第一篇 《静力学》

第一章　静力学公理和物体的受力分析

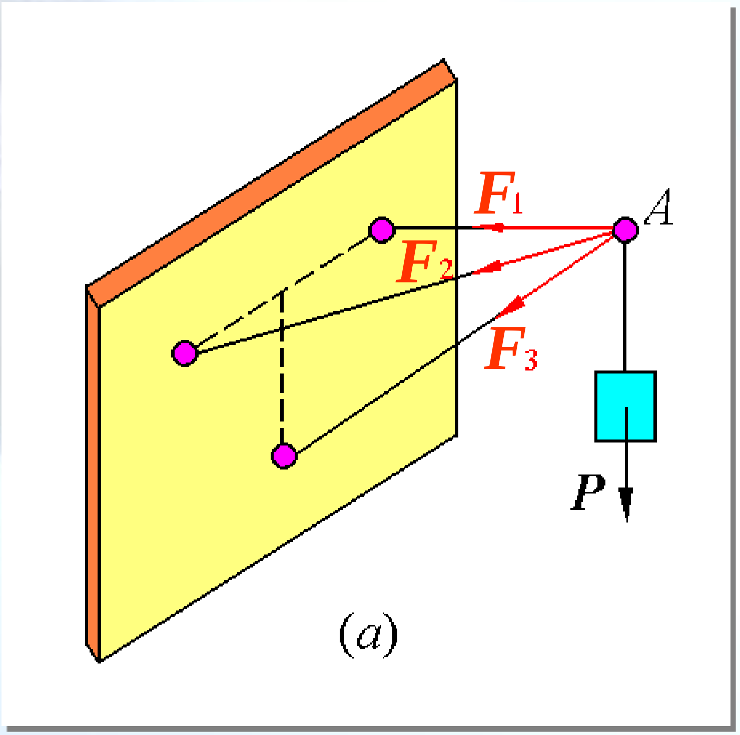
第二章　平面力系

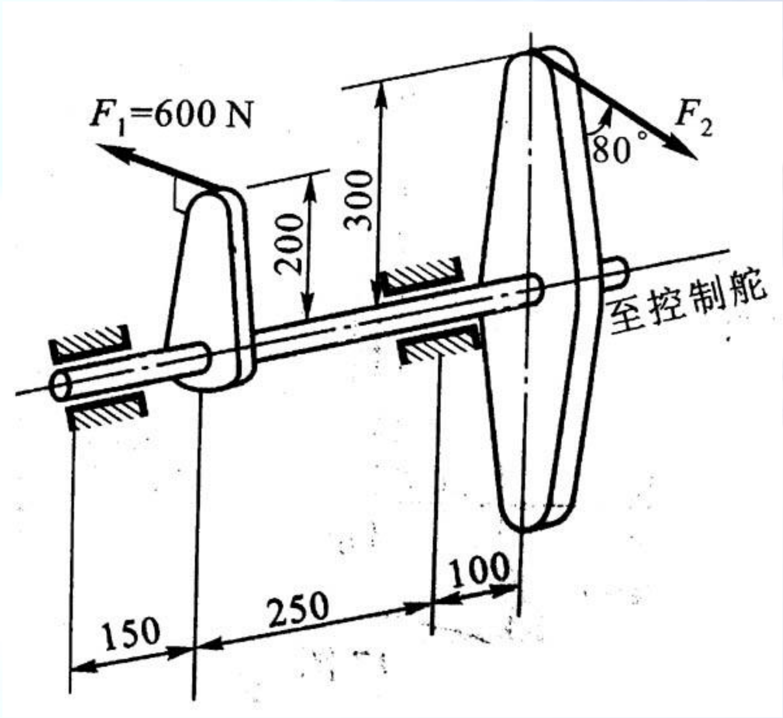
第三章　空间力系

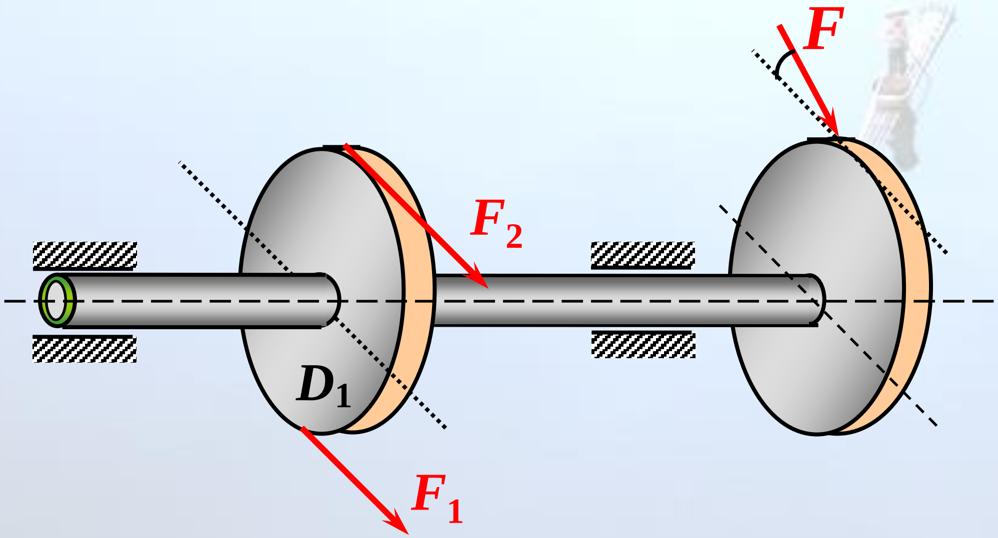
第四章　摩擦

理论力学

第三章 空间力系


F1
A
F2
F3
P
(a)

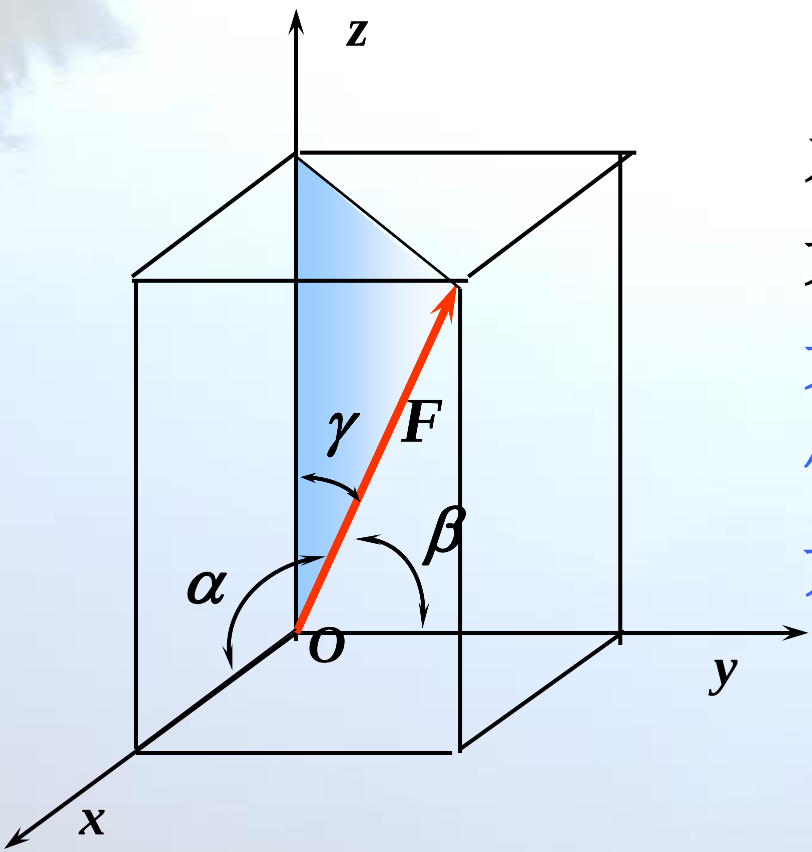

F1=600 N
F2
80°
200
300
至控制舵
150
250
100


F
F2
D1
F1

第三章　空间力系

§3-1　空间汇交力系

1. 力在直角坐轴上的投影



★力在空间的表示：

力的三要素：

大小、方向、作用点(线)

大小：　$F = |\overline{F}|$

作用点：在物体的哪点就是哪点

方向：由α、β、γ三个方向角确定

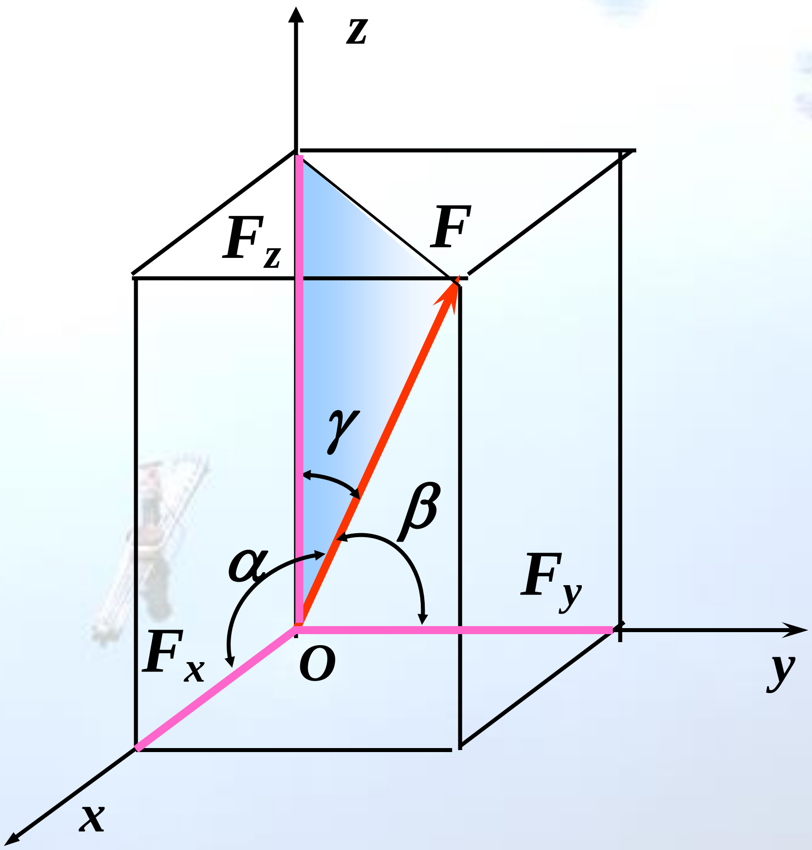
★一次投影法（直接投影法）

由图可知：

$$F_x = F \cdot \cos\alpha,$$

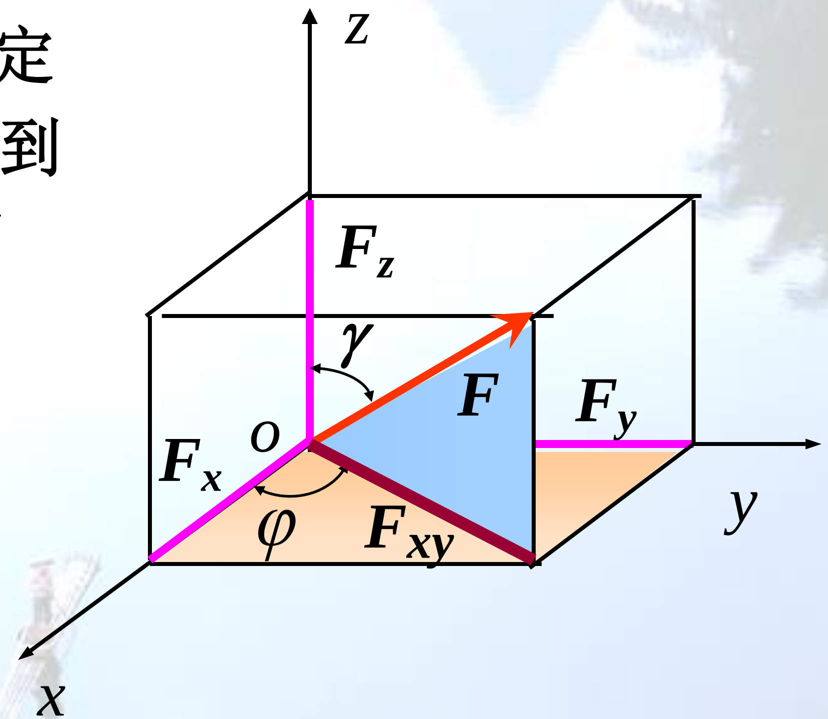
$$F_y = F \cdot \cos\beta,$$

$$F_z = F \cdot \cos\gamma$$



★ 二次投影法（间接投影法）

当力与各轴正向夹角不易确定时，可先将 $\bar{F}$ 投影到xy面上，得到 F_{xy}，然后再投影到x、y轴上，即



$$\begin{cases} F_x = F \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varphi \\ F_y = F \cdot \sin\gamma \cdot \sin\varphi \\ F_z = F \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

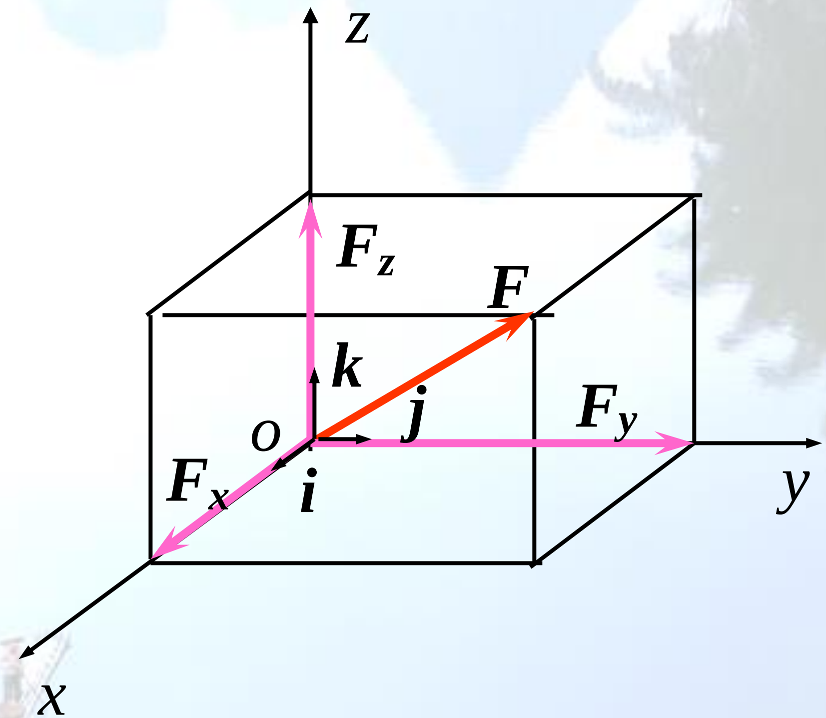
$$F_{xy} = F \cdot \sin\gamma$$

★力沿坐标轴分解：

若以 $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ 表示力沿直角坐标轴的正交分量，则：

$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z$$

而：
$$\begin{cases} \overline{F}_x = F_x \overline{i} \\ \overline{F}_y = F_y \overline{j} \\ \overline{F}_z = F_z \overline{k} \end{cases}$$

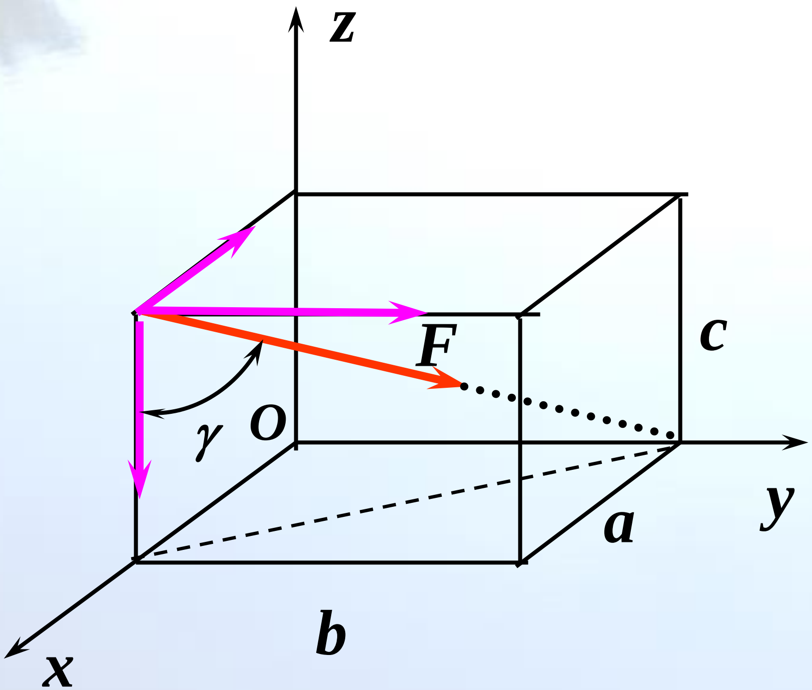


所以：$\overline{F} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k}$ 空间力的解析式

$$F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} + F_z^{\ 2}} \qquad \cos\alpha = \frac{F_x}{F},\ \cos\beta = \frac{F_y}{F},\ \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

[例1]　已知：F、a、b、c，

求：F_z，



解：

$$F_z = -F \cdot \cos\gamma$$

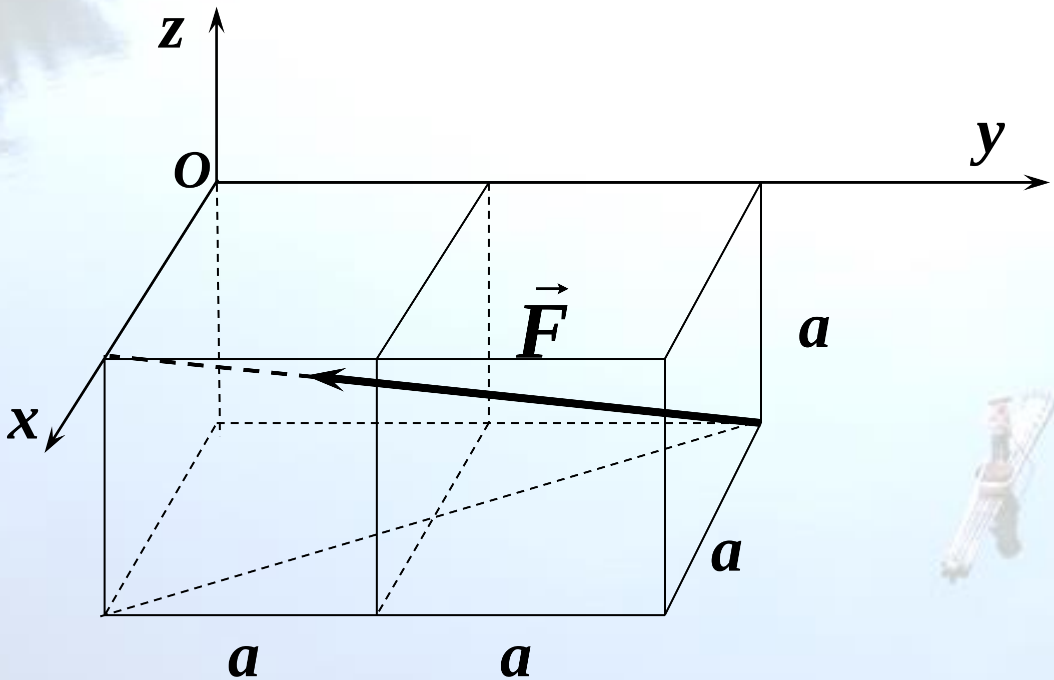
$$= -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F$$

$$F_x = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F$$

$$F_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F$$

[例2]　已知：F、a、

求：F_x， F_y， F_z



解：$F_x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}F$

$F_y = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}F$

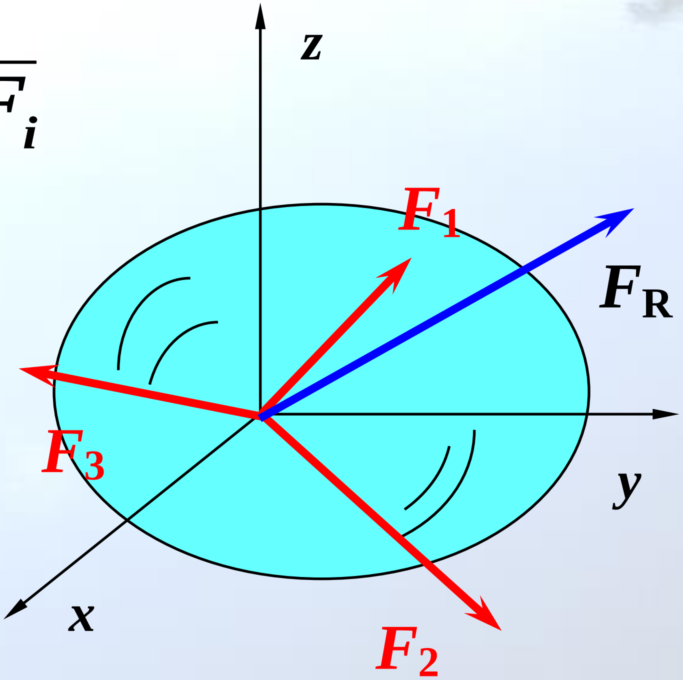
$F_z = \dfrac{1}{\sqrt{6}}F$

2. 空间汇交力系的合力与平衡条件

与平面汇交力系的合成方法相同，也可用力多边形方法求合力：

空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点。

$$\overline{F}_{\mathrm{R}}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\cdots+\overline{F}_n=\sum\overline{F}_i$$



用 $\overline{F}_i=F_{ix}\overline{i}+F_{iy}\overline{j}+F_{iz}\overline{k}$ 代入上式

合力 $\overline{F}_{\mathrm{R}}=(\sum F_{ix})\overline{i}+(\sum F_{iy})\overline{j}+(\sum F_{iz})\overline{k}$

合力在轴的投影为：$\begin{cases}F_{\mathrm{R}x}=\sum F_{ix}\\F_{\mathrm{R}y}=\sum F_{iy}\\F_{\mathrm{R}z}=\sum F_{iz}\end{cases}$

合力: $F_{\mathrm{R}} = \sqrt{F_{\mathrm{R}x}^{2} + F_{\mathrm{R}y}^{2} + F_{\mathrm{R}z}^{2}}$

$$= \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

方向: $\cos\alpha = \dfrac{F_{\mathrm{R}x}}{F_{\mathrm{R}}}$,

$$\cos\beta = \frac{F_{\mathrm{R}y}}{F_{\mathrm{R}}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F_{\mathrm{R}z}}{F_{\mathrm{R}}}$$

空间汇交力系平衡的充要条件：力系的合力为零

即：$\overline{F}_{\mathrm{R}} = 0$

$$\because \quad F_{\mathrm{R}} = \sqrt{F_{\mathrm{R}x}^2 + F_{\mathrm{R}y}^2 + F_{\mathrm{R}z}^2}$$

$$= \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

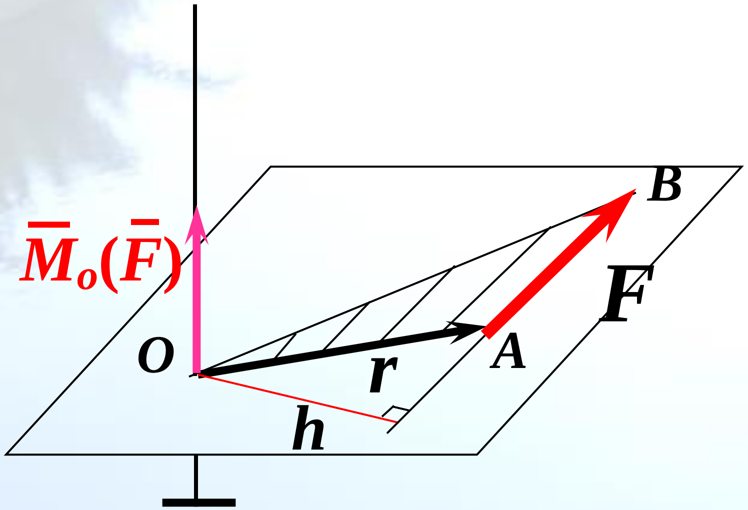
∴ 平衡充要条件为：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

称为空间汇交力系的平衡方程

§3-2 力对点的矩与力对轴的矩

1. 力对点的矩以矢量表示



力对点的矩是力对物体产生转动效应的度量，用力矩表示，在平面问题中，力对点的矩是代数量，其正负表示转动的方向。

在空间问题中，为了表示力矩的转动方向，需要用矢量表示力对点的矩，其矢量为$\bar{r}$和$\bar{F}$的矢量积，即：

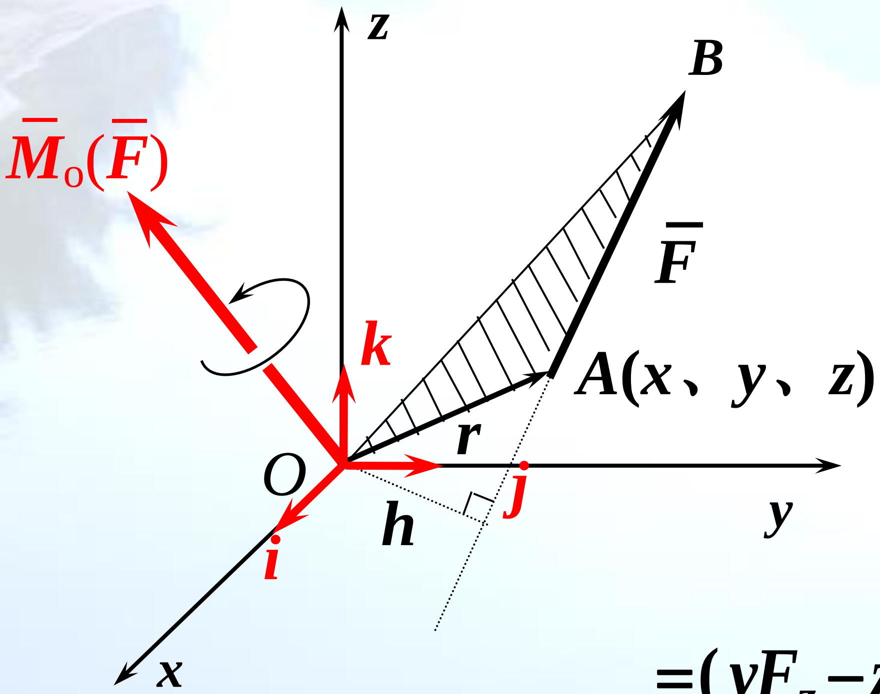
在平面问题中

$$M_O(\bar{F}) = \pm F \cdot h$$
$$= \pm 2A_{\Delta AOB}$$
$$= \pm \left| \bar{r} \times \bar{F} \right|$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$$

即：力对点的矩等于矩心到该力作用点的矢径与该力的矢量积。

力对点的矩的解析表达式



$$\bar{M}_O(\bar{F})=\bar{r}\times\bar{F}$$

由于$\bar{F}=F_x\bar{i}+F_y\bar{j}+F_z\bar{k}$

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$$

$$\therefore \bar{M}_O(\bar{F})=\bar{r}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$=(yF_z-zF_y)\bar{i}+(zF_x-xF_z)\bar{j}+(xF_y-yF_x)\bar{k}$$

