# 第三篇 《动力学》

# 理论力学

## 第十三章　达朗贝尔原理(动静法)

本章介绍动力学的一个重要原理——达朗贝尔原理。

应用这一原理，可以将动力学问题从形式上转化为静力学问题，从而根据关于平衡的理论来求解。这种用静力学解答动力学问题的方法，也称为动静法。

# 第十三章　达朗贝尔原理 (动静法)

§ 13–1　惯性力 ·质点的达朗贝尔原理

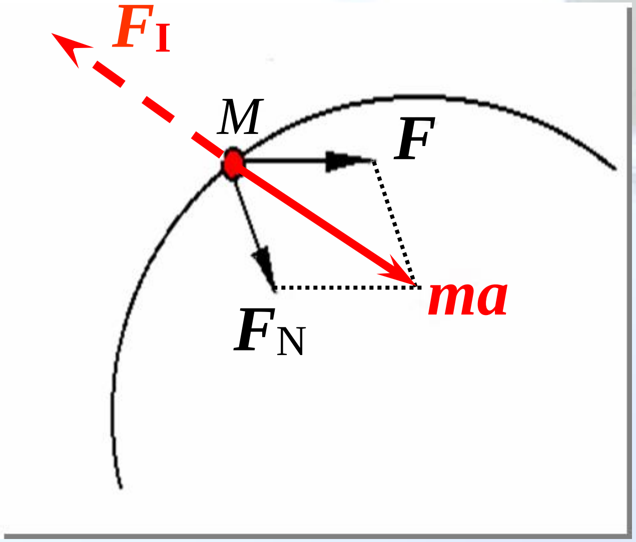
§ 13–2　质点系的达朗贝尔原理

§ 13–3　刚体惯性力系的简化

## §13-1　惯性力 ·质点的达朗贝尔原理

设质点$M$，质量为$m$，受主动力$F$ 和约束反力$F_N$ 。

根据质点动力学第二定律：




$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{F}_N$$

可改写成：$\bar{F} + \bar{F}_N - m\bar{a} = 0$

令：$\bar{F}_I = -m\bar{a}$

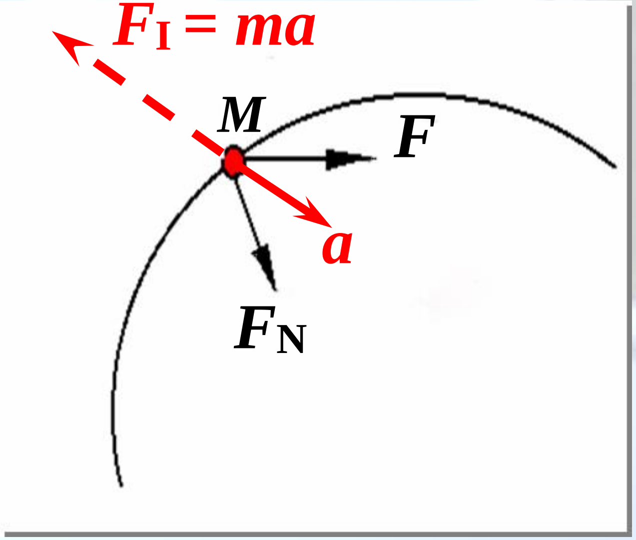
则有：$\bar{F} + \bar{F}_N + \bar{F}_I = 0$

假想$F_I$是一个力，上式在形式上是一个平衡方程。

$F_I$ 称为质点的惯性力（**Force of Inertia**），大小等于质点的质量与加速度的乘积，方向与质点加速度的方向相反。

## 质点的达朗贝尔原理：

如果在质点上除了作用有真实的主动力和约束力外，再假想地加上惯性力，则这些力在形式上组成一平衡力系。

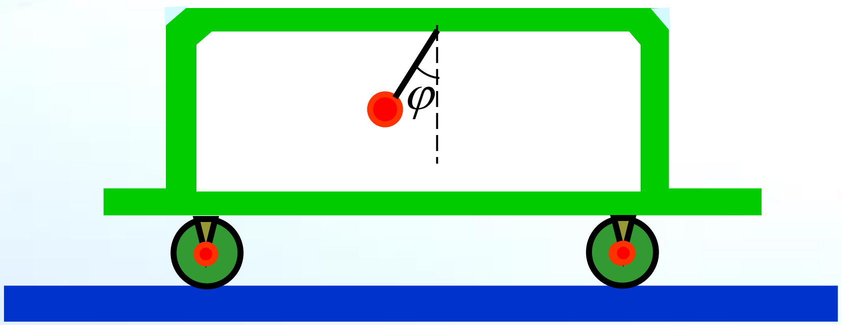


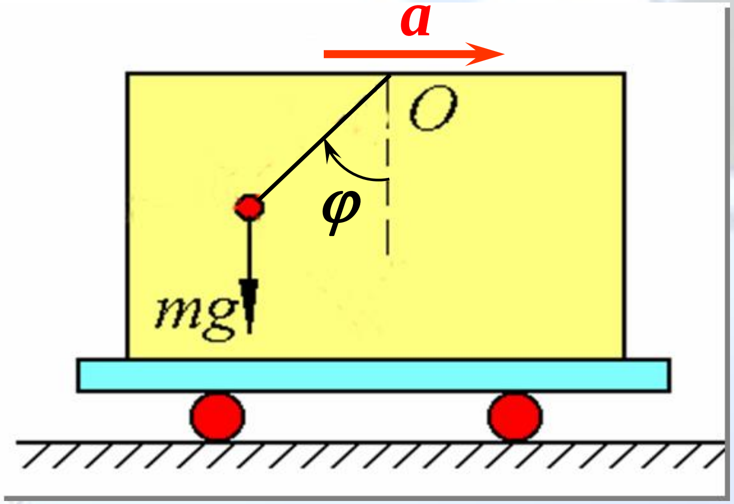

$$\overline{F} + \overline{F}_N + \overline{F}_I = 0$$

[注] 质点惯性力不是作用在质点上的真实力，而且质点并非处于平衡状态。

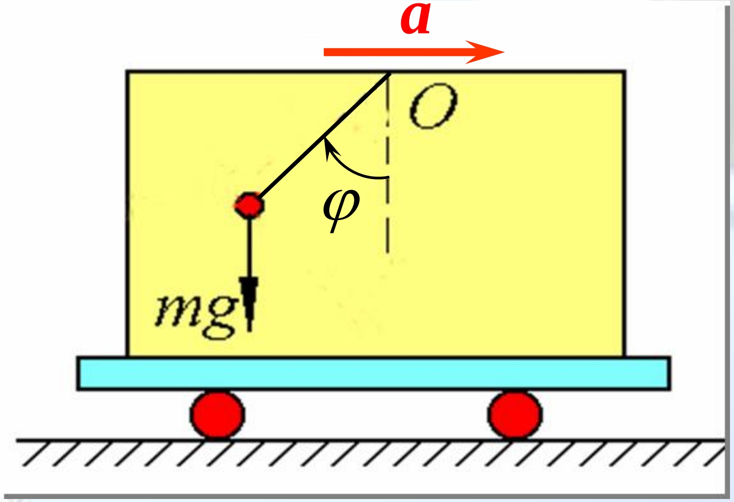
该方程对动力学问题来说只是形式上的平衡，并没有改变动力学问题的实质。采用动静法解决动力学问题的最大优点，可以利用静力学提供的解题方法，给动力学问题一种统一的解题格式。

[例1] 列车在水平轨道上行驶，车厢内悬挂一单摆，当车厢向右作匀加速运动时，单摆左偏角度$\varphi$，相对于车厢静止。求车厢的加速度。



[例1] 列车在水平轨道上行驶，车厢内悬挂一单摆，当车厢向右作匀加速运动时，单摆左偏角度$\varphi$，相对于车厢静止。求车厢的加速度。

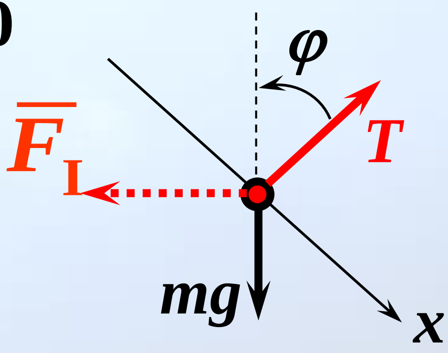



解：选单摆的摆锤为研究对象

虚加惯性力

$$\bar{F}_{\mathrm{I}} = -m\bar{a} \qquad (\text{或} F_{\mathrm{I}} = ma)$$

由动静法, 有




$$\sum F_x = 0, \quad mg \cdot \sin\varphi - F_{\mathrm{I}} \cos\varphi = 0$$

将 $F_{\mathrm{I}} = ma$ 代入

解得 $a = g \cdot \tan\varphi$

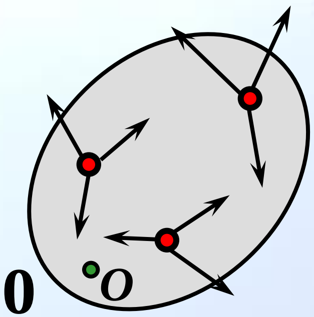
摆式加速计的原理。

## §13-2 质点系的达朗贝尔原理

设有一质点系由$n$个质点组成，对每一个质点，有

$$\overline{F}_i+\overline{F}_{\mathrm{N}i}+\overline{F}_{\mathrm{I}i}=0 \qquad (\ i=1,2,\ldots\ldots,n\ )$$

对整个质点系，作用于质点系上所有的主动力、约束反力与假想地加在质点系上各质点的惯性力，在形式上组成一平衡力系。这就是质点系的达朗贝尔原理。可用方程表示为：

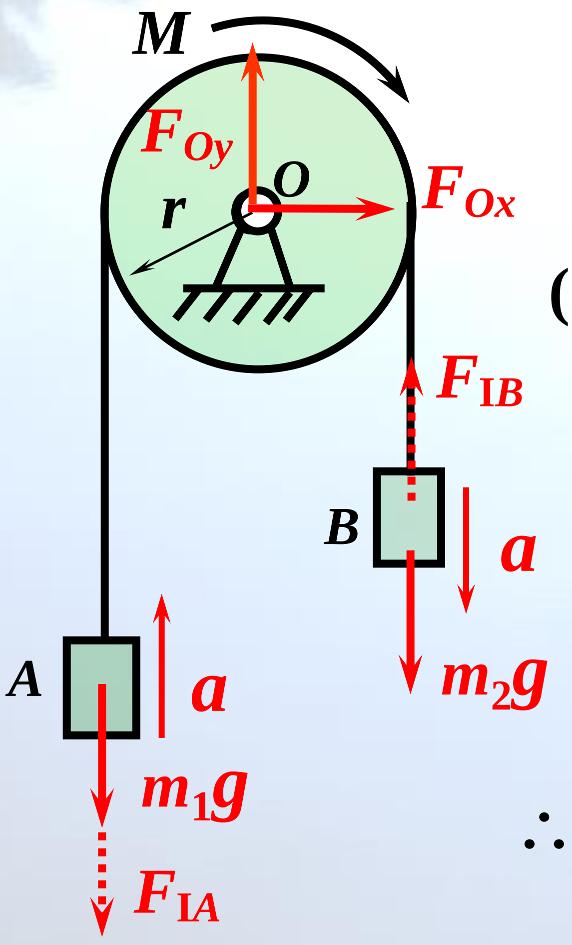



$$\begin{cases}\sum\overline{F}_i+\sum\overline{F}_{\mathrm{N}i}+\sum\overline{F}_{\mathrm{I}i}=0\\ \sum\overline{M}_O(\overline{F}_i)+\sum\overline{M}_O(\overline{F}_{\mathrm{N}i})+\sum\overline{M}_O(\overline{F}_{\mathrm{I}i})=0\end{cases}$$

如将质点系受力按内力、外力划分，$\because \sum\overline{F}_i^{(i)}=0,\ \sum\overline{M}_O(\overline{F}_i^{(i)})=0$

则：
$$\begin{cases}\sum\overline{F}_i^{(e)}+\sum\overline{F}_{\mathrm{I}i}=0\\ \sum\overline{M}_O(\overline{F}_i^{(e)})+\sum\overline{M}_O(\overline{F}_{\mathrm{I}i})=0\end{cases}$$

[例2] 滑轮的半径为$r$，物块$A$、$B$的质量分别为$m_1$、$m_2$，滑轮上作用一力偶$M$，设绳子不可伸长，不计绳子和滑轮的质量，求物块$A$的加速度和轴承$O$的约束反力。




解：取整体为研究对象

惯性力：$F_{IA}=m_1 a$，　$F_{IB}=m_2 a$，

$$\sum M_O(\bar{F})=0\ ,$$

$$(m_1 g+F_{IA})\cdot r+(F_{IB}-m_2 g)\cdot r-M=0$$

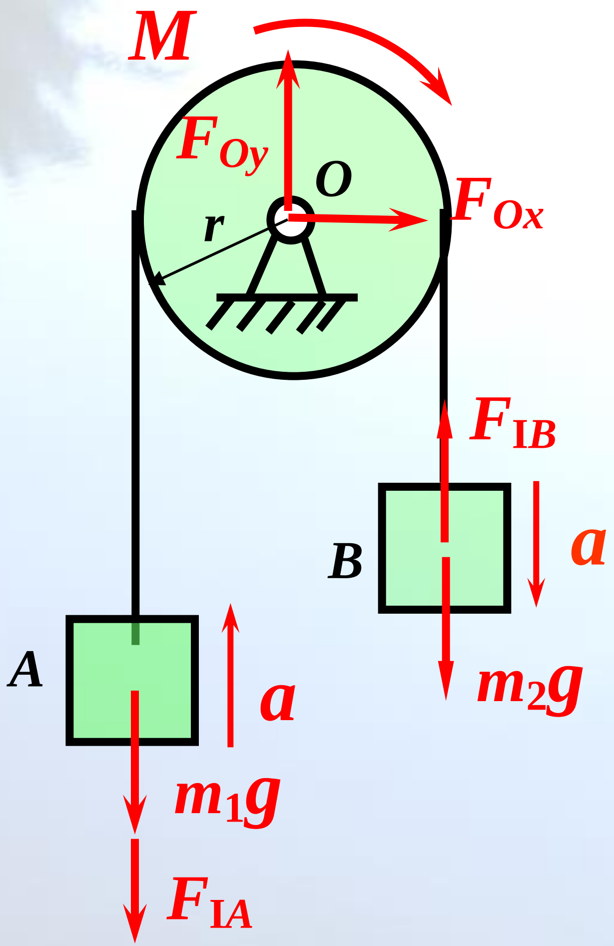
$$\therefore a=\frac{M+(m_2-m_1)gr}{(m_1+m_2)r}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ox}=0,$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Oy}-m_1 g-F_{IA}-m_2 g+F_{IB}=0,$$

$$\therefore\ F_{Oy}=m_1 g+F_{IA}+m_2 g-F_{IB}$$

$$=(m_1+m_2)g+(m_1-m_2)a$$




在本题中如果要考虑滑轮的质量，则如何计算？

## § 13-3　刚体惯性力系的简化

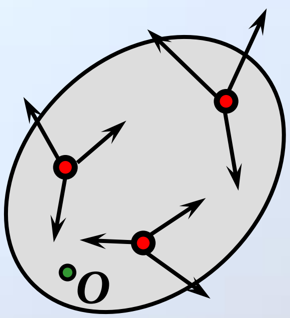
应用达朗贝尔原理求解质点系动力学问题必须给各质点虚加上它的惯性力。

因为刚体有无限个质点，在每个质点上加惯性力是不可能的，为了应用方便，按照静力学中力系的简化方法将刚体的惯性力系进行简化，这样在解题时就可以直接施加其简化结果，使动静法切实可行。

$$m\bar{a}_C = \sum \bar{F}_i^{(e)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)})$$

$$\begin{cases} \sum \bar{F}_i^{(e)} + \sum \bar{F}_{\mathrm{I}i} = 0 \\ \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)}) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{\mathrm{I}i}) = 0 \end{cases}$$




惯性力的主矢：$\bar{F}_{\mathrm{IR}} = \sum \bar{F}_{\mathrm{I}i} = -\sum \bar{F}_i^{(e)} = -m\bar{a}_C$

惯性力的主矩：$M_{\mathrm{I}O} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_{\mathrm{I}i}) = -\sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{(e)}) = -\dfrac{\mathrm{d}\bar{L}_O}{\mathrm{d}t}$

