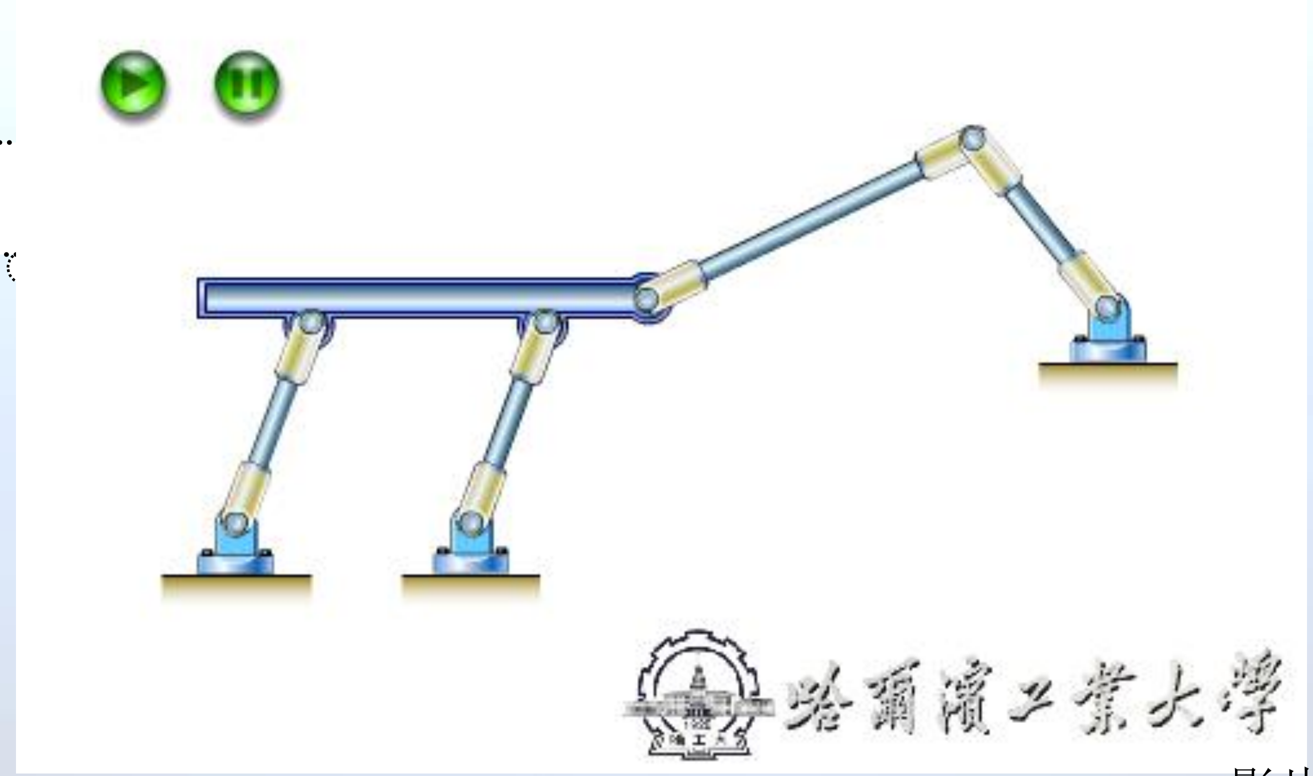
第二篇 《运动学》

第六章　刚体的简单运动

§6-1　刚体的平行移动(平动)

一、刚体平动的定义:

