基于《材料力学Ⅰ》（ISBN：978-7-04-030895-2）、《材料力学Ⅱ》（ISBN：978-7-04-030894-5）

平面图形的几何性质

基本概念

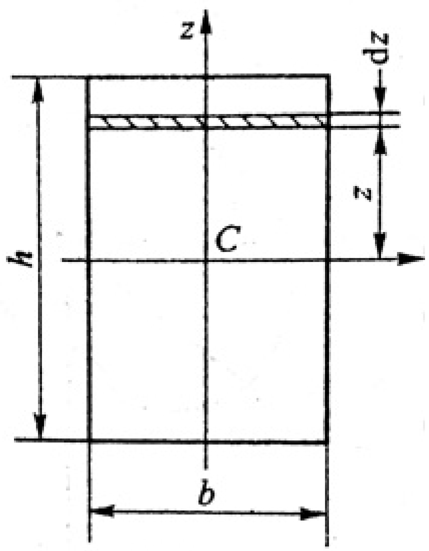
1.静矩：**$Sz = \int ydA(A)$，$Sy = \int zdA(A)$**。其中：y为到z轴距离，z为到y轴距离

2.组合图形静矩：**$Sz = \sum(yi \cdot Ai)(i=1,n)$**，各个部分对同一轴静矩的代数和

3.形心：**$y = \int ydA(A) / A = Sz / A$**（由此可以看出：静矩为0，轴过形心）

4.组合图形形心：**$y = \sum(yi \cdot Ai)(i=1,n) / \sum Ai(i=1,n)$**

5.惯性矩：**$Iz = \int y^2dA(A)$**。其中：y为到z轴距离。



1. ①矩形惯性矩：**$Iz = hb^3/12$** 。其中：h为∥边的高度，b为⊥边的高度，坐标原点为形心
   `Iz = ∫y²dA(A) = ∫(-b/2,b/2)dy∫z²(-h/2,h/2)dz = 1/3·(h/2)³·2·b = hb³/12`
2. ②圆惯性矩：**$Iz = \pi D^4/64$**，坐标原点为形心
   `Iz = ∫dθ(0,2π)∫ρ²cos²θ·ρ(0,D/2)dρ = 1/4·(D/2)³·π/2 = πD²/64`
3. ③圆环：**$Iz = \pi(D^{4-d}4)/64$**，坐标原点为形心
4. ④组合图形惯性矩：**$Iz = \sum Iz(i=1,n)$**，对同一根轴

6.极惯性矩：**$I\rho = \int \rho^2dA(A) = Iy^2 + Iz^2$**。其中，ρ为到原点距离。`Iρ = ∫ρ²dA(A) = ∫(y²+z²)dA(A) = Iy² + Iz²`

7.惯性半径：$Iz = iz^2 \cdot A$。即**$iz = sqrt(Iz/A)$**。圆截面惯性半径为D/4

8.惯性积：**$Iyz = \int yzdA(A)$**。注：任意坐标轴为对称轴则**Iyz=0**

轴的变换

1.平行移轴公式：**$I_{zo} = I_{zc} + y(oc)^2 \cdot A$；$I_{xyo} = I_{xyc} + x(oc)y(oc) \cdot A$。**其中，O为新坐标轴，C为**形心**坐标轴。`∫y²dA(A) = ∫[y+y(oc)]²dA(A) = ∫y²dA(A) + ∫y(oc)²dA(A) + 2y(oc)·∫ydA(A)(值为0)` （通过这个式子，可以很方便的计算组合图形的惯性轴）

