

第九章 平面机构的力分析

§ 9-1 机构力分析的目的和方法

一、作用在机械上的力

作用在机械构件上的力常见到的有：**驱动力**、**阻力**（有效阻力、有害阻力）、**重力**、**惯性力**和**运动副中的反力**。

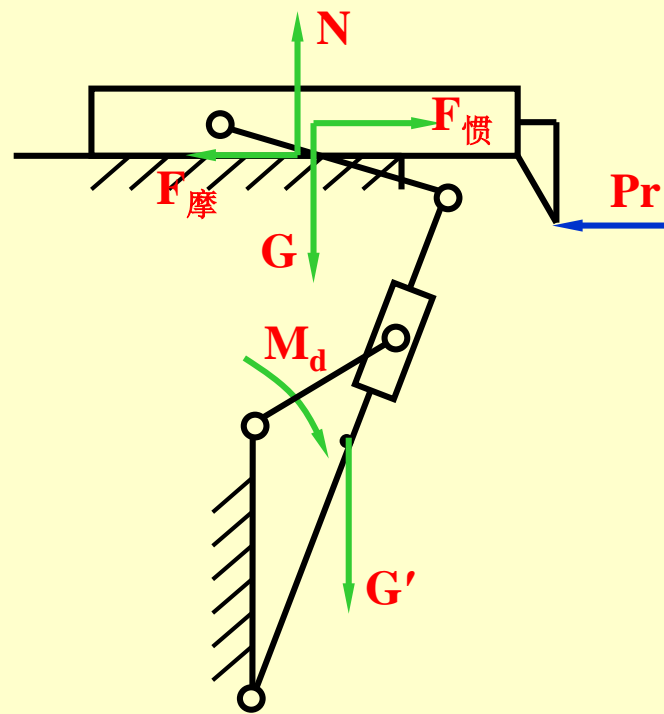
从做功的角度可分为：

◆ **驱动力**：驱使机构产生运动的力

特点：与作用点的速度方向相同、

或成锐角——作正功——驱动功、输入功。

包括：原动力、重力（重心下降）、惯性力（减速）等。



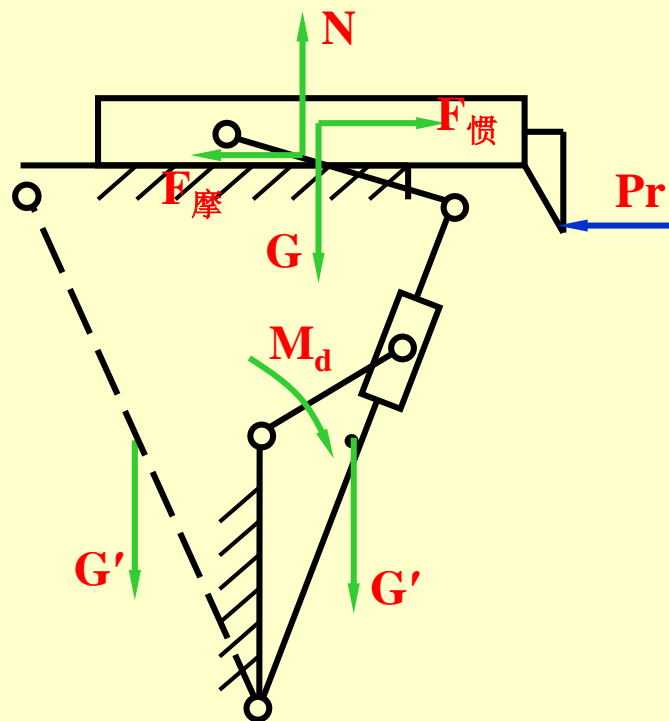
◆ 阻力：阻碍机构产生运动的力

特点：与作用点的速度方向相反、或成钝角——作负功——阻抗功。

包括：生产阻力、摩擦力、重力(重心上升)、惯性力(加速)等。可分为两种：

有效阻力(生产阻力)：执行构件面对的、机械的目的实现。克服此阻力所做的功称为**有效功**或**输出功**。

有害阻力：机械运动过程中的无用阻力。克服此阻力所做的功称为**损耗功**。

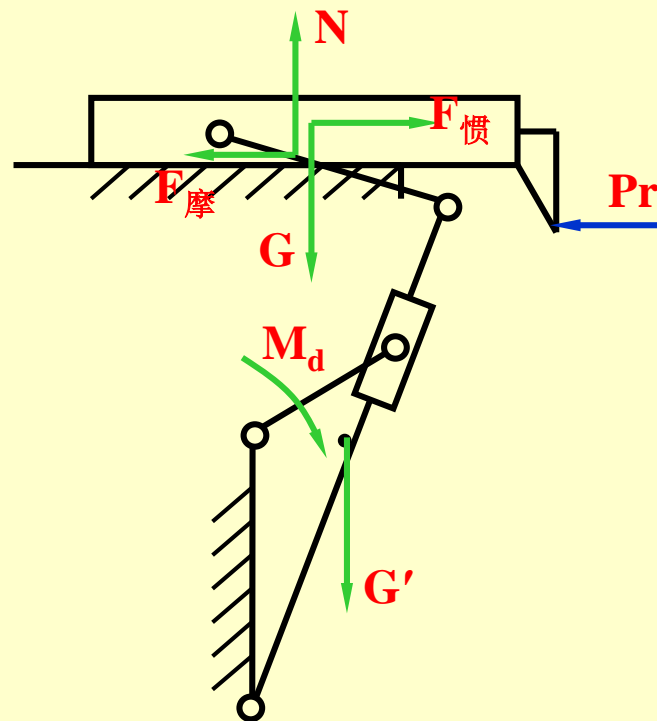


二、任务与目的

1. 确定运动副中的反力

特点：对整个机械来说是内力；
对构件来说则是外力。

目的：计算构件的强度、运动副中的摩擦、磨损；确定机械的效率；研究机械的动力性能。



2. 确定机械上的平衡力(或平衡力偶)

定义：为使机构做持续的预期运动，与作用在机械上的已知外力（包括惯性力）相平衡的未知外力(或外力矩)。

目的：确定机器所需的驱动功率或能承受的最大负荷。

三、方法

静力分析（不计惯性力）和动态静力分析。

