理论力学

第一篇　《静力学》

第二篇　《运动学》

第三篇　《动力学》

理论力学

第二篇 运动学

引　　言

运动学的一些基本概念

①运动学是研究物体在空间位置随时间变化的**几何性质**的科学(包括:轨迹，速度，加速度等)，不考虑运动的原因。

②运动学的任务
- ①建立机械运动的描述方法
- ②建立运动量之间的关系

③运动学学习目的为后续课打基础及直接运用于工程实际。

④运动的相对性（*relativity*）：参考体(物)；

参考系：与参考体固连的坐标系

⑤运动分类　1) 点的运动　2) 刚体的运动

第二篇　《运动学》

第五章　点的运动学

第六章　刚体的简单运动

第七章　点的合成运动

第八章　刚体的平面运动

第五章　点的运动学

§5–1　矢量法

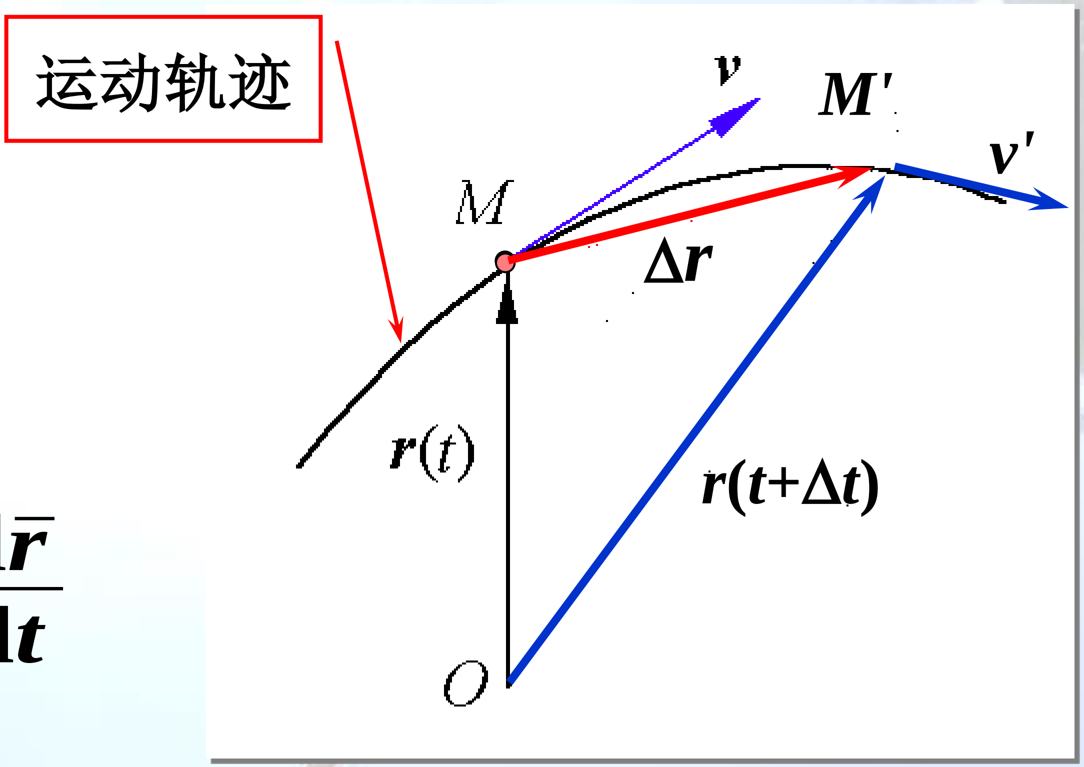
§5–2　直角坐标法

§5–3　自然法

§5-1 矢量法

一、点的运动方程

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

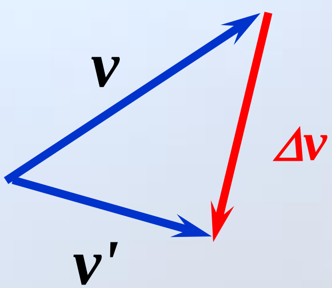


二、点的速度

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

三、点的加速度

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

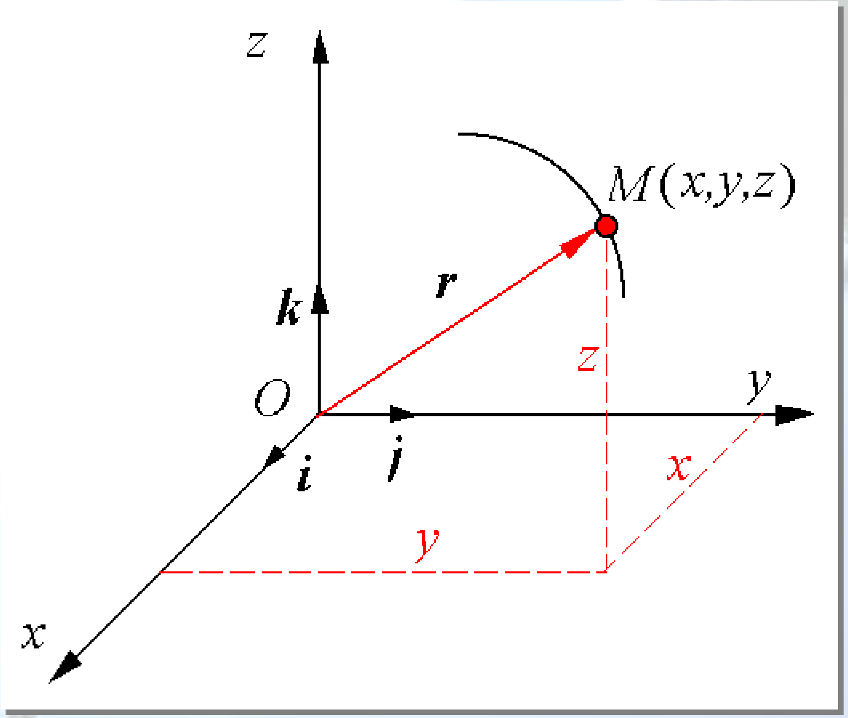


§ 5-2 直角坐标法

一、运动方程

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}}$$



消去时间 t 可得到运动轨迹

二、点的速度

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$$

将速度$\bar{v}$在坐标轴上投影： $\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

速度大小： $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$

速度方向：

$$\cos(\widehat{\bar{v}\bar{i}}) = \frac{v_x}{v} \qquad \cos(\widehat{\bar{v}\bar{j}}) = \frac{v_y}{v} \qquad \cos(\widehat{\bar{v}\bar{k}}) = \frac{v_z}{v}$$

三、点的加速度

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\bar{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\bar{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\bar{k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\bar{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\bar{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\bar{k}$$

将加速度 $\bar{a}$ 在坐标轴上投影：$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度大小： $\therefore a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

