

DOI : 10.3901/JME.2014.01.130

齿轮传动共轭曲线原理*

陈兵奎 梁 栋 高艳娥

(重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆 400044)

摘要 : 在定义曲线连续相切接触的基础上, 提出共轭曲线的概念, 给出曲线共轭接触的基本条件。建立共轭曲线的基本理论: 计算任意接触角方向的法矢量; 论证曲线共轭啮合的充要条件, 同时建立曲线沿给定接触角方向的啮合方程; 推导共轭曲线及啮合线的通用表达式。分析研究典型曲线——圆柱螺旋线的共轭曲线及其接触性质, 揭示不同接触角条件下共轭曲线的啮合关系, 并且讨论齿面曲线共轭啮合的特点。研究表明该原理具有一定的通用性可适用于多种齿轮传动类型, 同时共轭曲线接触的特点及选择的灵活性能够实现齿轮共轭啮合的最优设计。研究结果为齿轮齿面的构建提供了新方法, 并为进一步研究共轭曲线齿轮啮合理论奠定了基础。

关键词 : 共轭曲线; 接触角; 啮合方程; 圆柱螺旋线; 齿轮最优设计

中图分类号 : TH132

The Principle of Conjugate Curves for Gear Transmission

CHEN Bingkui LIANG Dong GAO Yane

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044)

Abstract : The concept of conjugate curves is put forward based on the definition of continuous and tangent contact, and the basic conditions of conjugation contact between a pair of conjugate curves are given. The fundamental principle of conjugate curves for gear transmission is provided: The normal vector to arbitrary direction of contact angle is calculated; the meshing equation is derived and the necessary and sufficient conditions of conjugation meshing for these curves are demonstrated simultaneously; the corresponding conjugated curve can be identified and line of action is also deduced with this method. A general conjugation model is therefore established according to the aforementioned theory and the result is demonstrated with parallel axis gearing as well as cylindrical helix. The geometric properties of conjugation in arbitrary contact angle direction are revealed and the characteristics of meshing motion of conjugate curves are discussed. The versatility of the principle and the outstanding contact features become obvious with treating any gear transmission. The freedom of selecting contact curve suggests the possibility of optimal conjugation design. The results provide a new method for the generation of gear tooth profile and lay a solid foundation for the further study of the gear meshing theory of conjugate curves.

Key words : conjugate curves ; contact angle ; equation of meshing ; cylindrical helix ; optimal conjugation design

0 前言

齿轮是装备制造业中典型的关键基础件, 广泛应用于生产实践中^[1]。随着科学技术的发展, 对齿轮传动的要求也在不断地提高, 以直升机等为代表的航空航天飞行器、以风力发电等为代表的新能源装备以及高铁、舰船等重大装备都对齿轮传动提出了高效率、高承载能力、高可靠性、轻量化等要求。

共轭啮合副往往决定着齿轮传动的性能^[2]。因此, 开展新型齿轮传动研究, 尤其针对高性能齿轮共轭啮合副的研究具有重要的意义, 也是提高齿轮传动性能的重要基础。

一般来说, 常见的渐开线齿轮传动、圆柱蜗杆传动、环面蜗杆传动、锥齿轮传动等啮合的理论基础均是基于共轭曲面原理的。共轭曲面可描述为两构件上用以实现给定运动规律, 且在运动过程中始终保持连续相切接触的一对曲面^[3]。现有的齿轮啮合理论已经建立了从共轭齿面求解到齿面性质分析的较为全面的体系, 国内外学者针对共轭曲面理论

* 国家科技支撑计划资助项目(2013BAF01B04)。20130125 收到初稿, 20130801 收到修改稿

也已经进行了大量的系统的研究工作。LITVIN 等^[4]系统地诠释了空间齿轮啮合和共轭曲面理论, 并进行了大量的研究工作。陈志新^[5]研究了空间共轭齿轮副曲面几何学, 探讨了连续滑动接触共轭曲面原理及其应用。WU 等^[6-7]分别针对曲面共轭的基本原理和齿轮几何学进行了系统的研究。李瑰贤^[8]描述了共轭曲面建模原理及啮合原理, 并介绍了其在机械工程、控制工程等中的应用。另外, 共轭曲面的一般几何及接触性质也受到研究者的广泛关注^[9-12]。值得注意的是, CHEN 等^[13]在空间曲面啮合理论的研究基础上进行扩展, 得到了适合于微小弹性啮合轮传动机构设计的空间曲线啮合理论, 建立了空间曲线沿接触点主法线方向的啮合方程及啮合曲线方程。