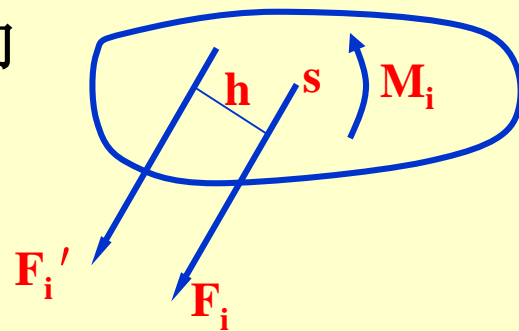
图解法和解析法。

§ 9-2 构件惯性力的确定

一、一般力学方法

由理论力学知：惯性力可以最终简化为一个加于构件重心S处的惯性力 \vec{F}_i 和一个惯性力矩 M_i ；即

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -m\vec{a}_s \\ M_i = -J_s\epsilon \end{cases}$$



而这惯性力 \vec{F}_i 和 M_i 又可用一个大小等于 \vec{F}_i 的总惯性力 \vec{F}_i' 代替；其偏离距离为 $h = M_i / F_i$ 。

1. 作平面移动的构件

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -m\vec{a}_s \quad (a_s=0 \text{ 或 } a_s \neq 0) \\ M_i = 0 \end{cases}$$

2. 绕定轴转动的构件

a. 回转轴线通过构件质心。

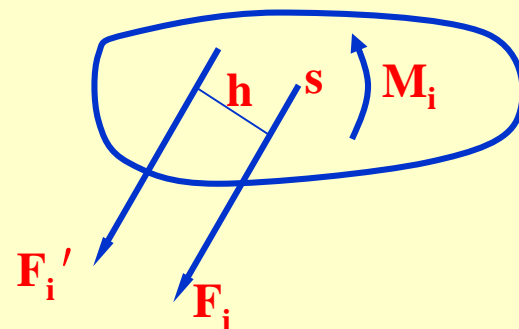
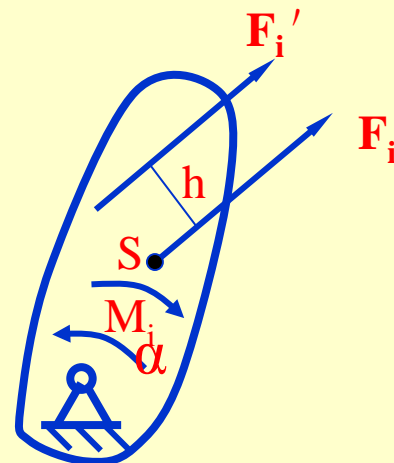
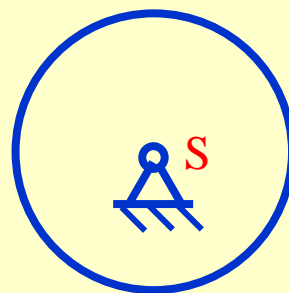
$$\begin{cases} \vec{F}_i = 0 \\ M_i = -J_s \alpha \quad (\alpha=0 \text{ 或 } \alpha \neq 0) \end{cases}$$