加速度方向： $\cos(\widehat{\bar{a}\bar{i}})=\frac{a_x}{a}\quad\cdots$

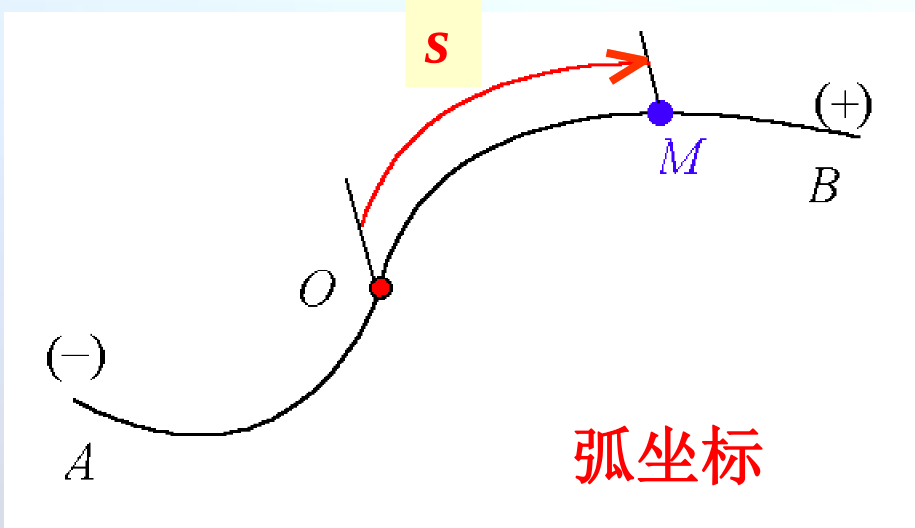
§ 5-3 自然法

利用点的运动轨迹建立弧坐标，用来描述和分析点的运动的方法叫自然法。

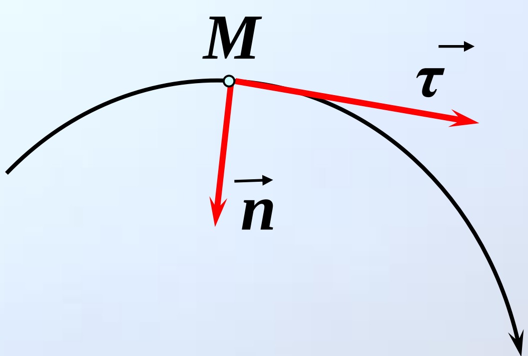
1. 弧坐标

以弧坐标表示的点的运动方程

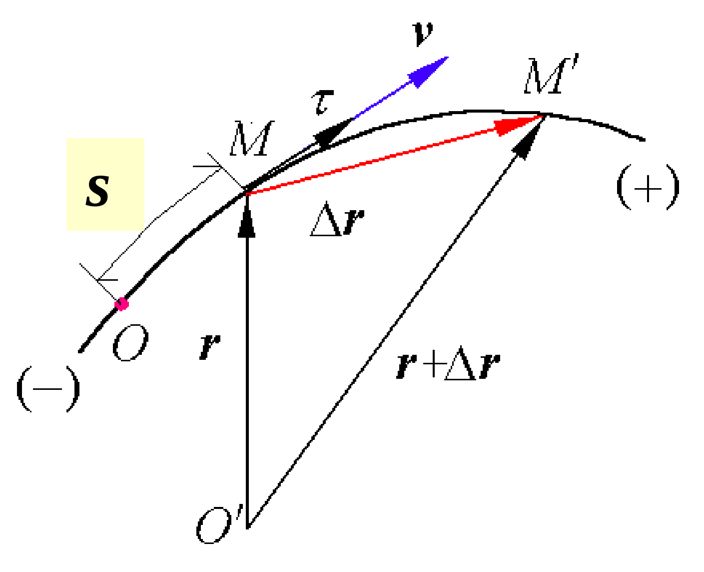
$$s=f\,(t)$$

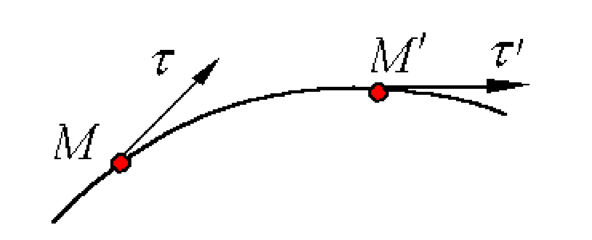


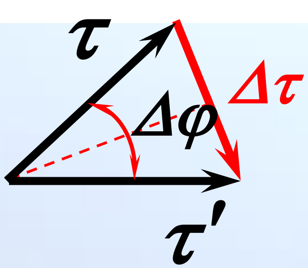
2. 自然轴系



自然轴系







$$\Delta\tau = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \Delta\varphi$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

3.点的速度

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \bar{v} = v\bar{\tau} = \frac{ds}{dt}\bar{\tau}$$

4.点的加速度

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\bar{\tau}) = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{dt}$$

