \quad (18)$$

一次完整的样本训练过程就结束了

## 训练后误差

$$C^{(3)'} = \sum_i \frac{1}{2} (y_i^{(3)} - a_i^{(3)})^2 \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} (0.5769 - 0.10)^2 + \frac{1}{2} (0.6259 - 0.24)^2 = 0.1882 < 0.2332 = C^{(3)}$$

## 计算过程

Matlab代码，比较低级，算是半个手工计算。。。

```
Y = [0.10 0.24]';
w10 = [0.01:0.05:0.16;...
        0.02:0.05:0.17;...
        0.03:0.05:0.18;...
        0.04:0.05:0.19;...
        0.05:0.05:0.20];
A0 = [4 3 2 1]';
w20 = [0.21:0.01:0.25;...
        0.16:0.01:0.20;...
        0.11:0.01:0.15;...
        0.06:0.01:0.10;...
        0.01:0.01:0.05];
w30 = [0.16:0.01:0.20;...
        0.21:0.01:0.25];
Z1 = w10*A0;
A1 = 1./(1.+exp(-Z1));
Z2 = w20*A1;
A2 = 1./(1.+exp(-Z2));
Z3 = w30*A2;
```

```

A3 = 1./(1.+exp(-Z3));
C = 0.5.*(Y - A3).*(Y - A3);
DW3 = (A3-Y).*(A3).*(1-A3)*A2';
W3 = W30 - DW3;
DA3 = A3-Y;
DA2 = (DA3.*A3.*(1-A3)).'*W3;
DA2 = DA2';
DW2 = DA2.*A2.*(1-A2)*A1';
W2 = W20 - DW2;
DA1 = (DA2.*A2.*(1-A2)).'*W2;
DA1 = DA1';
DW1 = DA1.*A1.*(1-A1)*A0';
W1 = W10 - DW1;

Z11 = W1*A0;
A11 = 1./(1.+exp(-Z11));
Z21 = W2*A11;
A21 = 1./(1.+exp(-Z21));
Z31 = W3*A21;
A31 = 1./(1.+exp(-Z31));
C1 = 0.5.*(Y - A31).*(Y - A31);

```

---

2018-10-21