

# 第一篇 《静力学》

第一章 静力学公理和物体的受力分析

第二章 平面力系

第三章 空间力系

第四章 摩擦

# 理论力学

---

## 第四章 摩擦

# 第四章 摩擦

§ 4-1 滑动摩擦

§ 4-2 摩擦角和自锁现象

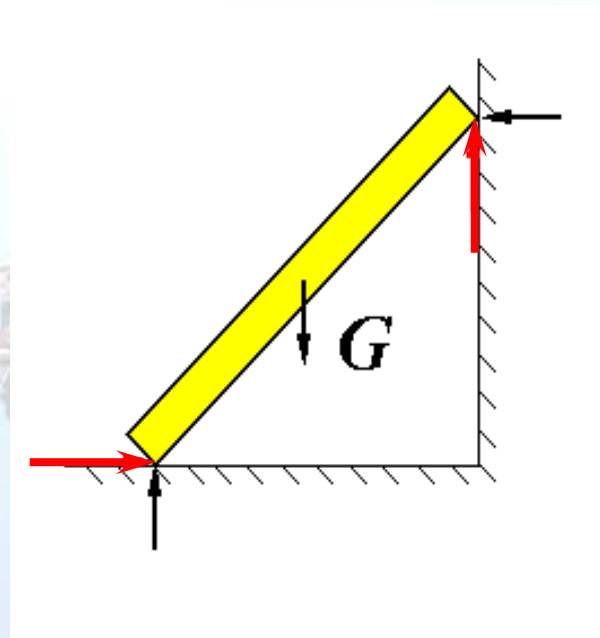
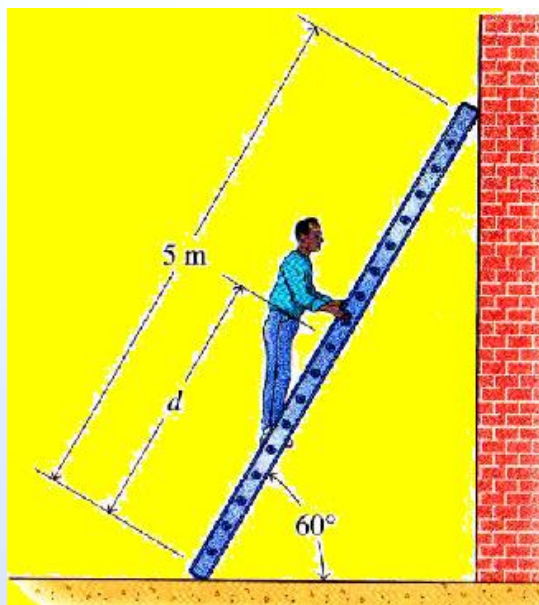
§ 4-3 考虑摩擦时物体的平衡问题

§ 4-4 滚动摩阻的概念

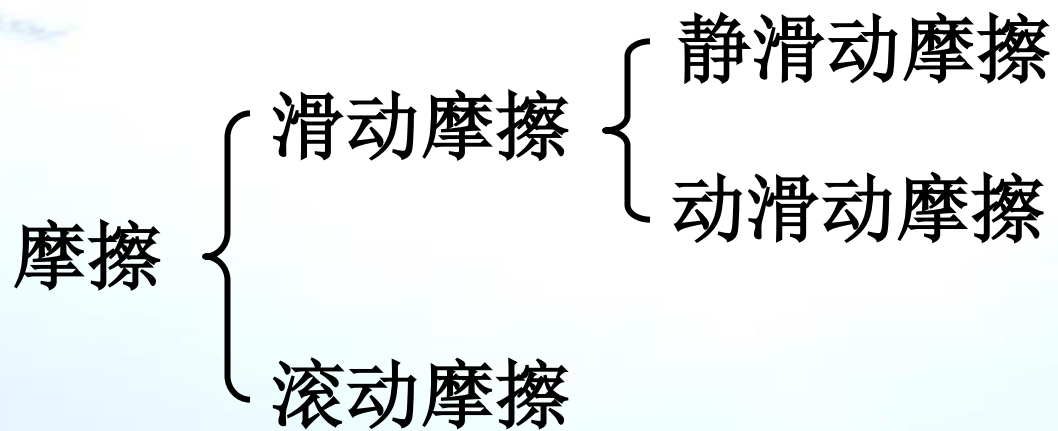
习题课



前几章我们把接触表面都看成是绝对光滑的，忽略了物体之间的摩擦，事实上完全光滑的表面是不存在的，一般情况下都存在有摩擦。



平衡必计摩擦

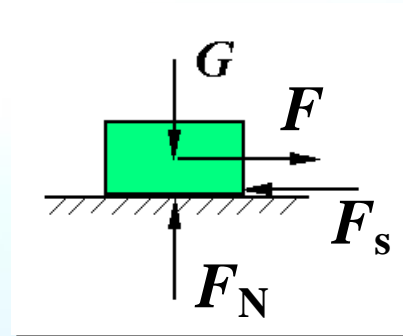
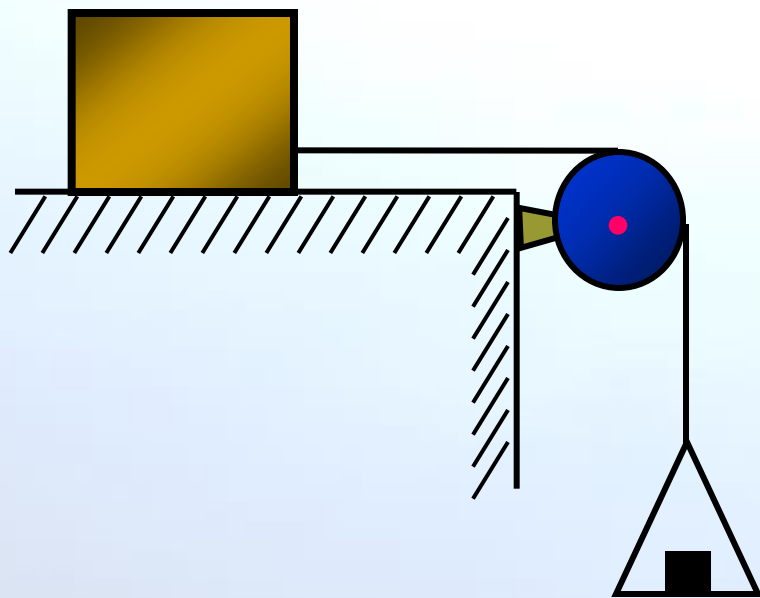




## § 4-1 滑动摩擦

### 1、静滑动摩擦力

相互接触的物体，产生相对滑动的**趋势**时，其接触面产生阻止物体运动的力叫静滑动摩擦力。



( $F \uparrow - F_s \uparrow$ , 不是固定值)

$$\sum F_x = 0$$

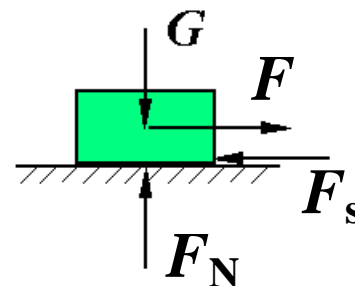
$$F_s = F$$



## 2、最大静滑动摩擦力

静摩擦定律：

最大静摩擦力的大小与两物体间的正压力成正比。



$$F_{\max} = f_s \cdot F_N$$

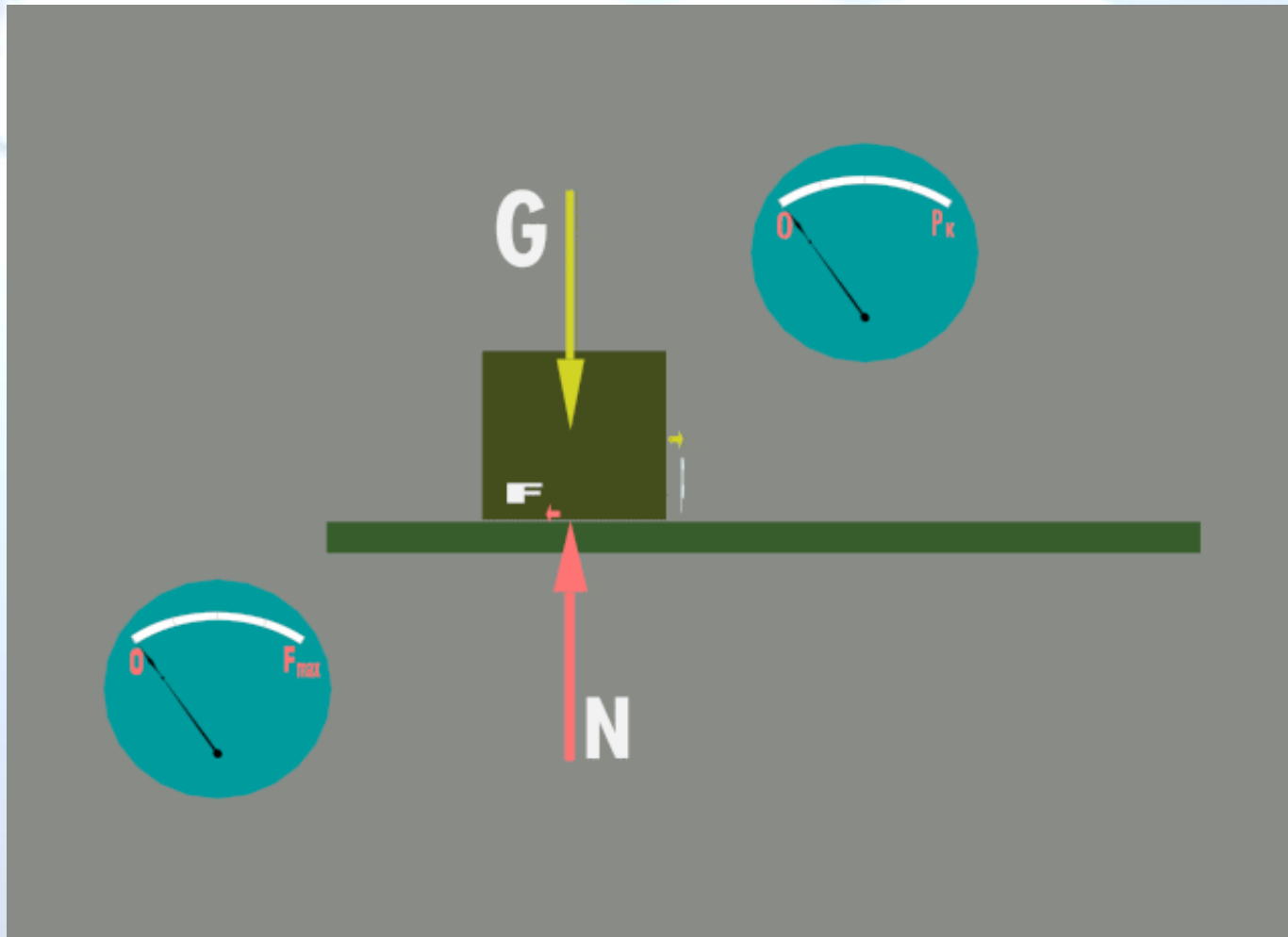
( $f_s$ —静摩擦因数)