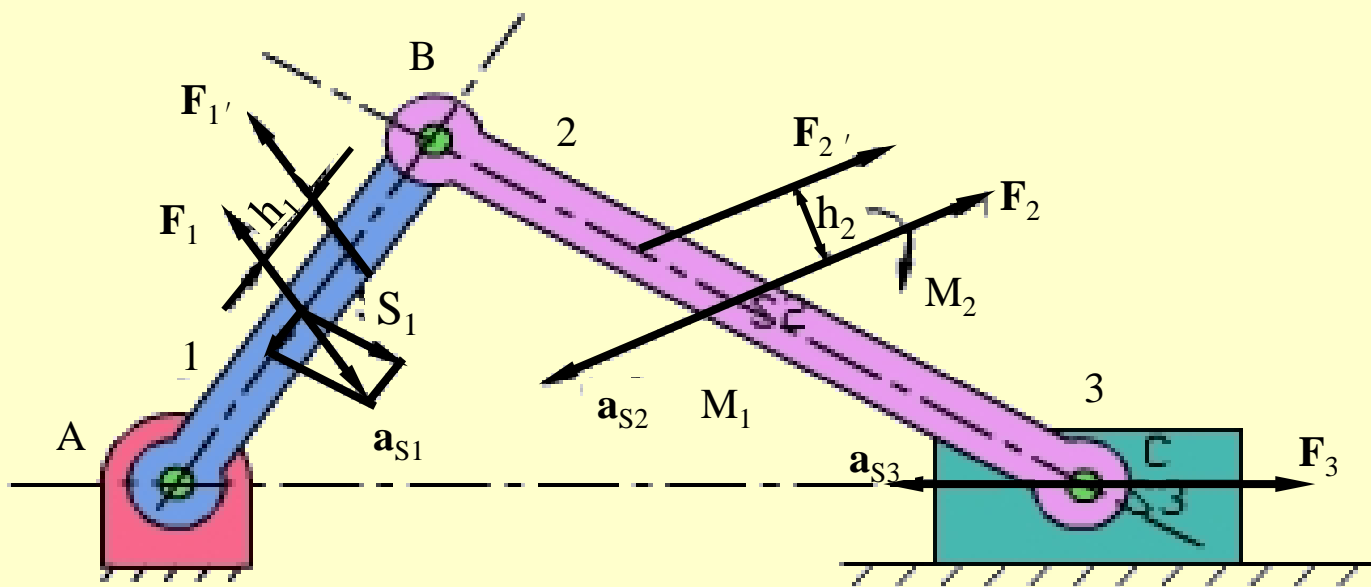
b. 回转轴线不通过质心。

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -m \vec{a}_s \\ M_i = -J_s \alpha \end{cases} \quad \text{其中: } h = M_i / F_i$$

3. 作平面复合运动的构件

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -m \vec{a}_s \\ M_i = -J_s \varepsilon \end{cases} \quad \text{其中: } h = M_i / F_i$$