近些年来, 数控技术的飞跃发展及其广泛应用使得复杂曲面的加工变得更加容易, 为研究传动特性更好的新型齿轮提供了技术保障^[14-15]。曲线和曲面均是常见的接触元素, 共轭曲面仅是齿轮齿廓的可选曲面之一, 曲线之间的接触往往更具有多样性和灵活性, 这也为开展齿轮传动新原理研究提供了全新的思路。本文提出一种全新的齿轮传动共轭曲线原理, 其创新之处在于采用曲线作为啮合基本元素, 并且共轭曲线沿给定接触角方向啮合。通过给定任意光滑曲线即可实现不同接触方向的共轭曲线啮合, 从而满足不同的设计要求, 为齿轮齿面的构建提供基础。文中提出共轭曲线的基本概念, 对共轭曲线原理进行数学描述, 并以圆柱螺旋线为例研究共轭曲线啮合的一般规律及性质。

1 共轭曲线的定义

曲线接触可以描述为给定运动规律的一对光滑曲线在运动过程中始终保持连续相切接触。对于在给定运动过程中的两条曲线, 当其满足条件如下。

(1) 曲线 Γ_1 , Γ_2 分别是两条光滑曲线。

(2) 在每一时刻 t , 曲线作点接触即沿着接触点 P_t 相切。

(3) 曲线 Γ_2 上的每一点都在唯一的时刻 t 进入接触, 即属于唯一的 P_t 。

(4) 在一定的范围内, 规定了相对运动后, 不但曲线 Γ_2 是曲线 Γ_1 的共轭曲线, 而且曲线 Γ_1 也是曲线 Γ_2 的共轭曲线。

称曲线 Γ_1 与曲线 Γ_2 为一对共轭曲线。由上述定义可知, 两条光滑曲线的接触实质上是沿线上对应点的接触, 两条曲线具有相互包络的特性, 因此

两曲线的啮合可称为共轭曲线啮合。另外, 共轭曲线接触必须满足以下三个基本条件。

(1) 两条光滑曲线上相对应的共轭点在接触位置上重合。

(2) 共轭曲线在共轭接触点处必须相切, 并且为了避免相互干涉, 一对共轭曲线还必须相互错开。

(3) 为保证共轭曲线间保持连续接触传动, 在共轭接触点处, 两曲线间的相对运动速度必须垂直于该点处的公法面即垂直于面内任意法线。

2 共轭曲线基本原理

2.1 坐标系及坐标变换

本文以平行轴齿轮传动为研究对象, 如图 1 所示, 坐标系 $S(Oxyz)$ 、 $S_p(O_px_py_pz_p)$ 是两个在空间固定的坐标系, z 、 z_p 轴分别与小齿轮 1、大齿轮 2 的回转轴重合, 且两轴线平行。 x 轴与 x_p 轴重合, 它们的方向就是两轴的最短距离方向即中心距 a 。

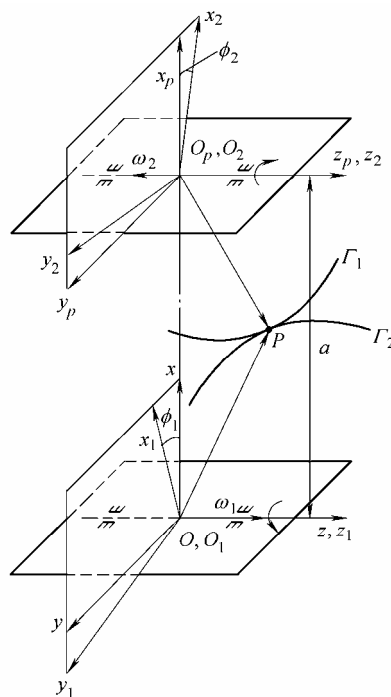


图 1 轴线平行的空间外啮合齿轮传动

坐标系 $S_1(O_1x_1y_1z_1)$ 、 $S_2(O_2x_2y_2z_2)$ 分别是与齿轮固连的坐标系, 在起始位置时它们分别与 S 、 S_p 重合。齿轮 1 以匀角速度 $\omega^{(1)}$ 绕 z 轴转动, 齿轮 2 以匀角速度 $\omega^{(2)}$ 绕 z_p 轴转动, 经过一段时间后二者运动到图 1 中所示位置, 此时齿轮 1 绕 z 轴转过 ϕ_1 角, 齿轮 2 绕 z_p 轴转过 ϕ_2 角。根据图中所示的坐标

关系,可以得到由坐标系 S_1 到 S_2 的坐标变换矩阵为

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_2 + \phi_1) & -\sin(\phi_2 + \phi_1) & 0 & -a \cos \phi_2 \\ \sin(\phi_2 + \phi_1) & \cos(\phi_2 + \phi_1) & 0 & -a \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2.2 相对运动速度