2.转轴公式：

1. **$I_{y1} = I_y\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha - 2I_{yz}\cos\alpha\sin\alpha$** = **$(I_y+I_z)/2 + (I_y-I_z)/2 \cdot \cos2\alpha - I_{yz} \cdot \sin2\alpha$。**其中：α为新轴y1,x1相对旧轴y,x转动的角度。（个人认为前面一个式子比较好记，所以加粗了）`新轴和旧轴之间的关系：y1=ycosα+zsinα；z1=zcosα-ysinα(由后图几何关系可知) -> Iz1 = ∫y1²dA(A) = ∫(ycosα+zsinα)²dA(A) = Iycos²α + Izsin²α - 2Iyzcosαsinα`
2. **$I_{z1} = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha + 2I_{yz}\cos\alpha\sin\alpha$** = **$(I_z+I_y)/2 + (I_z-I_y)/2 \cdot \cos2\alpha + I_{yz} \cdot \sin2\alpha$**
3. **$I_{xy1} = (I_y-I_z)/2 \cdot \sin2\alpha + I_{yz} \cdot \cos2\alpha$**

形心主惯性轴

1.用途：用于应力应变分析的计算

2.要素：①过形心②Iyz=0（满足这一点的称为主轴）

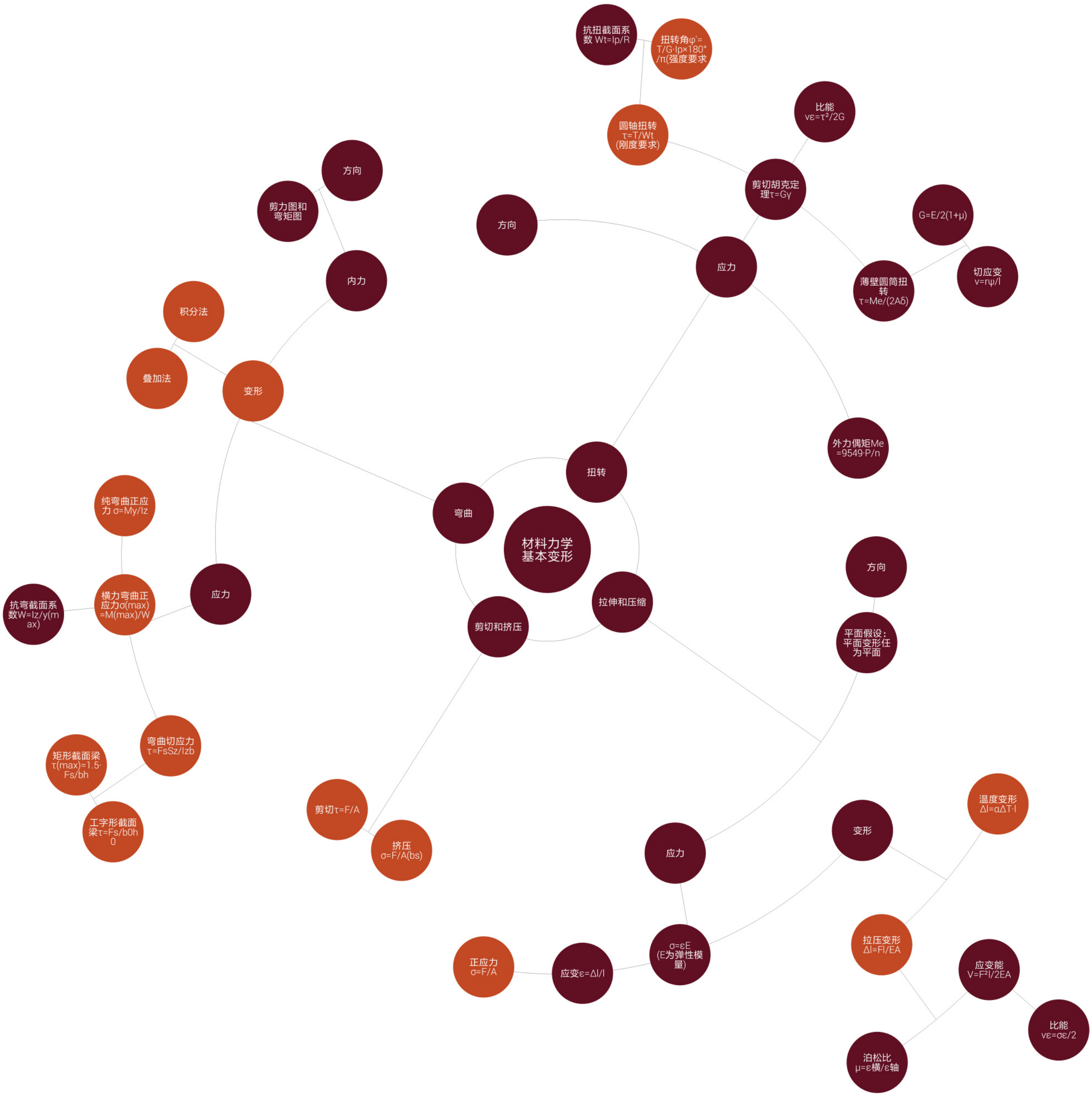
3.特点：两个主惯性距Iy，Iz分别为I的最大值和最小值

4.求解：

1. 形心主惯性轴与形心轴的夹角α0：$\tan2\alpha_0=-2I_{yz}/(I_y-I_z)$ `令转轴公式的Ixy1=0，化简可得`
2. 形心主惯性矩$I_{y0} = (I_y-I_z)/2 + \sqrt{[(I_y-I_z)/2]^2+I_{yz}^2}$；$I_{z0} = (I_y-I_z)/2 - \sqrt{[(I_y-I_z)/2]^2+I_{yz}^2}$ `将α带入各表达式，化简可得`