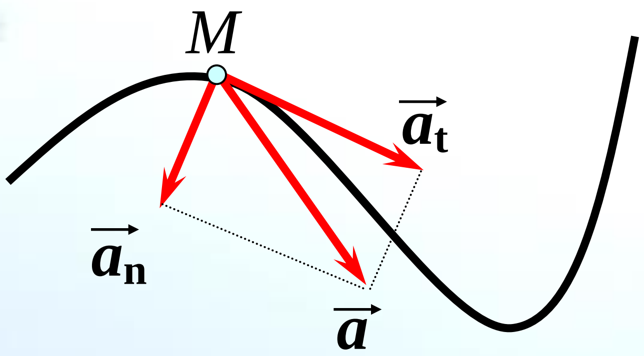
①切向加速度 ----表示速度大小的变化

$$\bar{a}_t = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\bar{\tau}$$

②法向加速度 -----表示速度方向的变化

$$\bar{a}_n = v\frac{d\bar{\tau}}{dt} = v\frac{ds}{dt}\frac{d\bar{\tau}}{ds} = v\cdot v\frac{1}{\rho}\bar{n} = \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$$

$$\therefore\ \bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n = a_t \bar{\tau} + a_n \bar{n}$$



$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

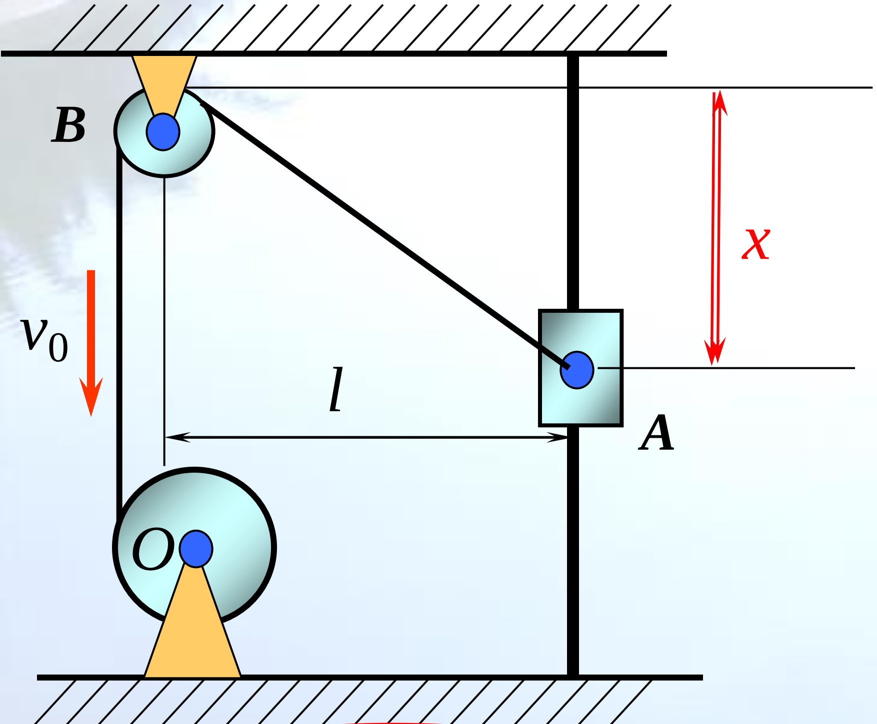
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

$$\alpha = \arctan\frac{|a_t|}{a_n}$$

【题5-5】(P154)