假定 P 点是共轭曲线上的任意接触点,共轭曲线在接触点处的相对运动速度在空间的方向是唯一的。应用矢量法求解齿轮 1 上该点 $P^{(1)}$ 相对齿轮 2 上同一点 $P^{(2)}$ 的运动速度。

在动坐标系 S_1 中,该相对运动速度矢量 $v_1^{(12)}$ 等于在动坐标系 S_1 中表示的齿轮 1 上 $P^{(1)}$ 点的速度矢量 $v_1^{(1)}$ 与齿轮 2 上 $P^{(2)}$ 点的速度矢量 $v_1^{(2)}$ 之差。参照一般齿轮几何学理论^[4],有

$$v_1^{(12)} = \omega^{(1)} \times r_1 - (\omega^{(2)} \times r_1 + a \times \omega^{(2)}) \quad (2)$$

式中, r_1 为 P 点在动坐标系 S_1 中的径矢,即 $r_1 = x_1 i_1 + y_1 j_1 + z_1 k_1$; i_1, j_1, k_1 分别表示坐标轴 x_1, y_1, z_1 的单位矢量。

考虑到

$$\begin{cases} a = O_1 O_2 = a \cos \phi_1 i_1 - a \sin \phi_1 j_1 \\ \omega^{(1)} = \omega_1 k_1 \\ \omega^{(2)} = \omega^{(2)} = -\omega_2 k_1 \end{cases}$$

代入计算,得到共轭曲线接触点 P 处的相对运动速度表达式

$$v_1^{(12)} = [-(\omega_1 + \omega_2) y_1 - \omega_2 a \sin \phi_1] i_1 + [(\omega_1 + \omega_2) x_1 - \omega_2 a \cos \phi_1] j_1 \quad (3)$$

2.3 任意接触角方向法矢量

在空间曲线 Γ 上任意一点 P 建立如图 2 所示的空间曲线的基本三棱形,其基本矢为右旋的三个彼此互相垂直的么矢 α, β, γ , 分别表示曲线在该点处的切矢、主法矢和副法矢。

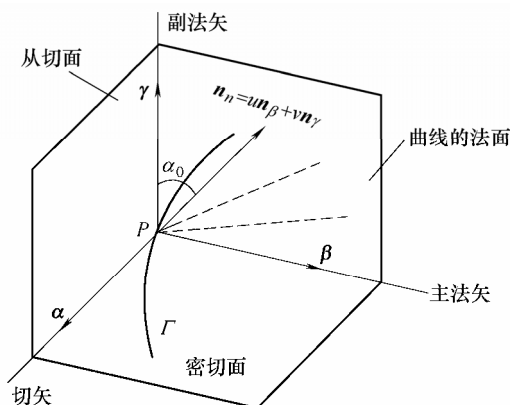


图2 曲线基本三棱形

主法矢 n_β 的表达式可以通过计算得到^[13]

$$n_\beta = n_{\beta x(t)} i_1 + n_{\beta y(t)} j_1 + n_{\beta z(t)} k_1 \quad (4)$$

$$\begin{cases} n_{\beta x(t)} = \frac{x''(t)[y'^2(t) + z'^2(t)] - x'(t)[y'(t)y''(t) + z'(t)z''(t)]}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^2} \\ n_{\beta y(t)} = \frac{y''(t)[x'^2(t) + z'^2(t)] - y'(t)[x'(t)x''(t) + z'(t)z''(t)]}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^2} \\ n_{\beta z(t)} = \frac{z''(t)[x'^2(t) + y'^2(t)] - z'(t)[x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)]}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^2} \end{cases}$$

式中, t 表示曲线参数变量。

副法矢 n_γ 可以由矢量关系 $\gamma = \alpha \times \beta$ 确定,得到

$$n_\gamma = n_{\gamma x(t)} i_1 + n_{\gamma y(t)} j_1 + n_{\gamma z(t)} k_1 \quad (5)$$

$$\begin{cases} n_{\gamma x(t)} = \frac{y'(t)z''(t) - z'(t)y''(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \\ n_{\gamma y(t)} = -\frac{x'(t)z''(t) - z'(t)x''(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \\ n_{\gamma z(t)} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

曲线在法面内沿不同的接触方向存在着无数条法线。根据建立的空间基本三棱形可以确定出主法矢和副法矢,继而法面内任意方向法矢量都可以表示成关于二者的线性组合。即

$$n_n = un_\beta + vn_\gamma \quad (6)$$

式中, u, v 是参数,在实际运算过程中可以表示不同的接触方向。在这里,定义法面内任意法线方向与副法线方向的夹角为接触角 α_0 (图 2),从而可以针对给定的接触角方向研究曲线啮合。