如果在物体内任取一条直线，在运动过程中这条直线始终与它的最初位置平行，这种运动称为平行移动，简称平动。



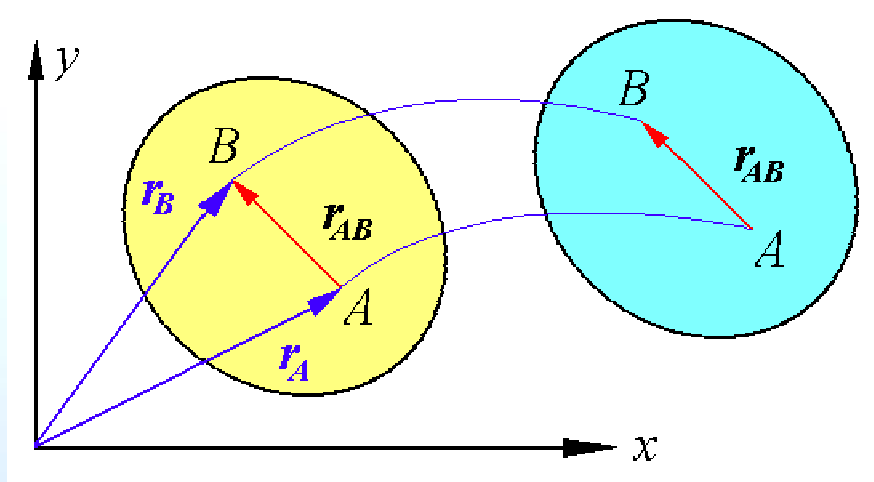
影片：7-01d

二、刚体平动时内部各点的轨迹、速度和加速度

$$\because \quad \bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}$$

$$\therefore \bar{v}_B = \frac{\mathrm{d}\bar{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}_A + \bar{r}_{AB}) = \frac{\mathrm{d}\bar{r}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\bar{r}_{AB}}{\mathrm{d}t}$$

(由 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{r}_{AB}}{\mathrm{d}t} = 0$)



$$\therefore \ \bar{v}_B = \frac{\mathrm{d}\bar{r}_A}{\mathrm{d}t} = \bar{v}_A$$

又 $\bar{a}_B = \dfrac{\mathrm{d}^2\bar{r}_B}{\mathrm{d}t^2}$

$$= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\bar{r}_A + \bar{r}_{AB}) = \frac{\mathrm{d}^2\bar{r}_A}{\mathrm{d}t^2} = \bar{a}_A$$

$\therefore$ $$\boxed{\begin{aligned} \bar{v}_A &= \bar{v}_B \\ \bar{a}_A &= \bar{a}_B \end{aligned}}$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B$$
$$\bar{a}_A = \bar{a}_B$$

结论：

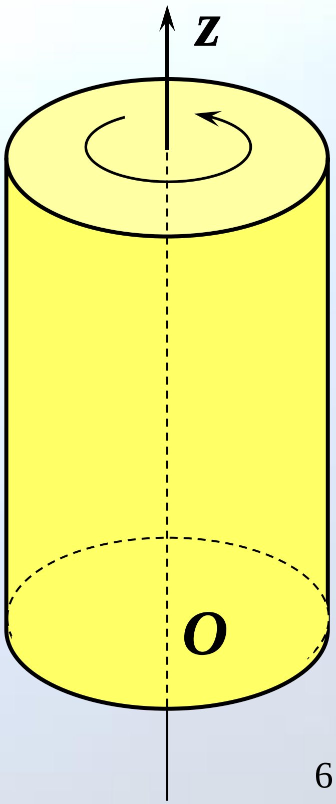
当刚体平行移动时，其上各点的运动轨迹的形状相同；在每一瞬时，各点的速度和加速度完全相同的。