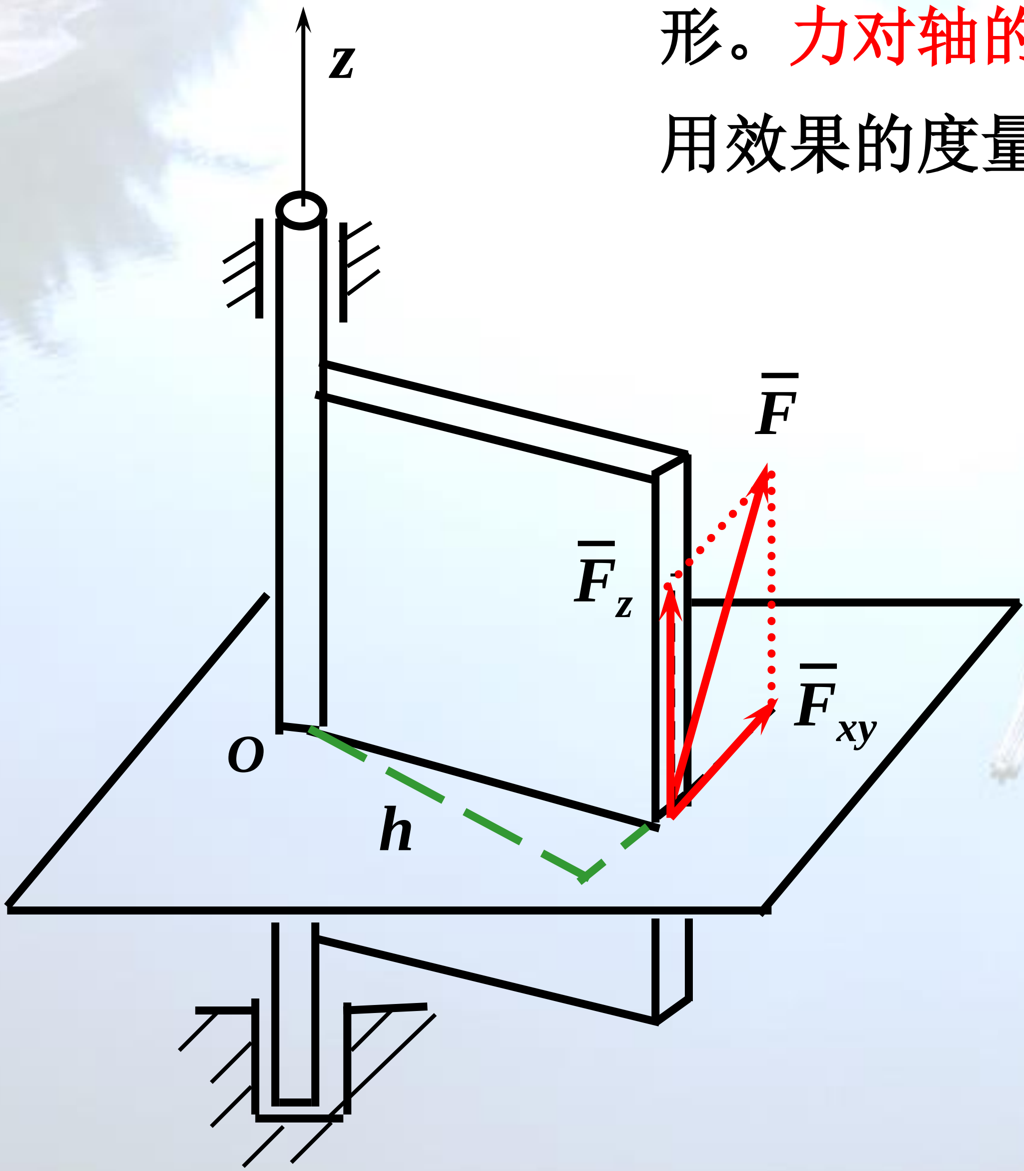
$\bar{M}_O(\bar{F})$ 在轴上的投影： $[\bar{M}_O(\bar{F})]_x=yF_z-zF_y$

$$[\bar{M}_O(\bar{F})]_y=zF_x-xF_z$$

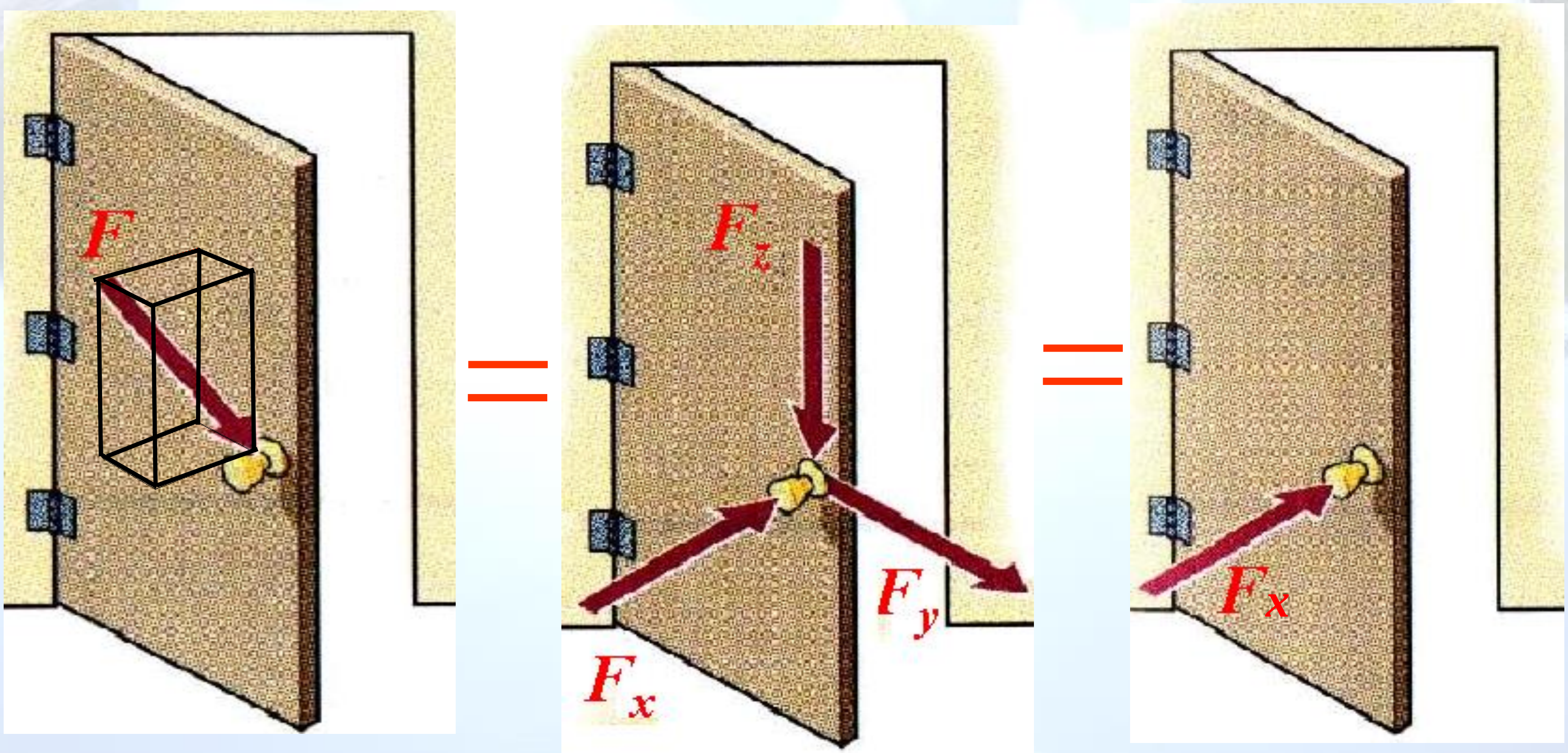
$$[\bar{M}_O(\bar{F})]_z=xF_y-yF_x$$

2. 力对轴的矩

工程中经常遇到刚体绕定轴转动的情形。力对轴的矩是力对定轴转动刚体的作用效果的度量。



力对轴的矩等于零的情形：

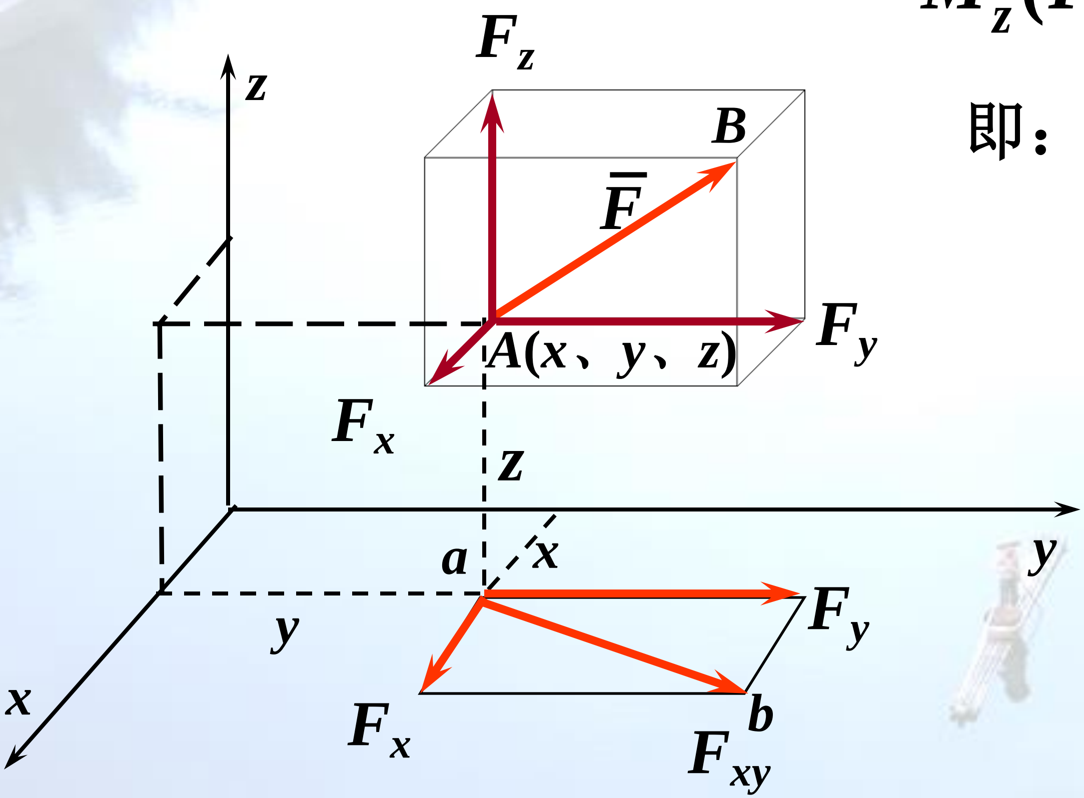


(1)力与轴平行

(2)力与轴相交

力*F*与轴共面时，力对轴之矩为零。

力对轴的矩的解析式表示



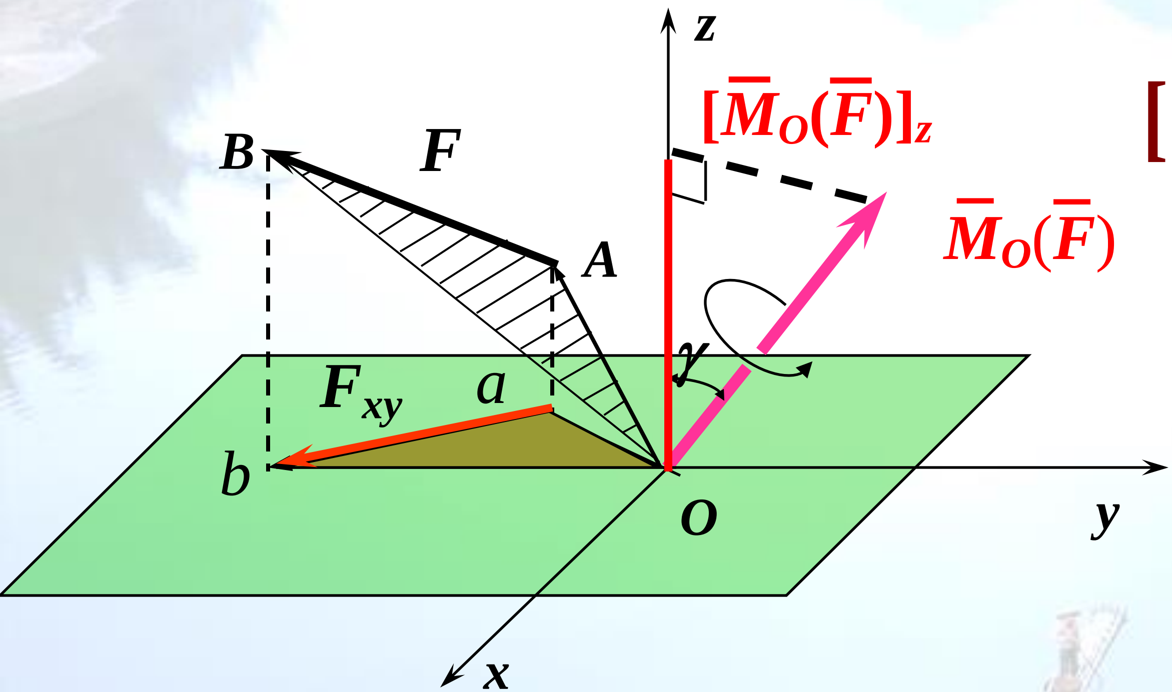
$$M_z(\bar{F}) = M_O(\bar{F}_x) + M_O(\bar{F}_y)$$

即： $$M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x$$

同理：

$$\begin{cases} M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y \\ M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z \\ M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x \end{cases}$$

3. 力对点的矩与力对通过该点的轴之矩的关系



$$[\bar{M}_O(\bar{F})]_z = xF_y - yF_x$$

$$M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x$$

$$\therefore\ [\bar{M}_O(\bar{F})]_z = M_z(\bar{F})$$

力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于这力对于该轴的矩。

[证]

$$\because \quad \overline{M}_O(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F}$$

$$= (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}$$

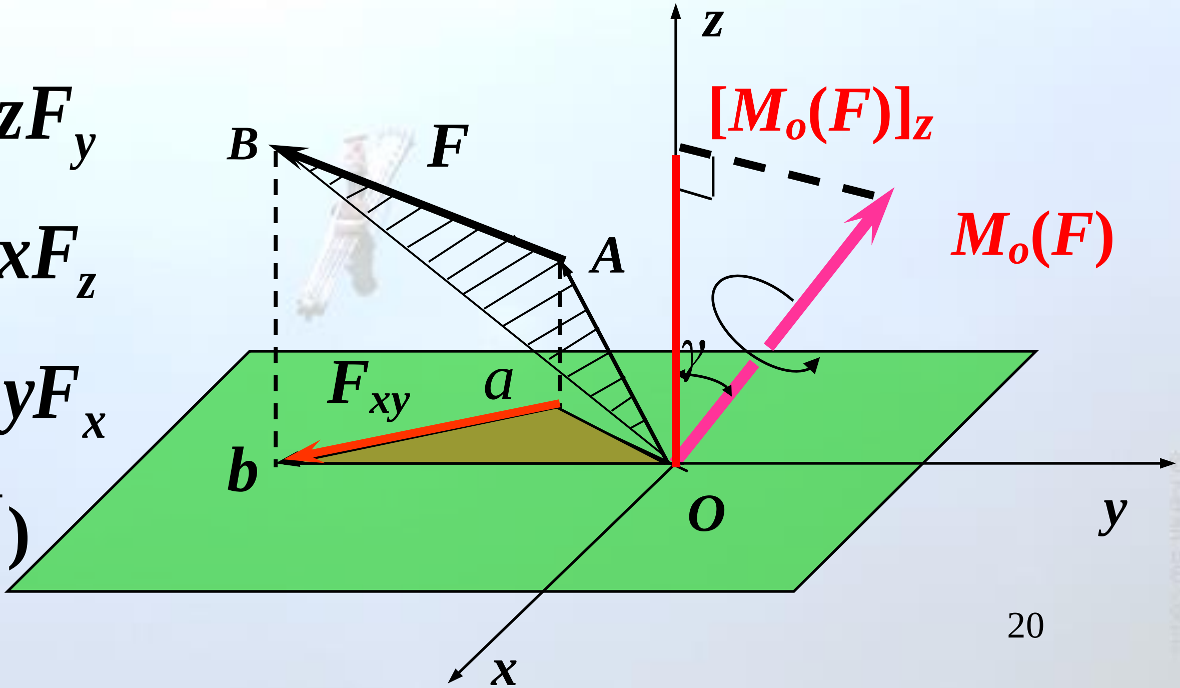
$$= [\overline{M}_O(\overline{F})]_x \bar{i} + [\overline{M}_O(\overline{F})]_y \bar{j} + [\overline{M}_O(\overline{F})]_z \bar{k}$$

又$\because$ $M_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y$

$M_y(\overline{F}) = zF_x - xF_z$

$M_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x$

$\therefore$ $[\overline{M}_O(\overline{F})]_z = M_z(\overline{F})$



[另证]　$\because\left|\overline{M}_O(\overline{F})\right|=2A_{\Delta OAB}$

通过O点作任一轴Z，则：

$$M_z(\overline{F})=M_z(\overline{F}_{xy})=2A_{\Delta Oab}$$

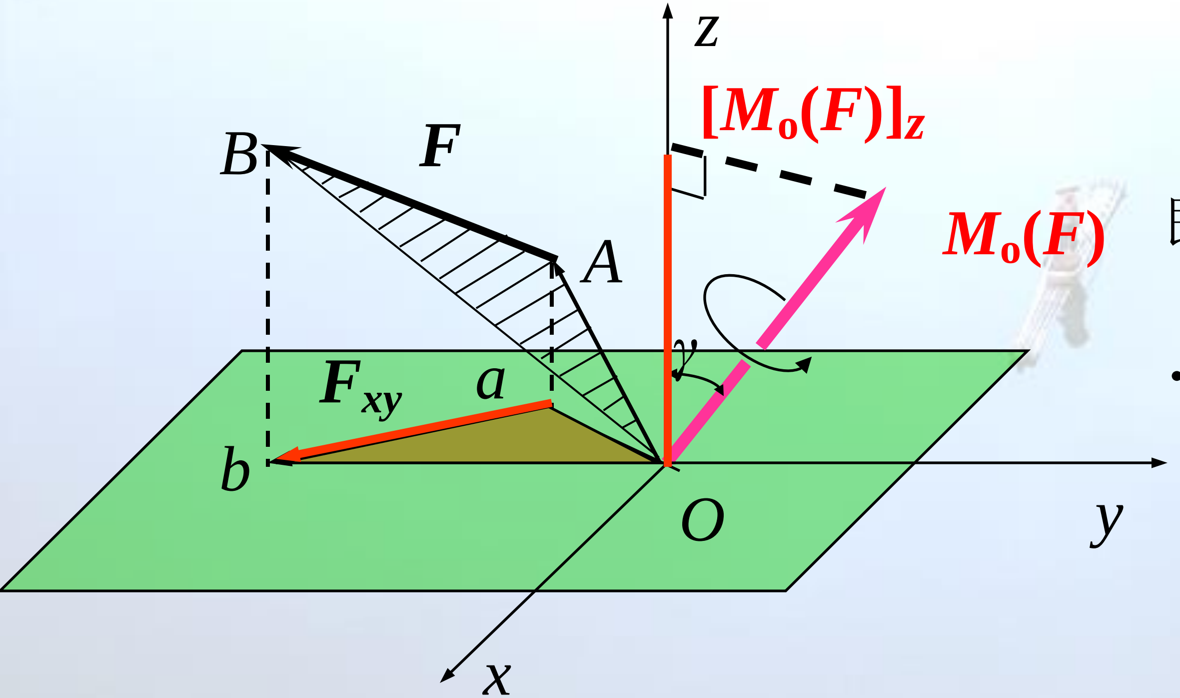
由几何关系：

$$\Delta OAB\cdot\cos\gamma=\Delta Oab$$

即：

$$\therefore\left|\overline{M}_O(\overline{F})\right|\cdot\cos\gamma=M_z(\overline{F})$$

$$[\overline{M}_O(\overline{F})]_z=M_z(\overline{F})$$



由力对轴的矩计算力对点的矩

$$\left|\bar{M}_O(\bar{F})\right| = \sqrt{[M_x(\bar{F})]^2 + [M_y(\bar{F})]^2 + [M_z(\bar{F})]^2}$$

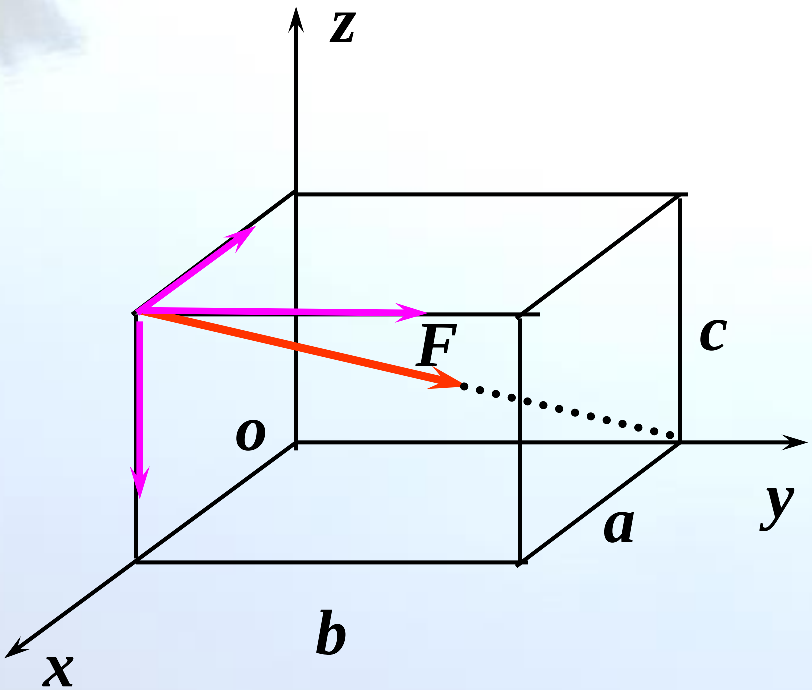
$$\cos\alpha = \frac{M_x(\bar{F})}{\left|\bar{M}_O(\bar{F})\right|},$$

$$\cos\beta = \frac{M_y(\bar{F})}{\left|\bar{M}_O(\bar{F})\right|},$$

$$\cos\gamma = \frac{M_z(\bar{F})}{\left|\bar{M}_O(\bar{F})\right|}$$

[例3]　已知：F、a、b、c，

求：$M_x(\bar{F})$



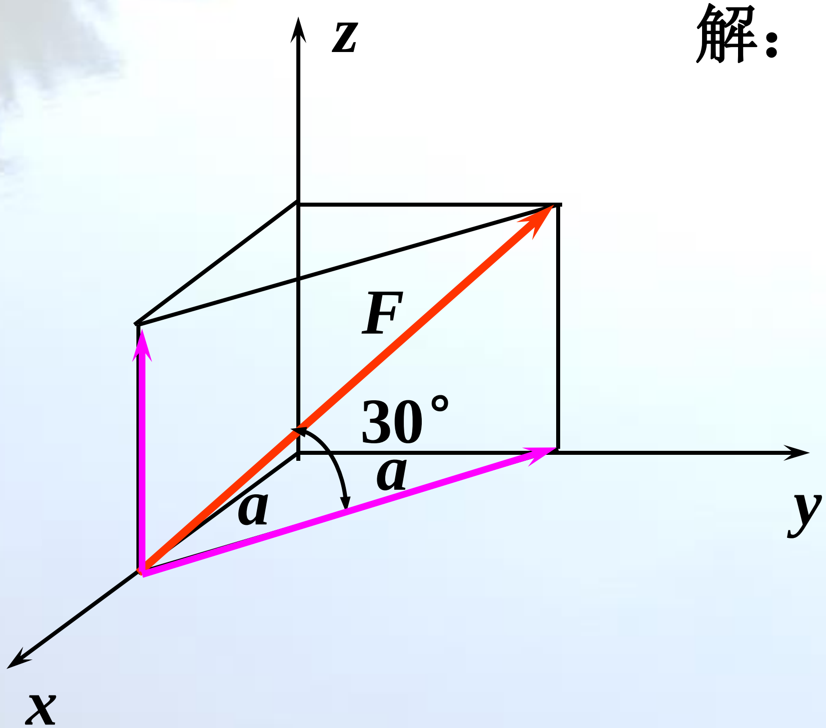
解：$M_x(\bar{F}) = -F_y \cdot c$

$$= -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} F \cdot c$$

$$= -\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} F$$

[例4]　已知：F、a、 不要应用$\vec{r}\times\vec{F}$计算

求：$M_x(\bar{F})$，$M_y(\bar{F})$，$M_z(\bar{F})$ 和 $\bar{M}_O(\bar{F})$



解：

$$M_x(\bar{F})=0$$

$$M_y(\bar{F})=-F\sin 30°\cdot a$$

$$=-\frac{1}{2}Fa$$

$$M_z(\bar{F})=F\cos 30°\sin 45°\cdot a$$

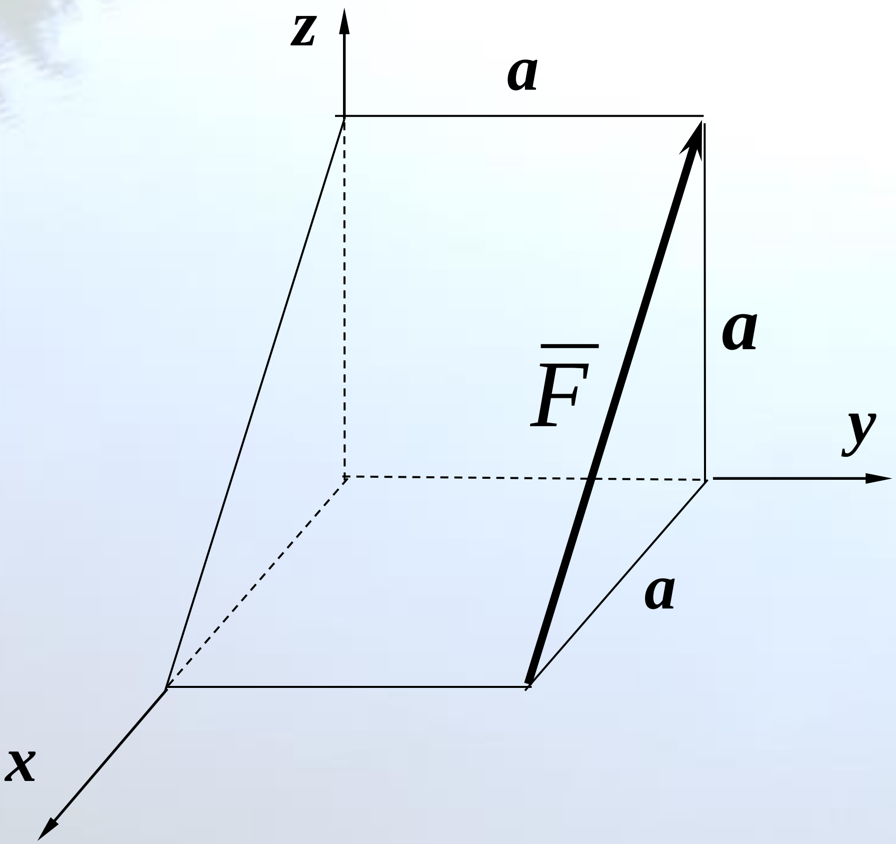
$$=\frac{\sqrt{6}}{4}Fa$$

$$\bar{M}_O(\bar{F})=(-\frac{1}{2}Fa)\bar{j}+(\frac{\sqrt{6}}{4}Fa)\bar{k}$$

[例5]　已知：F=60kN，a=10cm

求：$M_x(\overline{F})$，$M_y(\overline{F})$，$M_z(\overline{F})$

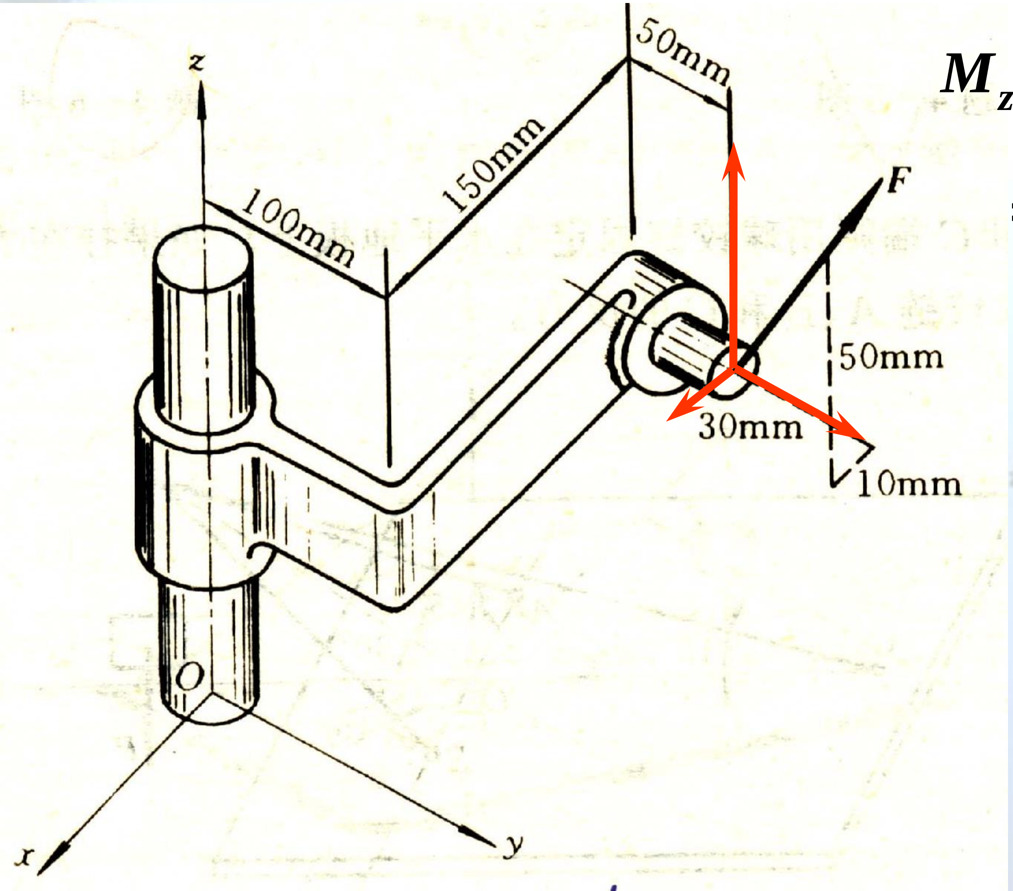
解：



[题3-9]（P107）已知:F=1000N

求：力P对z轴的矩

解: $F_z = \frac{5}{\sqrt{35}}F$ $F_y = \frac{3}{\sqrt{35}}F$ $F_x = \frac{1}{\sqrt{35}}F$