杆件变形的基本形式

基本概念



001 拉伸和压缩

特点：
外力作用线与轴线重合
变形是沿轴线方向的

002 方向

拉伸时轴力为正，压缩为负

003 拉压变形 ΔI=FI/EA

A为横截面积

解题中常用切线代替轴线

004 应变能 V=F²l/2EA

单位体积应变能v=1/2·σε

005 泊松比 μ=ε横/ε轴

012 纯弯曲正应力 σ=My/Iz

其中，z轴为中性轴，y为距中性层的距离，Iz
为中性轴的惯性矩
纯弯曲：只有正应力，无切应力的弯曲

013 剪力图和 弯矩图

集中力作用：剪力图有突变，弯矩图有折角。
分布力作用：分布力向下，对应开口向下。
集中力偶作用：剪力图无突变，弯矩图有突变
。

014 方向

剪力：左上右下为正
弯矩：左顺右逆为正（可以装水的为正）

015 扭转

主体为轴
特点：

021 切应变 v=rψ/l

ψ为两截面相对扭转角

022 外力偶矩Me =9549·P/n

Me - N·m
P - kW
n - r/min

$\varepsilon=\Delta l/l$

006 剪切和挤压

连接件常见受力

007 挤压 $\sigma=F/A(bs)$

A(bs)为接触面在垂直力方向的投影

008 剪切$\tau=F/A$

特点
外力大小相等方向反向互相平行
构件两部分发生相对错动

009 弯曲

特点：
外力垂直杆轴线
杆轴线直线变为曲线

010 弯曲切应力$\tau=F_sS_z/I_zb$

Sz为横线外部分面积与该面积形心对中性轴距离的乘积

011 横力弯曲正应力$\sigma(max)=M(max)/$

横力弯曲：既有正应力又有切应力的弯曲

杆两端的力偶矩大小相等，转向相反且作用平面垂直于杆线
杆件任意两横截面发生绕轴线的转动

016 方向

通过右手法则把扭矩T表示为矢量，当矢量方向与所研究截面的外法线方向相同时，为正

017 圆轴扭转 $\tau=T/W_t$ (刚度要求)

