第三篇 《动力学》

理论力学

第十一章　动量矩定理

第十一章　动量矩定理

§ **11–1**　质点和质点系的动量矩

§ **11–2**　动量矩定理

§ **11–3**　刚体绕定轴的转动微分方程

§ **11–4**　刚体对轴的转动惯量

§ **11–5**　质点系相对于质心的动量矩定理

§ **11–6**　刚体的平面运动微分方程

§ 11－4 刚体对轴的转动惯量

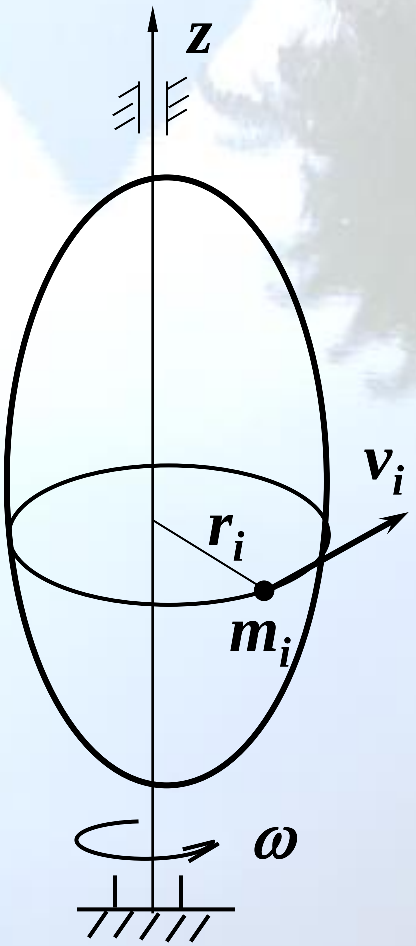
一、定义：$J_z = \sum m_i r_i^2$

J_z 称为刚体对 z 轴的**转动惯量**

若刚体的质量是连续分布，则

$$J_z = \int_m r^2 \mathrm{d}m$$

刚体的转动惯量是刚体对某轴转动惯性大小的度量，它的大小表现了刚体转动状态改变的难易程度。



转动惯量恒为正值，国际单位制中单位为 $\mathrm{kg \cdot m^2}$ 。

1.简单形状物体的转动惯量计算

（1）均质细直杆对z轴的转动惯量

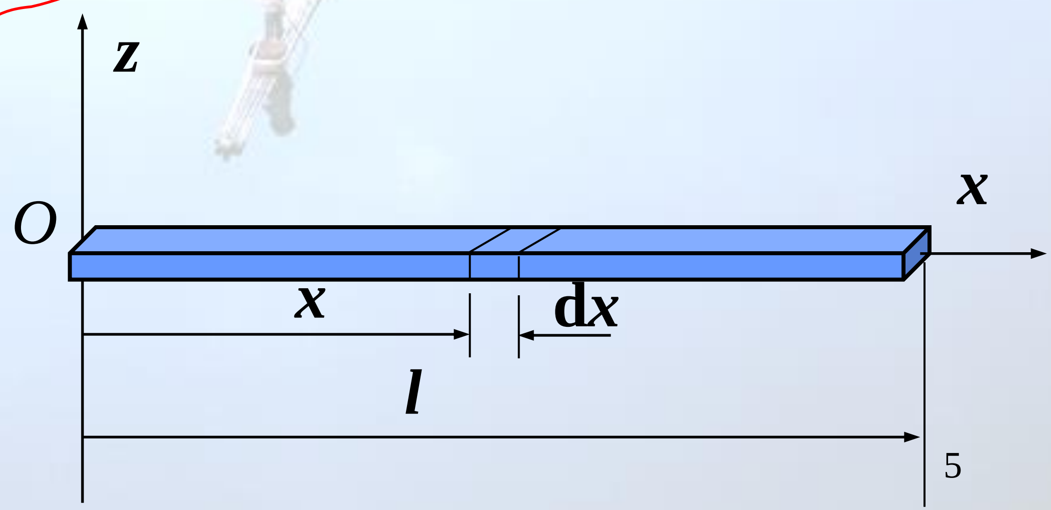
设杆长为l ,质量为m ，单位长度的质量为ρ_l,

取杆上一微段dx，其质量为$\rho_l\,\mathrm{d}x$:

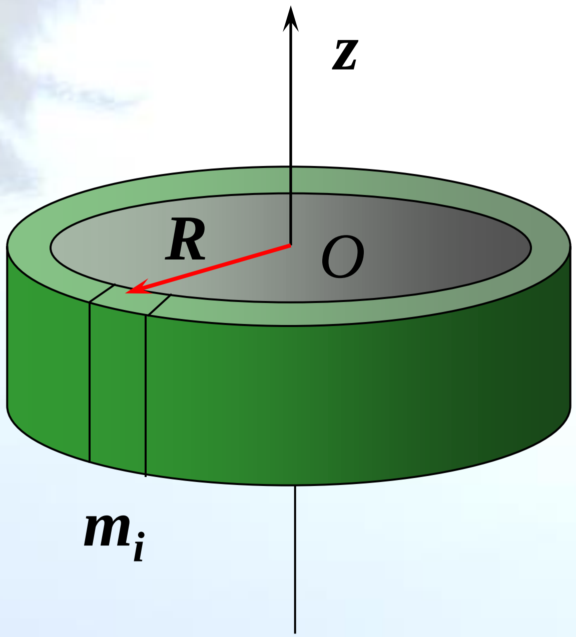
$$J_z = \int_0^l x^2 \cdot \rho_l \mathrm{d}x = \rho_l \frac{l^3}{3}$$

因为 $\rho_l = \dfrac{m}{l}$

$$\boxed{\therefore J_z = \frac{1}{3} m l^2}$$



（2）均质薄圆环对于中心轴的转动惯量

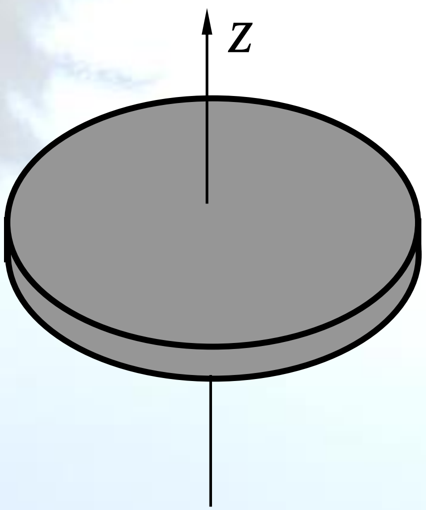


设圆环半径为R，质量为m，每一微段的质量为m_i，到z轴的距离均为R：

$$J_z = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i$$

$$\boxed{J_z = mR^2}$$

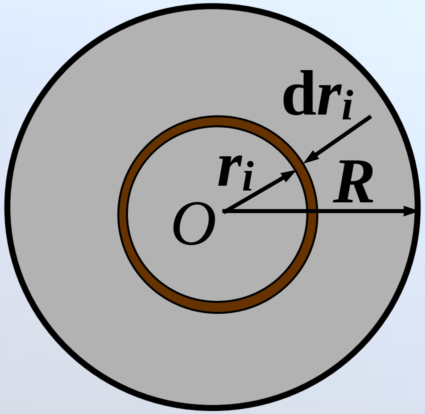
（3）均质圆板对于中心轴的转动惯量



设圆板的半径为R ,质量为m ,单位面积的质量为ρ_A 。将圆板分为无数个同心的圆环，任一圆环的半径为r_i，宽度为dr_i，则圆环的质量为m_i ：

$$m_i = 2\pi r_i dr_i \cdot \rho_A$$

其中: $\rho_A = \dfrac{m}{\pi R^2}$ ——单位面积的质量



$$J_z = \int_0^R (2\pi r \rho_A dr) r^2 = 2\pi \rho_A \frac{R^4}{4}$$

$$\boxed{J_z = \frac{1}{2} m R^2}$$

2.回转半径（惯性半径）

$$J_z=\frac{1}{3}ml^2$$

$$J_z=mR^2$$

$$J_z=\frac{1}{2}mR^2$$

对均质物体，记 $J_z=m\rho_z^2$

其中： $\rho_z=\sqrt{\dfrac{J_z}{m}}$

ρ_z 称为刚体对 z 轴的回转半径。

对于均质刚体，ρ_z 仅与几何形状有关，与密度无关。对于几何形状相同而材料不同（密度不同）的均质刚体，其回转半径是相同的。

在机械工程设计手册中，可以查阅到简单几何形状或已标准化的零件的转动惯量和回转半径。书中列出几种常见均质刚体的 J_z 和 ρ_z，以供参考。

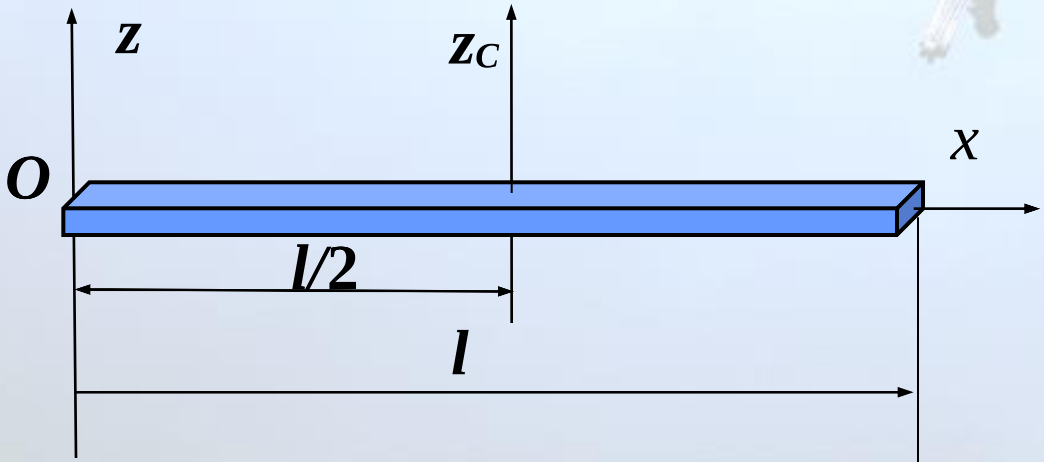
3. 平行移轴定理

同一个刚体对不同轴的转动惯量一般是不相同的。

$$\boxed{J_z = J_{zC} + md^2}$$

刚体对某轴的转动惯量，等于刚体对于通过质心且与该轴平行的轴的转动惯量，加上刚体的质量与两轴间距离的平方的乘积。

刚体对通过质心轴的转动惯量具有最小值。



[例]

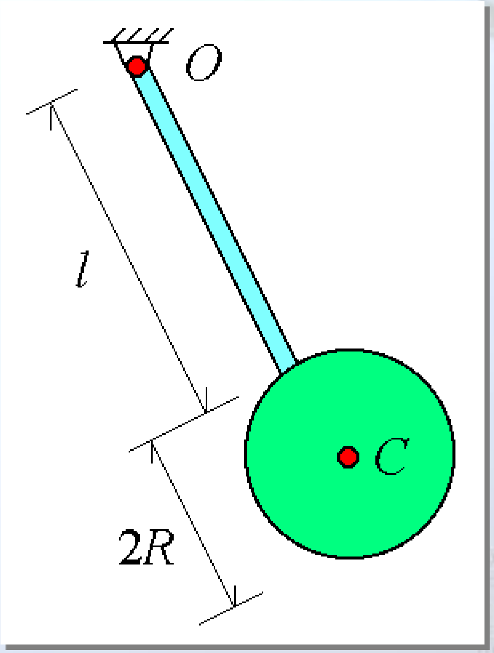
$$J_{zC} = J_z - m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12} ml^2$$

4.计算转动惯量的组合法

当物体由几个规则几何形状的物体组成时，可先计算每一部分(物体)的转动惯量, 然后再加起来就是整个物体的转动惯量。若物体有空心部分, 要把此部分的转动惯量视为负值来处理。

[例12-9] (P270) 钟摆：均质直杆质量m_1,长为 l；均质圆盘质量m_2,半径为 R。求对水平轴O的转动惯量J_O。



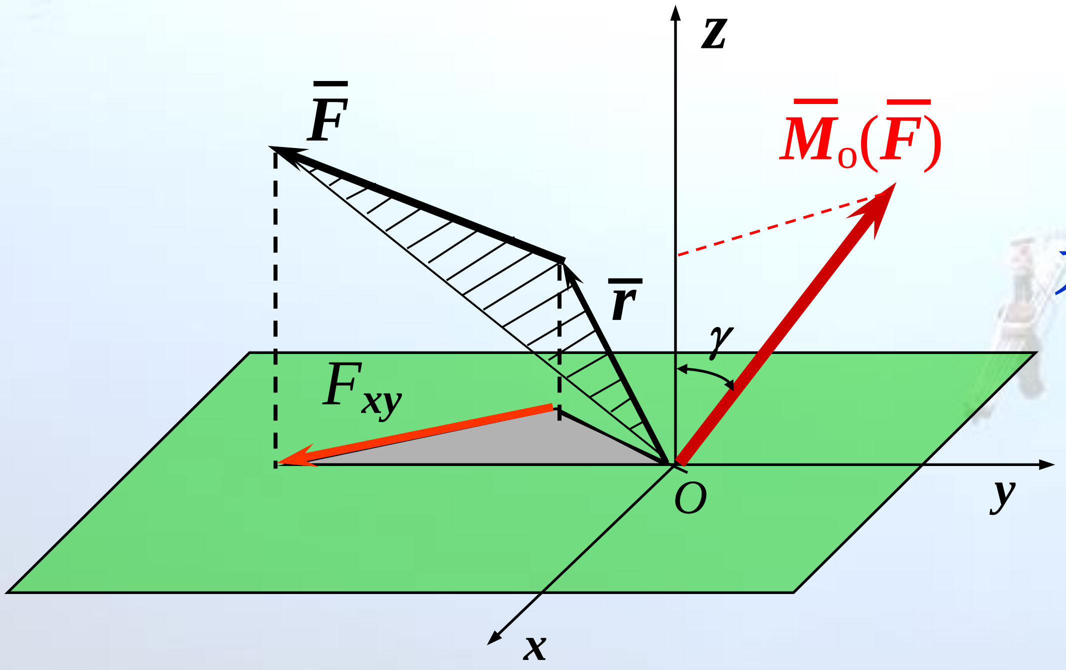
解：$J_O = J_{O杆} + J_{O盘} = \frac{1}{3}m_1 l^2 + [\frac{1}{2}m_2 R^2 + m_2 (l+R)^2]$

$$= \frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{2}m_2 (3R^2 + 2l^2 + 4lR)$$

