第二章 平面机构的运动分析

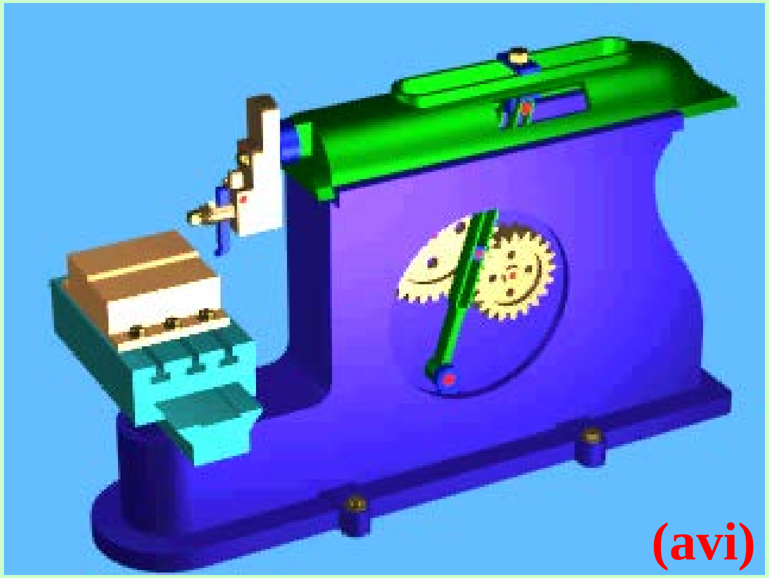
§ 2-1 机构分析的目的和方法

一、目的

运动：位置(位移)、速度和加速度。

运动分析：位置分析、速度分析、加速度分析

牛头刨床设计要求：最大行程、匀速、快回。



考虑：1. 刨床切削最大构件；2. 牛头刨床所占有位置；3. 切削工件与切削速度有关；4. 机构构件惯性力。

位移分析可以：

- ◆ 进行干涉校验
- ◆ 确定从动件行程
- ◆ 考查构件或构件上某点能否实现预定位置变化的要求。

速度、加速度分析可以：

- ◆ 确定速度变化是否满足要求
- ◆ 确定机构的惯性力、振动等

机构的运动分析：根据原动件的已知运动规律，分析改机构上某点的位移、速度和加速度以及构件的角速度、角加速度。

目的在于：

确定某些构件在运动时所需的空间；判断各构件间是否存在干涉；考察某点运动轨迹是否符合要求；用于确定惯性力等。

二、方法

图解法：形象直观，精度不高。

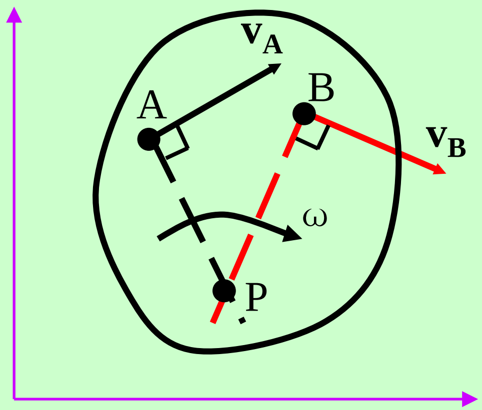
速度瞬心法

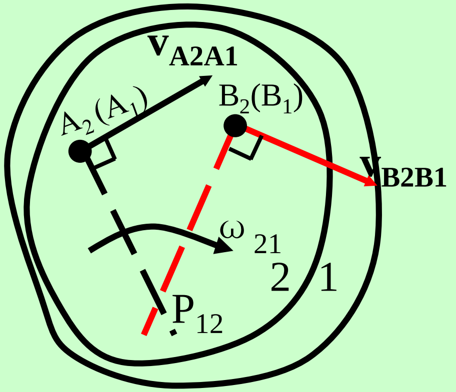
矢量方程图解法

解析法：较高的精度，概念不清楚。

§ 2-2 速度瞬心及其在平面机构速度分析中的应用

1. 速度瞬心(Instantaneous Center)的定义





速度瞬心为互相作平面相对运动的两构件上，瞬时相对速度为零的点；或者说，瞬时速度相等的重合点(即等速重合点)。若该点的绝对速度为零则为绝对瞬心；若不等于零则为相对瞬心，即：