T为扭矩

018 抗扭截面系数 $W_t=I_p/R$

对圆柱$W_t=\pi D^3/16$
对圆管$W_t=\pi(D^3-d^3)/16$

019 扭转角$\varphi'=$

$\varphi'=d\varphi/dx$

020 薄壁圆筒扭转 $\tau=M_e/(2A\delta)$

δ为薄壁厚度，A为整个截面圆的面积
薄壁圆筒扭转规律：
1.横截面上无正压力，只有剪应力
2.剪应力沿薄壁方向数值不变（薄壁壁厚小）
3.沿圆周剪应力大小不变（同一圆周上各点状况相同）
由以上规律可得：$M_e=Fx=\tau Ax=\tau\cdot2\pi r\delta\cdot r$，化简得上式

总结及注意事项

名称	正应力	变形	切应力	转角	说明
拉压	$\sigma=F/A$	$\Delta l=Fl/EA$	-	-	-
扭转	-	-	$\tau=T/W_t$(圆轴) $=M_e/(2A\delta)$(圆筒)	$\psi'=T/(GI_p)$	δ为厚度ψ'为转角的倒数
弯曲	$\sigma=My/I_z$ $=M/W$(最大)	$w''=M/EI$	$\tau=F_sS_z/I_zb$	$\theta=w'$	w为挠度，θ为转角，z为对中性轴，b为到中性轴距离