$$M_z(\overline{F}) = M_z(\overline{F}_x) + M_z(\overline{F}_y) + M_z(\overline{F}_z)$$

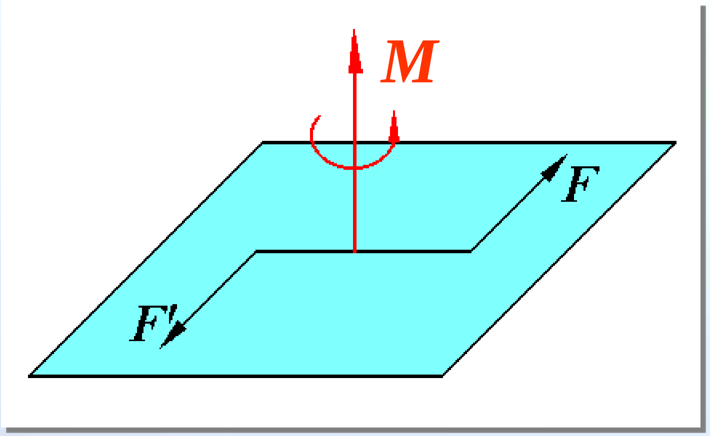
$$= -F_x \times (100+50) - F_y \times 150 + 0$$

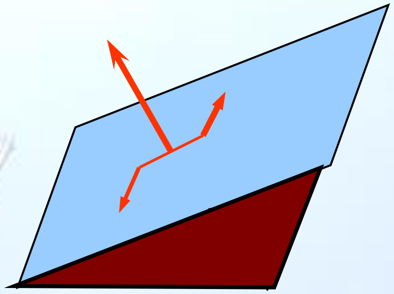
$$= -101.4(\mathrm{N \cdot m})$$

§ 3–3 空间力偶

1. 力偶矩用矢量表示

由于空间力偶除大小、转向外，还必须确定力偶的作用面的方位，所以空间力偶矩必须用矢量表示。

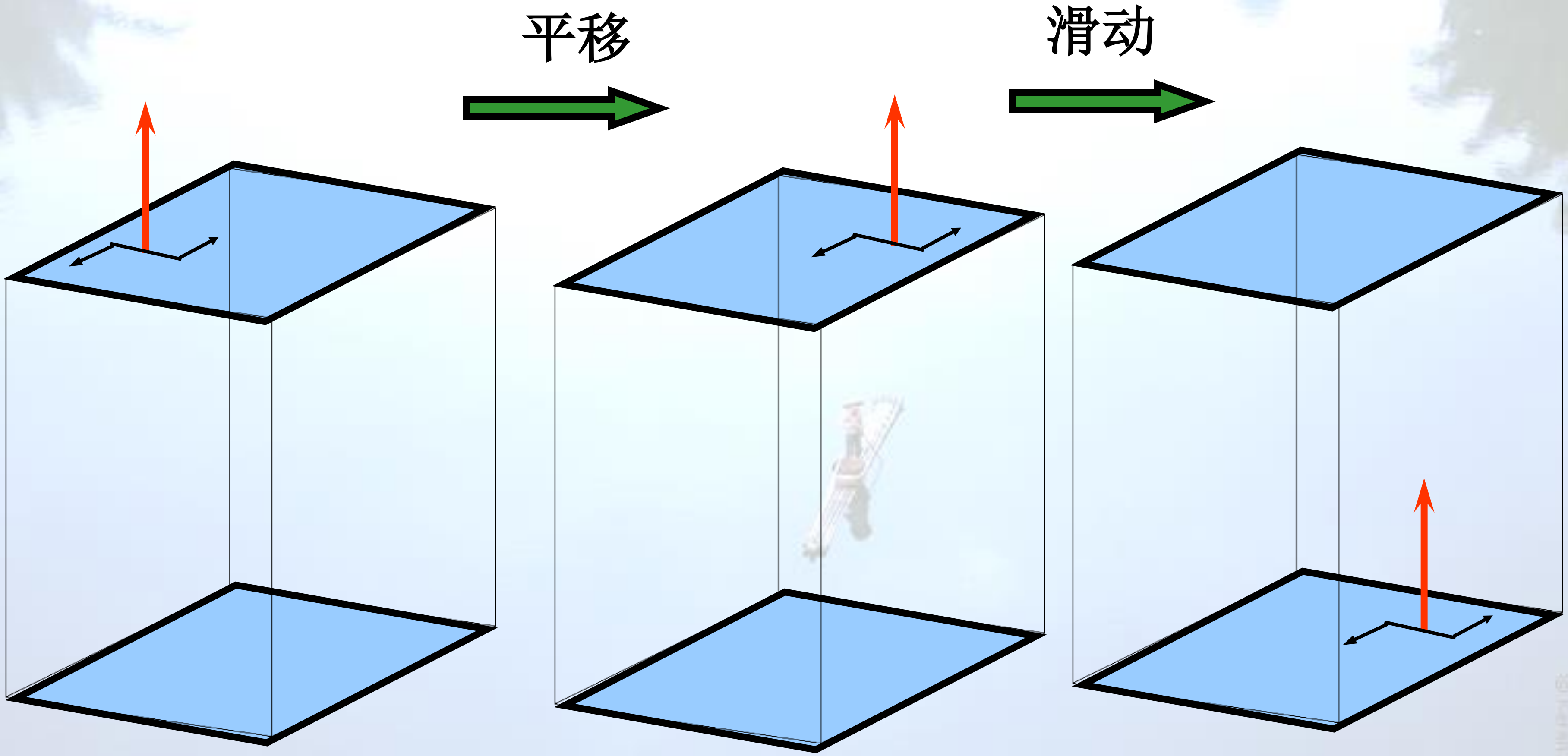




力偶的转向为右手螺旋定则。

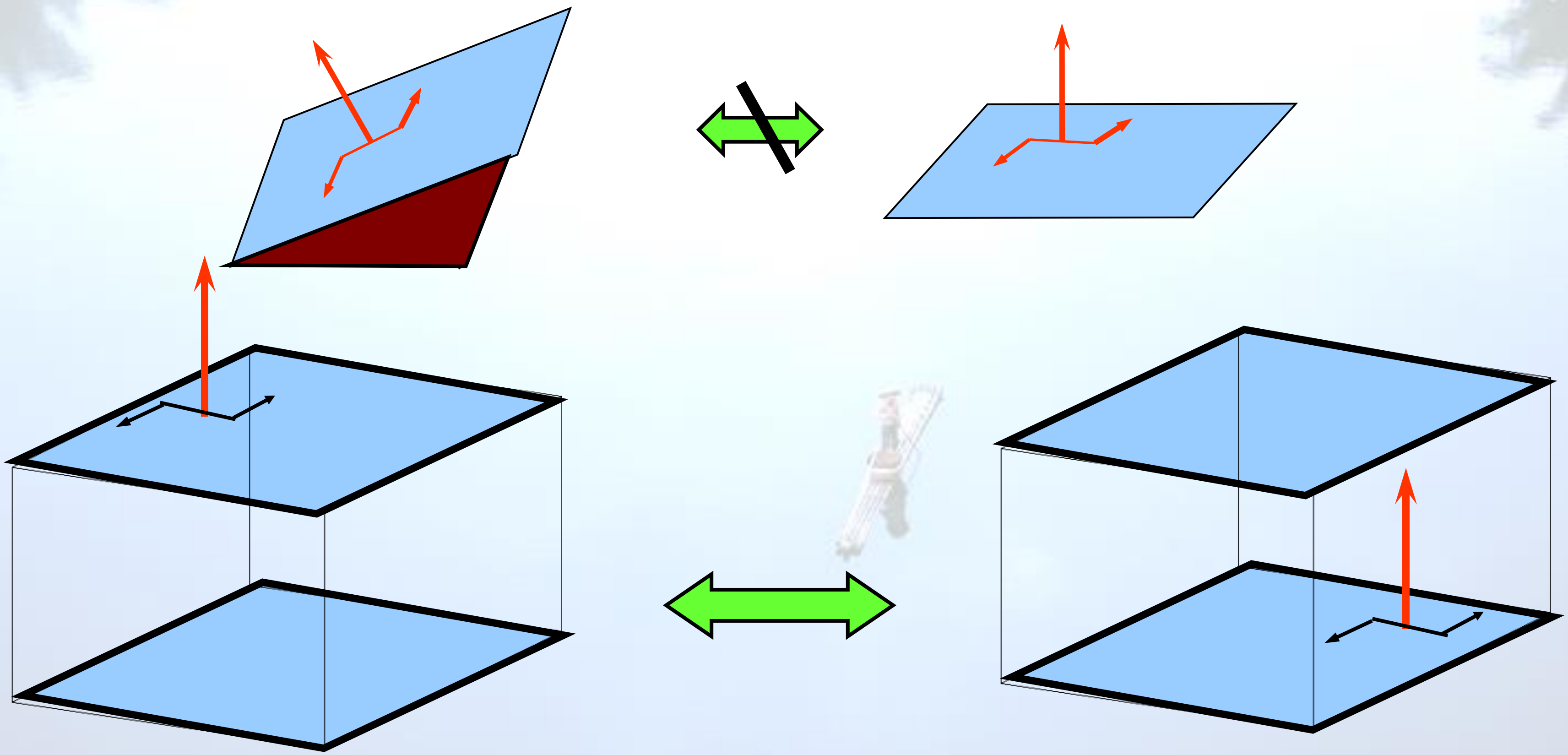
从力偶矢末端看去，逆时针转动为正。

空间力偶是一个自由矢量：可以进行平移和滑动。



2. 空间力偶等效定理

作用在同一刚体上的两个空间力偶，如果其力偶矩矢相等，则它们彼此等效。



力偶矩矢相等 → 力偶矩矢的大小相等、方位、转向相同。

由此可得出，空间力偶矩是自由矢量，它有三个要素：

①力偶矩的大小= $|\overline{M}|$

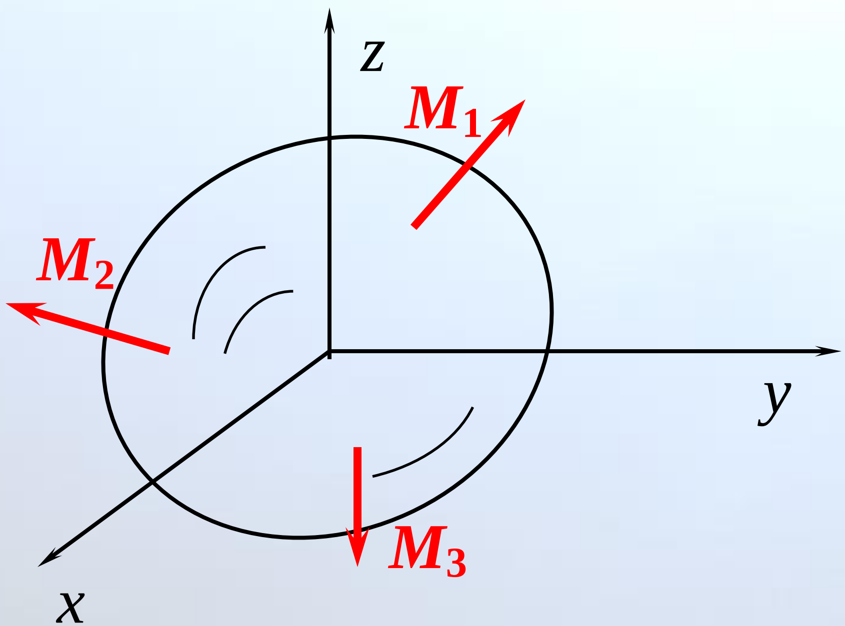
②力偶矩的方向——与力偶作用面法线方向相同

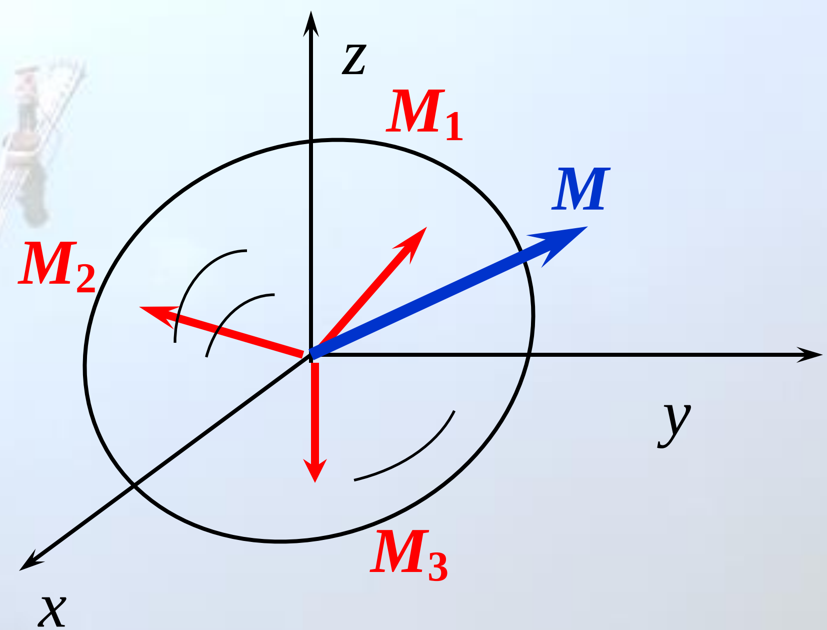
③转向——遵循右手螺旋规则。

3. 空间力偶系的合成与平衡条件

由于空间力偶系是自由矢量，只要方向不变，可移至任意一点，故可使其滑至汇交于某点，由于是矢量，它的合成符合矢量运算法则。 合力偶矢 = 分力偶矩的矢量和

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{M}}_1 + \overline{\boldsymbol{M}}_2 + \overline{\boldsymbol{M}}_3 + \cdots + \overline{\boldsymbol{M}}_n = \sum \overline{\boldsymbol{M}}_i$$

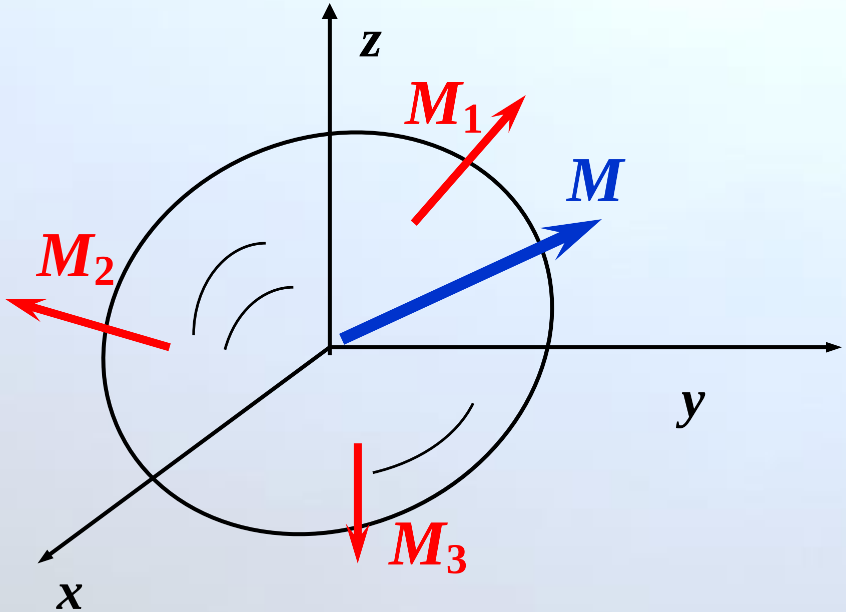




解析式：$\overline{M} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$

$$\begin{cases} M_x = \sum M_{ix} \\ M_y = \sum M_{iy} \\ M_z = \sum M_{iz} \end{cases}$$

合力偶矢的大小和方向：$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$



$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M},$$

$$\cos\beta = \frac{M_y}{M},$$

$$\cos\gamma = \frac{M_z}{M}$$

空间力偶系的平衡条件是：

$$\overline{M}=\sum\overline{M}_i=0$$

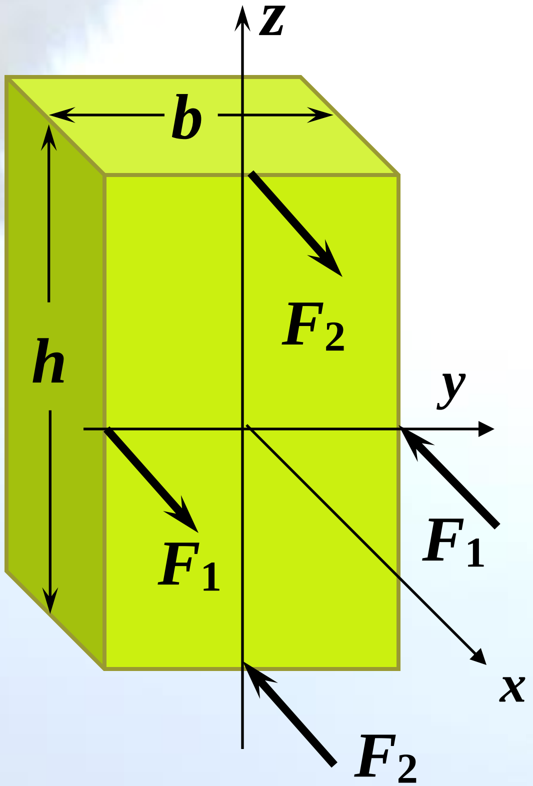
$$\because \quad M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$$

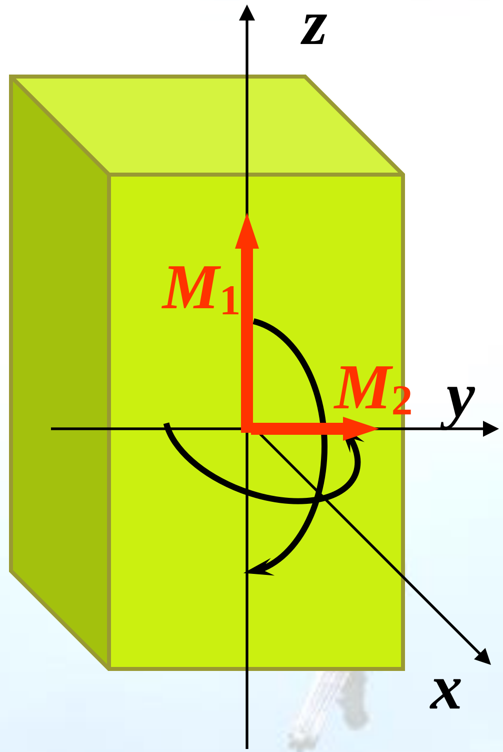
$$\begin{cases} M_x=\sum M_{ix} \\ M_y=\sum M_{iy} \\ M_z=\sum M_{iz} \end{cases}$$

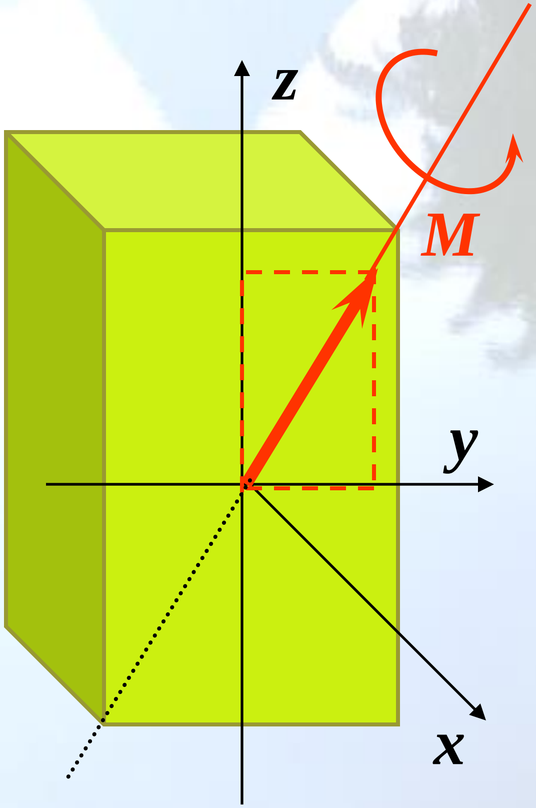
$$\therefore \begin{cases} \sum M_x=0 \\ \sum M_y=0 \\ \sum M_z=0 \end{cases}$$

空间力偶系的平衡方程

[例3]求合力偶







$$M_1 = F_1 \cdot b$$

$$M_2 = F_2 \cdot h$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

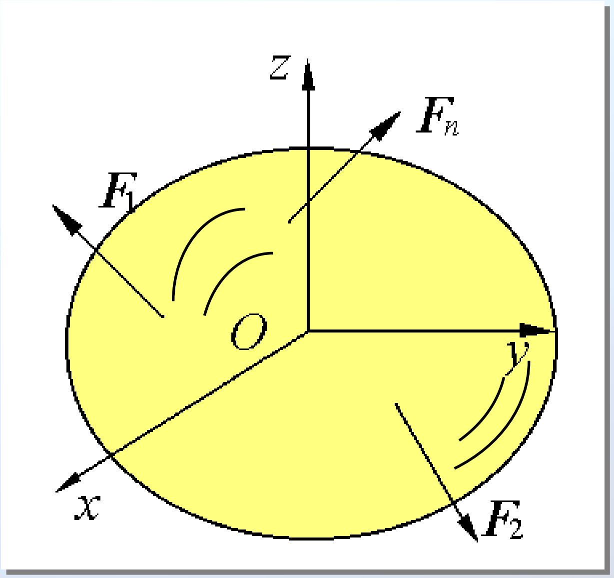
1. 空间任意力系向一点的简化

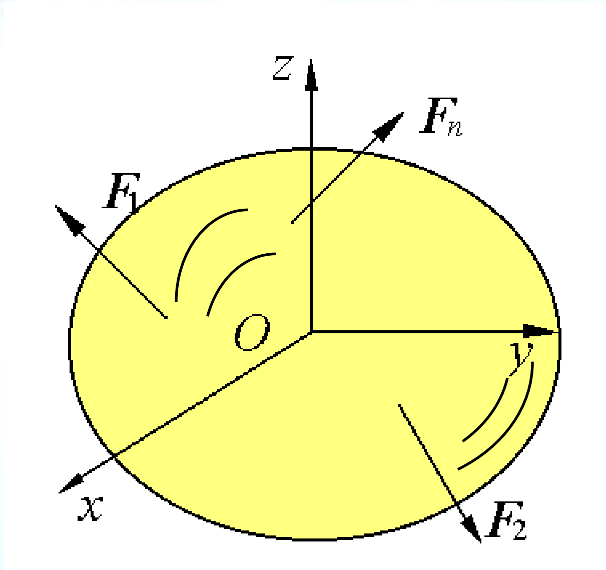
把研究平面一般力系的简化方法拿来研究空间一般力系的简化问题，但须把平面坐标系扩充为空间坐标系。