参照上述结果,在动坐标系 S_1 下曲线接触点 P 处任意接触角方向的法矢量可以写成

$$n_1 = (un_{\beta x_1} + vn_{\gamma x_1}) i_1 + (un_{\beta y_1} + vn_{\gamma y_1}) j_1 + (un_{\beta z_1} + vn_{\gamma z_1}) k_1 \quad (7)$$

2.4 啮合方程

在已建立的坐标系下,设 n_n 为两曲线在啮合点 P 处的一个给定公法矢,在同曲线 Γ_2 固连的观察者看来 P 点处的相对速度 $v^{(12)}$ 显然必须沿着曲线 Γ_2 在啮合点处的公切线方向,因此 $v^{(12)}$ 垂直于曲线 Γ_2 在 P 点的法矢 n_n 。有

$$n_n \cdot v^{(12)} = 0 \quad (8)$$

即一对共轭曲线 Γ_1, Γ_2 在啮合点处的给定公法线垂直于它们在该点的相对速度,或者说相对速度

在法矢方向的投影等于零。若在法矢 n_n 方向的投影不等于零, 说明法矢方向有相对速度, 即有相对运动存在, 那么共轭曲线有可能沿法矢方向脱开或者嵌入, 破坏正常的啮合传动, 也就失去了共轭运动的意义。式(8)就叫做曲线 Γ_1, Γ_2 的啮合条件或啮合方程。它是两条曲线在 P 点啮合的必要条件。

当然在一定条件下它也是充分条件, 下面就来证明。将曲线 Γ_1 在动坐标架 σ_1 中的方程写成(t 为曲线参数)

$$\Gamma_1: \quad r_1(t) = \sum_{i=1}^3 x_i^{(1)}(t) e_i^{(1)} \quad (9)$$

式中 $e_i^{(1)} (i=1, 2, 3)$ ——曲线 Γ_1 在坐标架 σ_1 下各方向单位矢量

假定任意点 P 在坐标架 σ_1 里的径矢 $r_1 = O_1P$ 和它在 σ_2 里的径矢 $r_2 = O_2P$ 之间的关系是

$$r_2 = \xi + r_1 \quad (10)$$

值得注意的是 r_1 在 σ_1 中不是时间 T 的函数, 将上面两式中的 ξ 以及 $e_i^{(1)}$ 变换到 σ_2 中, 有

$$\xi(T) = \xi_1(T) e_1^{(2)} + \xi_2(T) e_2^{(2)} + \xi_3(T) e_3^{(2)} = \sum_{j=1}^3 \xi_j(T) e_j^{(2)} \quad (11)$$

通过底矢变换^[8], 写出 $e_i^{(1)}$ 在 σ_2 中的表达式

$$e_i^{(1)}(T) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}(T) e_j^{(2)} \quad i=1, 2, 3 \quad (12)$$

式中, $\xi_j(T), a_{ij}(T) (i, j=1, 2, 3)$ 都是时刻 T 的纯量函数, 且在任意时刻 $T, a_{ij}(T)$ 都是行列式等于 1 的正交方阵, 这些函数都与曲线 Γ_1, Γ_2 形状无关。将上式代入曲线 Γ_1 的方程中得到

$$r_1(t, T) = \sum_{i=1}^3 x_i^{(1)}(t) \sum_{j=1}^3 a_{ij}(T) e_j^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}(T) x_i^{(1)}(t) e_j^{(2)} \quad (13)$$

可见在 σ_2 中观察时 r_1 不仅仅是 t 的函数, 也是时间 T 的函数 因为在坐标架 σ_2 中看 σ_1 是运动着的。将式(11)和式(13)代入式(10)中, 可以得到曲线在 σ_1 中的径矢 r_1 上的一点 P 在 σ_2 中的径矢 r_2 的表达式

$$\Gamma_2: \quad r_2(t, T) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}(T) x_i^{(1)}(t) e_j^{(2)} + \sum_{j=1}^3 \xi_j(T) e_j^{(2)} = \sum_{j=1}^3 [\xi_j(T) + \sum_{i=1}^3 a_{ij}(T) x_i^{(1)}(t)] e_j^{(2)} \quad (14)$$

