材料力学

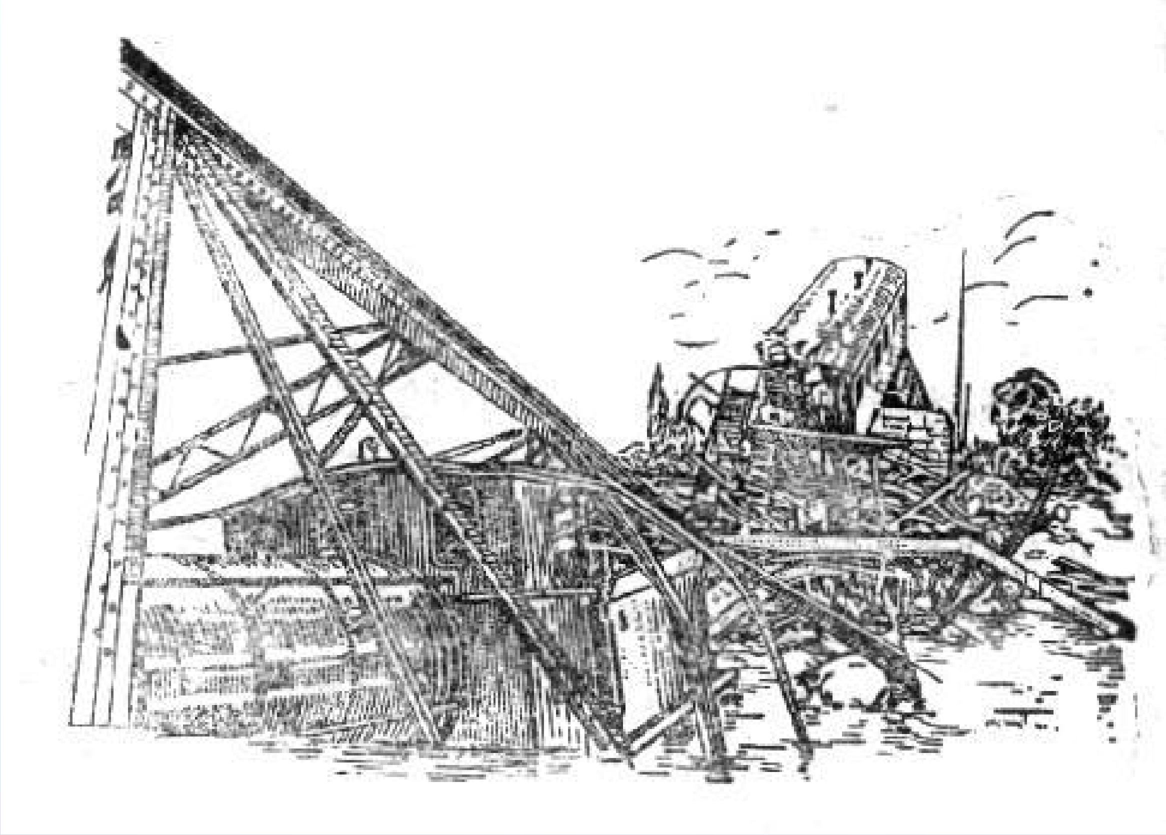
第九章 压杆稳定

第九章　压杆稳定

§ 9–1 压杆稳定的概念

构件的承载能力：

- ①强度
- ②刚度
- ③稳定性

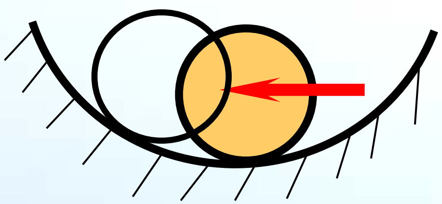


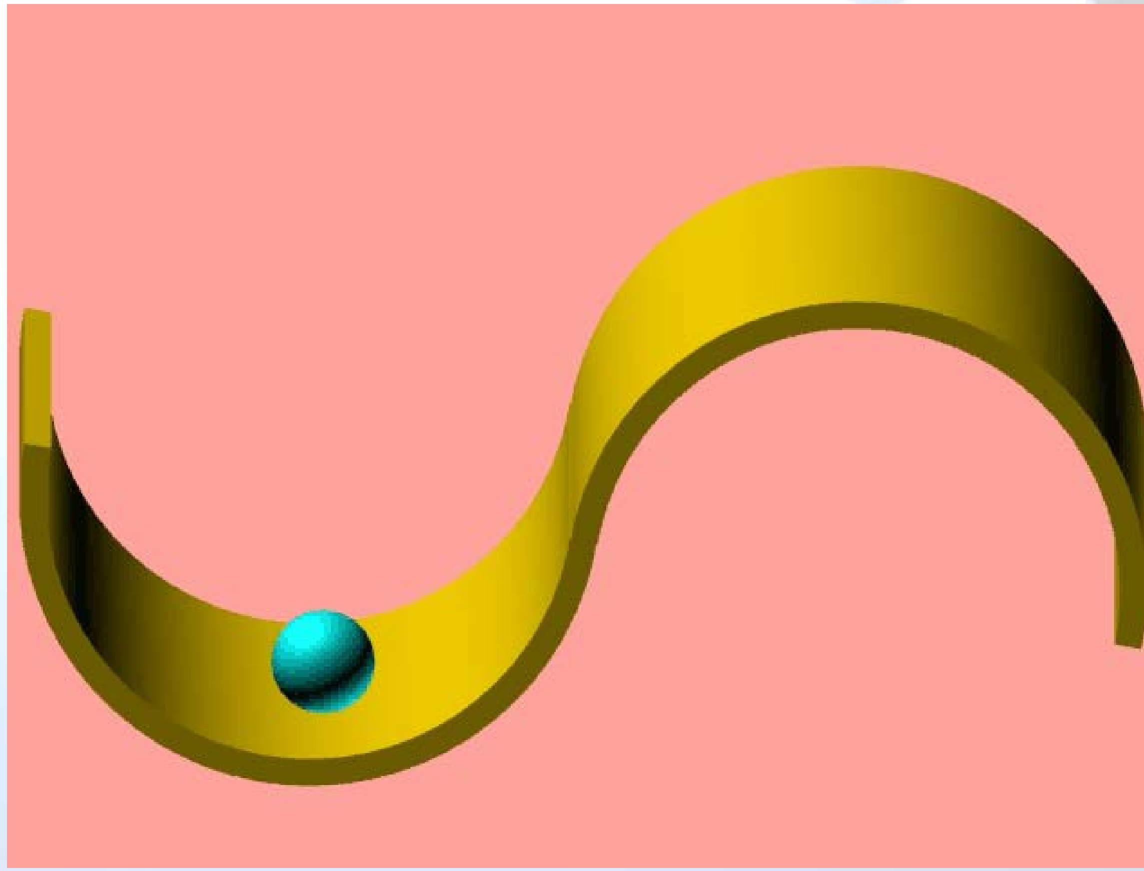
工程中有些构件具有足够的强度、刚度，却不一定能安全可靠地工作。

一、稳定性的概念

稳定性：保持原有平衡状态的能力

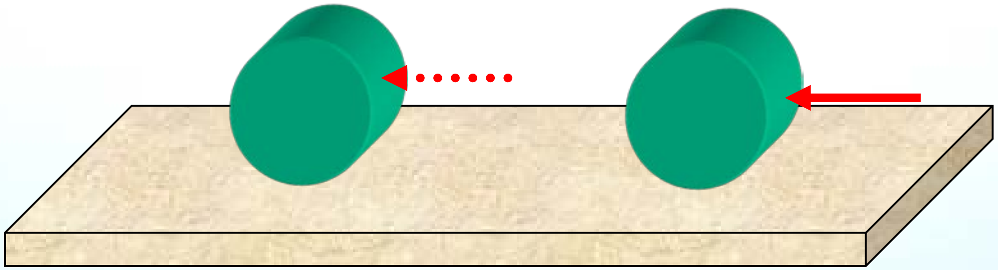
1、稳定平衡



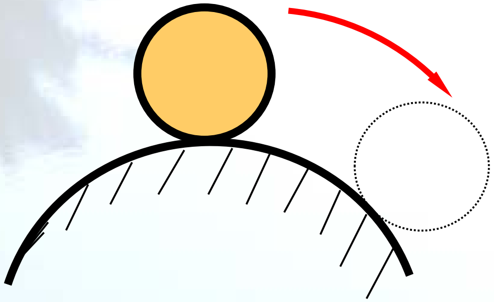