§ 11-1　质点和质点系的动量矩

一、质点的动量矩

力矩：力相对于点的矩。



力$\bar{F}$，矢径为$\bar{r}$，则

$$\bar{M}_O(\bar{F})=\bar{r}\times\bar{F}$$

力对轴 z 的矩：

$$M_z(\bar{F})=M_O(\bar{F}_{xy})$$

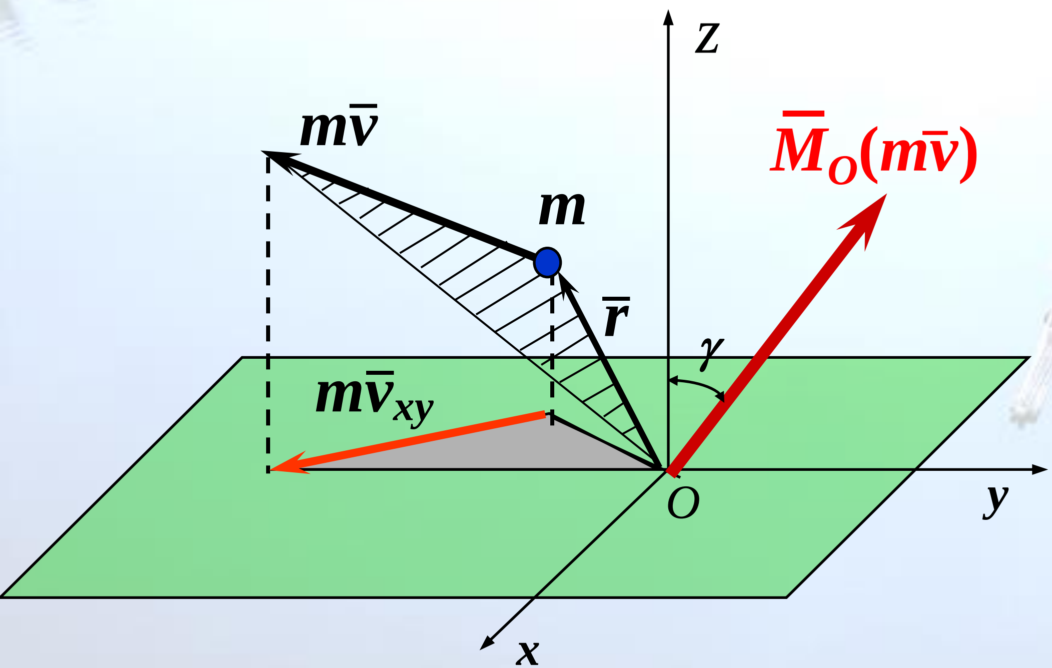
正负号规定：右手法则

§ 11-1　质点和质点系的动量矩

一、质点的动量矩

定义：质点的动量相对于点*O* 的矩为质点对于点*O* 的动量矩 。

质点的质量为m ，速度为$\bar{v}$，质点相对点O的矢径为$\bar{r}$，则



$$\bar{M}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}$$

质点动量对轴 z 的动量矩：

$$M_z(m\bar{v}) = M_O(m\bar{v}_{xy})$$

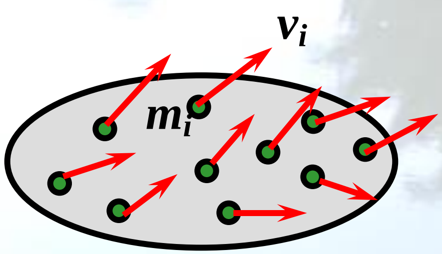
正负号规定：右手法则

动量矩度量物体在任一瞬时绕固定点(轴)转动的强弱。

二、质点系的动量矩

质点系对点O动量矩：$\bar{L}_O = \sum \bar{M}_O(m_i\bar{v}_i) = \sum(\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i)$

质点系对轴z 动量矩：$L_z = \sum M_z(m_i\bar{v}_i)$



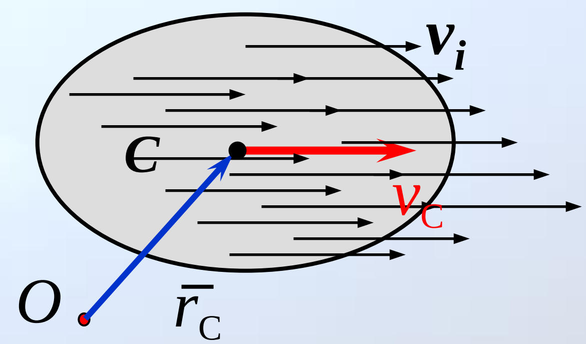
刚体动量矩计算：

1. 平动刚体

$$\bar{L}_O = \sum(\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i) = \sum(m_i\bar{r}_i \times \bar{v}_i) = \sum(m_i\bar{r}_i \times \bar{v}_C)$$

$$= (\sum m_i\bar{r}_i) \times \bar{v}_C = m\bar{r}_C \times \bar{v}_C$$

$$= \bar{r}_C \times m\bar{v}_C$$



平动刚体对固定点(轴)的动量矩等于刚体质心的动量对该点（轴）的动量矩。

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i\bar{r}_i}{m}$$

2. 定轴转动刚体

$$L_z = \sum M_z(m_i \bar{v}_i) = \sum m_i v_i r_i = \sum (m_i r_i \omega\, r_i)$$

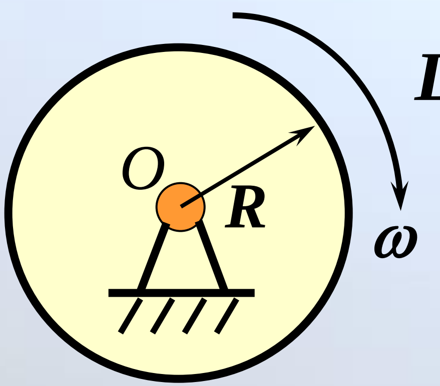
$$= (\sum m_i r_i^2) \cdot \omega$$

其中$J_z = \sum m_i r_i^2$ 为刚体对z轴的转动惯量

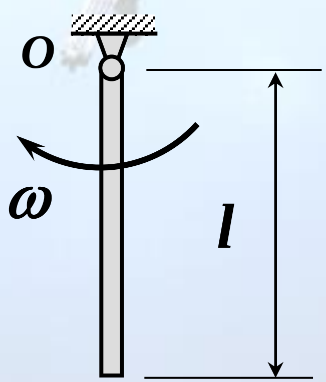
$$\boxed{\therefore \quad L_z = J_z \omega}$$

定轴转动刚体对转轴的动量矩:

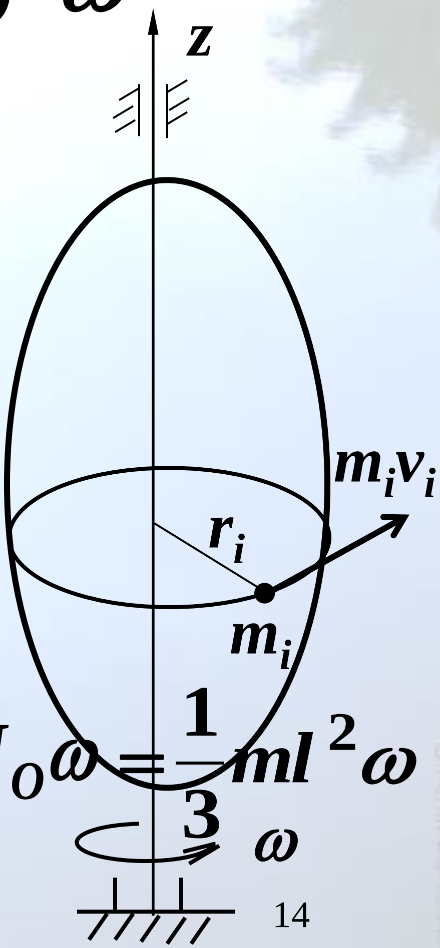
等于刚体对该轴转动惯量与角速度的乘积。



$$L_O = \frac{1}{2} m R^2 \omega$$



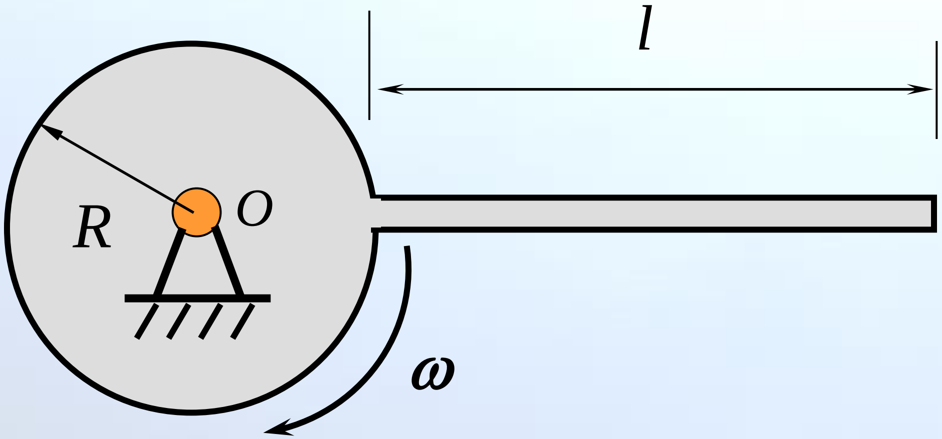
$$L_O = J_O \omega = \frac{1}{3} m l^2 \omega$$



[例] 已知：均质杆的质量为m，均质圆盘的质量为$2m$，求物体对于O轴的转动惯量和动量矩。

解：$$J_O = J_{O杆} + J_{O盘} = [\frac{1}{12}ml^2 + m(R+\frac{l}{2})^2] + \frac{1}{2}\times 2mR^2$$

$$= \frac{1}{3}ml^2 + 2mR^2 + mlR$$



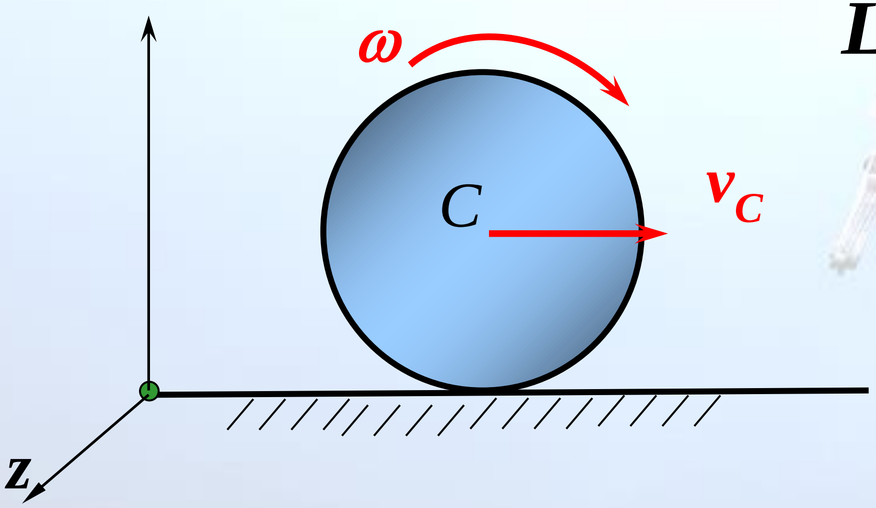
$$L_O = J_O\omega$$

$$= (\frac{1}{3}ml^2 + 2mR^2 + mlR)\omega$$

3. 平面运动刚体

$$L_z = M_z(m\bar{v}_C) + J_C\,\omega$$

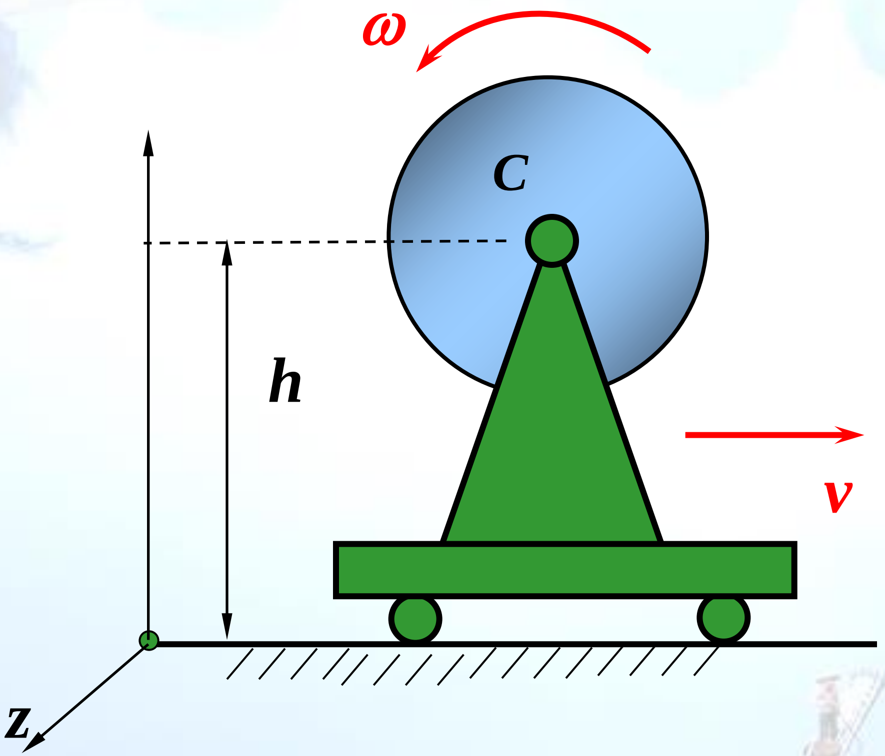
平面运动刚体对垂直于质量对称平面的固定轴的动量矩，等于刚体随同质心作平动时质心的动量对该轴的动量矩与绕质心轴作转动时的动量矩之和。



