数值分析第三次作业

1. 微分方程I: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$的差分方法中欧拉方法是最基本的方法，简述常用欧拉方法有哪些？它们是几阶方法？

答：欧拉方法：对于所给一阶微分方程，利用微商代替导数形成求解出数值解的方法。常用的有

显式欧拉法：差分格式为$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$,这是单步一阶显式方法；

隐式欧拉法：差分格式为$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$,这是单步一阶隐式方法；

两步欧拉法：差分格式为$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$,这是两步二阶显式方法；

改进欧拉法: 差分格式为$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$,这是单步二阶显式方法；

2. 什么是微分方程 I 差分方法数值解的局部截断误差？什么是整体截断误差?微分方程$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$用梯形方法求解时局部截断误差和整体截断误差是多少？

答：在$\mathrm{y}(x_n) = y_n$的前提下使用差分方法得到的$y(x_{n+1})$的近似值y_{n+1}的误差$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$称为局部截断误差；而在初始条件$y(x_0) = y_0$下使用差分方法经过 n+1 步迭代得到的$y_{n+1}$相对微分方程 I 的准确值$y(x_{n+1})$的误差$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$称为整体截断误差。

微分方程$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$的精确解下，$\mathrm{y}(x_{n+1}) = y_n e^{\lambda h}$,用梯形方法求解时，差分格式为：

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_{n+1})$,可得：$y_{n+1} = \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h} y_n$,因此，梯形方法的局部截断误差为

$$T_{n+1} = \mathrm{y}(x_{n+1}) - y_{n+1} = y_n(e^{\lambda h} - \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}) = -\frac{(\lambda h)^3}{12} y_n + o(h^3).$$

微分方程$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$的精确解为$\mathrm{y} = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$,则$\mathrm{y}(x_{n+1}) = y_0 e^{\lambda(n+1)h} = y(x_n) e^{\lambda h}$,而用梯形方法求解时$y_{n+1} = \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h} y_n$,因此，整体截断误差为

$$R_{n+1} = \mathrm{y}(x_{n+1}) - y_{n+1} = (\mathrm{y}(x_n) - y_n)e^{\lambda h} + y_n(e^{\lambda h} - \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h})$$

$$= R_n e^{\lambda h} + y_n\left(-\frac{(\lambda h)^3}{12} y_n + o(h^3)\right) = R_0 e^{(n+1)\lambda h} + \frac{e^{(n+1)\lambda h} - 1}{e^{\lambda h} - 1} y_n \left(e^{\lambda h} - \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\right)$$

$$= \frac{e^{(n+1)\lambda h} - 1}{e^{\lambda h} - 1} y_n \left(e^{\lambda h} - \frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\right) = O(h^2)$$

注，上式中，$nh = -x_0$是定值。

3. 已有连续函数$f(t)$的函数值如下表，试用欧拉方法计算积分$\int_0^x f(t)dt$ ($\mathrm{x} = 0.5,1,1.5,2$).

t	0	0.5	1	1.5	2
$f(t)$	1	1.13315	1.64872	3.08022	7.38906

解：设$y=\int_0^x f(t)dt$,则$\begin{cases} y'=f(x) \\ y(0)=0 \end{cases}$,利用欧拉方法，取$h=0.5$,代入欧拉格式中：$y_{n+1}=y_n+he^{\frac{x_n^2}{2}}$,得$y_1=0+0.5\times 1=0.5$，$y_2=0.5+0.5\times 1.13315\approx 1.06657$，$y_3=1.06657+0.5\times 1.64872=1.89093, y_4=1.89093+0.5\times 3.08022=3.43104$.

注：这种方法求积分虽计算简单，但精度非常差。可利用题中数据采用其他方法得出精度好的结果。如梯形法（复化梯形公式）、插值函数法等。

4. 证明改进欧拉法是二阶方法，能求解出微分方程$y'=ax+b, y(0)=0$的准确解。

证明：改进欧拉法的嵌入格式为：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(f(x_n,y_n)+f\big(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n)\big)\right)$,在$y_n=y(x_n)$准确时，

$$y_{n+1}=y(x_n)+\frac{h}{2}\Big(f(x_n,y_n)+\big(f(x_n,y_n)+hf_x(x_n,y_n)+hy'(x_n)f_y(x_n,y_n)\big)\Big)+O(h^3)$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3),$$