曲柄滑块机构的一般力学受力分析

二、质量代换法

1. 基本概念

设想把构件的质量，按一定条件用集中于构件上某几个选定点的假想集中质量来代替。

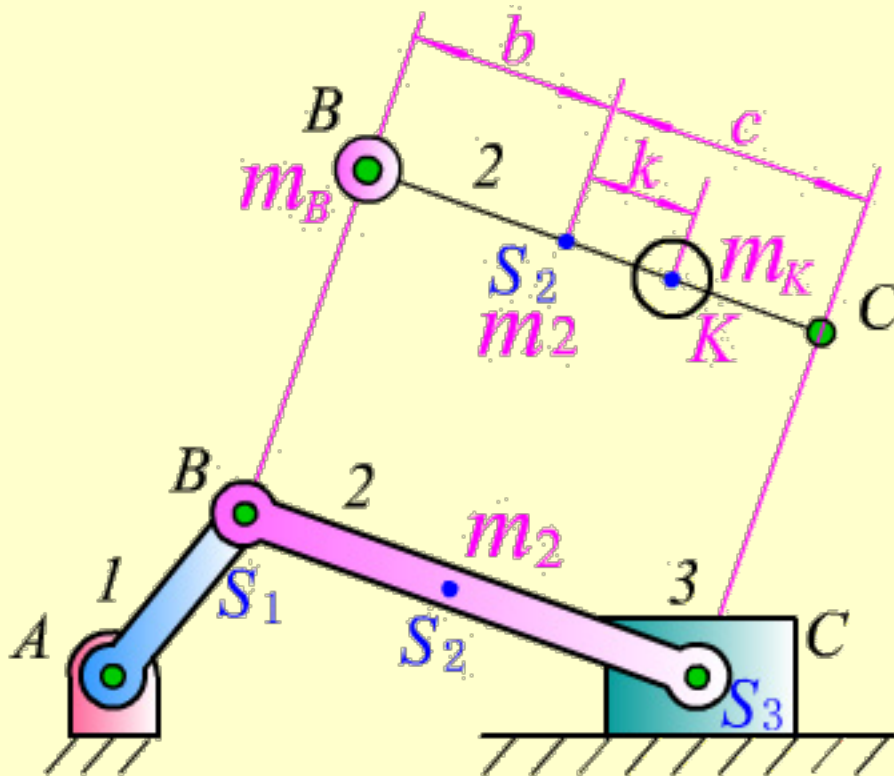
假想的集中质量称为**代换质量**，代换质量所在的位置称为**代换点**。

2. 质量代换的等效条件

a. 代换前后构件的质量不变； $\sum_{i=1}^n m_i = m$

b. 代换前后构件的质心位置不变； $\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0 \end{cases}$

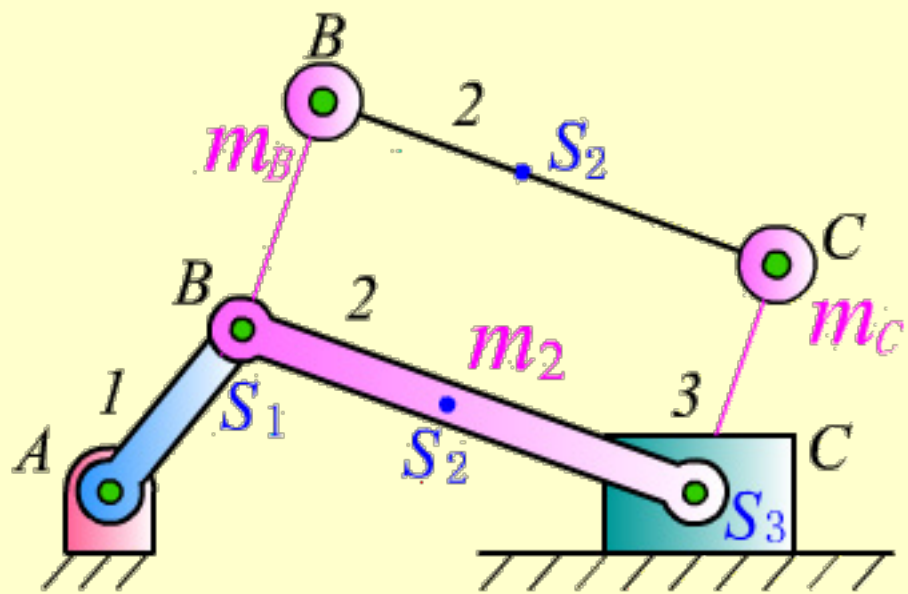
c. 换前后构件对质心轴的转动惯量不变。 $\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = 0$



3. 质量代换法

a. **动代换**。同时满足上述三个代换条件的质量代换。对连杆有：

$$\begin{cases} m_B + m_K = m_2 \\ m_B b = m_K k \\ m_B b^2 + m_K k^2 = J_{s2} \end{cases}$$



b. **静代换**。只满足上述前两个代换条件的质量代换。(忽略惯性力矩的影响)