$$L_z = M_z(m\bar{v}_C) + J_C \cdot \omega$$

$$= -mv_C R - J_C\omega$$

注意正负的规定



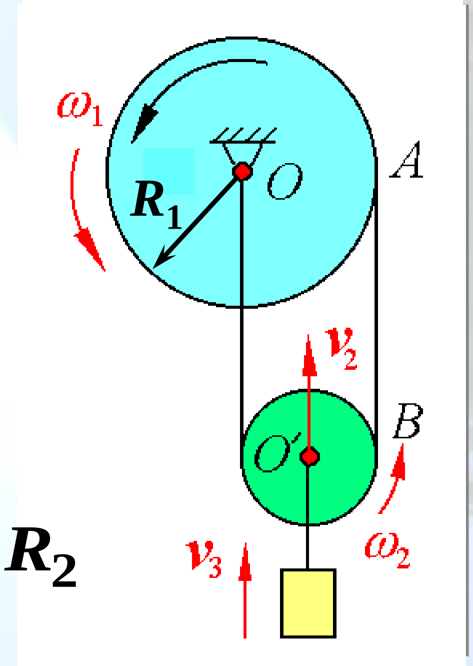
圆盘: $L_z = M_z(m\bar{v}_C) + J_C \cdot \omega$

$$= -mvh + \frac{1}{2} mR^2 \omega$$

[例1] 滑轮A：m_1，R_1，

滑轮B：m_2，R_2，；$R_1=2R_2$，

物体C：m_3，v_3　求系统对O轴的动量矩。



解：$$L_O = L_{OA} + L_{OB} + L_{OC}$$

$$= J_{OA}\omega_1 + (J_{O'B}\omega_2 + m_2 v_2 R_2) + m_3 v_3 R_2$$

$$= \frac{m_1}{2}R_1^2\omega_1 + \left(\frac{m_2}{2}R_2^2\omega_2 + m_2 v_2 R_2\right) + m_3 v_3 R_2$$

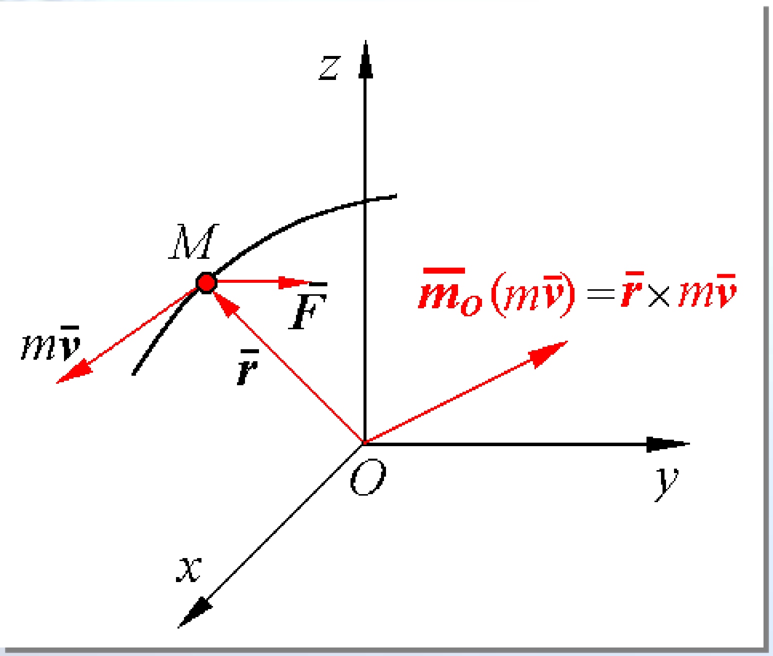
$\because$　$v_2 = v_3$　　$\omega_2 = \dfrac{v_2}{R_2}$　　$\omega_1 = \dfrac{2v_2}{R_1}$

$\therefore$　$$L_O = \left(2m_1 + \frac{3}{2}m_2 + m_3\right)R_2 v_3$$

§ 11-2 动量矩定理

1. 质点的动量矩定理

设质点对定点O 的动量矩为$\overline{M}_O(m\bar{v})$，作用力F 对同一点的矩为$\overline{M}_O(\overline{F})$，如图。



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{M}_O(m\bar{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}\times m\bar{v})$$

$$=\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}\times m\bar{v}+\bar{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\bar{v})}{\mathrm{d}t}$$

$$=\underbrace{\bar{v}\times m\bar{v}}_{=0}+\bar{r}\times\overline{F}$$

$$=\overline{M}_O(\overline{F})\qquad \frac{\mathrm{d}(m\bar{v})}{\mathrm{d}t}=\overline{F}$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{M}_O(m\bar{v})=\overline{M}_O(\overline{F})}$$

质点对固定点的动量矩定理

将上式在通过固定点O的三个直角坐标轴上投影，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_x(m\bar{v})=M_x(\bar{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_y(m\bar{v})=M_y(\bar{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_z(m\bar{v})=M_z(\bar{F})$$

上式称**质点对固定轴的动量矩定理**，也称为质点动量矩定理的投影形式。即质点对任一固定轴的动量矩对时间的导数，等于作用在质点上的力对同一轴之矩。

2. 质点系的动量矩定理

设质点系有n个质点，作用于每个质点的力分为 内力 $\bar{F}_i^{(i)}$ 和外力 $\bar{F}_i^{(e)}$ ，由质点动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{M}_O(m_i\bar{v}_i)=\bar{M}_O(\bar{F}_i^{(i)})+\bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)})$$

共有n个方程，相加后得：

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{M}_O(m_i\bar{v}_i)=\underbrace{\sum\bar{M}_O(\bar{F}_i^{(i)})}_{=0}+\sum\bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)})$$

$$\because\ \sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{M}_O(m_i\bar{v}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\bar{M}_O(m_i\bar{v}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{L}_O$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{L}_O=\sum\bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)})}$$ 质点系对固定点的动量矩定理

$$\bar{L}_O=\sum\bar{M}_O(m_i\bar{v}_i)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \overline{M}_O(\overline{F}_i^{(e)})}$$

质点系对固定点的动量矩定理:

质点系对任一固定点的动量矩对时间的导数，等于作用在质点系上所有外力对同一点之矩的矢量和（外力系的主矩）。

将上式在通过固定点O的三个直角坐标轴上投影，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}\,t}=\sum M_x(\overline{F}_i^{(e)})\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}\,t}=\sum M_y(\overline{F}_i^{(e)})\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}\,t}=\sum M_z(\overline{F}_i^{(e)})\end{cases}$$

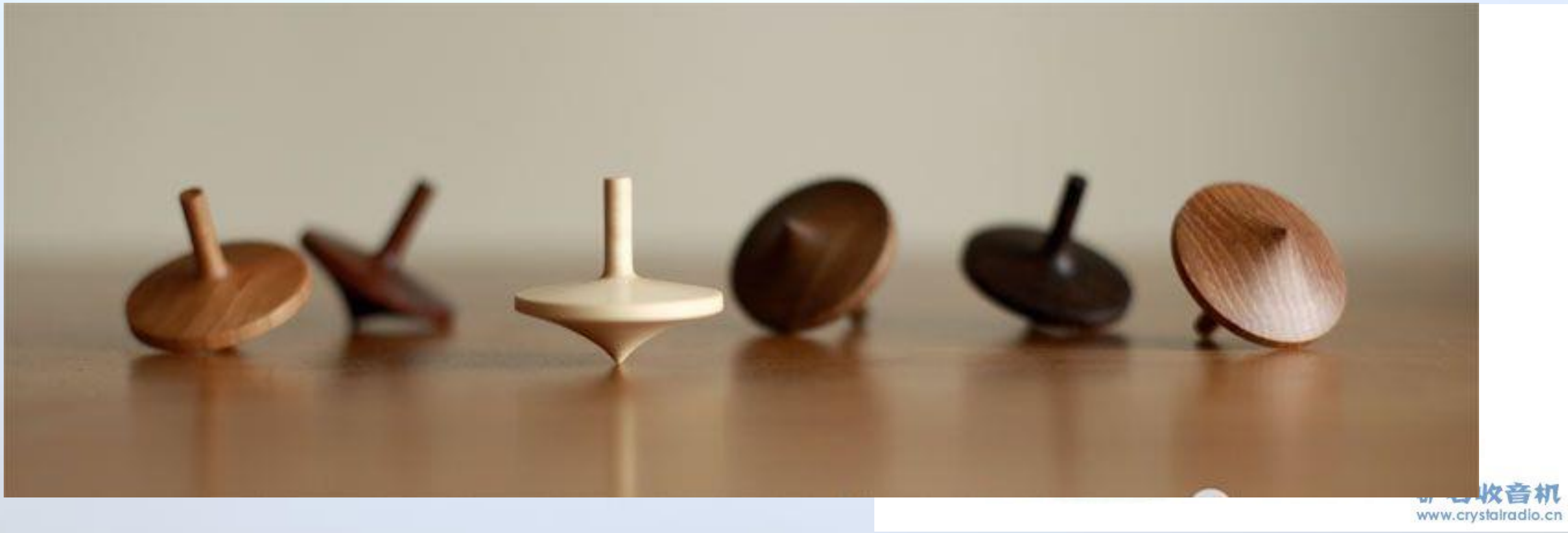
质点系对固定轴的动量矩定理

正负与ω一致为正 。

3．动量矩守恒定律

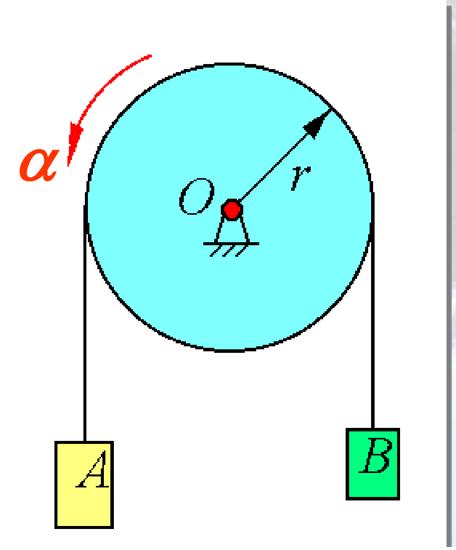
当外力对于某定点（或某定轴）的主矩等于零时，质点系对于该点（或该轴）的动量矩保持不变。

$$\frac{\mathrm{d}\overline{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\overline{M}_O(\overline{F}_i^{(e)})$$



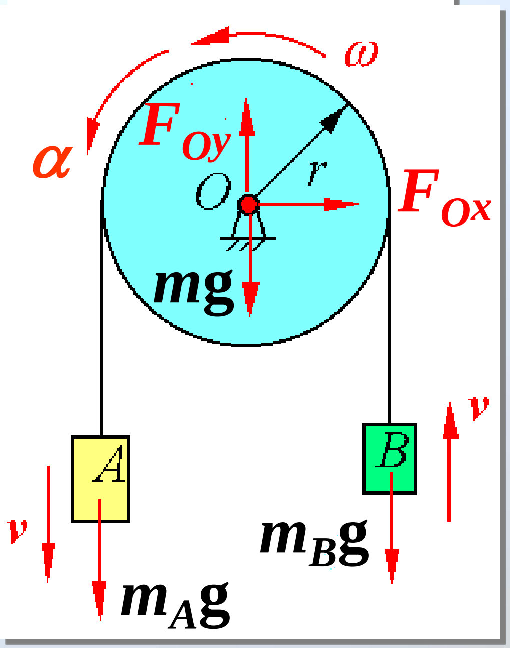
[例3] 已知: 物块A和B的质量分别为m_A和m_B，轮子O的质量为m，半径为 r。

求：轮子O的角加速度α。



解: 取整个系统为研究对象，

受力分析和运动分析如图示。



$$M_O^{(e)} = m_A g r - m_B g r$$

$$L_O = m_A v \cdot r + m_B v \cdot r + J_O \omega$$

其中：$v = r\omega$ 、$J_O = \frac{1}{2} m r^2$

代入 得 $L_O = (m_A + m_B + \frac{m}{2}) r^2 \omega$

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O^{(e)}$$

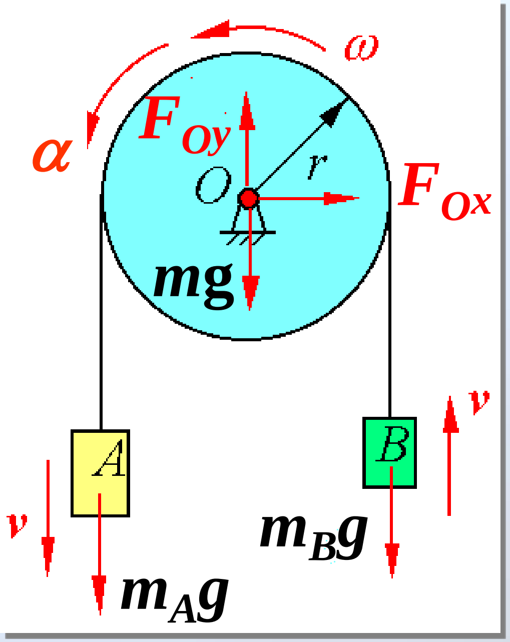
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_A + m_B + \frac{m}{2}) r^2 \omega] = m_A g r - m_B g r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_A+m_B+\frac{m}{2})r^2\omega]=m_Agr-m_Bgr$$