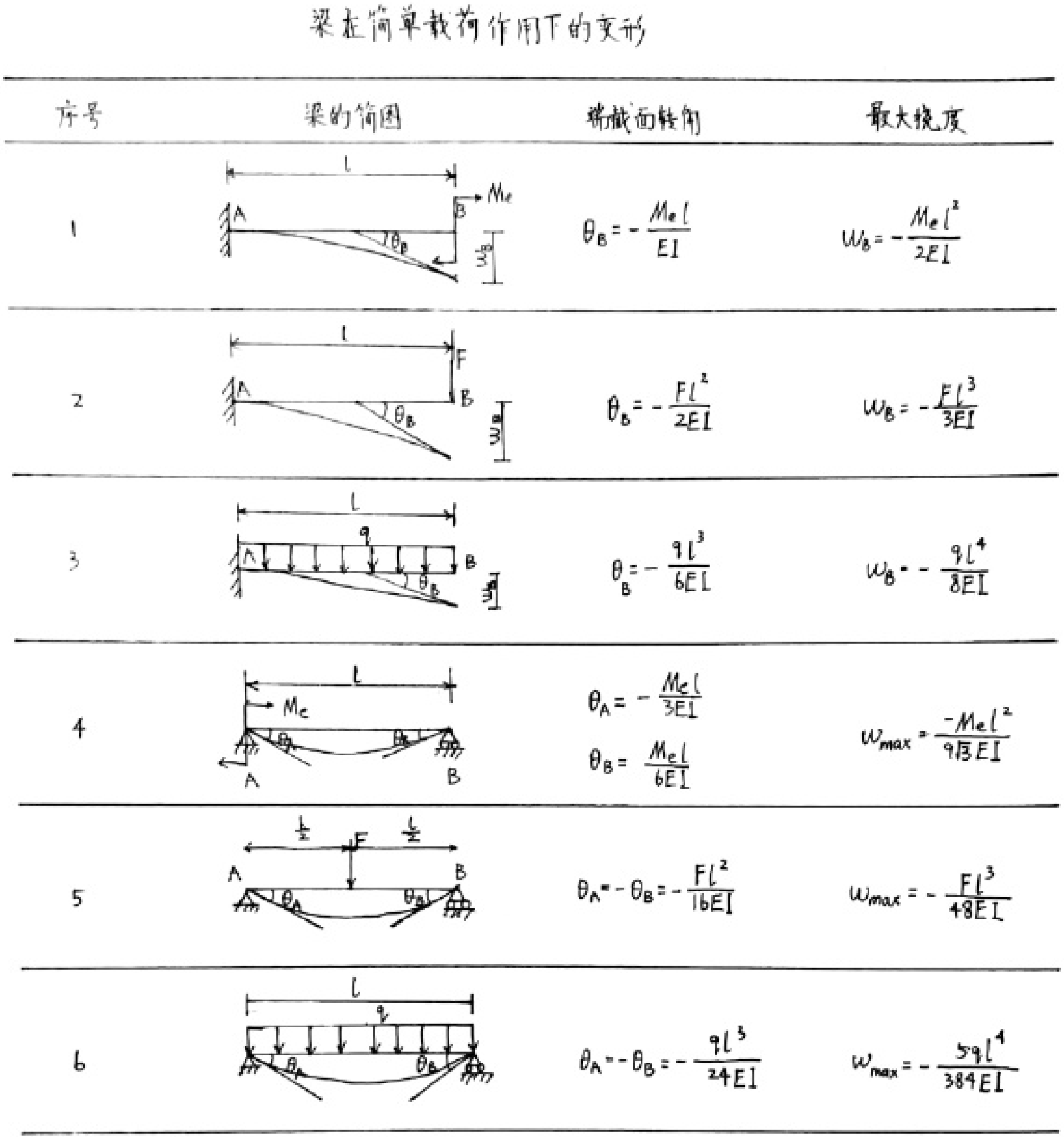
1.应变不是长度，而是变化的长度/原始长度

2.三个弹性常数之间的关系：**$G=E/[2(1+\mu)]$**

3.抗扭截面系数**$W_t=I_p/R$**；抗弯截面系数**$W=I_z/y(max)$**

4.圆轴扭转应力公式推导：①由于几何关系，距圆心为ρ处的切应变$\gamma=\rho\cdot d\varphi/dx$（dφ为轴中长为dx的微端因扭转而转过的角度）`aa'=ρdϕ=γdx（aa'为选取的一弧长）`②由物理关系$\tau=G\gamma$得$\tau=G\rho\cdot d\varphi/dx$③由静力关系扭矩$T=\int\rho\tau dA(A)=G\cdot d\varphi/dx\int\rho^2dA(A)=G\cdot d\varphi/dx\cdot I_p$（Ip为极惯性矩），将$\tau=G\rho\cdot d\varphi/dx$带入上式得任一点切应力**$\tau=T\rho/I_p$**（T为扭矩），因此最大切应力**$\tau(max)=TR/I_p=T/W_t$**（Wt为抗扭截面系数，$W_t=I_p/R$）

5.计算弯曲变形有很多种方法，比如说积分法，叠加法，能量法等等



梁在简单载荷作用下的变形

序号	梁的简图	端截面转角	最大挠度
1		$\theta_B = -\frac{M_e l}{EI}$	$w_B = -\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$	$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$	$w_B = -\frac{ql^4}{8EI}$
4		$\theta_A = -\frac{M_e l}{3EI}$ $\theta_B = \frac{M_e l}{6EI}$	$w_{max} = \frac{-M_e l^2}{9\sqrt{3}EI}$
5		$\theta_A = -\theta_B = -\frac{Fl^2}{16EI}$	$w_{max} = -\frac{Fl^3}{48EI}$
6		$\theta_A = -\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$	$w_{max} = -\frac{5ql^4}{384EI}$

能量相关

1.杆件变形能的计算

类型	应变能
拉压	Vε = ∫ F²(x)/2EA · dx(→l)
纯剪切	Vε = ∬ 1/2·τγ dA(→A)
扭转	Vε = ∫ T²(x)/2GIp · dx(→l)
弯曲	Vε = ∫ M²(x)/2EI · dx(→l)

2.当位移与外力呈线性关系时，有 **Vε = ∫ F²(x)/2EA · dx + ∫ T²(x)/2GIp · dx + ∫ M²(x)/2EI · dx**

3.功的互等定理：第一组力在第二组引起的位移上所作的功，等于第二组力在第一组引起的位移上所作个功Δ

4.莫尔积分：**$\Delta = \sum F(x)F'(x)/EA \cdot dx + \int T(x)T'(x)/GIp \cdot dx + \int M(x)M'(x)/EI \cdot dx$** （F'(x)、T'(x)、M'(x)为在所求单位力作用下的力、扭矩、弯矩方程）