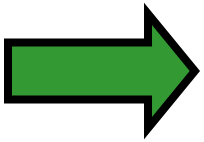
设作用在刚体上有空间一般力系

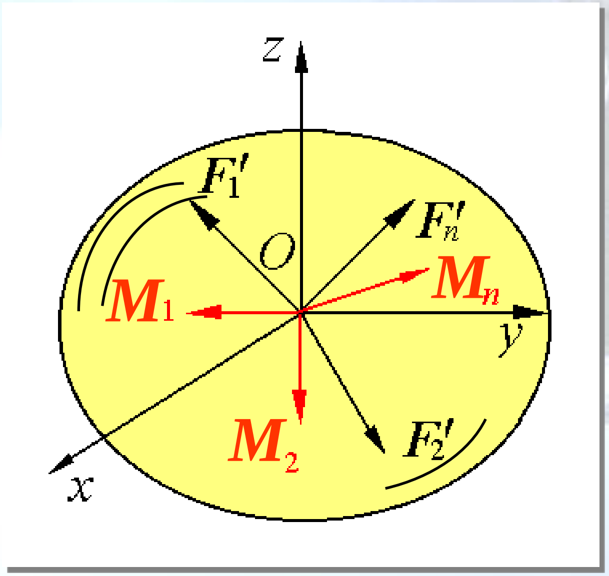
$$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3 \ldots \overline{F}_n$$

向*O*点简化
（*O*点任选）





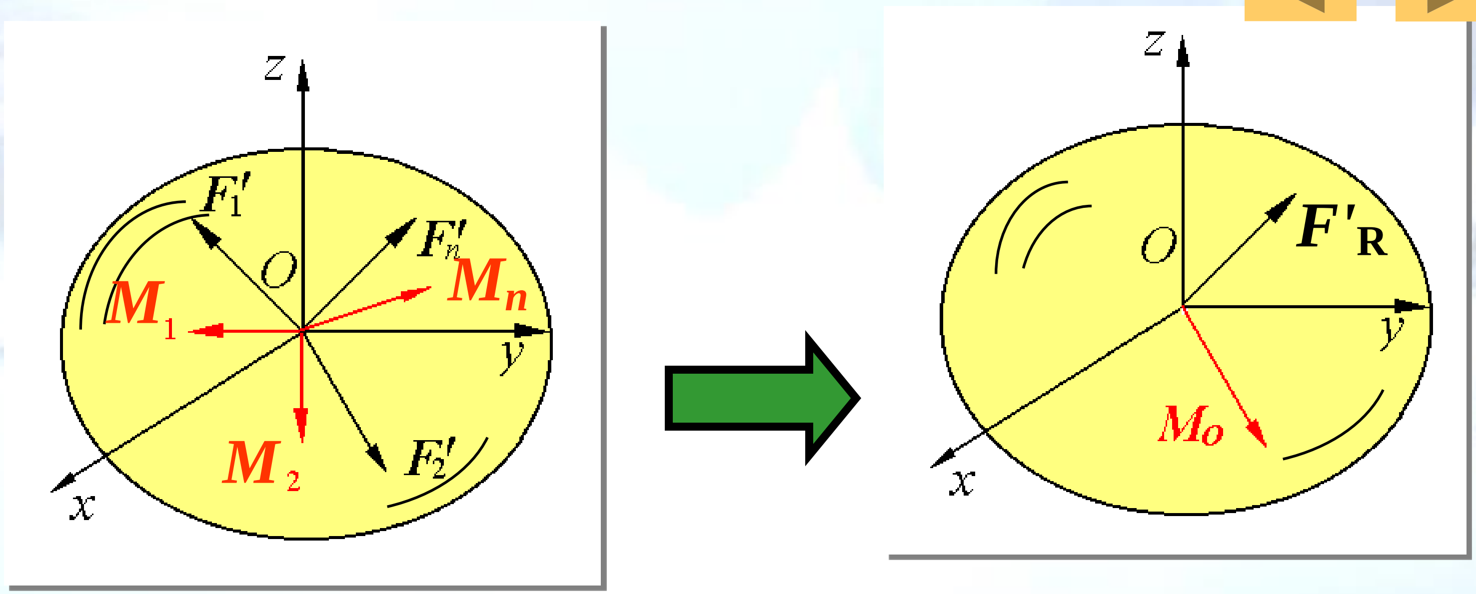




①根据力线平移定理，将各力平行移到O点，得到一空间汇交力系：$\overline{F}_1', \overline{F}_2', \overline{F}_3' \ldots \overline{F}_n'$ 和附加力偶系 $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots \overline{M}_n$

$$\overline{F}_i' = \overline{F}_i \qquad \overline{M}_i = \overline{M}_O(\overline{F}_i)$$

②由于空间力偶是自由矢量，总可汇交于O点。



③合成 $\overline{F}_1',\overline{F}_2',\overline{F}_3'\ldots\overline{F}_n'$ 得主矢 $\overline{F}_R'$

$$\overline{F}_R'=\sum\overline{F}_i'=\sum\overline{F}_i$$

（主矢 F_R' 过简化中心O，其大小和方向与O点的选择无关）

合成 $\overline{M}_1,\overline{M}_2,\ldots\overline{M}_n$ 得主矩 $\overline{M}_O$

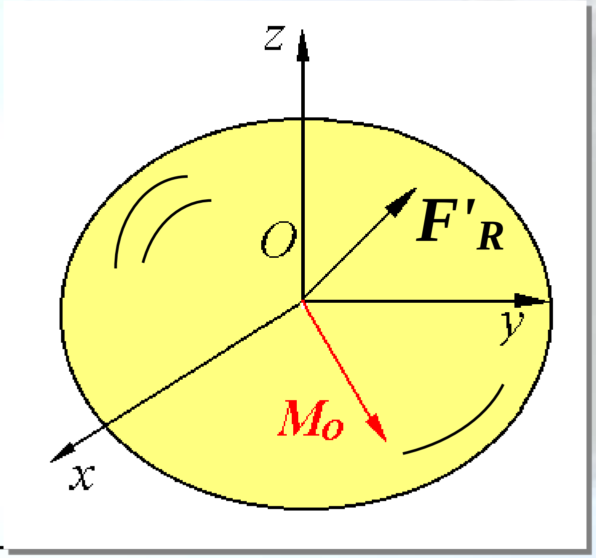
$$\overline{M}_O=\sum\overline{M}_i=\sum\overline{M}_O(\overline{F}_i)$$

（主矩 $\overline{M}_O$与简化中心O有关）

主矢大小:

$$F'_{\mathrm{R}} = \sqrt{F'^{2}_{\mathrm{R}x} + F'^{2}_{\mathrm{R}y} + F'^{2}_{\mathrm{R}z}}$$

$$= \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}$$



主矢方向: $\cos\alpha = \dfrac{\sum F_{ix}}{F'_{\mathrm{R}}}, \cos\beta = \dfrac{\sum F_{iy}}{F'_{\mathrm{R}}}, \cos\gamma = \dfrac{\sum F_{iz}}{F'_{\mathrm{R}}}$

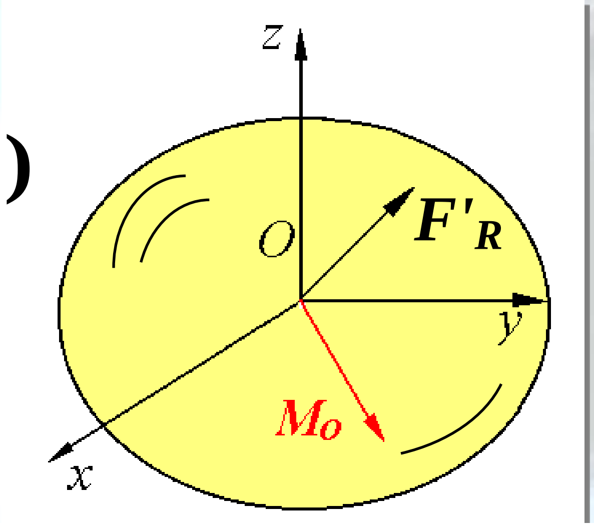
主矩:

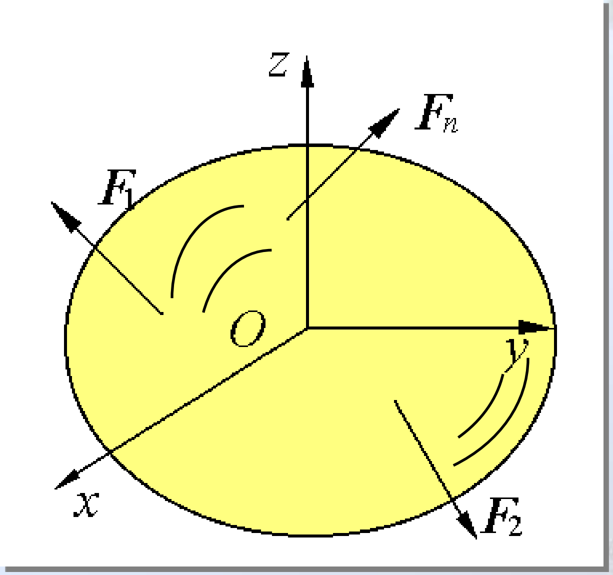
$$\bar{M}_O = \sum \bar{M}_i = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$$

$$= \sum (y_i F_{iz} - z_i F_{iy})\bar{i}$$

$$+ \sum (z_i F_{ix} - x_i F_{iz})\bar{j}$$

$$+ \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})\bar{k}$$





根据力对轴的矩计算公式:

$$\sum M_x(\bar{F}_i) = \sum (y_i F_{iz} - z_i F_{iy})$$

$$\sum M_y(\bar{F}_i) = \sum (z_i F_{ix} - x_i F_{iz})$$

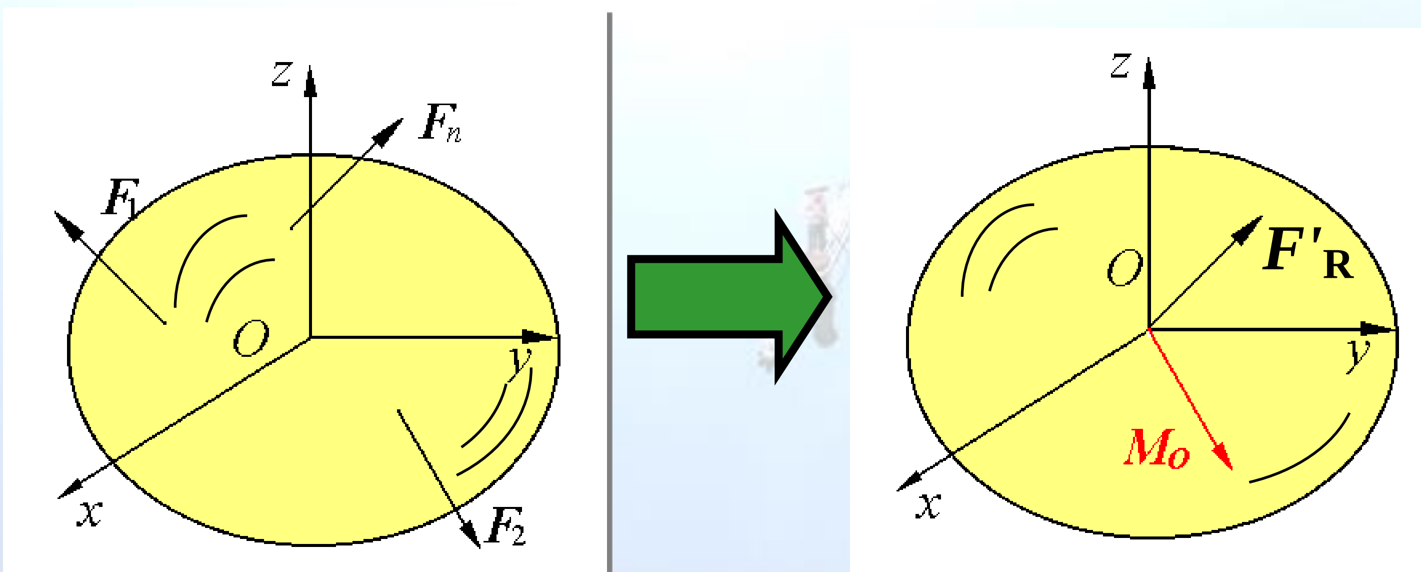
$$\sum M_z(\bar{F}_i) = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})$$

$\therefore$ 主矩大小 $M_O = \sqrt{[\sum M_x(\bar{F})]^2 + [\sum M_y(\bar{F})]^2 + [\sum M_z(\bar{F})]^2}$

2. 空间任意力系简化结果分析

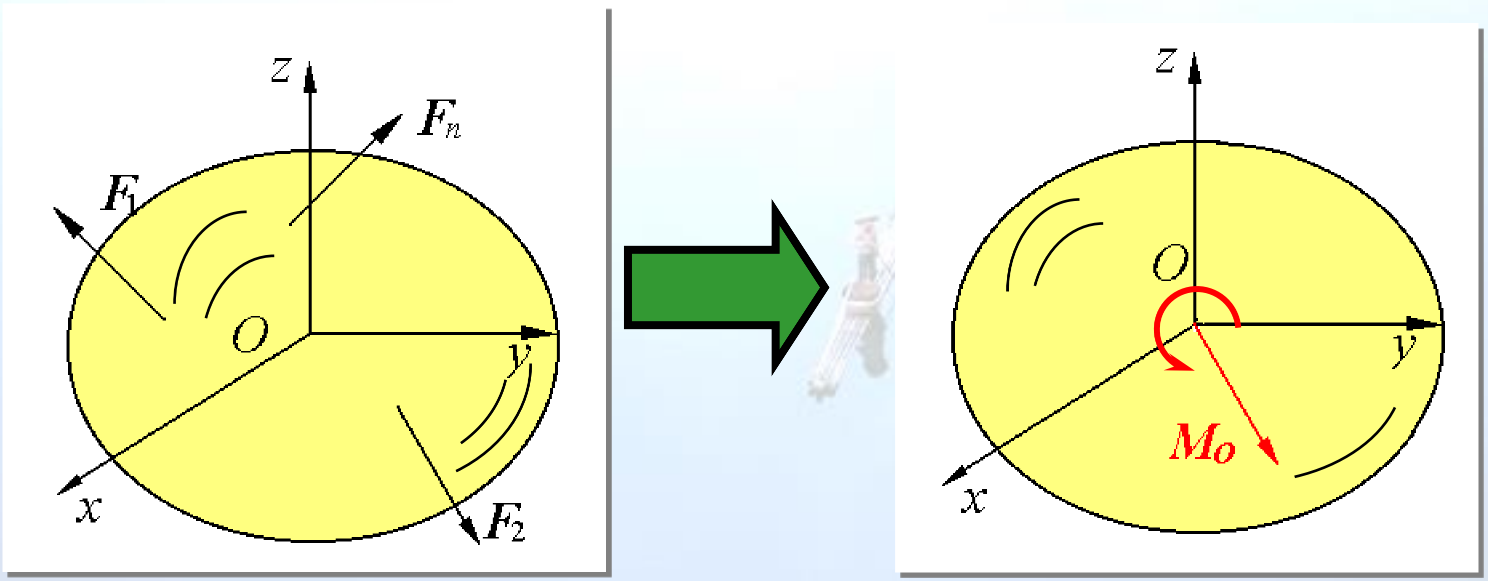
空间一般力系向一点简化得一主矢和主矩，下面针对主矢、主矩的不同情况分别加以讨论。

（1）若 $\overline{F}_R'=0, \overline{M}_O=0$ ，则该力系平衡（下节专门讨论）。

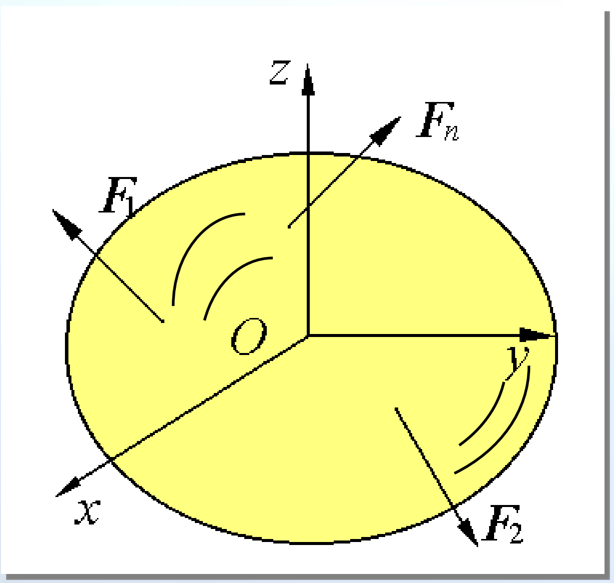


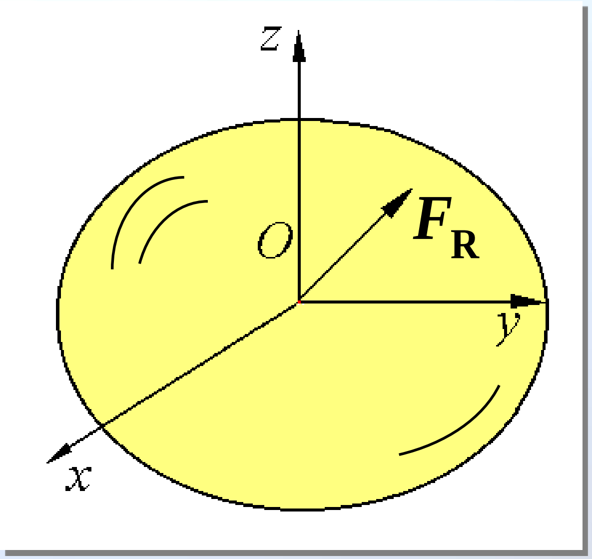
（2）若 $\overline{F}_R' = 0, \overline{M}_O \neq 0$ 则力系可合成一个合力偶，其合力偶矩等于原力系对于简化中心的主矩M_O。

此时主矩与简化中心的位置无关。



（3）若 $\overline{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0, \overline{M}_O = 0$ 则力系可合成为一个合力，原力系合力为 $\overline{F}_{\mathrm{R}}$ ，等于主矢 $\overline{F}'_{\mathrm{R}}$，合力 $\overline{F}_{\mathrm{R}}$ 的作用线通过简化中心 O 点。（此时与简化中心有关，换个简化中心，主矩不为零）



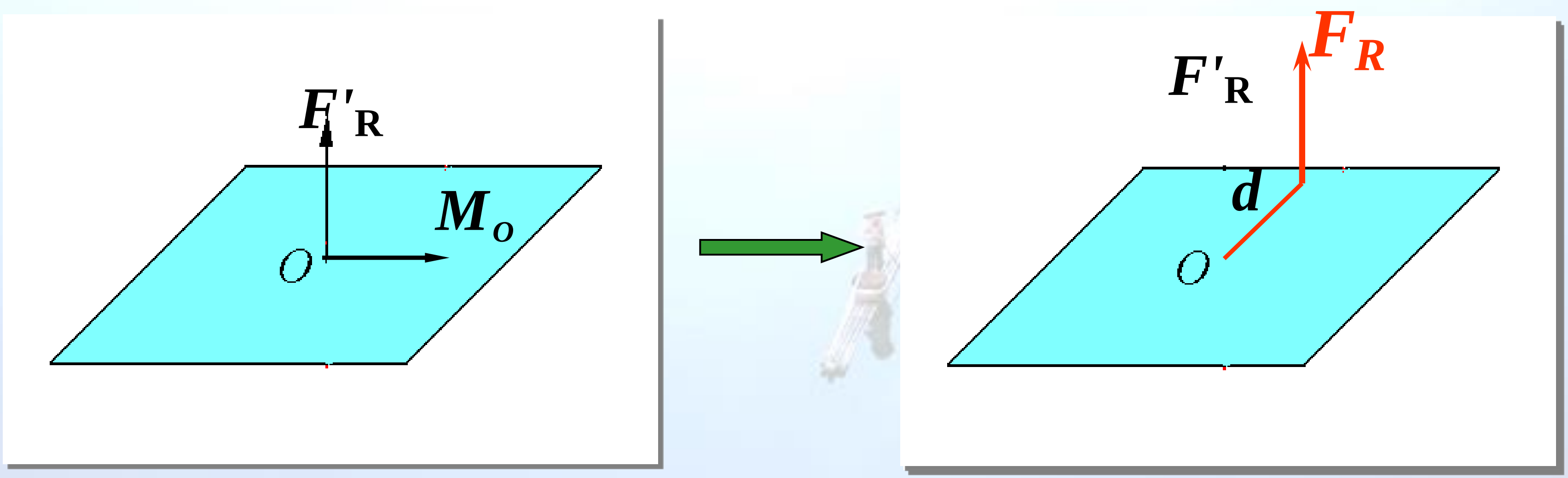


（4）若 $\overline{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0, \overline{M}_O \neq 0$

此时分两种情况讨论。即：① $\overline{F}'_{\mathrm{R}} \perp \overline{M}_O$

② $\overline{F}'_{\mathrm{R}} // \overline{M}_O$

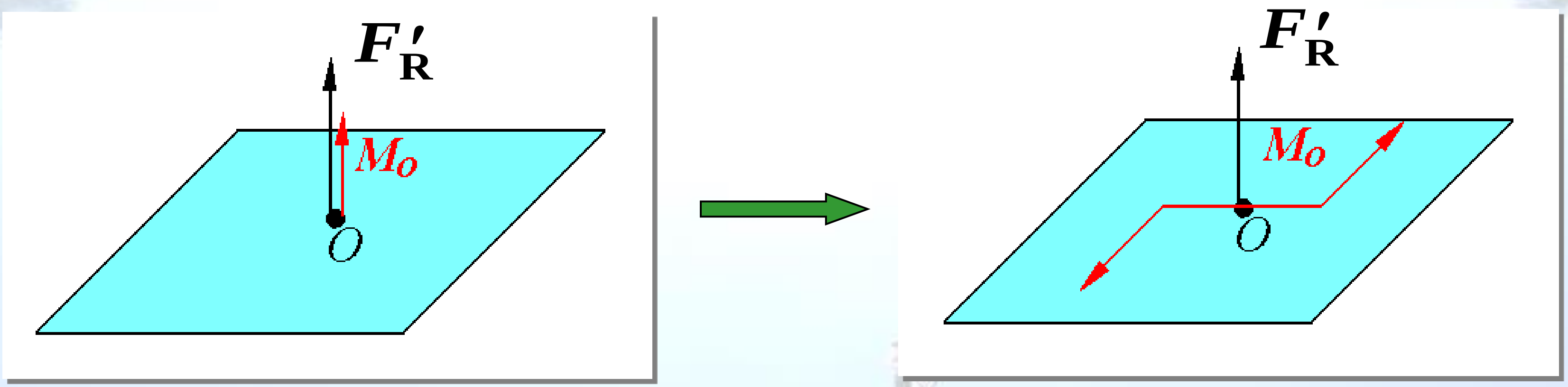
① $\overline{F}'_{\mathrm{R}} \perp \overline{M}_O$ 可进一步简化，原力系合成为一个合力F_{R}。



$$d = \frac{\left|\overline{M}_O\right|}{F'_{\mathrm{R}}}$$

合力: $\overline{F}_{\mathrm{R}} = \sum \overline{F}_i$

② $\overline{F}'_R // \overline{M}_O$ ——为力螺旋的情形（新概念，又移动又转动）



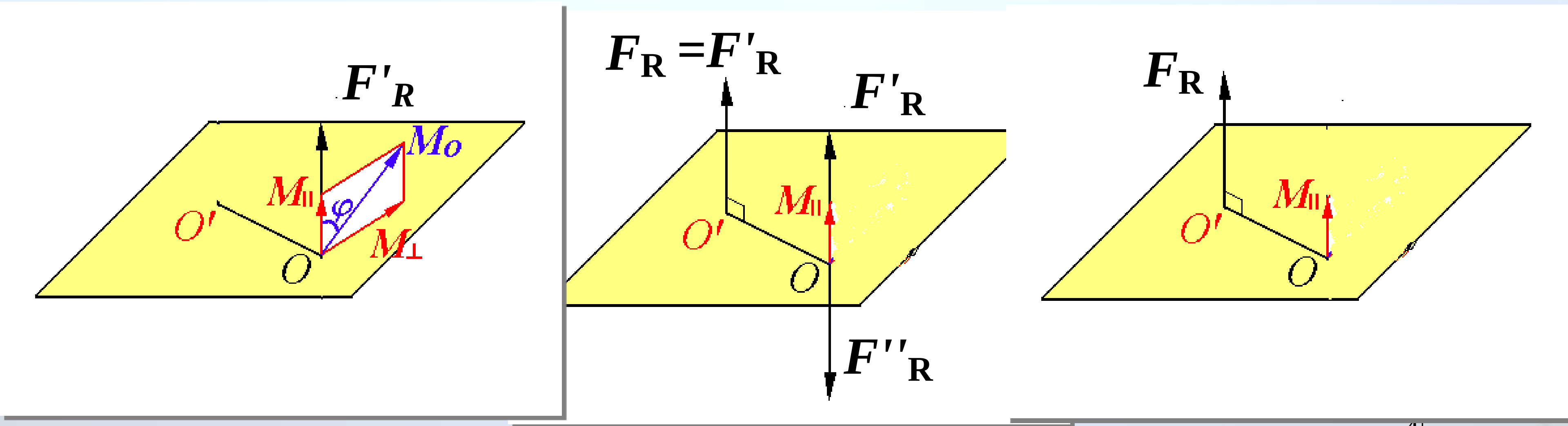
[例]　①拧螺丝　　②炮弹出膛时炮弹螺线

③ F'_R不平行也不垂直M_0，最一般的成任意角φ

在此种情况下，〈1〉首先把M_O 分解为$M_\perp$和$M_{//}$

〈2〉将$M_\perp$ 和$M_{//}$分别按①、②处理。

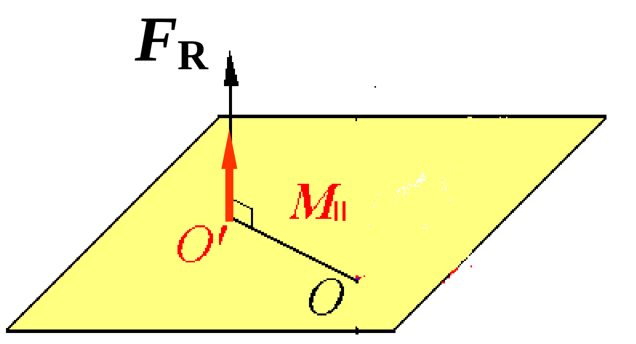
$M_\perp$ 使主矢F'_R搬家，搬家的矩离：$OO'=\dfrac{M_\perp}{F_R'}=\dfrac{M_O\sin\varphi}{F_R'}$