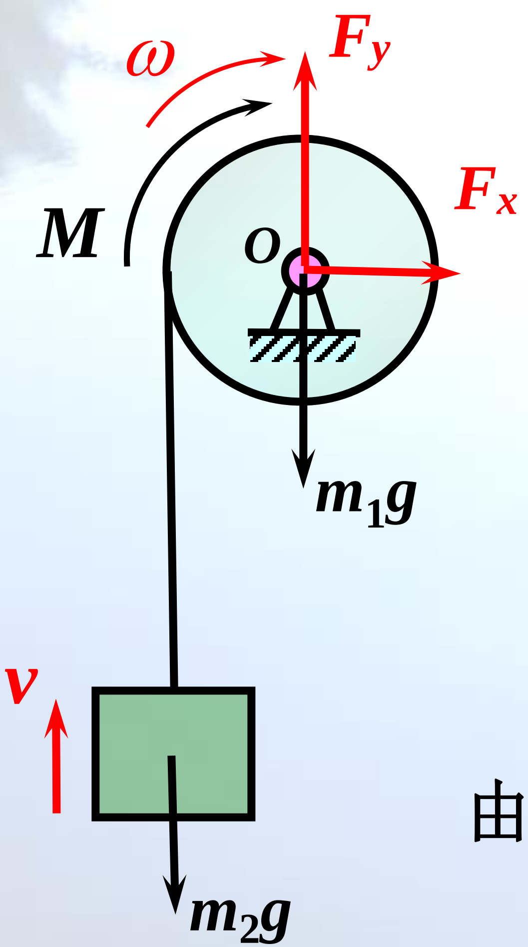
即：$(m_A+m_B+\frac{m}{2})r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=(m_A-m_B)g$

$$\therefore \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{r}\cdot\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B+m/2}$$

如何求支座O的反力？



[例] 卷扬机，滑轮半径为R，质量m_1，作用力偶M，重物质量 m_2，不计绳重和摩擦，求重物的加速度a。



解：受力分析和运动分析

$$L_O = J\omega + m_2 vR$$

$$= \frac{1}{2}m_1R^2\omega + m_2vR$$

$$M^{(e)} = M - m_2gR$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m_1R^2\omega + m_2vR\right] = M - m_2gR$$

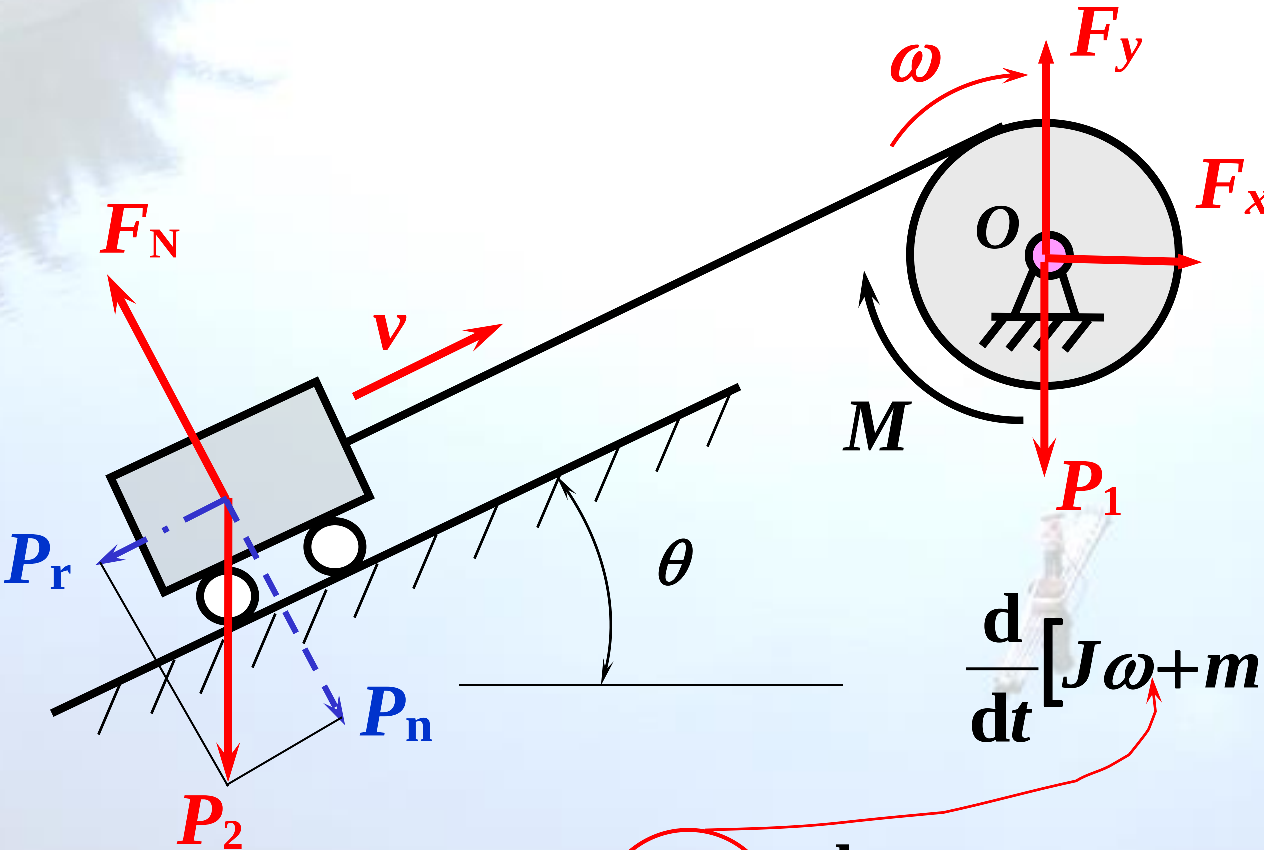
由 $\omega = \frac{v}{R}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$,

得 $\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O^{(e)}$

$$a = \frac{M - m_2gR}{\frac{1}{2}m_1R + m_2R}$$

怎样求绳子的拉力?

[例11-1] (P261) 卷扬机，鼓轮半径为R，质量m_1，转动惯量J，作用力偶M，小车质量 m_2，不计绳重和摩擦，（绳子与轨道平行）求小车的加速度a。



解：运动分析和受力分析

$$L_O = J\omega + m_2 vR$$

$$M^{(e)} = M - m_2 g\sin\theta \cdot R$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J\omega + m_2 vR\right] = M - m_2 g\sin\theta \cdot R$$

由 $\omega = \dfrac{v}{R}$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$， 得：$a = \dfrac{MR - m_2 gR^2\sin\theta}{J + m_2 R^2}$

§ 11-3　刚体绕定轴的转动微分方程

对于一个定轴转动刚体：$L_z = J_z\omega$

代入质点系动量矩定理，有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega)=\sum M_z(\bar{F}_i)$

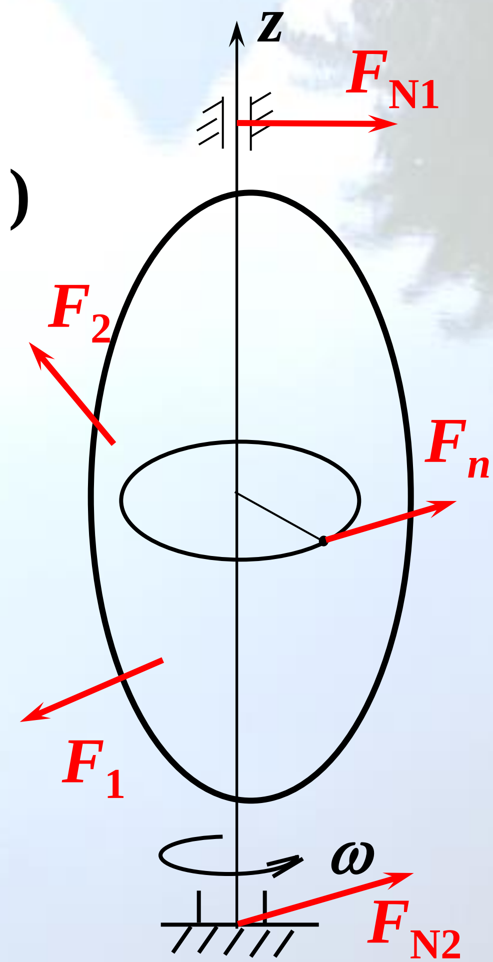
或 $J_z\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\bar{F}_i)$

$$\boxed{J_z\alpha=\sum M_z(\bar{F}_i)}$$

或 $\boxed{J_z\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\sum M_z(\bar{F}_i)}$

$\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\bar{F}_i^{(e)})$

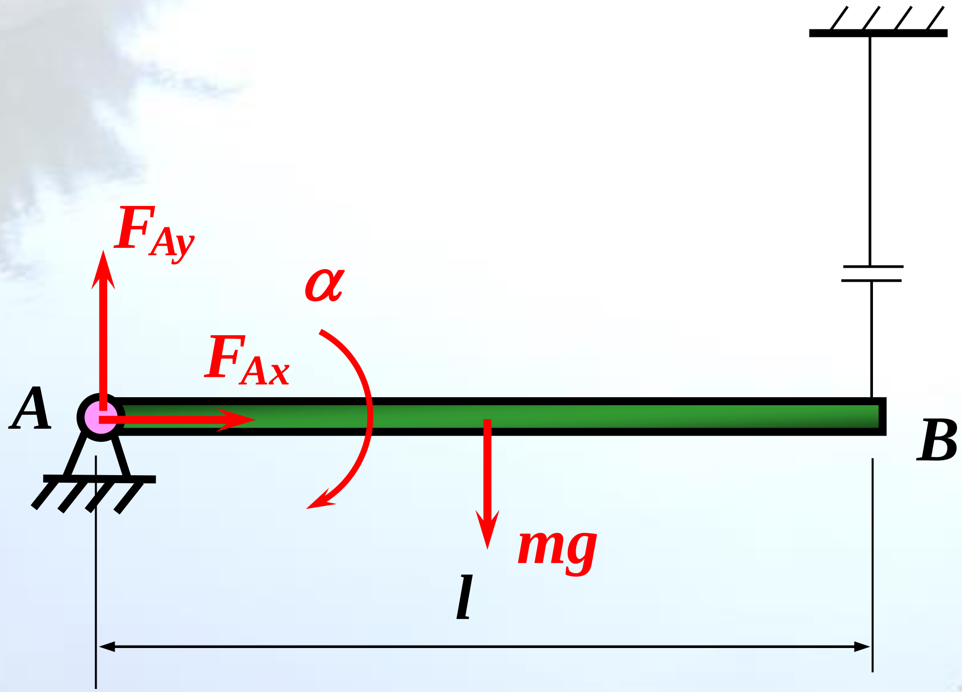
——刚体绕定轴的转动微分方程



将 $J_z\alpha=\sum M_z$ 与 $m\bar{a}=\sum\bar{F}$ 比较，

刚体的转动惯量是刚体转动惯性的度量。

[例] 均质杆长为l,质量为m，求：当细绳被突然剪断时，杆子的角加速度α和支座A处的反力。



解：运动分析、受力分析

刚体绕定轴转动微分方程：

$$J_A\alpha=\sum M_A(\overline{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{1}{3}ml^2\alpha=mg\frac{l}{2}$$

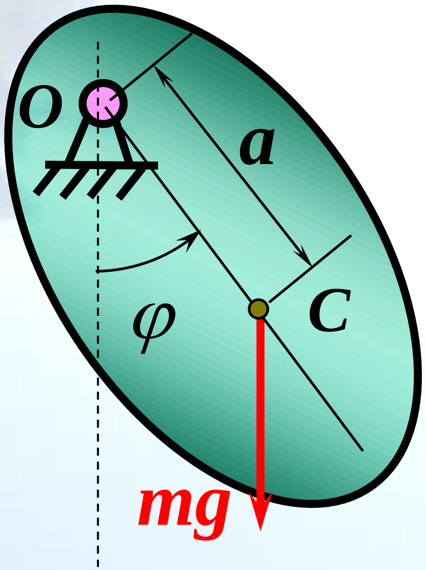
$$\alpha=\frac{3g}{2l}\ ,$$

$$\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_x\ , \\ ma_{Cy}=\sum F_y\ , \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 0&=F_{Ax} \\ -m\frac{l}{2}\alpha&=F_{Ay}-mg \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore F_{Ax}=0\ ,\ F_{Ay}=\frac{1}{4}mg$$