$$V_{P1P2} = V_{P2P1}$$

2. 速度瞬心的性质

1) 两构件上相对速度为零的重合点

2) 当$V_{P1P2}= V_{P2P1}= 0$，称为绝对瞬心，即其中一构件为机架；相对机架的绝对瞬时转动点。

当$V_{P1P2}= V_{P2P1}\neq 0$，称为相对瞬心，即两构件均为活动构件；具有相同绝对速度的重合点。

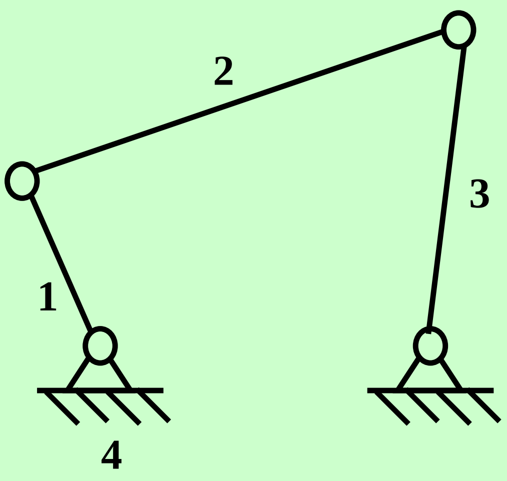
3. 机构中速度瞬心的数目

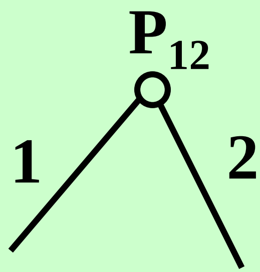
k个构件组成的机构(包括机架)，其总的瞬心数为

$$N = k(k-1) / 2$$

4. 机构中速度瞬心位置的确定

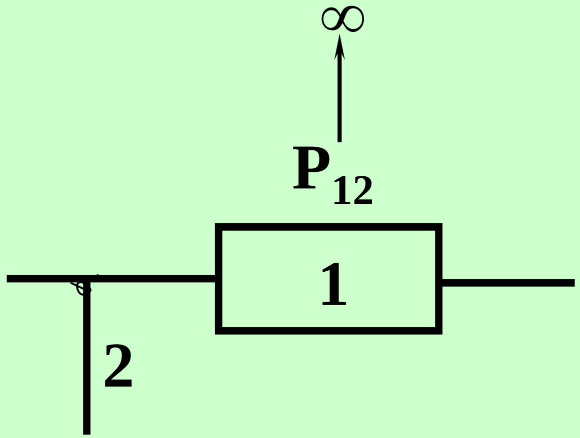
(1) 直观法——通过运动副直接连接的两个构件





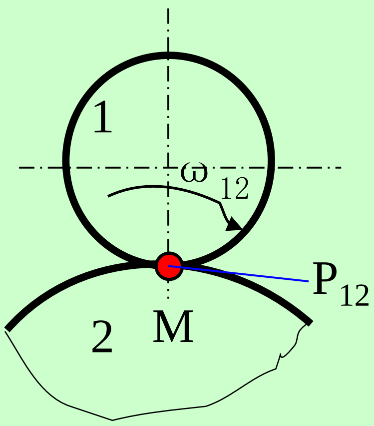
转动副连接的两个构件

结论：组成铰链副两构件间的瞬心在铰链处

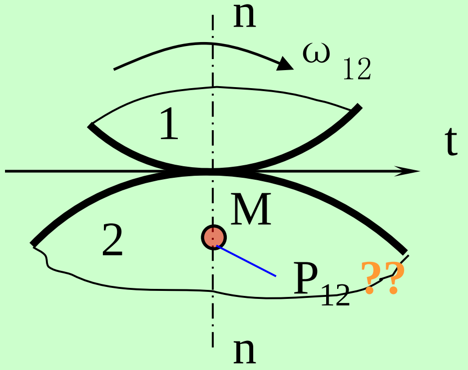


移动副连接的两个构件

结论：组成移动副两构件间的瞬心在垂直于导路线的无穷远处



高副连接的两个构件
（纯滚动）



高副连接的两个构件
（存在滚动和滑动）

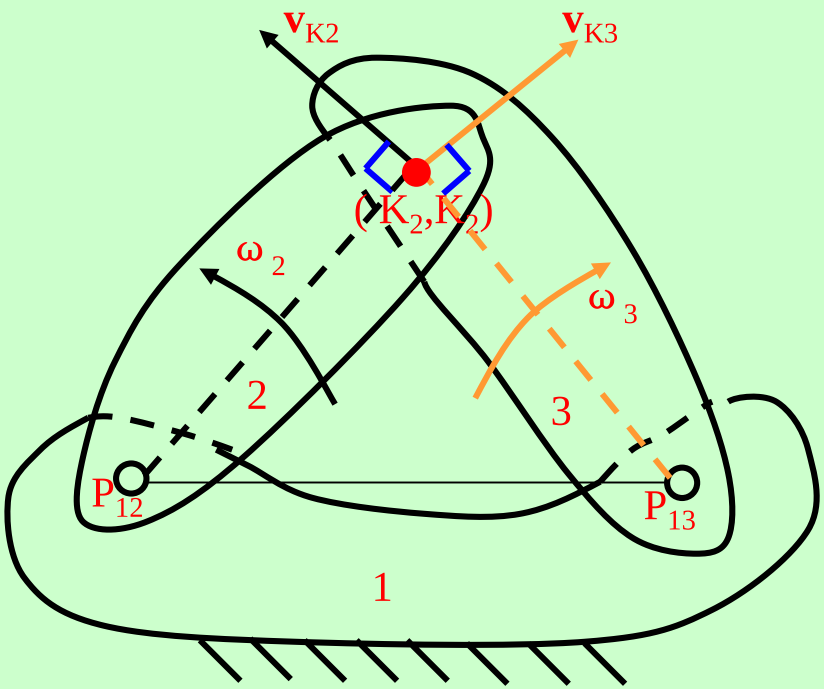
结论：组成高副两构件间的瞬心在接触点的法向上；

特别地，若为纯滚动，则瞬心在接触点处。

(2) 三心定理(the Aronhold-Kennedy Theorm)

定理：三个彼此作平面平行运动的构件其有三个瞬心，它们位于一条直线上。

证明：



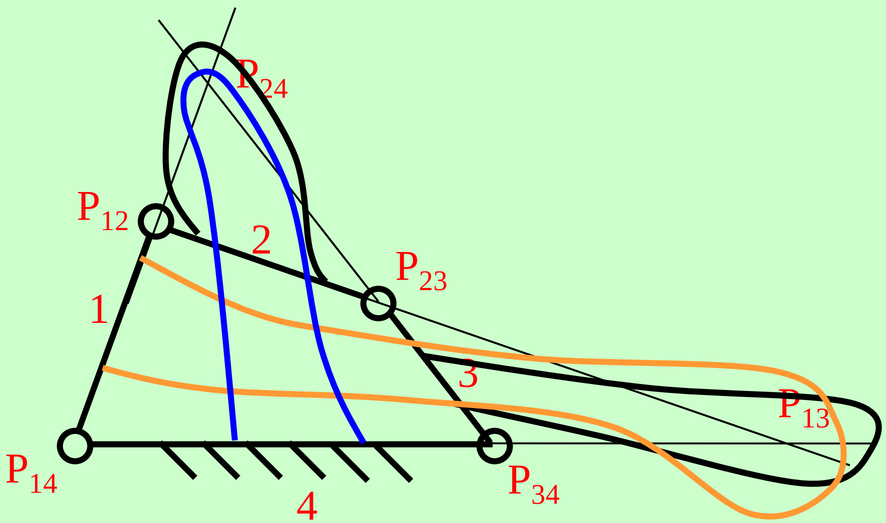
例：求图中机构所有的速度瞬心

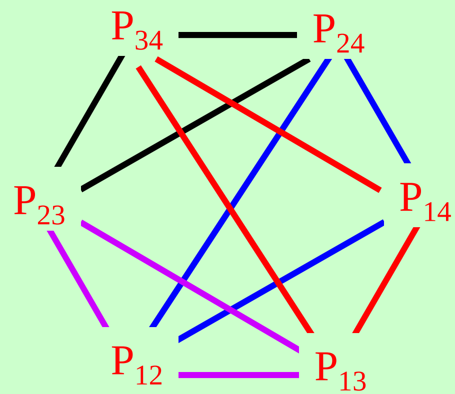
解：1. 瞬心数 $N = 4(4-1)/2 = 6$

2. 直观法可得P_{12}、P_{23}、P_{34}、P_{41}。

3. 三心定理法

实际上可以根据瞬心下标进行瞬心确定——下标消去法。

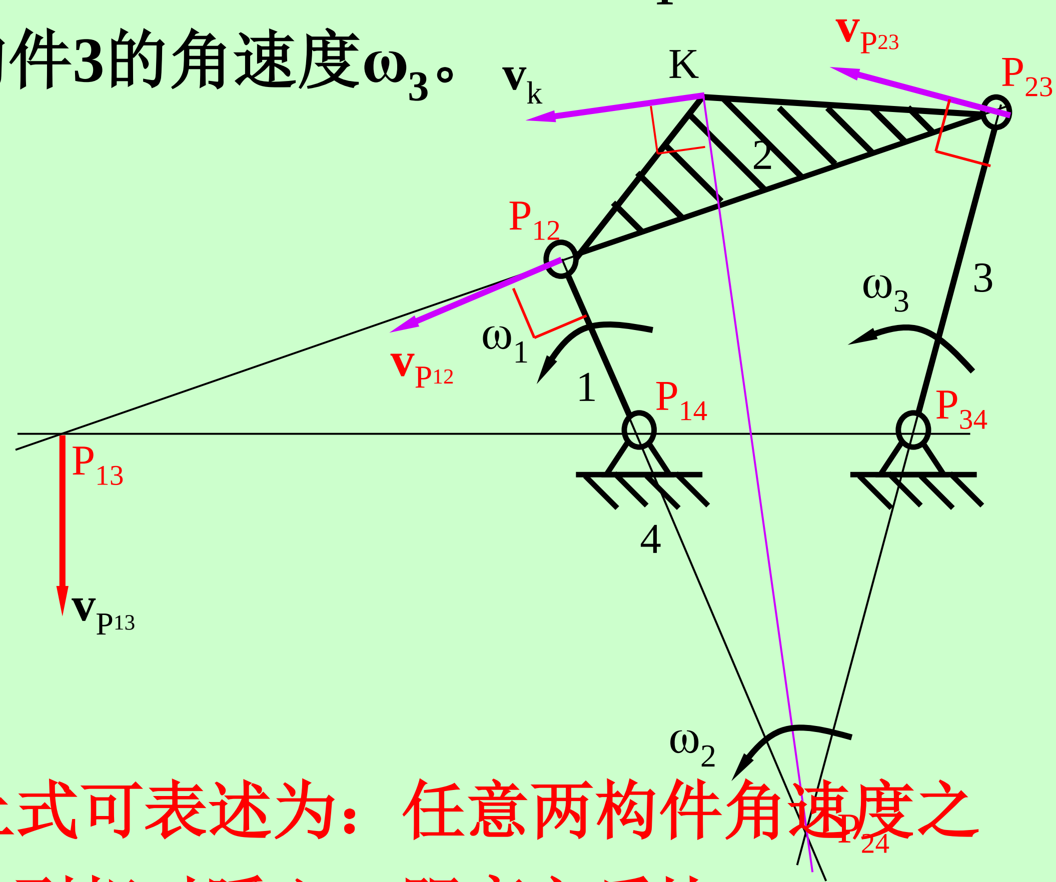




5. 速度瞬心法在机构速度分析中的应用

(1) 铰链四杆机构

例：各构件尺寸、机构位置、构件1的角速度ω_1均已知，求连杆上点K的速度v_k及构件3的角速度ω_3。



$$v_{P_{13}} = \overline{P_{13}P_{14}} \times \mu_1 \times \omega_1$$

$$= \overline{P_{13}P_{34}} \times \mu_1 \times \omega_3$$

所以有：

$$\omega_1 / \omega_3 = \overline{P_{13}P_{34}} / \overline{P_{13}P_{14}}$$

结论1：

$$\omega_i / \omega_j = \overline{P_{ij}P_{1j}} / \overline{P_{ij}P_{1i}}$$

其中：“1”代表机架。上式可表述为：任意两构件角速度之比等于绝对瞬心(P_{1i}、P_{1j})到相对瞬心P_{ij}距离之反比。

$v_k = \overline{KP_{24}} \times \mu_1 \times \omega_2$ 方向垂直于连线K与P_{24}连线，且与ω_2一致。