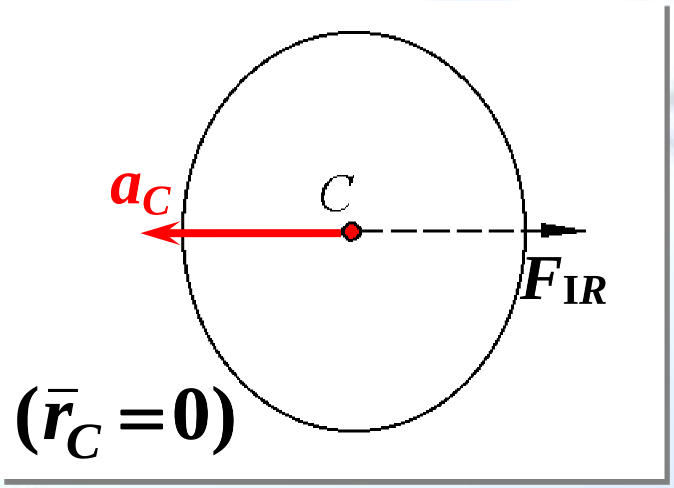
常见的刚体的运动有平动、定轴转动和平面运动

## 一、刚体作平动

$$\boxed{\bar{F}_{\mathrm{I}R} = -m\bar{a}_C}$$

$$\because \bar{L}_C = \bar{r}_C \times m\bar{v}_C \equiv 0$$

$$\therefore \ \bar{M}_{\mathrm{I}C} = 0$$



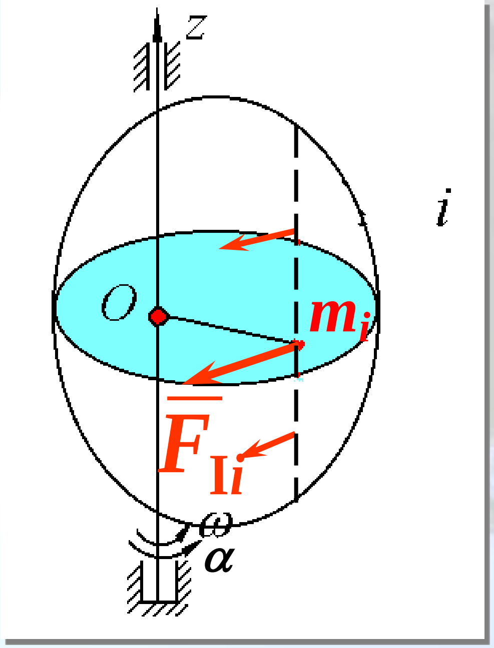

结论：平动刚体的惯性力系可以简化为通过质心的合力，其大小等于刚体的质量与加速度的乘积，合力的方向与加速度方向相反。

$$M_{\mathrm{I}C} = -\frac{\mathrm{d}\bar{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

## 二、刚体绕定轴转动

设刚体有对称平面，且转轴垂直于该对称平面，如皮带轮、齿轮、砂轮等。

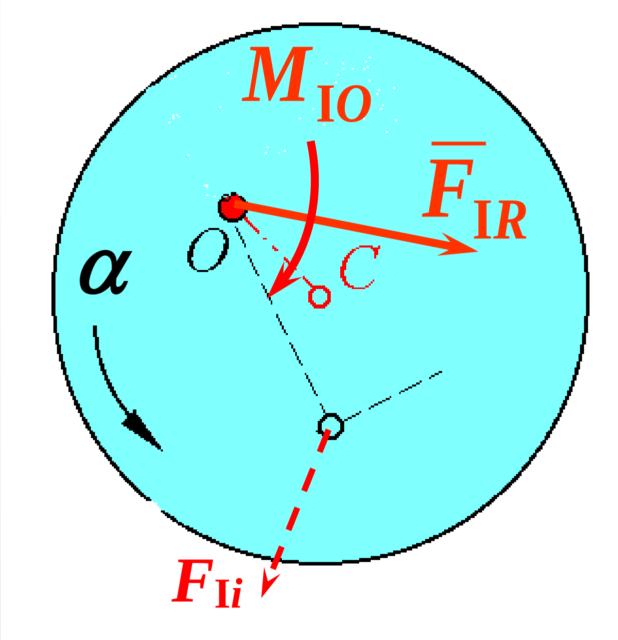
此惯性力系为空间力系，利用对称性可以简化为在对称平面内的平面力系。




向转轴z与对称平面的交点O点简化：

$$\bar{F}_{IR} = -m\bar{a}_C$$

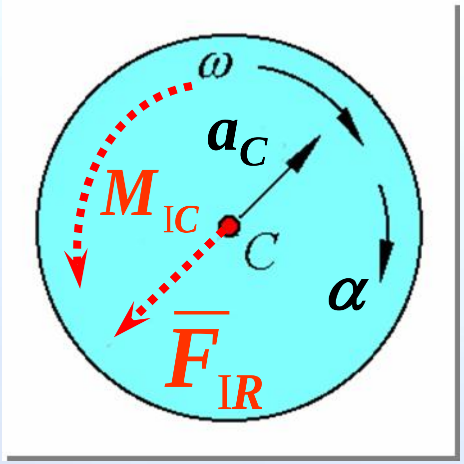
$$M_{IO} = -J_z\alpha$$



## 三、刚体作平面运动

假设刚体具有对称平面，并且平行于该平面作平面运动。此时，刚体的惯性力系可先简化为对称平面内的平面力系。

刚体平面运动可分解为随基点（质心*C*）的平动和绕基点的转动：




$$\bar{F}_{\mathrm{I}R} = -m\bar{a}_C$$

$$M_{\mathrm{I}C} = -J_C\alpha$$

## 达朗贝尔原理的应用

根据达朗贝尔原理，以静力学平衡方程的形式来建立动力学方程的方法，称为动静法。应用动静法既可求运动，例如加速度、角加速度；也可以求力，并且多用于已知运动，求质点系运动时的动约束反力。

应用动静法可以利用静力学建立平衡方程的一切形式上的便利。例如，矩心可以任意选取，二矩式，三矩式等等。因此当问题中有多个约束反力时，应用动静法求解它们时就方便得多。

## 应用动静法求动力学问题的步骤及要点：

(1)选取研究对象。原则与静力学相同。

(2)受力分析。画出全部主动力和外约束反力。

(3)运动分析。主要是刚体质心加速度，刚体角加速度，标出方向。

(4)虚加惯性力。在受力图上画上惯性力和惯性力偶，一定要在正确进行运动分析的基础上。熟记刚体惯性力系的简化结果。

(5)列静力学平衡方程。选取适当的矩心和投影轴。

(6)建立补充方程。运动学补充方程（运动量之间的关系）。

(7)求解求知量。

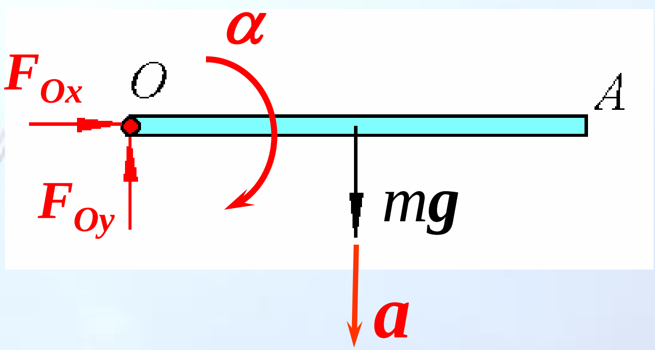
[注] $\overline{F}_{\mathrm{IR}}, M_{\mathrm{IO}}$ 的方向及转向已在受力图中标出，建立方程时，只需按 $F_{\mathrm{IR}}=ma_C$，$M_{\mathrm{IO}}=J_O\alpha$ 代入即可。

[例6] 均质杆*OA*，质量为*m*，长*l*，绳子突然剪断。求该瞬时，角加速度及O处反力。


解：取杆为研究对象

由定轴转动微分方程：

$$\frac{1}{3}ml^2\cdot\alpha=mg\cdot\frac{l}{2}\qquad\therefore\ \alpha=\frac{3g}{2l}$$




由质心运动定理：

$$\begin{cases} ma_{Cx}=F_{Ox} \\ ma_{Cy}=F_{Oy}-mg \end{cases}$$

$$a_{Cy}=-\frac{l}{2}\alpha\qquad a_{Cx}=0,$$

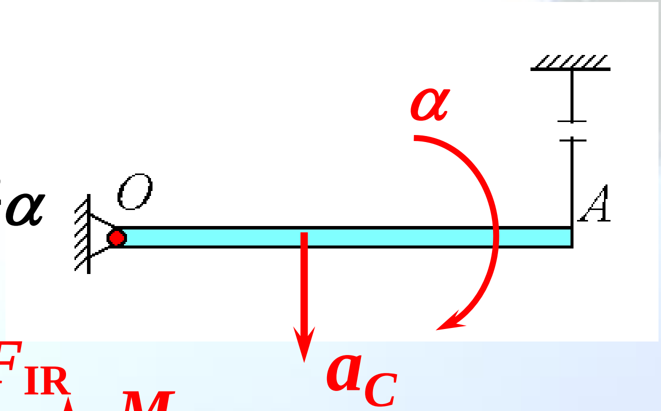
$$\therefore\ F_{Ox}=0,\ F_{Oy}=\frac{1}{4}mg$$

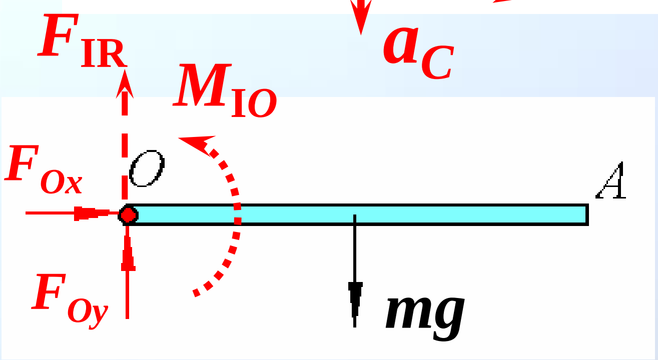
[例6] 均质杆$OA$，质量为$m$，长$l$，绳子突然剪断。求该瞬时，杆子的角加速度$\alpha$及$O$处反力。

解：应用达朗贝尔原理，取杆为研究对象。受力分析

向转轴$O$虚加惯性力和惯性力偶：

$$F_{IR}=ma_C=m\cdot\frac{l}{2}\alpha \qquad M_{IO}=\frac{1}{3}ml^2\alpha$$




列平衡方程：

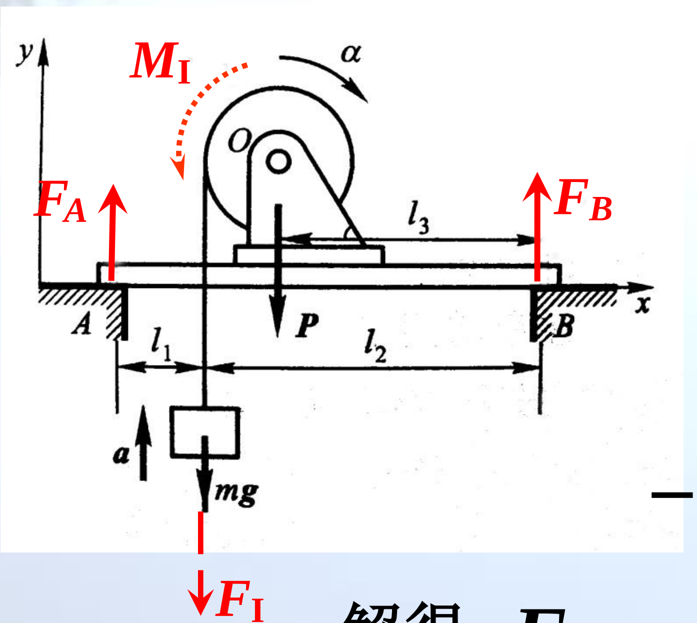
$$\begin{cases}\sum F_x=0\ , & F_{Ox}=0\\ \sum F_y=0\ , & F_{Oy}-mg+F_{IR}=0\\ \sum M_O(\overline{F})=0\ , & M_{IO}-mg\dfrac{l}{2}=0,\end{cases}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{3g}{2l}\ ,\quad F_{Ox}=0,\ F_{Oy}=\frac{1}{4}mg$$

**[例13-5] (P337)**

绞车和梁合重$P$，绞盘的转动惯量为$J$，以加速度$a$提升重物。重物的质量为$m$，绞盘的半径为$r$，求由于加速提升重物而对支座$A$、$B$的附加压力。

解：取整体为研究对象，施加支座约束力和惯性力




$$F_I = ma \ , \qquad M_I = J\alpha = J\frac{a}{r}$$

列平衡方程：

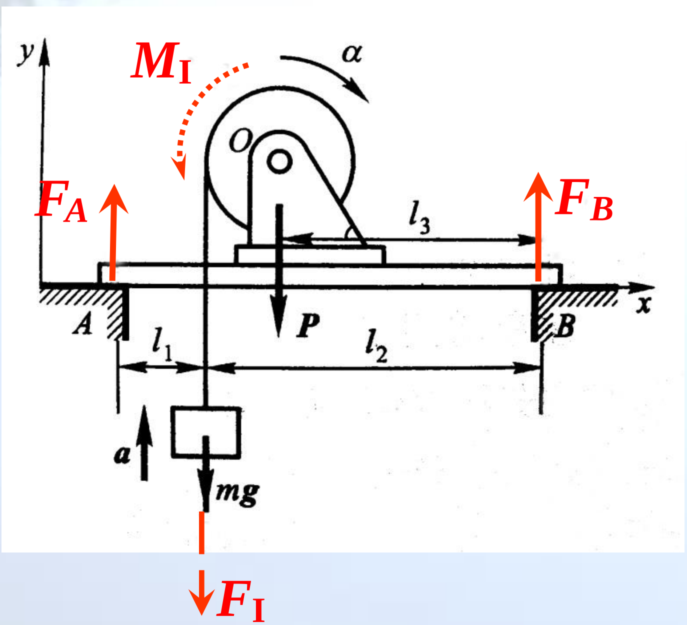
$$\sum F_y = 0 \ , \quad F_A + F_B - mg - P - F_I = 0$$

$$\sum M_B(\overline{F}) = 0 \ ,$$

$$-F_A(l_1 + l_2) + F_I l_2 + mgl_2 + Pl_3 + M_I = 0$$

解得：
$$F_A = \frac{1}{l_1 + l_2}[mgl_2 + Pl_3 + a(ml_2 + \frac{J}{r})]$$

$$F_B = \frac{1}{l_1 + l_2}[mgl_1 + P(l_1 + l_2 - l_3) + a(ml_1 - \frac{J}{r})]$$