[例11-5] (P265) 物理摆，质量m，C为质心，对O点的转动惯量为J_O，求微小摆动的周期。



解：

$$J_O\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\sum M_O(\bar{F}_i)$$

$$J_O\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-mga\sin\varphi$$

刚体作微小摆动 $\sin\varphi\approx\varphi$

$$J_O\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-mga\,\varphi$$

或 $$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{mga}{J_O}\varphi=0$$

工程中常用上式，通过测定零件的摆动周期，以计算其转动惯量。

$$\therefore\quad \varphi''+k^2\varphi=0$$

通解为：$\varphi=C_1\sin kt+C_2\cos kt$

或：$\varphi=\varphi_O\sin(kt+\theta)$

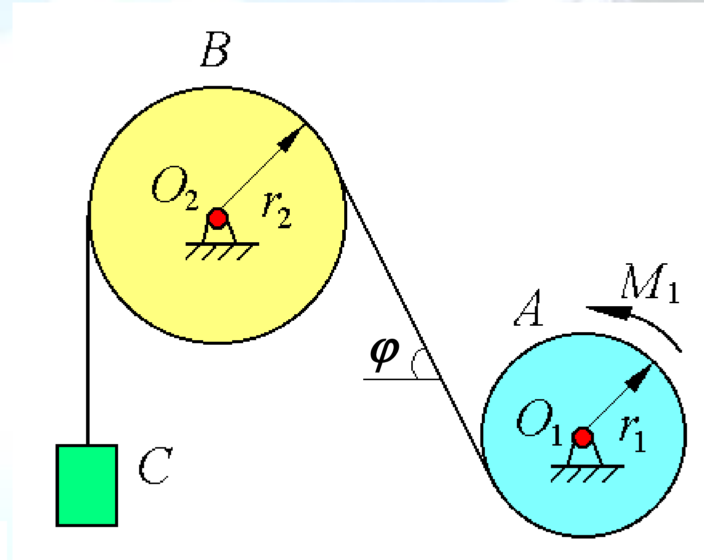
φ_0—振幅，θ—初相位

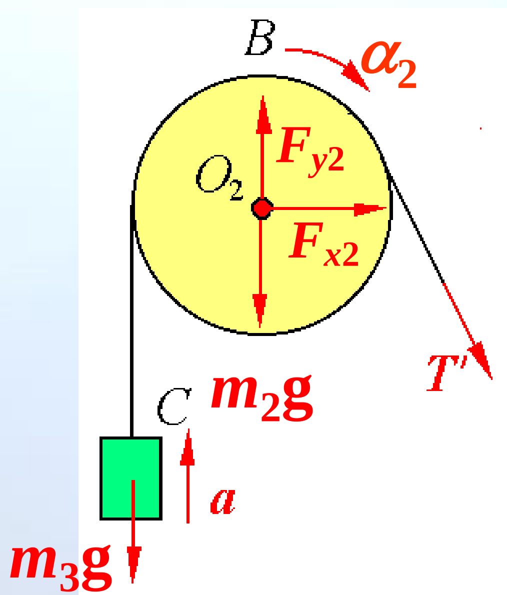
周期为：$T=\dfrac{2\pi}{k}$，$\quad k=\sqrt{\dfrac{mga}{J_O}}$

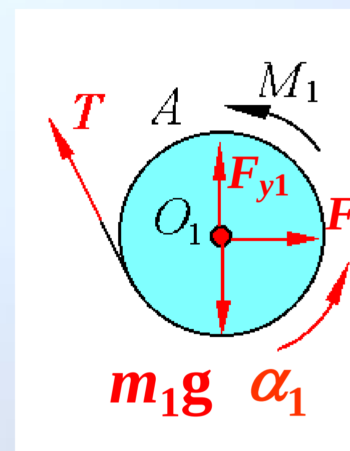
[例3] 提升装置中，轮A、B的质量分别为m_1、m_2,半径分别为r_1、r_2, 可视为均质圆盘; 物体C的质量为m_3; 轮A上作用常力矩M_1

求： 物体C上升的加速度。

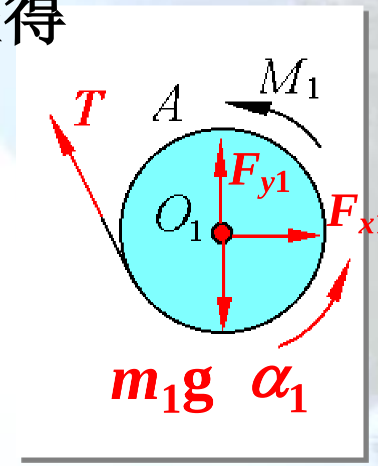
分析：运动分析和受力分析







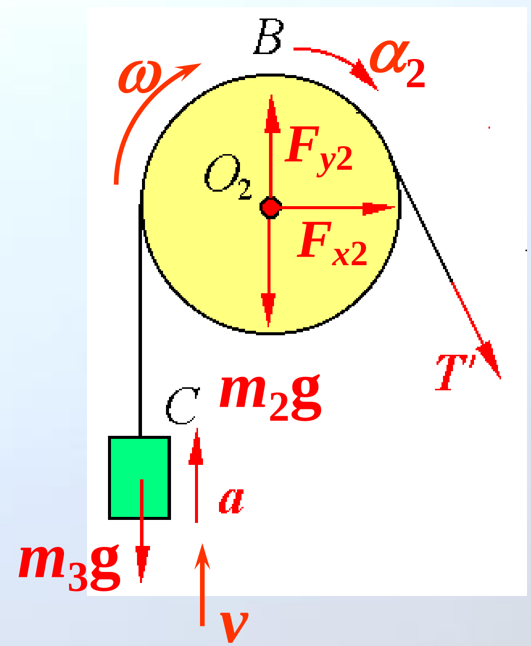
解：取轮A为研究对象，由刚体定轴转动微分方程得



$$\frac{1}{2}m_1r_1^{\ 2}\cdot\alpha_1=M_1-Tr_1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

取轮B 连同物体C为研究对象,应用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m_2r_2^{\ 2}\cdot\omega_2+m_3vr_2\right)=T'r_2-m_3g\,r_2 \qquad \cdots\cdots(2)$$



补充运动学条件 $r_2\omega_2=v$，$r_2\alpha_2=a=r_1\alpha_1$

化简(1) 得： $\dfrac{m_1}{2}a=\dfrac{M_1}{r_1}-T$

化简(2) 得： $\dfrac{m_2+2m_3}{2}a=T'-m_3g$

$$\therefore a=\frac{2(M_1/r_1-m_3g)}{m_1+m_2+2m_3}$$

§ 11-5　质点系相对于质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\bar{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)})$$

此动量矩定理只适用于相对惯性参考系为固定的点(或固定的轴)，**对于一般的动点(或动轴)，动量矩定理具有更复杂的形式。（P273）**

但是，相对于质点系的质心或随同质心平动的动轴，动量矩定理的形式不变。

$$\frac{\mathrm{d}\bar{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum \bar{M}_C(\bar{F}_i^{(e)})$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum \bar{M}_C(\bar{F}_i^{(e)})$$

质点系相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心之矩的矢量和。

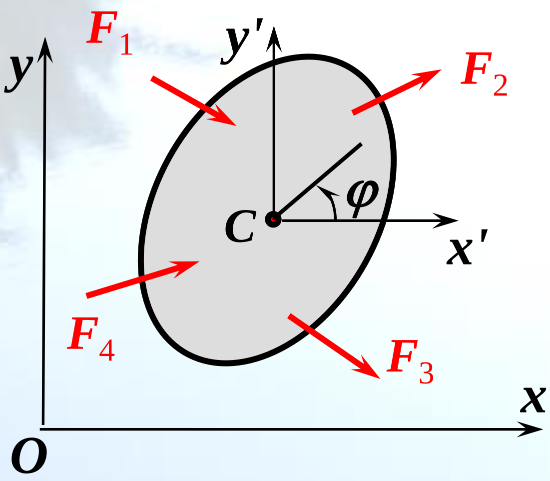
质点系相对于质心和固定点的动量矩定理，具有完全相似的数学形式，而对于质心以外的其它动点，一般并不存在这种简单的关系。

§ 11–6　刚体的平面运动微分方程

取质心C为动系原点，则此平面运动可分解为

（1）随质心C的平动 (x_C, y_C)

（2）绕质心C 的转动（φ）



应用质心运动定理和相对质心的动量矩定理：

$$\begin{cases} m\bar{a}_C = \sum \bar{F}, \\ \dfrac{dL_C}{dt} = \sum M_C(\bar{F}_i^{(e)}) \end{cases}$$

$$\because L_C = J_C\omega$$

$$\frac{dL_C}{dt} = \frac{d}{dt}(J_C\omega) = J_C\alpha$$

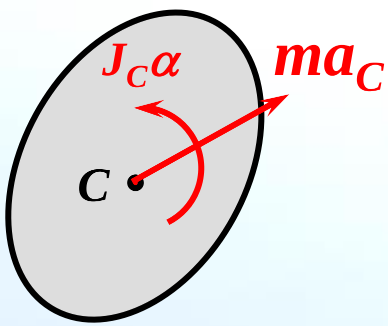
$$\therefore J_C\alpha = \sum M_C(\bar{F}_i^{(e)})$$

质心运动定理和相对质心的动量矩定理表达为：

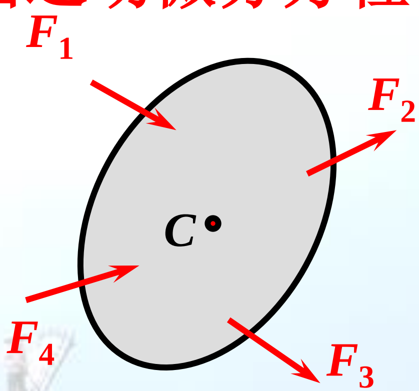
$$m\bar{a}_C=\sum\bar{F}\ ,$$

$$J_C\alpha=\sum M_C(\bar{F}^{(e)})$$

上两式称为刚体的平面运动微分方程。



动力学图

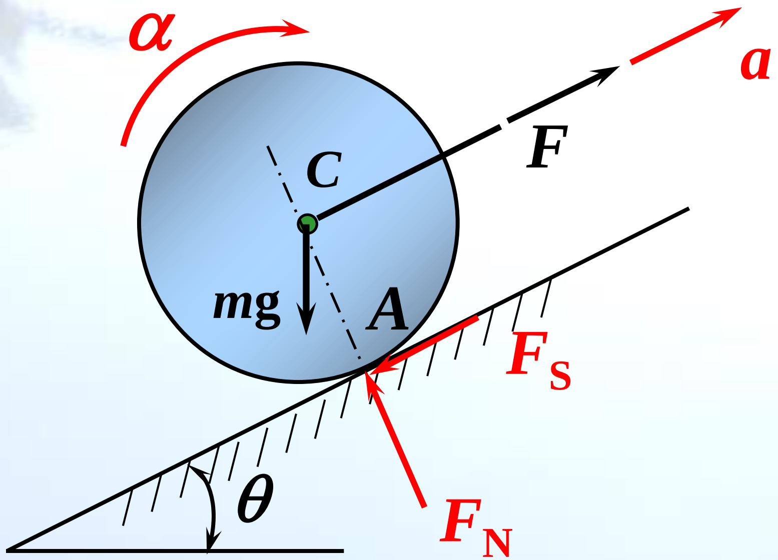


受力图

投影形式：

$$\boxed{\begin{aligned} ma_{Cx}&=\sum F_x\ ,\\ ma_{Cy}&=\sum F_y\ ,\\ J_C\alpha&=\sum M_C(\bar{F}_i^{(e)}) \end{aligned}}$$

【例】已知均质圆盘，半径为r，质量m，作用力F，只滚不滑。求：轮子的加速度a。



【错误的解法】

$$J_A\alpha=\sum M_A(\overline{F})$$

$$J_A=\frac{1}{2}mr^2+mr^2 \qquad \alpha=\frac{a}{r}$$

$$\frac{3}{2}mr^2\cdot\frac{a}{r}=Fr-mgr\sin\theta$$

【正确的解法】

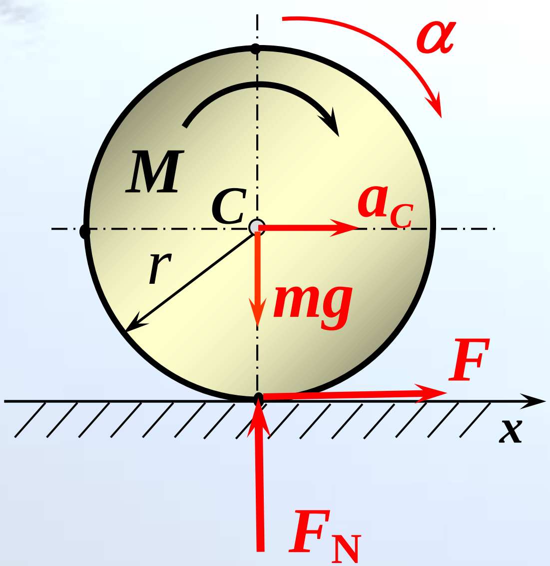
$$ma_x=\sum F_x$$

$$J_C\alpha=\sum M_C(\overline{F})$$

$$ma=F-F_S-mg\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{a}{r}=F_S r$$

[例11-11]（P276） 均质圆轮半径为r，质量为m，沿水平直线纯滚动，轮的惯性半径为ρ_C，作用于圆轮的力偶矩为M。（1）求轮心的加速度。（2）如果圆轮对地面的静滑动摩擦系数为f_s，问M应满足什么条件使圆轮只滚不滑。



解：（1）受力分析和运动分析。

$$\begin{cases} ma_{Cx}=F & \text{-----------} \quad (1) \\ ma_{Cy}=F_N-mg & \text{-----------} \quad (2) \\ m\rho_C^2\alpha=M-Fr & \text{-----------} \quad (3) \end{cases}$$

$\because\ a_{Cy}=0,\quad a_{Cx}=a_C$，只滚不滑：$a_C=r\alpha$，

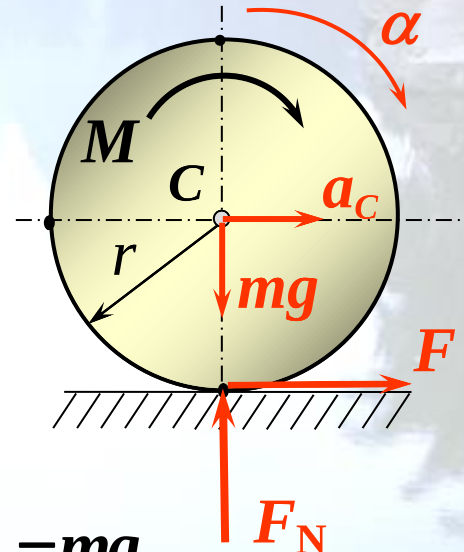
$$\therefore \begin{cases} ma_C=F & \text{-----} \quad (1) \\ 0=F_N-mg & \text{-----} \quad (2) \\ m\rho_C^2\dfrac{a_C}{r}=M-Fr & \text{-----} \quad (3) \end{cases}$$