结论2：

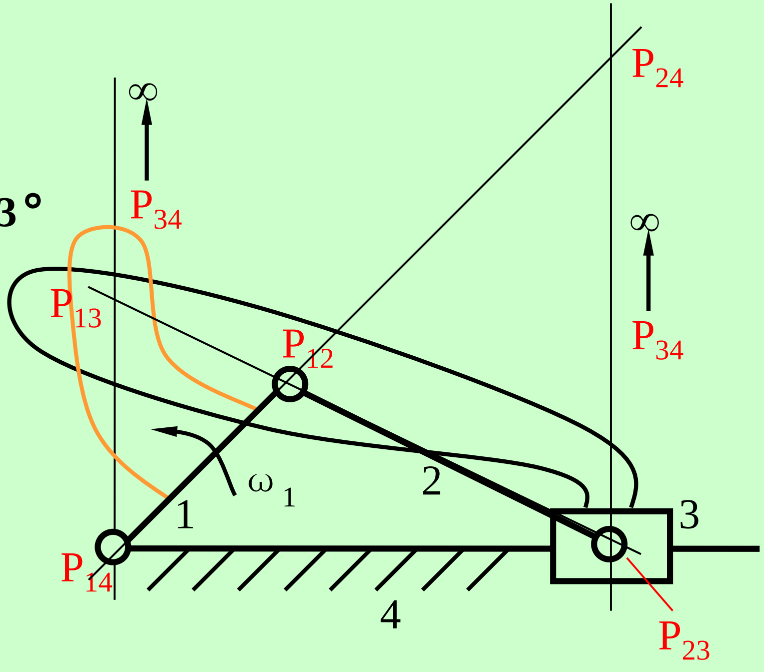
- 相对瞬心用于建立两构件间之角速度关系；
- 绝对瞬心用于确定活动构件上任一点的速度方向。

(2) 曲柄滑块机构

例：图示曲柄滑块机构，求v_3。

$$v_3 = v^3_{P_{13}} = v^1_{P_{13}} = \overline{P_{14}P_{13}} \times \omega_1$$

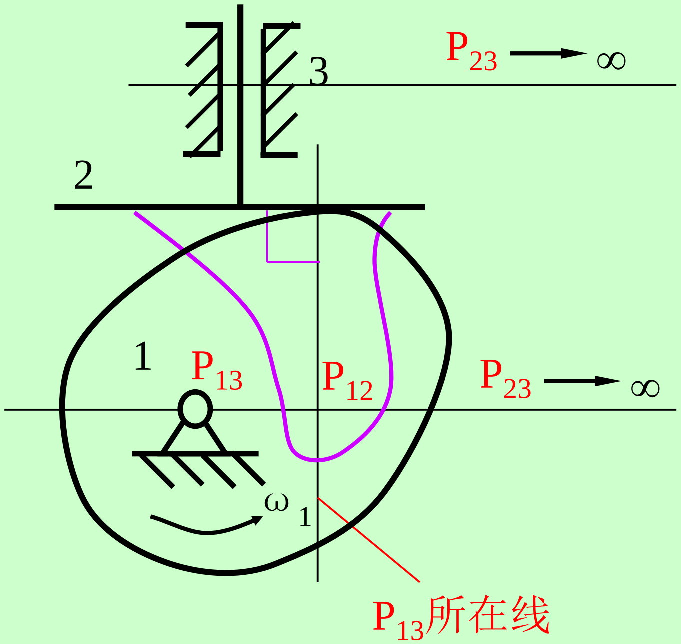
平移法：组成移动副两构件的瞬心线可以垂直于导路线随意平移。



(3) 滑动兼滚动的高副机构(齿轮、凸轮机构)