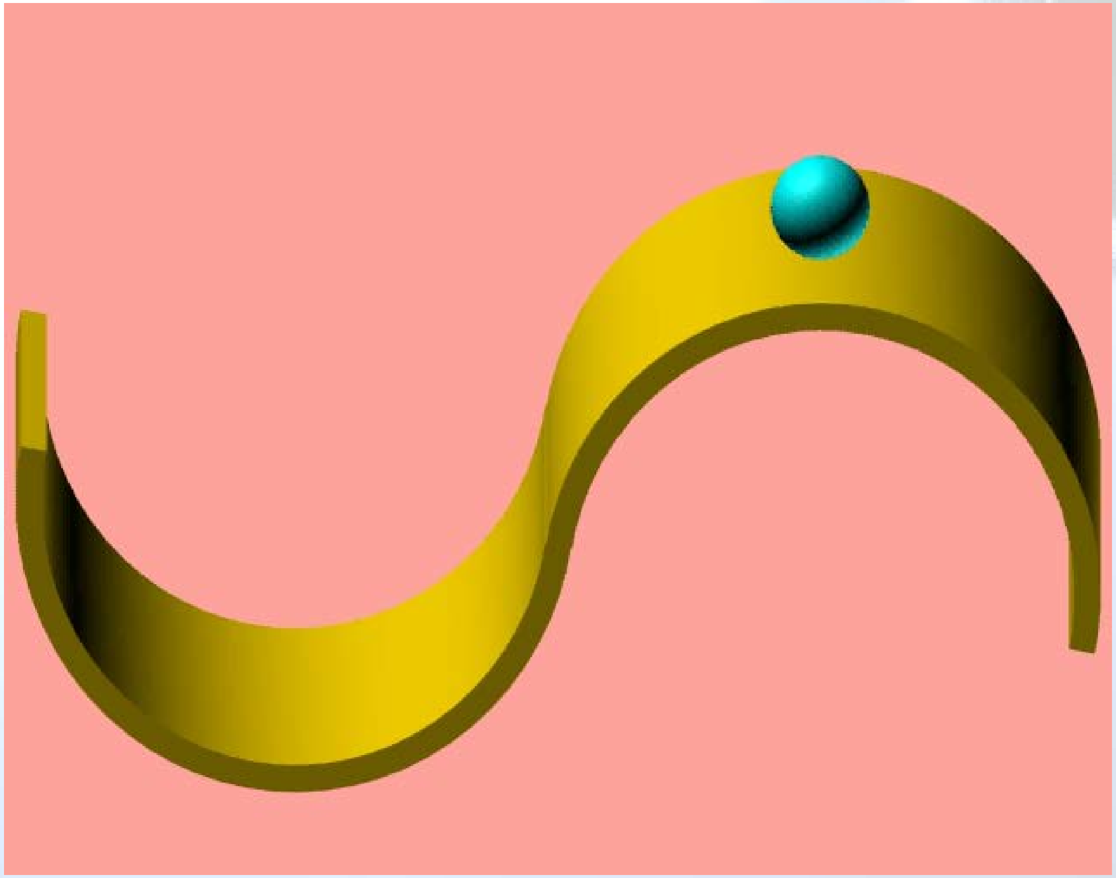
影片：14-1

2、随遇平衡



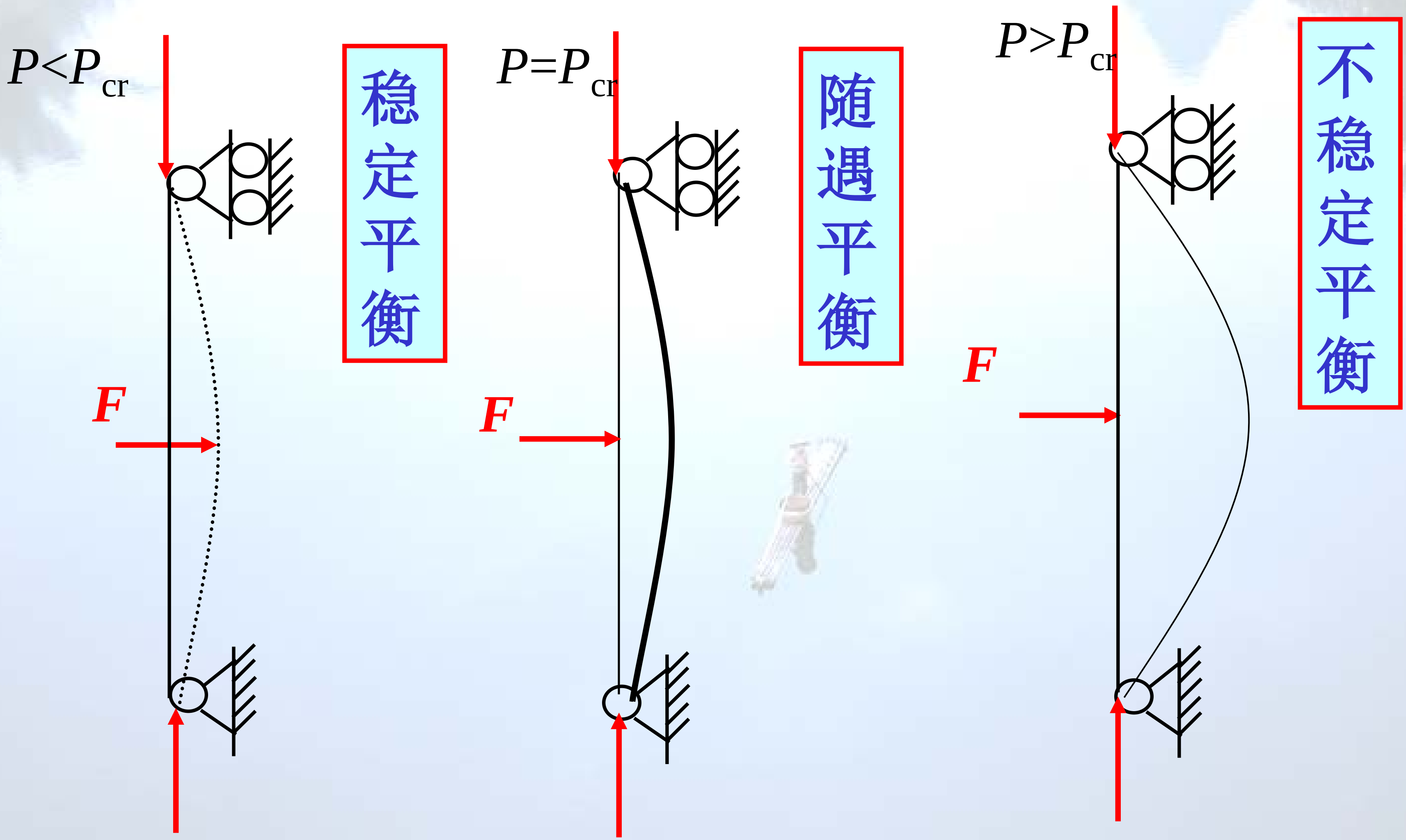
3、不稳定平衡



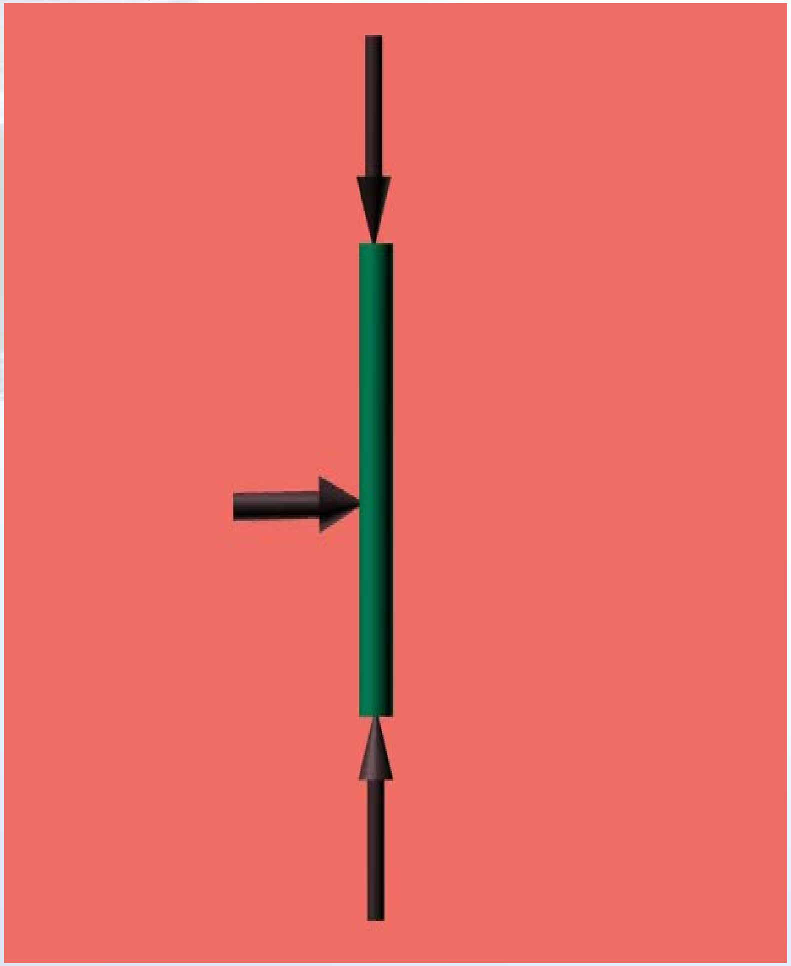


影片：**14-2**

二、压杆失稳与临界压力：

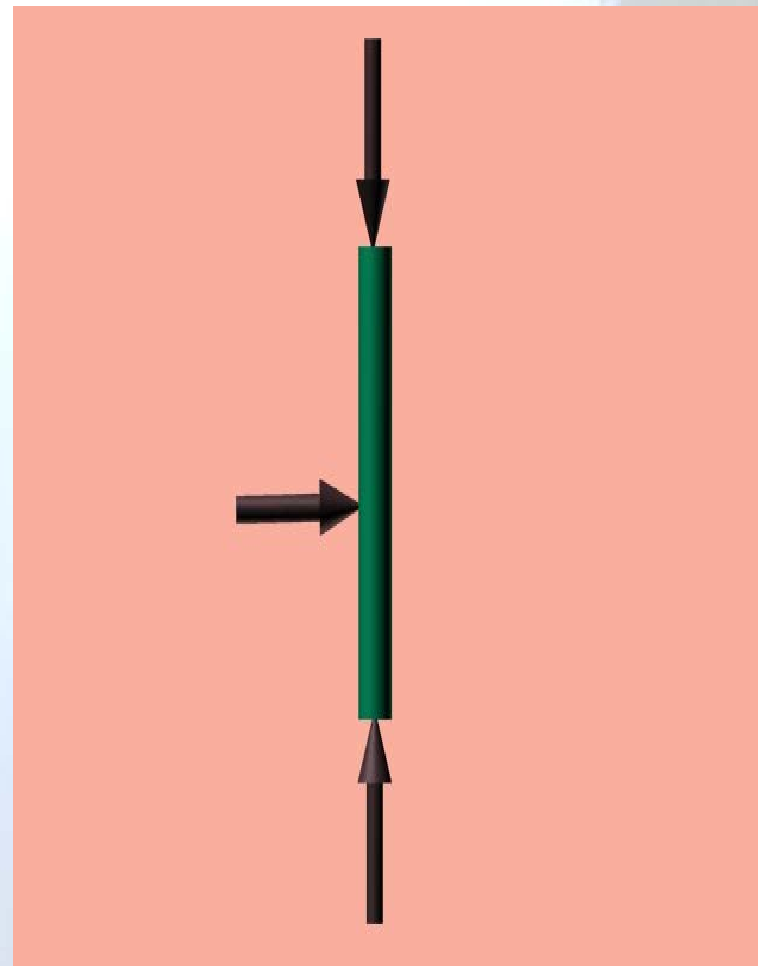


影片：14-3



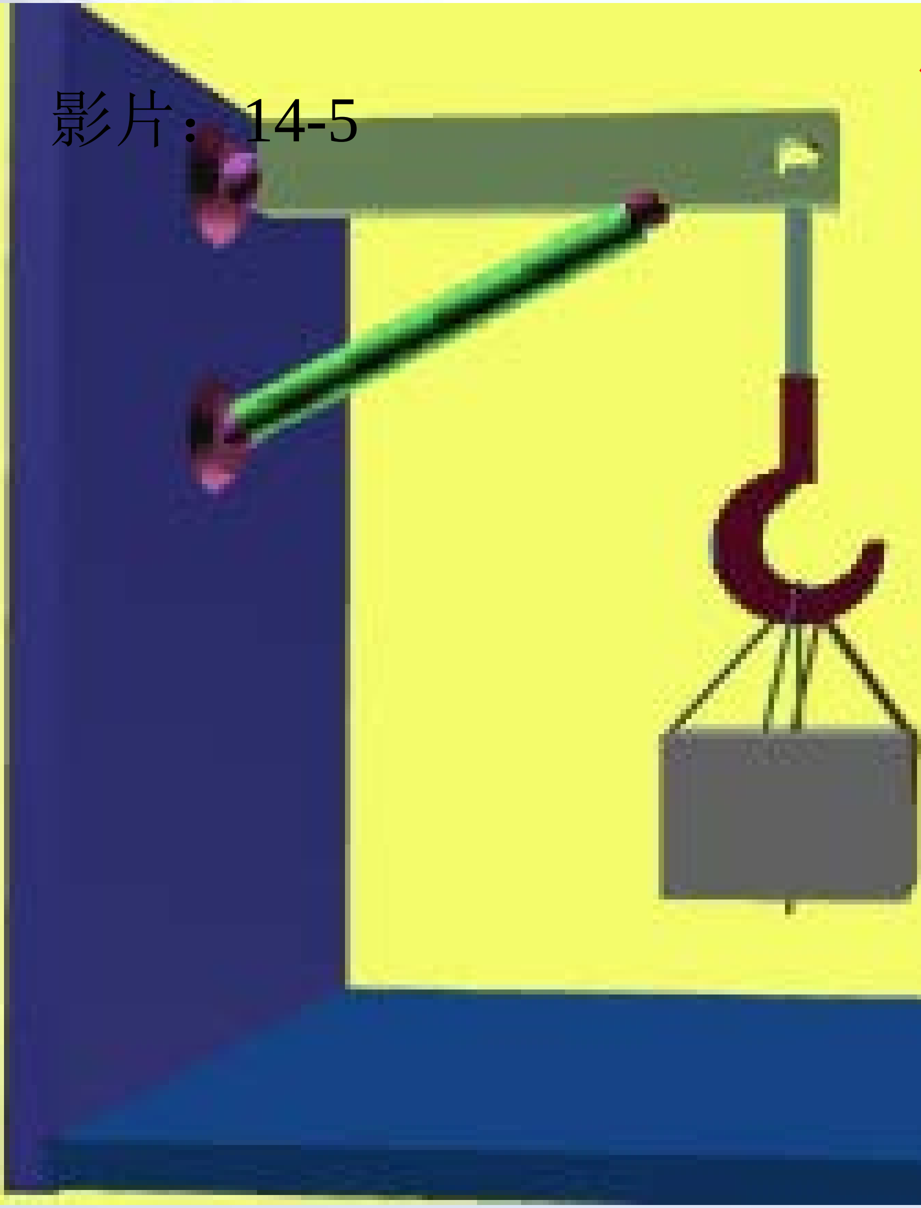
稳定平衡

影片：14-4



不稳定平衡

影片：14-5



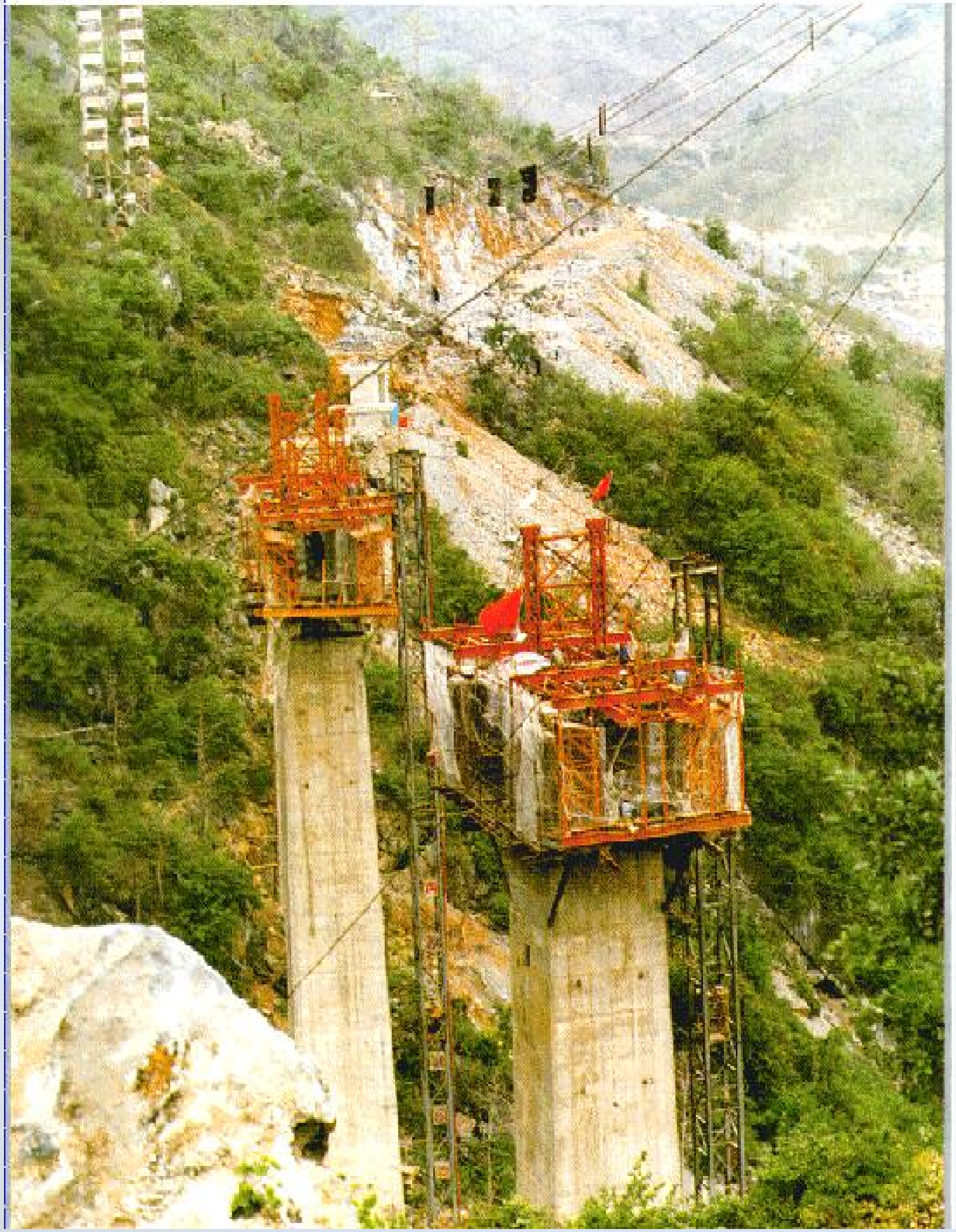