因此，研究刚体的平动，可以归结为研究刚体内任一点的运动。

§6-2　刚体的定轴转动

一、刚体绕定轴转动的特征及其简化

当刚体运动时，刚体内某一直线上的所有各点始终保持不动，则这种运动称为刚体绕定轴的转动，简称刚体的转动。不动的直线称为转轴。

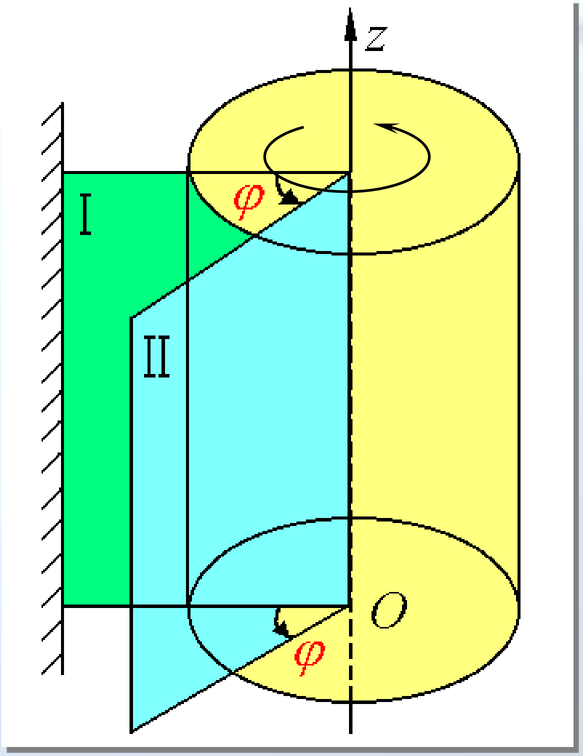


二、转角和转动方程

§6-2　刚体的定轴转动

一、刚体绕定轴转动的特征及其简化

当刚体运动时，刚体内某一直线上的所有各点始终保持不动，则这种运动称为**刚体绕定轴的转动**，简称**刚体的转动**。不动的直线称为**转轴**。



二、转角和转动方程

φ ---转角，单位弧度(rad)

$\varphi = f(t)$ ---为转动方程

方向规定：从 z 轴正向看去，

+ 逆时针为正

− 顺时针为负

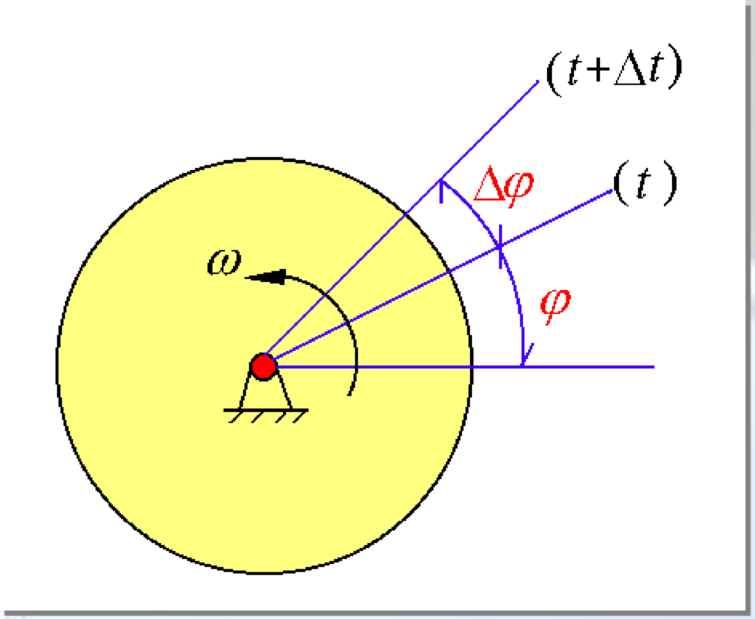
三、定轴转动的角速度和角加速度

1.角速度:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

2.角加速度:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$



ω 的单位: rad/s

α 的单位:rad/s^2

工程中常用单位：n = 转/分(r / min)

则n 与ω 的关系为: $\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30}\approx\frac{n}{10}(\mathrm{rad/s})$