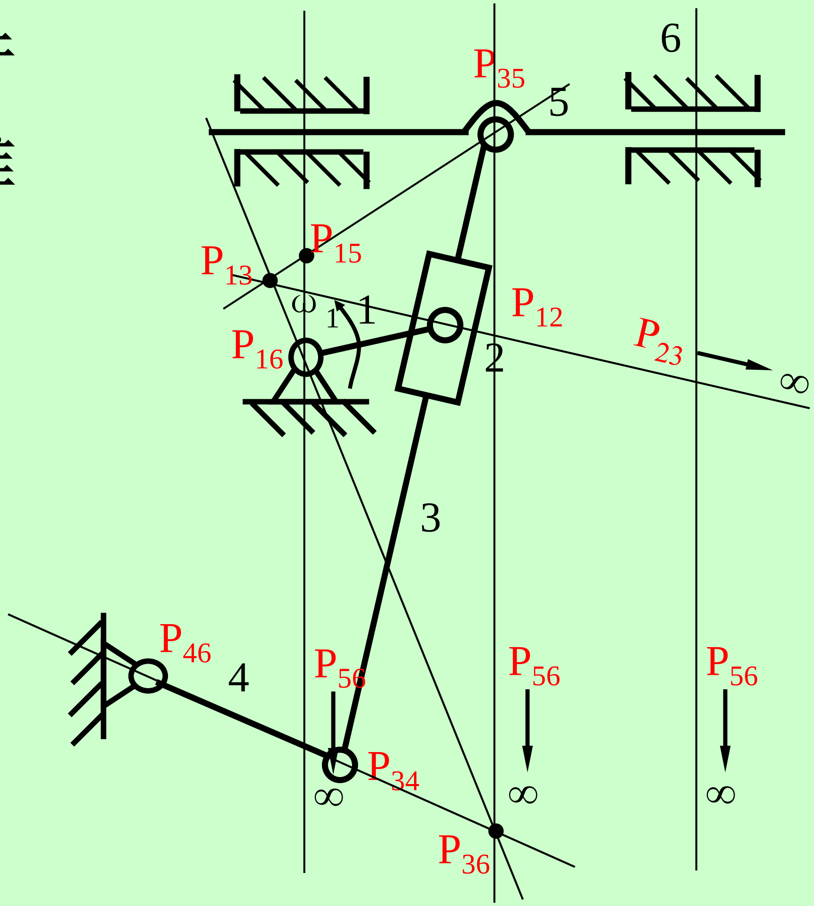
例：已知各构件的尺寸、凸轮的角速度ω_1求推杆速度v_3 。

$$v_2 = v^2_{P_{12}} = v^1_{P_{12}} = \overline{P_{12}P_{13}} \times \omega_1$$



例：已知图示六杆机构各构件的尺寸、凸轮的角速度ω_1求推杆速度v_5。

$$v_5 = v_{P_{15}} = \overline{P_{16}P_{15}} \times \omega_1$$

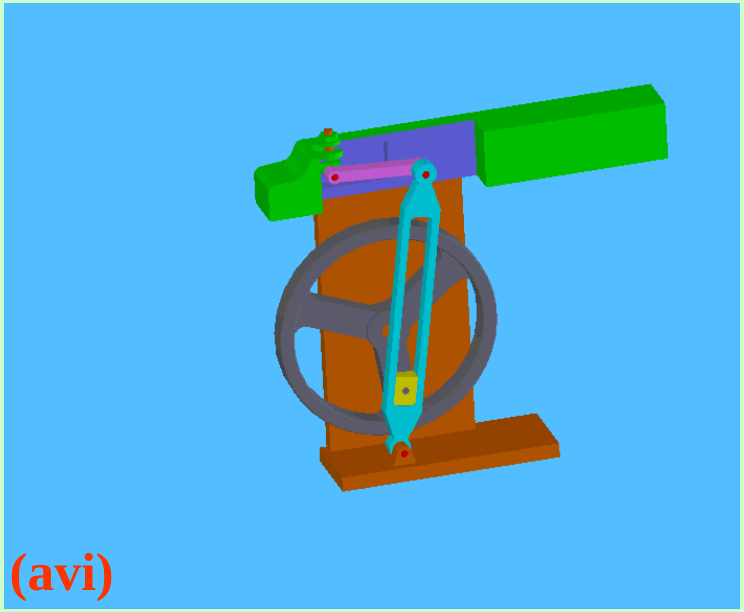


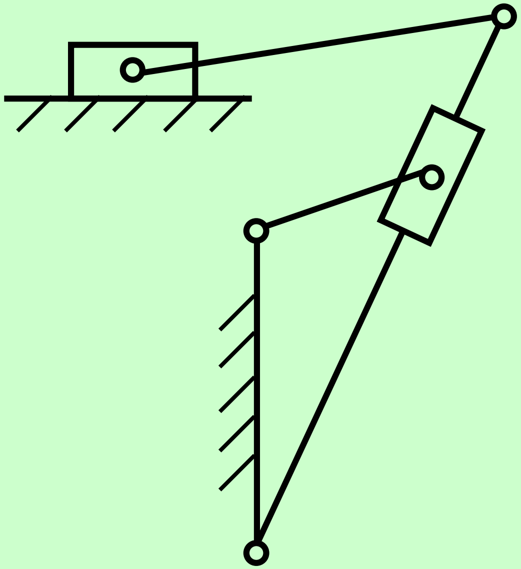
三、速度、加速度分析中的矢量方程图解法

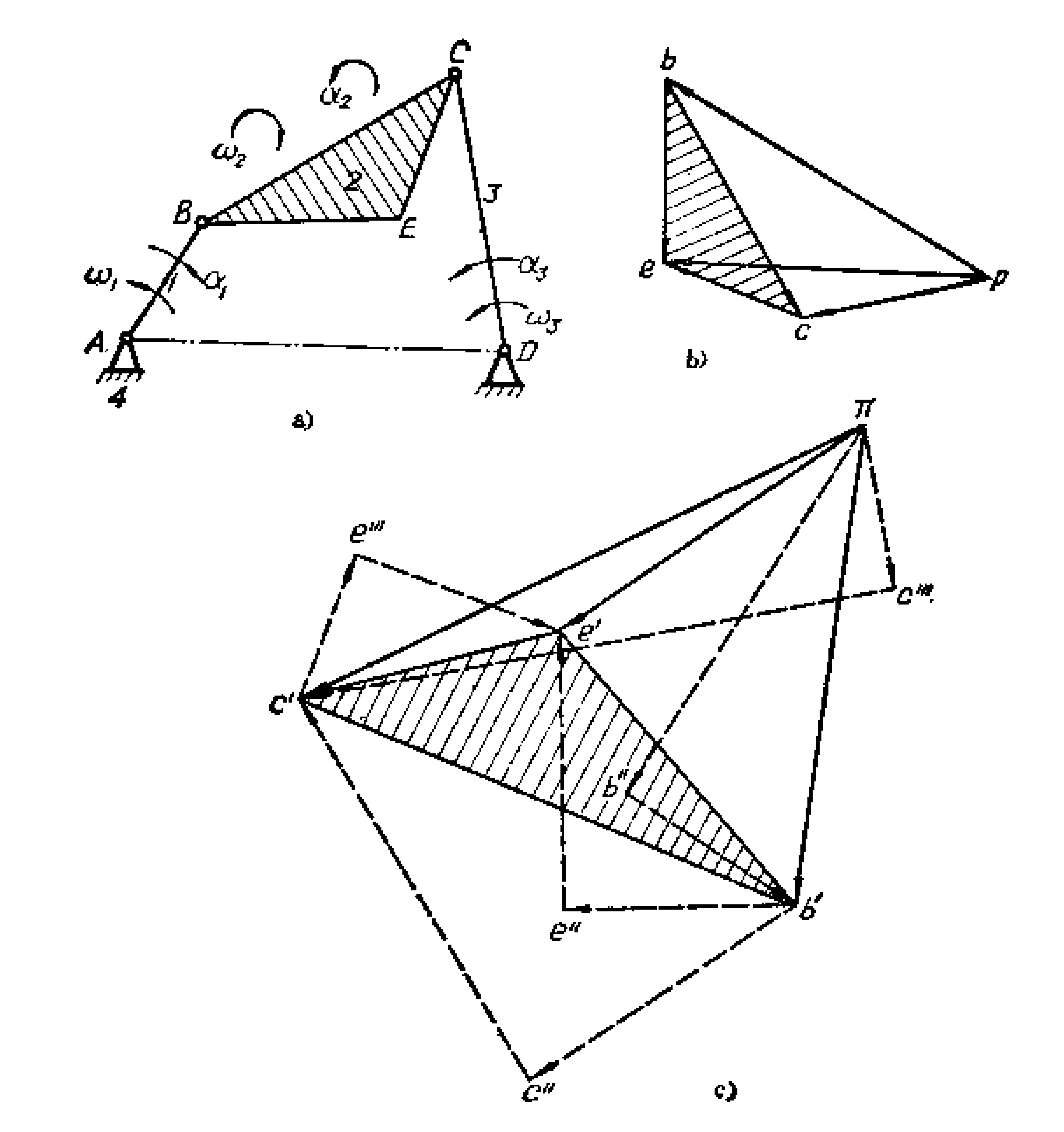
1. 矢量方程图解法的基本原理和方法

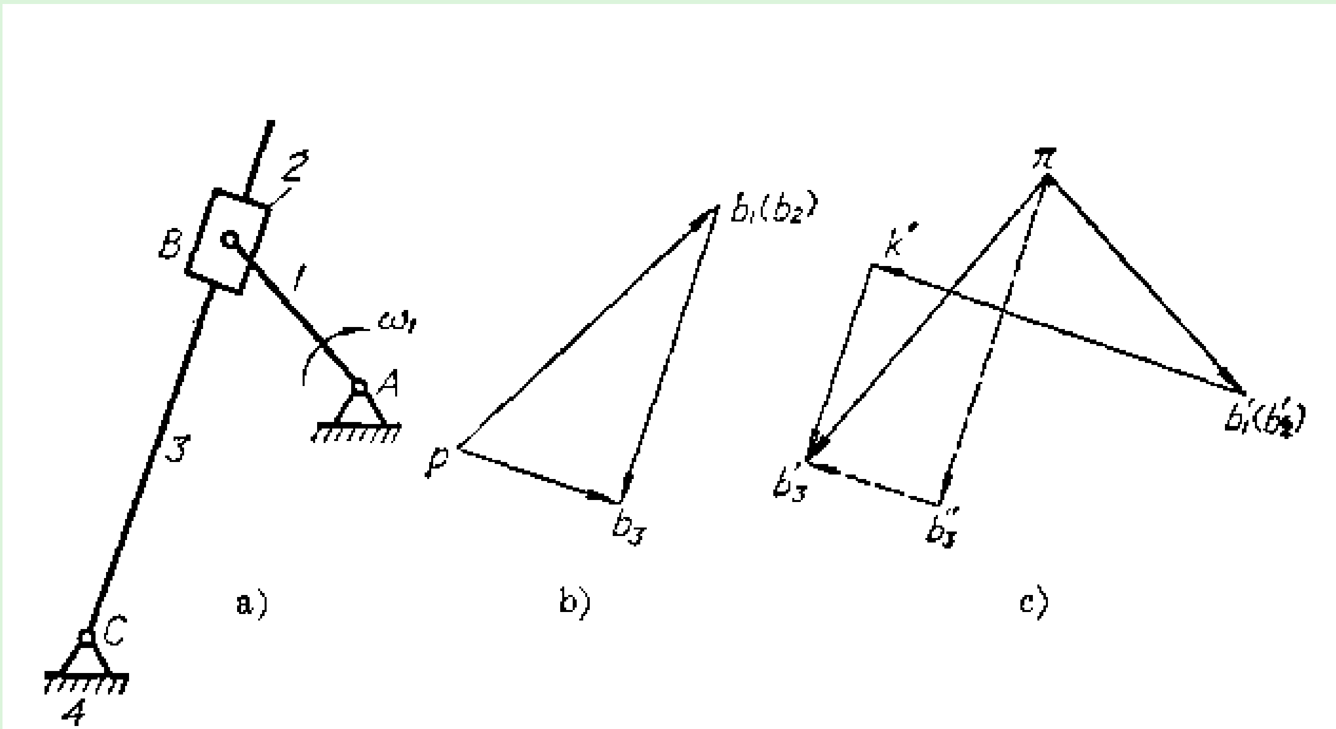
机构中运动传递的两种情况：

- ◆ 不同构件重合点；
- ◆ 同一构件不同点。





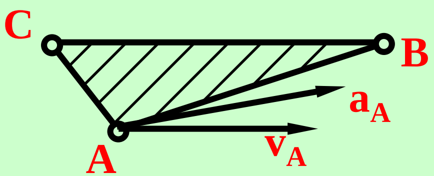

C
α_2
ω_2
2
3
B
E
ω_1
1
α_1
α_3
ω_3
A
D
4
a)
b
e
p
c
b)
π
e'''
c'''
e'
c'
b''
b'
e''
c''
c)


2
B
1
ω_1
A
3
C
4
a)
p
$b_1(b_2)$
b_3
b)
π
k'
$b_1'(b_2')$
b_3'
b_3''
c)

(1) 同一构件上两点间的速度及加速度的关系

由理论力学知，刚体上任一点B的运动可以认为是随同该构件上另一任意点A的平动和相对该点转动的合成。

速度矢量方程 $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$



	$\vec{V}_B$	$\vec{V}_A$	$\vec{V}_{BA}$
大小	绝对	牵连	相对
方向		平动	转动

式中：$V_{BA} = l_{BA}\omega$，方向垂直于AB连线，指向同ω。

加速度矢量方程 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^\tau_{BA}$

	$\vec{a}_B$	$\vec{a}_A$	$\vec{a}_{BA}$	$\vec{a}^n_{BA}$	$\vec{a}^\tau_{BA}$
大小	绝对	牵连	相对	向心	切向
方向		平动	转动		

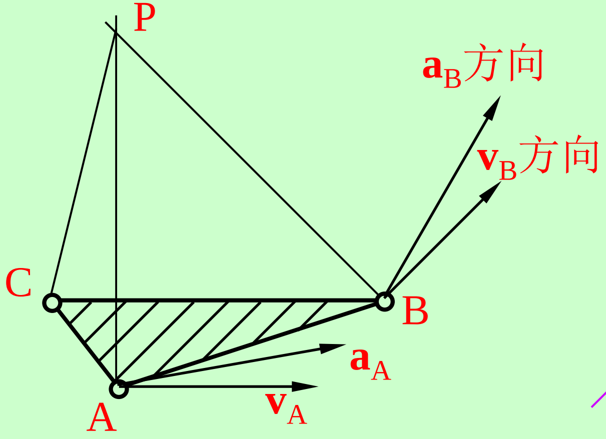
式中：$a^n_{BA} = l_{BA}\omega^2$，方向B→A；$a^\tau_{BA} = l_{BA}\varepsilon$ 方向垂直于AB连线，指向同ε。