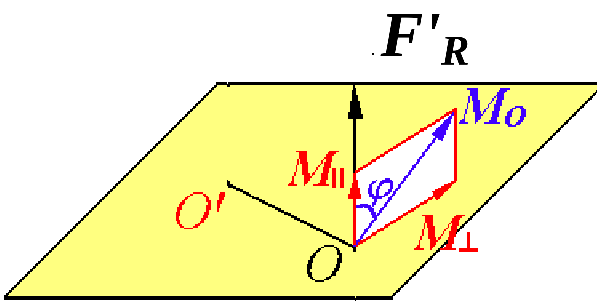


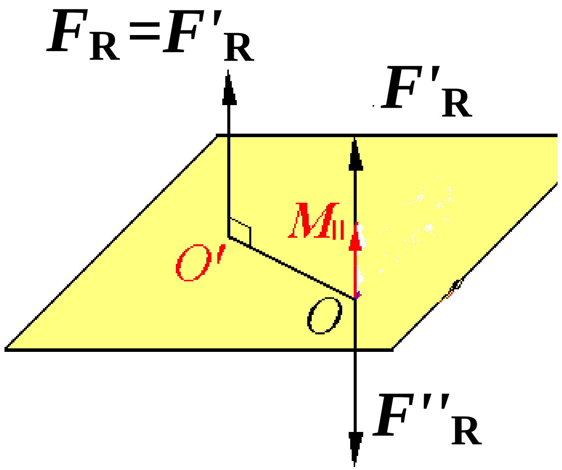
因为$M_{//}$是自由矢量，

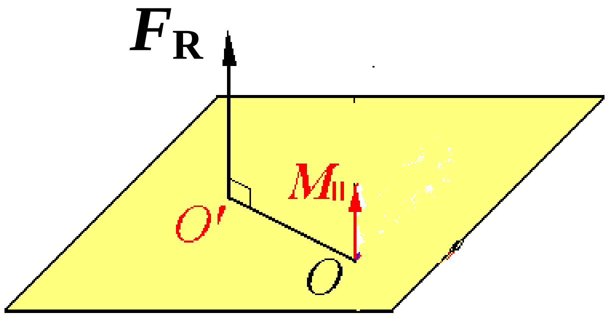
可将$M_{//}$搬到O'处，$M_{//}$不变，

所以在O'点处形成一个力螺旋。

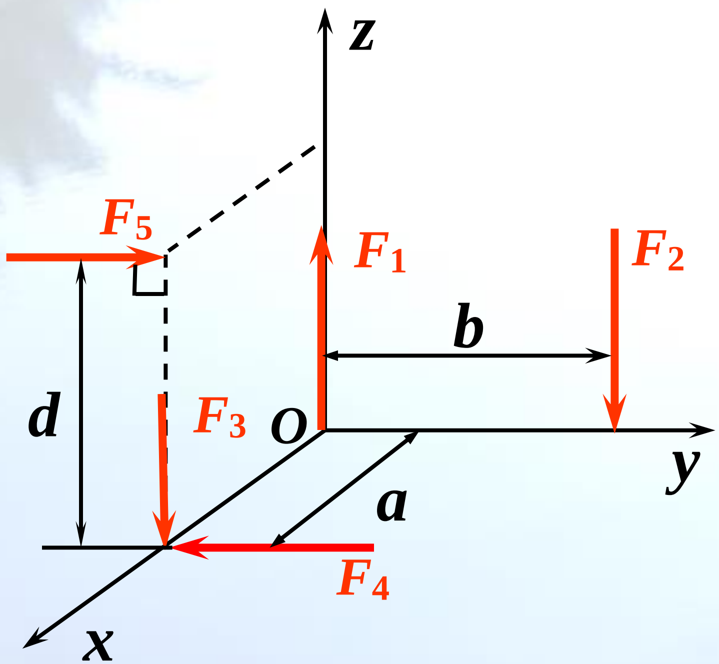








[例5] 求所示力系向O点简化的结果，已知：$F_1 = F_4 = F_5 = 10\text{kN}$， $F_2 = 11\text{kN}$，$F_3 = 9\text{kN}$， $F_4 // F_5$，$a=4\text{m}$，$b=d=3\text{m}$。



解： [主矢]

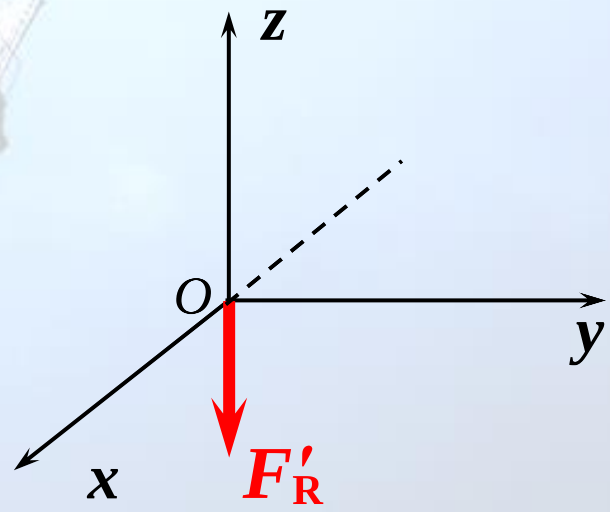
$$F'_{Rx} = \sum F_x = 0$$

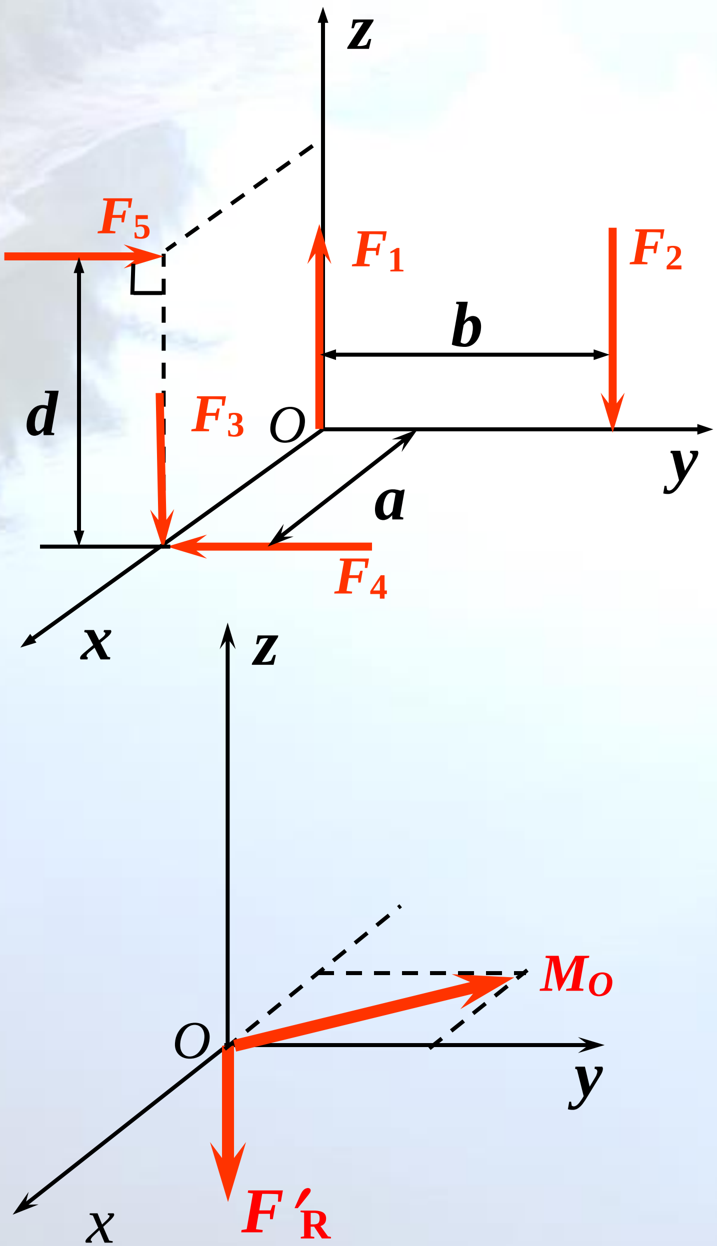
$$F'_{Ry} = \sum F_y = F_5 - F_4 = 0$$

$$F'_{Rz} = \sum F_z = F_1 - F_2 - F_3$$

$$= 10 - 11 - 9 = -10\text{kN}$$

$$\therefore \overline{F}'_R = (-10\overline{k})\text{kN}$$





[主矩]

$$M_{Ox}=\sum M_x=-F_2\times b-F_5\times d$$

$$=-11\times 3-10\times 3=-63(\text{kN}\cdot\text{m})$$

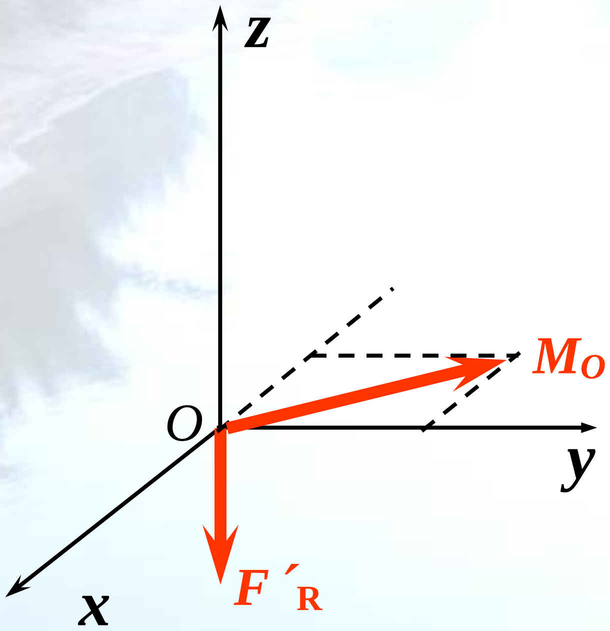
$$M_{Oy}=\sum M_y=F_3\times a\ =9\times 4$$

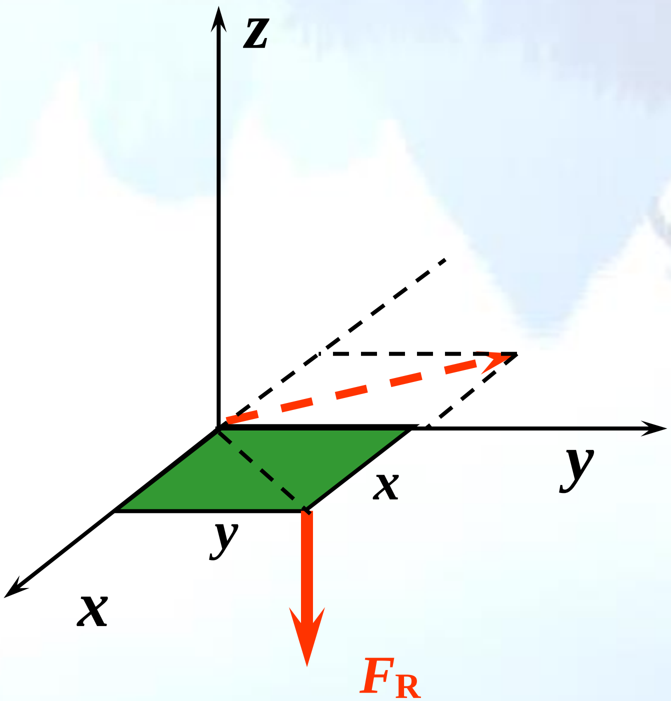
$$=36(\text{kN}\cdot\text{m})$$

$$M_{Oz}=\sum M_z$$

$$=-F_4\times a+F_5\times a\ =0$$

$$\therefore \overline{M}_O=(-63\bar{i}+36\bar{j})\text{kN}\cdot\text{m}$$





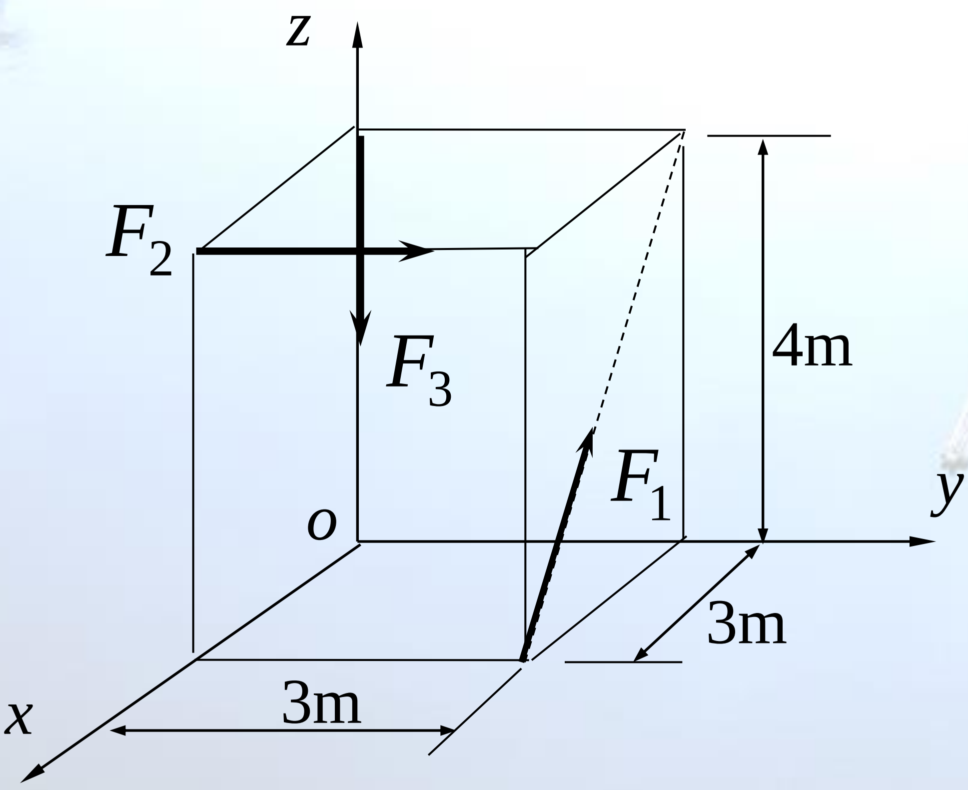
$\because \overline{F}_R \perp \overline{M}_O$

$\therefore$ 可以进一步简化为一合力

$$x = \frac{M_{Oy}}{F_R'} = \frac{36}{10} = 3.6\text{m}$$

$$y = \frac{M_{Ox}}{F_R'} = \frac{63}{10} = 6.3\text{m}$$

[例5]　**求所示力系向O点简化的结果，已知：F_1= 10kN，F_2 = 11kN，F_3 = 9kN。**



§ 3-5　空间任意力系的平衡方程

1. 空间任意力系的平衡方程

$$\overline{F}'_{\mathrm{R}} = 0 \ , \quad \overline{M}_O = 0$$

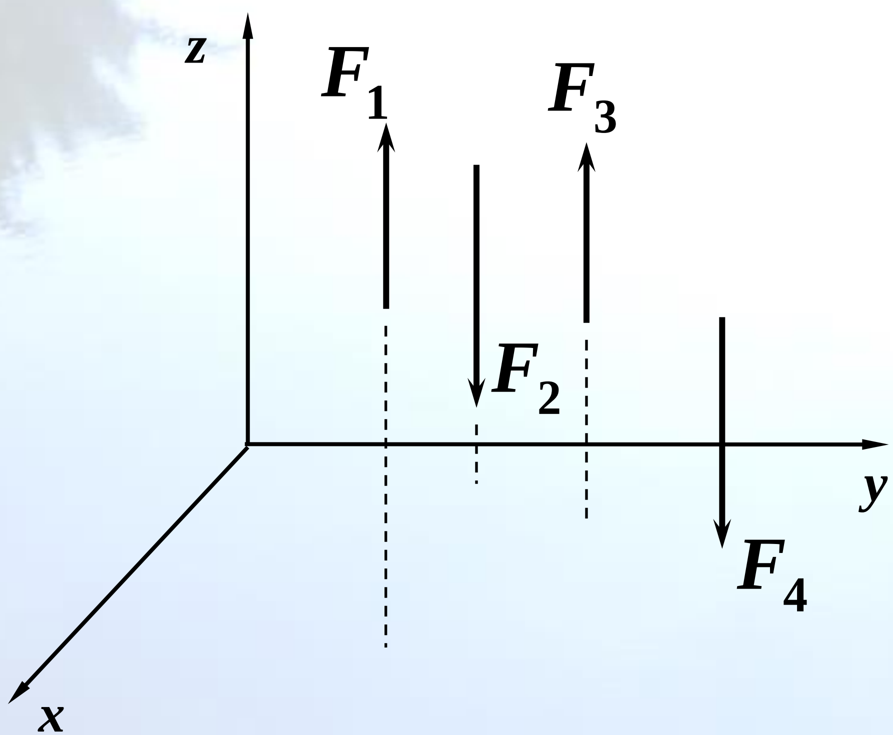
又 $\because \left|\overline{F}'_{\mathrm{R}}\right| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$

$$\left|\overline{M}_O\right| = \sqrt{[\sum M_x(\overline{F})]^2 + [\sum M_y(\overline{F})]^2 + [\sum M_z(\overline{F})]^2}$$

所以空间任意力系的平衡方程为:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum F_x = 0, \quad && \sum M_x(\overline{F}) = 0 \\ &\sum F_y = 0, && \sum M_y(\overline{F}) = 0 \\ &\sum F_z = 0, && \sum M_z(\overline{F}) = 0 \end{aligned}}$$

空间平行力系的平衡方程



$$\because \quad \sum F_x \equiv 0,\quad \sum F_y \equiv 0,\quad \sum M_z(\overline{F}) \equiv 0$$

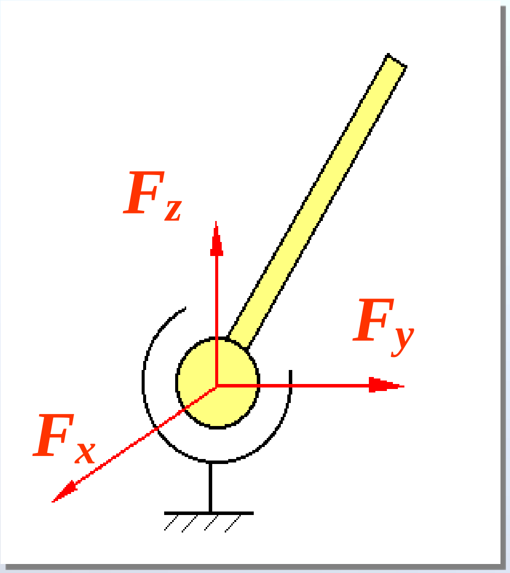
$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} &\sum F_z = 0, \\ &\sum M_x(\overline{F}) = 0 \\ &\sum M_y(\overline{F}) = 0 \end{aligned}}$$

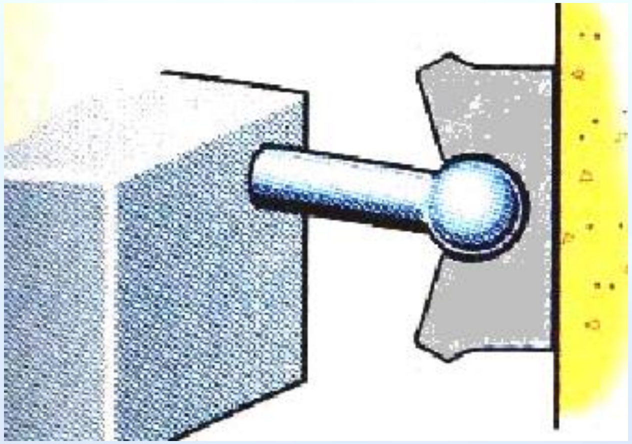
空间平行力系的平衡方程

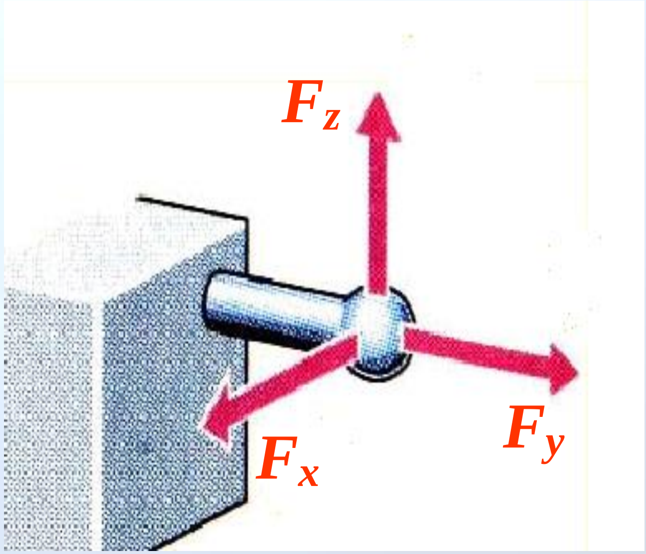
2. 空间约束

观察物体在空间的六种（沿三轴移动和绕三轴转动）可能的运动中，有哪几种运动被约束所阻碍，有阻碍就有约束反力。阻碍移动为反力，阻碍转动为反力偶。[例]