已知 v_0（常数），求滑块A的速度和加速度与距离x的关系式。



解：设 $t=0$ 时，$AB=a$

则任意 t 时刻

$$x^2 + l^2 = (a - v_0 t)^2$$

等式两边同时对时间t求导：

$$\cancel{2}x\cdot\dot{x} = -\cancel{2}(a-v_0t)\cdot v_0 \quad \text{——（1）}$$

$$\dot{x} = -\frac{(a-v_0t)\cdot v_0}{x}$$

$$= -\frac{v_0}{x}\sqrt{x^2+l^2}$$

$$(a-v_0t) = \sqrt{x^2+l^2}$$

对（1）式两边求导：$\dot{x}\cdot\dot{x} + x\cdot\ddot{x} = v_0^2$

$$\ddot{x}=\frac{v_0{}^2-\dot{x}^2}{x}$$

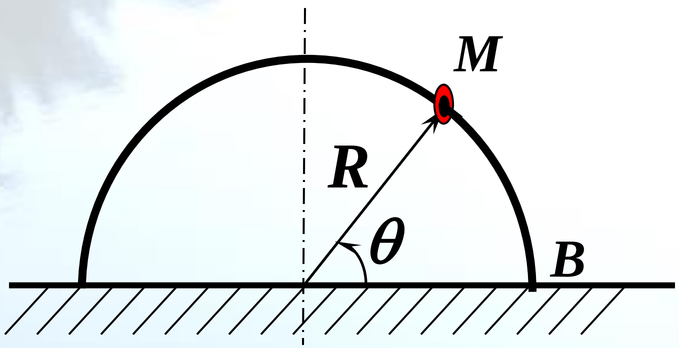
$$\dot{x}=-\frac{v_0}{x}\sqrt{x^2+l^2}$$

$$=\frac{v_0{}^2-\frac{v_0^2}{x^2}(x^2+l^2)}{x}$$

$$=-\frac{v_0^2 l^2}{x^3}$$

对（1）式两边求导：$\dot{x}\cdot\dot{x}+x\cdot\ddot{x}=v_0^2$

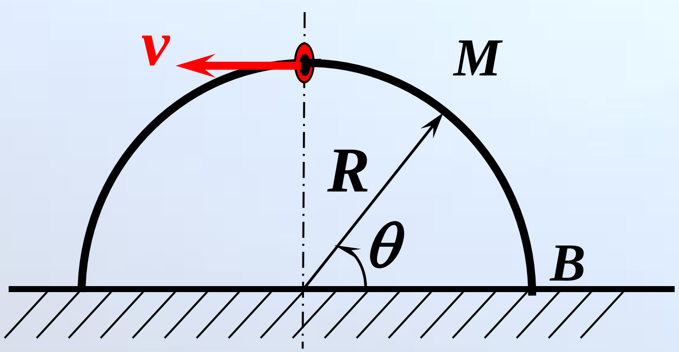
［例］已知动点M沿圆弧运动，B为起点， R=18cm，运动规律为$s=\pi t^2$ cm， 求：t=3s时动点M的位置、速度和加速度。

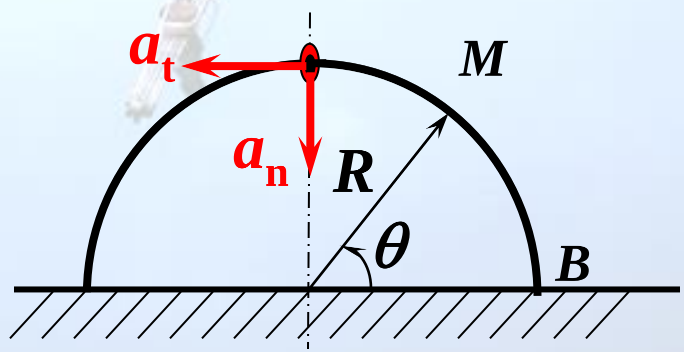


解： t =3s 时，s=9π cm

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{\pi}{2}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=6\pi \quad \text{cm/s}$$