α与ω方向一致为加速转动, α与ω方向相反为减速转动

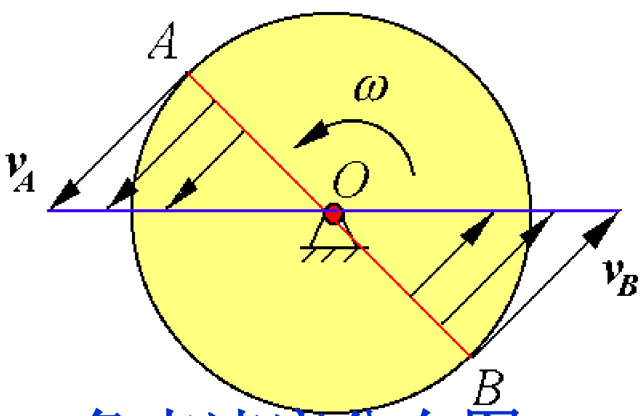
§6-3　转动刚体内各点的速度和加速度

一、速度

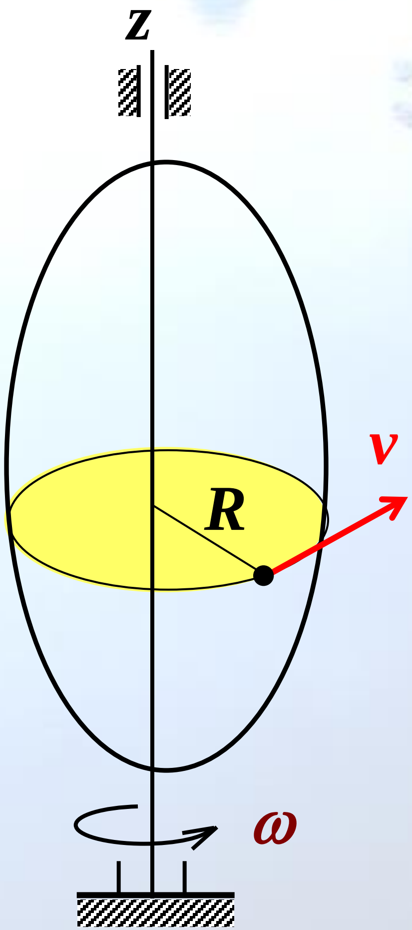
$$\because s = R\varphi$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$\therefore v = R\omega$$



各点速度分布图

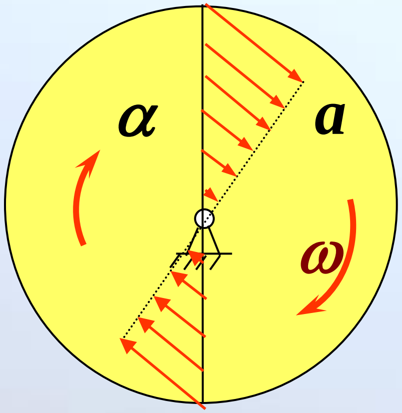


二、加速度

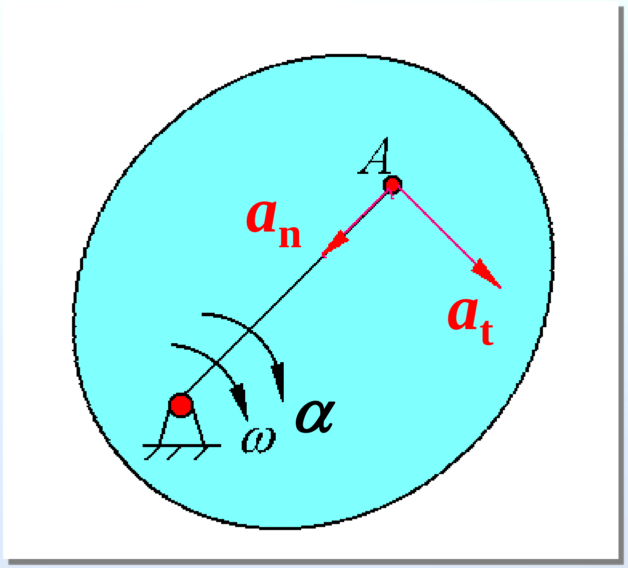
$$\because a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\omega) = R\cdot\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\cdot\alpha$$

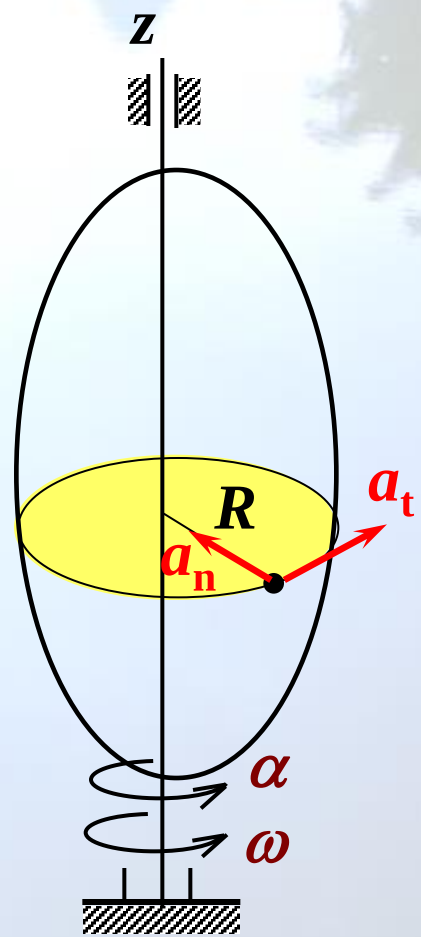
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} a_t &= R\alpha \\ a_n &= R\omega^2 \end{aligned}}$$