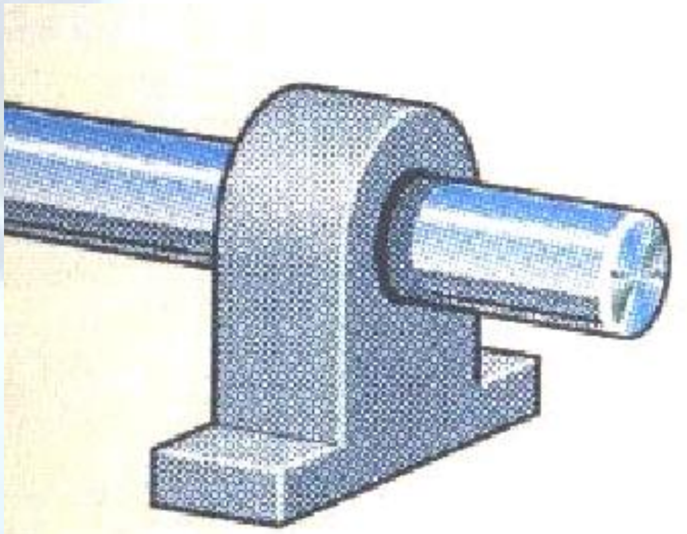
（1）球形铰链

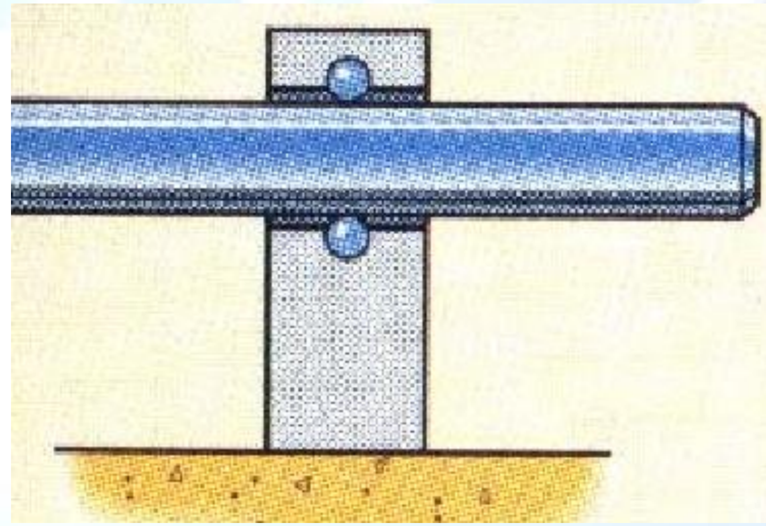


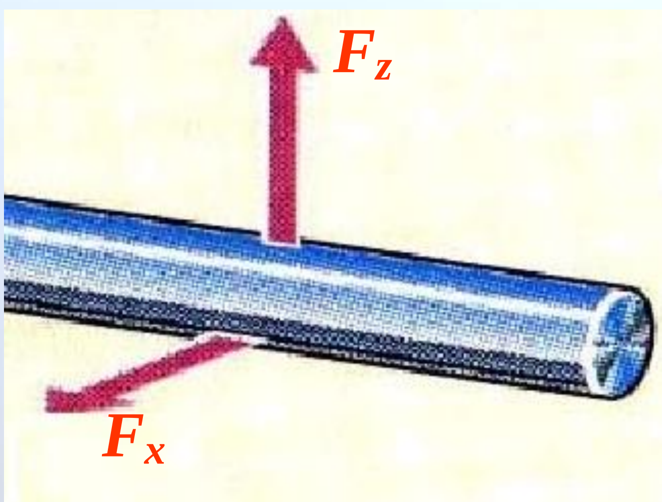


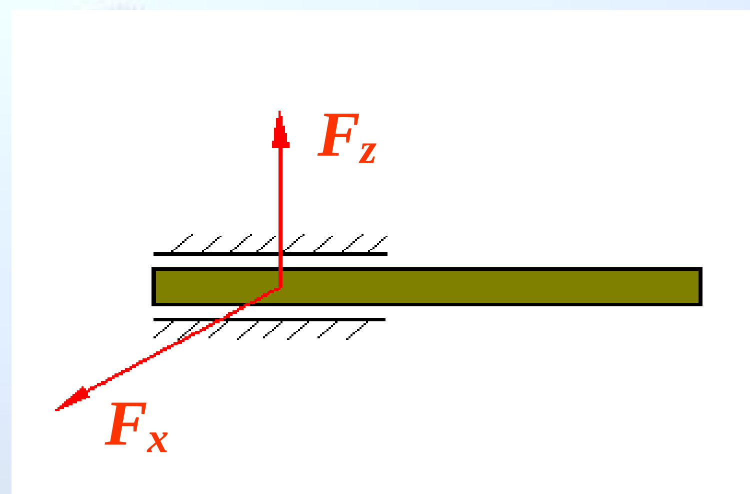


（2）向心轴承，滚珠（柱）轴承，蝶铰链

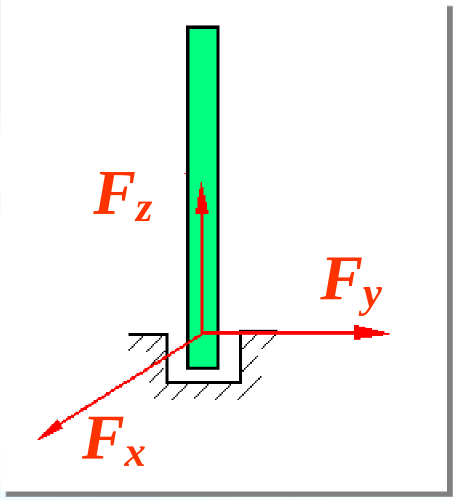


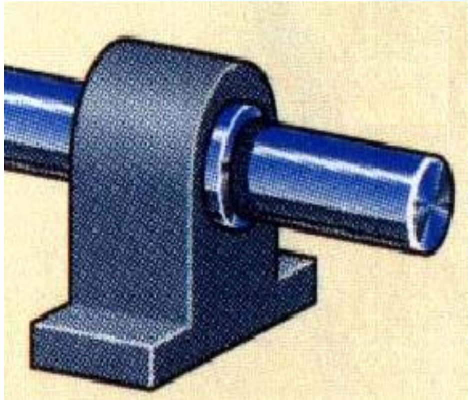


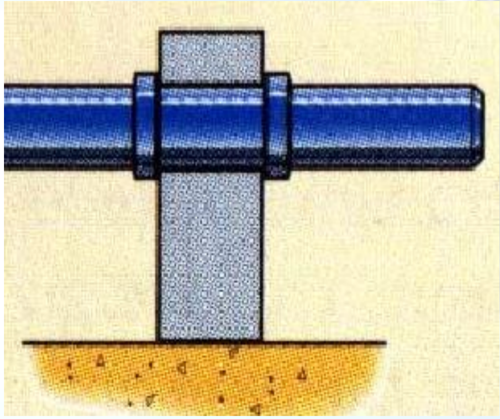




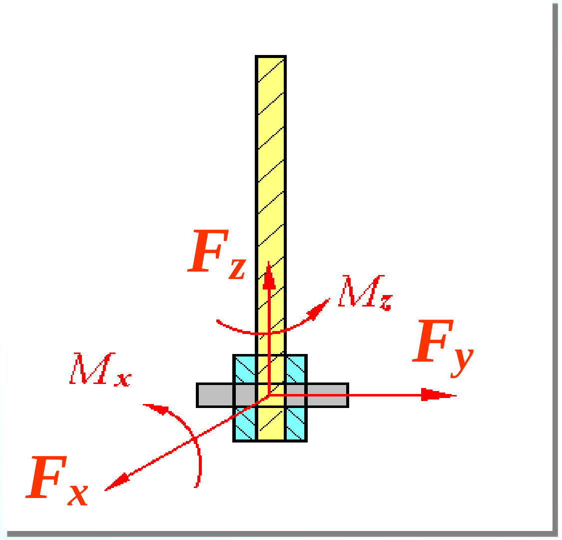
（3）止推轴承

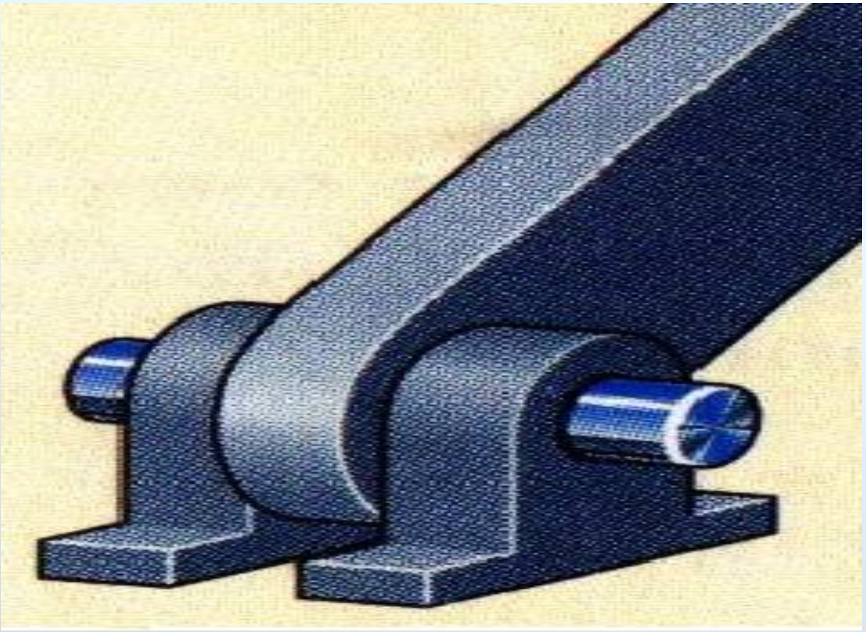


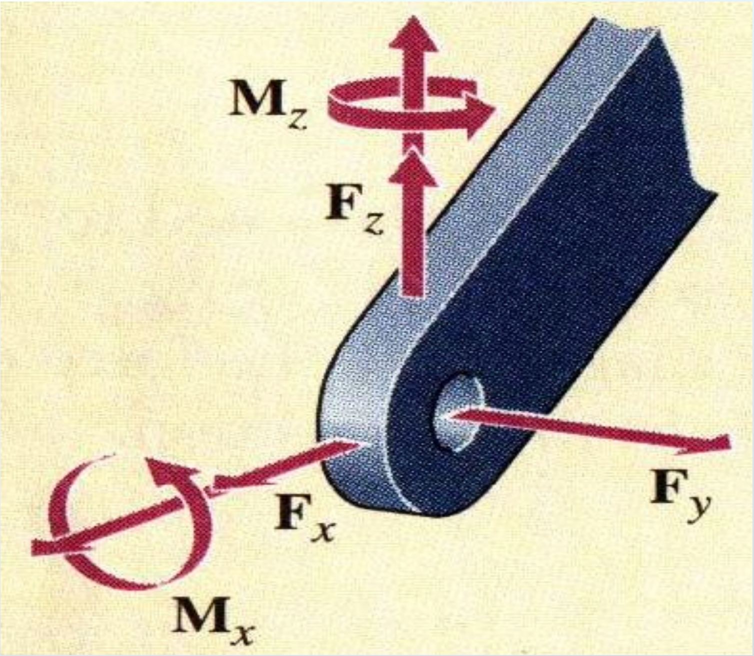




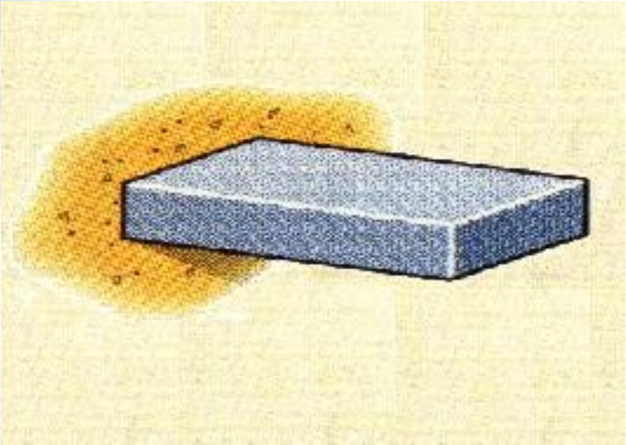
（4）带有销子的夹板

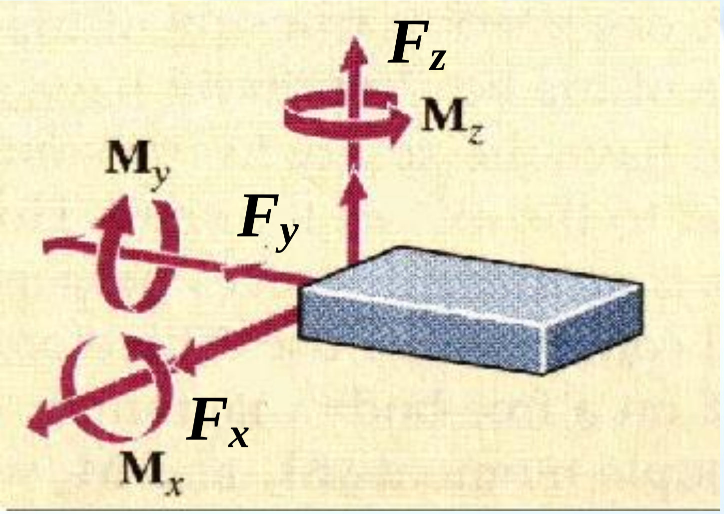


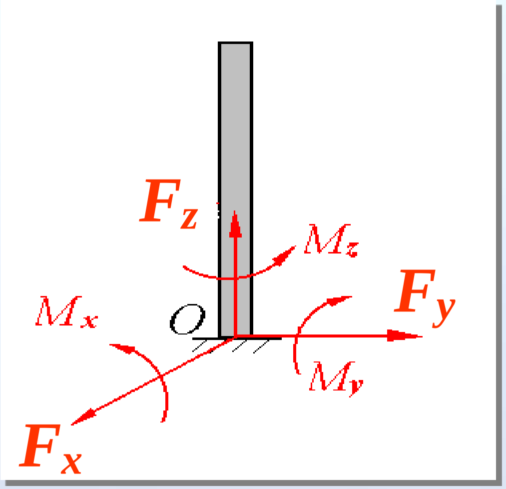




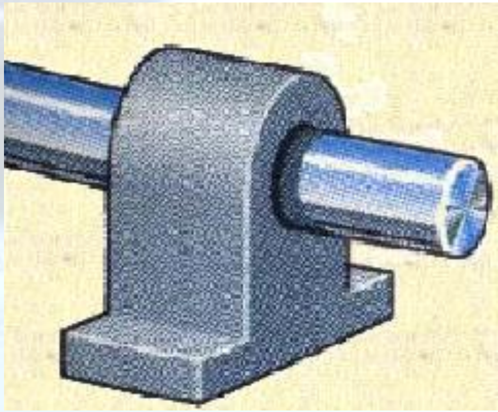
（5）空间固定端

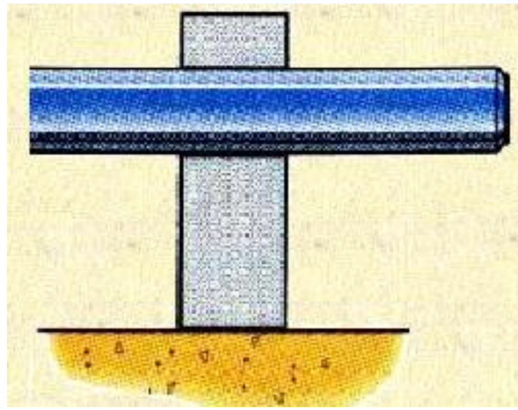


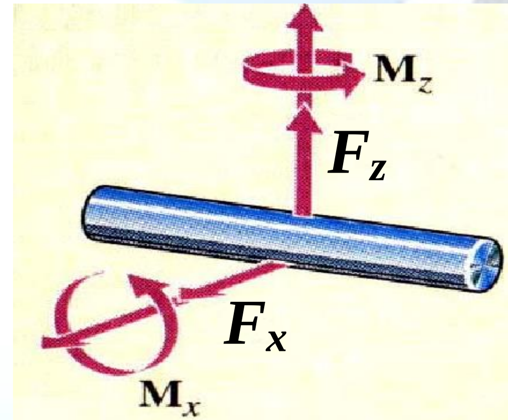


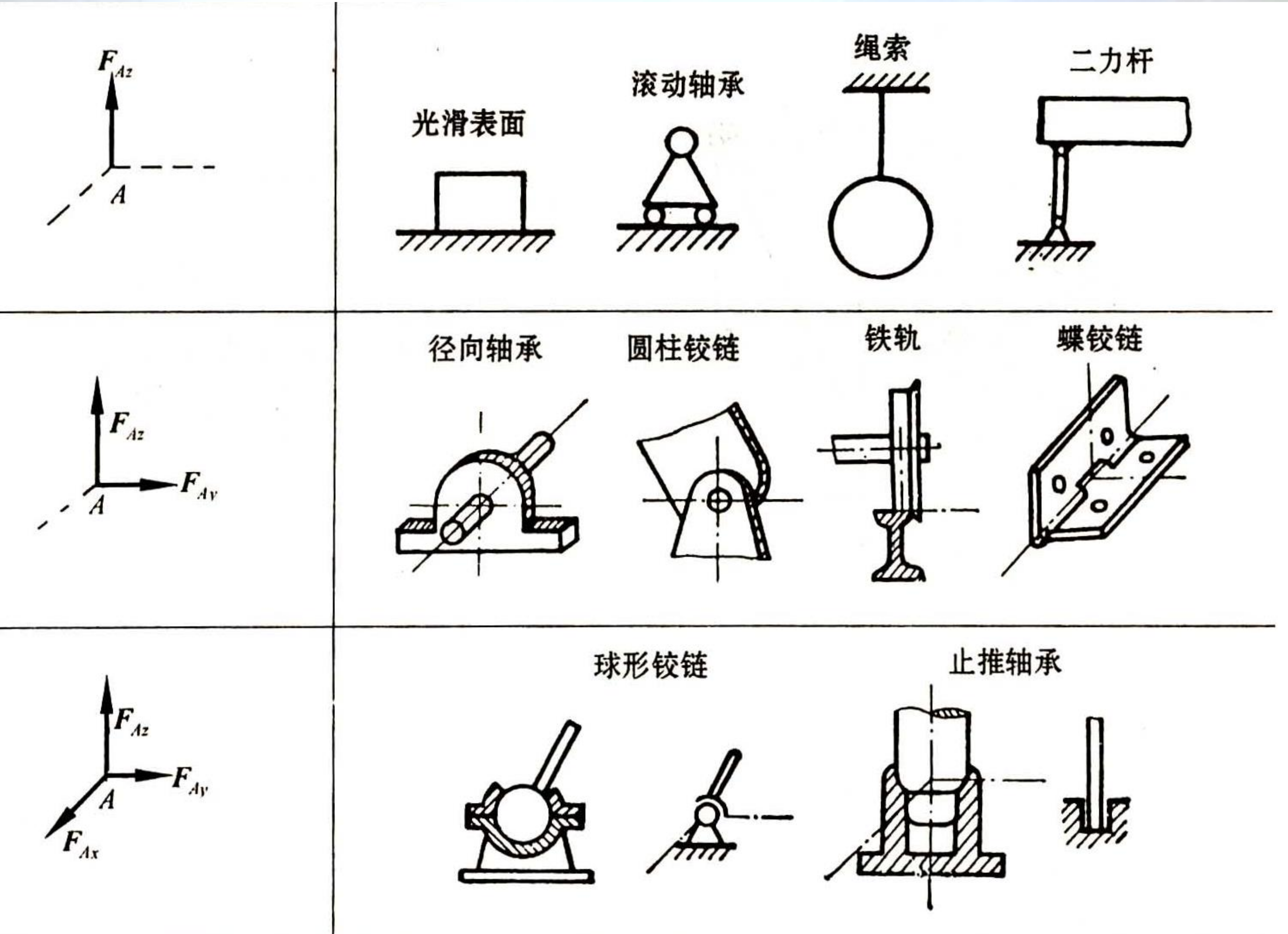


（6）滑动轴承

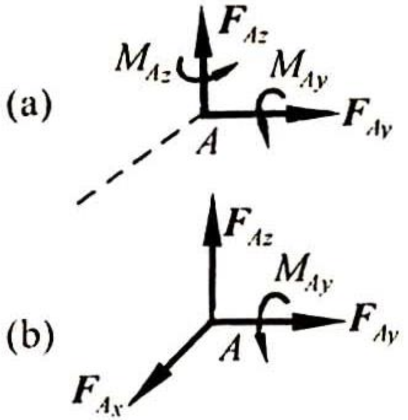




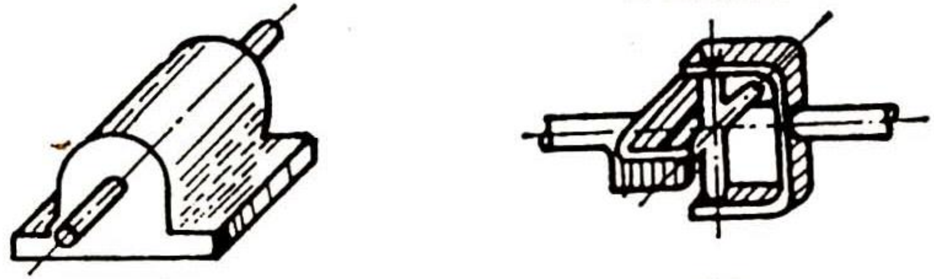




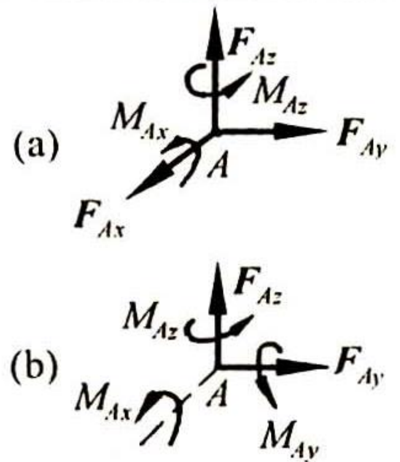
F_{Az}
A
光滑表面
滚动轴承
绳索
二力杆
F_{Az}
F_{Ay}
A
径向轴承
圆柱铰链
铁轨
蝶铰链
F_{Az}
F_{Ay}
A
F_{Ax}
球形铰链
止推轴承



导向轴承　　方向接头

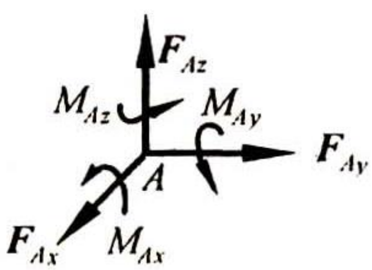


(a)　　(b)

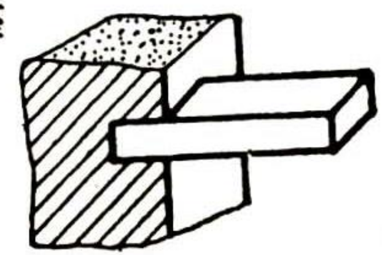


带有销子的夹板　　导轨

(a)　　(b)



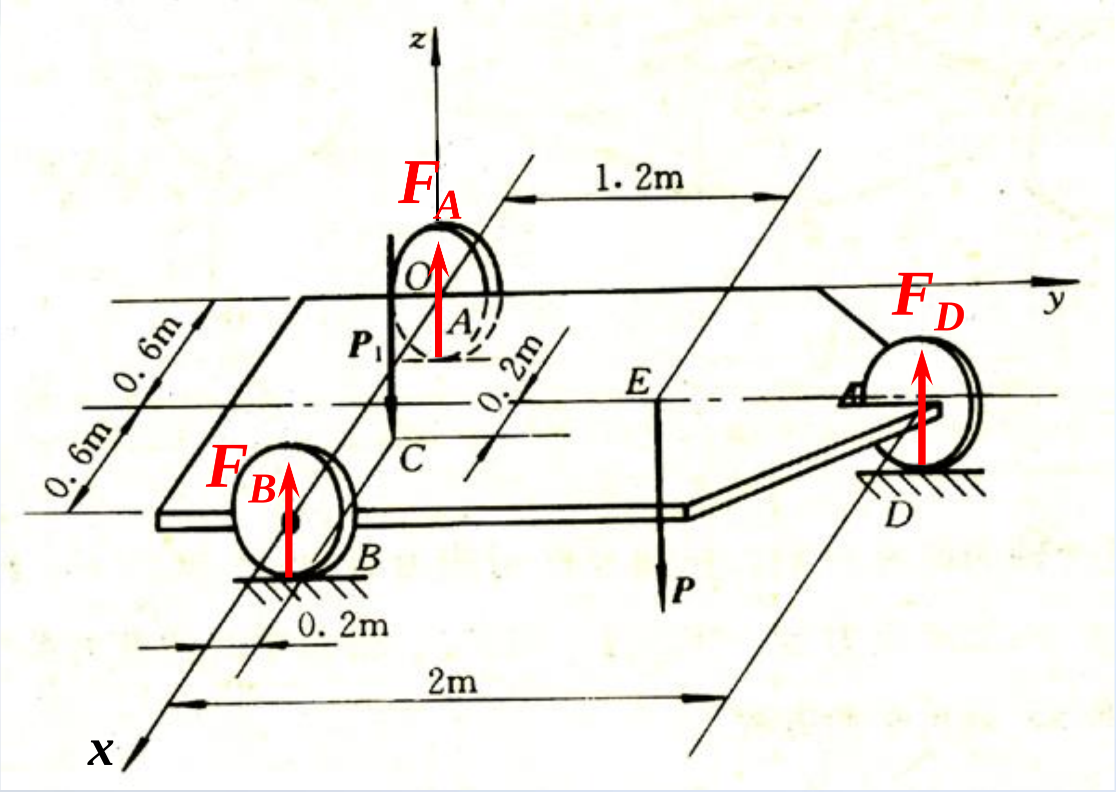
空间的固定端支座



[例3-7]（P94） 三轮小车，P=8kN，P_1=10kN，求地面对车轮的反力。

解：$\sum M_x(\bar{F})=0,\quad -0.2P_1-1.2P+2F_D=0 \qquad \therefore F_D=5.8\text{kN}$

$\sum M_y(\bar{F})=0,\quad 0.8P_1+0.6P-0.6F_D-1.2F_B=0 \quad \therefore F_B=7.78\text{kN}$



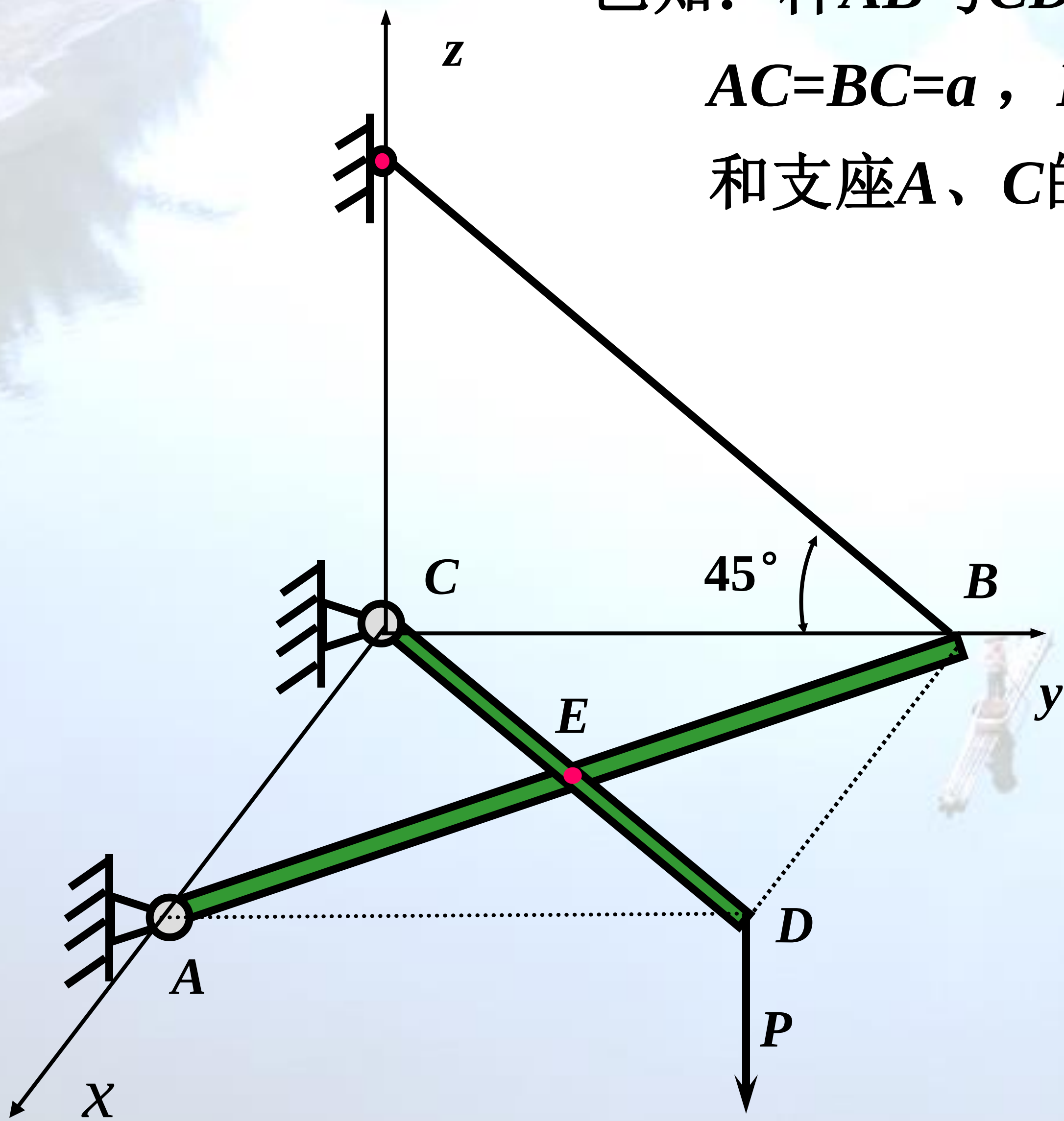
$\sum F_z=0,$

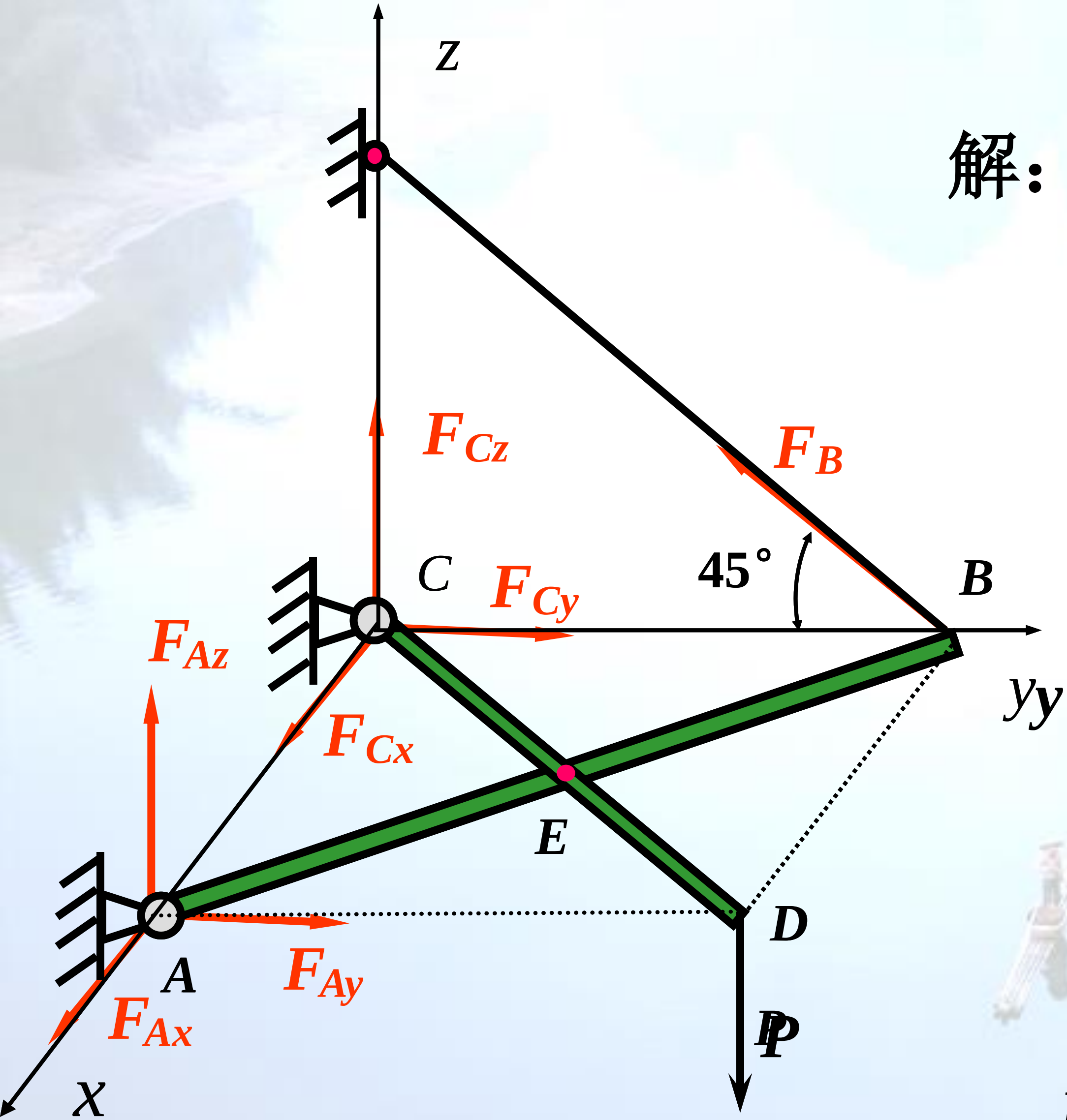
$-P_1-P+F_A+F_B+F_D=0$

$\therefore F_A=4.423\text{kN}$

[例6]