(翻页请看动画)





影片： 501







## 静摩擦力特征:

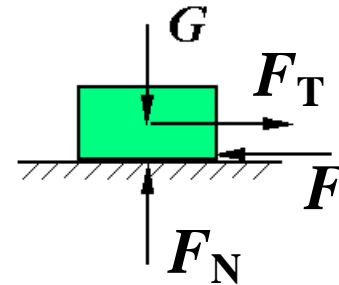
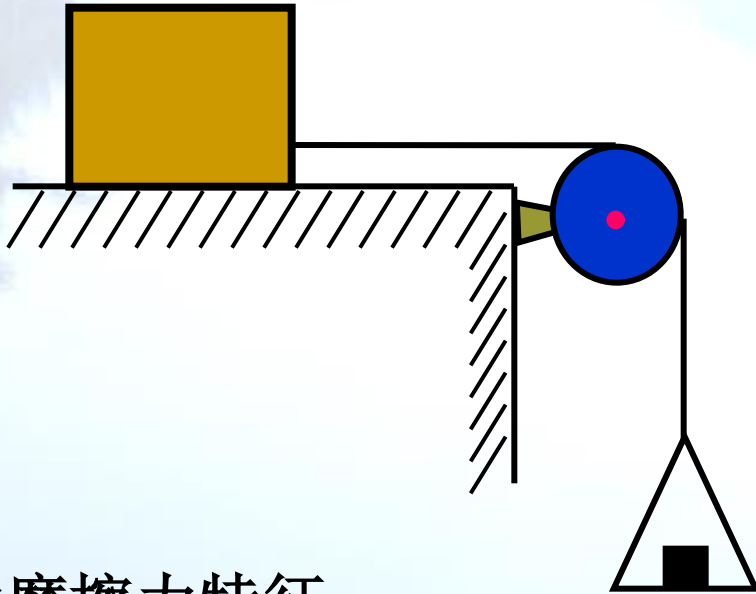
大小:  $0 \leq F_s \leq F_{\max}$  (平衡范围) 满足  $\sum F_x = 0$

方向: 与物体相对滑动趋势方向相反, 起阻碍物体运动的作用。

定律:  $F_{\max} = f_s \cdot F_N$  ( $f_s$  只与材料和表面情况有关, 与接触面积大小无关。)



### 3、动滑动摩擦力:



动摩擦力特征:

大小:  $F = f \cdot F_N$  (无平衡范围)

方向: 与物体运动方向相反

定律:  $F = f \cdot F_N$  ( $f$  只与材料和表面情况有关, 与接触面积大小无关。)

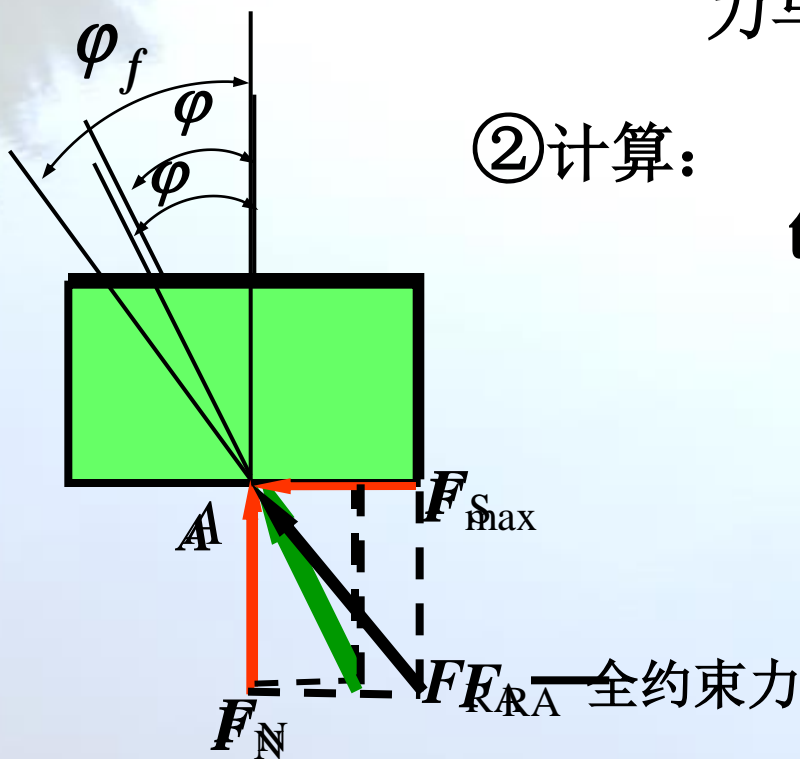
## § 4-2 摩擦角和自锁现象

1、摩擦角： ①定义：当摩擦力达到最大值 $F_{\max}$ 时其全约束力与法线的夹角  $\varphi_f$  叫做摩擦角。

②计算：

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s \cdot F_N}{F_N} = f_s$$

即：摩擦角的正切等于静摩擦因数

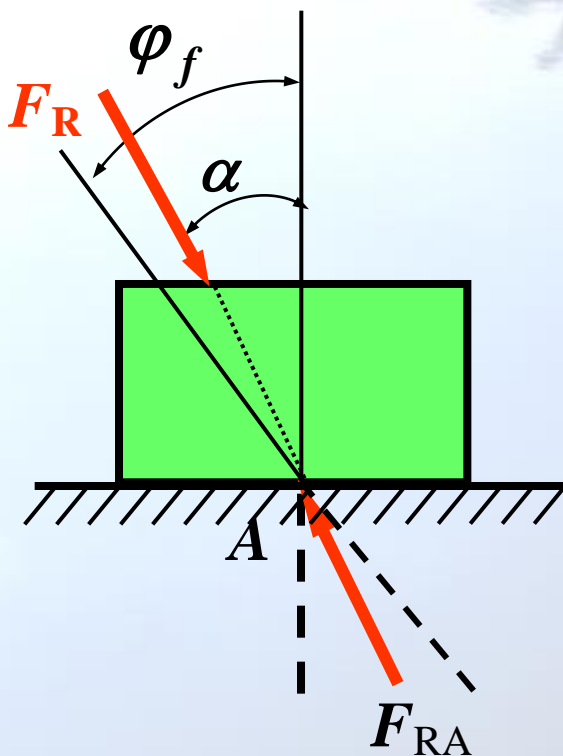


## 2、自锁现象

①定义：如果作用于物块的全部主动力的合力 $F_R$ 的作用线在摩擦角之内，则无论这个力怎样大，物块必保持平衡。这种现象称为自锁。

②自锁条件：

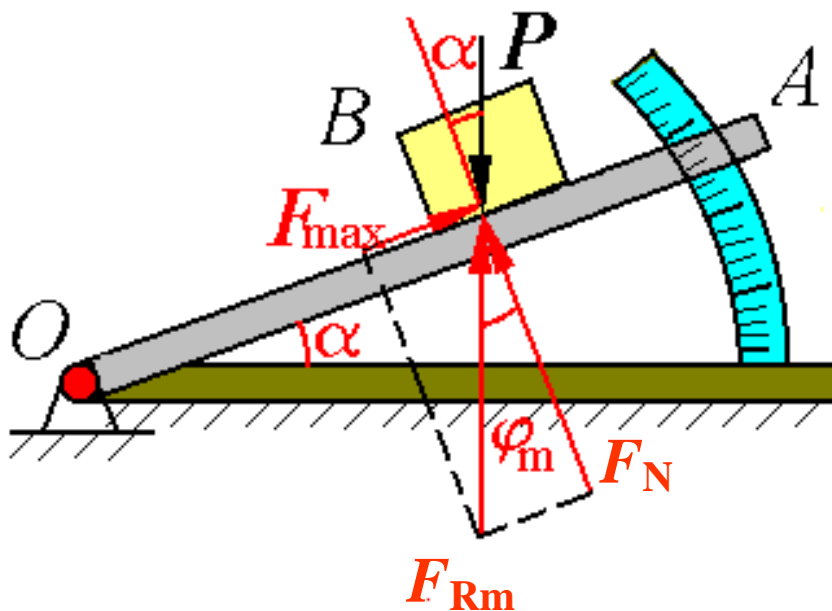
当 $\alpha < \varphi_f$  时，永远平衡（即自锁）



### ③ 自锁应用举例

摩擦因数的测定： $OA$  绕  $O$  轴转动使物块刚开始下滑时测出  $\alpha$  角， $\tan \alpha = f_s$ ，(该两种材料间静摩擦因数)

(翻页请看动画)