$ma_{Cx}=\sum F_x$，

$ma_{Cy}=\sum F_y$，

$J_C\alpha=\sum M_C(F^{(e)})$

$$\therefore \begin{cases} ma_C = F & \text{------------ (1)} \\ 0 = F_N - mg & \text{------------ (2)} \\ m\rho_C^2 \dfrac{a_C}{r} = M - Fr & \text{-------- (3)} \end{cases}$$



解得： $a_C = \dfrac{Mr}{m(\rho_C^2 + r^2)}$ ； $F = \dfrac{Mr}{\rho_C^2 + r^2}$ ； $F_N = mg$

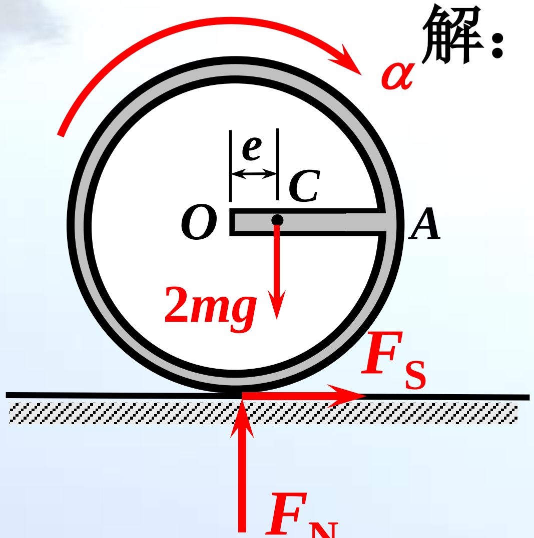
（2）只滚不滑的条件：

$F \leqslant f_S F_N$，或 $F \leqslant f_S mg$ $\qquad \therefore \dfrac{Mr}{\rho_C^2 + r^2} \leqslant f_S mg$

得：$M \leqslant f_S mg \dfrac{\rho_C^2 + r^2}{r}$

[例11-13]
(P278)

均质圆环半径为r，质量为m，其上焊接刚杆OA,杆长为r，质量也为m， OA水平位置时静止。求开始运动时圆环的角加速度α，地面的摩擦力F_S和法向约束力F_N，设圆环作纯滚动。

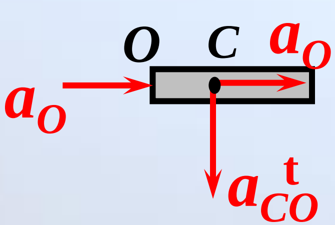


解：取整体为研究对象，质心位置 $e=\dfrac{r}{4}$

$$\begin{cases} 2ma_{Cx}=F_S \\ 2ma_{Cy}=2mg-F_N \\ J_C\alpha=F_N\cdot e-F_S\cdot r \end{cases}$$

5个未知量

运动学补充方程：



$$a_{Cx}=a_O=r\alpha$$

$$a_{Cy}=a_{CO}^{t}=\frac{r}{4}\alpha$$

$$J_C=(\quad)+(\quad)$$

$$\bar{a}_C=\bar{a}_O+\bar{a}_{CO}^{t}+\underbrace{\bar{a}_{CO}^{n}}_{=0}$$

解得 $\alpha=$

$F_N=$

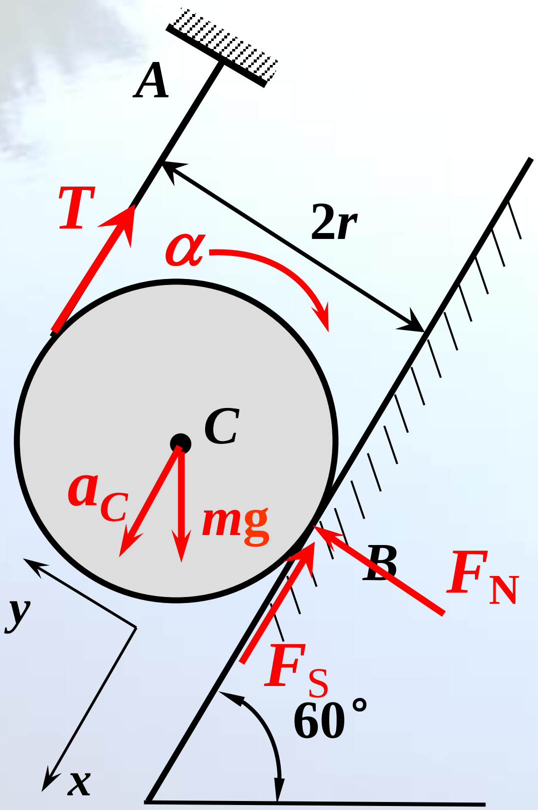
$F_S=$

[题11-23]（P286）

已知：轮半径为r，质量m，与斜面间的摩擦因数为$f=\frac{1}{3}$，

求：轮子中心沿斜面落下的加速度a_C。

解：受力分析和运动分析



$$\begin{cases} ma_{Cx}=mg\sin 60°-T-F_S \\ ma_{Cy}=F_N-mg\cos 60° \\ J_C\alpha=T\cdot r-F_S\cdot r \end{cases}$$

运动学关系：$a_{Cx}=a_C$，$a_{Cy}=0$，$\alpha=\frac{a_C}{r}$，

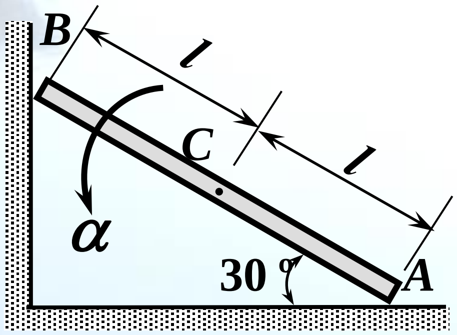
静力学关系：$F_S=f\,F_N=\frac{F_N}{3}$，$J=\frac{1}{2}mr^2$

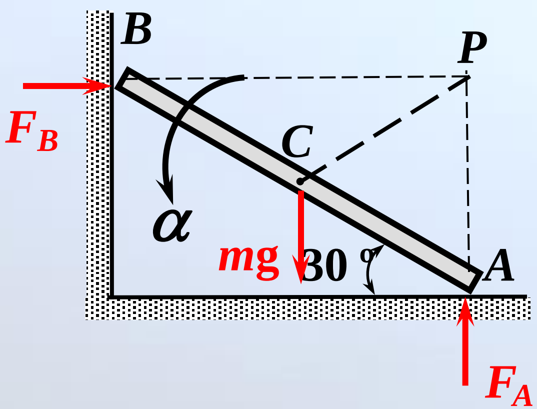
$$\begin{cases} ma_C=\frac{\sqrt{3}}{2}mg-T-\frac{F_N}{3} \\ 0=F_N-\frac{1}{2}mg \\ \frac{1}{2}ma_C=T-\frac{F_N}{3} \end{cases}$$

解得：

$a_C=0.355g$

[例] 已知：均质*AB*杆的质量*m*为50kg，长*l*为2m，两接触点均无摩擦，从图示位置由静止开始下滑，求开始下滑时杆的角加速度和*A*、*B*点反力。

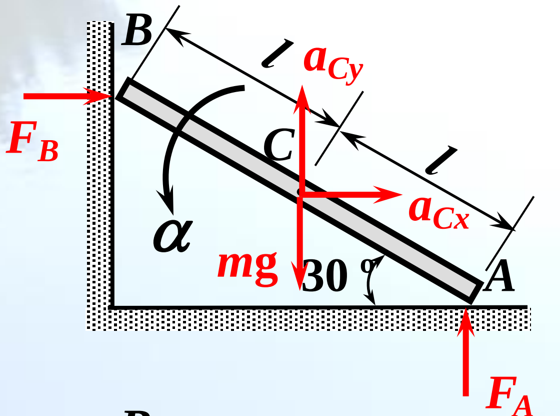




【错误的解法】

$$\cancel{J_P\alpha=\sum M_P(\bar{F})}$$

[例] 已知：均质AB杆的质量为m，杆长为$2l$，两接触点均无摩擦，从图示位置由静止开始下滑，求开始下滑时杆的角加速度和A、B点反力。

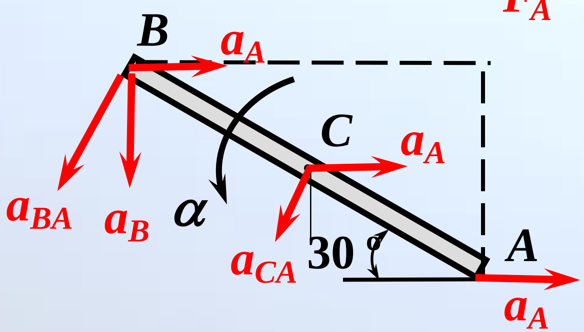


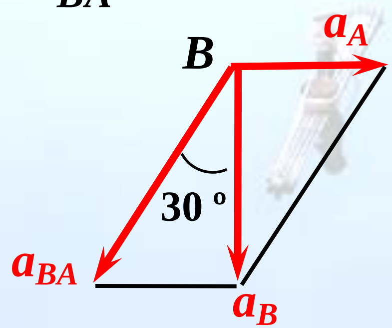
解：受力分析和运动分析。

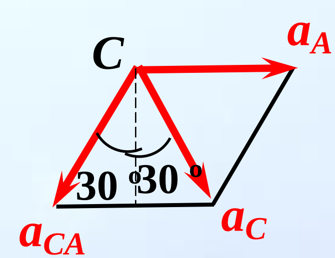
$$\begin{cases} ma_{Cx}=F_B \\ ma_{Cy}=F_A-mg \\ J_C\alpha=F_A\cdot l\cos30^\circ-F_B\cdot l\sin30^\circ \end{cases}$$

$$a_{BA}=2l\alpha \qquad \therefore a_A=l\alpha$$

$$\boxed{\alpha=\frac{3\sqrt{3}g}{8l} \qquad F_A=\frac{7}{16}mg \qquad F_B=\frac{3\sqrt{3}}{16}mg}$$







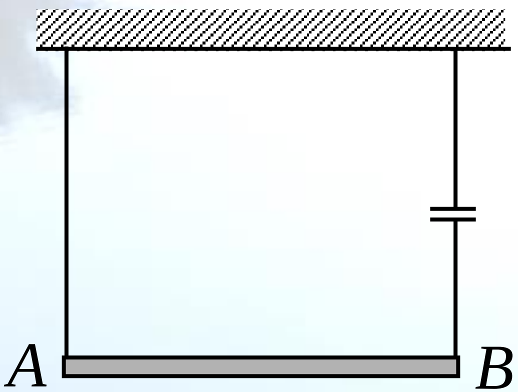
$$a_{CA}=l\alpha=a_A$$

$$a_C=l\alpha$$

$$a_{Cx}=a_C\sin30^\circ=\frac{1}{2}l\alpha$$

$$a_{Cy}=-a_C\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}l\alpha$$

[题综-8]（P324） 均质棒*AB*的质量为m=4kg，其两端悬挂在两条平行绳上，棒处在水平位置。设其中一绳突然断了，求此瞬时另一绳的张力。

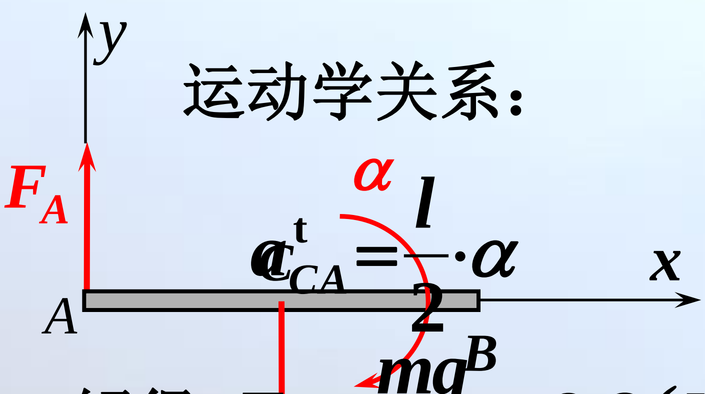


解： 受力分析和运动分析。

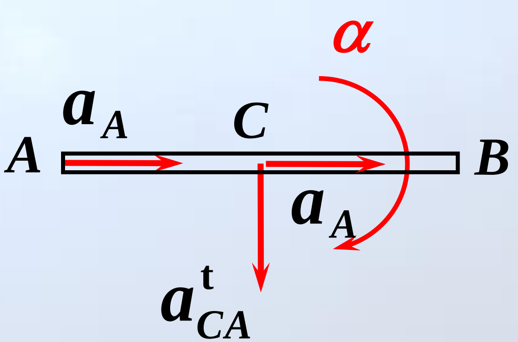
建立刚体的平面运动微分方程

$$\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_x \\ ma_{Cy}=\sum F_y \\ J_C\alpha=\sum M_C \end{cases} \qquad \begin{cases} ma_A=0 \\ -ma_{CA}^{t}=F_A-mg \\ \dfrac{1}{12}ml^2\alpha=F_A\cdot\dfrac{l}{2} \end{cases}$$