压杆的临界压力：

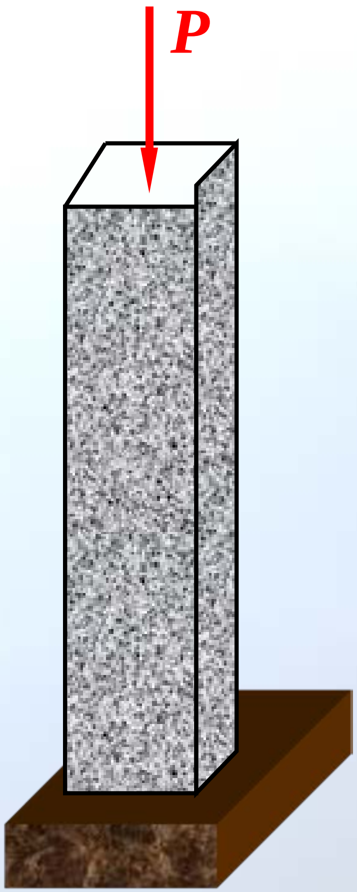
由稳定平衡转化为不稳定平衡时所受轴向压力的界限值，称为临界压力。

压杆失稳：

压杆丧失其直线形状的平衡而过渡为曲线平衡

南昆铁路重点工程之一板其2号大桥依地形、顺山势,是中国第一座弯梁桥。

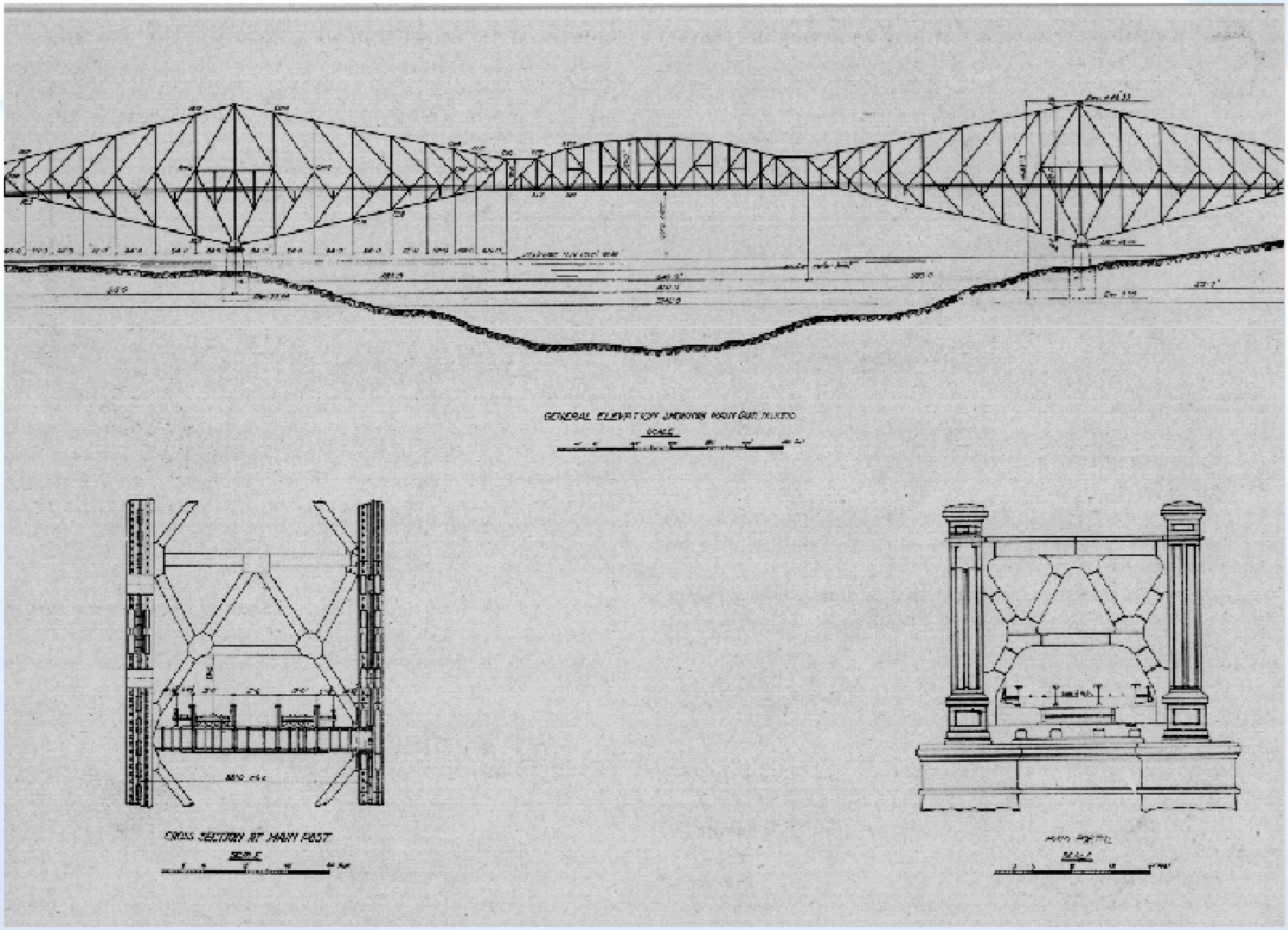




工程结构失稳的实例

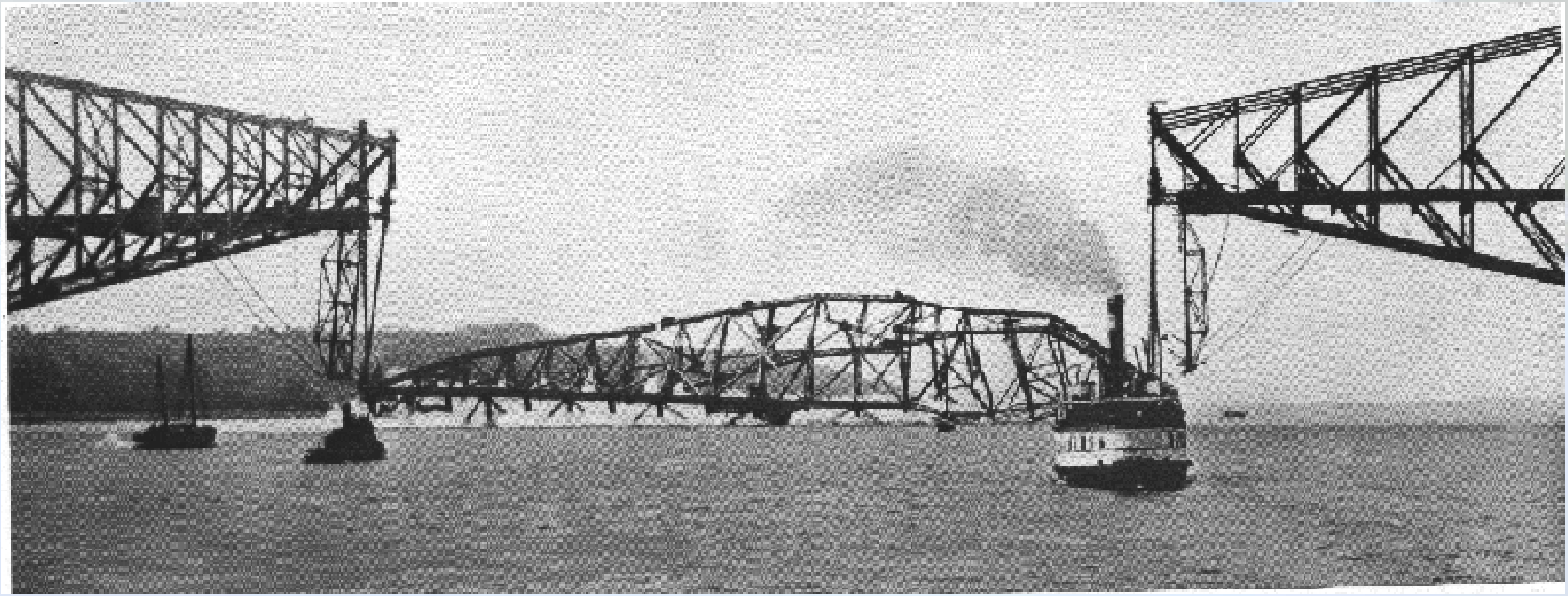
1、1907年，加拿大圣劳伦斯河魁北克大桥，在架设中跨时，由于悬臂桁架中受压力最大的下弦杆丧失稳定，致使桥梁倒塌，9000吨钢铁成废铁，桥上86人中伤亡达75人。