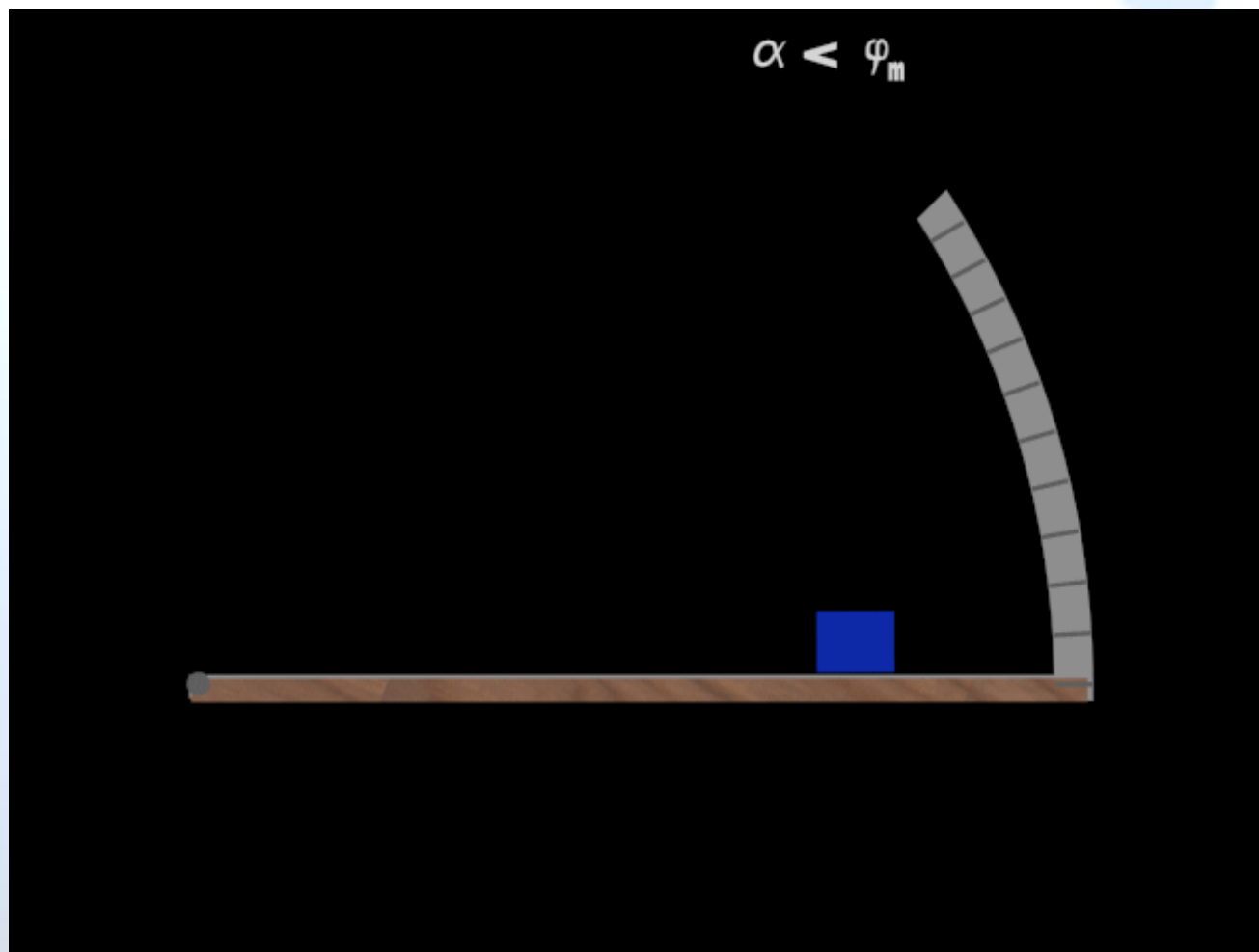


$$\begin{aligned}\tan \phi_f &= \frac{F_{\max}}{F_N} \\ &= \frac{f_s \cdot F_N}{F_N} \\ &= f_s\end{aligned}$$



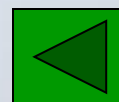
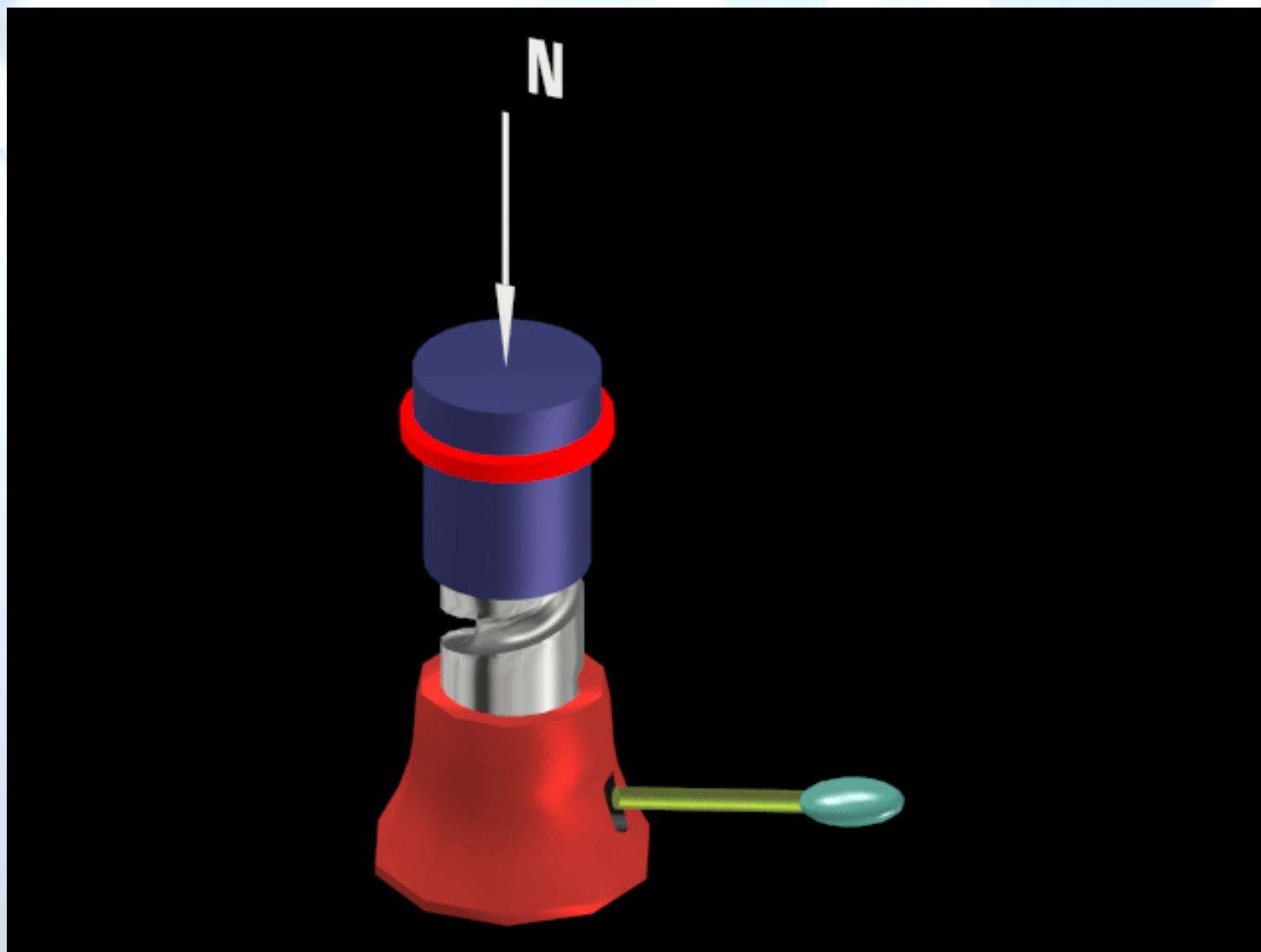
影片：504

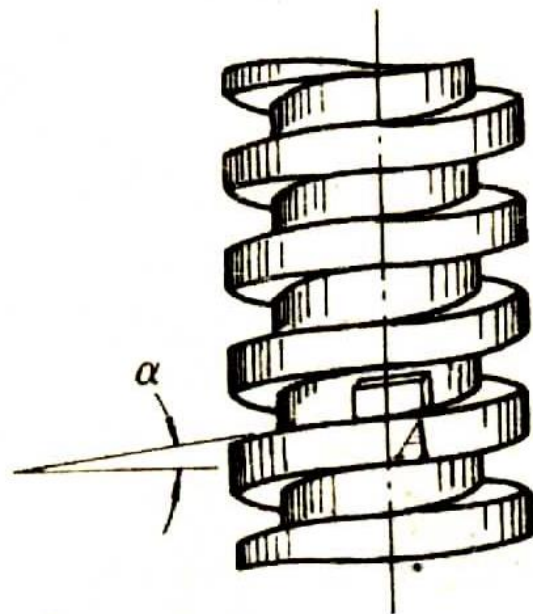
图数例定



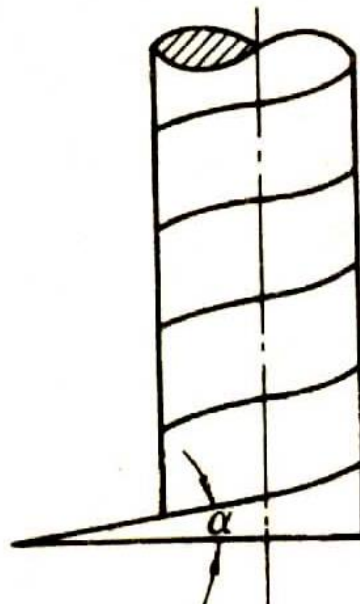
螺纹的自锁

影片：505

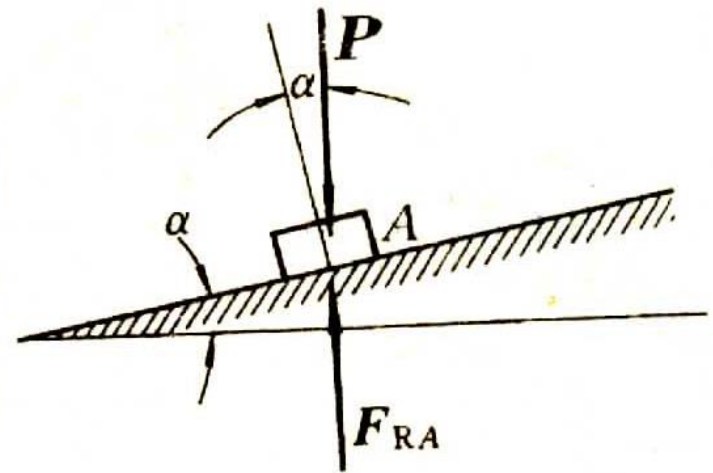




(a)



(b)



(c)





## § 4-3 考虑摩擦时物体的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题，一般是对临界状态求解，这时可列出  $F_{\max} = f_S \cdot F_N$  的补充方程。其它解法与平面任意力系相同。只是平衡常是一个**范围**。

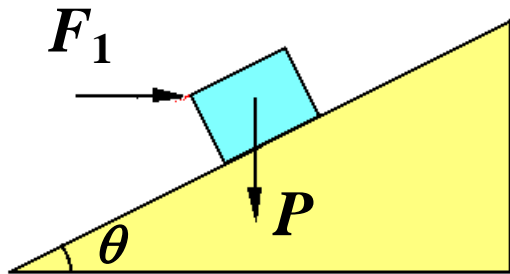
（从例子说明）。



[例4-1]  
(P117)