$$\begin{cases} m_B = m_2 c / (b + c) \\ m_C = m_2 b / (b + c) \end{cases}$$

§ 9-3 运动副中摩擦(Friction)力分析

附加：

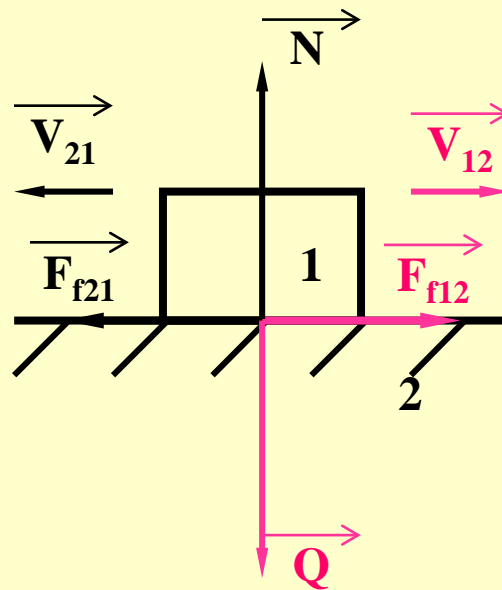
1. 摩擦的分类

- a. 干摩擦
- b. 液体摩擦
- c. 半液体摩擦

2. 库仑定律(摩擦定律)

简要内容：

- a. $F_f = f N$
- b. $f_{\text{静}} > f_{\text{动}}$
- c. 摩擦系数的值与两物体间的接触表面材料和形状有关，与接触面积的大小及两物体间的相对速度的关系很小。



一、移动副中的摩擦

1. 平面移动副的摩擦

于是有： $\text{tg}\beta = F_x / F_y$

F_x —有效分力

F_y —有害分力

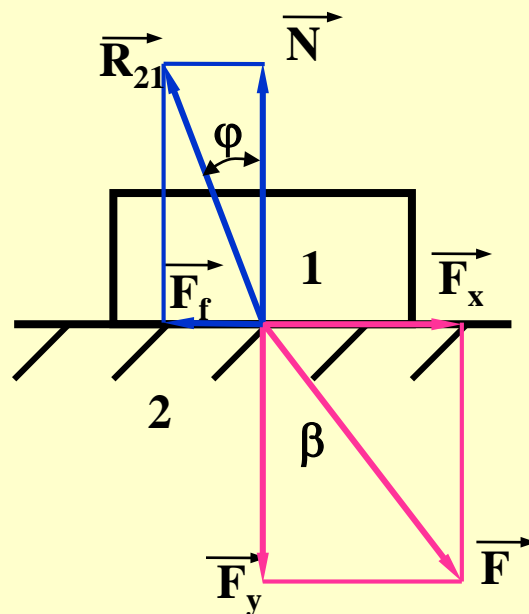
而： $N = -F_y$

$F_f = f N$

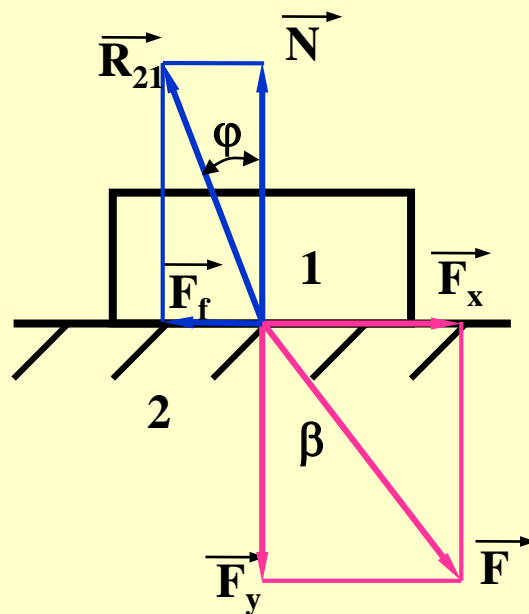
R —**总反力**，正压力与摩擦力的矢量和； R 与 N 之间夹角用 φ 表示，称作**摩擦角**(Frictional Angle)。

结论：

- (1) 摩擦角与摩擦系数一一对应， $\varphi = \text{arctg}f$ ；
- (2) **总反力**永远与运动方向成 $90^\circ + \varphi$ 角。