附加反力：

$$F'_A=\frac{a}{l_1+l_2}(ml_2+\frac{J}{r})$$

$$F'_B=\frac{a}{l_1+l_2}(ml_1-\frac{J}{r})$$

附加反力决定于惯性力系。

[例13-7] (P338) 均质圆盘质量为$m_A$，半径为$r$，细长杆长$l=2r$，质量为$m$，$A$点为光滑铰链联接，作用力$F$，轮子作纯滚动。

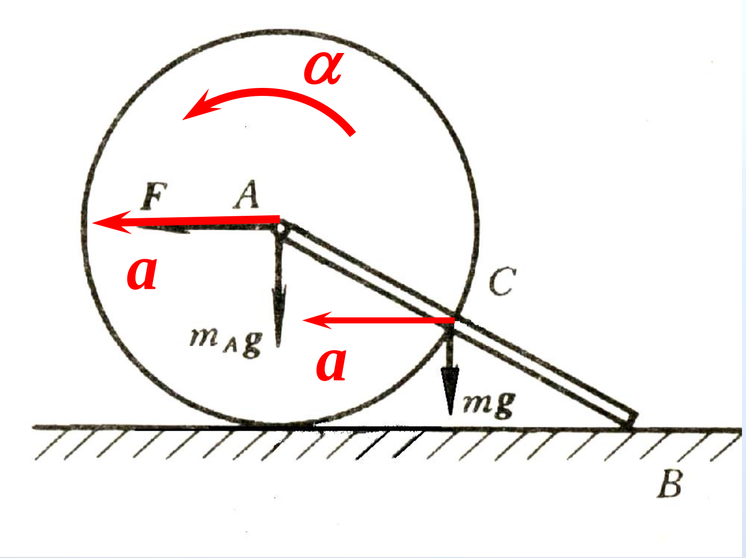
问：(1)$F$力多大能使杆的$B$端刚刚离开地面？

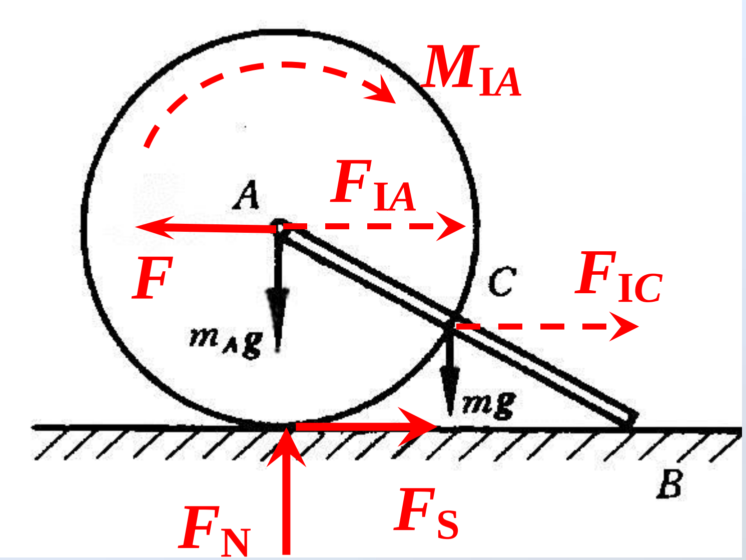
(2)为保证纯滚动，轮与地面间的静滑动摩擦系数应为多大？

解：运动分析（$AB$杆作平动）

受力分析和施加惯性力

未知量个数：4个



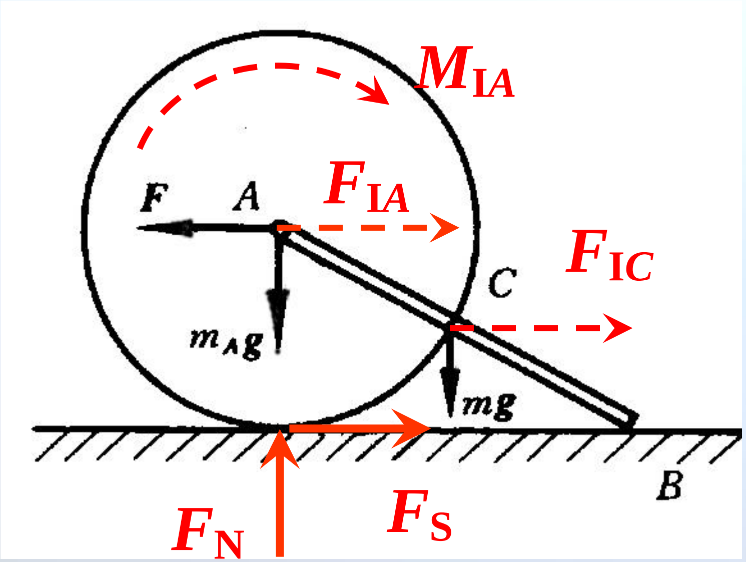
惯性力:

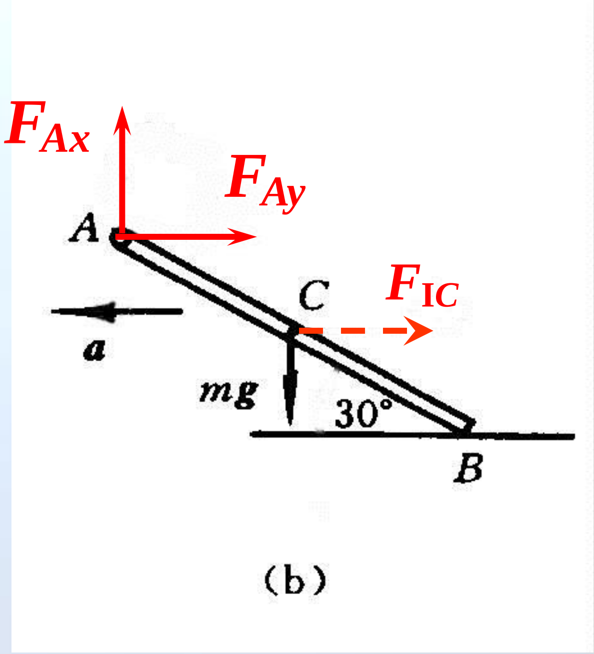
$$F_{IA}=m_A a\ ,F_{IC}=ma\ ,M_I=J_A\alpha=\frac{1}{2}m_A r^2\frac{a}{r}=\frac{1}{2}m_A ar$$

[$AB$杆] $\sum M_A(\overline{F})=0$ , $F_{IC}\cdot r\cdot\sin 30°-mgr\cos 30°=0$

$$\therefore\ a=\sqrt{3}\,g$$

[整体]



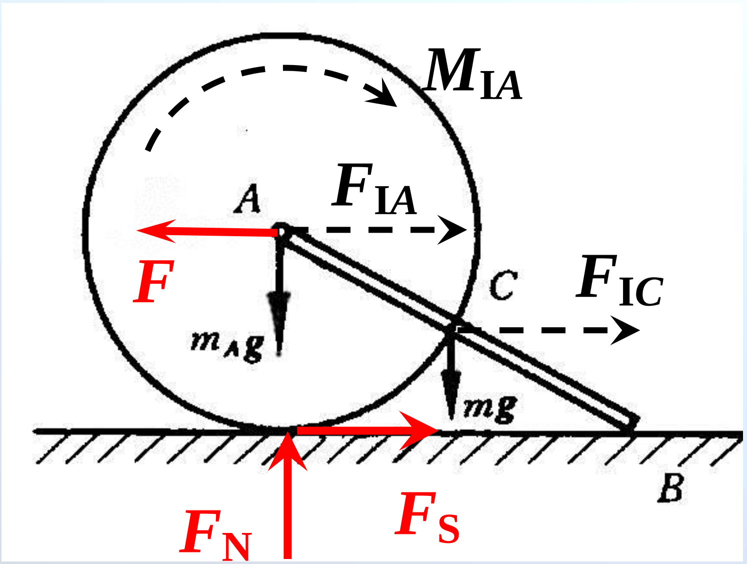
惯性力:

$$F_{IA}=m_A a \;, F_{IC}=ma \;, M_I=J_A\alpha=\frac{1}{2}m_A r^2\frac{a}{r}=\frac{1}{2}m_A ar$$

[AB杆] $\sum M_A(\overline{F})=0$ , $F_{IC}\cdot r\cdot\sin30°-mgr\cos30°=0$

$$\therefore a=\sqrt{3}\,g$$

[整体]




$$\sum F_x=0,$$

$$\sum F_y=0\;,$$

$$\sum M_A(\overline{F})=0,$$

[整体]

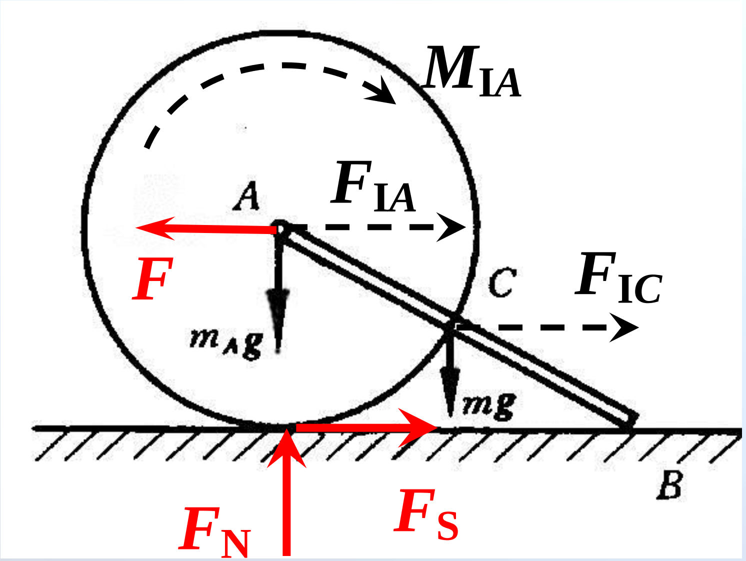
$$\sum F_x=0, \quad -F+F_{IA}+F_S+F_{IC}=0,$$

$$\sum F_y=0, \quad F_N-m_A g-mg=0,$$

$$\sum M_A(\bar{F})=0, \quad -M_I+F_S r+F_{IC} r\sin 30°-mgr\cos 30°=0$$

解得：$F_S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m_A g$，$F_N=(m_A+m)g$，

$$F=(\frac{3}{2}m_A+m)\sqrt{3}g$$



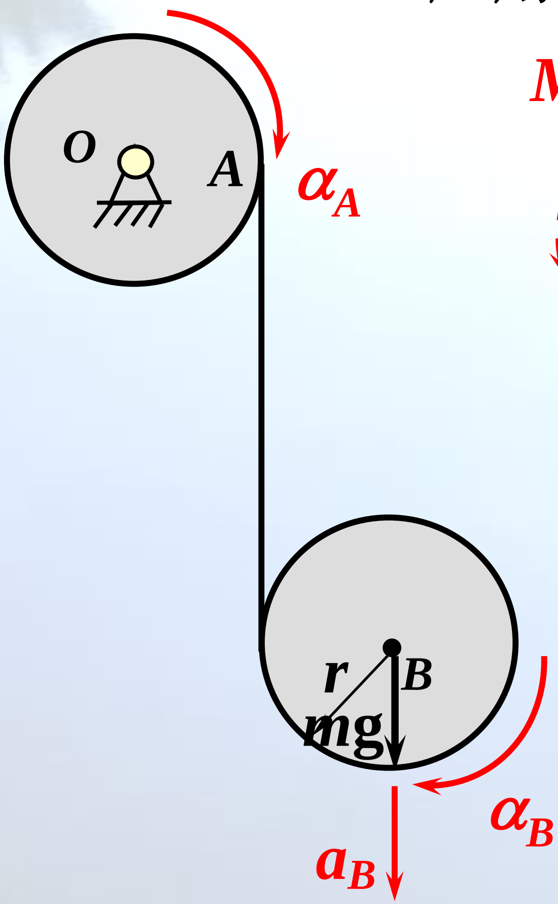

要求只滚不滑：$F_S \leqslant f_S F_N$

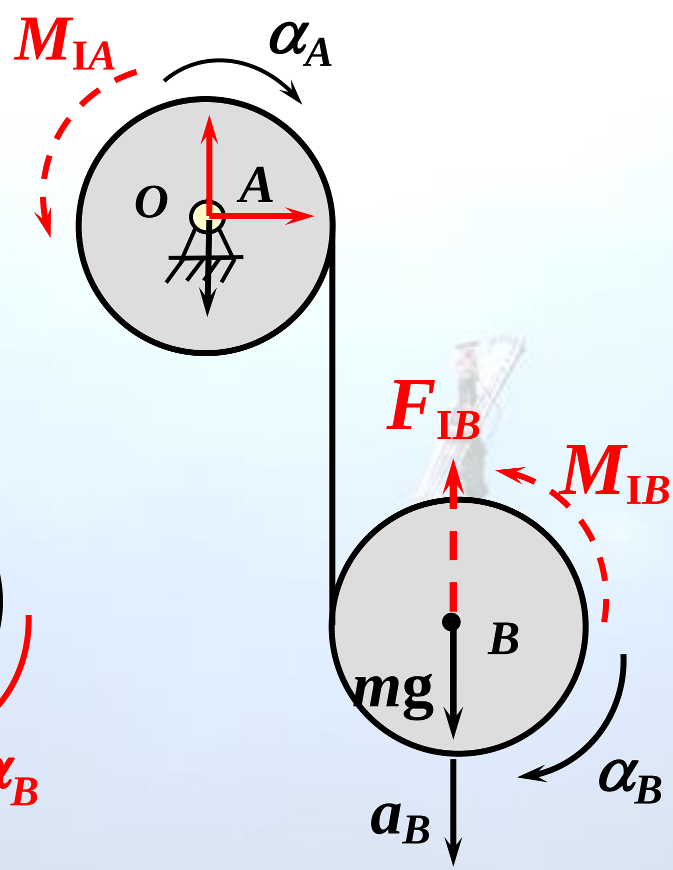
$$\frac{\sqrt{3}}{2}m_A g \leqslant f_S(m_A+m)g$$

$$\therefore f_S \geqslant \frac{\sqrt{3}m_A}{2(m_A+m)}$$

[题11-28]（P287） 均质圆柱体*A*和*B*的质量均为*m*，半径均为*r*，不计摩擦，求：（1）圆柱体*B*下落时质心的加速度；（2）若在圆柱体*A*上作用一逆时针力偶，试问力偶矩*M*多大时圆柱体*B*的质心加速度向上？

应用达朗伯原理求解



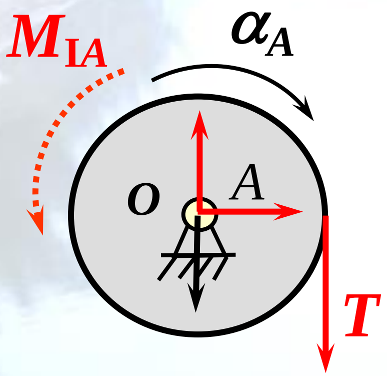




$$M_{IA}=\frac{1}{2}mr^2\alpha_A$$

$$M_{IB}=\frac{1}{2}mr^2\alpha_B$$

$$F_{IB}=ma_B$$

$$a_B=r\alpha_A+r\alpha_B$$



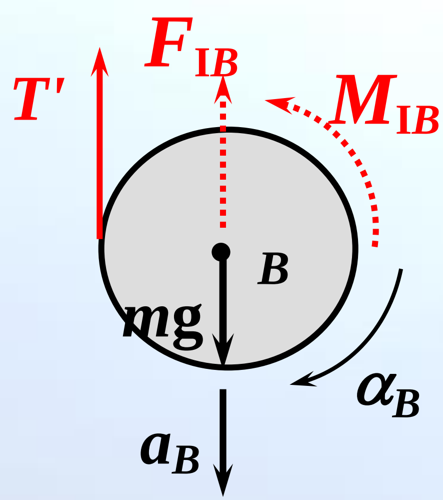

解：（1）[A轮]

$$\sum M_O(\overline{F})=0,\quad M_{IA}-T\cdot r=0$$

[B轮]

$$\sum M_B(\overline{F})=0,\ M_{IB}-T'\cdot r=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{IB}+T'-mg=0$$




运动学关系：

$$a_B=r\alpha_A+r\alpha_B$$

$$\therefore\ a_B=\frac{4}{5}g$$

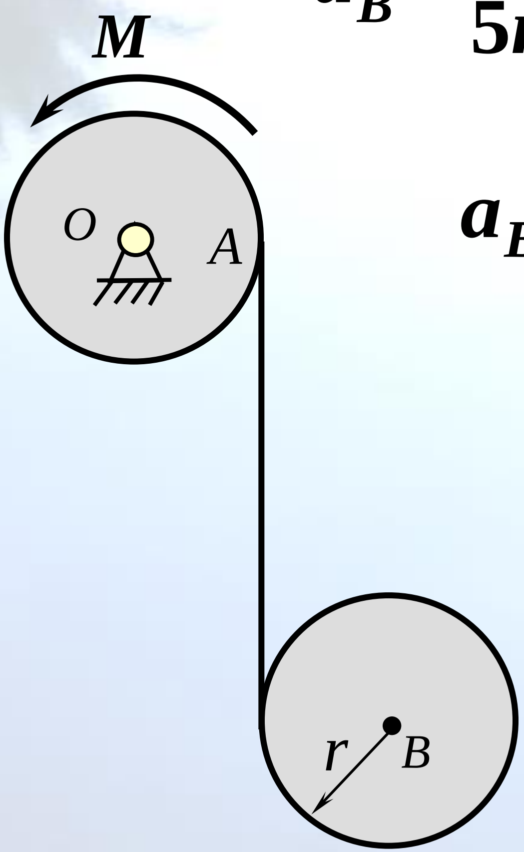
（2）

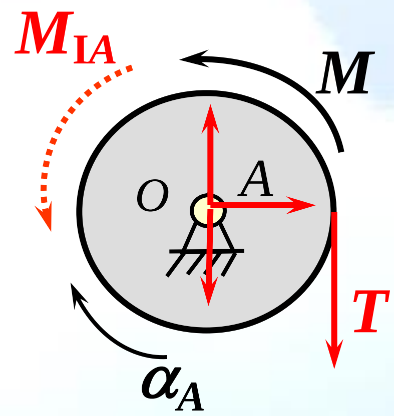
$$a_B = \frac{2}{5mr}(2mgr - M)$$

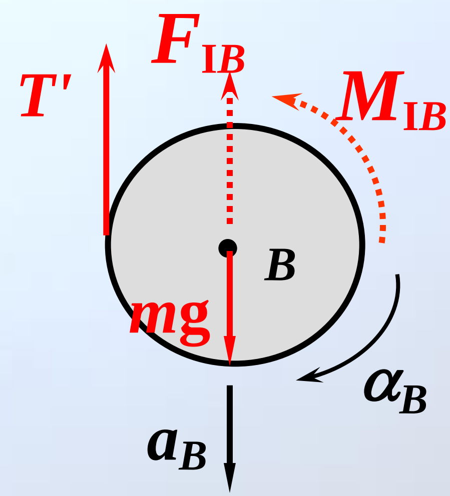
$a_B < 0$ ，$a_B$向上。

$$\therefore M > 2mgr$$

$B$轮子质心加速度向上



**[题13-10]（P345）** 质量为$m$和$m_2$的两重物，分别挂在两条绳子上，绳又分别绕在半径为$r_1$和$r_2$并装在同一轴的两鼓轮上，已知两鼓轮对于转轴$O$的转动惯量为$J$，系统在重力作用下发生运动，求鼓轮的角加速度。