已知：杆*AB*与*CD*等长，在中点*E*铰接，*AC*=*BC*=*a*，*P*=500N，求绳子的拉力和支座*A*、*C*的反力。





解：[整体]

$$\sum M_x(\bar{F}) = 0,$$

$$F_B \cos 45° \cdot a - P \cdot a = 0$$

$$\therefore \quad F_B = 708(\mathrm{N})$$

$$\sum M_y(\bar{F}) = 0,$$

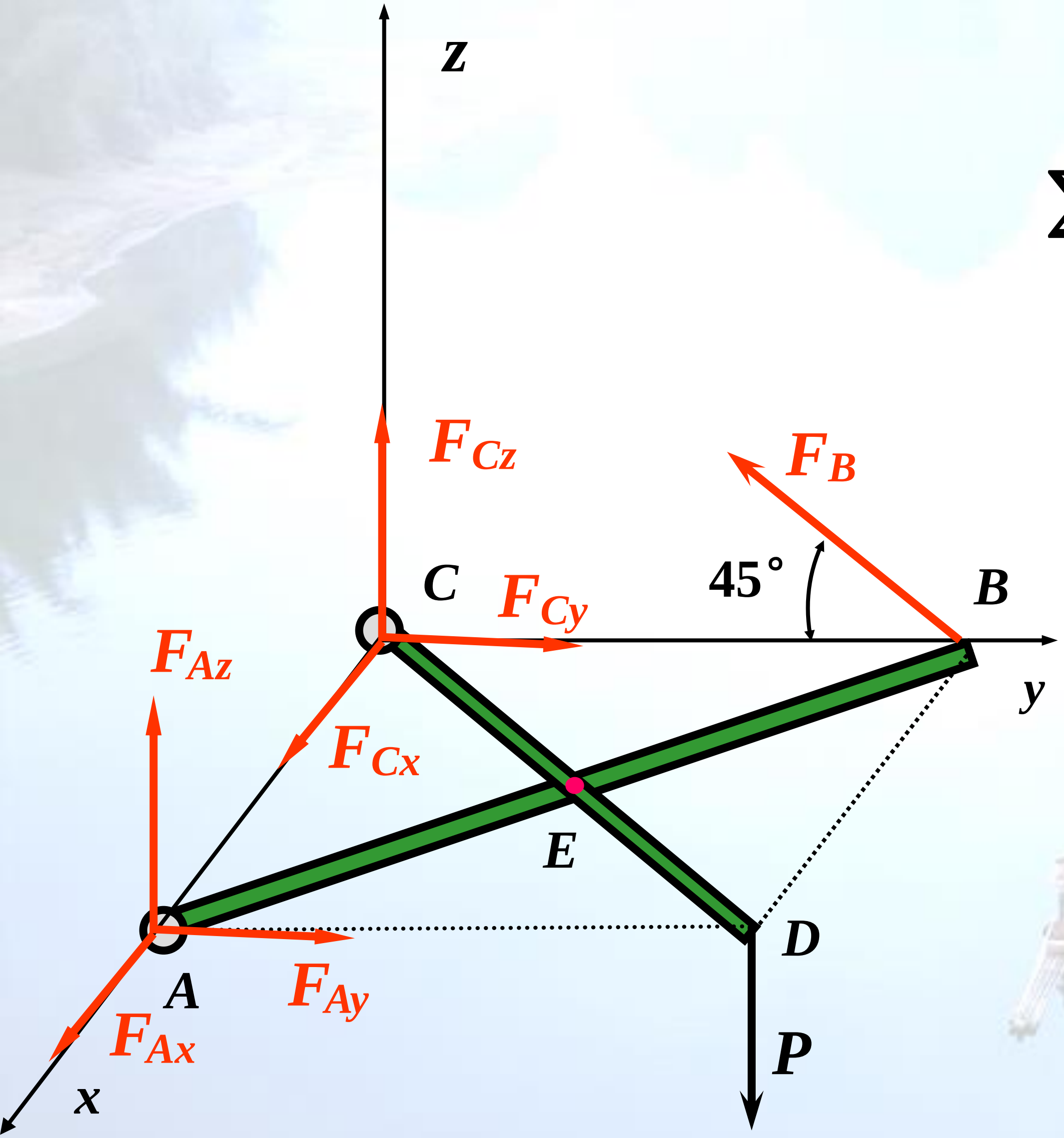
$$-F_{Az} \cdot a + P \cdot a = 0$$

$$\therefore \quad F_{Az} = 500(\mathrm{N})$$

$$\sum F_z = 0,$$

$$F_{Cz} + F_{Az} + F_B \sin 45° - P = 0$$

$$\therefore \quad F_{Cz} = -500(\mathrm{N})$$



$$\sum M_z(\bar{F})=0, \quad F_{Ay}\cdot a=0$$

$$\therefore \quad F_{Ay}=0$$

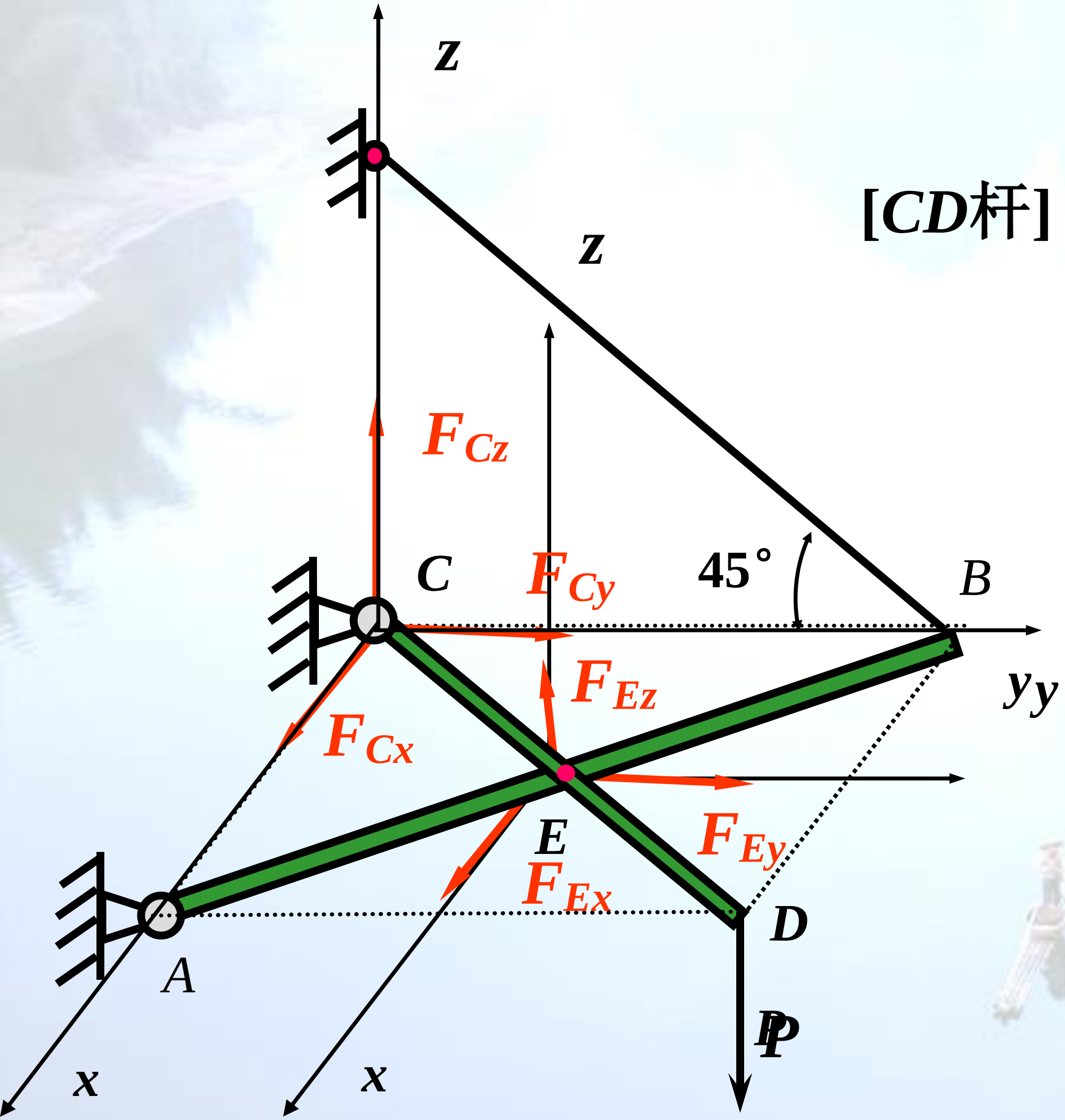
$$\sum F_y=0,$$

$$F_{Cy}+F_{Ay}-F_B\cos 45°=0$$

$$\therefore \quad F_{Cy}=500(\mathrm{N})$$

$$\sum F_x=0,$$

$$F_{Cx}+F_{Ax}=0$$



[CD杆]　$\sum M_z(\overline{F})=0$,

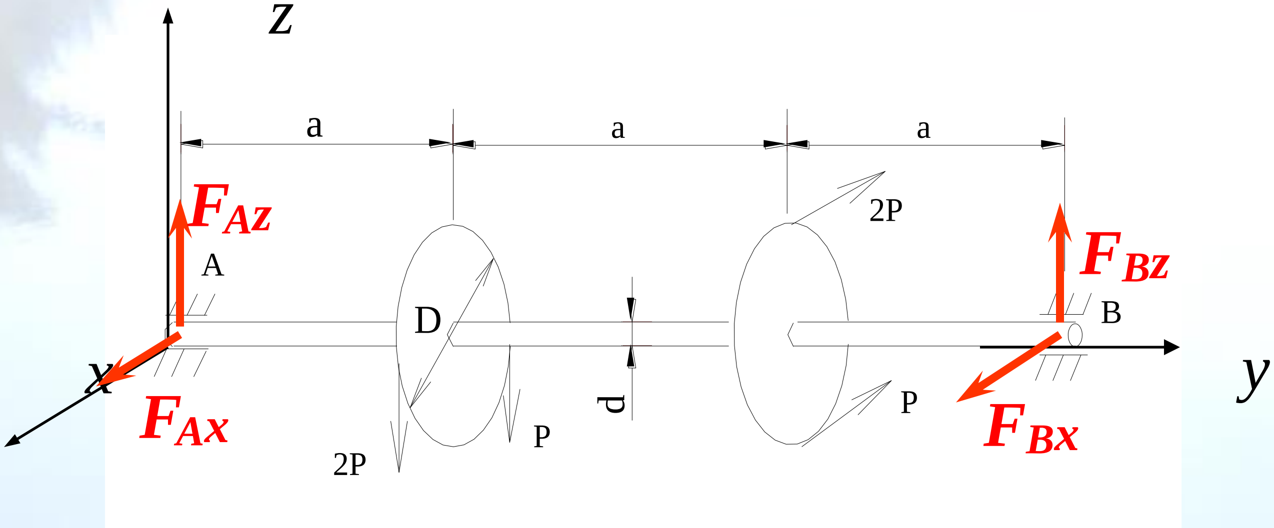
$$F_{Cx}\cdot a - F_{Cy}\cdot a = 0;$$

$$\therefore\ F_{Cx} = F_{Cy} = 500(\text{N})$$

$$\therefore\ F_{Ax} = -F_{Cx}$$

$$= -500(\text{N})$$

[例7]　已知：***P***、***D***、***a***，求***A***、***B*** 处的支反力。



解：

$$\sum F_x=0,\qquad \sum M_x(\overline{F})=0$$

$$\cancel{\sum F_y=0,}\qquad \cancel{\sum M_y(\overline{F})=0}$$

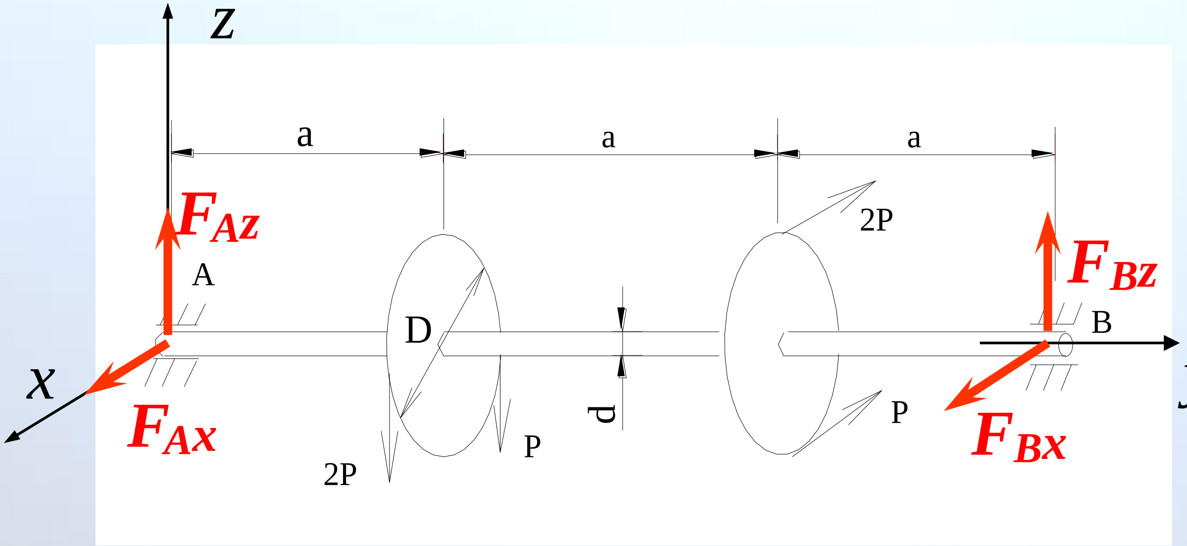
$$\sum F_z=0,\qquad \sum M_z(\overline{F})=0$$

解：$\sum M_x(\overline{F})=0,\quad F_{Bz}\cdot 3a-3P\cdot a=0,$

$\sum F_z=0,\quad F_{Az}+F_{Bz}-3P=0,$

$\sum M_z(\overline{F})=0,\quad -F_{Bx}\cdot 3a+3P\cdot 2a=0,$

$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Bx}-3P=0$



$F_{Bz}=P,$

$F_{Az}=2P,$

$F_{Bx}=2P,$

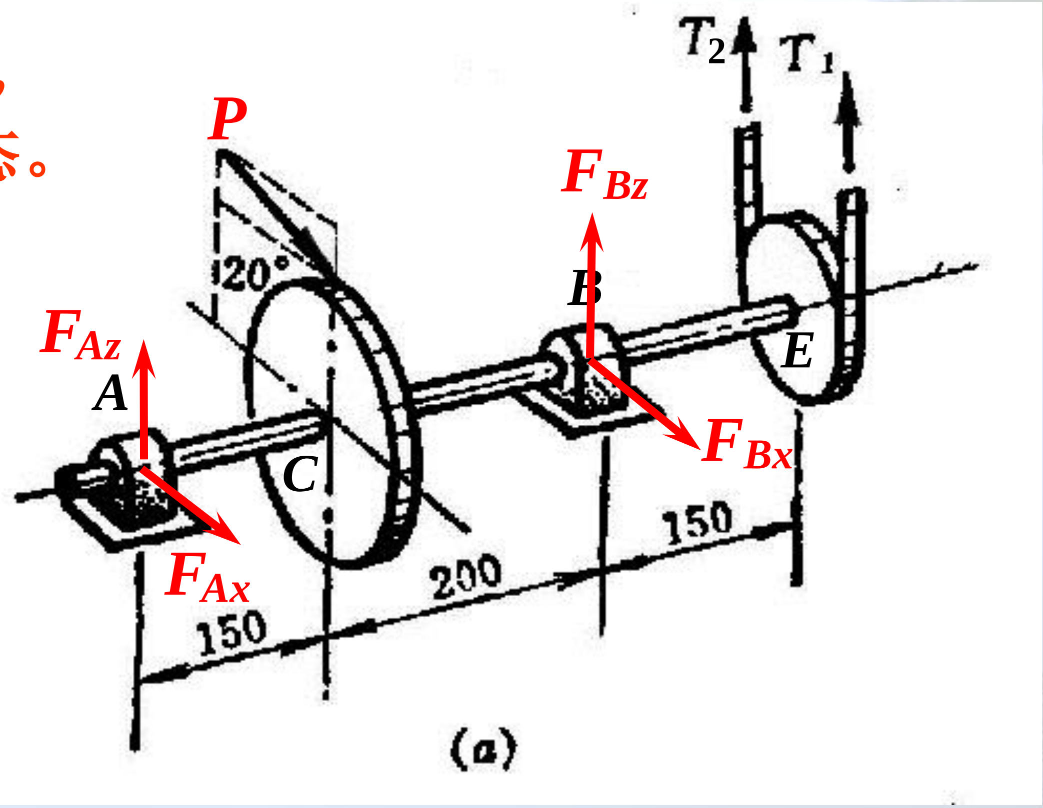
$F_{Ax}=P$

[例4] 已知：皮带轮皮带张力T_1=200N, T_2=100N，皮带轮直径 D_1=160mm，齿轮节圆直径D=200mm，压力角α=20°

求：力P大小及A、B处的约束力。

解：传动轴AB匀速转动时，可以认为处于平衡状态。

以AB轴及其上的齿轮和皮带轮所组成的系统为研究对象。



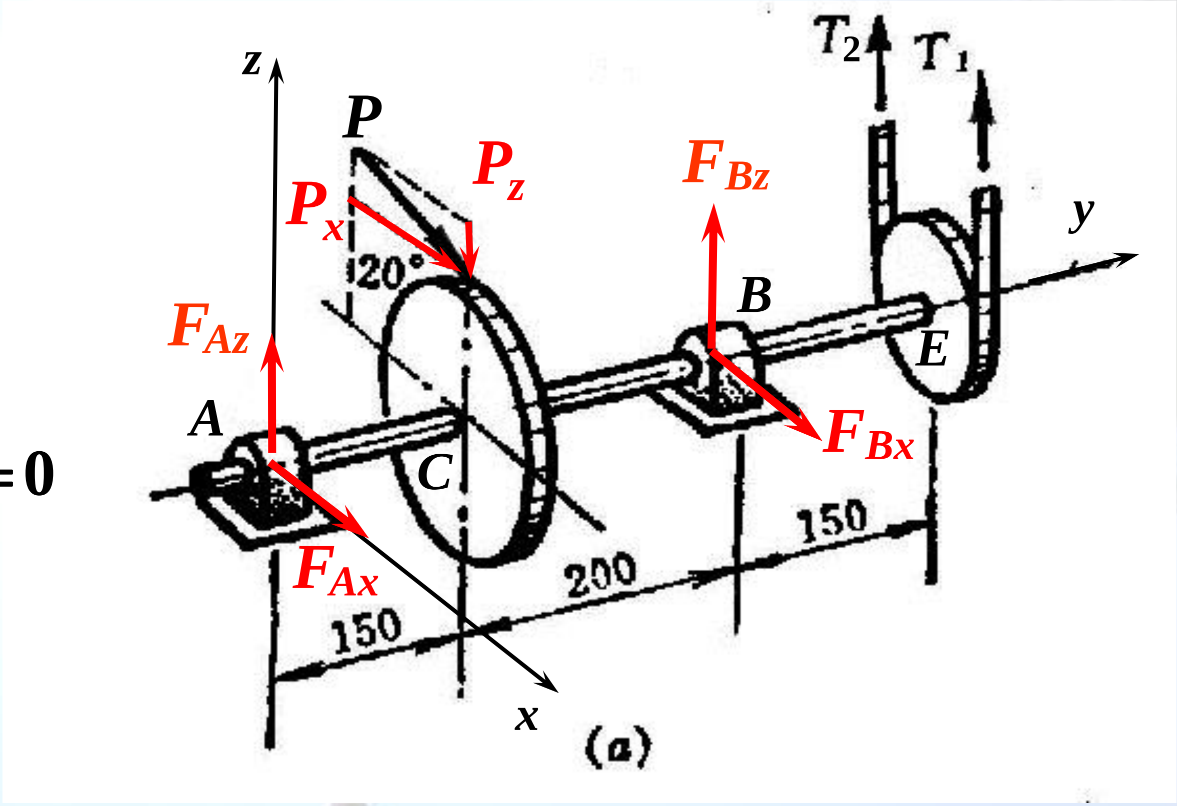
$$P_x = P\cos 20°$$

$$P_z = P\sin 20°$$

$$\sum M_y(F) = 0,$$

$$P_x \cdot \frac{D}{2} + (T_2 - T_1)\frac{D_1}{2} = 0$$

解得: $P = 71\,\mathrm{N}$



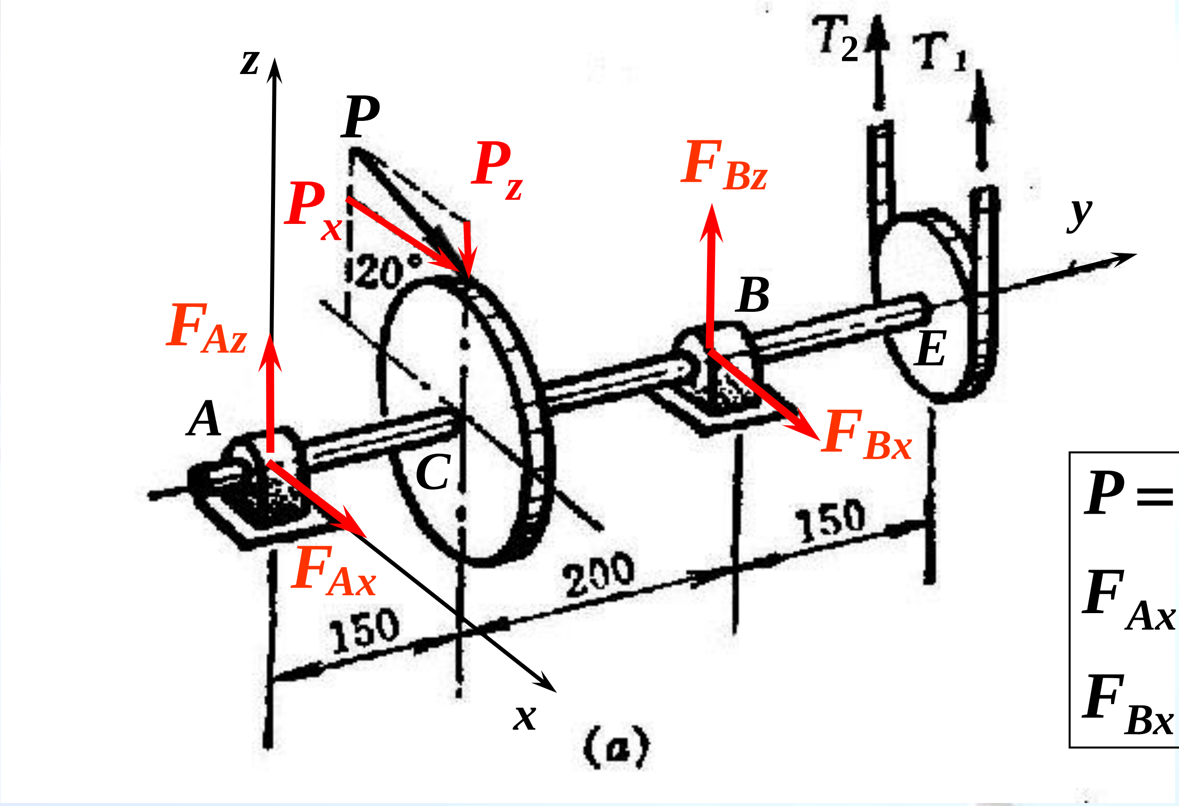
$$\sum M_z(F) = 0,$$

$$-P_x \cdot 150 - F_{Bx} \cdot 350 = 0$$

解得: $F_{Bx} = 28.6\,\mathrm{N}$

$$\sum M_x(F) = 0, \quad -P_z \cdot 150 + F_{Bz} \cdot 350 + (T_1 + T_2) \cdot 500 = 0$$

解得: $F_{Bz} = -418\,\mathrm{N}$



$P = 71\text{N},$

$F_{Ax} = 38.1\text{N},\quad F_{Az} = 142\text{N},$

$F_{Bx} = 28.6\text{N},\quad F_{Bz} = -418\text{N}$

$$\sum F_x = 0, \qquad P_x - F_{Bx} - F_{Ax} = 0$$

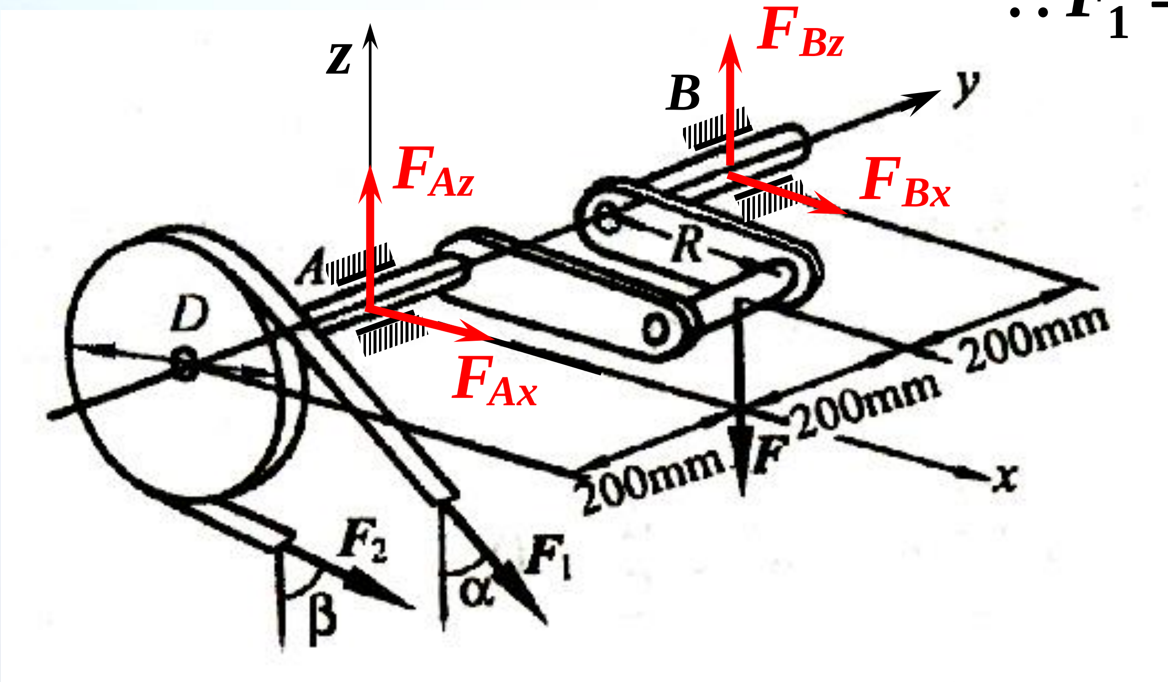
$$\sum F_z = 0, \qquad F_{Az} + F_{Bz} + T_1 + T_2 - P_z = 0$$