工程结构失稳的实例



加拿大圣劳伦斯河魁北克大桥

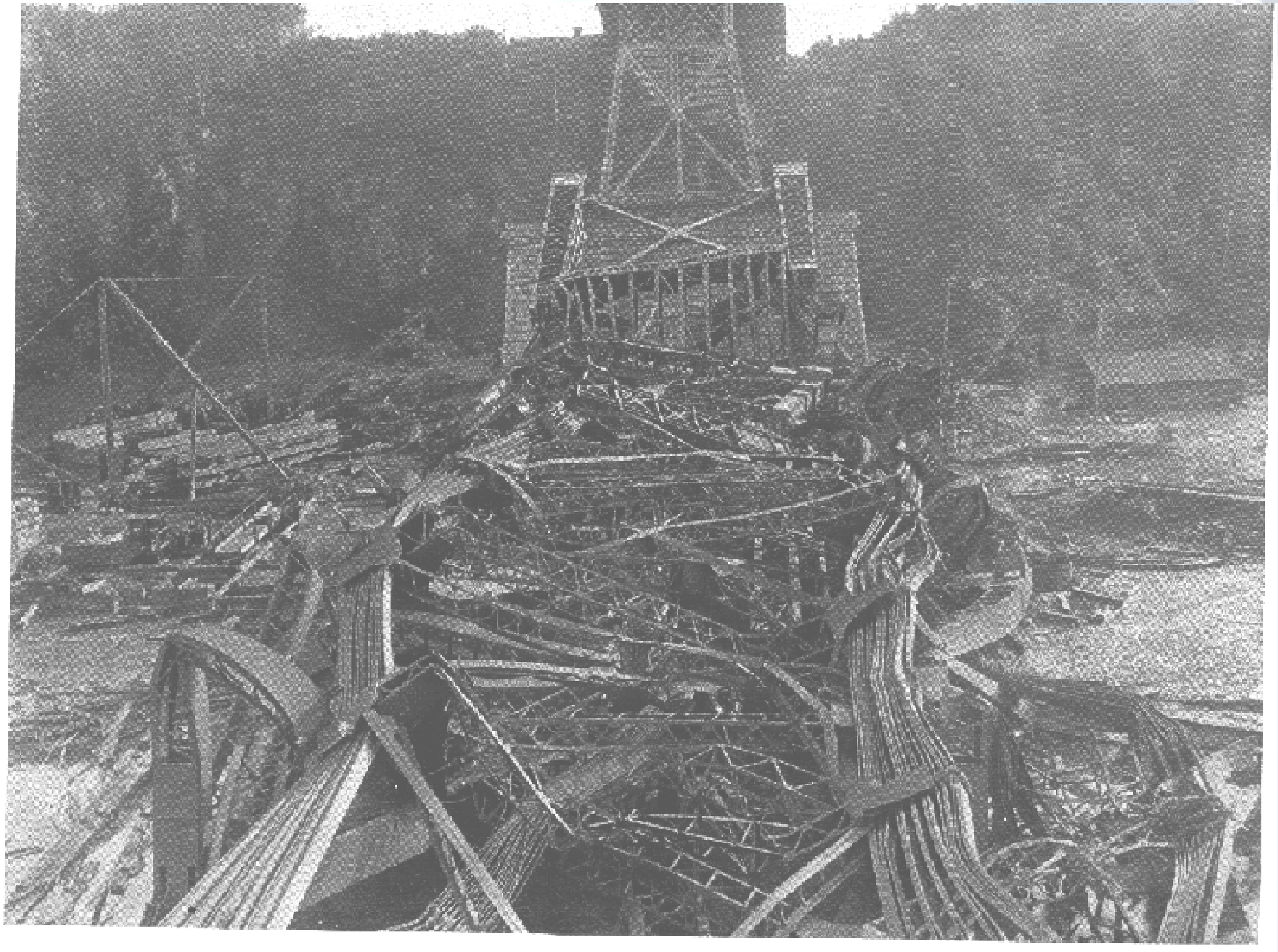
工程结构失稳的实例



采用悬臂法施工

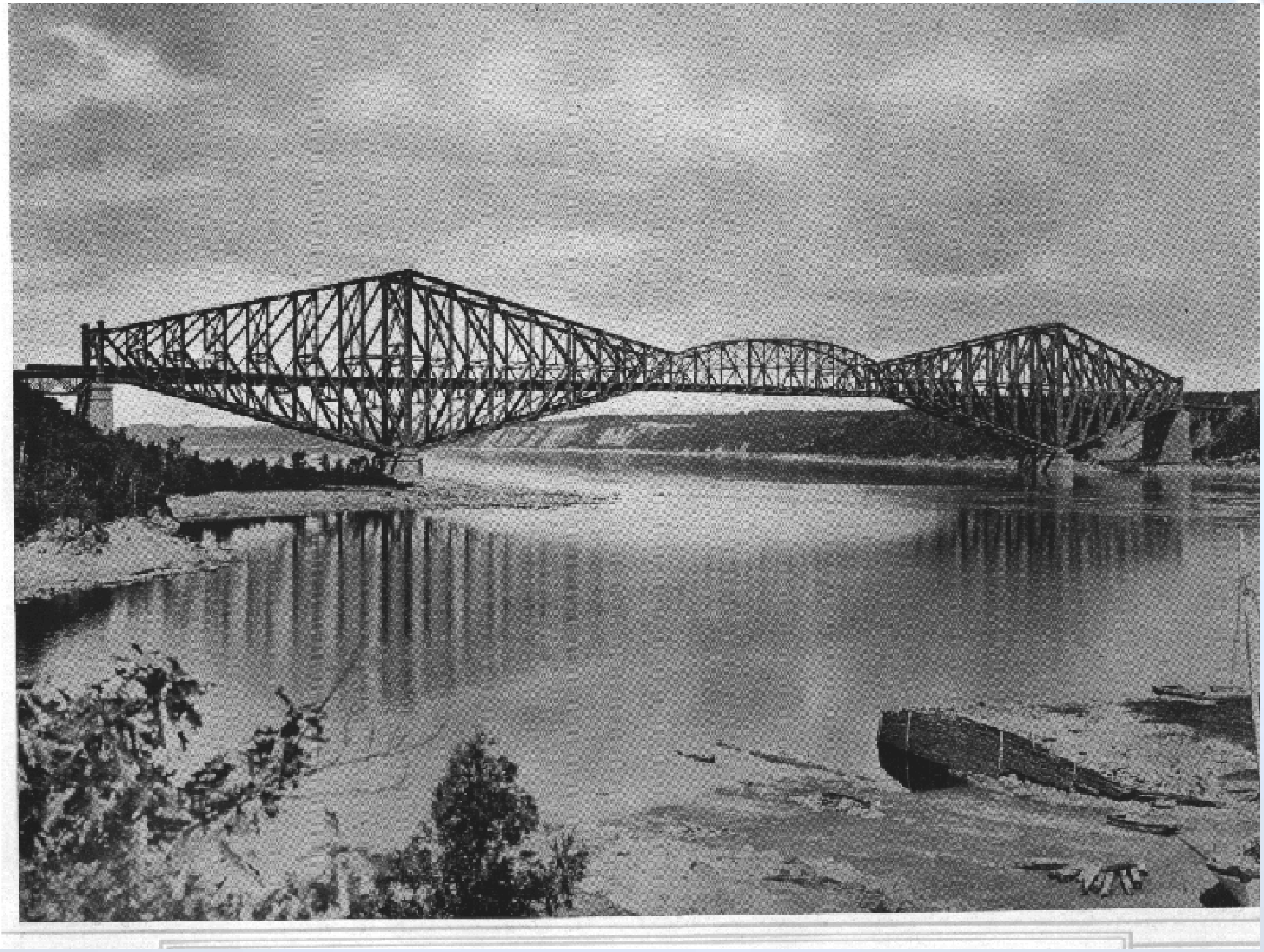
工程结构失稳的实例

因失稳倒塌



工程结构失稳的实例

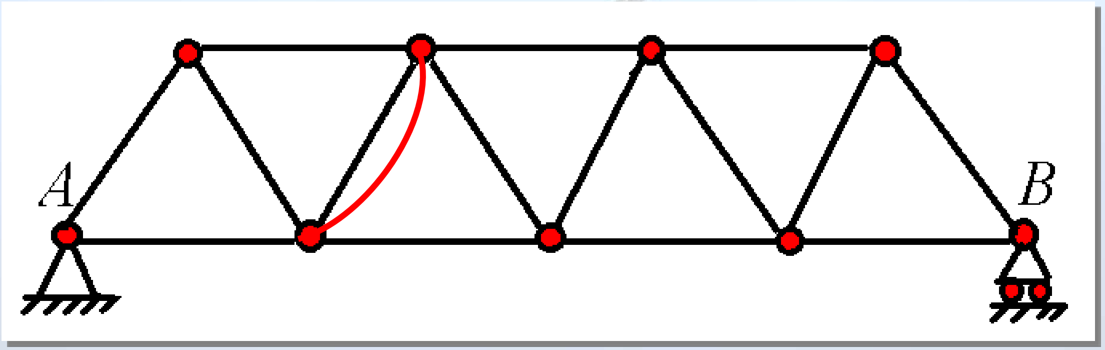
重建后的魁北克大桥

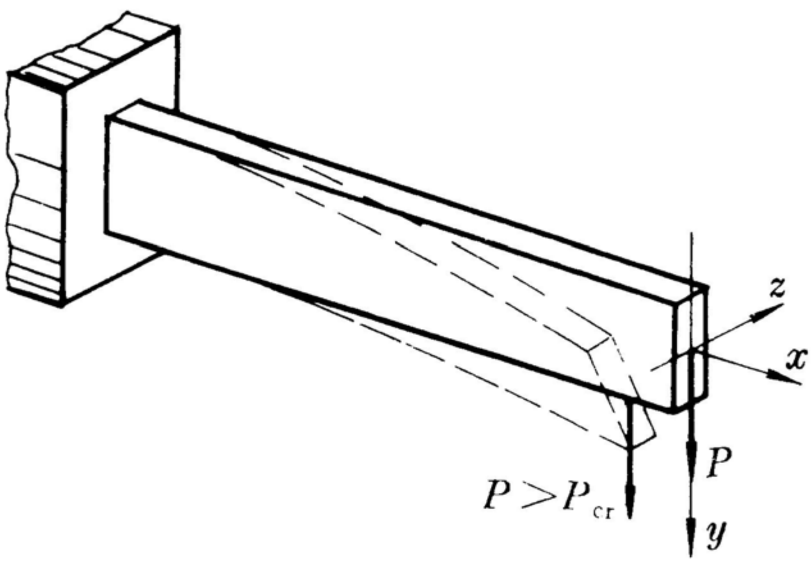


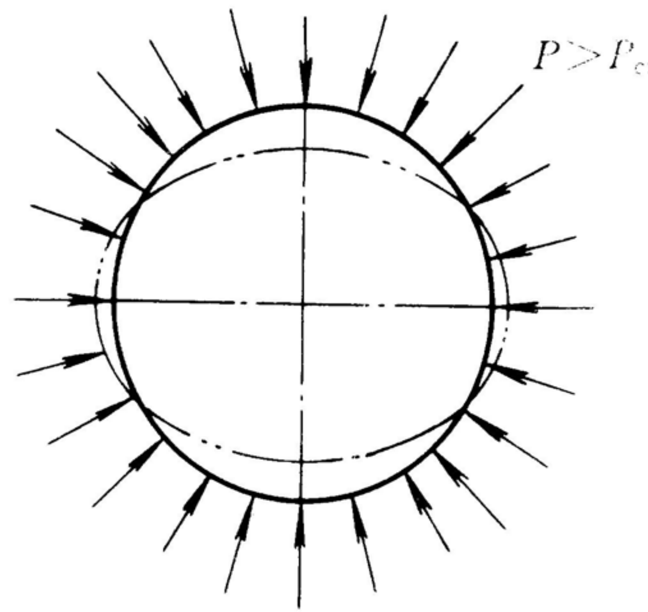
工程结构失稳的实例

2、1922年，美国华盛顿镍克尔卜克尔剧院，在大雪中倒塌，死亡98人，受伤100多人，倒塌原因是由于屋顶结构中一根梁雪后超载过甚，引起梁失稳，从而使柱和其他结构产生移动，导致建筑物的倒塌。

3、1925年，前苏联莫兹尔桥，在试车时由于桥梁桁架压杆丧失稳定而发生事故。




z
x
P
y
P > P_cr

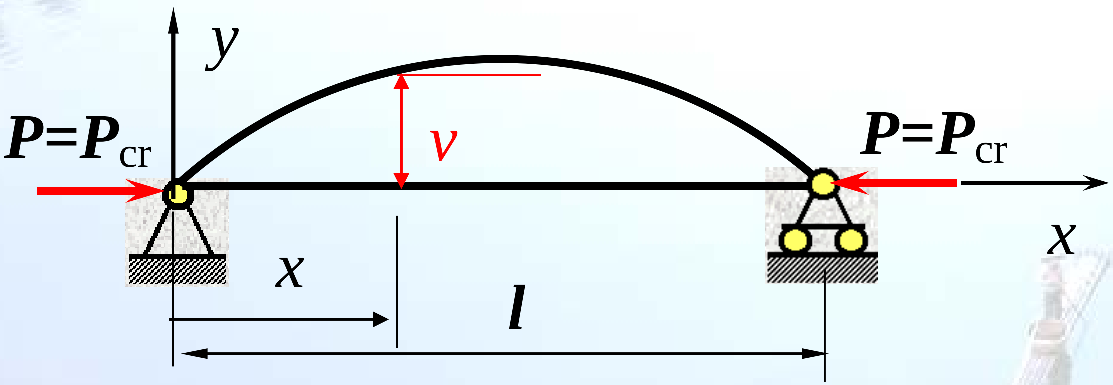

P > P_cr

§ 9–2 两端铰支 细长压杆的临界压力

假设压力P 已达到临界值，杆处于微弯状态，如图，从挠曲线入手，求临界力。

（1）弯矩：$M(x)=-Pv$

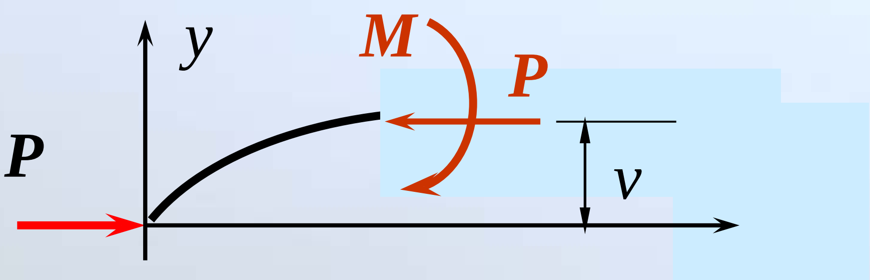
（2）挠曲线近似微分方程：



$$v''=\frac{M}{EI}$$

$$v''=-\frac{P}{EI}v$$

$$v''+\frac{P}{EI}v=0$$



令$k^2=\dfrac{P}{EI}$，　$v''+k^2v=0$

（3）微分方程的解：$v = A\sin kx + B\cos kx$

（4）确定积分常数：由边界条件 $x=0$，$v=0$；$x=l$，$v=0$ 确定

由$x=0, v=0$,得$B=0$,

即$v = A\sin kx$

由$x=l, v=0$,得$A\sin kl = 0$

$\because\ A \neq 0 \quad \therefore \sin kl = 0 \quad \therefore kl = n\pi$

$k^2 l^2 = n^2\pi^2$ ， $\therefore\ P = \dfrac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$