已知:  $\theta$ ,  $P$ ,  $f_s$

求: 物体处于平衡时, 水平力  $F_1$  的大小。

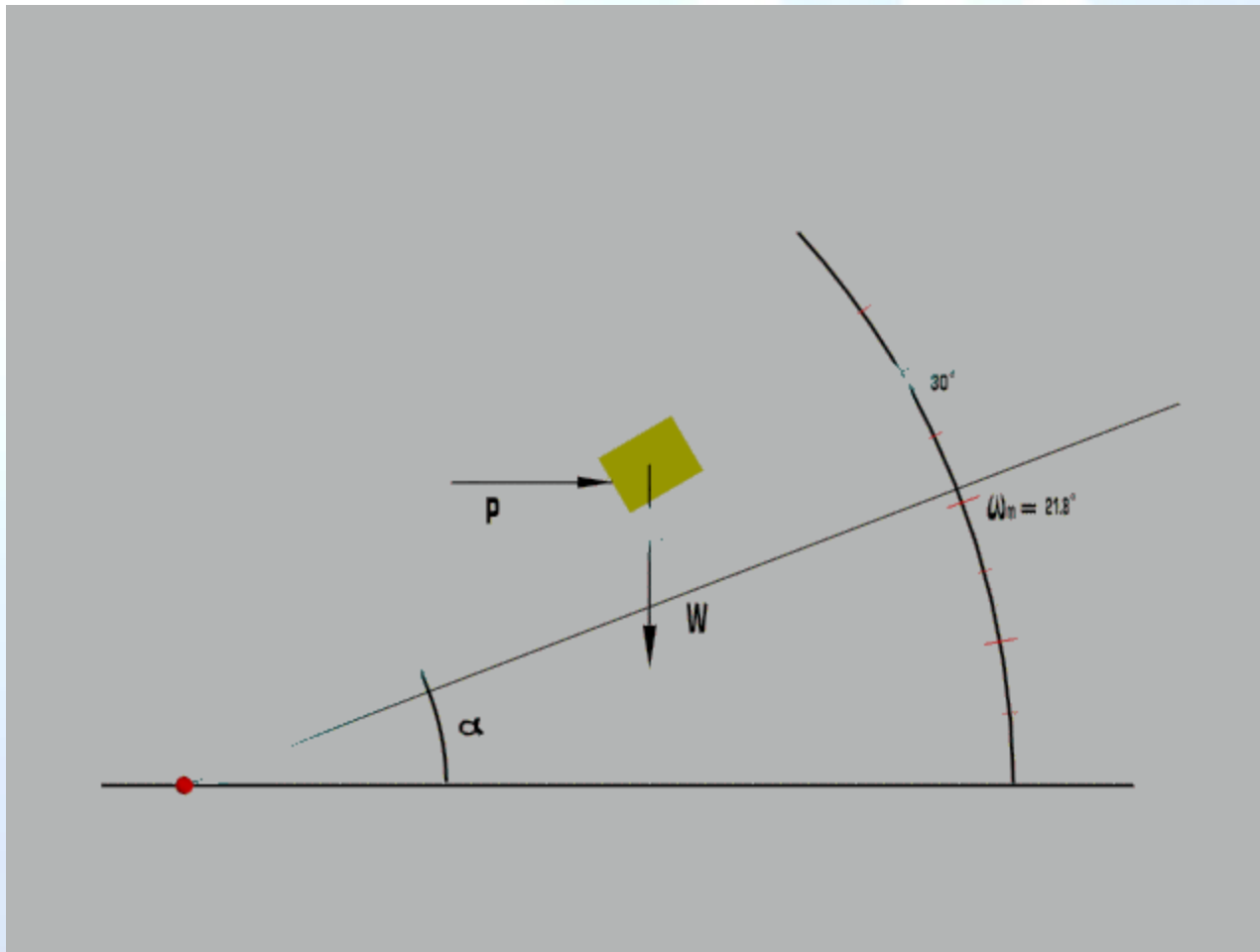


(翻页请看动画)





影片：502





解：①求 $F_1$ 的最大值，使物体不致于向上滑动

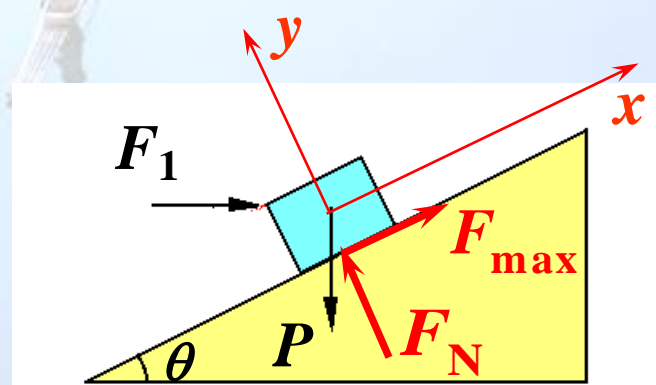
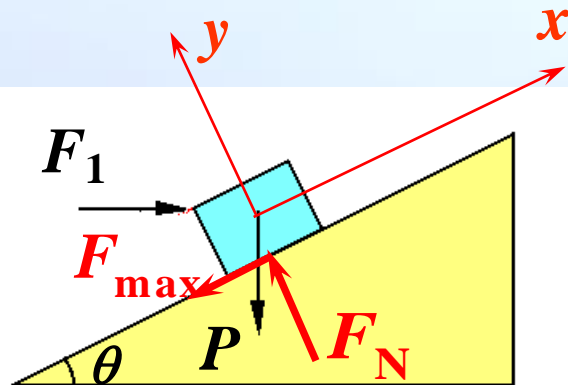
$$\text{由 } \sum F_x = 0, \quad F_1 \cos \theta - P \sin \theta - F_{\max} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - F_1 \sin \theta - P \cos \theta = 0$$

$$\text{补充方程: } F_{\max} = f_S \cdot F_N$$

$$\text{解得: } F_1 = P \frac{\sin \theta + f_S \cos \theta}{\cos \theta - f_S \sin \theta}$$

②求 $F_1$ 的最小值，使物体不致于下滑

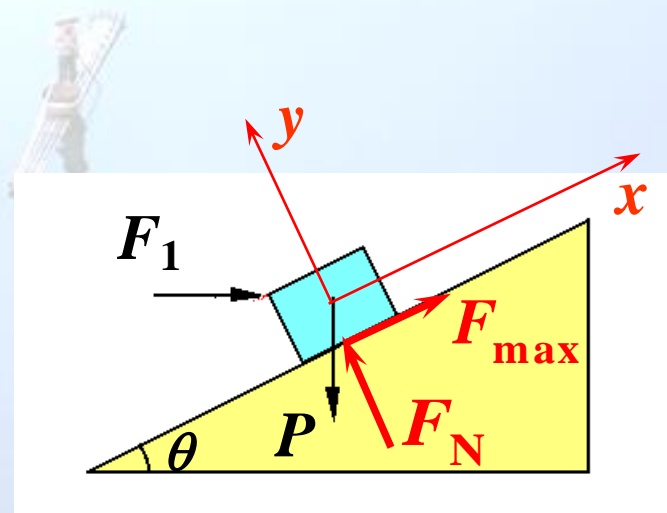
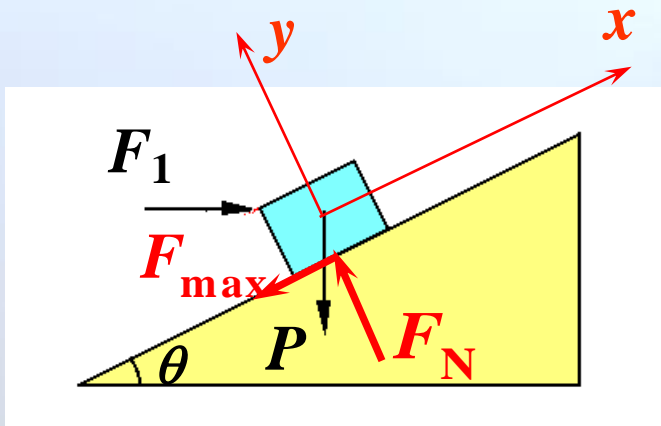


同理建立三个方程

解得: 
$$F_1 = P \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta}$$

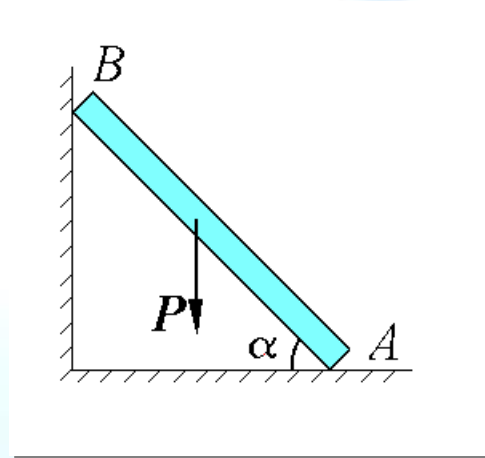
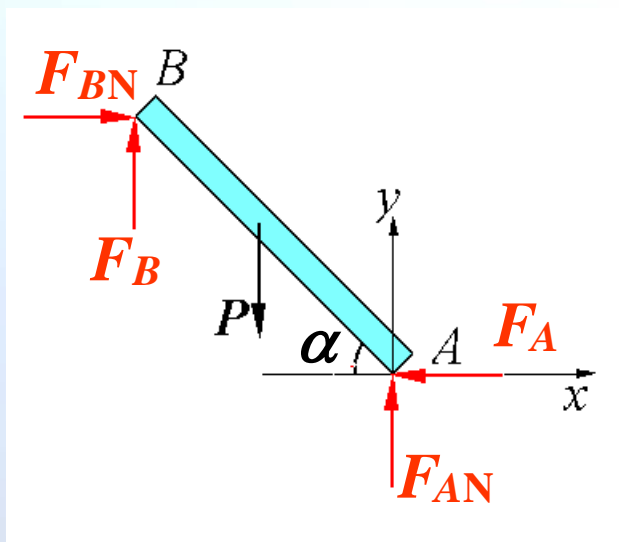
$F_1$ 力大小应是

$$P \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} \leq F_1 \leq P \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \theta - f_s \sin \theta}$$



[例2] 梯子长 $AB=l$ , 重为 $P$ , 若梯子与墙和地面的静摩擦因数 $f_s=0.5$ , 求 $\alpha$ 多大时, 梯子能处于平衡?

解: 考虑到梯子在临界平衡状态有下滑趋势, 作受力图。



[梯子AB]

$$\sum F_x = 0, \quad F_{BN} - F_A = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{AN} - P = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}) = 0, \quad P \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha - F_B \cdot l \cdot \cos \alpha - F_{BN} \cdot l \sin \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$F_A = f_s \cdot F_{AN} \quad \dots\dots\dots (4)$$

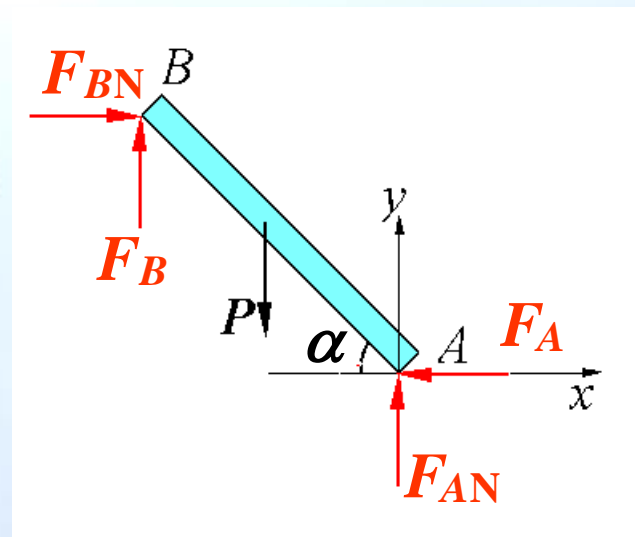
$$F_B = f_s \cdot F_{BN} \quad \dots\dots\dots (5)$$