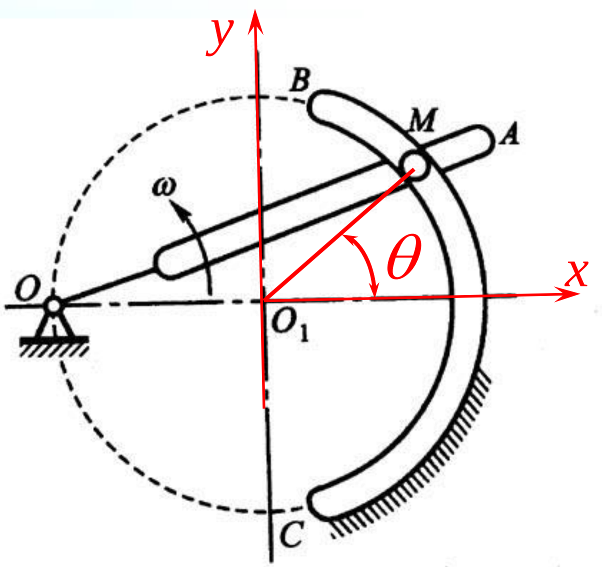




$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}$$

［题5-7］已知滑块*M*沿圆弧*BC*和摇杆*OA*运动，摇杆绕*O*以等角速度ω转动，当运动开始时摇杆在水平位置，圆弧*BC*的半径为 *R*。分别用直角坐标法和自然法给出点*M*的速度和加速度。



题 6－7 图

$$\boxed{\theta = 2(\omega t)}$$

直角坐标法：

$$x = R\cos\theta = R\cos 2\omega t$$

$$y = R\sin\theta = R\sin 2\omega t$$

$$\dot{x} = -2R\omega\sin 2\omega t$$

$$\dot{y} = 2R\omega\cos 2\omega t$$

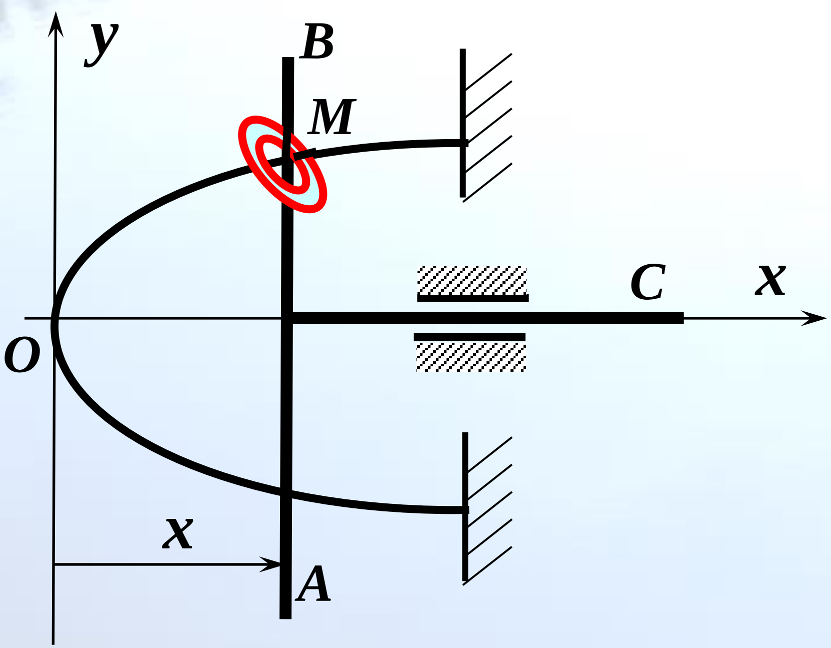
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2R\omega$$

自然法：

$$s = R\theta = 2R\omega t$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2R\omega$$

［题5-11］杆*ABC*以速度*v*=常数向左运动，曲线轨道的曲线方程为$y^2=2px$，求：环*M*的速度和加速度的大小（以*x*的函数表示）。



解：$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-v$$

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$yv_y=pv_x$$

$$\therefore\quad v_y=\frac{pv_x}{y}$$

$$v_M=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=v\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2px)$$

$$v_y^2+ya_y=0$$

$$a_y=-\frac{v_y^2}{y}$$

$$a_M=a_y=-\frac{v_y^2}{y}=-\frac{v^2}{4x}\sqrt{\frac{2p}{x}}$$


第五章结束