因此, 给定了曲线 Γ_1 上一点 P, r_1 只与参数 t 有关与时间 T 无关, 而上式中的 r_2 则是在时刻 T, P 点在 σ_2 里的径矢表达式。观察者在标架 σ_2 中看来这是一个固定标架, 底矢 $e_j^{(2)}$ 是常矢。因而上式就是在 σ_2 里 $\Gamma_1^{(1)}$ 的矢方程, 而令 T 取不同的值, 它就是在 σ_2 里曲线族 $\{\Gamma_1^{(1)}\}$ 的矢方程。

已知空间曲线包络条件 $\phi(t, T) \equiv r_t \times r_T = 0$, 分析包络条件的运动学意义。 r_t 是母线在某一时刻的瞬时轨迹 Γ 上点的偏导矢量也就是族中曲线 Γ 在接触点 P 处的切线矢量, r_T 对族中曲线来说, 则是 t 为任意常数的时候, 所对应的点运动参数的偏导矢量。当将 T 视为时间参数时, r_T 就是 Γ 上的点相对于包络线 $\bar{\Gamma}$ 的速度矢量。有

$$\begin{cases} \frac{\partial^{(2)} r_2(t, T)}{\partial t} = \frac{\partial^{(2)} [r_1(t) + \xi(T)]}{\partial t} = \frac{\partial^{(2)} r_1(t)}{\partial t} + \frac{\partial^{(2)} \xi(T)}{\partial t} \\ \frac{\partial^{(2)} r_2(t, T)}{\partial T} - \frac{\partial^{(1)} r_1(t)}{\partial T} = v^{(12)} \end{cases} \quad (15)$$

从而得到关系式

$$\begin{cases} \frac{\partial^{(2)} r_2(t, T)}{\partial t} = \frac{\partial^{(2)} r_1(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial^{(2)} r_2(t, T)}{\partial T} = v^{(12)} \end{cases} \quad (16)$$

根据前述包络条件, 曲线包络线上的点属于曲线族一个曲线上的点, 两条曲线若在一点处接触, 接触点处的法矢垂直于该点的相对速度。依据建立的关系可知, 点 P 上的运动母线相对于包络的运动方向与它自己在该点处的切线方向会重合, 也就是说与该点处的法线垂直, 即 $v_p \perp n_p, v_p$ 表示曲线上 P 点处的速度矢量, n_p 表示点 P 处的法线。在这里, 可以看作包络条件 $r_t \times r_T = 0$ 等价于 $v_p \cdot n_p = 0$, 它保证了在接触点 P 处运动着的母线和包络既不相交也不离开。啮合方程同样表述了相同的意思。综上所述说明建立的啮合方程是共轭曲线的充要条件。

将式(3)、(7)代入式(8)中计算, 可得到啮合方程式为

$$E \cos \phi_1 - F \sin \phi_1 = M \quad (17)$$

$$\begin{cases} E = -i_{21} a(un_{\beta y_1} + vn_{\gamma y_1}) \\ F = i_{21} a(un_{\beta x_1} + vn_{\gamma x_1}) \\ M = (1 + i_{21}) [y_1(un_{\beta x_1} + vn_{\gamma x_1}) - x_1(un_{\beta y_1} + vn_{\gamma y_1})] \end{cases}$$

2.5 共轭曲线方程

曲线参数 t 与运动参数 ϕ 之间并不是互相独立

的, 它们的关系可以通过啮合接触条件获得。给定齿轮 1 上的曲线, 可以借由接触关系推得齿轮 2 上与之共轭的曲线。利用坐标变换矩阵 $r_2 = M_{21}r_1$ 和啮合方程式, 即可得到共轭曲线方程的通用表达式

$$\begin{cases} x_2 = \cos[(i_{21}+1)\phi_1]x_1 - \sin[(i_{21}+1)\phi_1]y_1 - a\cos(i_{21}\phi_1) \\ y_2 = \sin[(i_{21}+1)\phi_1]x_1 + \cos[(i_{21}+1)\phi_1]y_1 - a\sin(i_{21}\phi_1) \\ z_2 = z_1 \\ E\cos\phi_1 - F\sin\phi_1 = M \end{cases} \quad (18)$$

式中, r_2 为 P 点在动坐标系 S_2 中的径矢, 有 $r_2 = x_2i_2 + y_2j_2 + z_2k_2$, 其中 i_2, j_2, k_2 分别表示坐标轴 x_2, y_2, z_2 的单位矢量; 且有关系式 $\phi_2 = i_{21}\phi_1$ 。

2.6 啮合线方程

齿面上的理论接触点在齿轮上的集合称为接触迹线, 其理论接触点在固定坐标系中的集合称为啮合线。所以啮合线方程式的求法是将理论接触点在动坐标系中的坐标转换到固定空间坐标系中的坐标值。因此一对共轭曲线其啮合线方程式就是将理论接触点由动坐标系 S_1 变换到空间固定坐标系 S 下。根据坐标变换矩阵