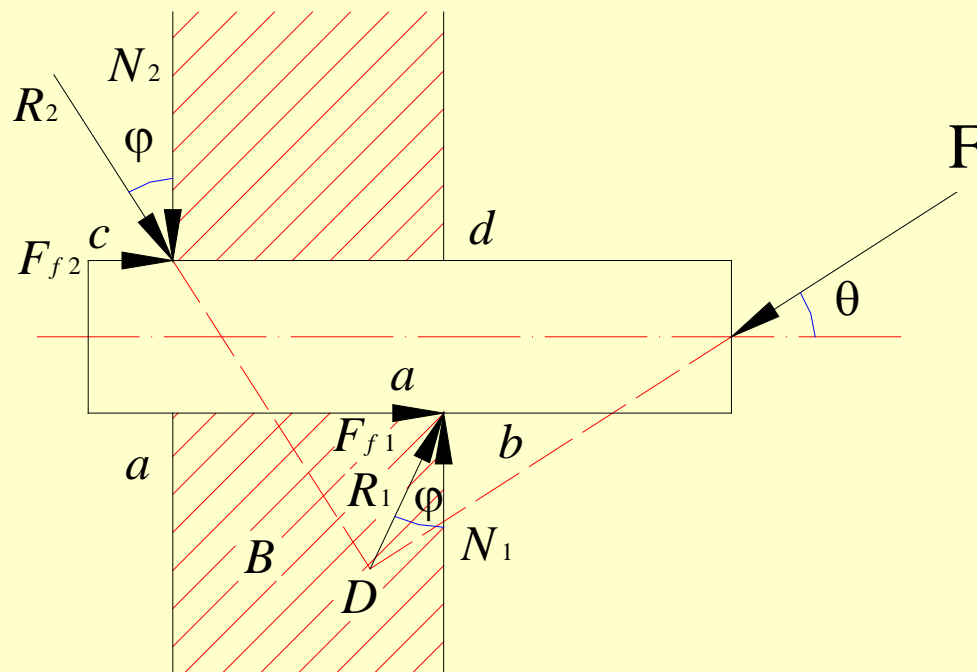
$$F_f = F_x \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \beta}$$



- 1) 当 $\beta > \varphi$ 时, $F_f < F_x$, 滑块作加速运动。
- 2) 当 $\beta = \varphi$ 时, $F_f = F_x$, 滑块作匀速运动(若1原来就在运动)或者静止不动(若1原来就不动)。
- 3) 当 $\beta < \varphi$ 时, $F_f > F_x$, 若滑块原来就在运动, 则作减速运动直至静止不动; 如滑块原来就不动, 则无论外力 F 的大小如何, 滑块都不能运动。这种不管驱动力多大, 由于摩擦力的作用而使机构不能运动的现象称为自锁。