解：[方法1] 用达朗伯原理求解

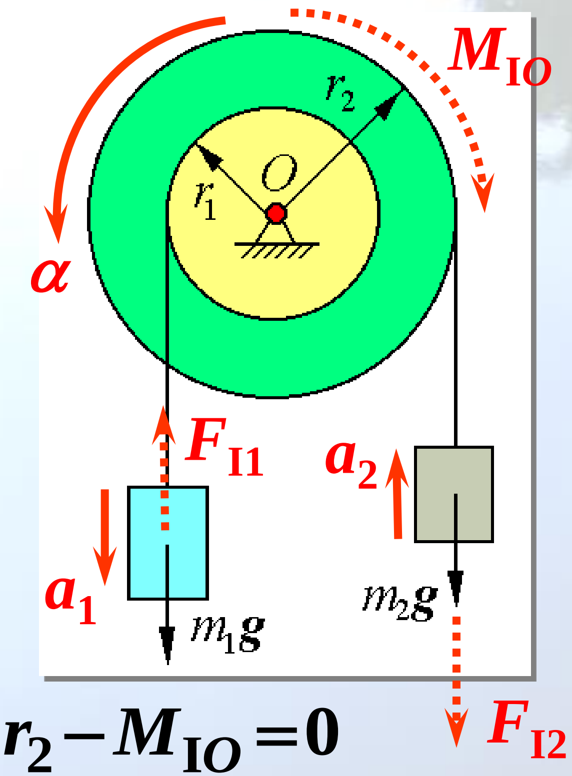
取整个系统为研究对象

虚加惯性力和惯性力偶：

$$F_{I1}=m_1a_1\,,\quad F_{I2}=m_2a_2\,,\quad M_{IO}=J\alpha$$

运动学方程：$a_1=r_1\alpha\,,\ a_2=r_2\alpha$

由动静法：




$$\sum M_O(\overline{F})=0\,,\ m_1gr_1-m_2gr_2-F_{I1}r_1-F_{I2}r_2-M_{IO}=0$$

$$m_1gr_1-m_2gr_2-m_1a_1r_1-m_2a_2r_2-J\alpha=0$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{m_1r_1-m_2r_2}{m_1r_1^2+m_2r_2^2+J}g$$

[方法2] 用动量矩定理求解

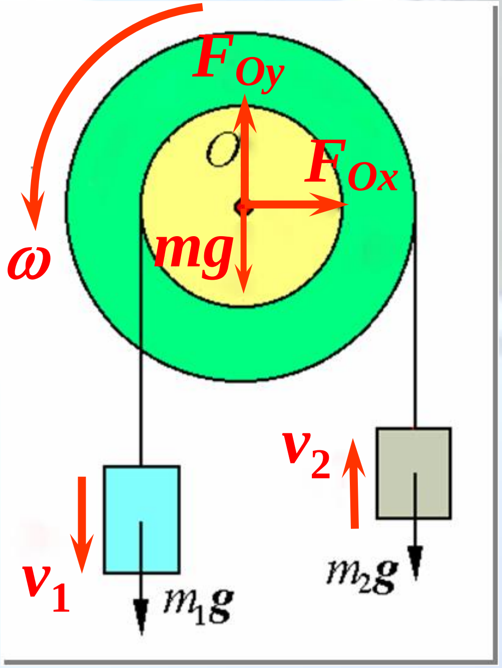
取系统为研究对象

$$L_O = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + J\omega$$

$$= m_1 r_1 \omega r_1 + m_2 r_2 r_2 \omega + J\omega$$

$$= (m_1 r_1^{\ 2} + m_2 r_2^{\ 2} + J)\omega$$

$$\sum M_O^{(e)} = m_1 g r_1 - m_2 g r_2$$




根据动量矩定理:

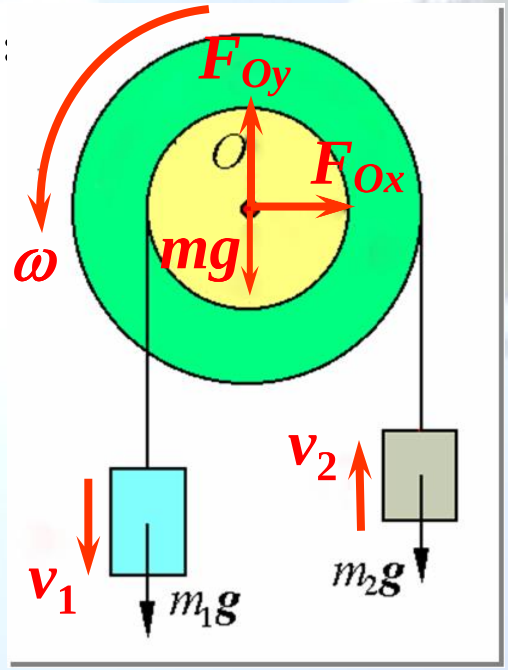
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_1 r_1^{\ 2} + m_2 r_2^{\ 2} + J)\omega] = m_1 g r_1 - m_2 g r_2$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 r_1^{\ 2} + m_2 r_2^{\ 2} + J} g$$

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O^{(e)}$$

[方法3] 用动能定理求解

取系统为研究对象，任一瞬时系统的动能：




$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_1v_1^{\ 2}+\frac{1}{2}m_2v_2^{\ 2}+\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$=\frac{\omega^2}{2}(m_1r_1^{\ 2}+m_2r_2^{\ 2}+J)$$

外力功：$W_{12}=m_1gs_1-m_2gs_2$

$$=m_1gr_1\varphi-m_2gr_2\varphi$$

$$=(m_1r_1\text{-}m_2r_2)g\varphi$$

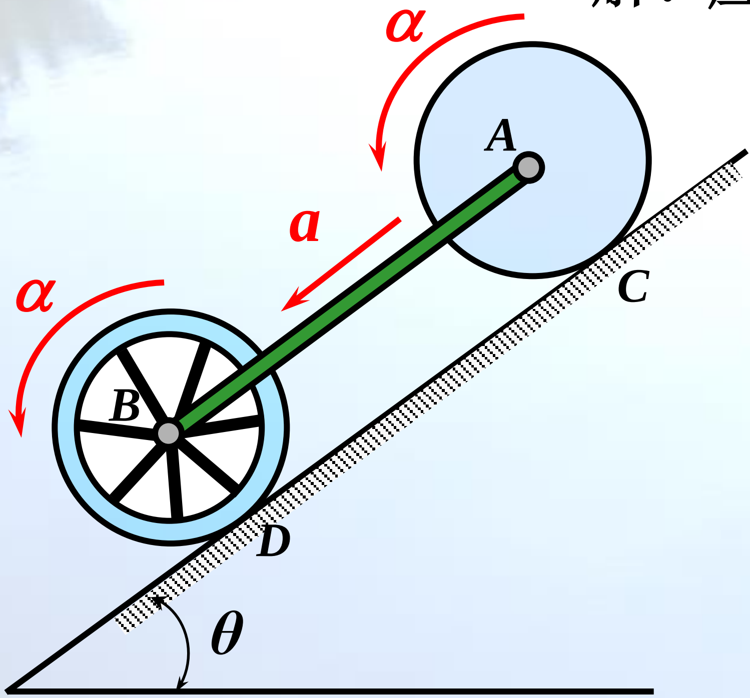
由 $T_2-T_1=W_{12}$ $\quad\frac{\omega^2}{2}(m_1r_1^{\ 2}+m_2r_2^{\ 2}+J)=(m_1r_1-m_2r_2)g\varphi$

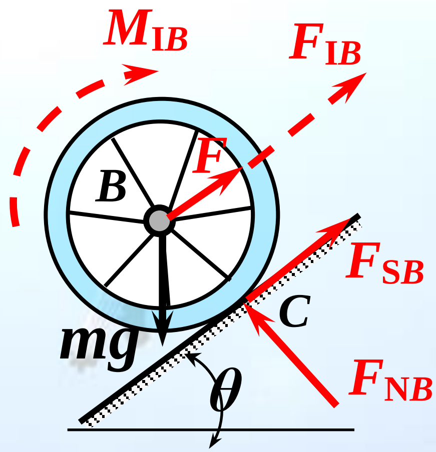
两边对时间$t$求导数，解得 $\alpha=\dfrac{m_1r_1-m_2r_2}{m_1r_1^{\ 2}+m_2r_2^{\ 2}+J}g$

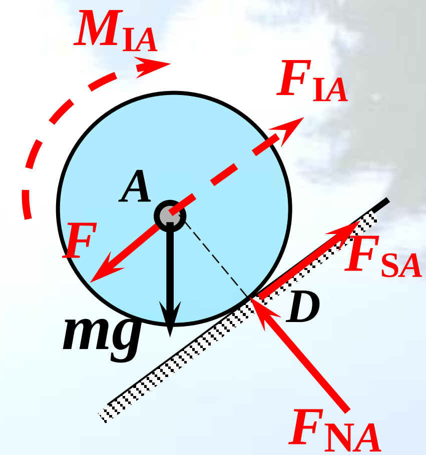
**[题11-25]（P286)**

均质实心圆柱$A$和薄铁环$B$的质量均为$m$，半径均为$r$，$A$和$B$处铰接，纯滚动，$AB$杆质量不计。求$AB$的加速度和内力。

解：应用达朗伯原理求解



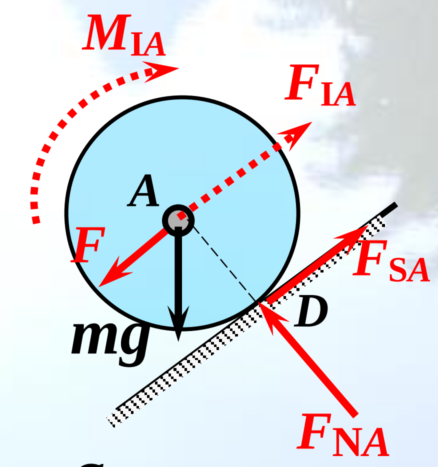




$$\sum M_C(\overline{F})=0\ ,$$

$$\sum M_D(\overline{F})=0\ ,$$

$$M_{IA}=J_A\alpha\ ,\quad M_{IB}=J_B\alpha\ ,F_{IA}=F_{IB}=ma\ ,\quad \alpha=\frac{a}{r}\ ,$$

[题11-25]（P286）均质实心圆柱$A$和薄铁环$B$的质量均为$m$，半径均为$r$，$A$和$B$处铰接，纯滚动，$AB$杆质量不计。求$AB$的加速度和内力。




解：应用达朗伯原理求解

$$F_{IA}=ma \qquad M_{IA}=J_A\alpha=\frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r}=\frac{1}{2}mar$$

$$F_{IB}=ma \qquad M_{IB}=J_B\alpha=mr^2\frac{a}{r}=mar$$

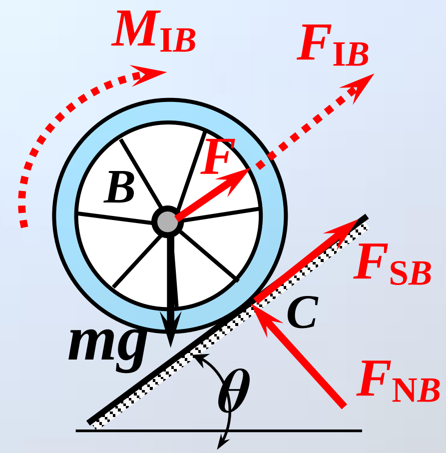
$$\alpha=\frac{a}{r}\ ,$$

[$A$轮子] $\sum M_D(\bar{F})=0$ ,

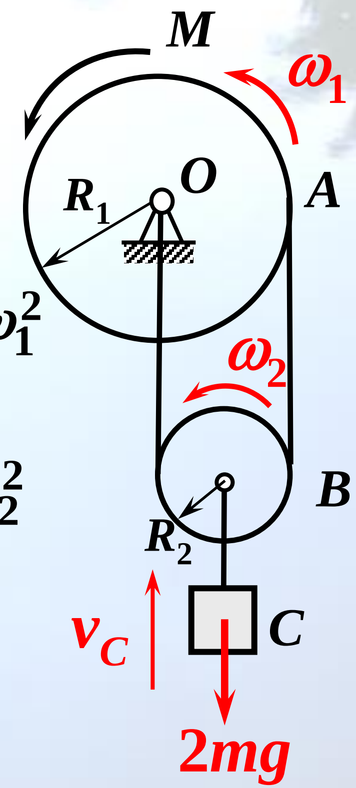
$$Fr-F_{IA}r+mgr\sin\theta-M_{IA}=0\ ,$$

[$B$轮子] $\sum M_C(\bar{F})=0$ ,

$$mgr\sin\theta-Fr-F_{IB}r-M_{IB}=0\ ,$$



[例] 已知匀质圆盘$A$和$B$ 的质量均为$m$ ,物体$C$的质量为$2m$，$R_1=2R_2$，圆盘$A$上作用一常力偶$M$，系统从静止开始运动，求：(1)物体$C$上升的加速度;（2）$AB$段绳子的拉力（用$C$的加速度表示）。




解：（1）整个系统，动能定理

$$W_{12}=M\varphi-3mgh=\frac{2Mh}{R_1}-3mgh \qquad (\varphi=\frac{2h}{R_1})$$

$$T_1=0,\ T_2=\frac{1}{2}(2m)v_C^2+[\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_B\omega_2^2]+\frac{1}{2}J_A\omega_1^2$$

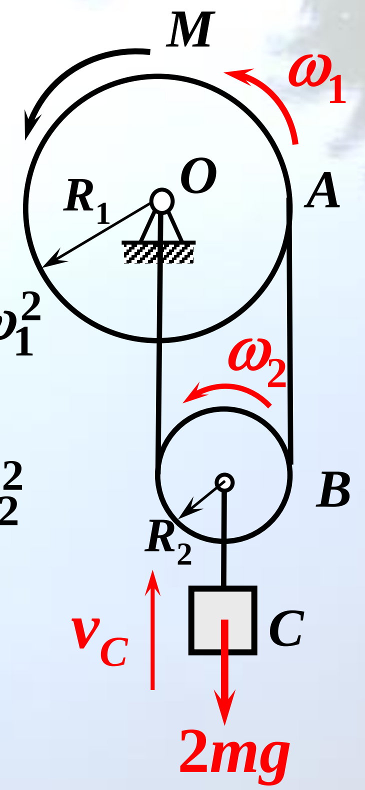
其中 $\omega_1=\dfrac{2v_C}{R_1}$ $\omega_2=\dfrac{v_C}{R_2}$ $J_A=\dfrac{1}{2}mR_1^2$ $J_B=\dfrac{1}{2}mR_2^2$

$$\therefore T_2=\frac{11}{4}mv_C^2$$

$$T_2-T_1=W_{12} \qquad \frac{11}{4}mv_C^2=\frac{2Mh}{R_1}-3mgh$$

解：（1）整个系统，动能定理

$$W_{12}=M\varphi-3mgh=\frac{2Mh}{R_1}-3mgh \qquad (\varphi=\frac{2h}{R_1})$$




$$T_1=0,\ T_2=\frac{1}{2}(2m)v_C^2+[\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_B\omega_2^2]+\frac{1}{2}J_A\omega_1^2$$

$$\omega_1=\frac{2v_C}{R_1} \qquad \omega_2=\frac{v_C}{R_2} \qquad J_A=\frac{1}{2}mR_1^2 \qquad J_B=\frac{1}{2}mR_2^2$$

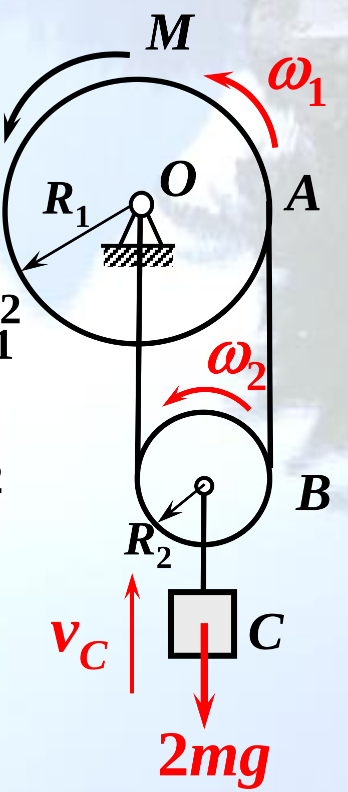
$$\therefore T_2=\frac{11}{4}mv_C^2$$

$$T_2-T_1=W_{12} \qquad \frac{11}{4}mv_C^2=\frac{2Mh}{R_1}-3mgh$$

解：（1）整个系统，动能定理

$$W_{12}=M\varphi-3mgh=\frac{2Mh}{R_1}-3mgh \qquad (\varphi=\frac{2h}{R_1})$$

$$T_1=0,\ T_2=\frac{1}{2}(2m)v_C^2+[\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_B\omega_2^2]+\frac{1}{2}J_A\omega_1^2$$