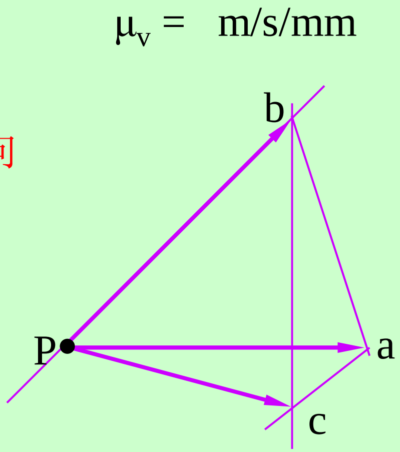
注意：$\vec{a}^n_{BA}$与$\vec{a}^\tau_{BA}$始终相互垂直。

速度分析：如图：已知构件尺寸，点A的速度和加速度以及点B的速度方向和加速度方向

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

	$\vec{V}_B$	$\vec{V}_A$	$\vec{V}_{BA}$
大小	?	√	?
方向	√	√	⊥BA





速度多边形

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA} = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$$

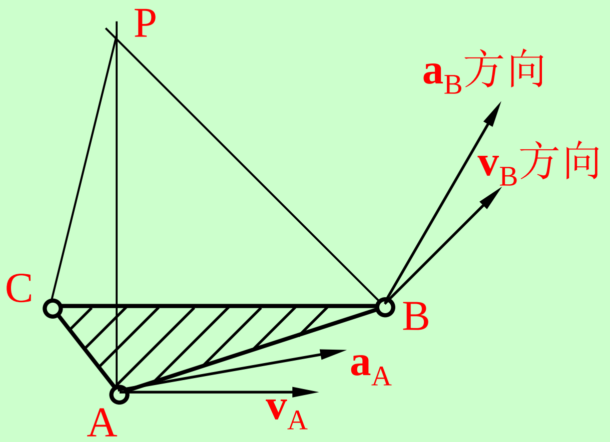
	$\vec{V}_C$	$\vec{V}_A$	$\vec{V}_{CA}$	$\vec{V}_B$	$\vec{V}_{CB}$
大小	?	√	?	√	?
方向	?	√	⊥CA	√	⊥CB

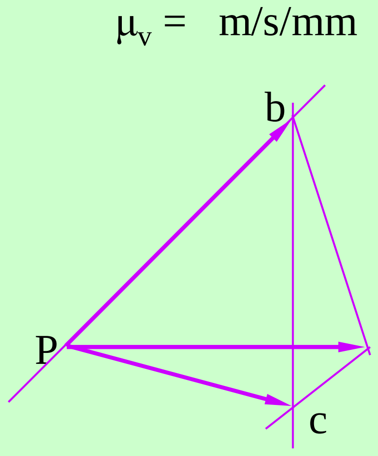
速度多边形特征如下：

1) 连接P点和任一点的向量代表该点在机构图中同名点的绝对速度，其方向由P点指向该点；

2) 连接其它任意两点的向量代表在机构中同名点间的相对速度，其指向与相对下标相反；

3) 点P—极点，代表该机构上速度为零的点(绝对速度瞬心P)；



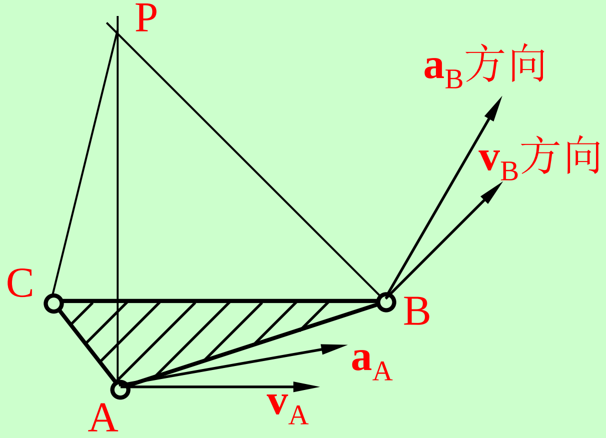


速度多边形

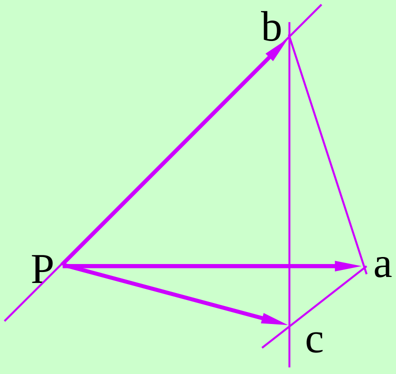
4) 因为ΔABC相似于Δabc，故图形abc称为图形ABC的**速度影像**。

说明：

- abc的顺序与ABC相同；
- 已知构件上任意两点速度，可直接利用影像原理得到该构件上任一点的速度；
- 速度影像原理只能用在同一构件上。

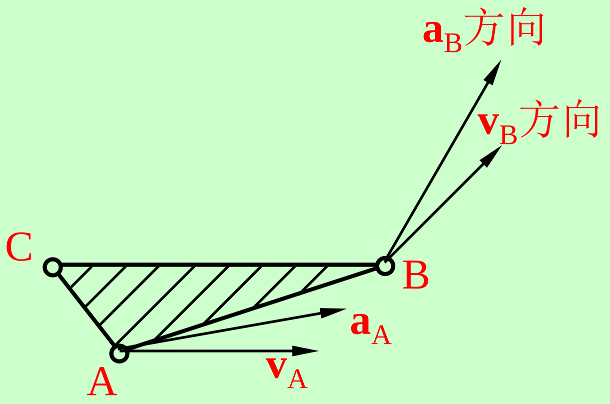


$\mu_v =$ m/s/mm



速度多边形

加速度分析：



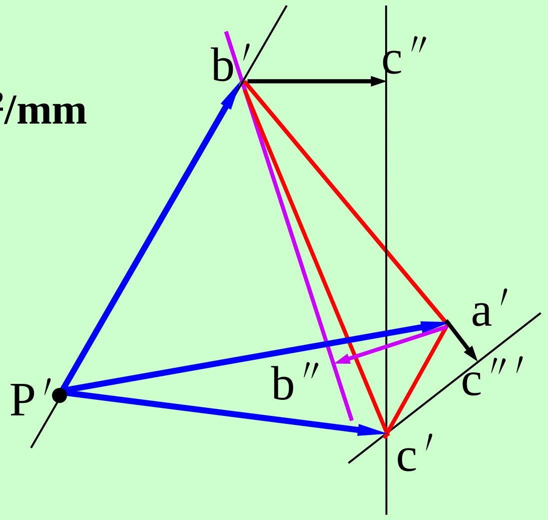
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^\tau_{BA}$$

	$\vec{a}_B$	$\vec{a}_A$	$\vec{a}^n_{BA}$	$\vec{a}^\tau_{BA}$
大小	?	√	√	?
方向	√	√	B→A	⊥AB

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{CA} + \vec{a}^\tau_{CA} = \vec{a}_B + \vec{a}^n_{CB} + \vec{a}^\tau_{CB}$$

	$\vec{a}_C$	$\vec{a}_A$	$\vec{a}^n_{CA}$	$\vec{a}^\tau_{CA}$	$\vec{a}_B$	$\vec{a}^n_{CB}$	$\vec{a}^\tau_{CB}$
大小	?	√	√	?	√	√	?
方向	?	√	C→A	⊥CA	√	C→B	⊥CB

$\mu_a =$ m/s^2/mm



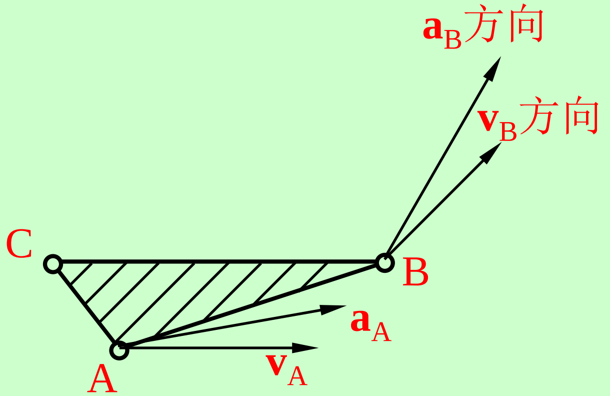
加速度多边形

加速度多边形特征如下：

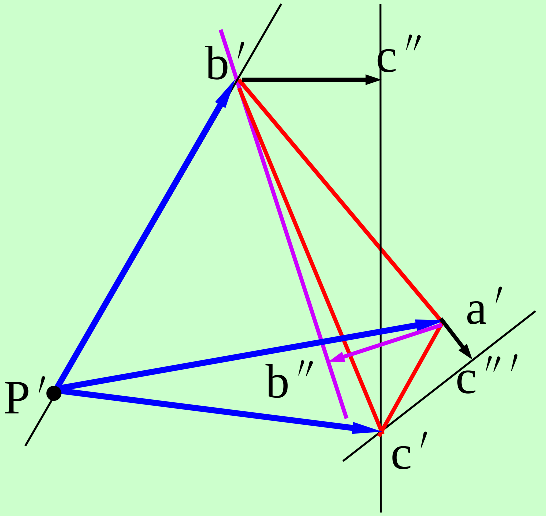
1) 连接P′点和任一点的向量代表该点在机构图中同名点的绝对速度，其方向由P点指向该点；