而$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)$，故局部截断误差$T_{n+1}=O(h^3)$,所以改进欧拉方法是二阶方法。而微分方程$y'=ax+b, y(0)=0$的准确解是次数不超过 2 次的多项式，因此每步计算所得结果必定都是准确的，因此用改进欧拉方法能得到准确解。

5. 对于龙格—库塔格式$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\big((1-\alpha)K_2+\alpha K_3\big) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f\left(x_n+\frac{h}{4},y_n+\frac{hK_1}{4}\right) \\ K_3=f\Big(x_n+ph,y_n+ph\big((1-\beta)K_1+\beta K_2\big)\Big) \end{cases}$，

（1）求证：当且仅当$\alpha(4p-1)=1$时至少是二阶格式；

（2）当$\alpha=\frac{1}{2}$，$p=\frac{3}{4}$时，这个格式是几阶的？

（3）α，β，p为多少时，能使这个格式是三阶的？

解：因$y'=f(x,y), y''=f_x+f_y y', y'''=f_{xx}+2f_{xy}y'+f_{yy}y'^2+f_y y''$，

$$K_2=f(x_n,y_n)+f_x(x_n,y_n)\frac{h}{4}+f_y(x_n,y_n)\frac{hf(x_n,y_n)}{4}+f_{xx}(x_n,y_n)\frac{h^2}{32}$$

$$+f_{xy}(x_n,y_n)\frac{h^2f(x_n,y_n)}{16}+f_{yy}(x_n,y_n)\frac{h^2f^2(x_n,y_n)}{32}+O(h^3)$$

$$=y'+\frac{y''h}{4}+\big(y'''-f_y y''\big)\frac{h^2}{32}+O(h^3)$$

$$(1-\beta)K_1+\beta K_2=y'+\beta\frac{y''h}{4}+\beta\big(y'''-f_y y''\big)\frac{h^2}{32}+O(h^3)$$

$$K_3=f(x_n,y_n)+f_x(x_n,y_n)ph+f_y(x_n,y_n)ph\left(y'+\beta\frac{y''h}{4}+\beta\big(y'''-f_y y''\big)\frac{h^2}{32}+O(h^3)\right)$$

$$+\frac{1}{2}f_{xx}(x_n,y_n)p^2h^2+f_{xy}(x_n,y_n)p^2h^2(\mathrm{y}'+\beta\frac{\mathrm{y}''\mathrm{h}}{4}+\beta\big(\mathrm{y}'''-f_y y''\big)\frac{h^2}{32}+O(h^3))$$

$$+\frac{1}{2}f_{yy}(x_n,y_n)p^2h^2(\mathrm{y}'+\beta\frac{\mathrm{y}''\mathrm{h}}{4}+\beta\big(\mathrm{y}'''-f_y y''\big)\frac{h^2}{32}+O(h^3))^2+O(h^3)$$

$$=\mathrm{y}'+\mathrm{y}''\mathrm{ph}+\frac{f_y y''p\beta h^2}{4}+\frac{1}{2}(\mathrm{y}'''-f_y y'')p^2h^2+O(h^3)$$

局部截断误差$T_{n+1}=y(x_n+h)-y_{n+1}$

$$=\mathrm{y}(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)h^2}{2}+\frac{y'''(x_n)h^3}{6}+O(h^4)-y(x_n)-h\big((1-\alpha)K_2+\alpha K_3\big)$$

$$=y'h+\frac{y''h^2}{2}+\frac{y'''h^3}{6}-h((1-\alpha)(\mathrm{y}'+\frac{\mathrm{y}''\mathrm{h}}{4}+\big(\mathrm{y}'''-f_y y''\big)\frac{h^2}{32})+\alpha(\mathrm{y}'+\mathrm{y}''\mathrm{ph}+\frac{f_y y''p\beta h^2}{4}$$

$$+\frac{1}{2}\big(\mathrm{y}'''-f_y y''\big)p^2h^2))+O(h^4)$$

$$=\frac{y''h^2}{2}+\frac{y'''h^3}{6}-h((1-\alpha)(\frac{\mathrm{y}''\mathrm{h}}{4}+\big(\mathrm{y}'''-f_y y''\big)\frac{h^2}{32})+\alpha(\mathrm{y}''\mathrm{ph}+\frac{f_y y''p\beta h^2}{4}$$