$\boxed{\text{由 } k^2 = \dfrac{P}{EI}\ ,}$

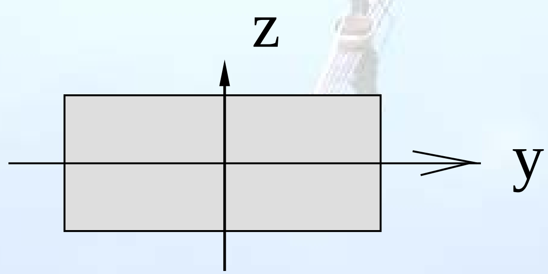
临界力 P_{cr} 是微弯下的最小压力，故，只能取n=1

$$\boxed{P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}}$$

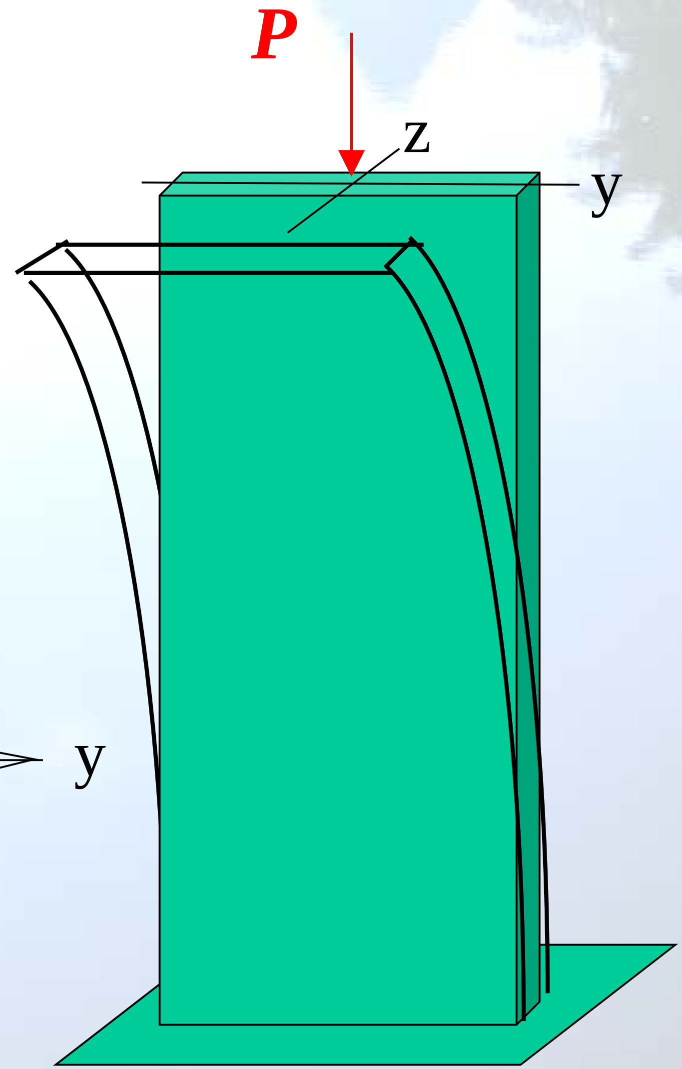
上式称为两端铰支压杆临界力的**欧拉公式**

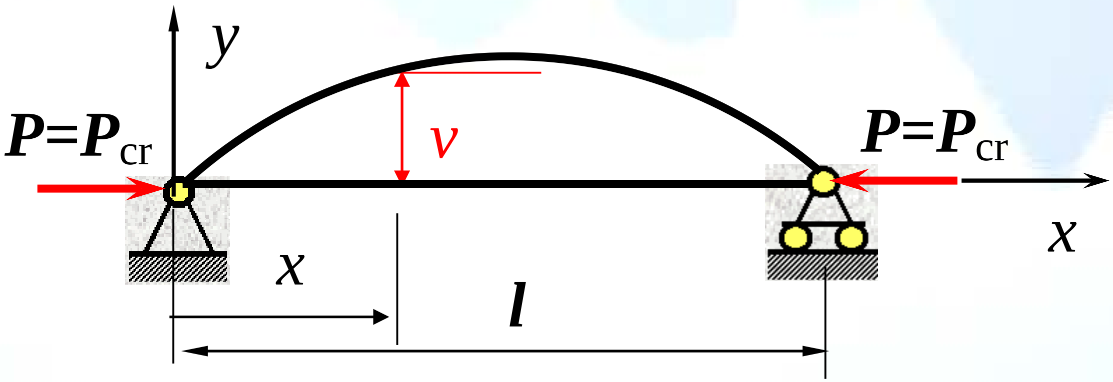
若是球铰，

式中：$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_{\mathbf{min}}$



$$I_{\min}=I_y$$



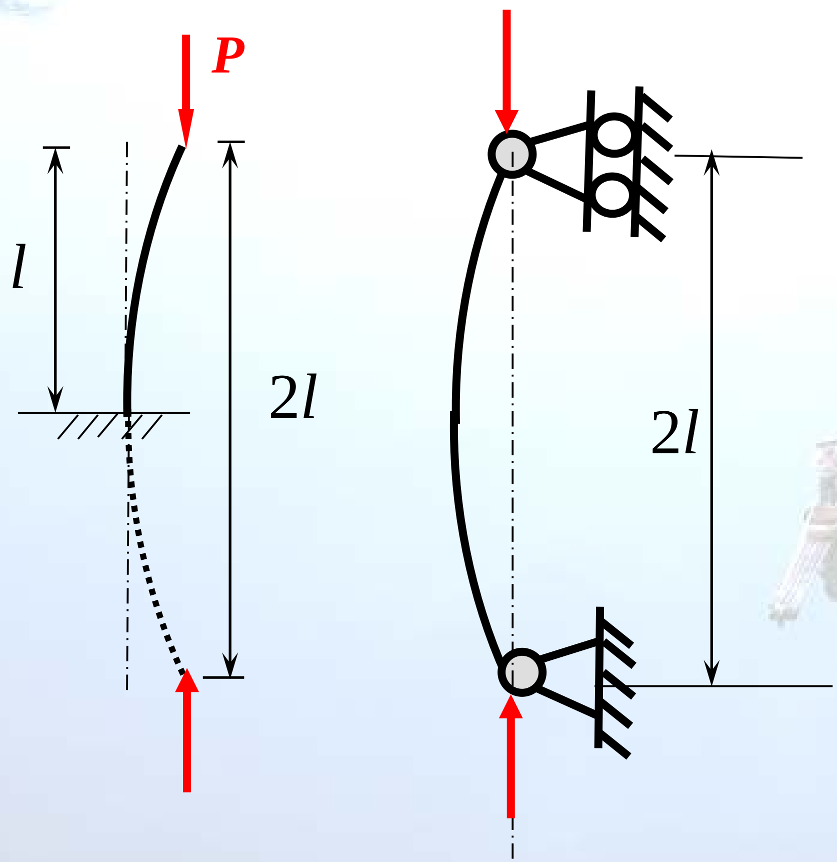


压杆的挠曲线： $v = A\sin kx = A\sin\dfrac{\pi}{l}x$

曲线为一正弦半波，A为幅值，但其值无法确定。

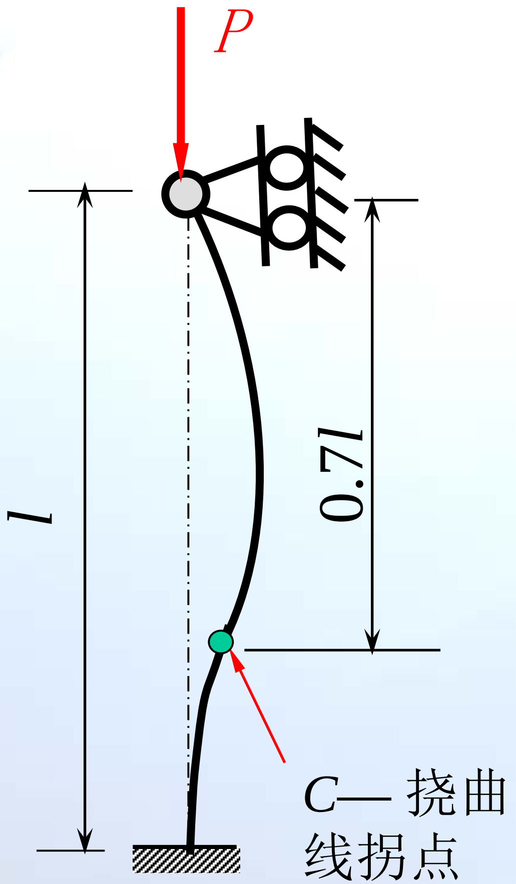
§ 9–3　其他支座条件下细长压杆的临界压力

一、一端固定、一端自由



$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

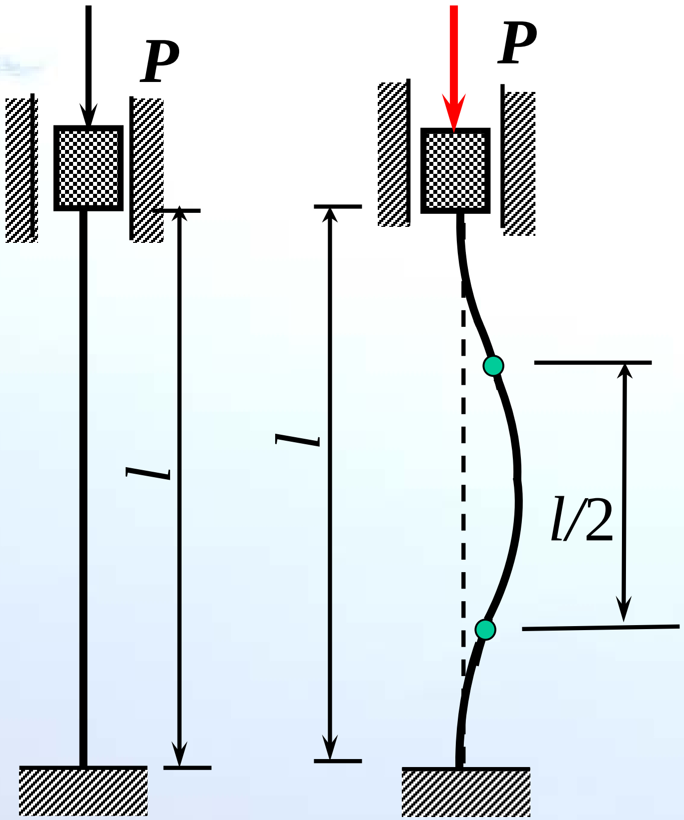
二、一端固定一端铰支



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

$$v'' = \frac{M}{EI} = 0$$

三、两端固定



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$$

其它约束情况下，压杆临界力的欧拉公式

$$\boxed{P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}}$$

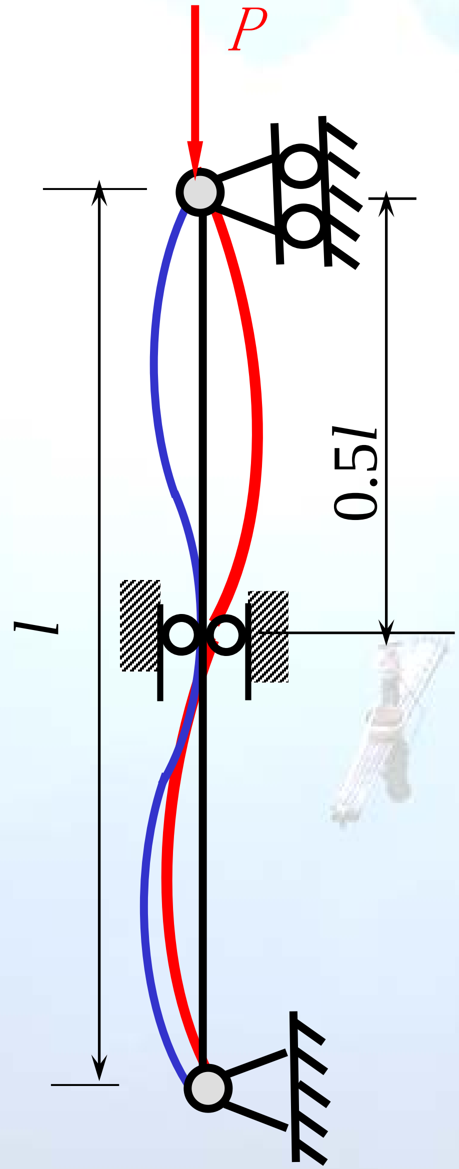
上式称为细长压杆临界压力的一般形式 ……………… **欧拉公式**

μ—长度系数（或约束系数）。

μl—相当长度

两端铰支	一端固定 一端自由	一端固定 一端铰支	两端固定
μ=1	μ =2	μ = 0.7	μ =0.5

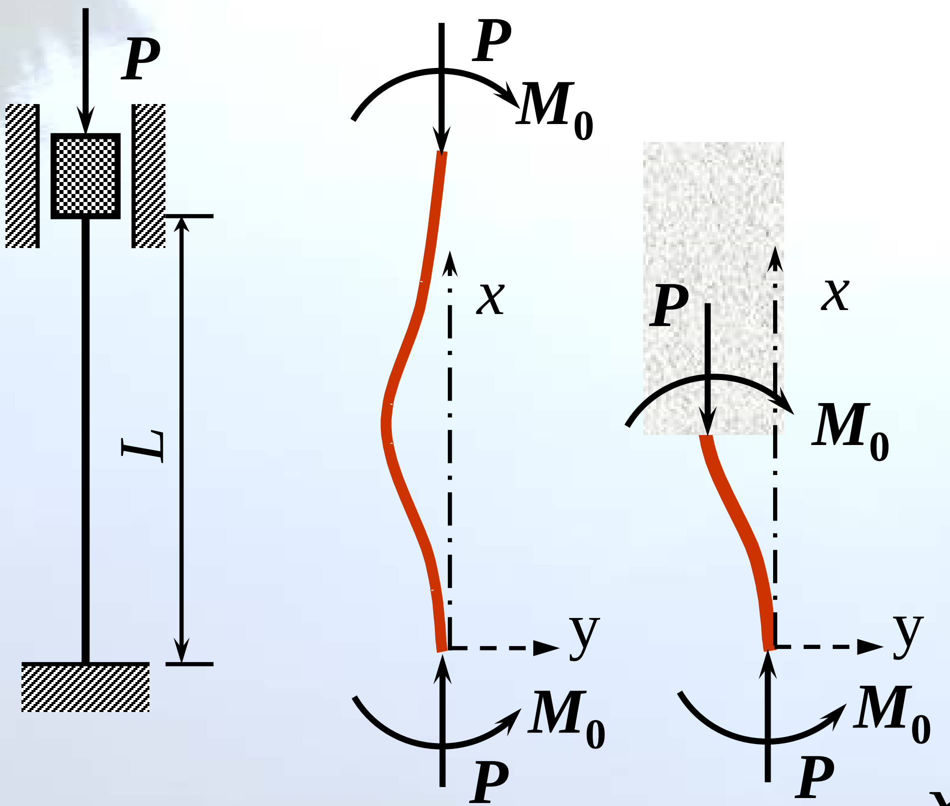
[例1]求细长压杆的临界压力



$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$$

[例2] 试由挠曲线近似微分方程，导出下述细长压杆的临界力公式。

解：变形如图，其挠曲线近似微分方程为：



$$EIv'' = M(x) = -Pv + M_0$$

$$令:k^2=\frac{P}{EI}$$

$$EIv''+k^2v=k^2\frac{M_0}{P}$$

$$v=A\cos kx+B\sin kx+\frac{M_0}{P}$$

边界条件为:

$$x=0, v=v'=0; x=L, v=v'=0$$

$$v = A\cos kx + B\sin kx + \frac{M_0}{P}$$

$$v' = -Ak\sin kx + Bk\cos kx$$

由$x=0, v=0$,得$A=-\dfrac{M_0}{P}$,

由$x=0, v'=0$,得$B=0$,

$$v = -\frac{M_0}{P}\cos kx + \frac{M_0}{P}$$

$$v' = \frac{M_0}{P}k\sin kx$$

由$x=l, v=0$,得$\cos kl=1$,即$kL=2n\pi$

由$x=l, v'=0$,得$\sin kl=0$ 即 $kL=n\pi$

$$\Rightarrow kl = 2n\pi$$

$$\because \ kL = 2n\pi \qquad k^2 = \frac{4n^2\pi^2}{L^2}$$

$$又 \because k^2 = \frac{P}{EI}$$

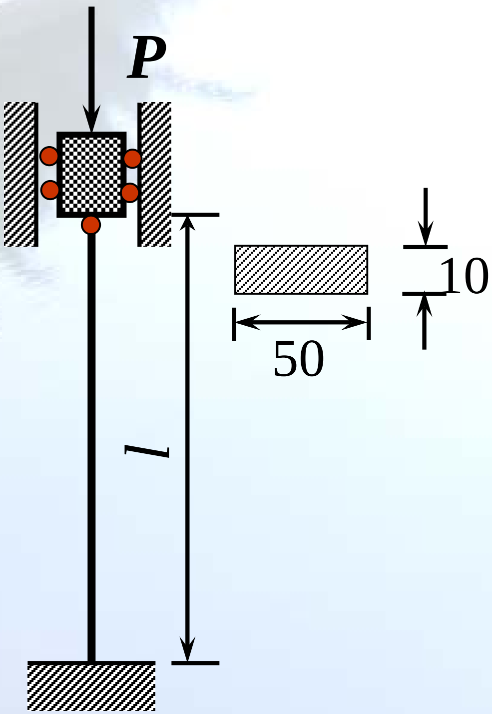
$$\therefore P = k^2 EI = \frac{4n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

为求最小临界力，**P**应取除零以外的最小值，即取：n=1

所以，临界力为：

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} \qquad \mu = 0.5$$

[例3]　求细长压杆的临界力。l=0.5m，E=200GPa



解：$I_{\min}=\dfrac{50\times10^3}{12}=4.17\times10^3\,\mathbf{(mm^4)}$

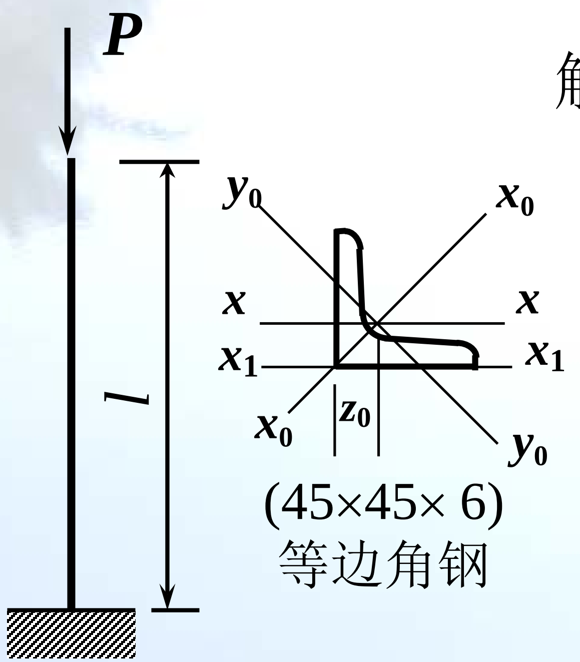
$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

$$=\frac{\pi^2\times200\times10^3\times4.17\times10^3}{(0.7\times500)^2}$$

$$=67.14\times10^3\,(\mathrm{N})$$

$$=67.14\,\mathbf{(kN)}$$

［例3］ 已知：压杆为$Q235$钢，l=0.5m，E=200GPa，求细长压杆的临界压力。



解：$I_{min}=I_{y_0}=3.89\text{cm}^4=3.89\times10^4\,\mathbf{mm}^4$

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}$$

$$=\frac{\pi^2\times200\times10^3\times3.89\times10^4}{(2\times500)^2}$$

$$=76.8\times10^3\text{(N)}\ =76.8\,\mathbf{(kN)}$$

若是Q235钢，σ_s=235MPa，则杆子的屈服载荷：

$$P_s=\sigma_s\cdot A=235\times5.076\times10^2$$

$$=119\times10^3\text{(N)}=119\,\mathbf{(kN)}$$

可见杆子失稳在先，屈服在后。

§ 9-4　欧拉公式的适用范围　　经验公式

一、临界应力

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}=\frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2}\cdot\frac{I}{A}$$

$(i=\sqrt{\frac{I}{A}}$ ——惯性半径)

$$=\frac{\pi^2 E\, i^2}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 E}{(\frac{\mu l}{i})^2}$$

记：$\lambda=\frac{\mu\, l}{i}$ ——杆的柔度（或长细比）

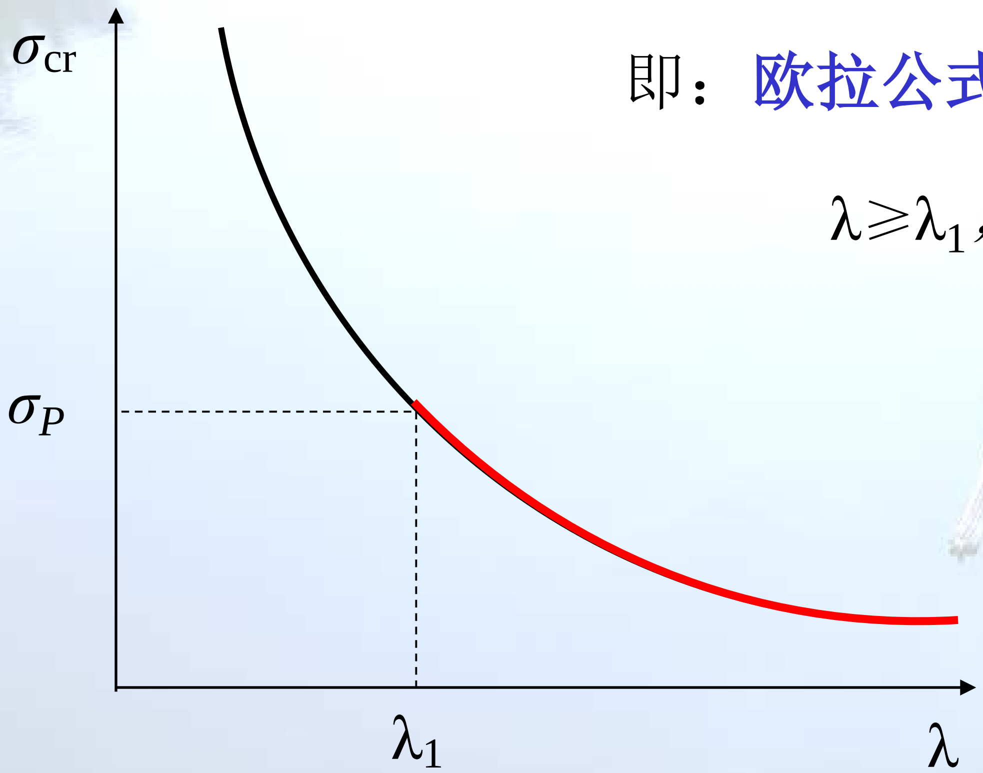
$$\boxed{\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

欧拉公式

二、欧拉公式 的应用范围

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

在 $\sigma_{cr} \le \sigma_P$ 时成立



即：**欧拉公式的使用条件是**

$\lambda \geq \lambda_1$，大柔度杆

$$\because \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = \sigma_P$$

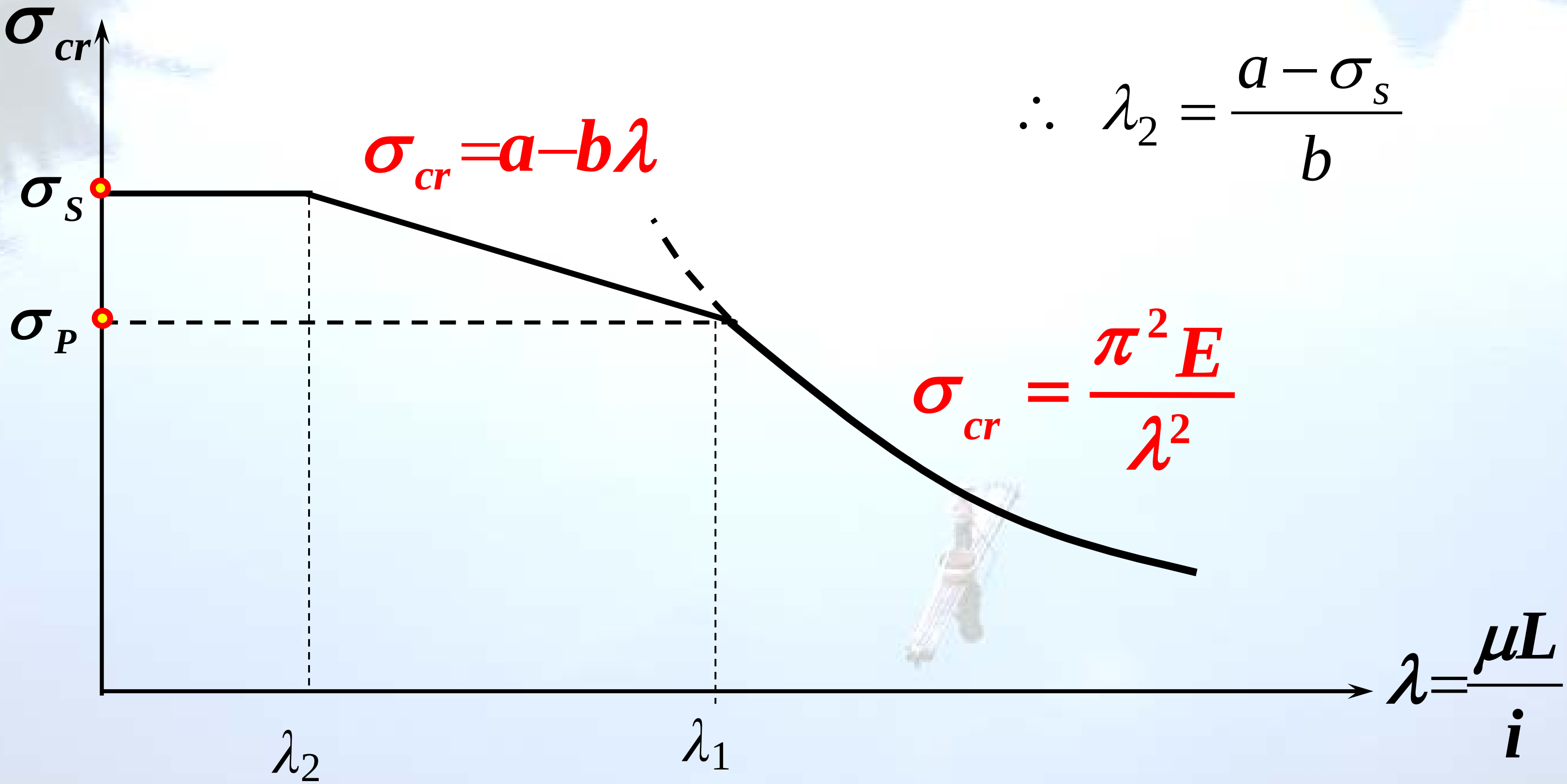
$$\therefore \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}}$$