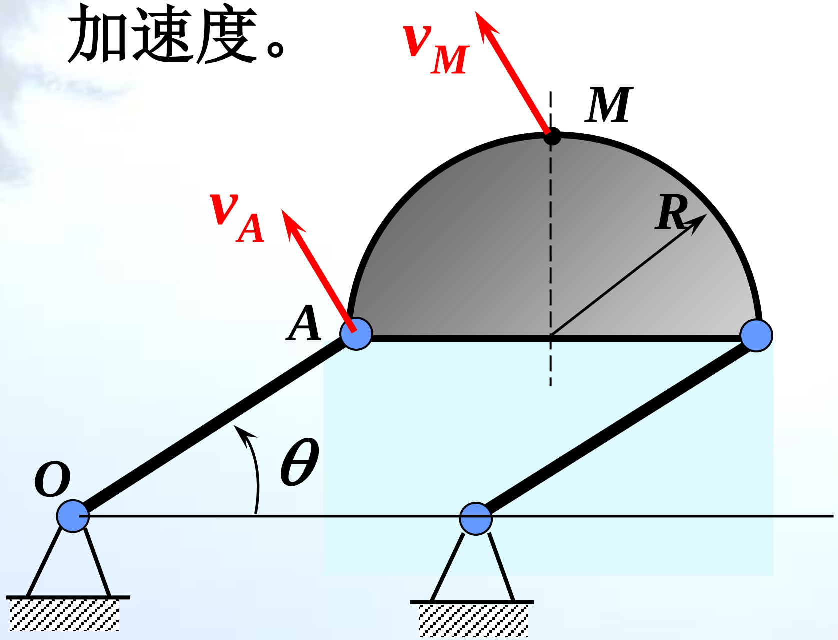


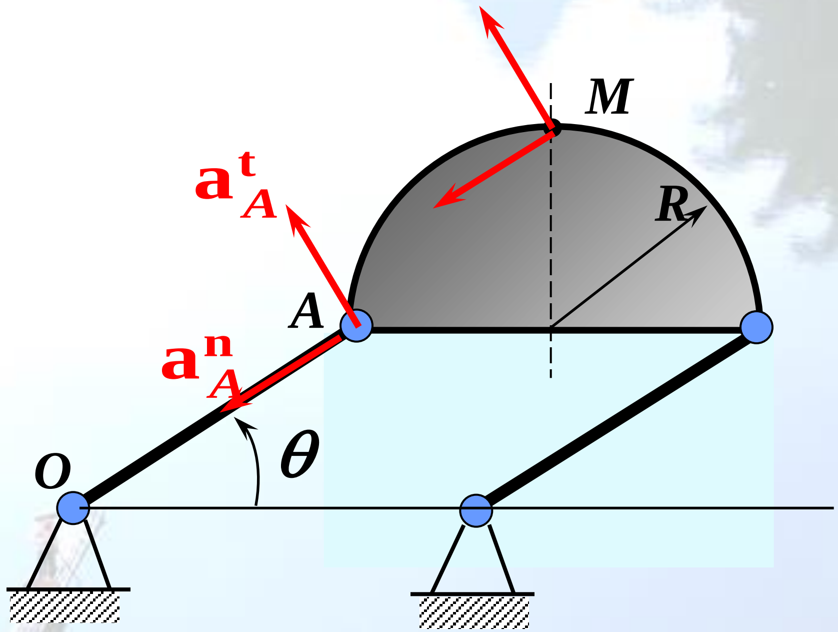
各点加速度的分布图





[例] 平行四边形机构，曲柄*OA*的转动方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{54}t^2$(rad)，*OA*=*R*=18cm，试求图中半圆刚体上*M*点在*t*=3s时的速度和加速度。





$$t=3\text{s}\,,\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{27}t\ \ (\text{rad/s})$$