其中 $\omega_1=\dfrac{2v_C}{R_1}$ $\quad \omega_2=\dfrac{v_C}{R_2}$ $\quad J_A=\dfrac{1}{2}mR_1^2$ $\quad J_B=\dfrac{1}{2}mR_2^2$

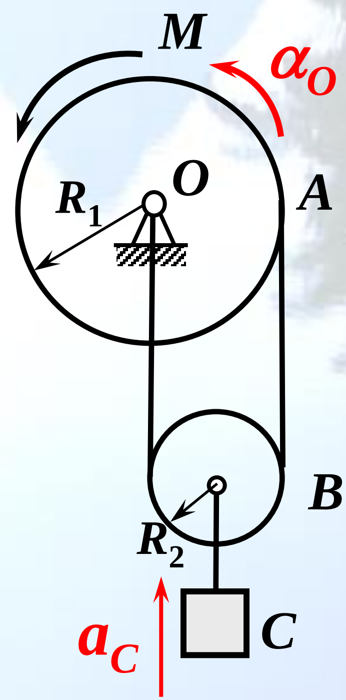
$$\therefore T_2=\frac{11}{4}mv_C^2$$

$$T_2-T_1=W_{12} \qquad \frac{11}{4}mv_C^2=\frac{2Mh}{R_1}-3mgh$$

等式两边求时间一次导数得加速度

$$\frac{11}{2}m\cancel{v_C}a_C=(\frac{2M}{R_1}-3mg)\frac{d\cancel{h}}{dt} \qquad \therefore a_C=\frac{2(M-3mgR_2)}{11mR_2}$$

$$\therefore a_C=\frac{2(M-3mgR_2)}{11mR_2}$$

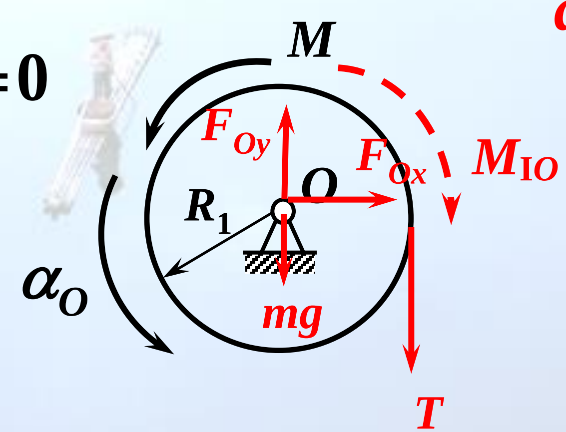



（2）[O轮子]用达朗贝尔原理求绳子拉力

惯性力偶 $M_{IO}=J_O\alpha_O=\frac{1}{2}mR_1^2\alpha_O$

其中 $\alpha_O=\frac{2a_C}{R_1}$

$\sum M_O(\bar{F})=0$， $M-M_{IO}-TR_1=0$

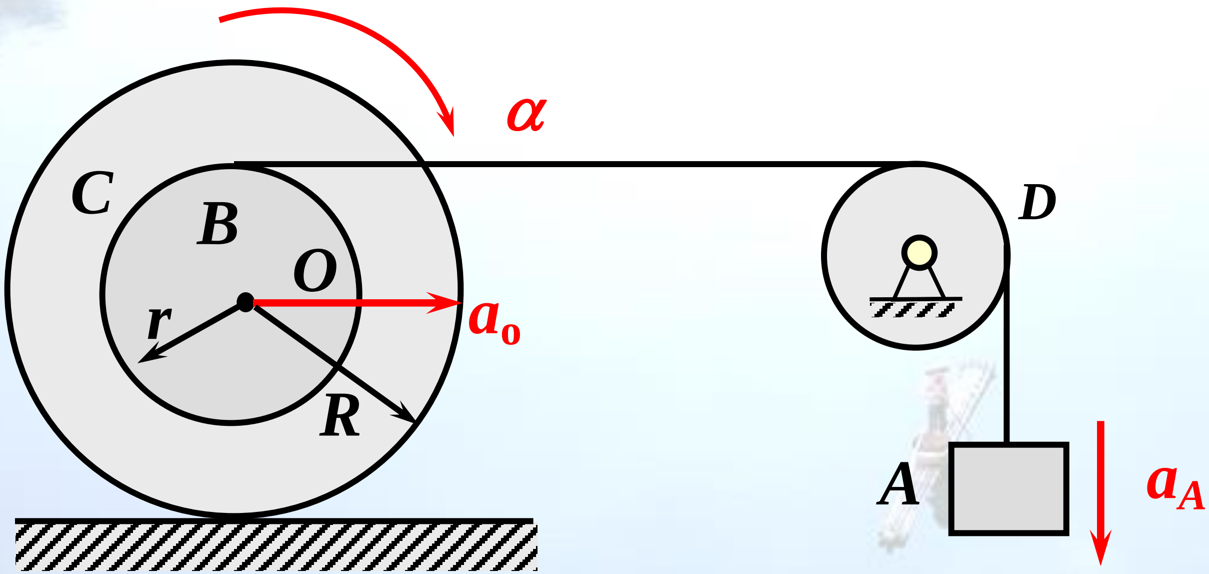



$$\therefore T=\frac{M-M_{IO}}{R_1}$$

$$=\frac{M}{R_1}-ma_C$$

[题11-12（P283)]

应用达朗伯原理求解重物的加速度

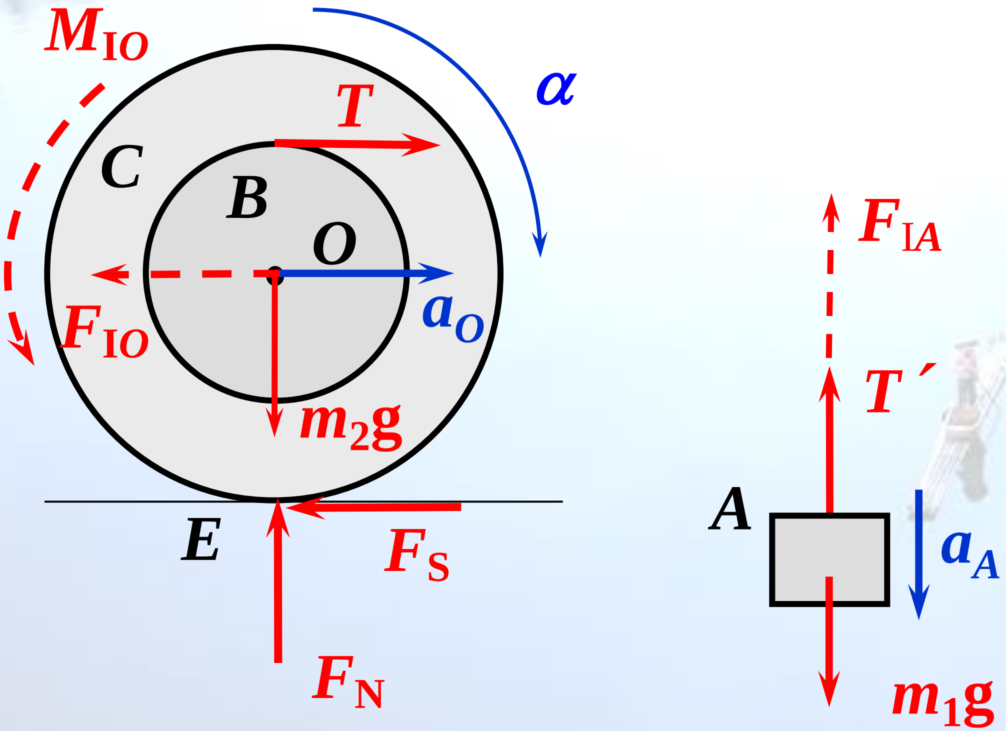



$$\alpha = \frac{a_O}{R}$$

$$a_O = \frac{R}{R+r} a_A$$

[题11-12（P283)] 应用达朗伯原理求解重物的加速度

解：分别取轮子和重物为研究对象




$$F_{IA}=m_1a_A$$

$$F_{IO}=m_2a_O$$

$$M_{IO}=m_2\rho^2\alpha$$

[重物] $\sum F_y=0$

[轮子] $\sum M_E(\overline{F})=0$

$$\alpha=\frac{a_O}{R}$$

$$a_O=\frac{R}{R+r}a_A$$

[综-12]
(P325)

已知：滚子*A*和轮子*B*的半径均为*R*，都为均质圆盘，质量均为$m_1$，物块*C*的质量为$m_2$。求滚子A重心的加速度和*AB* 段绳子的拉力 。

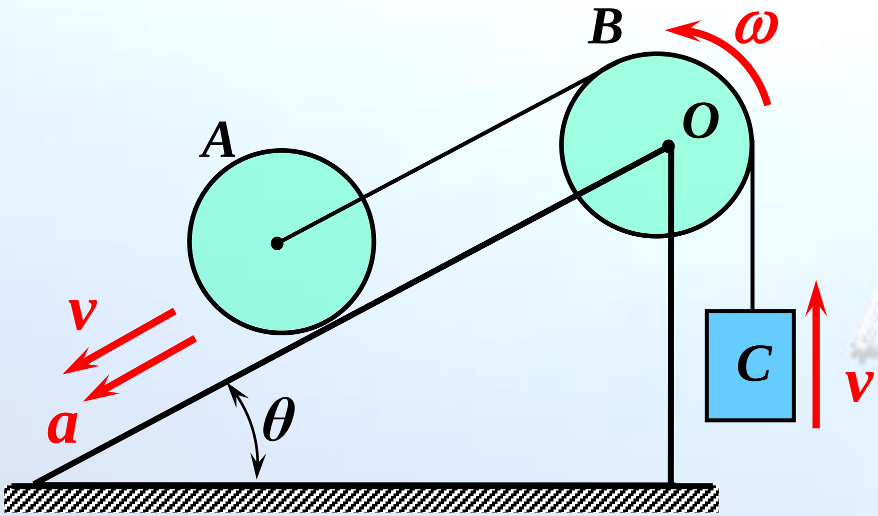
解题思路:

1、[整体]

动能定理求加速度

2、[滚子*A*]

应用达朗伯原理求绳子拉力



解：1、应用动能定理求加速度

$$T_1=0 \qquad T_2=[\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}J_A\omega^2]+\frac{1}{2}J_B\omega^2+\frac{1}{2}m_2v^2$$

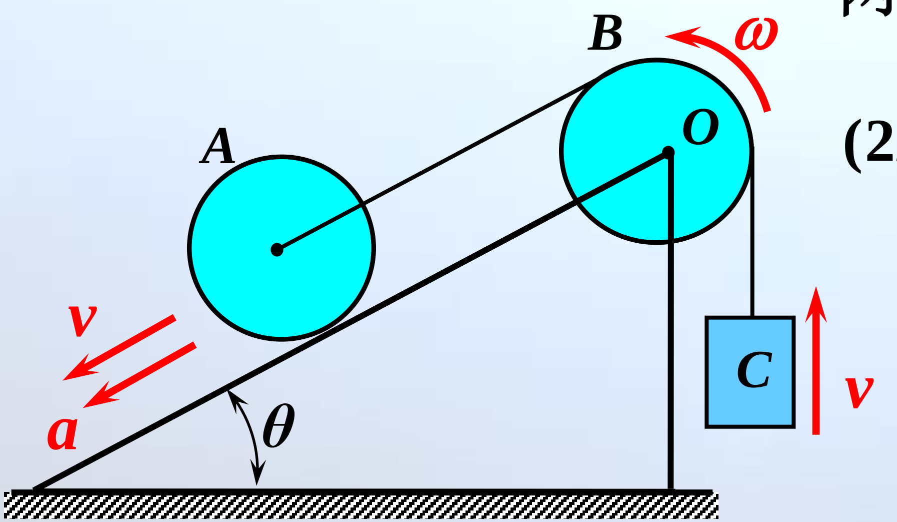
$$=\frac{1}{2}(2m_1+m_2)v^2$$

$$J_A=J_B=\frac{1}{2}m_1R^2\ ,$$

$$W_{12}=m_1gs\cdot\sin\theta-m_2gs$$

$$T_2-T_1=W_{12} \qquad \frac{1}{2}(2m_1+m_2)v^2=m_1gs\cdot\sin\theta-m_2gs$$

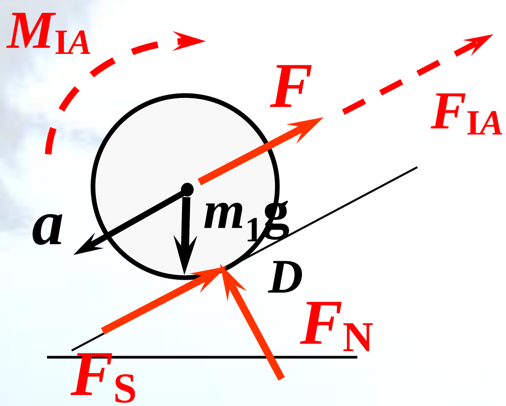
两边求导：




$$(2m_1+m_2)\cancel{v}\frac{dv}{dt}=(m_1\sin\theta-m_2)g\frac{\cancel{ds}}{\cancel{dt}}$$

$$a=\frac{m_1\sin\theta-m_2}{2m_1+m_2}g$$

2、研究A轮子如图，应用达朗伯原理求绳子拉力



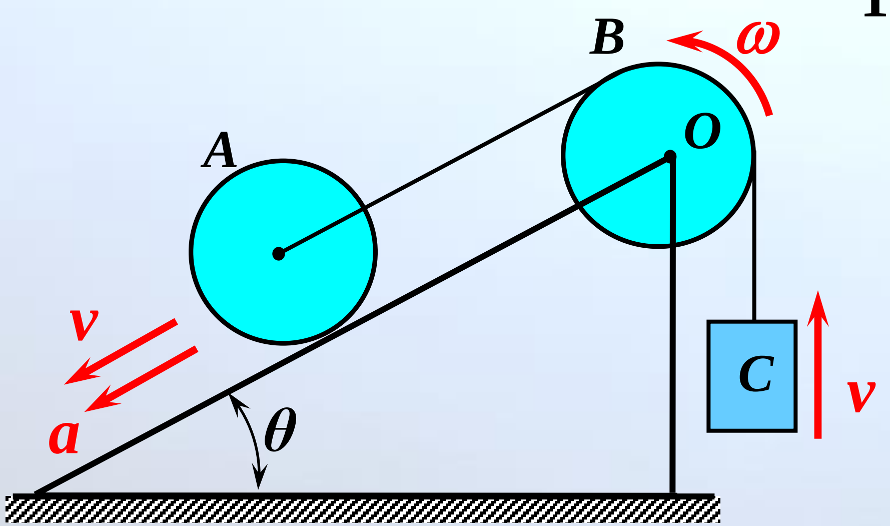

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$F_{IA} = m_1 a$$

$$M_{IA} = J_A \alpha = \frac{1}{2} m_1 R^2 \alpha = \frac{1}{2} m_1 R a$$

$$\sum M_D(\bar{F}) = 0,$$

$$m_1 g R \sin\theta - M_{IA} - FR - F_{IA} R = 0$$

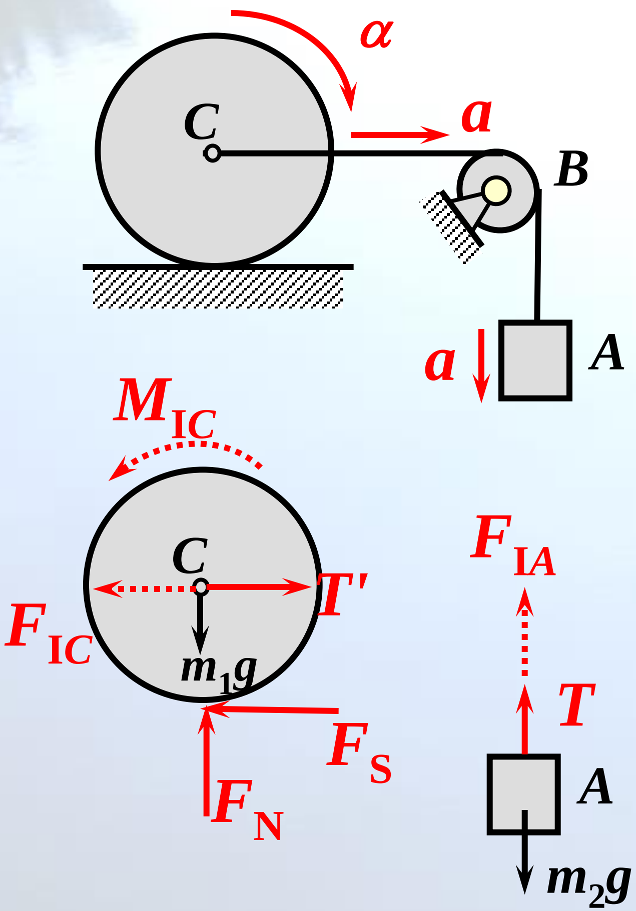



$$\therefore F = m_1 g \sin\theta - \frac{M_{IA}}{R} - F_{IA}$$

$$= m_1 g \sin\theta - \frac{3}{2} m_1 a$$

$$J_A = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

[例] 均质圆盘$C$，质量为$m_1$，半径为$R$，沿水平面只滚不滑，重物$A$质量为$m_2$，滑轮$B$的质量和摩擦不计，用达朗贝尔原理求：（1）轮子$C$质心的加速度；（2）轮子$C$与地面间的摩擦力。