F作用线位于接触面之外，确定 R_{BA}

如果材料很硬，可近似认为两反力集中在b、c两点



例9-1 图示钻床摇臂中，滑套长度为 l 、它和主轴之间的摩擦系数 f 。摇臂在其本身重量 G 作用下不应自动滑下，求其质心 S 至立轴之间的距离 h 。

$$N_1 = N_2 = N \quad \text{则} \quad F_{f1} = fN = F_{f2} = F_f$$

$$\text{又据} \quad \sum M_O = 0$$

$$\text{得} \quad Gh = Nl$$

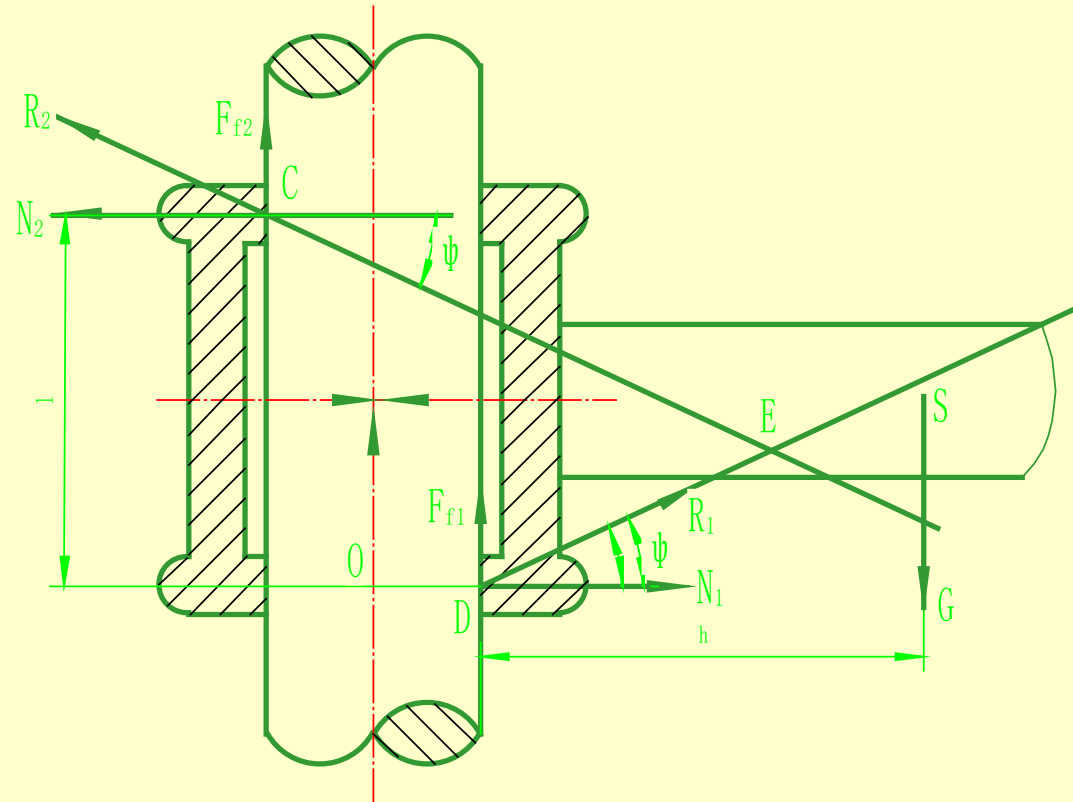
欲使摇臂不自动下滑，必须满足

$$G < 2F_f$$

联解上三式得

$$h > \frac{l}{2f}$$

$$\text{即} \quad h > \frac{l}{2tg\varphi}$$



S应位于E点的右边

例9-1 图示钻床摇臂中，滑套长度为 l 、它和主轴之间的摩擦系数 f 。摇臂在其本身重量 G 作用下不应自动滑下，求其质心 S 至立轴之间的距离 h 。

$$N_1 = N_2 = N \quad \text{则} \quad F_{f1} = fN = F_{f2} = F_f$$

$$\text{又据} \quad \sum M_O = 0$$

$$\text{得} \quad Gh = Nl$$

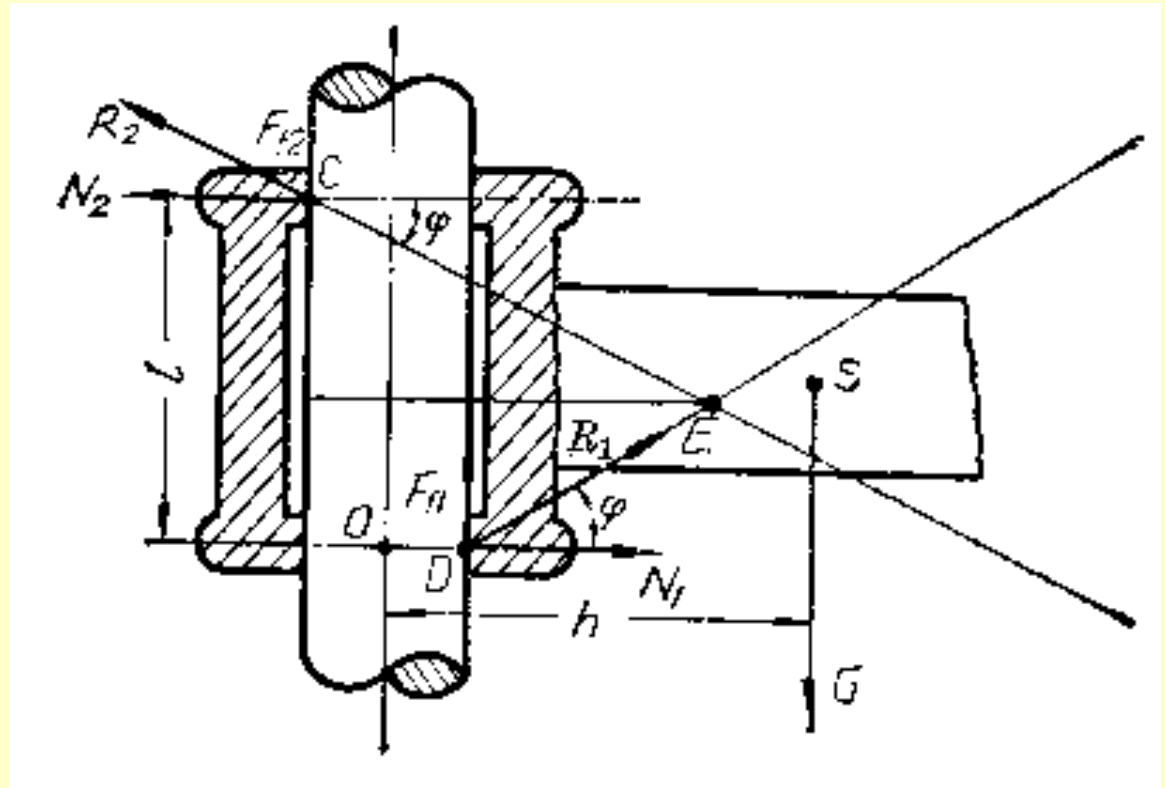
欲使摇臂不自动下滑，必须满足