由(1)、(2)、(4)和(5)式解得:

$$F_{AN} = \frac{P}{1 + f_s^2}, \quad F_{BN} = \frac{f_s P}{1 + f_s^2},$$

$$F_B = P - \frac{P}{1 + f_s^2}$$

将 $F_B$ 和 $F_{BN}$ 代入(3), 得  $\tan \alpha = \frac{1 - f_s^2}{2f_s}$





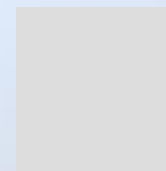
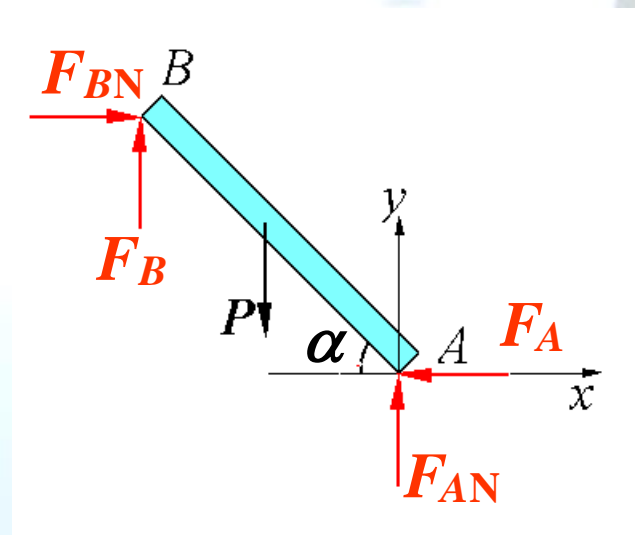
$$\tan \alpha = \frac{1 - f_s^2}{2f_s}$$

所以  $\alpha = \tan^{-1} \frac{1 - f_s^2}{2f_s}$

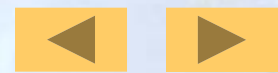
$$= \tan^{-1} \frac{1 - 0.5^2}{2 \times 0.5}$$
$$= 36.87^\circ$$

注意：由于 $\alpha$ 不可能大于 $90^\circ$ ，  
所以梯子平衡倾角 $\alpha$ 应满足

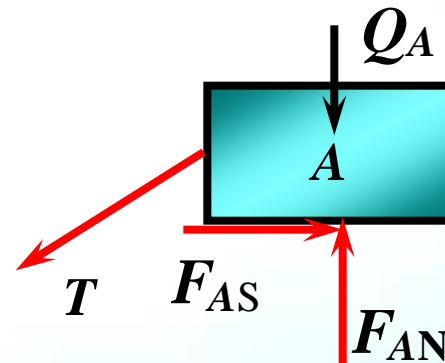
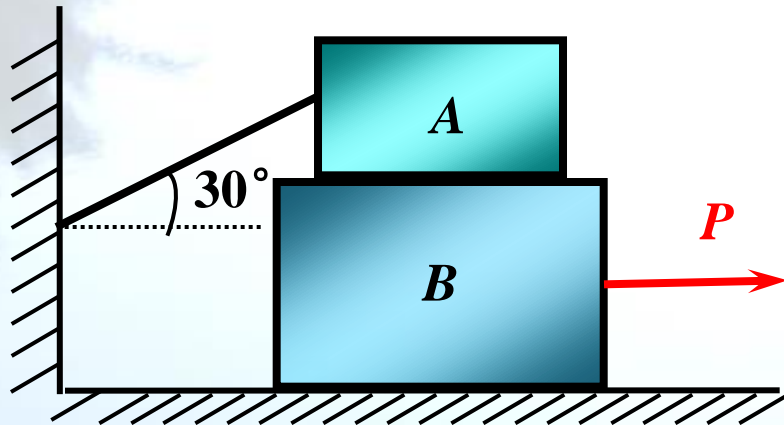
$$36.87^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$







[例3] 物块A重50N, B重100N, 静摩擦因数均为 $f_s=0.3$ 。  
求: 能使物块B相对地面产生滑动的最小水平力 $P$ 。

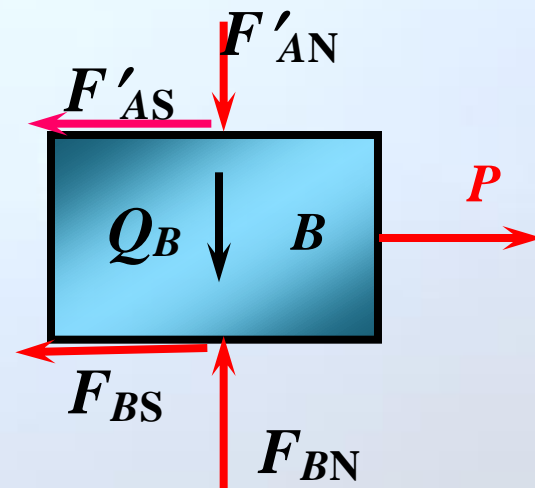


解: [物块A]

$$\sum F_x = 0, \quad F_{AS} - T \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{AN} - Q_A - T \sin 30^\circ = 0$$

$$F_{As} = f_s F_{AN}$$



解得:  $T = 20.9\text{N}$

$$F_{AN} = 60.3\text{N}$$

$$F_{As} = 18.1\text{N}$$

[物块B]

$$\sum F_x = 0, -F'_{AS} - F_{BS} + P = 0$$

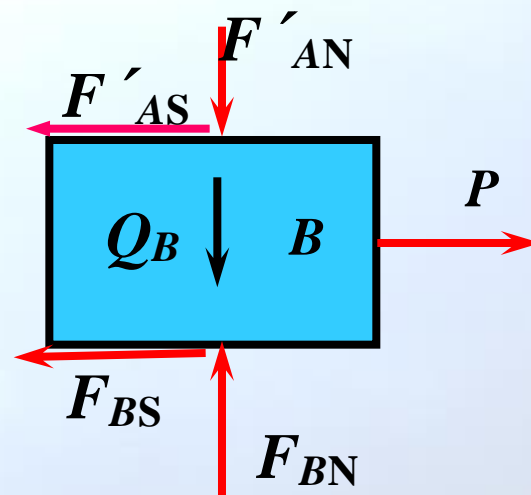
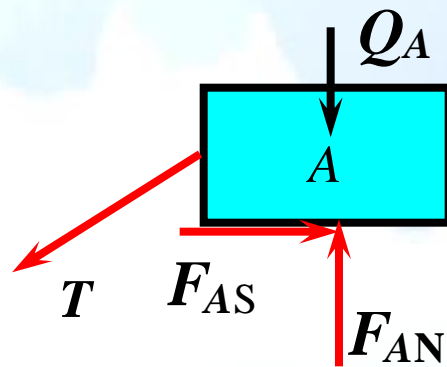
$$\sum F_y = 0, -F'_{AN} - Q_B + F_{BN} = 0$$

$$F_{BS} = f_S F_{BN}$$

解得:  $F_{BN} = 160.3\text{N}$

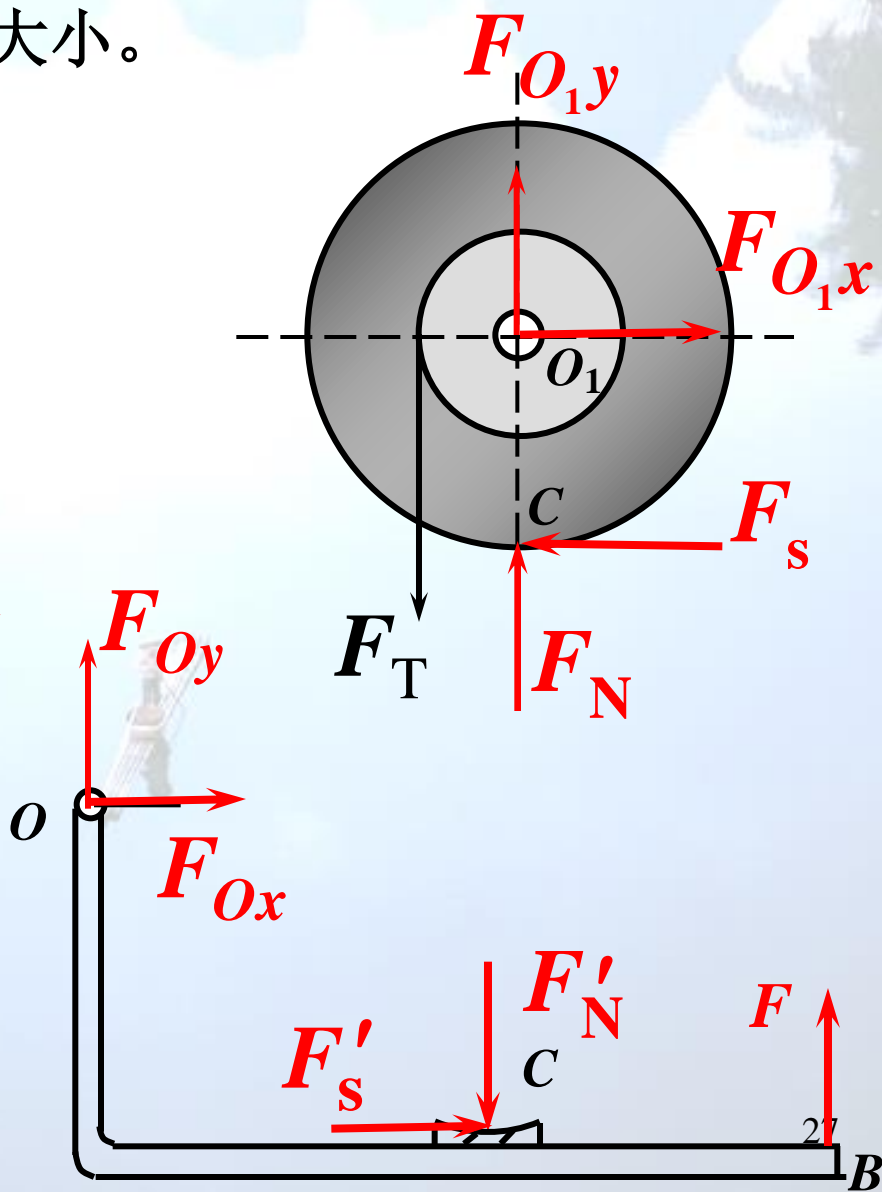
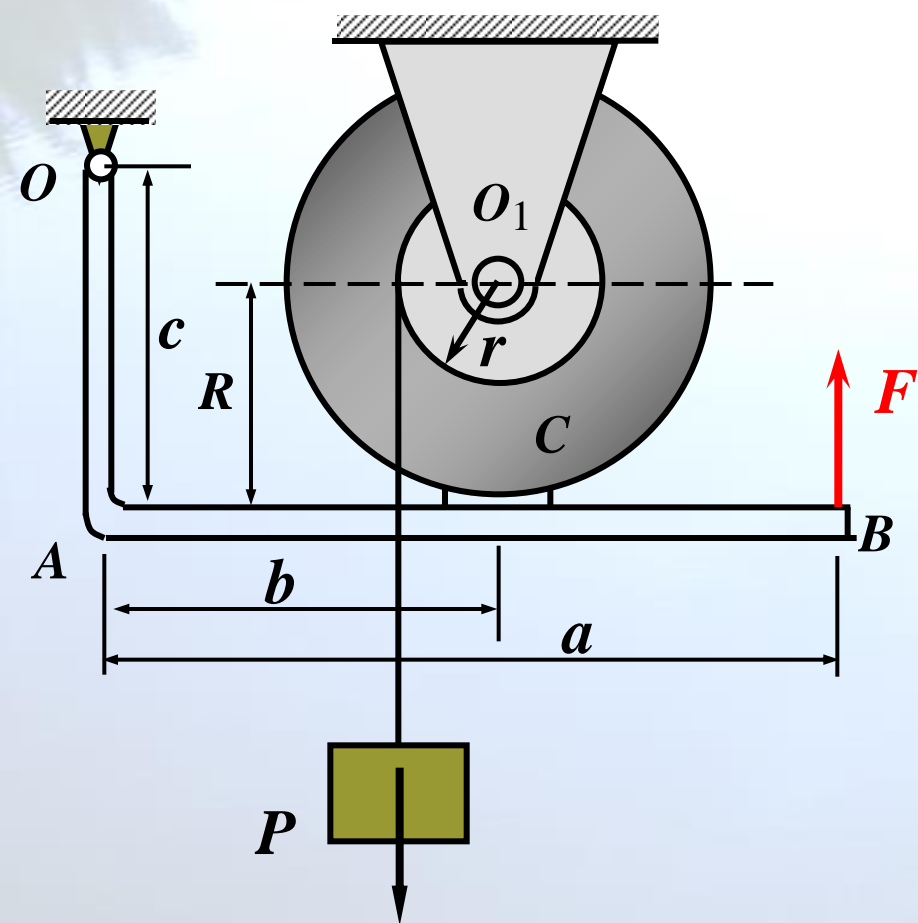
$$F_{BS} = 48.1\text{N}$$