解：$F_{IA}=m_2a \qquad F_{IC}=m_1a$

$$M_{IC}=J\alpha=\frac{1}{2}m_1R^2\frac{a}{R}=\frac{1}{2}m_1Ra$$

[重物$A$] $\sum F_y=0,$

$$T+F_{IA}-m_2g=0,$$

[圆盘$C$] $\sum F_x=0,$

$$T'-F_{IC}-F_S=0,$$

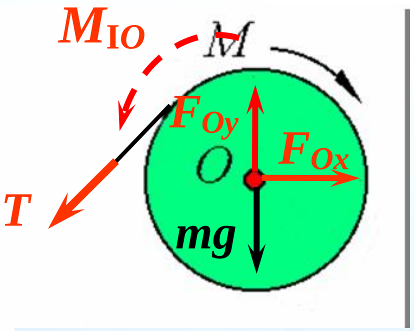
$$\sum M_C=0,$$

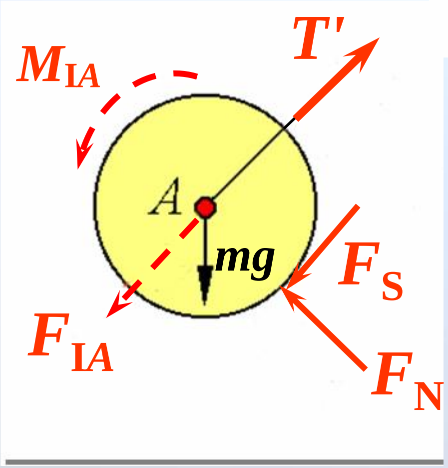
$$M_{IC}-F_S\cdot R=0,$$

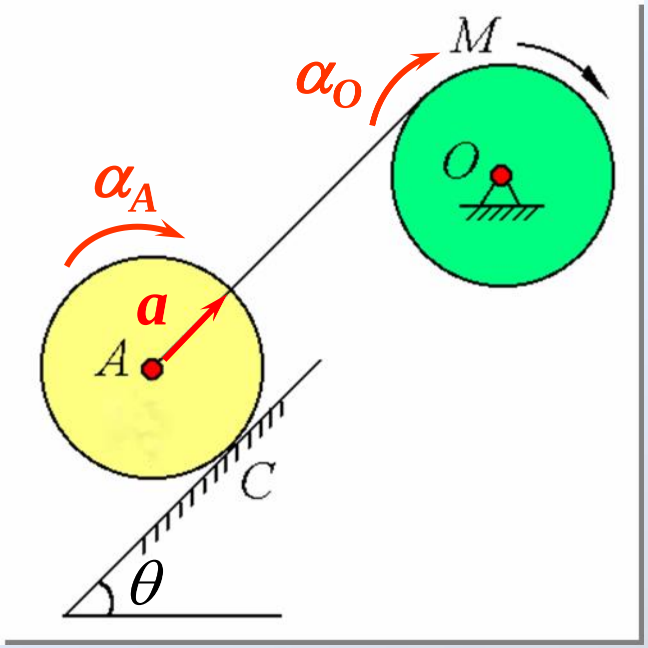
[例8] 图示两均质圆轮质量均为$m$，半径均为$R$，绳子不可伸长，其质量不计，鼓轮上作用一常力偶$M$，试求：(1)鼓轮的角加速度？ (2)绳子的拉力？ (3)轴承$O$处的支反力？ (4)圆柱体与斜面间的摩擦力（不计滚动摩擦）？

解：[方法1]　用达朗贝尔原理求解

分别取轮$O$，$A$为研究对象，虚加惯性力和惯性力偶



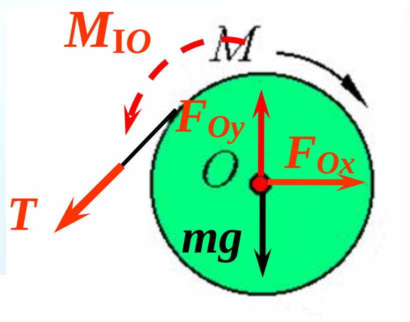



[例8] 图示两均质圆轮质量均为$m$，半径均为$R$，绳子不可伸长，其质量不计，鼓轮上作用一常力偶$M$，试求：(1)鼓轮的角加速度； (2)绳子的拉力； (3)圆柱体与斜面间的摩擦力（不计滚动摩擦）。

解：[方法1]　用达朗贝尔原理求解

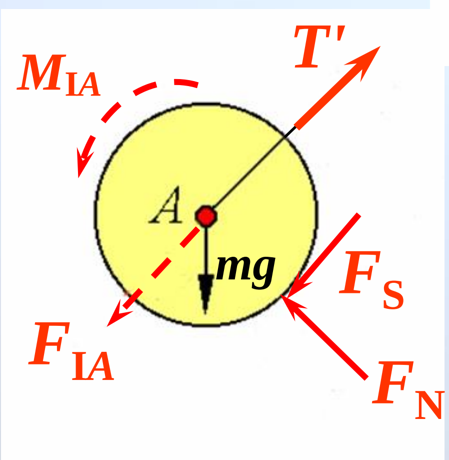
分别取轮$O$，$A$为研究对象，虚加惯性力和惯性力偶




$$M_{IO}=J_O\alpha_O=\frac{1}{2}mR^2\alpha_O$$

$$F_{IA}=ma_A\ ,\ M_{IA}=\frac{1}{2}mR^2\alpha_A$$

$$\alpha_A=\alpha_O\ ,\ a_A=R\alpha_A$$




列出平衡方程：

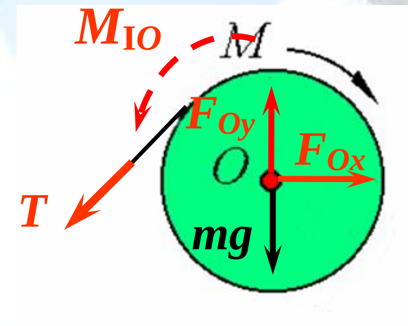
[轮$O$]

$$\sum M_O(\bar{F})=0\ ,$$

[轮$A$]　$\sum F_x=0\ ,$

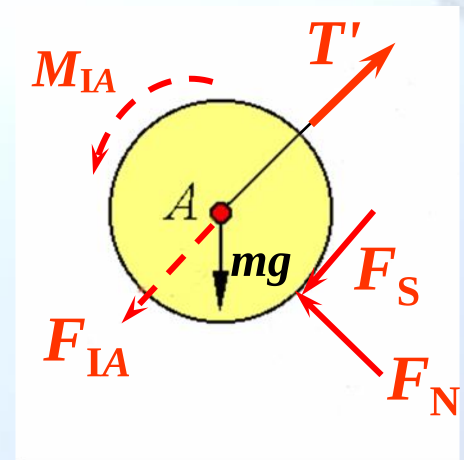
$$\sum M_A(\bar{F})=0\ ,$$

[轮$O$] $\sum M_O(\bar{F})=0$ ，$T\cdot R+M_{IO}-M=0$




[轮$A$] $\sum F_x=0$ ，$T'-F_{IR}-F_S-mg\sin\theta=0$

$\sum M_A(\bar{F})=0$ ，$M_{IA}-F_S\cdot R=0$




将$M_{IO}$、$F_{IR}$、$M_{IA}$ 及运动学关系代入求解得：

$$\alpha_O=\frac{M-mgR\sin\theta}{2mR^2},$$

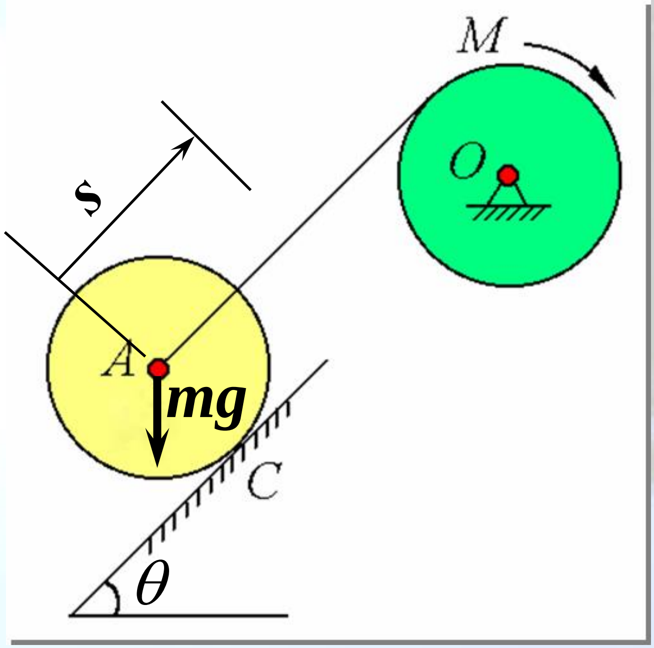
$$T=\frac{(3M+mgR\sin\theta)}{4R}。$$

$$F_S=\frac{(M-mgR\sin\theta)}{4R}$$

## 方法2 用动力学普遍定理求解

(1) 用动能定理求鼓轮角加速度

取系统为研究对象




$$W_{12} = M\varphi - mgs \cdot \sin\theta$$

$s = R\varphi$

$$= (M - mgR\sin\theta)\varphi$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \cdot \omega_O^2 + [\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \cdot \omega_A^2]$$

$(v = R\omega_O = R\omega_A)$

$$= mR^2\omega_O^2$$

由 $T_2 - T_1 = W_{12}$ ,得 $mR^2\omega_O^2 = (M - mgR\sin\theta)\varphi$

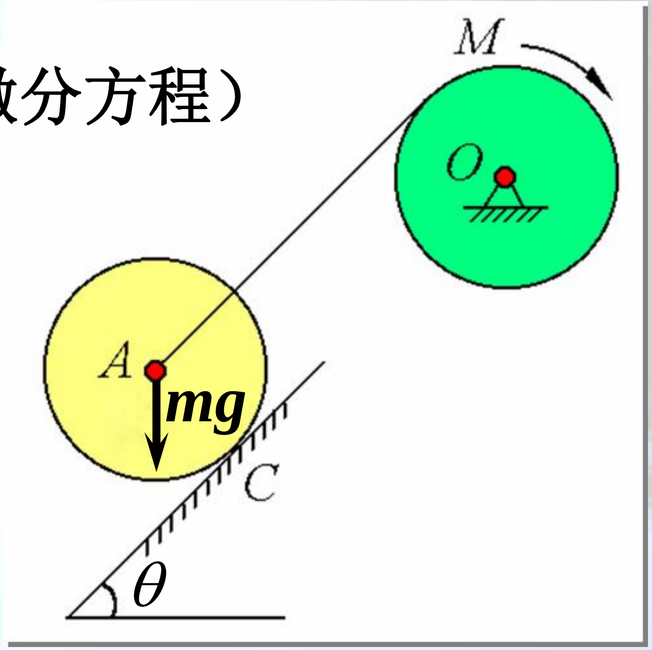
两边对$t$求导数: $2mR^2\cancel{\omega_O} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega_O}{\mathrm{d}t} = (M - mgR\sin\theta)\cancel{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}$

(2) 用动量矩定理求绳子拉力（定轴转动微分方程）

取轮$O$为研究对象 $J_O \alpha_O = \sum M_O$

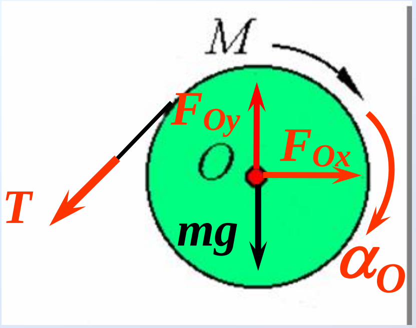
即：$\frac{1}{2} m R^2 \alpha_O = M - T \cdot R$

$$\therefore T = \frac{(3M + mgR\sin\theta)}{4R}$$

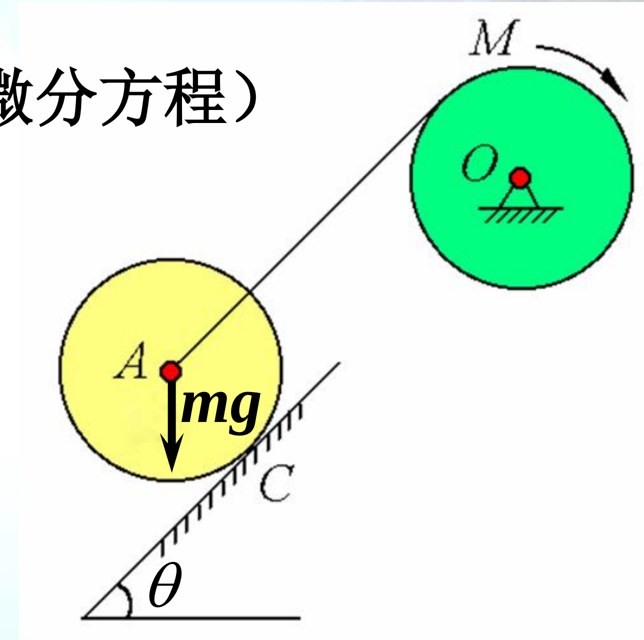



(3) 用刚体平面运动微分方程求摩擦力

取圆柱体$A$为研究对象



(2) 用动量矩定理求绳子拉力（定轴转动微分方程）




取轮O为研究对象 $J_O\alpha_O=\sum M_O$

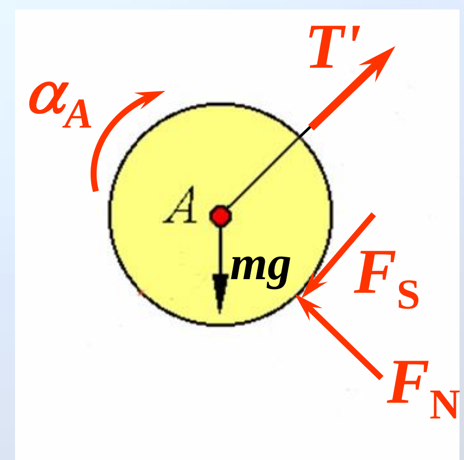
即： $\frac{1}{2}mR^2\alpha_O=M-T\cdot R$

$$\therefore\ T=\frac{(3M+mgR\sin\theta)}{4R}$$

(3) 用刚体平面运动微分方程求摩擦力

取圆柱体A为研究对象

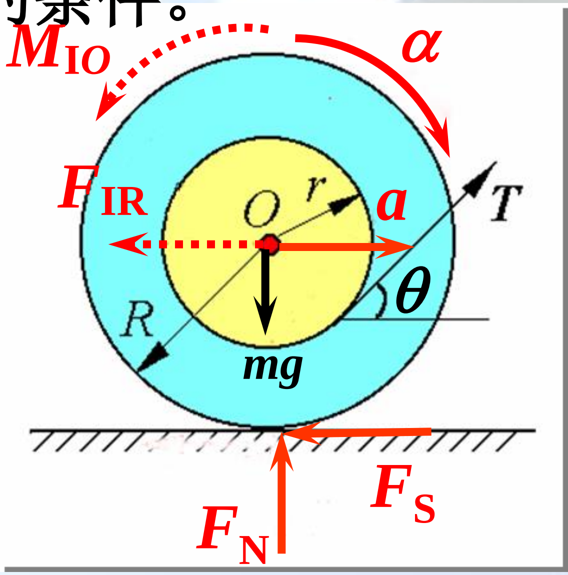
$$J_A\alpha_A=F_S\cdot R \qquad (\alpha_A=\alpha_O)$$