Q235钢，$\lambda_1 = 100$

三、压杆的临界应力总图

$$\sigma_s = a - b\lambda_2$$

$$\therefore \quad \lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b}$$



临界应力总图

四、小结

$\lambda \geq \lambda_1$，大柔度杆 $\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

$\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_1$，中柔度杆 $\sigma_{\mathrm{cr}} = a - b\lambda$

$\lambda \leq \lambda_2$，粗短杆 $\sigma_{\mathrm{cr}} = \sigma_{\mathrm{s}}$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad \lambda = \frac{\mu l}{i} \qquad \lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}} \qquad \lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

$$P_{\mathrm{cr}} = \sigma_{\mathrm{cr}} \cdot A \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

四、小结

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}} \qquad \lambda=\frac{\mu l}{i} \qquad \lambda_1=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}} \qquad \lambda_2=\frac{a-\sigma_s}{b}$$

λ≥λ_1，大柔度杆 $$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$\lambda_2\le\lambda\le\lambda_1$，中柔度杆 $$\sigma_{cr}=a-b\lambda$$

$\lambda\le\lambda_2$，粗短杆 $$\sigma_{cr}=\sigma_s$$

$$P_{cr}=\sigma_{cr}\cdot A \qquad P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

§ 9-5　压杆的稳定校核

1. 安全系数法：

$$n=\frac{P_{cr}}{P}$$ —— 工作安全系数

稳定条件： $$n \geq n_{st}$$ n_{st}—规定的安全系数

2. 折减系数法：

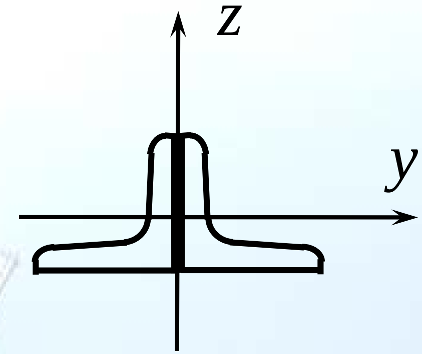
轴向压缩强度条件： $$\sigma=\frac{P}{A} \leq [\sigma]$$

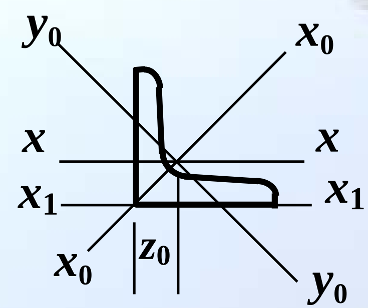
稳定条件： $$\sigma=\frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma]$$

$\varphi \rightarrow$折减系数，<1，是λ的函数,

对于钢结构、木结构和混凝土结构，由设计规范确定，可以查表或查计算公式而得到。

[例4] 一压杆长l=1.5m，由两根 56×56×8 等边角钢组成，两端铰支，压力P=150kN，材料为Q235钢， E=200GPa，σ_P=200MPa， σ_S=235MPa， a=304MPa，b=1.12MPa， n_{st} =2，试校核其稳定性。(一个角钢A_1=8.367cm^2，I_x=23.63cm^4，I_{x1}=47.24cm^4，z_0=1.68cm ）





解：两根角钢图示组合之后

$$I_y = 2I_x = 2\times 23.63 = 47.26\text{cm}^4$$

$$I_z = 2I_{x_1} = 2\times 47.24 = 94.486\text{cm}^4$$

$$I_y < I_z \ , \qquad \therefore\ i = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{47.26}{2\times 8.367}} = 1.68\text{cm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1\times 150}{1.68} = 89.3$$

Q235钢： $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}} = \sqrt{\frac{\pi^2\times 200\times 10^3}{200}} = 99$

$$\lambda_2 = \frac{a-\sigma_s}{b} = \frac{302-235}{1.12} = 61.6 \qquad \therefore\ \lambda_2 < \lambda < \lambda_1$$

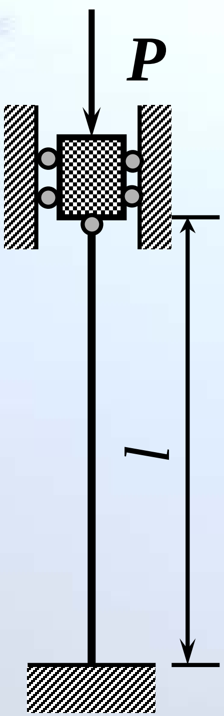
$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1.12\times 89.3 = 204(\mathrm{MPa})$$

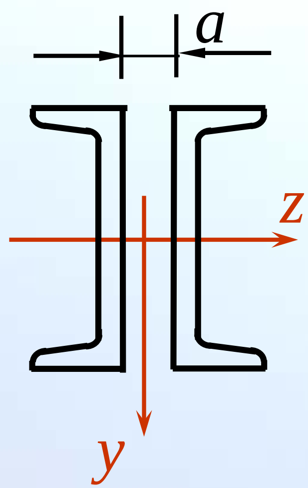
$$P_{cr} = \sigma_{cr}\cdot A = 204\times(836.7\times 2) = 341(\mathrm{kN})$$

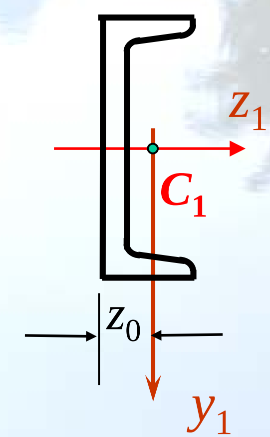
$$n = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{341}{150} = 2.27\ > n_{\mathrm{st}}$$

∴杆子满足稳定性要求。

[例5] 图示立柱，l=6m，由两根10号槽钢组成，下端固定，上端为球铰支座，材料为Q235钢，E=200GPa，σ_P=200MPa，试问（1）a取多少时立柱的临界压力最大；（2）若 n_{st}=3，则许可压力值为多少？($I_{z1}=198.3\text{cm}^4$，$I_{y1}=25.6\text{cm}^4$，$A_1=12.74\text{cm}^2$，$z_0=1.52\text{cm}$)







解：

两根槽钢图示组合之后，

$$I_z=2I_{z1}=2\times198.3=396.6\text{cm}^4$$

$$I_y=2[I_{y1}+A_1(z_0+a/2)^2]$$

$$=2\times[25.6+12.74\times(1.52+a/2)^2]$$

当$I_y=I_z$时合理；得 a=4.32cm

求临界压力： $\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}}=\frac{0.7\times600}{\sqrt{\frac{396.6}{2\times12.74}}}=106.5$

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_P}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times200\times10^3}{200}}=99.3$$

$$\lambda>\lambda_1$$

大柔度杆，由欧拉公式求临界力。

$$P_{cr}=\sigma_{cr}\cdot A=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}\cdot A=\frac{\pi^2\times200\times10^3}{(106.5)^2}\times2\times1274$$

$$=443.8\times10^3(\mathrm{N})\quad=443.8(\mathrm{kN})$$

$\boxed{\text{或:}}$

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^3\times 396.6\times 10^4}{(0.7\times 6\times 10^3)^2}$$

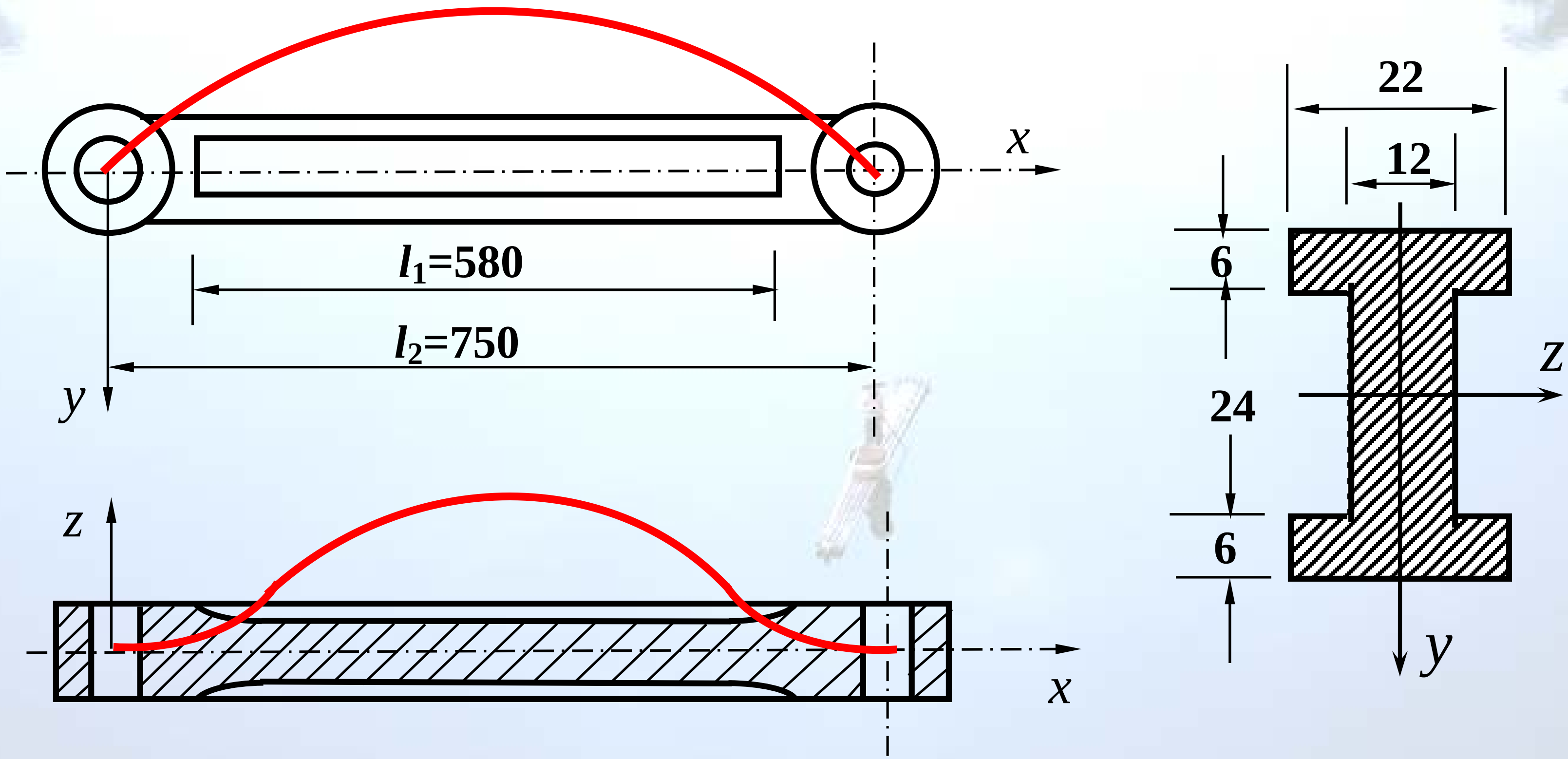
$$=443.8\times 10^3(\mathrm{N})\ \ =443.8(\mathrm{kN})$$

稳定条件: $\frac{P_{cr}}{P}\geq n_{st}$

$$\therefore\ P\leq\frac{P_{cr}}{n_{st}}=\frac{443.8}{3}=148(\mathrm{kN})$$

∴许可压力P≤148kN

[例7]　工字形截面连杆，材料3号钢，两端柱形铰，在xy平面内失稳，μ_z=1.0，在xz平面内失稳，μ_y=0.6。已知P=35kN，[σ]=206MPa，符合规范中a类中心受压杆的要求，试校核其稳定性。



解：（1）计算横截面的几何性质

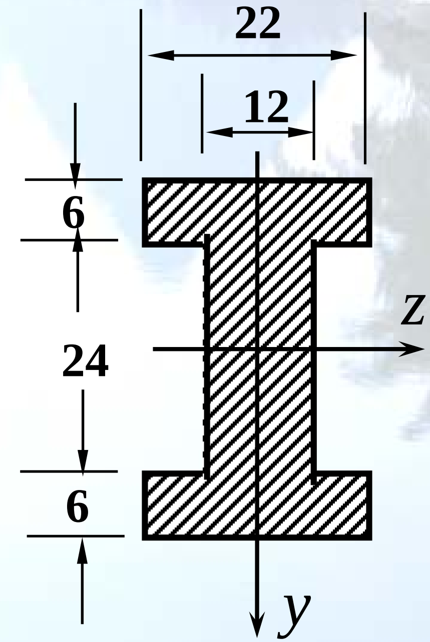
$$A=552\text{mm}^2$$

$$I_z=7.4\times10^4\text{mm}^4$$

$$I_y=1.41\times10^4\text{mm}^4$$

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{7.4\times10^4}{552}}=11.58\text{mm}$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{1.41\times10^4}{552}}=5.05\text{mm}$$