2) 连接其它任意两点的向量代表在机构中同名点间的相对速度，其指向与相对下标相反；

3) 点P′—极点，代表该机构上加速度为零的点(绝对速度瞬心P)；

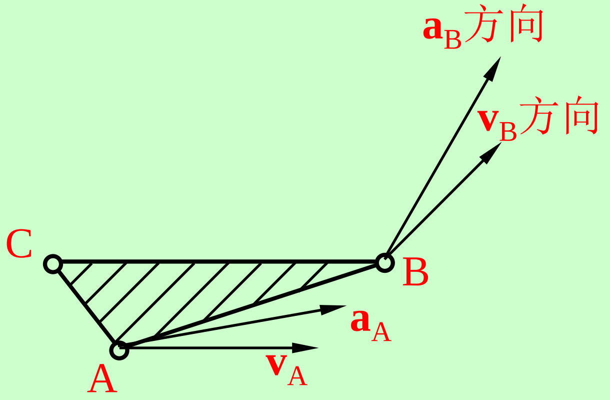


$\mu_a =$ m/s^2/mm



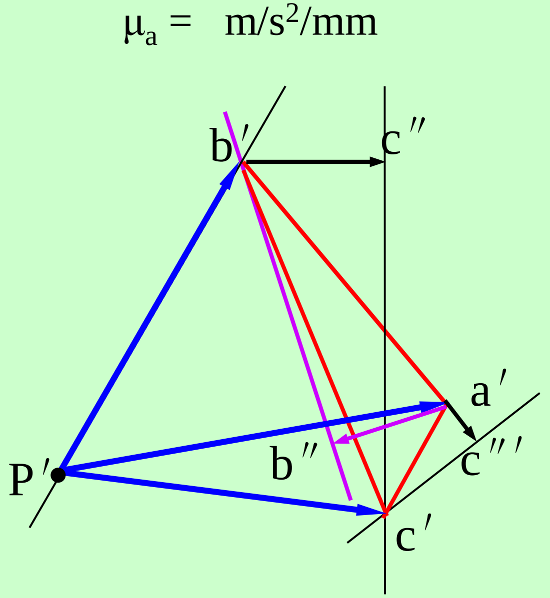
加速度多边形

4) 因为ΔABC∽Δa′b′c′，故图形a′b′c称为图形ABC的加速度影像。



说明：

- **a′b′c′的顺序与ABC相同；**
- **已知构件上任意两点加速度，可直接利用影像原理得到该构件上任一点的加速度；**
- **加速度影像原理只能用在同一构件上。**



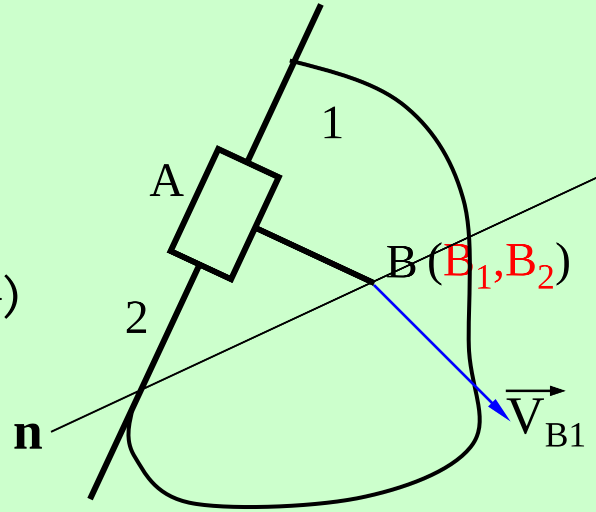
加速度多边形

(2) 组成移动副两构件上的重合点的速度和加速度

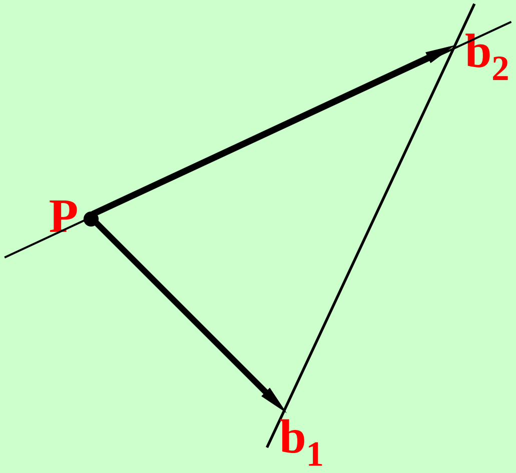
a. 速度分析

$$\vec{V}_{B2} = \vec{V}_{B1} + \vec{V}_{B2B1}$$

大小	绝对	牵连	相对
方向		平动	平动(//导路)



nn为B_2点的速度方向线



b. 加速度分析

● 加速度矢量方程

$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1} + \vec{a}_{B2B1} = \vec{a}_{B1} + \vec{a}^{k}_{B2B1} + \vec{a}^{r}_{B2B1}$$

大小	绝对	牵连	相对	牵连	哥氏	相对移动
方向				平动(⊥导路)		平动(//导路)

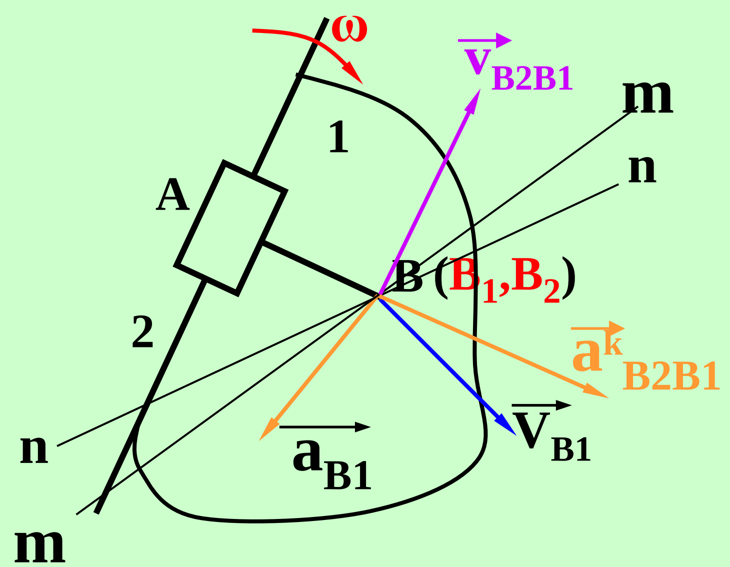
式中：$\vec{a}^{k}_{B2B1} = 2\vec{\omega} * \vec{v}_{B2B1}$