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 & 0 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得到啮合线方程

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\phi_1 - y_1 \sin\phi_1 \\ y = x_1 \sin\phi_1 + y_1 \cos\phi_1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad (19)$$

3 应用实例

本文以圆柱螺旋线为应用实例进行分析计算, 给定曲线 Γ_1 方程式如下

$$\begin{cases} x_1 = R \cos\theta \\ y_1 = R \sin\theta \\ z_1 = p\theta \end{cases} \quad (20)$$

式中 R —— 齿轮的节圆半径;
 θ —— 圆柱螺旋线参数;
 p —— 螺旋参数。

将式(20)代入计算得到主法矢、副法矢表达式(4)和式(5), 计算得到

$$\begin{cases} n_{\beta x_1} = -\frac{R \cos\theta}{R^2 + p^2} \\ n_{\beta y_1} = -\frac{R \sin\theta}{R^2 + p^2} \\ n_{\beta z_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n_{\gamma x_1} = \frac{pR \sin\theta}{(R^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ n_{\gamma y_1} = -\frac{pR \cos\theta}{(R^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ n_{\gamma z_1} = \frac{R^2}{(R^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (21)$$

从而, 任意接触角方向的法矢量为

$$\begin{cases} n_{x_1} = -u \frac{R \cos\theta}{R^2 + p^2} + v \frac{pR \sin\theta}{(R^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ n_{y_1} = -u \frac{R \sin\theta}{R^2 + p^2} - v \frac{pR \cos\theta}{(R^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ n_{z_1} = v \frac{R^2}{(R^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (22)$$

根据共轭曲线啮合方程表示方法, 得到如下表达式

$$\sin(\theta + \phi_1) = \frac{vp}{u(R^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{vp}{u(R^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(\theta + \phi_1) \quad (23)$$

从而共轭曲线 Γ_2 方程

$$\begin{cases} x_2 = R \cos[(i_{21}+1)\phi_1 + \theta] - a \cos(i_{21}\phi_1) \\ y_2 = R \sin[(i_{21}+1)\phi_1 + \theta] - a \sin(i_{21}\phi_1) \\ z_2 = p\theta \\ \sin(\theta + \phi_1) = \frac{vp}{u(R^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{vp}{u(R^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}} \cos(\theta + \phi_1) \end{cases} \quad (24)$$

运用 Matlab 软件编写相关程序, 观察图示结果。选取适当的参数如下: $R=24 \text{ mm}$, $Z_1=6$, $Z_2=30$, $a=144 \text{ mm}$, $i_{21}=0.2$, $p=44$, $\theta \in [0, 1.1364] \text{ rad}$ 。其中 Z_1, Z_2 分别表示齿轮 1、2 的齿数; a 为两齿轮标准中心距; i_{21} 是传动比。

图 3 反映了在满足上述给定参数的条件下一对共轭曲线沿齿宽方向在某一接触点啮合的情形。因此可以得到这样一种结论, 即给定一条空间任意曲线, 依据共轭曲线原理可以得到沿给定接触角方向与之共轭的另一条曲线, 并且曲线在啮合过程中始终保持点接触。

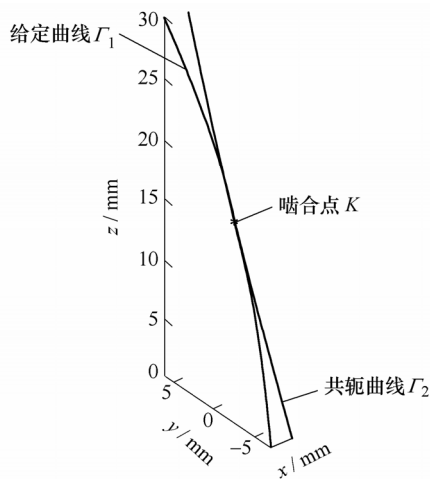


图3 曲线啮合示意图

在前文的研究中得到任意接触角方向的法矢量都可以写成由主法矢和副法矢构成的线性组合, 因此, 在原始曲线不变的情况下, 给定不同的接触角与之共轭的曲线啮合方向是不同的。

图4表示了在 20° 、 40° 、 60° 接触角条件下共轭曲线的啮合关系。如图4所示, K 点是共轭曲线的一个啮合点, 在该点处曲线基本三棱形的法面内分别选取了 20° 、 40° 、 60° 的接触角, 取相同数据参数推导计算出了与给定原始曲线共轭的不同方向啮合的曲线。由图中可知虽然曲线共轭的方向是不同的, 但是啮合点 K 是固定不变的。共轭曲线的这一啮合性质为齿轮齿面构建提供了较大的灵活性, 可以在不同条件下选择最优参数及方法进行设计计算。