$$v_M=v_A=OA\cdot\omega$$

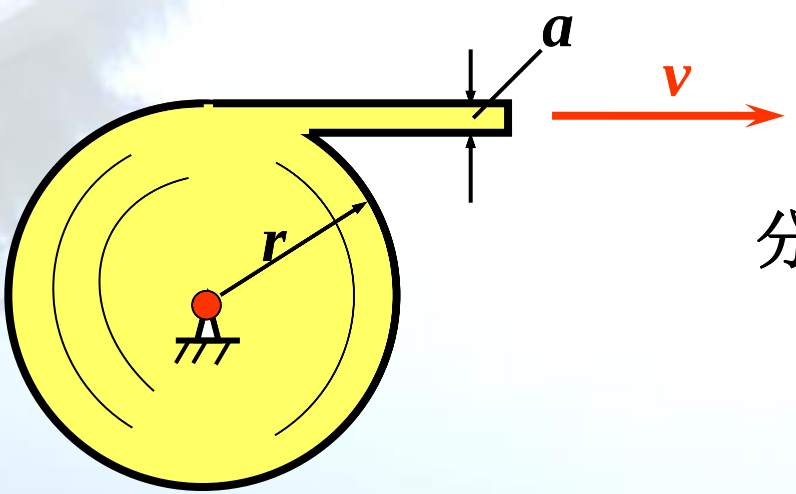
$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{27}\ \ (\text{rad/s}^2)$$

$$a_A^t=OA\cdot\alpha$$

$$a_A^n=OA\cdot\omega^2$$

【题6-8】（P170）

纸盘，纸带厚为a 为常数，v 为常数，求纸盘的角加速度（以半径 r 的函数表示）。



分析：$\omega=\dfrac{v}{r}$

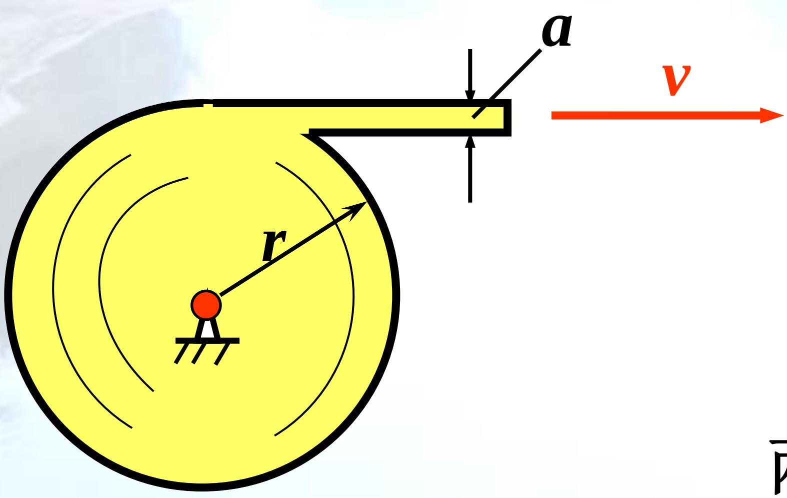
$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{r}\right)=-\frac{v}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

纸盘面积：$A(t)=\pi r^2=\pi R^2-avt$

即：$\pi r^2=\pi R^2-avt$

两边求导：$2\pi r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-av$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{av}{2\pi r}$$



解：设 t =0时纸盘的半径为R，

则任意 t 时刻纸盘的面积：

$$A(t)=\pi r^2=\pi R^2-avt$$

即：$\pi r^2=\pi R^2-avt$

两边求导：$2\pi r\dfrac{dr}{dt}=-av$

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{av}{2\pi r}$$

又因为：$\omega=\dfrac{v}{r}$ ，　$\therefore\ \alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{v}{r})=-\dfrac{v}{r^2}\dfrac{dr}{dt}$

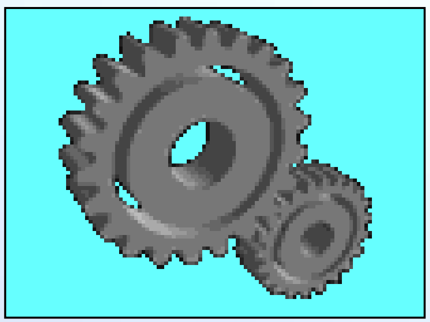
$$=-\frac{v}{r^2}\cdot(-\frac{av}{2\pi r})=\frac{av^2}{2\pi r^3}$$

§6-4　轮系的传动比

我们常见到在工程中,用一系列互相啮合的齿轮来实现变速,它们变速的基本原理是什么呢?