$$\therefore\ F_S=\frac{J_A\alpha_A}{R}=\frac{(M-mgR\sin\theta)}{4R}$$

[例4] 绕线轮质量$m$，半径为$R$及$r$，对质心$O$转动惯量为$J_O$，在与水平成$\theta$角的常力$T$作用下纯滚动，不计滚阻。

求：(1)轮心的加速度；(2)分析纯滚动的条件。




解：用达朗贝尔原理求解

绕线轮作平面运动（纯滚动）

$$F_{IR}=ma,\quad M_{IO}=J_O\alpha \quad (\text{其中}a=R\alpha)$$

由达朗伯原理，得

$$\sum F_x=0,\quad T\cos\theta-F_S-F_{IR}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_N-mg+T\sin\theta=0$$

$$\sum M_O(\bar{F})=0,\quad M_{IO}+T\cdot r-F_S\cdot R=0$$

将$F_{IR}$、$M_{IO}$代入上式，可得

$$F_N=mg-T\sin\theta$$

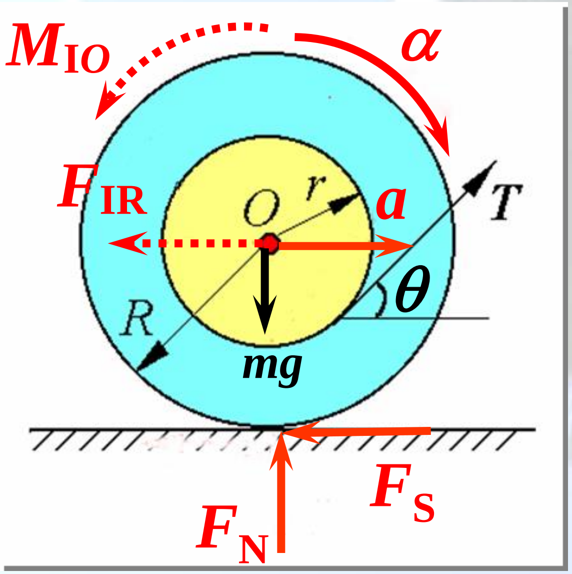
$$a_O=\frac{T\cdot R(R\cos\theta-r)}{J_O+mR^2}$$

$$F_S=\frac{T(J_O\cos\theta+mRr)}{J_O+mR^2}$$

纯滚动的条件：$F_S \le f F_N$

$$\frac{T(J_O\cos\theta+mRr)}{J_O+mR^2}\le f(mg-T\sin\theta)$$

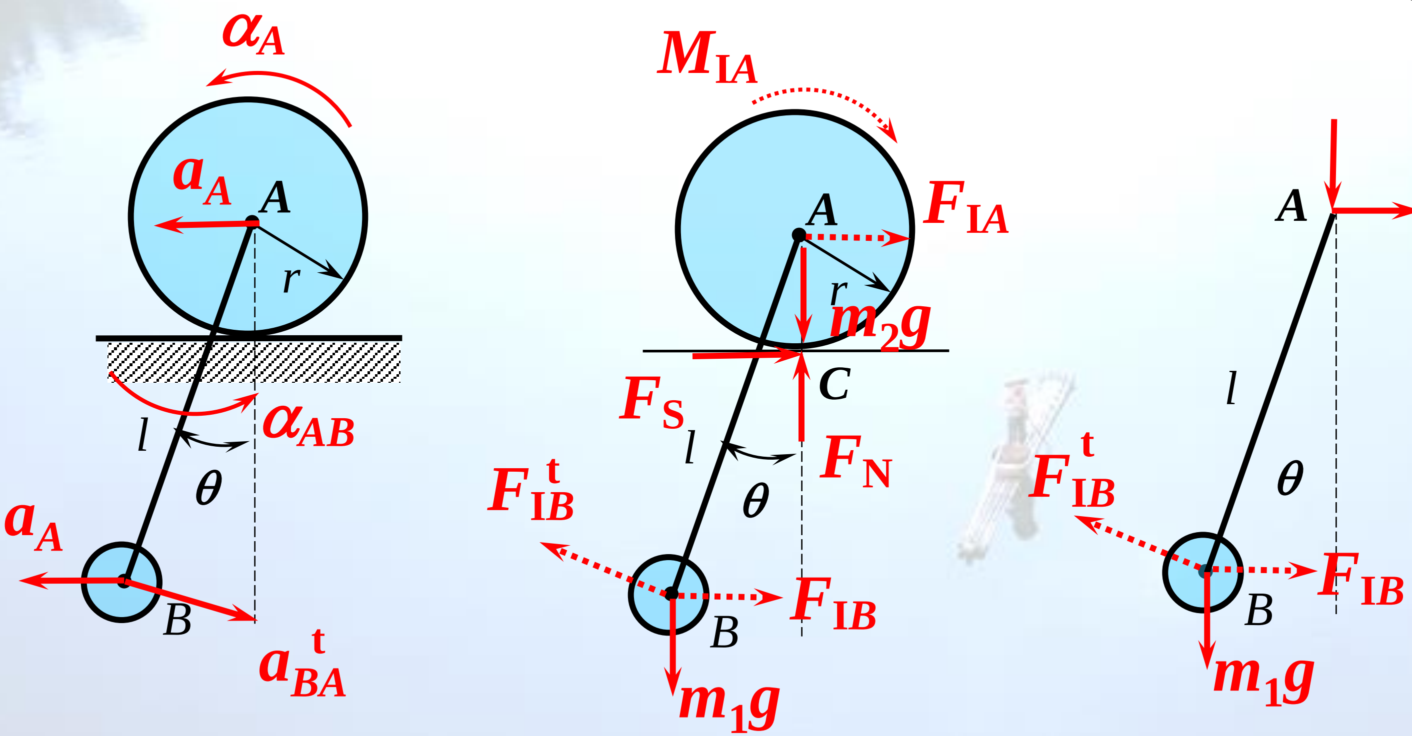
$$f\geqslant\frac{T(J_O\cos\theta+mRr)}{(mg-T\sin\theta)(J_O+mR^2)}$$



[例]单摆*B*摆长为$l$，质量$m_1$，均质圆轮*A*质量$m_2$，半径为$r$，纯滚动，杆子质量不计。在图示位置无初速地开始运动，求轮心的加速度。

$$\sum M_C(\overline{F})=0\ ,$$

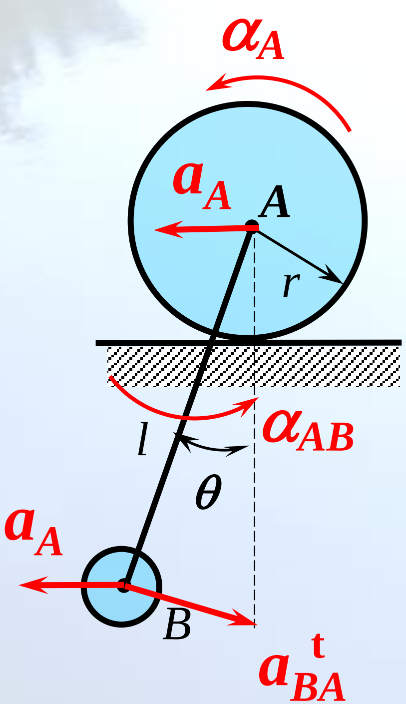
$$\sum M_A(\overline{F})=0\ ,$$




$$\overline{a}_B=\overline{a}_A+\overline{a}_{BA}^{n}+\overline{a}_{BA}^{t}\ ,$$

$$a_A=\frac{m_1 g\sin 2\theta}{3m_2+2m_1\sin 2\theta}\ ,$$

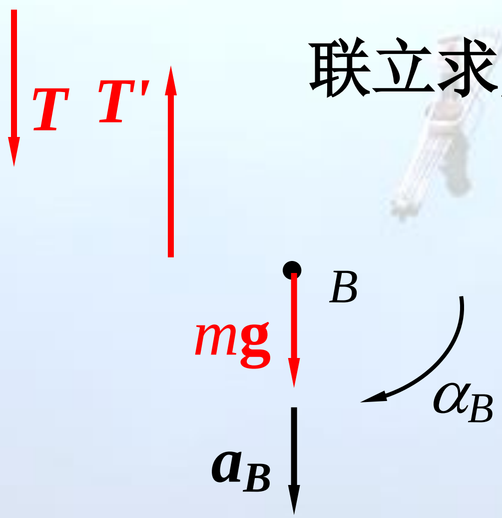
[例]单摆B摆长为$l$，质量$m_1$，均质圆轮A质量$m_2$，半径为$r$，纯滚动，杆子质量不计。在图示位置无初速地开始运动，求轮心的加速度。




[轮子A] $J_A\alpha_A = T\cdot r$

[单摆B] $J_B\alpha_B = T'\cdot r$

运动学关系： $a_B = r\alpha_A + r\alpha_B$

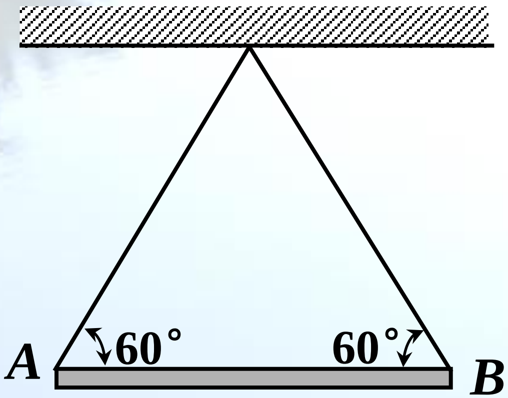


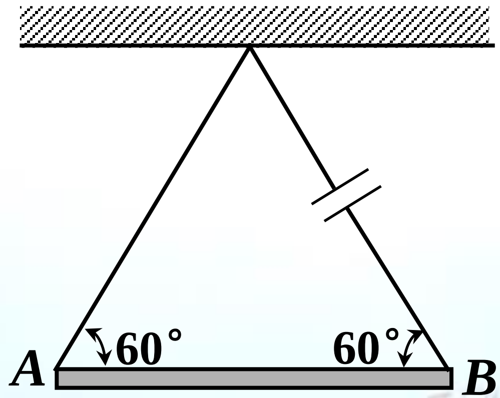

联立求解得：

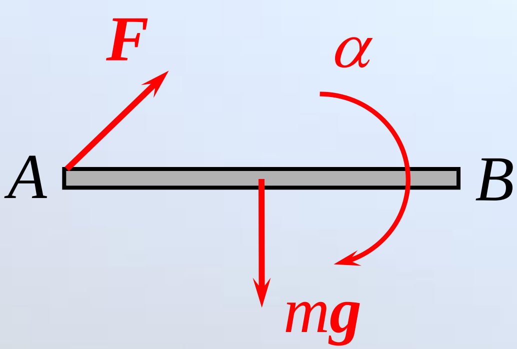
$$a_B = \frac{4}{5}g$$

$$ma_B = mg - T'$$

**[例11]** 均质杆*AB*的质量为*m*，长为*l*，其两端悬挂在两条长度相等的绳上，杆处在水平位置。如其中一绳突然断了，求此瞬时杆的角加速度和另一绳的张力。

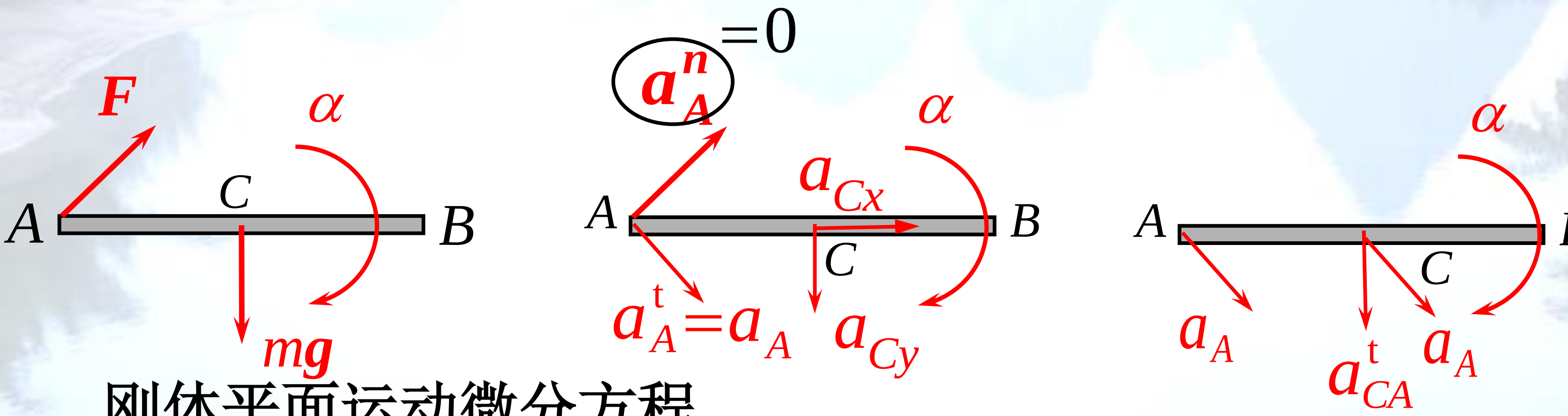



$$\alpha=\frac{18g}{13l}$$

$$F=\frac{2\sqrt{3}}{13l}mg$$




刚体平面运动微分方程

$$\vec{a}_C=\vec{a}_A+\vec{a}_{CA}^{n}+\vec{a}_{CA}^{t}$$

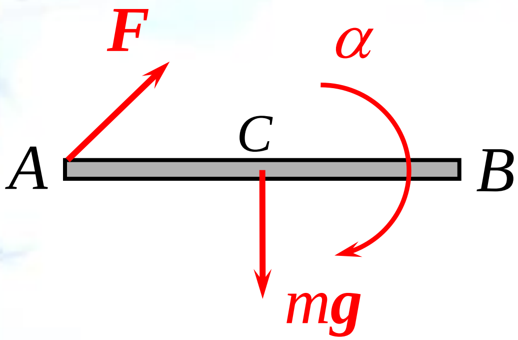
$$\begin{cases} ma_{Cx}=\sum F_x \\ ma_{Cy}=\sum F_y \\ J_C\alpha=\sum M_C \end{cases}$$

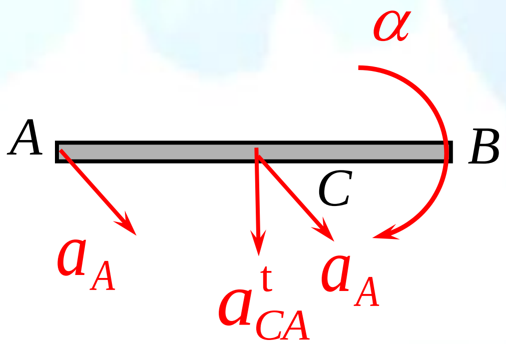
$$\vec{a}_{Cx}+\vec{a}_{Cy}=\vec{a}_A^{t}+\cancel{\vec{a}_A^{n}}+\cancel{\vec{a}_{CA}^{n}}+\vec{a}_{CA}^{t}$$

$$a_A^n=0, \qquad a_{CA}^n=0, \qquad a_{CA}^{t}=\frac{l}{2}\alpha,$$

$$a_A=a_A^{t}$$

$$\boxed{\therefore a_{Cx}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_A \qquad a_{Cy}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a_A-\frac{l}{2}\alpha}$$




刚体平面运动微分方程

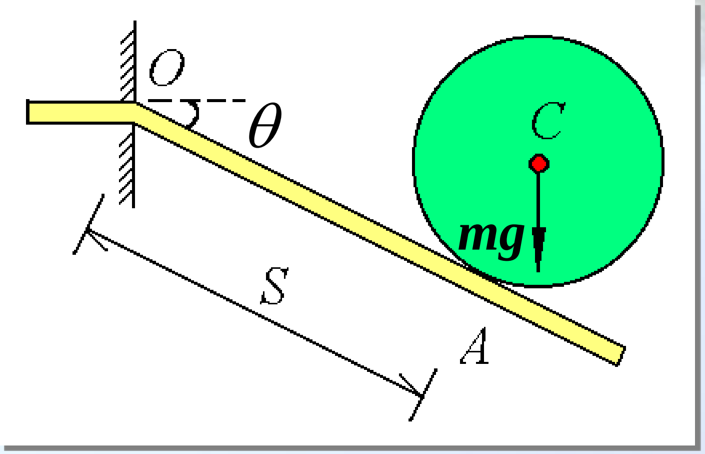
$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_x \\ ma_{Cy} = \sum F_y \\ J_C\alpha = \sum M_C \end{cases} \qquad \begin{cases} m\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ -m\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_A + \dfrac{l}{2}\alpha\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F - mg \\ \dfrac{1}{12}ml^2\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F\cdot\dfrac{l}{2} \end{cases}$$

$$F = \frac{\sqrt{2}}{5}mg$$

$$\therefore \alpha = \frac{6g}{5l}$$

$$\boxed{\therefore a_{Cx} = \frac{\sqrt{2}}{2}a_A \qquad a_{Cy} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_A - \frac{l}{2}\alpha}$$