运动学关系：

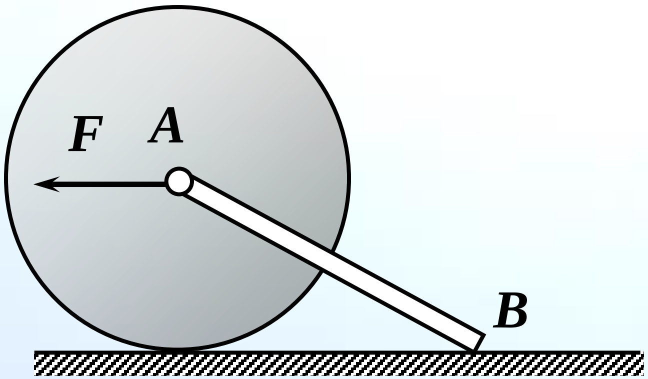


$$a_{CA}^{t}=\frac{l}{2}\cdot\alpha$$

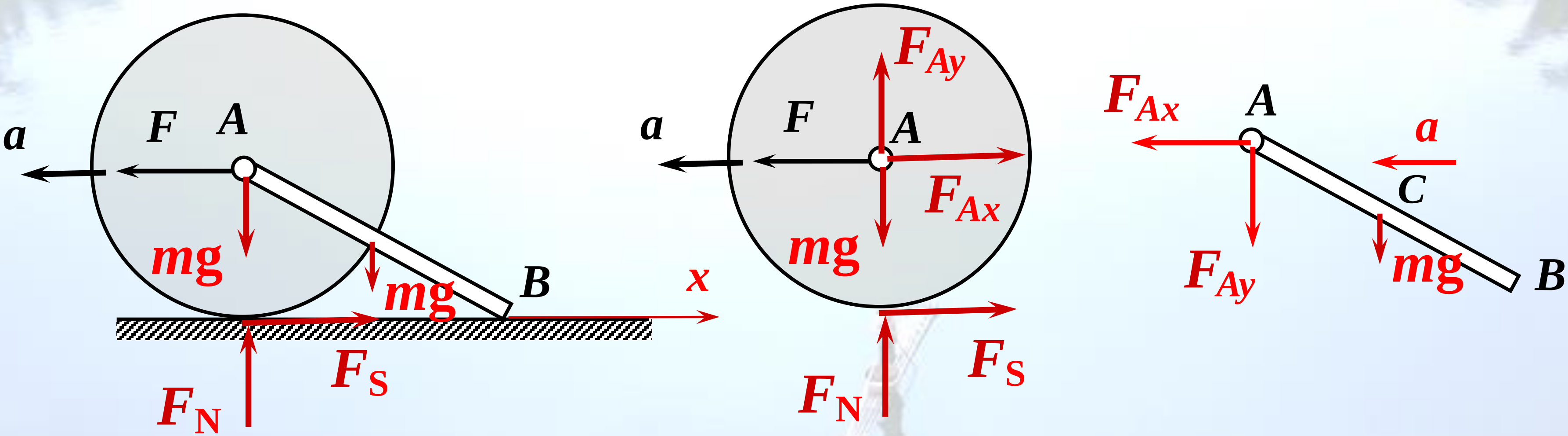


解得：$F_A=\dfrac{mg}{4}$=9.8（N）

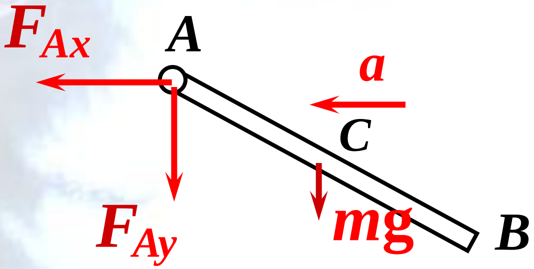
[例8] 均质圆盘*A*的质量为*m*，半径为*R*，均质细杆*AB*的质量也为*m*，长l=2*R*，杆端*A*与轮心光滑铰接，如在*A*处加一水平拉力*F*,使圆盘沿水平面纯滚动，试求：（1）水平拉力*F*为多大方能使杆端*B*刚好离开地面？（2）为保证纯滚动，轮与地面间的静滑动摩擦因数应为多大？

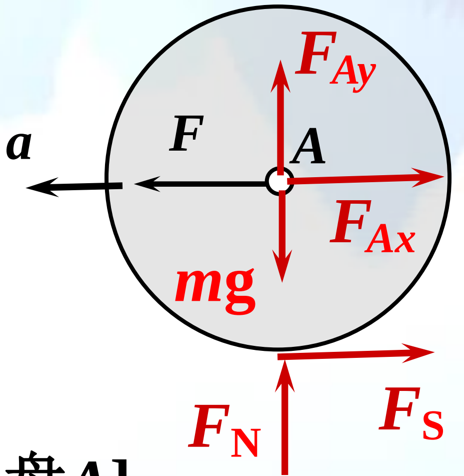


[例8] 均质圆盘A的质量为m，半径为R，均质细杆AB的质量也为m，长$l=2R$，杆端A与轮心光滑铰接，如在A处加一水平拉力F,使圆盘沿水平面纯滚动，试求：（1）水平拉力F为多大方能使杆端B刚好离开地面？（2）为保证纯滚动，轮与地面间的静滑动摩擦因数应为多大？



解：[AB杆] $\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_x \\ ma_{Cy}=\sum F_y \\ J_C\alpha=\sum M_C \end{cases}$ [圆盘A] $\begin{cases} ma_{Ax}=\sum F_x \\ ma_{Ay}=\sum F_y \\ J_A\alpha=\sum M_A \end{cases}$





[AB杆]

$$\begin{cases} -ma=-F_{Ax} \\ 0=-mg-F_{Ay} \\ 0=-F_{Ax}\cdot R\sin30°-F_{Ay}\cdot R\cos30° \end{cases}$$

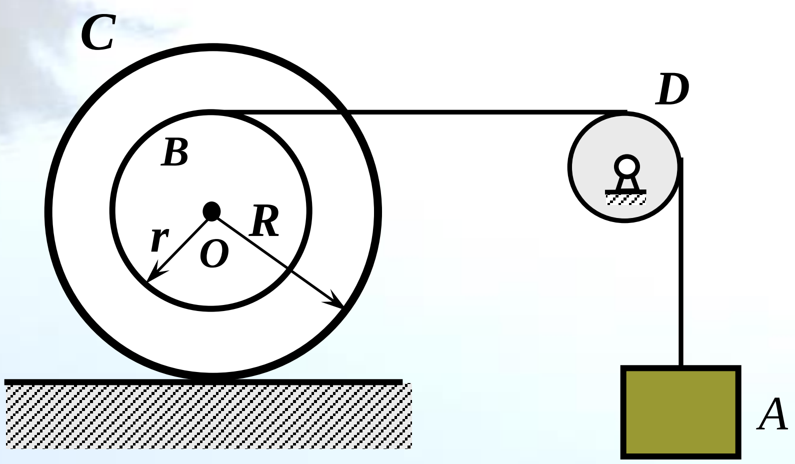
解得: $\begin{cases} F_{Ay}=-mg \\ F_{Ax}=\sqrt{3}mg \\ a=\sqrt{3}g \end{cases}$

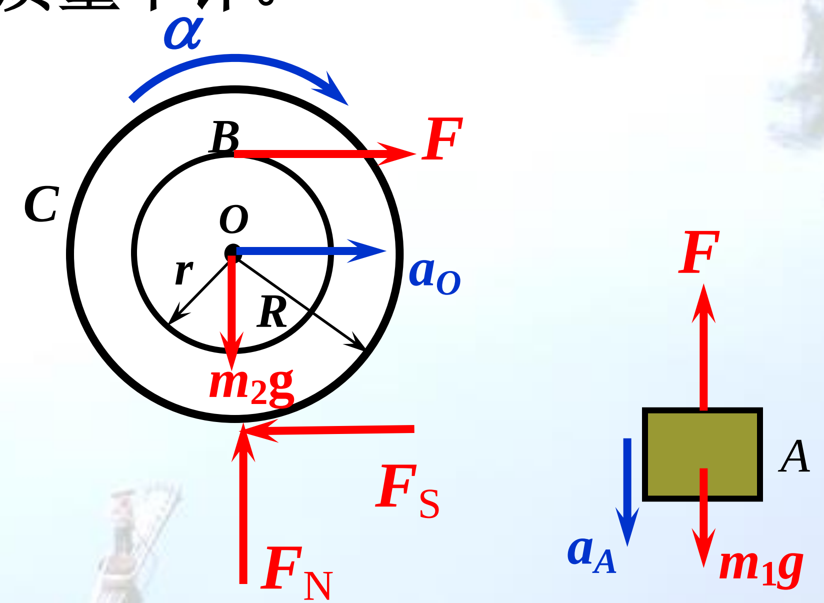
[圆盘A]

$$\begin{cases} -ma=-F+F_{Ax}+F_S \\ 0=F_N+F_{Ay}-mg \\ J_A\alpha=F_S\cdot R \end{cases} \quad (\alpha=\frac{a}{R})$$

解得: $\begin{cases} F=\frac{5\sqrt{3}}{2}mg \\ F_N=2mg \\ F_S=\frac{\sqrt{3}}{2}mg \end{cases}$

[题11-12]（P283） 重物A质量为m_1， 轮C作纯滚动， 轮C和轮B的总质量为m_2，对O轴的回转半径为ρ，求重物A的加速度。轮D和绳子的质量不计。





解：重物A：$m_1 a_A = m_1 g - F$

圆盘C：$m_2 a_O = F - F_S$

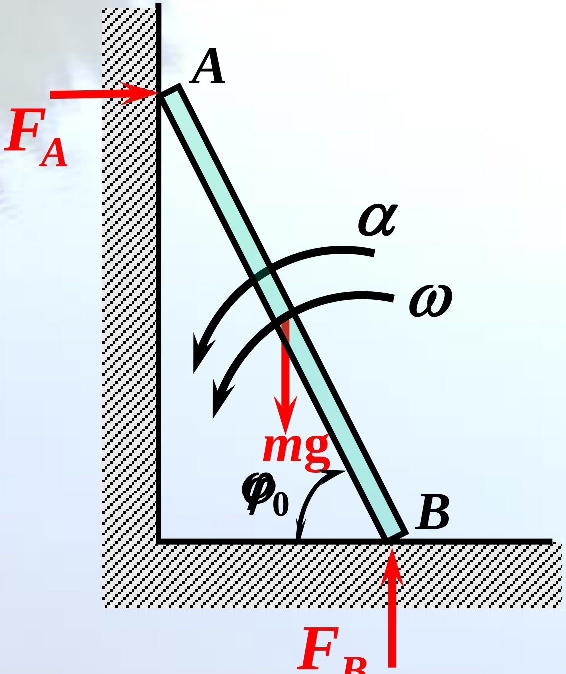
$$J_O \alpha = F \cdot r + F_S \cdot R$$

运动学关系：$\alpha = \dfrac{a_O}{R}$，$a_A = a_O + r\alpha$

解得：

$$a_A = \frac{m_1 g (R+r)^2}{m_1 (R+r)^2 + m_2(\rho^2 + R^2)}$$

[题11-15]（P284） 均质杆AB长l，放在铅直平面内，杆的一端A靠在光滑的铅直墙上，另一端B放在光滑的水平地板上，并与水平面成φ_0角。此后，杆由静止倒下。求：1）杆在任意时的角速度和角加速度；2）杆脱离墙时的φ。

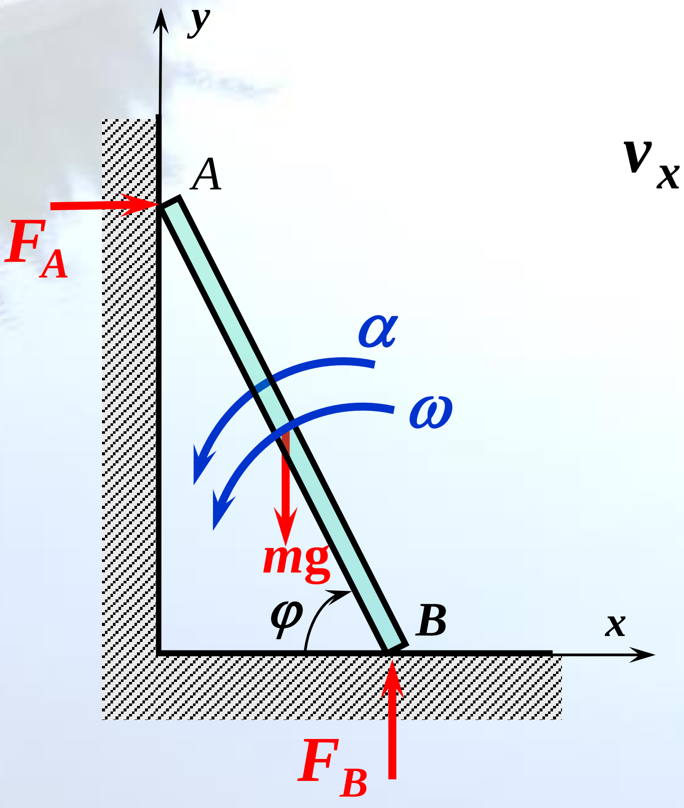


解：研究对象杆AB

刚体的平面运动微分方程

$$\begin{cases} ma_x = F_A \\ ma_y = F_B - mg \\ J_C\alpha = F_B \cdot \dfrac{l}{2}\cos\varphi - F_A \cdot \dfrac{l}{2}\sin\varphi \end{cases}$$

必须将加速度a_x、a_y和α用一个未知量表示



$$x_C=\frac{l}{2}\cos\varphi \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\omega \qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\alpha$$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{2}\omega\sin\varphi$$