即，大小：$a^{k}_{B2B1} = 2\omega * v_{B2B1}$

方向：右手法则

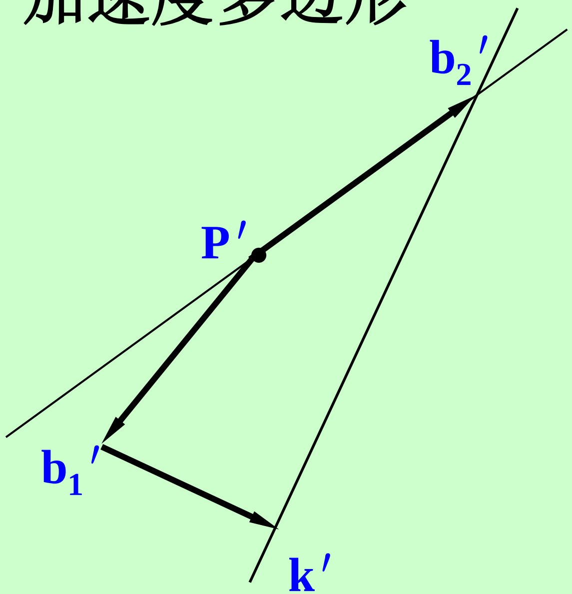
或相对速度沿ω方向转动90°

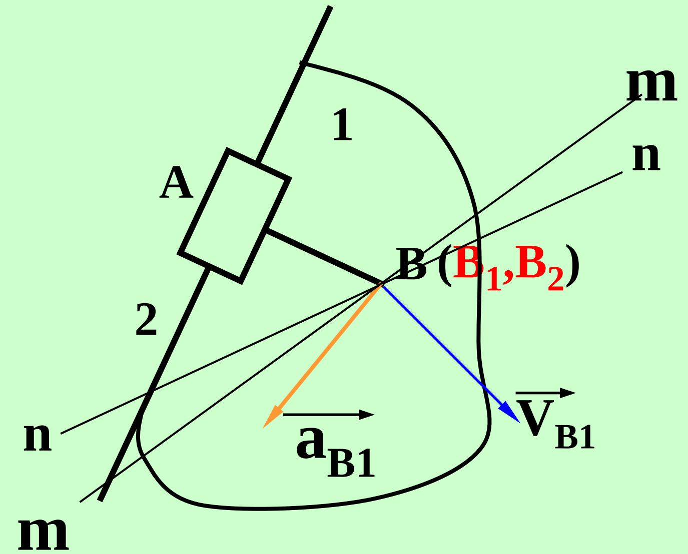
法。



mm为B_2加速度方向线

● 加速度多边形





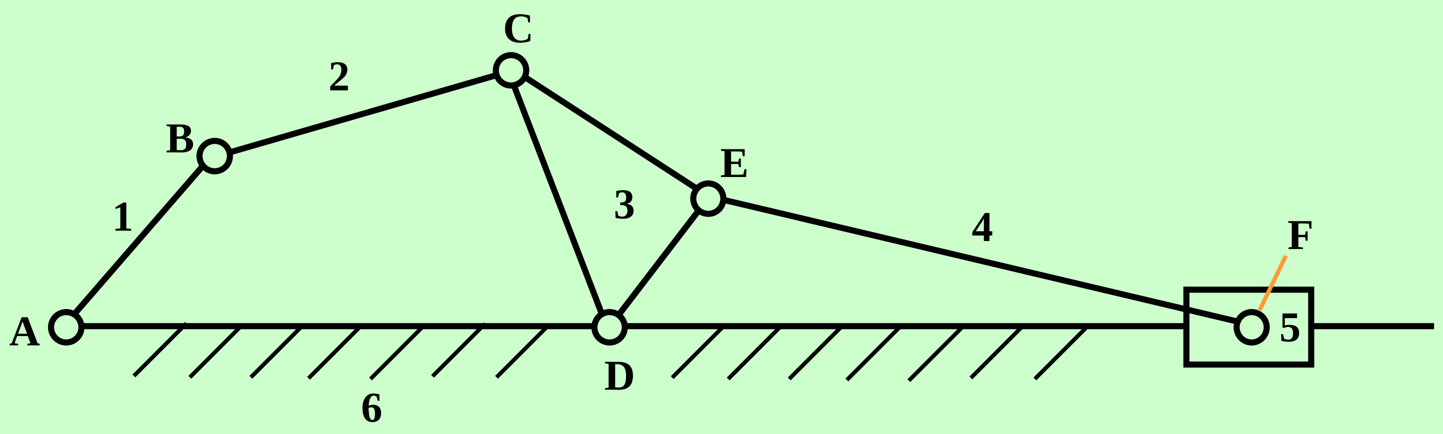
$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1} + \vec{a}_{B2B1} = \vec{a}_{B1} + \vec{a}^{k}_{B2B1} + \vec{a}^{r}_{B2B1}$$

大小	绝对	牵连	相对	牵连	哥氏	相对移动
方向					平动(⊥导路)	平动(//导路)

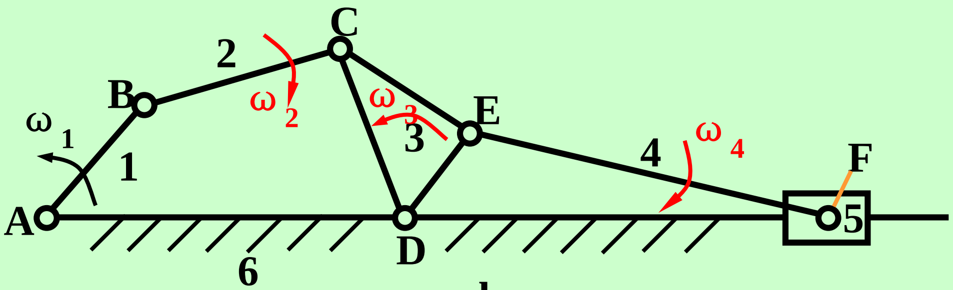
注意：$\vec{a}^{k}_{B2B1}$与$\vec{a}^{r}_{B2B1}$始终相互垂直。

四、矢量方程图解法的应用举例

例1. 图示为一摆动式运输机的机构运动简图。设已知机构各构件尺寸。原动件1的角速度ω_1为等速回转。求在图示位置$\vec{V}_F$、$\vec{a}_F$、ω_2、ω_3、ω_4、ε_2、ε_3、ε_4。



1. 速度分析



(1) 求V_B $(=l_{AB}\times\omega_1=\overline{Pb}\times\mu_v\times\omega_1)$

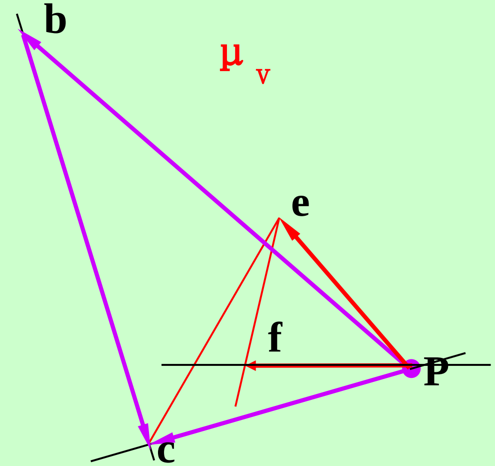
(2) 求V_C

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$$

	$\vec{V}_C$	$\vec{V}_B$	$\vec{V}_{CB}$
大小	?	√	?
方向	⊥CD	√	⊥BC

V_C ⇨ $\omega_2=V_{CB}/l_{BC}=\overline{bc}\times\mu_v/l_{BC}$

⇨ $\omega_3=V_C/l_{CD}=\overline{Pc}\times\mu_v/l_{CD}$



(3) 求V_E

$$V_E=l_{ED}\times\omega_3=\overline{Pe}\times\mu_v$$

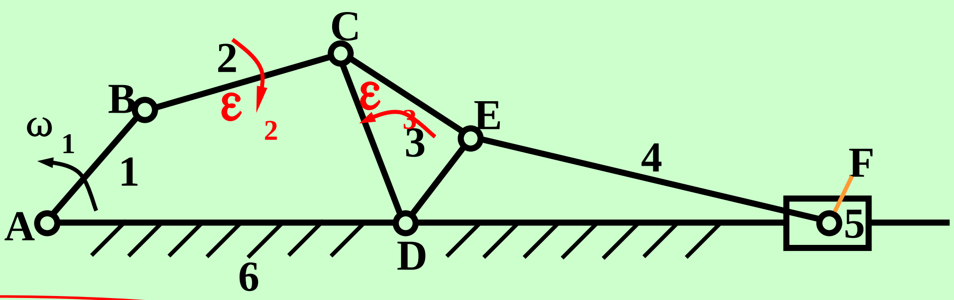
(4) 求V_F

$$\vec{V}_F = \vec{V}_E + \vec{V}_{FE}$$

	$\vec{V}_F$	$\vec{V}_E$	$\vec{V}_{FE}$
大小	?	√	?
方向	水平	√	⊥EF

$$\omega_4=V_{FE}/l_{FE}=\overline{ef}\times\mu_v/l_{FE}$$

2. 加速度分析



(1) 求a_B(=$l_{AB}\times\omega^2_1=\overline{Pb}\times\mu_v\times\omega^2_1$)

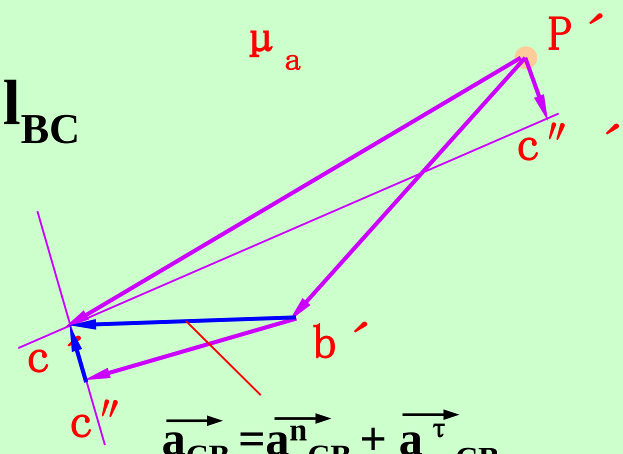
(2) 求a_C

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^n_{CB} + \vec{a}^\tau_{CB} = \vec{a}^n_C + \vec{a}^\tau_C$$

	$\vec{a}_C$	$\vec{a}_B$	$\vec{a}^n_{CB}$	$\vec{a}^\tau_{CB}$	$\vec{a}^n_C$	$\vec{a}^\tau_C$
大小	?	√	$l_{BC}\omega^2_2$	?	$l_{CD}\omega^2_3$	?
方向	?	B→A	C→B	⊥BC	C→D	⊥CD