5.莫尔积分图乘法：$\Delta = \int \omega M'(C) / EI$（其中ω为M(x)图面积，M'(C)为M(x)图形心对应M'(x)的值）

超静定相关

超静定问题主要分为两大类：外力超静定和内力超静定。

1.对于外力超静定：

①判定静不定次数

②选取并去除多余约束，以多余约束反力。选取基本静定基，在基本静定基加原载荷,并加多余约束反力X1，得到相当系统。

③画出两个图：原载荷图和单位力图。(或写出内力方程)

1. 在基本静定基上加原载荷，画原载荷图 (或写出内力方程)
2. 在基本静定基上沿所求未知力方向加广义单位力，画单位力图（或写出内力方程)

④计算正则方程的系数： Δ1p和δ11，两图互乘得Δ1p，单位力图自乘得δ11。或用莫尔积分求系数。

⑤建立力法正则方程和求解：$\Delta 1p + \delta 11 \cdot X1 = 0$

2.对内力超静定问题，是将上述第二点换为：将一段杆打断，用力X1代替，得到相当系统

应力应变分析

基本概念

1.应力应变分析研究的是一点处的应力状态，用单元体表示。一点有六个独立的应力分量

2.主平面：剪应力为零的截面。主应力：主平面上的正应力。

3.实例：

变形类型	应力状态
拉压	←□→
扭转	↓□↑（上方→；下方←）
弯曲	→↓□↑←（上方→；下方←）（内部任意一点）

二向应力状态分析

1.任意斜截面上的上的应力：

1. ①**$\sigma\alpha = (\sigma x + \sigma y)/2 + (\sigma x - \sigma y)/2 \cdot \cos 2\alpha - \tau xy \cdot \sin 2\alpha$**
2. ②**$\tau\alpha = (\sigma x - \sigma y)/2 \cdot \sin 2\alpha + \tau xy \cdot \cos 2\alpha$**

其中：α为斜截面外法线与x轴的夹角，逆时针为正；正应力拉为正压为负；切应力顺时针为正。τxy中的x表示作用平面的法线方向，y为平行的方向

2.最大正应力和最小正应力

$\sigma_{max}/\sigma_{min} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm \mathrm{sqrt}\{ [(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2 \}$

3.主应力与主平面

令上式 $\tau_\alpha = 0$ 可以得到主平面的方位，即 **$\tan 2\alpha_0 = -2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$**

4.应力圆画法

1. 建立应力坐标系 τ-σ （注意选好比例尺）
2. 在坐标系内画出点A(σ_x，τ_{xy})和B(σ_y，τ_{yx})
3. AB与σ轴的交点C为圆心，AC=BC为半径的圆为应力圆

三向应力状态分析

1.一点的最大正应力 $\sigma_{max} = \sigma_1$

2.一点的最大切应力 $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$

平面应变状态分析

1.应力与应变的转化：广义胡克定理

1. ①$\varepsilon_x = 1/E \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$；$\varepsilon_y = 1/E \cdot [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$；$\varepsilon_z = 1/E \cdot [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)]$
2. ②$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$；$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$；$\gamma_{zx} = \tau_{zx} / G$；