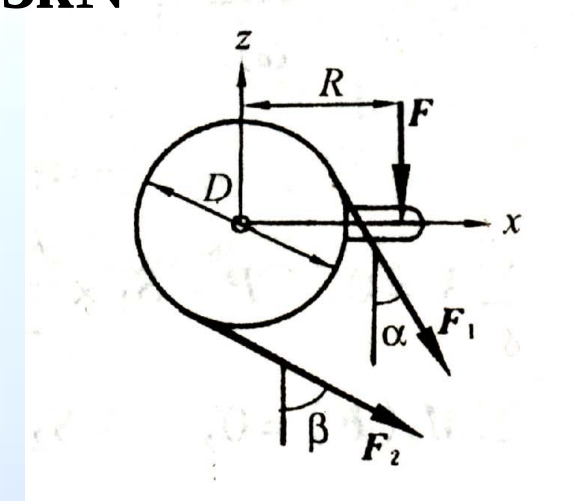
[例3-8]（P95）皮带拉力$F_2=2F_1$，$F=2\text{kN}$，$D=0.4\text{m}$，$R=0.3\text{m}$，$\alpha=30°$，$\beta=60°$，求皮带的拉力和轴承反力。

解：[整体] $\sum M_y(\overline{F})=0$，$FR-F_2\cdot\dfrac{D}{2}+F_1\cdot\dfrac{D}{2}=0$

$\because F_2=2F_1$

$\therefore F_1=3\text{kN}$





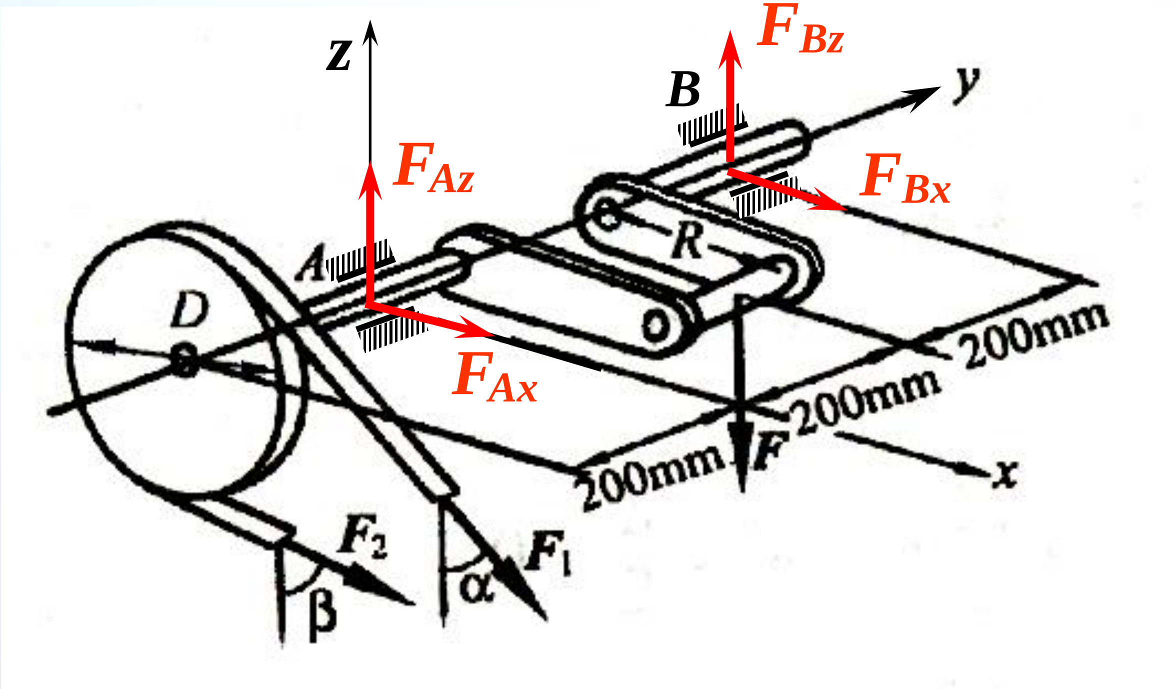
(b)

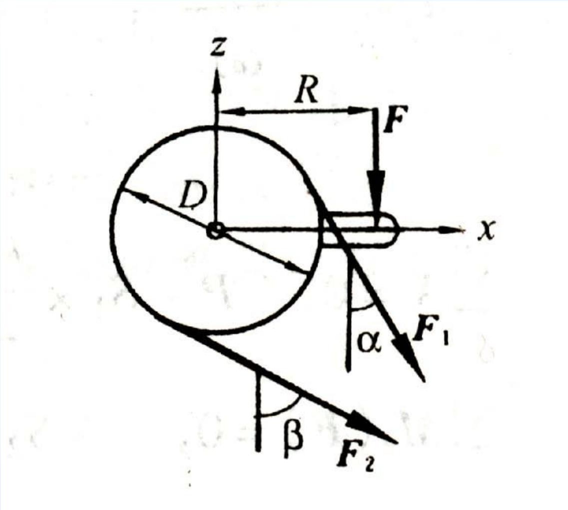
$$\sum M_x(\bar{F})=0,\quad F_1\cos 30°\times 0.2+F_2\cos 60°\times 0.2-F\times 0.2+F_{Bz}\times 0.4=0$$

$$\therefore F_{Bz}=-1799\text{N}$$

$$\sum M_z(\bar{F})=0,\quad F_1\sin 30°\times 0.2+F_2\sin 60°\times 0.2-F_{Bx}\times 0.4=0$$

$$\therefore F_{Bx}=3348\text{N}$$





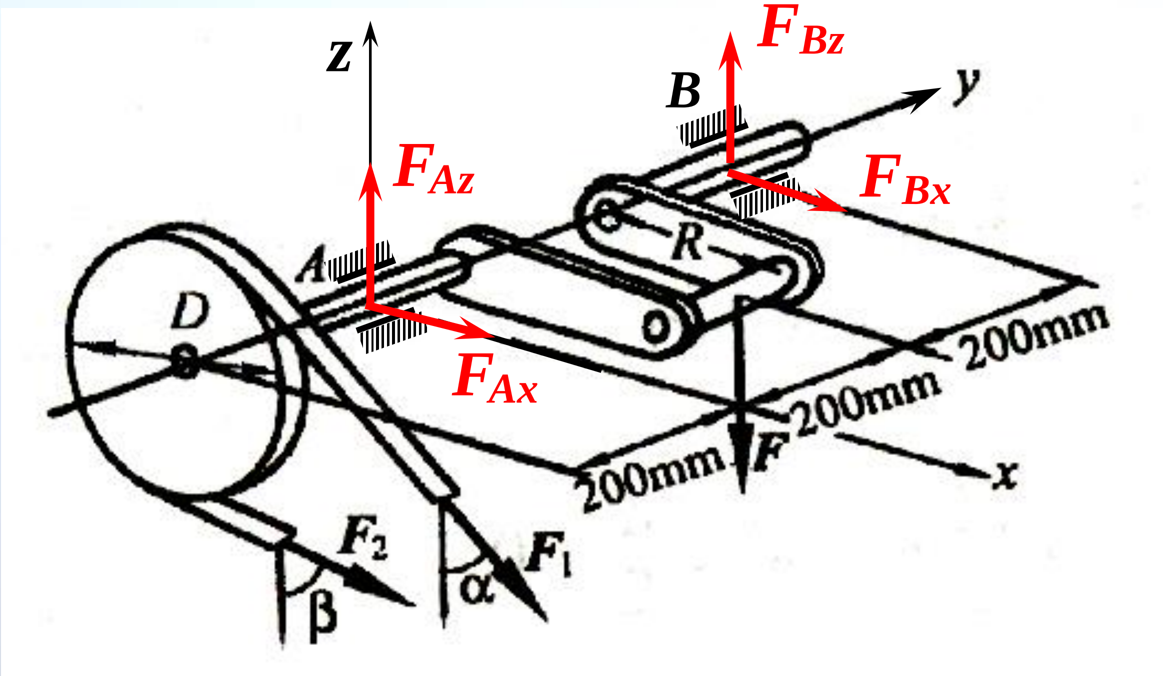
(b)

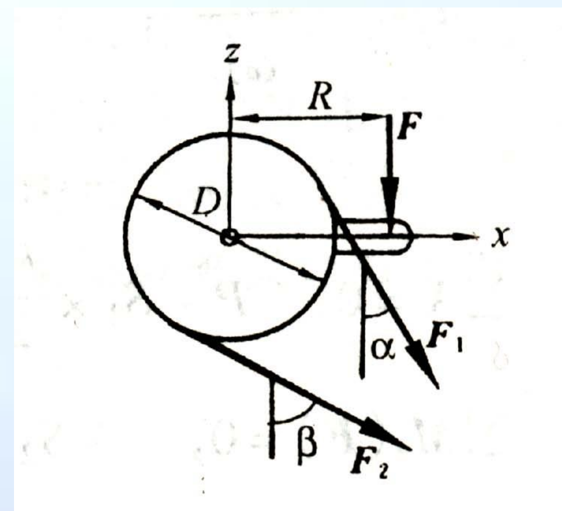
$$\sum F_x = 0, \quad F_1 \sin 30° + F_2 \sin 60° + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\therefore F_{Ax} = -1004\text{N}$$

$$\sum F_z = 0, -F_1 \cos 30° - F_2 \cos 60° - F + F_{Az} + F_{Bz} = 0$$

$$\therefore F_{Az} = 9397\text{N}$$



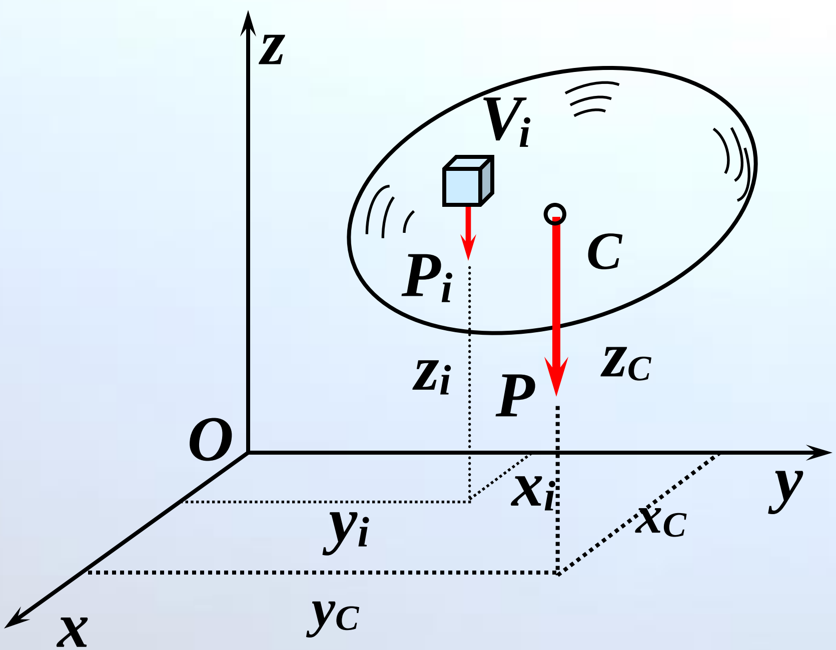


(b)

§3-6 重心

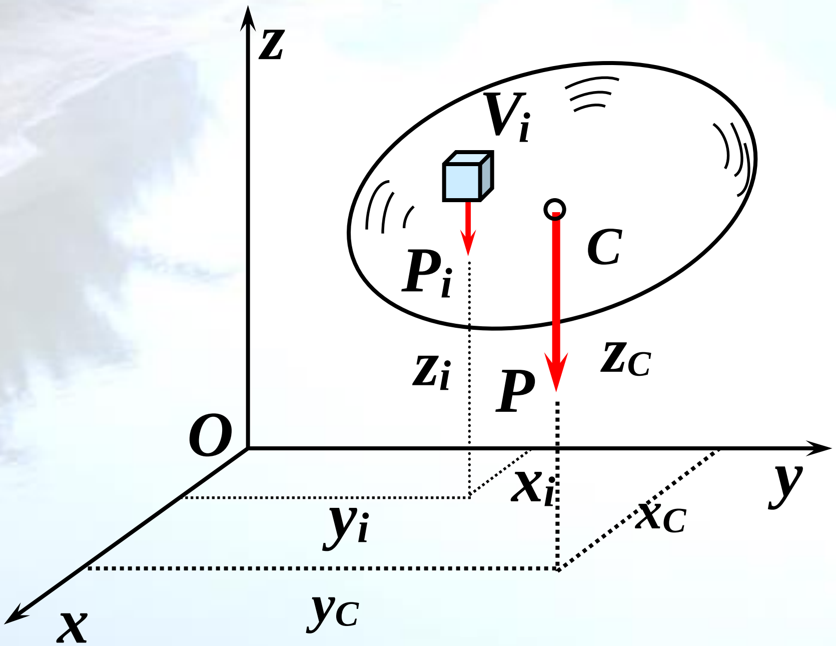
1. 重心的概念及其坐标公式

地球对物体的引力称为重力。重力作用于物体内每一微小部分，是一个分布力系，由于物体的尺寸与地球的半径相比小得多，因此可近似地认为这个力系是空间平行力系，此平行力系的合力一般称为物体的重力。



不论物体如何放置，其重力的作用线总是通过物体内的一个确定的点，这一点称为物体的**重心**。

重心的位置在工程中由重要意义。



物体重心的坐标公式：

$$\because P = \sum P_i$$

由合力矩定理：

$$-P \cdot y_C = -\sum P_i y_i$$

$$P \cdot x_C = \sum P_i x_i$$

物体分割的越多，每一小部分体积越小，求得的重心位置就越准确。在极限情况下，($n \to \infty$)，常用积分法求物体的重心位置。

$$\therefore \begin{cases} x_C = \dfrac{\sum P_i x_i}{P}, \\ y_C = \dfrac{\sum P_i y_i}{P}, \\ z_C = \dfrac{\sum P_i z_i}{P} \end{cases}$$

对于均质物体，单位体积的重量γ=常数；V_i为第i个小体积，

$$P_i=\gamma\cdot V_i$$

$$P=\gamma\cdot V$$

$$x_C=\frac{\sum \gamma V_i x_i}{\gamma V},\quad y_C=\frac{\sum \gamma V_i y_i}{\gamma V},\quad z_C=\frac{\sum \gamma V_i z_i}{\gamma V}$$

$$\therefore \quad \boxed{x_C=\frac{\sum V_i x_i}{V},\quad y_C=\frac{\sum V_i y_i}{V},\quad z_C=\frac{\sum V_i z_i}{V}}$$

积分表达式为：

$$x_C=\frac{\sum P_i x_i}{P},$$

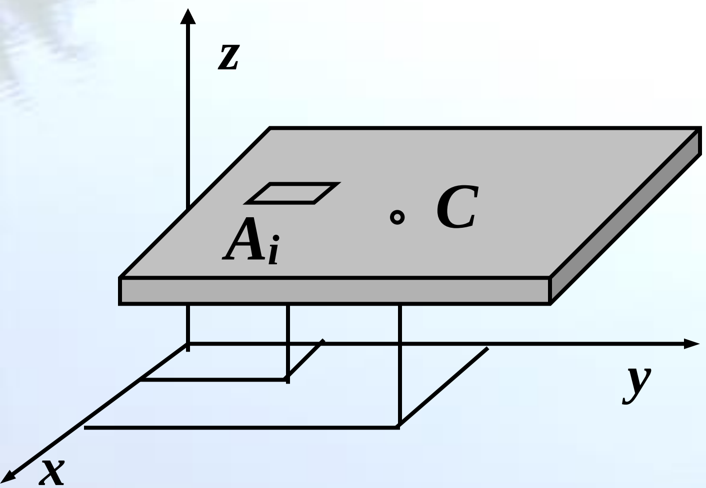
$$\boxed{x_C=\frac{\int_V x\cdot \mathrm{d}V}{V},\quad y_C=\frac{\int_V y\cdot \mathrm{d}V}{V},\quad z_C=\frac{\int_V z\cdot \mathrm{d}V}{V}}$$

可见：对于均质物体，重心与物体的单位体积的重量（比重）无关，只与物体的形状有关，因此均质物体的重心也称为物体的**形心**

薄板的重心（形心）公式：

$$\because V_i = tA_i$$

$$V=tA$$



$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{V} = \frac{\sum t \cdot A_i x_i}{tA} = \frac{\sum A_i x_i}{A}$$

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum A_i x_i}{A}, \\ y_C = \dfrac{\sum A_i y_i}{A}, \end{cases}$$

或:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\int_A x \cdot \mathrm{d}A}{A}, \\ y_C = \dfrac{\int_A y \cdot \mathrm{d}A}{A}, \end{cases}$$

2. 确定重心的方法

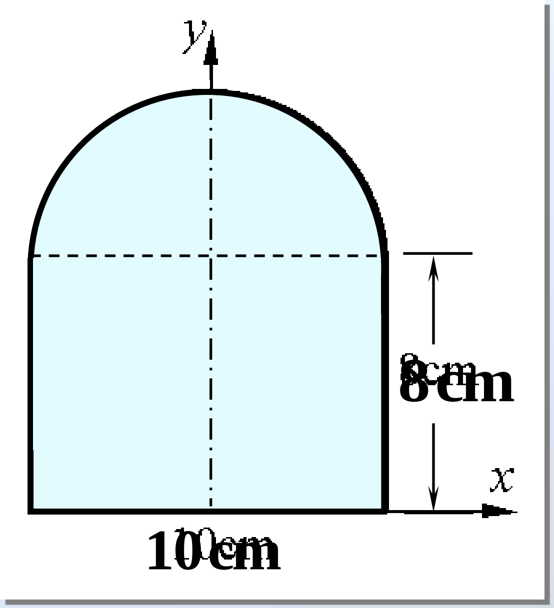
组合法和实验法

（1）组合法（分割法和负面积法）

①分割法

[例10] 已知：$A_1 = 80\text{cm}^2, A_2 = \frac{1}{2}\pi R^2$， $y_1 = 4\text{cm}, y_2 = (8 + \frac{4R}{3\pi})\text{cm}$

求：该组合体的重心？



解：　由$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A}$

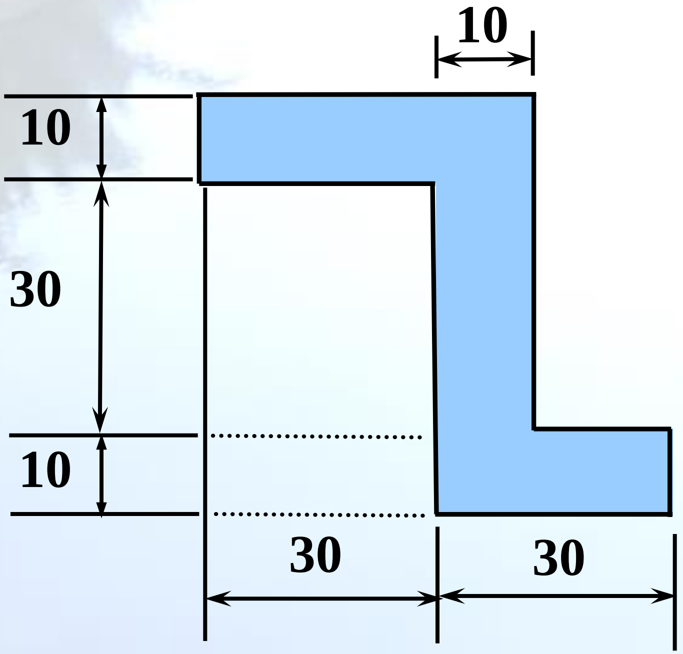
$$= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= 6.0\text{cm}$$

[例3-12]
（P102）

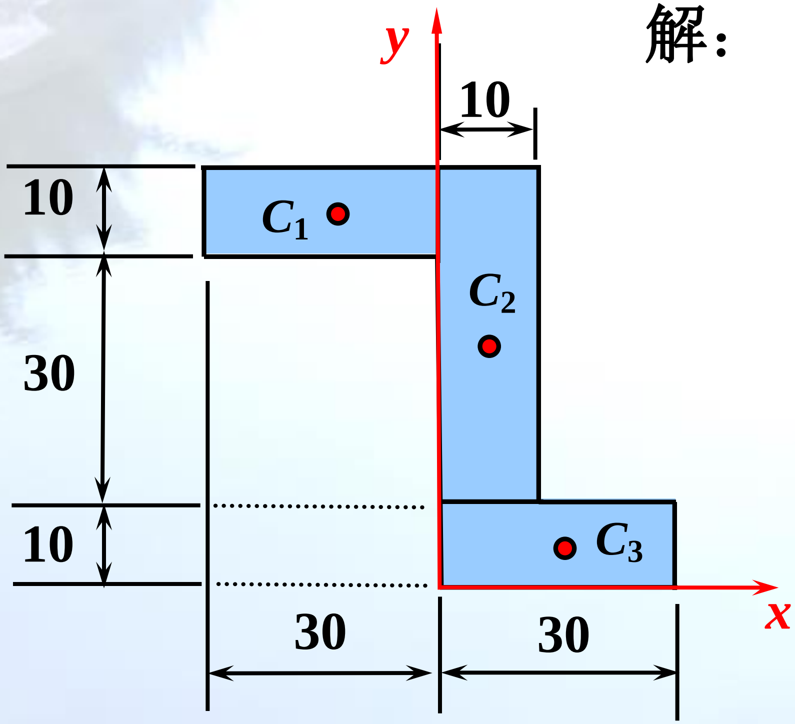
求Z形截面重心的位置。

解:



[例3-12]
（P102）

求Z形截面重心的位置。



解：

$$x_C=\frac{\sum A_i x_i}{A}$$

$$=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3}{2A_1+A_2}$$

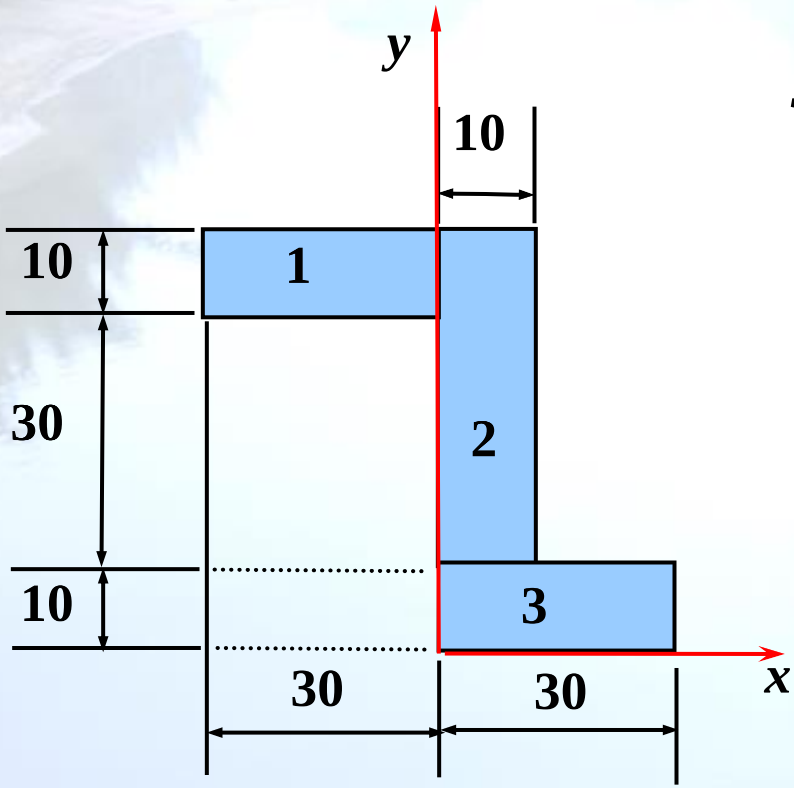
$$=\frac{300\times(-15)+400\times5+300\times15}{300+400+300}$$

$$=2(\text{mm})$$

$A_1=30\times10$ $x_1=-15\text{mm}$

$A_2=10\times40$ $x_2=5\text{mm}$

$A_3=30\times10$ $x_3=15\text{mm}$



$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

$$= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{2A_1 + A_2}$$

$$= \frac{300 \times 45 + 400 \times 30 + 300 \times 5}{300 + 400 + 300}$$

$$= 27\text{mm}$$

$A_1 = 30 \times 10$ $\quad y_1 = 45\text{mm}$

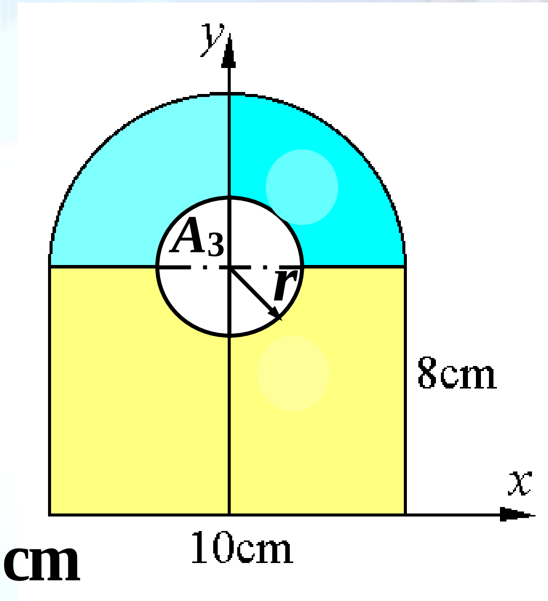
$A_2 = 10 \times 40$ $\quad y_2 = 30\text{mm}$

$A_3 = 30 \times 10$ $\quad y_3 = 5\text{mm}$

②负面积法

[例11] 已知：$r=2$cm

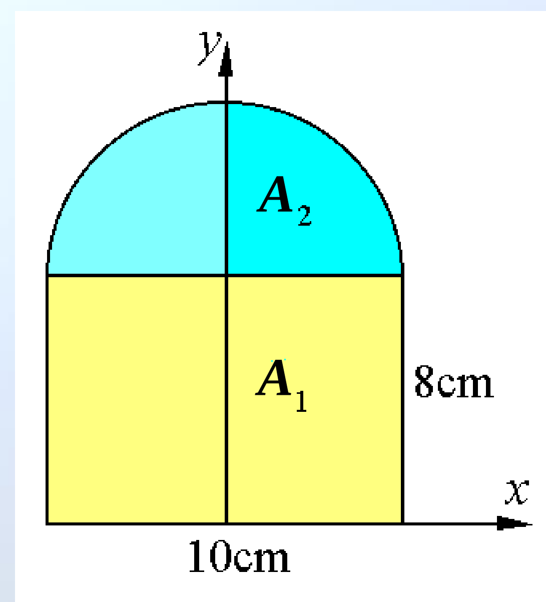
求：该组合体的重心？



解：

$$A_1=80\text{cm}^2,\ A_2=\frac{1}{2}\pi R^2,\ y_1=4\text{cm},\ y_2=(8+\frac{4R}{3\pi})\text{cm}$$

$$A_3=-\pi r^2,\ y_3=8\text{cm}$$



$$\text{由} y_C=\frac{\sum \Delta A_i y_i}{A}$$

$$=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=5.78\text{cm}$$


本章结束