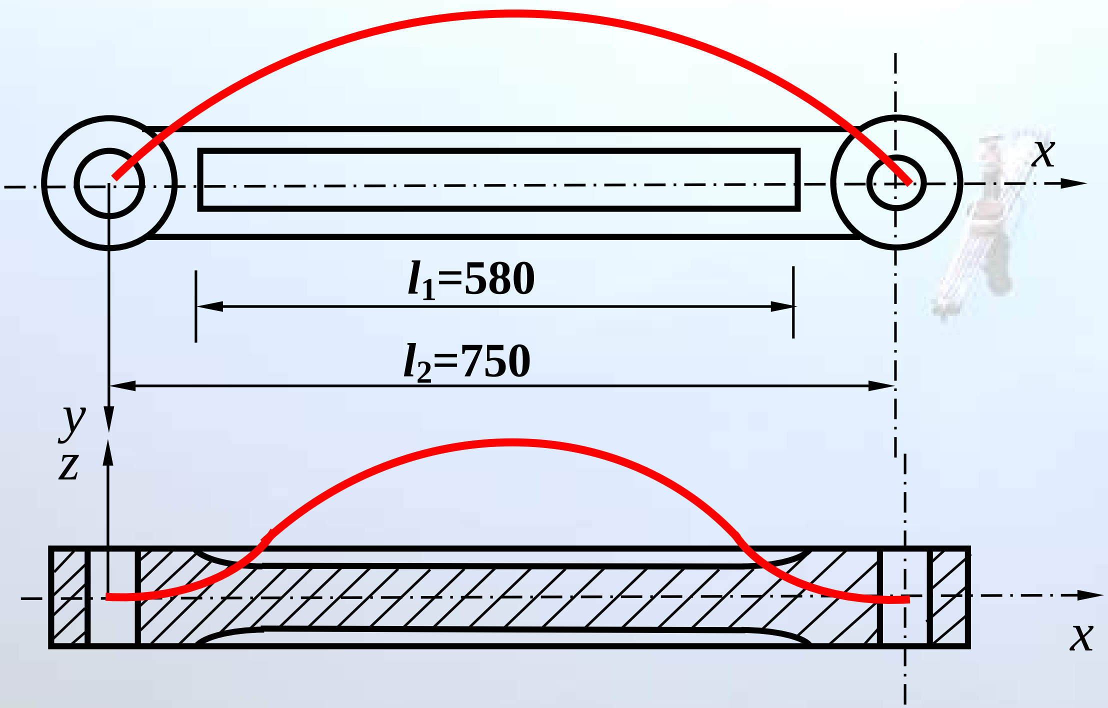
（2）计算连杆的柔度

在*xy*平面内失稳 $\lambda_z = \dfrac{\mu_z l_1}{i_z} = \dfrac{1\times 750}{11.58} = 64.8$

在*xz*平面内失稳 $\lambda_y = \dfrac{\mu_y l_2}{i_y} = \dfrac{0.6\times 580}{5.05} = 68.9$

$\lambda_y > \lambda_z$

∴ *xz*平面内先失稳



（3）求稳定许用应力及稳定校核

$$\lambda_y = 68.9$$

查表，并用内插值法：

$$\varphi = 0.849 + \frac{9}{10}(0.844 - 0.849) = 0.845$$

或 $\varphi = 0.844$

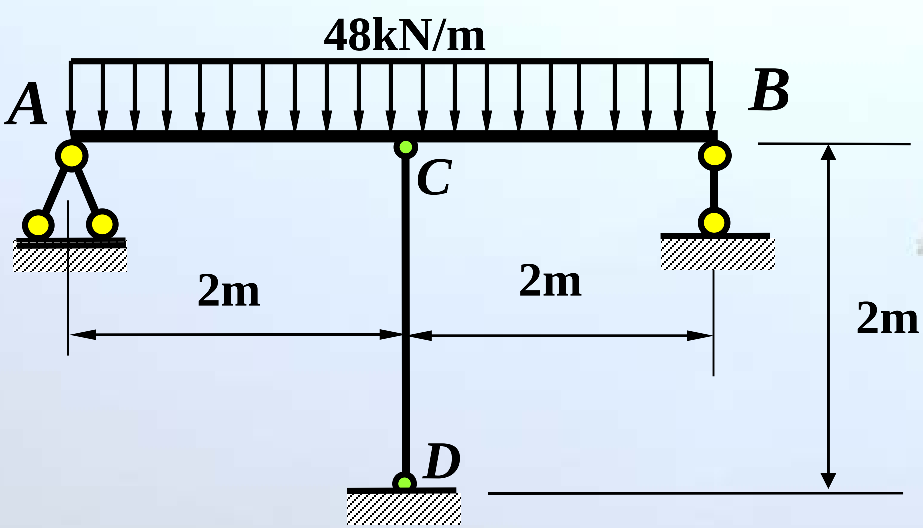
$$[\sigma]_{st} = \varphi[\sigma] = 0.845 \times 206 = 174(\text{MPa})$$

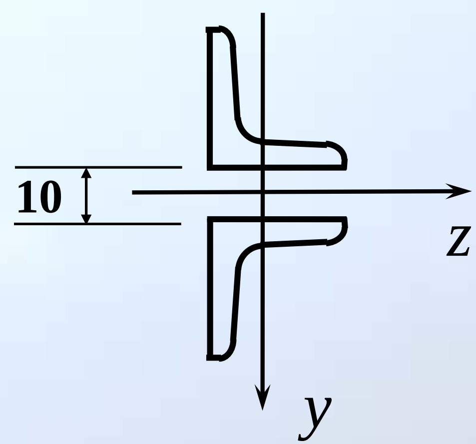
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{35 \times 10^3}{552 \times 10^2} = 63.4(\text{MPa}) < [\sigma]_{st}$$

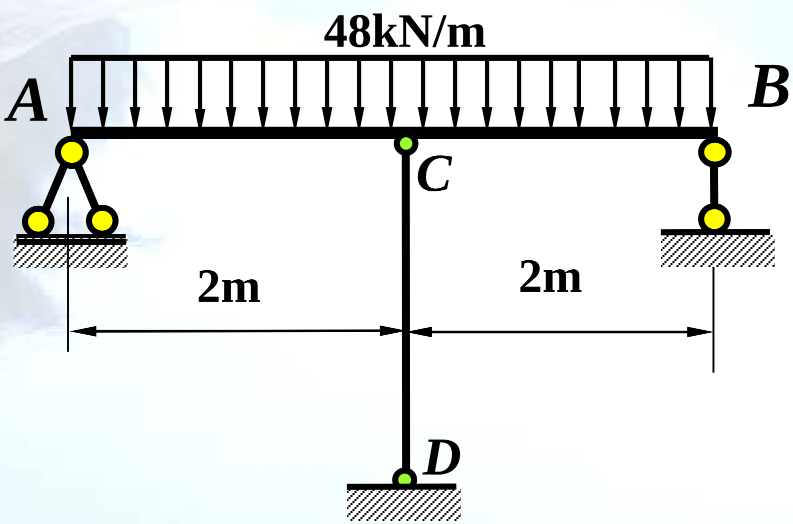
∴连杆满足稳定性要求。

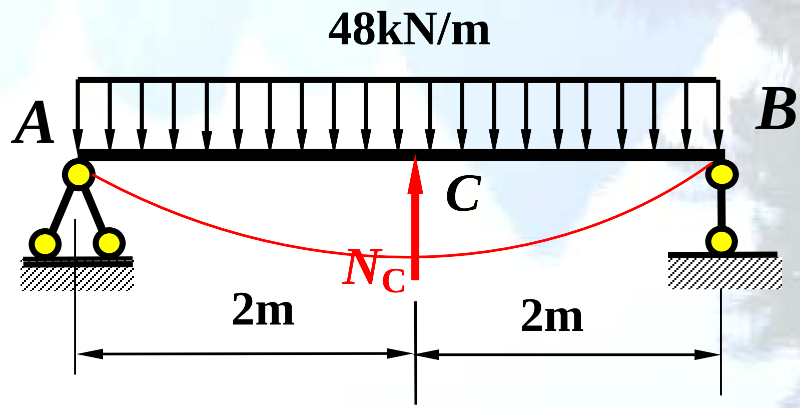
[例9]

AB梁16号工字钢，CD柱63×63×5角钢。q=48kN/m，材料为Q235钢， E=200GPa，σ_P=200MPa， σ_S=235MPa，a=304MPa，b=1.12MPa， n =1.4， n_{st} =2.5，问梁和柱是否安全。





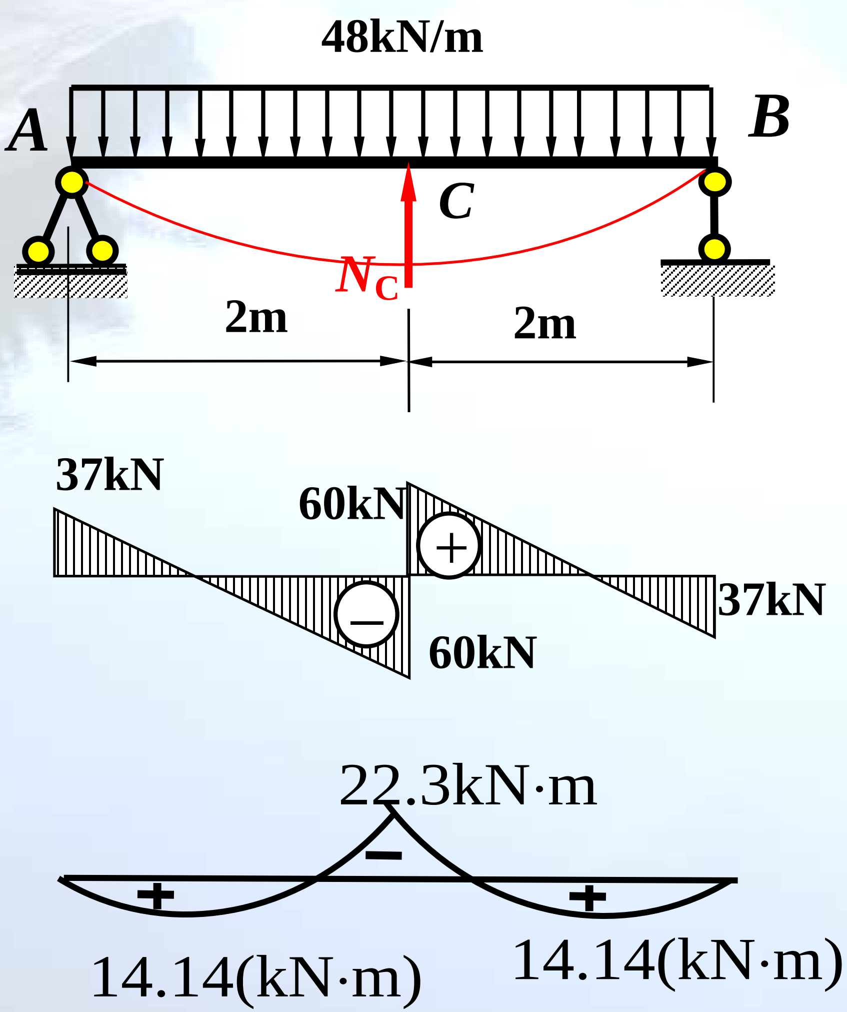




$$f_C = \Delta l$$

$$\frac{5ql^4}{384EI} - \frac{N_C l^3}{48EI} = \frac{N_C l_1}{EA}$$

$$N_C = 118.3(\mathrm{kN})$$

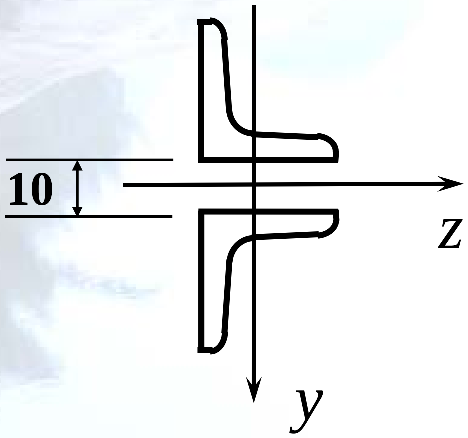


$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=158.1(\mathrm{MPa})$$

$$[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n}=\frac{235}{1.4}=168(\mathrm{MPa})$$

$$\sigma_{\max}<[\sigma]$$

∴梁安全。



$$i=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{23.17\times2}{6.143\times2}}=19.42\text{mm}$$

$$\lambda=\frac{\mu l_1}{i}=\frac{1\times2000}{19.42}=103$$

$$\lambda>\lambda_1=100$$

是细长杆，用欧拉公式：

$$P_{cr}=\sigma_{cr}\cdot A=\frac{\pi^2\times200\times10^3}{103^2}\times(614.3\times2)=228.6(\text{kN})$$

$$n=\frac{P_{cr}}{N_C}=\frac{228.6}{118.3}=1.9<n_{st}$$

所以，柱不安全。


本章结束