一、齿轮传动

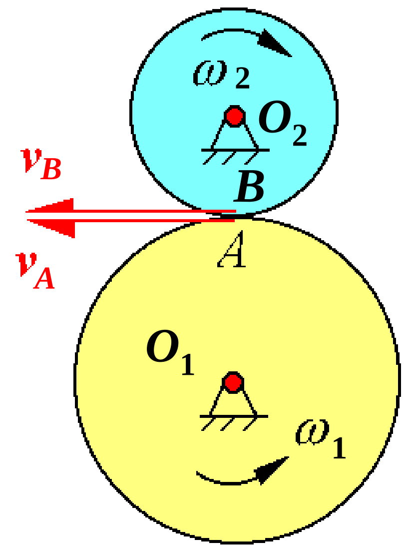
1.外啮合



$$\because v_B = v_A$$

$$\therefore R_2\omega_2 = R_1\omega_1$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

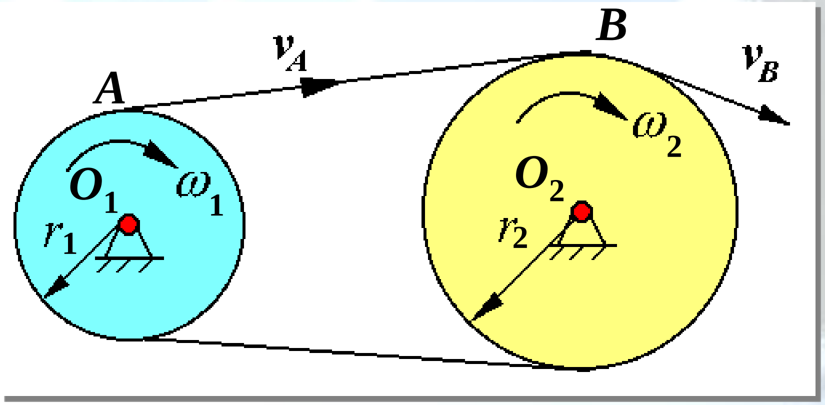


$$v_A = R_1\omega_1$$
$$v_B = R_2\omega_2$$

设1主动轮，2从动轮，定义齿轮传动比

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

二、皮带轮系传动



$\because\ v_A = v_B$

(而不是$\bar{v}_A = \bar{v}_B$，因为方向不同)

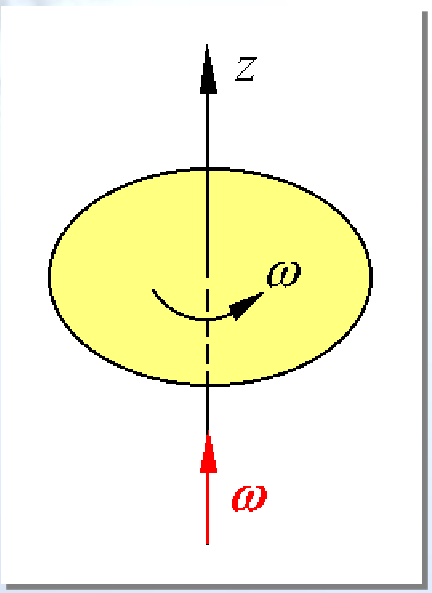
$$\therefore r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

皮带轮传动比：$i_{12} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$

§6-5　角速度和角加速度的矢量表示
点的速度和加速度的矢量表示

一、角速度和角加速度的矢量表示



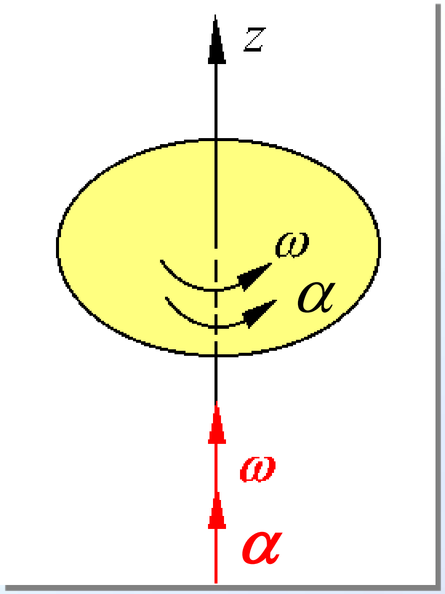
按右手定则规定

$\bar{\omega}$，$\bar{\alpha}$ 的方向。

大小：$|\bar{\omega}| = |\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}|$

方向如图 $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$

$$\bar{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\bar{k} = \alpha\,\bar{k}$$



第六章结束