因此可以得到**主应力与主应变的关系**：

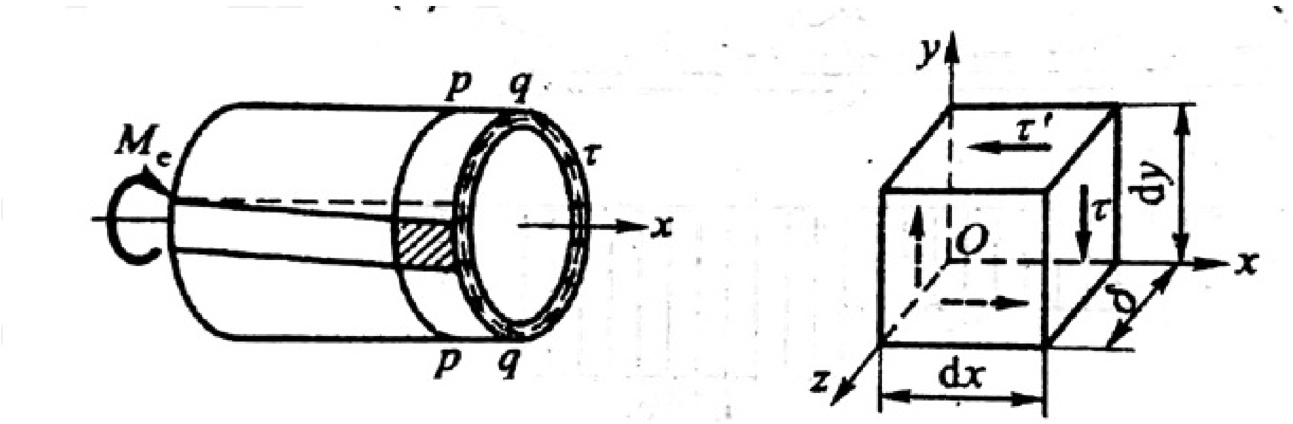
1. ①**$\varepsilon_1 = 1/E \cdot [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$**
2. ②**$\varepsilon_2 = 1/E \cdot [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$**
3. ③**$\varepsilon_3 = 1/E \cdot [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$**
4. ④**$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$**

2.主应力与主应变的计算公式完全相似，只是将式中的`正应力`改为`正应变`；`切应力`改为`切应变/2`即可

3.体应变 $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

补充

切应力互等原理：在平衡的单元体内，如果存在切应力，则有切应力成对存在且数值相等；两者垂直于两个平面的交线，方向共同指向或背离这个交线。



（τ'产生的原因：为了保持单元体的平衡）

强度理论

强度理论是关于“构件发生强度失效起因”的假说，它是否正确，适用于什么情况，必须由生产实践来检验。强度理论分成两类：一类解释断裂失效：另一类解释屈服失效。

1.始种常见的强度理论

强度理论	相当应力	说明	适用范围
第一强度理论	$\sigma r1 = \sigma 1$	最大拉应力是引起材料脆断破坏的因素。	脆性材料二轴拉伸；三向受拉
第二强度理论	$\sigma r2 = \sigma 1 - \mu(\sigma 2 + \sigma 3)$	最大伸长线应变是引起材料脆断破坏的因素。	-
第三强度理论	$\sigma r3 = \sigma 1 - \sigma 3$	最大切应力是引起材料屈服的因素。	塑性材料；三向受压
第四强度理论	$\sigma r4 = \mathrm{sqrt}\{ 1/2\cdot[(\sigma 1 - \sigma 2)^2 + (\sigma 2 - \sigma 3)^2 + (\sigma 3 - \sigma 1)^2] \}$	形状改变比能是引起材料屈服的因素。	塑性材料；三向受压
莫尔强度理论	$\sigma rM = \sigma 1 - [\sigma t]/[\sigma c] \cdot \sigma 3$	考虑了材料抗拉和抗压强度不相等的情况的第三强度理论。	材料抗拉和抗压强度不等；脆性材料一拉一压

2.对于典型二向应力状态：**$\sigma r3 = \mathrm{sqrt}(\sigma^2 + 4\tau^2)$；$\sigma r4 = \mathrm{sqrt}(\sigma^2 + 3\tau^2)$**