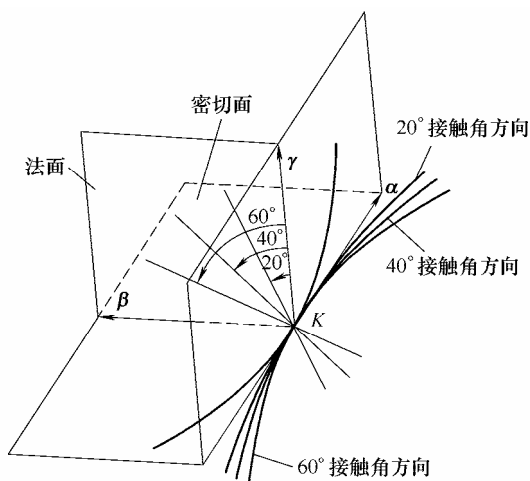


图4 不同接触角共轭曲线啮合

如图5所示, 建立齿面曲线共轭啮合基本模型。图5a表示了一对齿面共轭曲线在初始端点处啮合, 同时啮合线为一条沿齿宽方向的直线。当齿轮以固定角速度旋转时, 共轭曲线开始进入啮合状态, 啮合点由初始位置并逐渐沿着齿宽方向运动直至分

离。不同旋转角度下共轭曲线的接触位置反映在图5b、5c、5d中, 从图5中可以明显的看出齿轮分别旋转 20° 、 40° 、 60° 后曲线共轭啮合的状态及位置发生了一定的改变, 接触点始终在啮合线上沿齿宽方向运动。共轭曲线在经过一个传动周期后又能重新啮合, 并且能够满足正确啮合及连续传动条件, 从而实现给定运动规律。

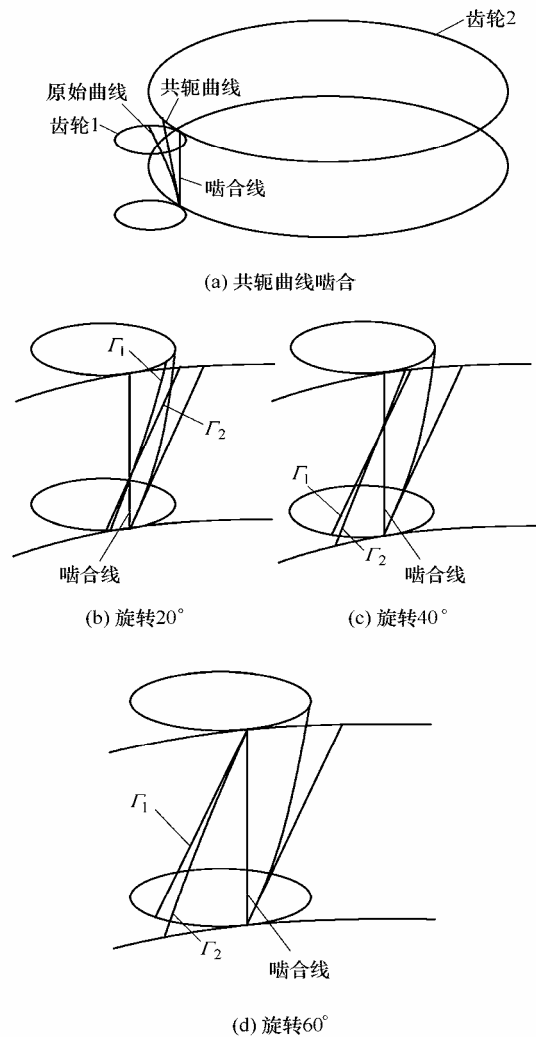


图5 共轭曲线齿轮齿面接触曲线啮合

一对啮合曲面在完成一定运动要求条件下始终保持在各接触点相切, 这对曲面称为共轭曲面^[8]。通过给定曲面 Σ_1 及运动规律, 可以确定出唯一的曲面 Σ_2 与之啮合。上述研究表明, 给定曲线 Γ_1 及运动规律, 可以选取不同接触角从而得到不同方向的共轭曲线 Γ_2 。另外, 共轭曲线的接触特点及选择的灵活性能够实现齿轮共轭啮合的最优设计。

共轭曲线要传递运动和动力必须有与之匹配的齿面及轮齿。就目前而言, 共轭曲面在啮合上存有除节点外均有滑动的现象, 并且少齿数时在齿顶和齿根还存在较大滑动, 很难实现纯滚动接触; 齿面抗弯强度通常允许过载1.5~2.0倍, 不能满足5