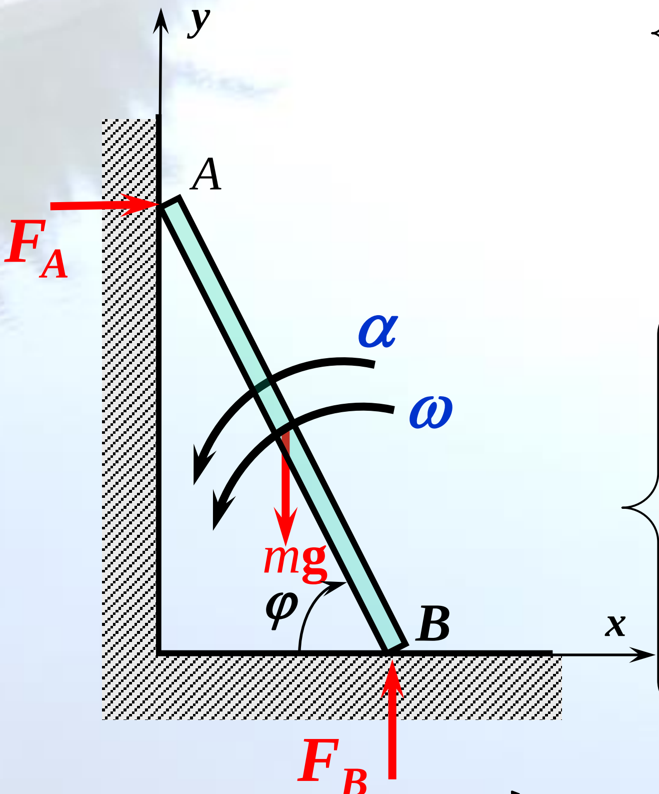
$$a_x=\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}=\frac{l}{2}\left(\frac{d\omega}{\mathrm{d}t}\sin\varphi+\omega\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\frac{l}{2}(\alpha\sin\varphi-\omega^2\cos\varphi)$$

$$y_C=\frac{l}{2}\sin\varphi \qquad v_y=\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{2}\omega\cos\varphi$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}^2y_C}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{l}{2}(\alpha\cos\varphi+\omega^2\sin\varphi)$$

刚体的平面运动微分方程



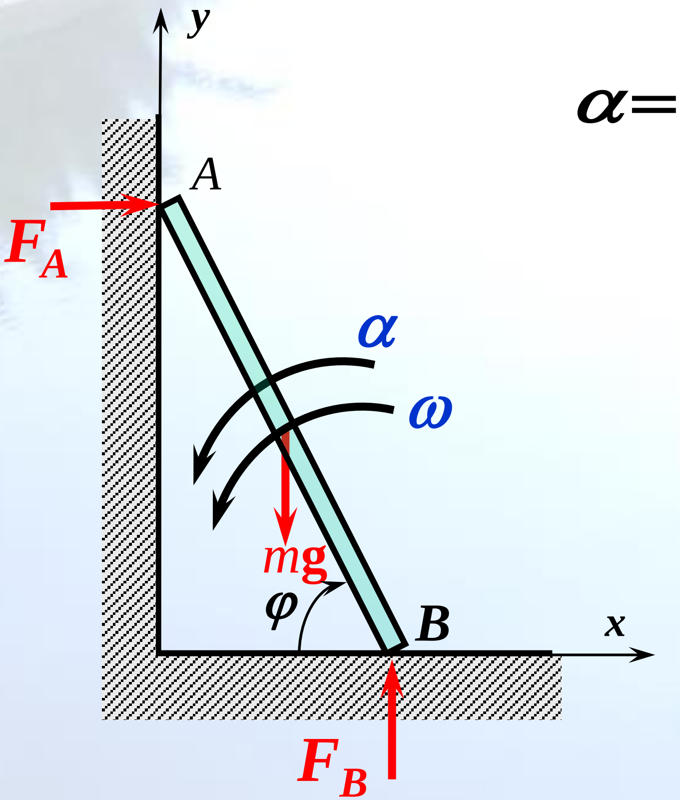
$$\begin{cases} ma_x = F_A \\ ma_y = F_B - mg \\ J_C\alpha = F_B \cdot \dfrac{l}{2}\cos\varphi - F_A \cdot \dfrac{l}{2}\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{ml}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi) = F_A & (1) \\ -\dfrac{ml}{2}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi) = F_B - mg & (2) \\ \dfrac{1}{12}ml^2\alpha = F_B \cdot \dfrac{l}{2}\cos\varphi - F_A\dfrac{l}{2}\sin\varphi & (3) \end{cases}$$

由(1)乘$\sin\varphi$,(2)乘$\cos\varphi$后相减，再与(3)联立

解得： $\alpha = \dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$

由 $\alpha=\dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$



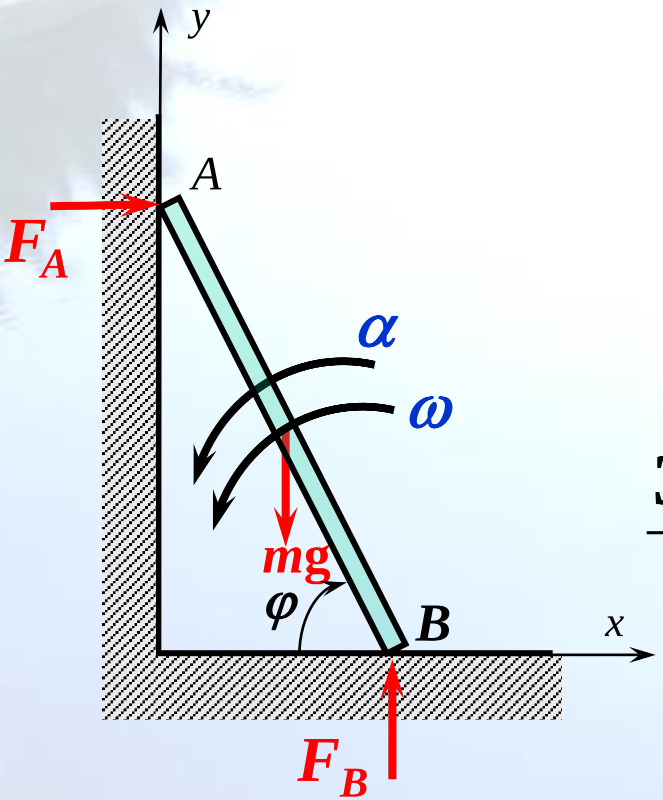
$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\boxed{-\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\omega=\frac{3g}{2l}\cos\varphi}$$

$$\omega\mathrm{d}\omega=-\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=-\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\omega^2}{2}=\frac{3g}{2l}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\varphi-\sin\varphi_0)}$$



$$ma_x = F_A$$

$$a_x = \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{l}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi)$$

$$\cancel{\frac{l}{2}}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi) = 0$$

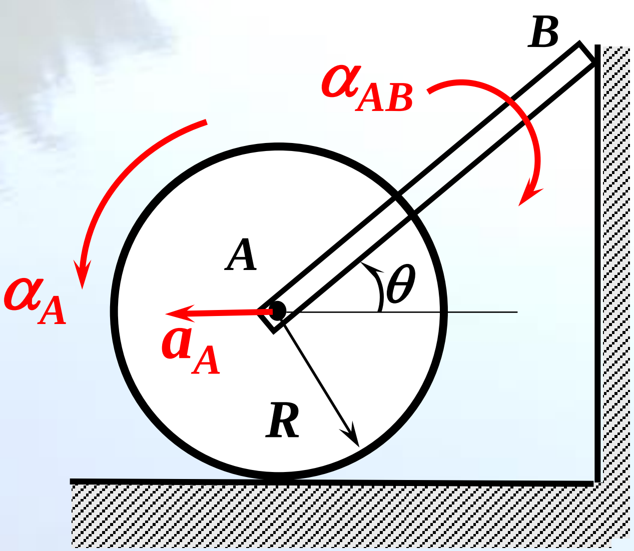
$$\frac{3g}{2l}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{3g}{l}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)\cos\varphi = 0$$

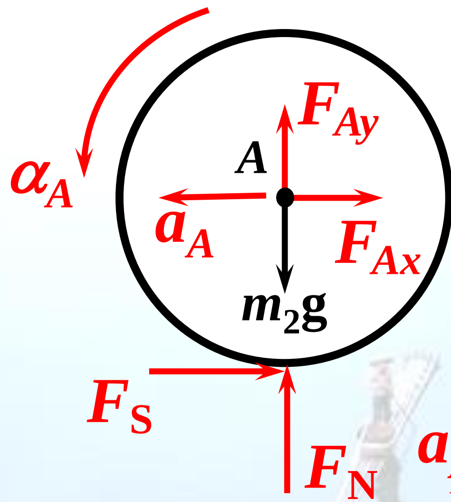
$$\frac{3}{2}\sin\varphi = \sin\varphi_0$$

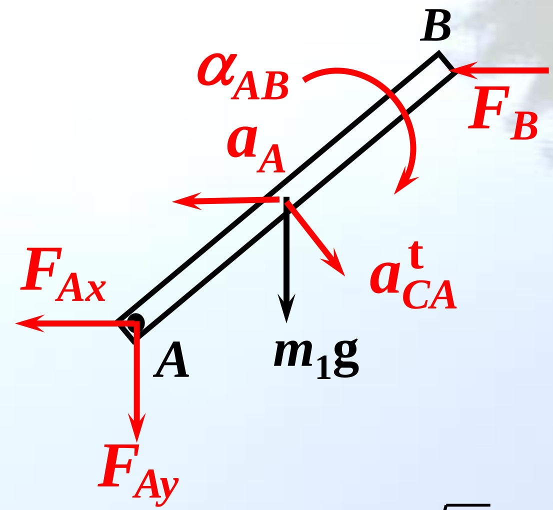
$$\varphi = \arcsin(\frac{2}{3}\sin\varphi_0)$$

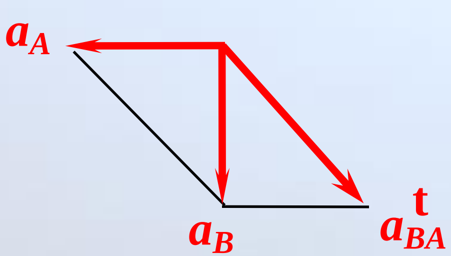
[题12-15] (P321)

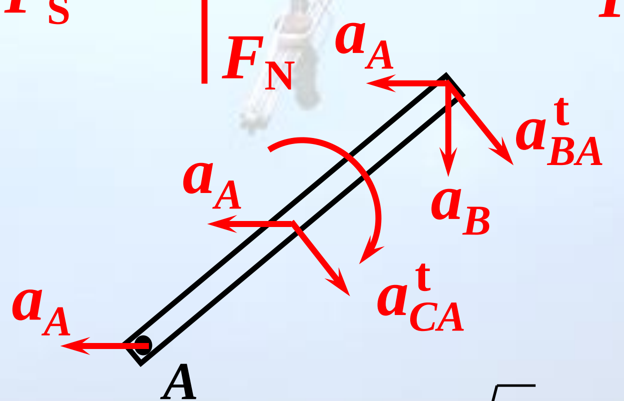
均质细杆AB长为l，质量为m_1， 上端B靠在光滑的墙上，下端以铰链与均质圆柱的中心相连，圆柱质量为m_2，半径为R。从图示位置由静止开始作纯滚动，θ=45°，求点A在初瞬时的加速度。











$$a_{BA}^{t}=\sqrt{2}a_A$$

$$a_{BA}^{t}=l\alpha_{AB}$$

$$\therefore \alpha_{AB}=\frac{\sqrt{2}a_A}{l}$$

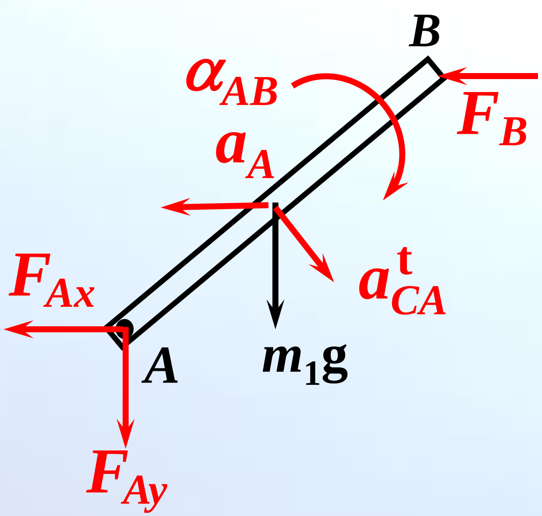
$$\therefore a_{CA}^{t}=\frac{\sqrt{2}a_A}{2}$$

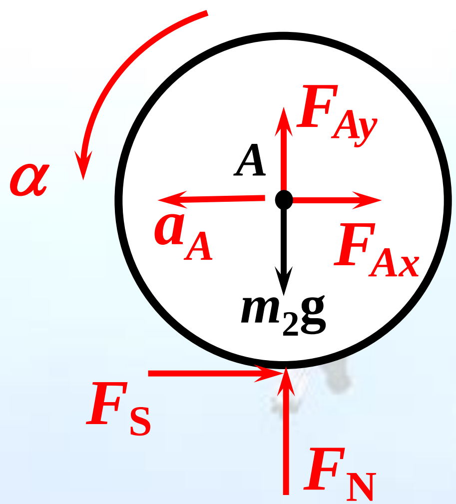
解： [AB杆]

$$\begin{cases} m_1 a_x = -F_{Ax} - F_B \\ m_1 a_y = -m_1 g - F_{Ay} \\ J_C \alpha_{AB} = F_{Ax}\dfrac{\sqrt{2}l}{4} - (F_{Ay}+F_B)\dfrac{\sqrt{2}l}{4} \end{cases}$$

[圆盘A]

$$\begin{cases} -m_2 a_A = F_{Ax} + F_S \\ \cancel{0 = F_N + F_{Ay} - m_2 g} \\ J_A \alpha = F_S \cdot R \end{cases}$$





$$\therefore \alpha_{AB} = \frac{\sqrt{2}a_A}{l}$$

$$\therefore a_{CA}^{t} = \frac{\sqrt{2}a_A}{2}$$

$$a_x = -\frac{a_A}{2}$$

$$a_y = -\frac{a_A}{2}$$

解得：$a_A = \dfrac{3m_1 g}{4m_1 + 9m_2}$

第十一章结束