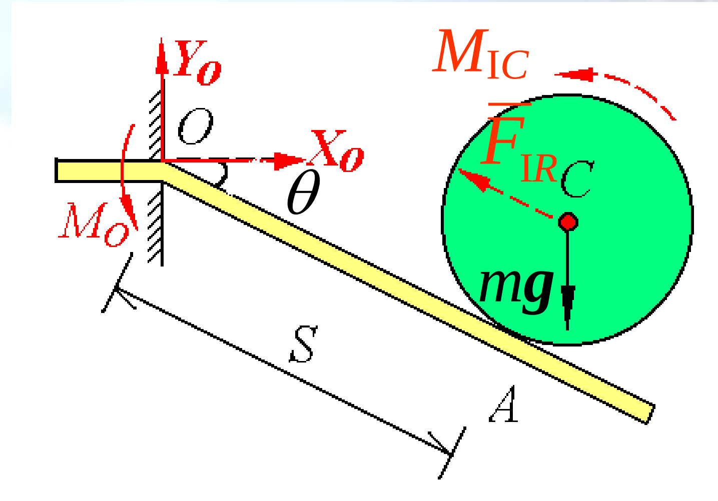
**[例3]** 均质圆柱体质量为$m$，半径为$R$，无滑动地沿倾斜平板由静止自$O$点开始滚动。平板对水平线的倾角为$\theta$，试求$OA=S$时平板在$O$点的约束反力。板的重力略去不计。




**解**：(1) 用动能定理求速度，加速度

圆柱体作平面运动。在初始位置时，处于静止状态，故$T_1=0$；在末位置时，设角速度为$\omega$，则$v_C = R\,\omega$，动能为：

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_C^{\ 2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}mv_C^{\ 2}$$




主动力的功： $W_{12} = mgS\cdot\sin\theta$

由动能定理 $T_2 - T_1 = W_{12}$ 得

$$\frac{3}{4}mv_C^{\ 2} - 0 = mgS\cdot\sin\theta \quad\Rightarrow\quad v_C^{\ 2} = \frac{4}{3}gS\cdot\sin\theta$$

对 $t$ 求导数，则： $a_C = \frac{2}{3}g\sin\theta$ ， $\alpha = \frac{2g}{3R}\sin\theta$

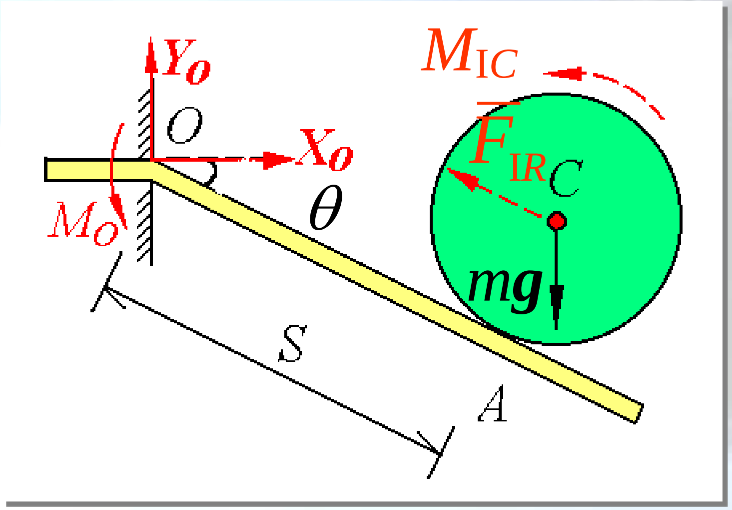
(2) 用达朗伯原理求约束反力

取系统为研究对象，虚加惯性力$\overline{F}_{IR}$和惯性力偶$M_{IC}$

$$F_{IR}=ma_C=\frac{2}{3}mg\sin\theta$$

$$M_{IC}=J\alpha=\frac{1}{2}mR^2\frac{2g}{3R}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{3}mgR\sin\theta$$




列出动静方程：

$$\sum F_x=0\ ,\quad X_O-F_{IR}\cdot\cos\theta=0\quad ,$$

$$\sum F_y=0\ ,\quad Y_O-P+F_{IR}\cdot\sin\theta=0\quad ,$$

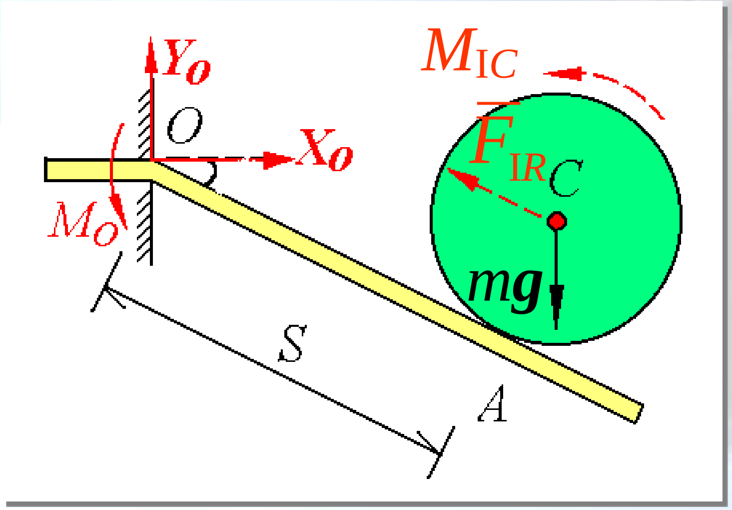
$$\sum M_O(\bar{F})=0\ ,$$

$$M_O+M_{IC}+F_{IR}\cdot R-mgS\cos\theta-mg\sin\theta\cdot R=0$$

$$X_O = \frac{1}{3} mg \sin 2\theta$$

$$Y_O = mg(1 - \frac{2}{3}\sin^2\theta)$$

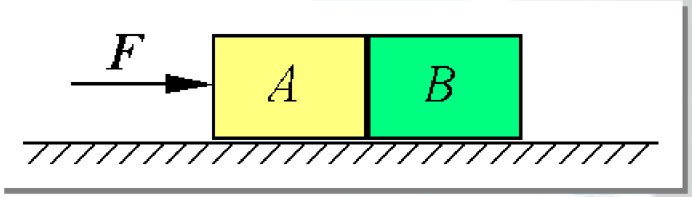
$$M_O = mg\cos\theta \cdot S$$




monshow
monshow.netease.com

## 思考题：

1. 物体系统由质量均为$m$的两物块$A$和$B$组成，放在光滑水平面上，物体$A$上作用一水平力$\boldsymbol{F}$，试用动静法说明$A$物体对$B$物体作用力大小是否等于$\boldsymbol{F}$？

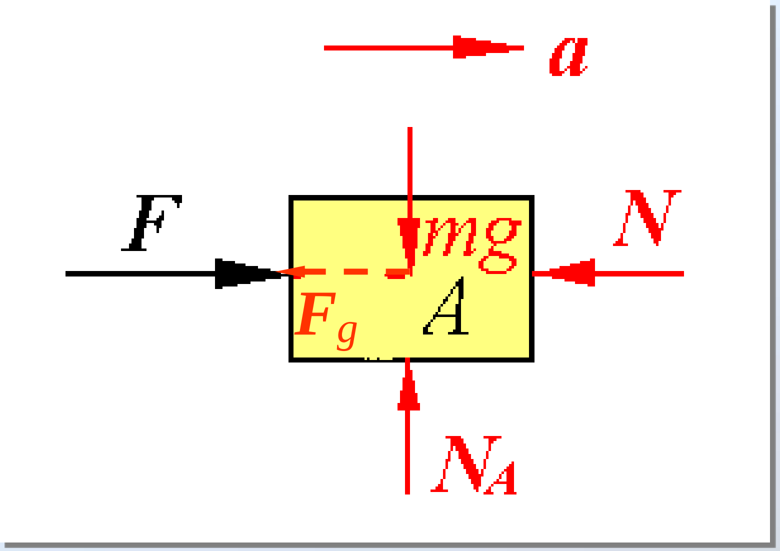



**解：**

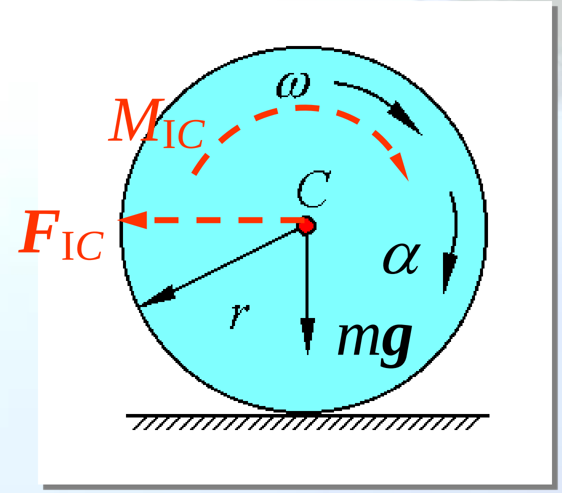
$$F - F_g - N = 0$$

$$N = F - ma \neq F$$

$$N' = N \neq F$$



2. 匀质轮质量为$m$，半径为$r$，在水平面上作纯滚动。某瞬时角速度$\omega$，角加速度为$\alpha$，求轮对质心$C$的转动惯量，轮的动量、动能，对质心的动量矩，向质心简化的惯性力系主矢与主矩。




**解:**

$$J_C = \frac{1}{2}mr^2 \qquad p = mv_C = mr\omega$$

$$(\longrightarrow)$$

$$T = \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{4}mr^2\omega^2$$

$$L_C = J_C\omega = \frac{1}{2}mr^2\omega$$

$$F_{IR} = ma_C = mr\alpha \quad , \qquad M_{IC} = J_C\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

[例2] 牵引车的主动轮质量为$m$，半径为$R$，沿水平直线轨道滚动，设车轮所受的主动力可简化为作用于质心的两个力$S$、$T$ 及驱动力偶矩$M$，车轮对于通过质心$C$并垂直于轮盘的轴的回转半径为$\rho$，轮与轨道间摩擦系数为$f$，试求在车轮滚动而不滑动的条件下，驱动力偶矩$M$ 之最大值。

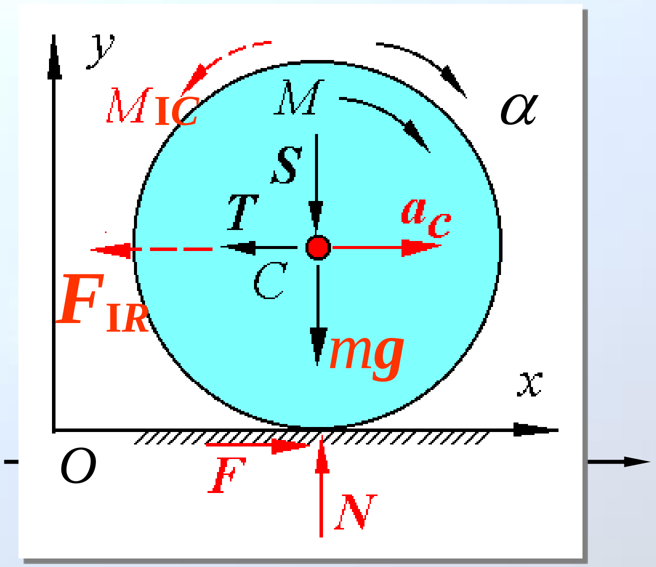
解： 取轮为研究对象

虚加惯性力系：

$$F_{IR} = ma_C = mR\alpha$$

$$M_{IC} = J_C\alpha = m\rho^2\alpha$$

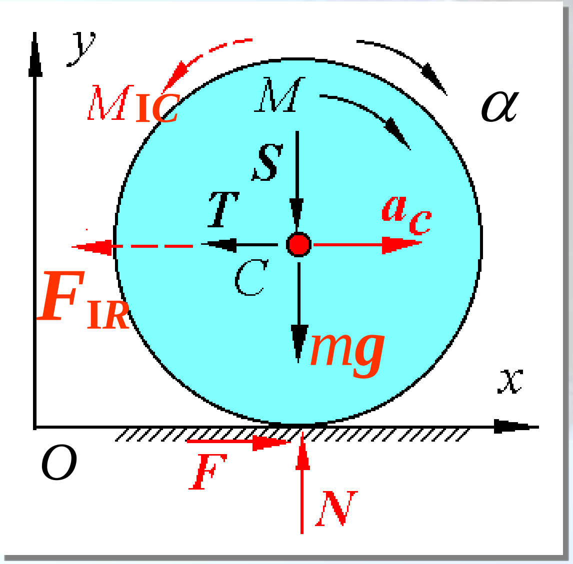
由动静法，得：



$$\sum F_x = 0\ ,\ F - T - F_{IR} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0\ ,\ N - mg - S = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_C(\bar{F}) = 0\ , -M + FR + M_{IC} = 0 \qquad (3)$$




由(1)得 $\quad F_{IR} = F - T$

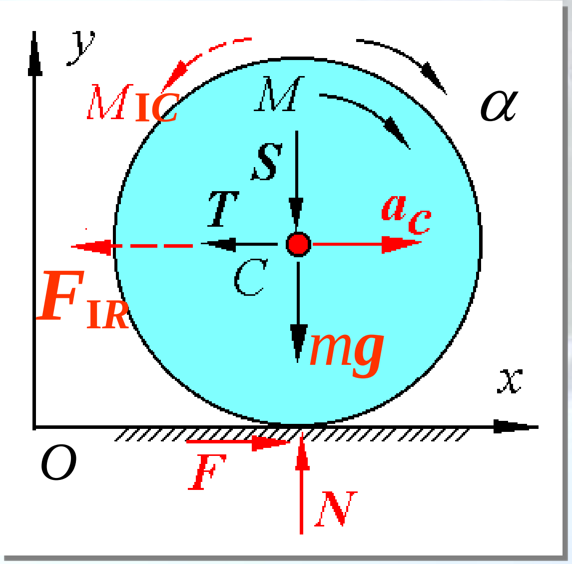
$$\because F_{IR} = mR\alpha$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{F-T}{mR}$$

由(3)得： $\quad M = FR + M_{IC} = FR + m\rho^2\alpha = FR + m\rho^2 \frac{F-T}{mR}$

$$\therefore M = F\left(\frac{\rho^2}{R} + R\right) - T\frac{\rho^2}{R} \qquad (4)$$

由(2)得： $N = mg + S$




要保证车轮不滑动，必须

$F < fN = f(mg+S)$ (5)

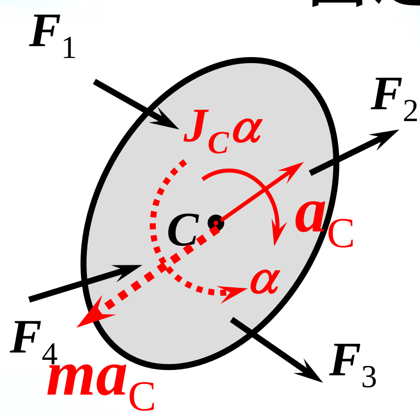
把(5)代入(4)得：

$$M < f(mg+S)\left(\frac{\rho^2}{R}+R\right) - T\frac{\rho^2}{R}$$

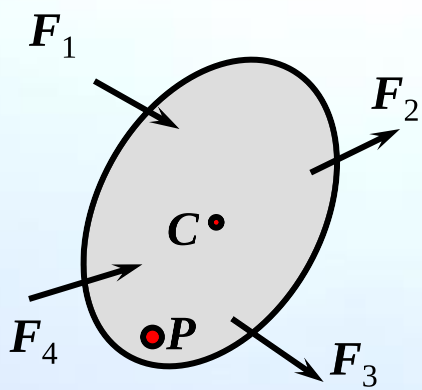
可见，*f* 越大越不易滑动。

$M_{max}$的值为上式右端的值。

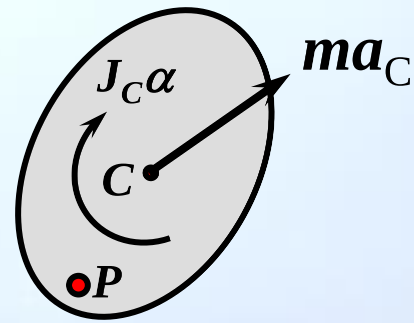
# 由达朗贝尔原理




$= 0$




$=$




$$\sum M_P(\bar{F}) = J_C\alpha + M_P(ma_C)$$

问： $\sum M_P(\bar{F}) \overset{?}{=} J_P\alpha$