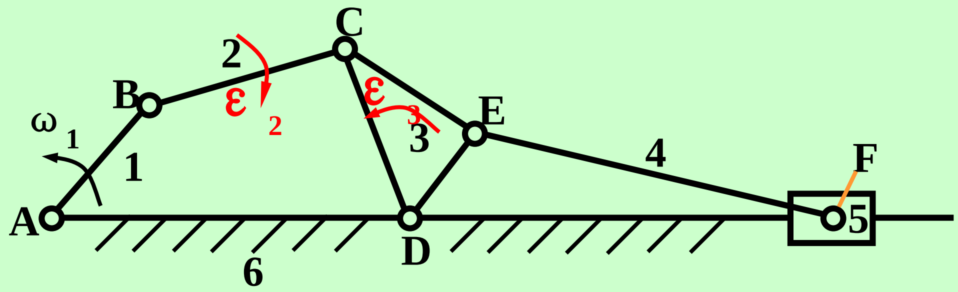
$\vec{a}_C$ ⇨ $\varepsilon_2 = a^\tau_{CB}/l_{BC} = \overline{c''c'}\times\mu_a/l_{BC}$

⇘ $\varepsilon_3 = a^\tau_C/l_{CD} = \overline{P'c'}\times\mu_a/l_{CD}$



$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}^n_{CB} + \vec{a}^\tau_{CB}$$

(3) 求a_E

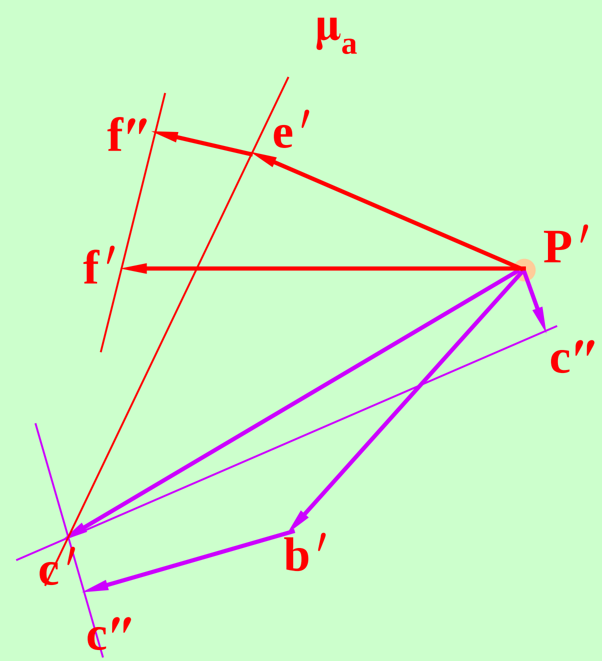


$$a_E = l_{ED} \times \varepsilon_3 = \overline{P'e'} \times \mu_a$$

(4) 求a_F

$$\vec{a}_F = \vec{a}_E + \vec{a}^{\,n}_{FE} + \vec{a}^{\,\tau}_{FE}$$

大小	?	√	$l_{ef}\omega^2_4$	?
方向	水平	√	E→F	⊥EF



$$\varepsilon_4 = a_{FE}/l_{EF} = \overline{f''f'} \times \mu_a / l_{EF}$$

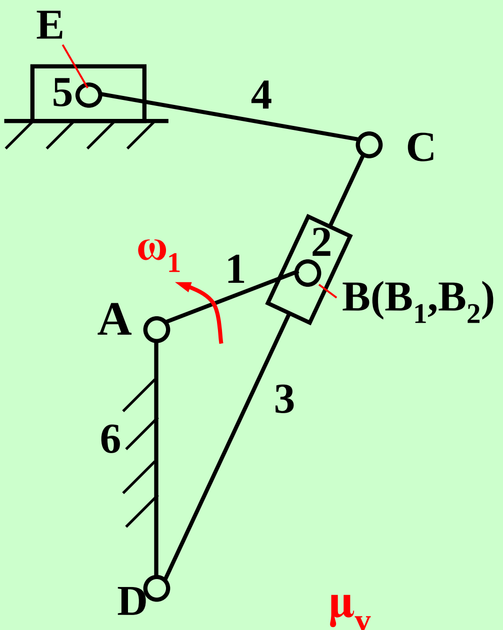
例2：已知各构件尺寸和构件1匀速转动，求V_5、a_5 。

解：1. 速度分析

(1) 求V_{B2}

$$\vec{V}_{B2} = \vec{V}_{B1} + \vec{V}_{B2B1}$$

大小	?	√	?
方向	⊥BD	√	//BD

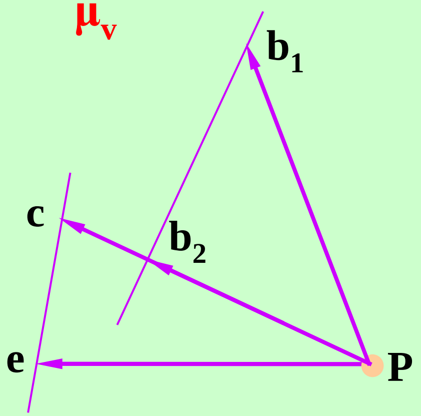


(2) 求V_C

(3) 求V_E

$$\vec{V}_E = \vec{V}_C + \vec{V}_{EC}$$

大小	?	√	?
方向 水平		√	⊥EC

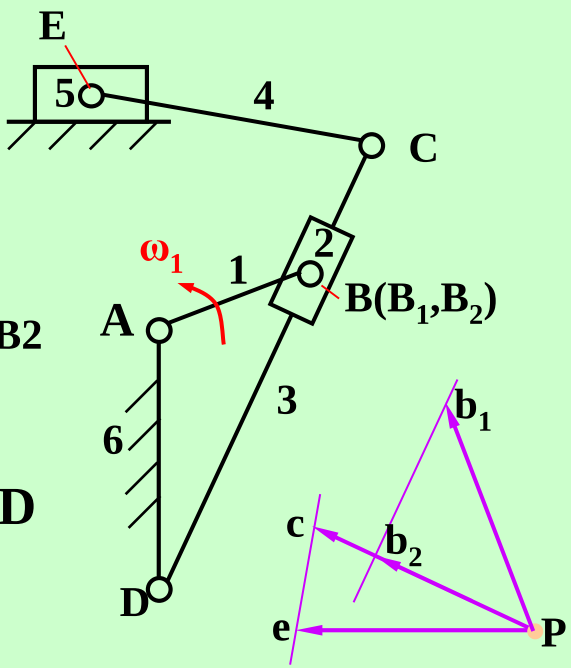


2. 加速度分析

(1) 求a_{B2}

$$\vec{a}_{B2}=\vec{a}_{B1}+\vec{a}^{k}_{B2B1}+\vec{a}^{r}_{B2B1}=\vec{a}^{n}_{B2}+\vec{a}^{\tau}_{B2}$$

	a_{B2}	a_{B1}	a^{k}_{B2B1}	a^{r}_{B2B1}	a^{n}_{B2}	a^{τ}_{B2}
大小	?	√	$2\omega_3 v_{B3B2}$	?	√	?
方向	?	B→A	√	//BD	B→D	⊥BD

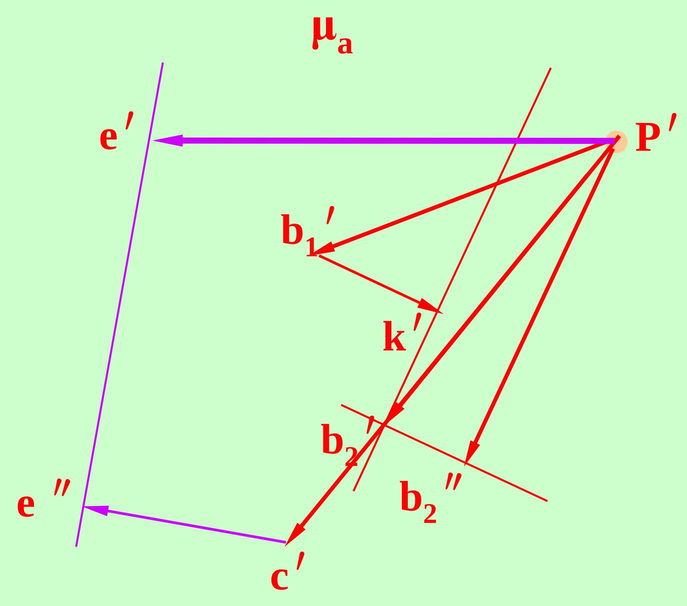


(2) 求a_C

(3) 求a_E

$$\vec{a}_{E}=\vec{a}_{C}+\vec{a}^{n}_{EC}+\vec{a}^{\tau}_{EC}$$

	a_E	a_C	a^{n}_{EC}	a^{τ}_{EC}
大小	?	√	√	?
方向	水平	√	√	⊥EC



作业：

题2-1a)和d)、题2-7、补充课堂练习册题

本章结束