$$+\frac{1}{2}\big(\mathrm{y}'''-f_y y''\big)p^2h^2))+O(h^4)$$

$$=\frac{\mathrm{h}^2}{4}\big(1-\alpha(4\mathrm{p}-1)\big)\mathrm{y}''+h^3\left(\left(\frac{1}{6}-\frac{1-\alpha}{32}-\frac{\alpha p^2}{2}\right)\mathrm{y}'''+\left(\frac{1-\alpha}{32}-\frac{\alpha\mathrm{p}\beta}{4}+\frac{1}{2}\alpha p^2\right)f_y y''\right)$$

$$+O(h^4)$$

(1) 当$\alpha(4\mathrm{p}-1)=1$时

$T_{n+1}=h^3\left(\left(\frac{1}{6}-\frac{1-\alpha}{32}-\frac{\alpha p^2}{2}\right)\mathrm{y}'''+\left(\frac{1-\alpha}{32}-\frac{\alpha\mathrm{p}\beta}{4}+\frac{1}{2}\alpha p^2\right)f_y y''\right)+O(h^4)=O(h^3)$,

因此格式至少是二阶的。

(2) 当$\alpha=\frac{1}{2}$，$\mathrm{p}=\frac{3}{4}$时，$T_{n+1}=h^3\left(\frac{y'''}{96}+\frac{5-3\beta}{32}f_y y''\right)+O(h^4)=O(h^3)$,所以格式是二阶的。

(3) 要使格式是三阶的，必有：

$$\begin{cases}\alpha(4p-1)=1\\ \frac{1}{6}-\frac{1-\alpha}{32}-\frac{\alpha p^2}{2}=0\\ \frac{1-\alpha}{32}-\frac{\alpha\mathrm{p}\beta}{4}+\frac{1}{2}\alpha p^2=0\end{cases}$$

解得：$\alpha=\frac{3}{7}$，$\beta=\frac{28}{15}$，$p=\frac{5}{6}$.

6. 求解微分方程 I 的线性二步法$y_{n+1}=\alpha y_{n-1}+h(\beta_0 y'_{n+1}+\beta_1 y'_n+\beta_2 y'_{n-1})$中的系数$\alpha$,

β_0，β_1，β_2，使差分格式具有最高的阶？给出截断误差的主项。

解: 由于多步法中有 4 个待定参数, 因此可利用函数$\mathrm{y}=1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2,\mathrm{x}^3$对应的模型方程$\mathrm{y}'=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

代入方程，代入时取 h=1,n=0,可得：$\begin{cases}1=\alpha\\ 1=-\alpha+\beta_0+\beta_1+\beta_2\\ 1=\alpha+2\beta_0-2\beta_2\\ 1=-\alpha+3\beta_0+3\beta_2\end{cases}$，解得$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta_0=1/3\\ \beta_1=4/3\\ \beta_2=1/3\end{cases}$

将 $y=x^4$ 代入二步法可以验证仍满足方程，而将 $y=x^5$ 代入，右边=1，右边=7/3，不能准确成立，因此，这个二步法是 4 阶方法。它的局部截断误差为$T_{n+1}=cy^{(5)}(\eta)h^5$

在 $y=x^5$ 代入时$5!\,\mathrm{c}=1-(-1)-\frac{10}{3}=-\frac{4}{3}\Rightarrow \mathrm{c}=-\frac{1}{90}$.

所以，$T_{n+1}=-\ \frac{y^{(5)}(\eta)h^5}{90}$. 它的主项为$-\ \frac{y^{(5)}(x_n)h^5}{90}$

7. 证明：存在常数 a,使线性多步法$y_{n+1}=(1-a)y_{n-1}+ay_{n-2}+(a+2)h(2y_n'-y_{n-1}')$是 3 阶的，求出局部截断误差常数。

证明：对函数$\mathrm{y}=1,\mathrm{x}$的代入线性多步法都能准确成立，当将$\mathrm{y}=x^2$代入时，可得

$$1=(1-a)+4a+(a+2)(2)$$

解得$a=-\frac{4}{5}$.

此时若将$\mathrm{y}=x^3$代入可以验证也能使线性多步法准确成立。

但将$\mathrm{y}=x^4$代入时，右边=1，右边=$\frac{9}{5}+16\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{6}{5}(4)=-\frac{31}{5}$,多步法式子不能准确成立。

它的局部截断误差$T_{n+1}=cy^{(4)}(\eta)h^4$满足$4!\,\mathrm{c}=1+\frac{31}{5}=\frac{36}{5}\Rightarrow c=\frac{3}{10}$

所以这个线性多步法是三阶的，它的局部误差常数$c=\frac{3}{10}$.