$$P = 66.2\text{N}$$



[例4-3]  
(P120)

已知：物体重为 $P$ ，摩擦因数为 $f_s$ 。  
求：制动所需 $F$ 的大小。



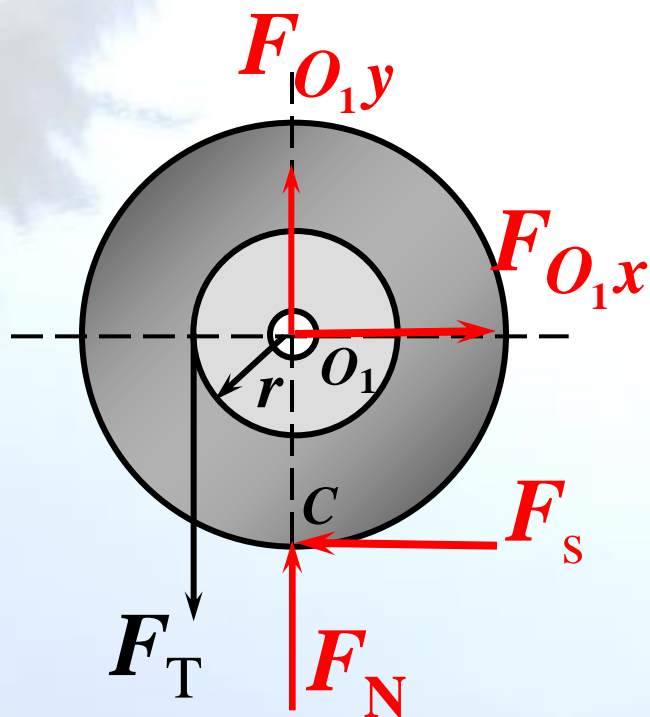


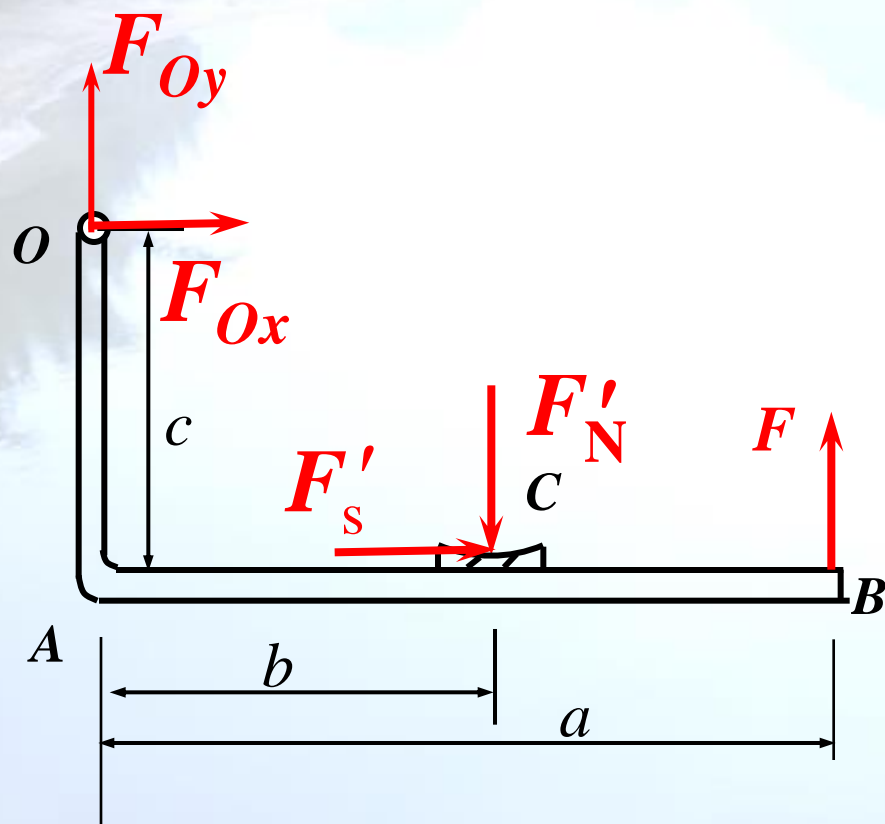
解： [轮子 $O_1$ ]

$$\sum M_{O_1}(\bar{F}) = 0 ,$$

$$F_T \cdot r - F_s \cdot R = 0$$

$$\therefore F_s = \frac{r}{R} F_T = \frac{r}{R} P$$





[杆子OAB]

$$\sum M_O(\bar{F}) = 0 ,$$

$$Fa + F'_s c - F'_N b = 0$$

补充方程:  $F'_s = f_s F'_N$

$$\therefore F = \frac{b - f_s c}{f_s a} F'_s$$

$$\therefore F'_s = F_s = \frac{r}{R} P$$

$$\therefore F_{\min} = \frac{r(b - f_s c)}{f_s R a} P$$

[例4-4]  
(P121)

$P=5\text{kN}$ ,  $h=2a=2\text{m}$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $f_s=0.4$ 。求: (1)  $F=1\text{kN}$  时, 木箱是否平衡? (2) 保持平衡的最大拉力。

解: 平衡的要求是不滑动 ( $F_S \leq F_{\max}$ ) 和不绕A点翻倒 ( $d > 0$ )。

(1) [木箱]

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, & F_S - F \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = 0, & F_N - P + F \sin \alpha = 0 \\ \sum M_A(\bar{F}) = 0, & hF \cos \alpha - P \frac{a}{2} + F_N d = 0 \end{cases}$$

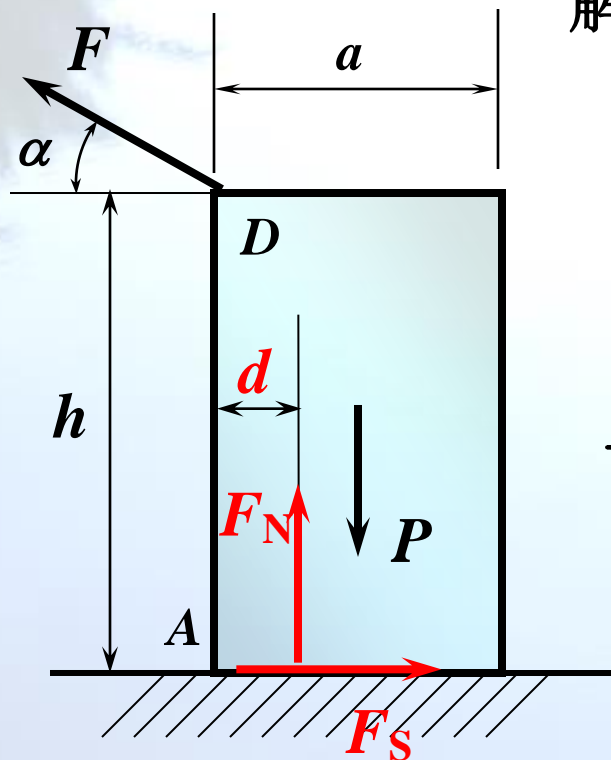
解得:  $F_S = 0.866\text{kN}$ ,  $F_N = 4.5\text{kN}$ ,

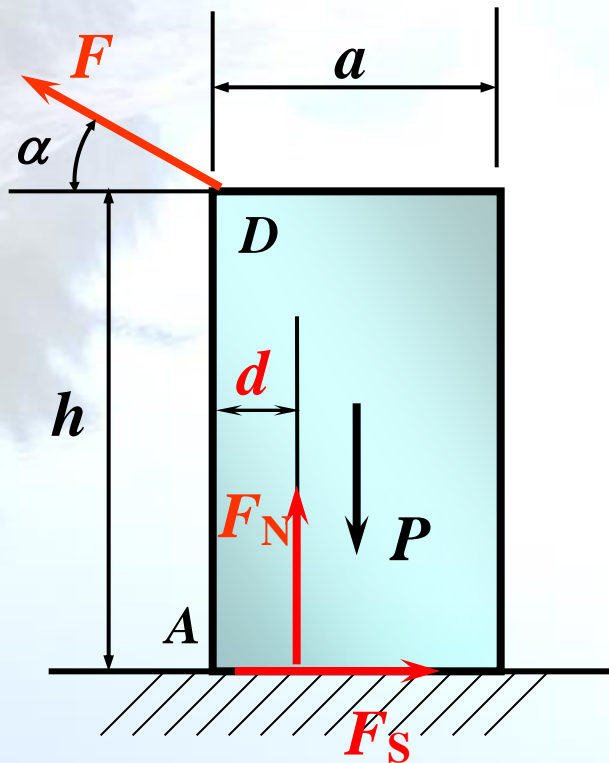
$$d = 0.171\text{m}$$

而  $F_{\max} = f_s F_N = 1.8\text{kN}$

$$\therefore F_S < F_{\max}$$

结论: 木箱平衡





(2) 求保持平衡的最大拉力

[木箱] 设处于滑动临界:

$$\sum F_x = 0, \quad F_S - F \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - P + F \sin \alpha = 0$$