组合变形相关

1.研究方法：

①外力分析：外力向形心简化并沿主惯性轴分解；

②内力分析：求每个外力分量对应的内力方程和内力图，确定危险面；

③应力分析：画危险面应力分布图，叠加，建立危险点的强度条件。

2.对于弯扭组合

1. 按照第三强度理论，有**$\sigma r3 = 1/W \cdot \mathrm{sqrt}(M^2 + T^2)$**
2. 按照第四强度理论，有**$\sigma r4 = 1/W \cdot \mathrm{sqrt}(M^2 + 0.75T^2)$**

压杆稳定

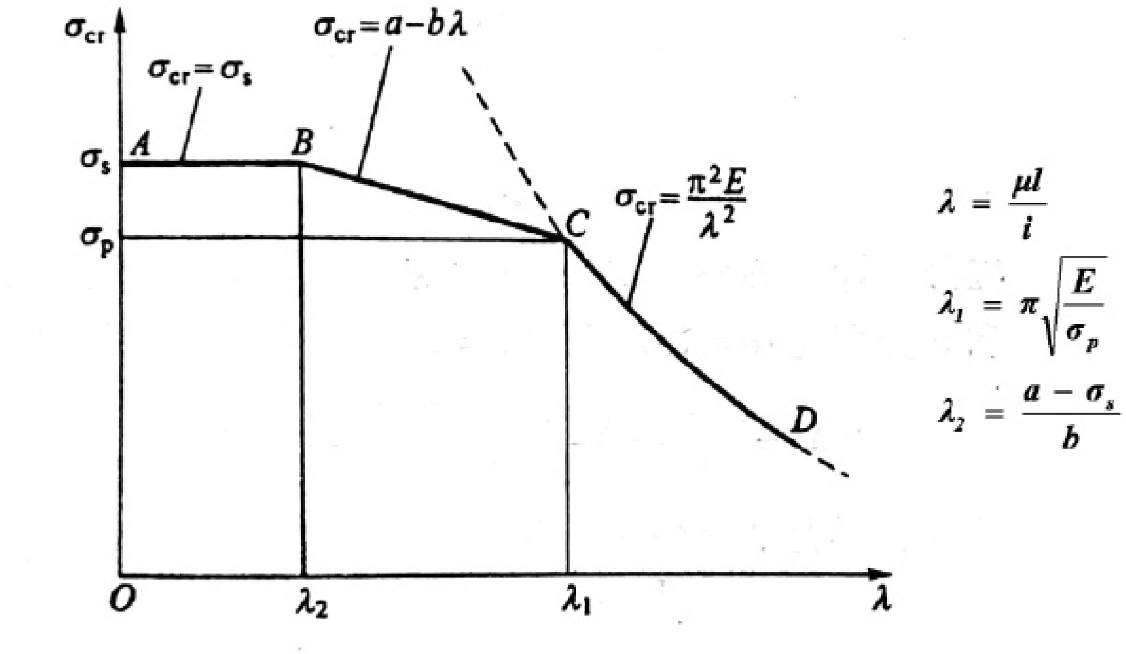
1.概念：工程中有些构件具有足够的强度、刚度，却不一定能安全可靠地工作，这是因为稳定性不够。细长杆件受压时轴线先开始是直线，接着必然是压弯。因此这里有一个极限值Fcr(临界压力)：由稳定平衡转化为不稳定平衡时所受轴向压力的界限值，称为临界压力。

2.临界压力：**$Fcr = \pi^2EI / (\mu l)^2$**

其中：μ 为长度系数，μl为相当长度

两端铰支	一段固定一端自由	一端固定一段铰支	两端固定
μ = 1	μ = 2	μ = 0.7	μ = 0.5

3.临界应力：



其中：λ称为柔度；极惯性矩 i = sqrt(I / A))

欧拉公式**$\sigma cr = \pi^2 E / \lambda^2$** 推导：$\sigma cr = Fcr / A = \pi^2 EI / A\cdot(\mu l)^2 = \pi^2 E \cdot (\mu l / i)^2$

注：欧拉公式适用于大柔力杆（λ ≥ **λ1 = π·sqrt(E/σp)**）

4.安全因数 **nst = Fcr / F**