倍甚至更高的过载要求；轮齿为凸-凸齿面的接触，接触强度也受限。因此后续将开展齿轮齿面构建新理论与方法的相关研究工作，从而提出新型齿轮传动。本文研究结果对于齿轮齿面构建新理论与方法提供了理论基础，也对新型齿轮传动几何设计、啮合特性分析以及加工制造等具有重要的意义。

4 结 论

(1) 根据微分几何原理，在定义曲线连续相切接触的基础之上提出了一种新的啮合元素——共轭曲线，定义了共轭曲线的概念及曲线共轭接触的基本条件。

(2) 对共轭曲线基本原理进行了数学描述：计算了任意接触角方向法向量；论证了曲线共轭啮合的充要条件，推导了沿给定接触角方向的啮合方程；建立了共轭曲线及啮合线的通用方程。

(3) 以圆柱螺旋线为例，基于 Matlab 分析研究了共轭曲线啮合的一般规律及基本性质。讨论得到了在不同接触角条件下曲线共轭啮合方向也是不同的，但是啮合点始终保持固定不变；并给出了齿面共轭曲线啮合运动的一般情况。

(4) 本文主要对共轭曲线原理进行了研究，显然，共轭曲线要传递运动和动力必须有与之匹配的齿面及轮齿，相关的研究工作将另文探讨。

参 考 文 献

- [1] LUO Shanming, WU Yue, WANG Jian. The generation principle and mathematical models of a novel cosine gear drive[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(12): 1543-1556.
- [2] 陈兵奎, 李海翔. 渐开弧面齿轮的形成原理与数学模型[J]. 机械工程学报, 2012, 48(3): 57-62.
CHEN Bingkui, LI Haixiang. Generation principle and mathematical models of involute-circular gear[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(3): 57-62.
- [3] 陈兵奎, 易文翠, 钟晖, 等. 线面共轭啮合理论及齿面构建方法[J]. 机械工程学报, 2012, 48(19): 17-21.
CHEN Bingkui, YI Wencui, ZHONG Hui, et al. Researches on theory of curve-surface conjugated and method of teeth surfaces constructed[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(19): 17-21.
- [4] LITVIN F L, FUENTES A. Gear geometry and applied theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [5] 陈志新. 共轭曲面原理及其应用[M]. 北京: 中国科学出版社, 2008.
- CHEN Zhixin. Theory of conjugate surfaces and its applications[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2008.
- [6] WU Daren, LUO Jiashun. A geometric theory of conjugate tooth surfaces[M]. Singapore: World Scientific, 1992.
- [7] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 2 版, 北京: 机械工业出版社, 2009.
WU Xutang. Gear geometry and applied theory[M]. 2nd ed, Beijing: China Machine Press, 2009.
- [8] 李瑰贤. 空间几何建模及工程应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
LI Guixian. Spatial geometry modeling and its application in engineering[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007.
- [9] DOONER D B, GRIFFIS M W. On spatial Euler-Savary equations for envelopes[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(8): 865-875.
- [10] PUCCIO F D, GABICINI M, GUIGLIANI M. Generation and curvature analysis of conjugate surfaces via a new approach[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(4): 382-404.
- [11] 唐进元, 周炜, 陈思雨. 齿轮传动啮合接触冲击分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(7): 22-30.
TANG Jinyuan, ZHOU Wei, CHEN Siyu. Contact-impact analysis of gear transmission system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(7): 22-30.
- [12] CHEN C K, CHIOU S T, FONG Z H, et al. Mathematical model of curvature analysis for conjugate surfaces with generalized motion in three dimensions[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2001, 215(4): 487-502.
- [13] CHEN Yangzhi, LIU X, CHETWYND D G, et al. Investigation of a novel elastic-mechanical wheel transmission under light conditions[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(11): 1462-1477.
- [14] LIU Guanglei, FAN Hongwei. Pinion tooth surface generation strategy of spiral bevel gears[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012, 25(4): 753-759.
- [15] WAN Jiafu, LI Di, ZHANG Ping. Key technology of embedded system implementation for software-based CNC system[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012, 23(2): 217-224.

作者简介: 陈兵奎(通信作者), 男, 1966 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为精密传动。

E-mail: bkchen@cqu.edu.cn

梁栋, 男, 1987 年出生, 博士研究生。主要研究方向为新型齿轮传动。

E-mail: liangdong_cqu@163.com

高艳娥, 女, 1985 年出生, 博士研究生。主要研究方向为新型齿轮传动。

E-mail: yanegao@sina.cn