补充方程:  $F_S = F_{\max} = f_s F_N$

解得:  $F = 1.876 \text{ kN}$

设处于翻倒临界:

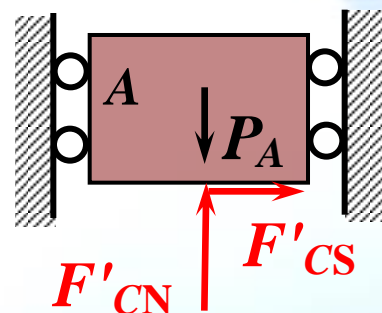
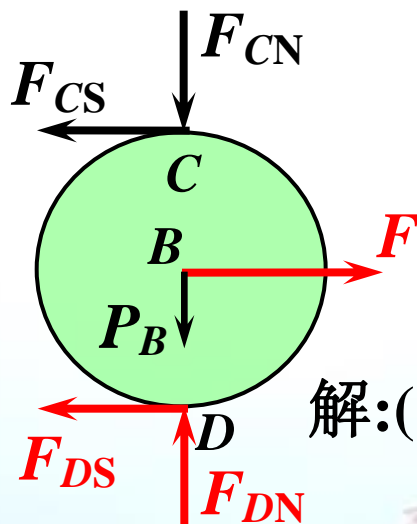
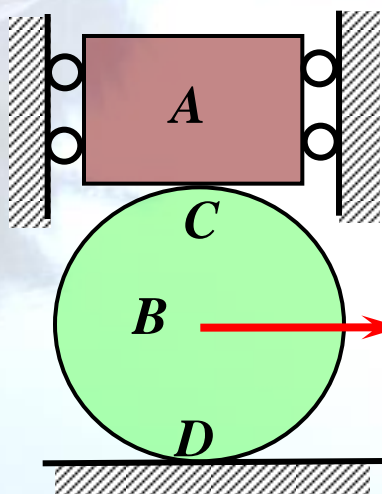
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A(\bar{F}) = 0, \quad hF \cos \alpha - P \frac{a}{2} + F_N d = 0 \\ d = 0 \end{array} \right.$$

解得:  $F = 1.443 \text{ kN}$

$\therefore$  保持平衡的最大拉力为  $F = 1.443 \text{ kN}$

### [例3]

物块A重 $P_A=300\text{N}$ , 轮子B重 $P_B=600\text{N}$ , 静摩擦因数C点 $f_C=0.3$ , D点 $f_D=0.5$ , 不考虑滚动摩擦, 求能够拉动轮子的水平力 $F$ 的最小值。



解:(1)[轮子]设C处于滑动临界,  
D处未达到临界。

$$\therefore F_{DS} = F_{CS} = 90\text{N},$$

$$F_{DN} = 900\text{N}, F = 180\text{N}$$

检验D处假设是否成立成立:

$$\text{则 } F_{D,\max} = f_D \cdot F_{DN} = 450\text{N}$$

$$F_{DS} < F_{D,\max} \text{ 假设成立}$$

$$\therefore F_{\min} = 180\text{N}$$

$$\sum F_x = 0, F - F_{CS} - F_{DS} = 0$$

$$\sum M_B = 0, F_{CS} - F_{DS} = 0,$$

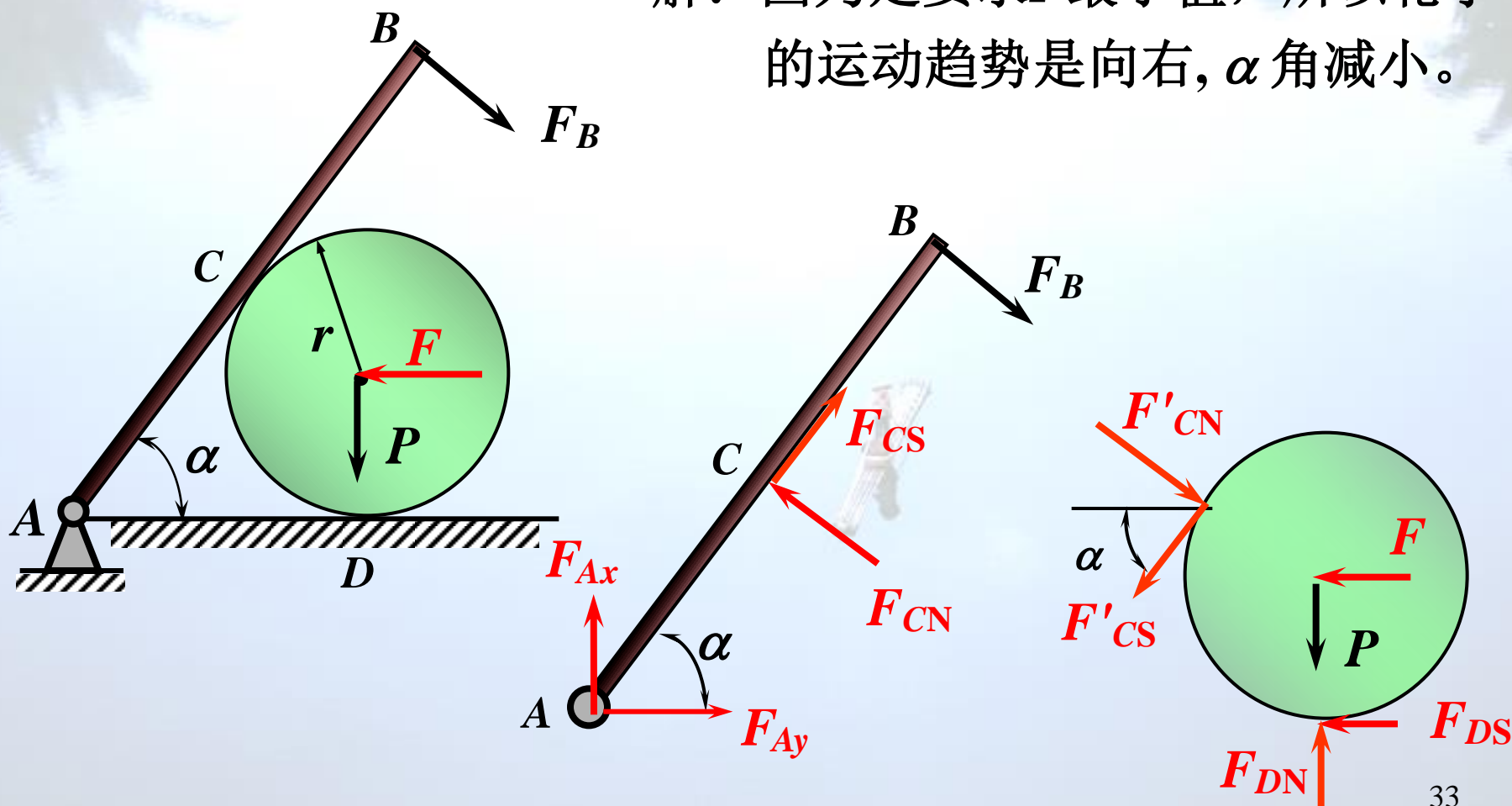
$$\sum F_y = 0, F_{DN} - F_{CN} - P_B = 0,$$

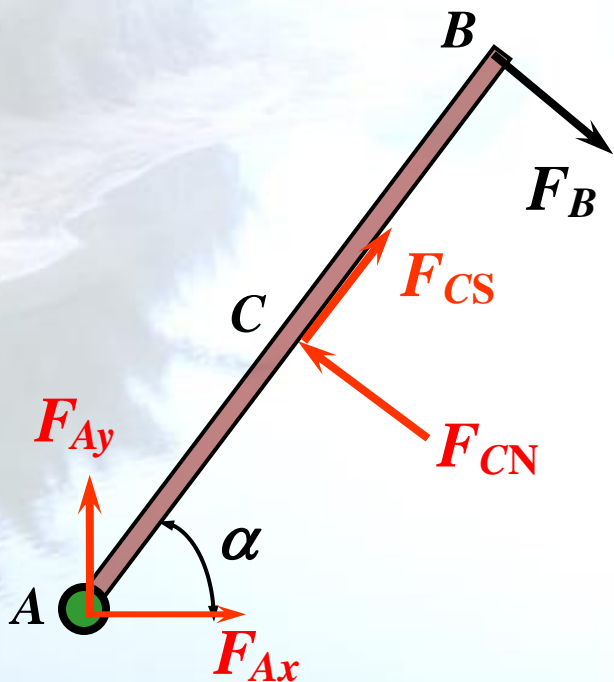
$$\text{由物块A知 } F_{CS} = f_C F_{CN} = 90\text{N}$$



[例3]  $P=100\text{N}$ ,  $F_B=50\text{N}$ ,  $C$ 点 $f_C=0.4$ ,  $D$ 点 $f_D=0.3$ ,  $\alpha=60^\circ$ ,  
 $AC=CB=\frac{l}{2}$ 。求：平衡时 $F$ 的最小值。

解：因为是要要求 $F$ 最小值，所以轮子的运动趋势是向右， $\alpha$ 角减小。





(1) 设C点达到临界, D处未达到临界  
[AB杆]

$$\sum M_A(\bar{F}) = 0, F_{CN} \cdot \frac{l}{2} - F_B l = 0$$

$$\text{解得: } F_{CN} = 2F_B = 100\text{N}$$

$$\therefore F_{CS} = f_C \cdot F_{CN} = 40\text{N}$$

[轮子]

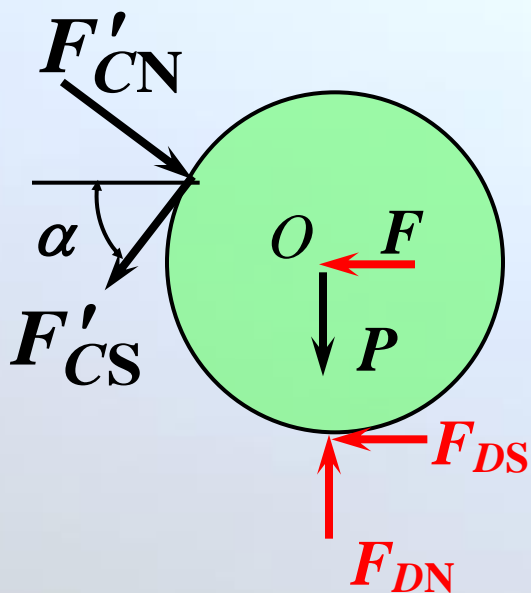
$$\sum M_O(\bar{F}) = 0, F'_{CS} \cdot r - F_{DS} \cdot r = 0$$

$$\therefore F_{DS} = F'_{CS} = F_{CS} = 40\text{N}$$

$$\sum F_x = 0,$$

$$F'_{CN} \sin 60^\circ - F'_{CS} \cos 60^\circ - F - F_{DS} = 0$$

$$\therefore F = 26.6\text{N}$$



$$\sum F_y = 0, \quad F_{DN} - F'_{CN} \cos 60^\circ - F'_{CS} \sin 60^\circ - P = 0$$

$$\therefore F_{DN} = 184.6\text{N}$$

检查D处是否打滑:

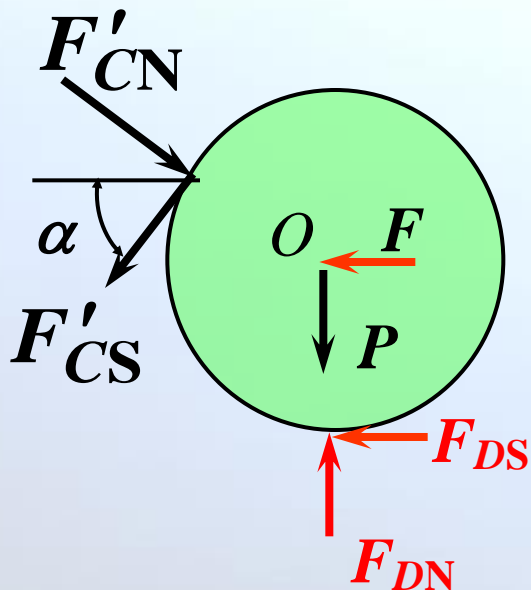
$$F_{D\max} = f_D \cdot F_{DN} = 0.3 \times 184.6 = 55.39\text{N}$$

$$\therefore F_{DS} = 40\text{N}$$

$$\therefore F_{DS} < F_{D\max}$$

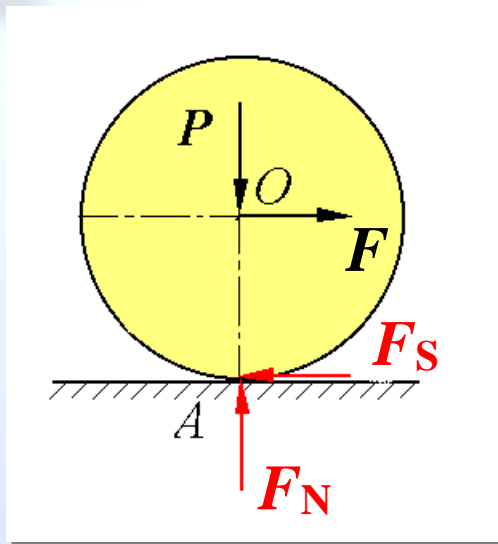
D处摩擦力小于最大静摩擦力, D处不打滑,

假设正确  $\therefore F_{\min} = 26.6\text{N}$



## § 4-4 滚动摩阻的概念

由实践可知，使滚子滚动比使它滑动省力，下图的受力分析看出一个问题，即此物体平衡，但没有完全满足平衡方程。



$F$ 与 $F_S$ 形成主动力偶使前滚

$$\sum F_x = 0, F - F_S = 0$$

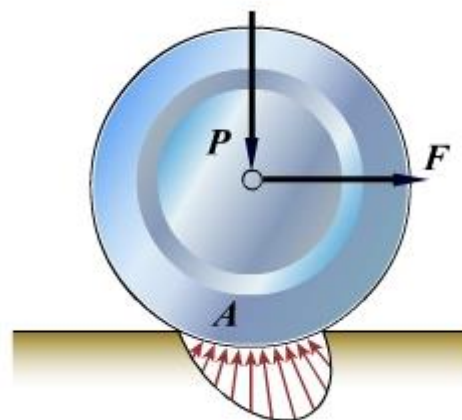
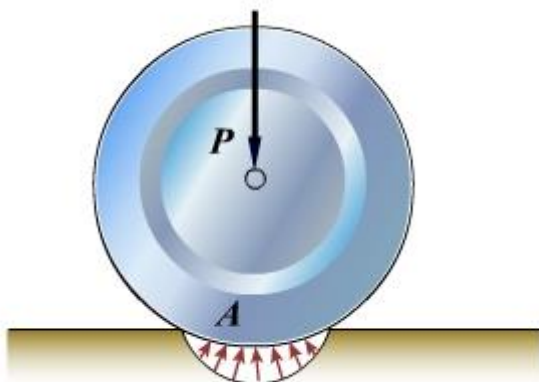
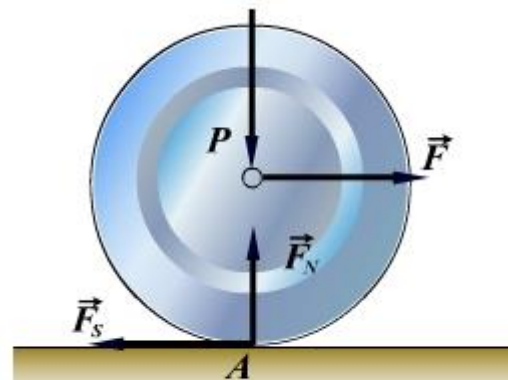
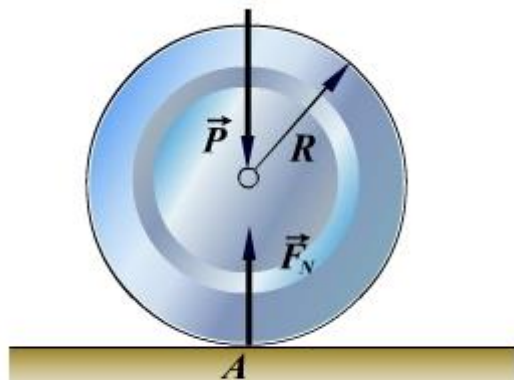
$$\sum F_y = 0, P - F_N = 0$$

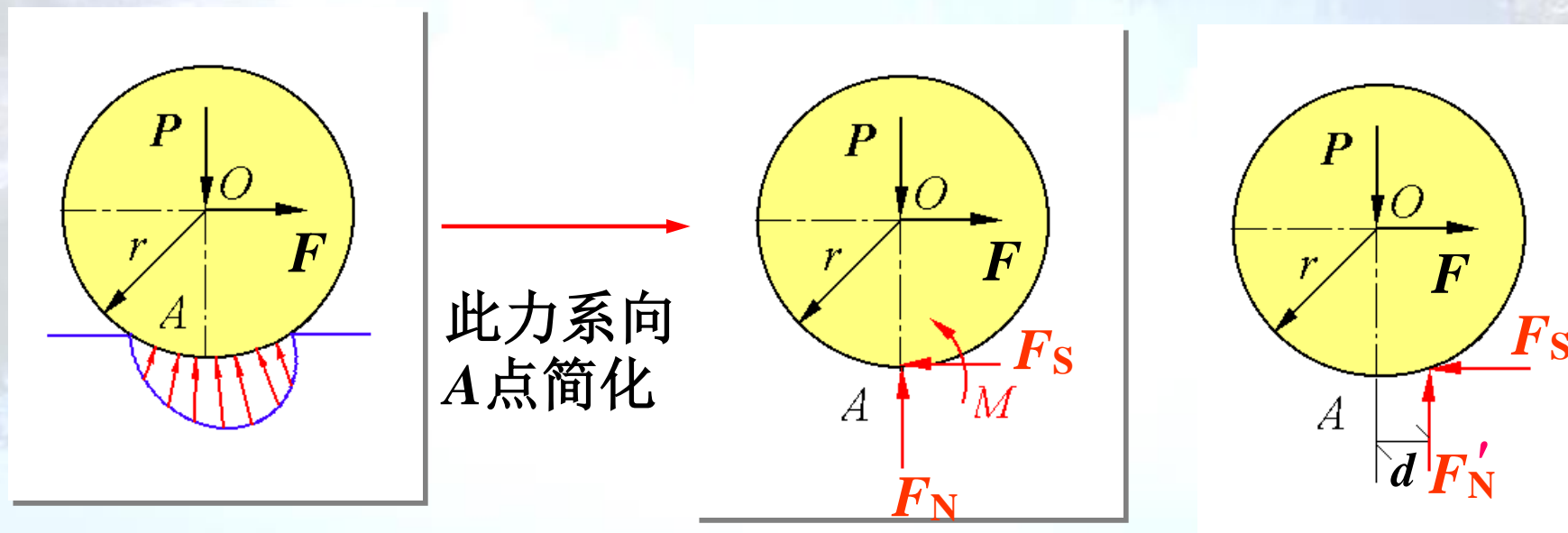
$$\sum M_A(\bar{F}) = 0, F \cdot r = 0 \text{ (不成立)}$$

出现这种现象的原因是，实际接触面并不是刚体，它们在力的作用下都会发生一些变形，如图：

## § 4-4 滚动摩阻的概念

### 静滚动摩阻（擦）





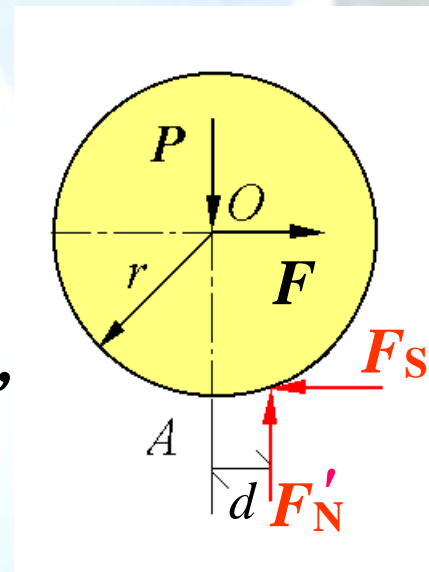
滚阻力偶与主动力偶 ( $F, F_S$ ) 相平衡

滚动 摩擦

- ① 滚阻力偶  $M$  随主动力偶 ( $F, F_S$ ) 的增大而增大;
- ②  $0 \leq M \leq M_{\max}$  有个平衡范围;
- ③  $M_{\max}$  与滚子半径无关;
- ④ 滚动摩擦定律:  $M_{\max} = \delta \cdot F_N$ ,  $\delta$  为滚动摩擦系数。

滚动摩擦系数  $\delta$  的说明:

- ①有长度量纲，单位一般用mm,cm;
- ②与滚子和支承面的材料的硬度和温度有关。
- ③  $\delta$  的物理意义见图示。



根据力线平移定理，将  $F_N$  和  $M$  合成一个力  $F'_N$ ，

$$F'_N = F_N$$

$$d = \frac{M}{F'_N} \quad \therefore M = d \cdot F'_N = d \cdot F_N$$

$$\therefore d = \delta$$

从图中看出，滚阻力偶  $M$  的力偶臂正是  $\delta$ （滚阻系数），所以， $\delta$  具有长度量纲。

由于滚阻系数很小，所以在工程中大多数情况下滚阻力偶不计，即滚动摩擦忽略不计。



**本章结束**