$$G < 2F_f$$

联解上三式得

$$h > \frac{l}{2f}$$

$$\text{即} \quad h > \frac{l}{2tg\varphi}$$



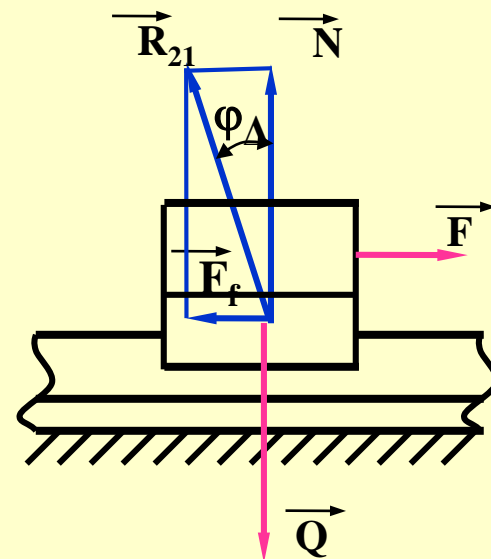
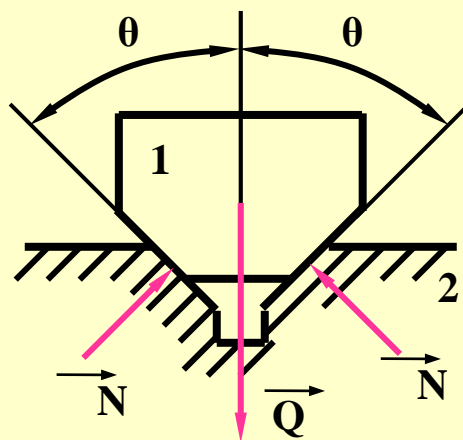
S 应位于 E 点的右边

2. 楔形面移动副摩擦

以滑块作为受力

体，有 $F_f = f N$

所以， $F = 2F_f = 2f N$



因为： $Q = 2N \sin \theta$ ，即 $N = Q / (2 \sin \theta)$

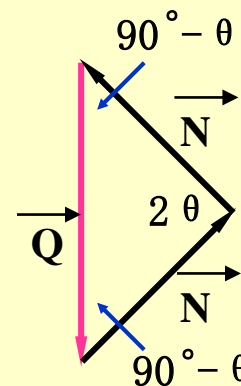
所以： $F = 2F_f = 2f N = Q * f / \sin \theta$

令： $f_\Delta = f / \sin \theta$ 有 $F = Q * f_\Delta$

f_Δ ——当量摩擦系数

讨论：

- (1) 概念的引入，将楔形摩擦转换成平面摩擦；
- (2) $f_\Delta > f$ ；作锁止用。

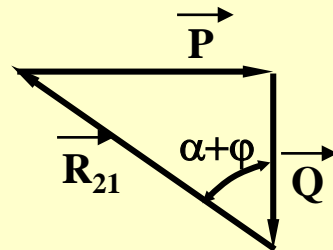
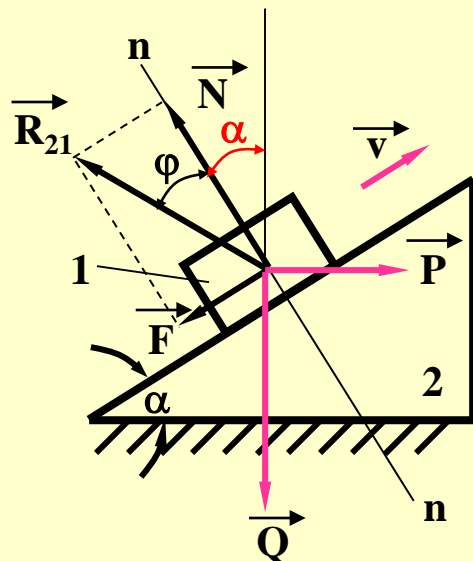


3. 斜面摩擦

a. 等速上升

物体平衡: $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} =$

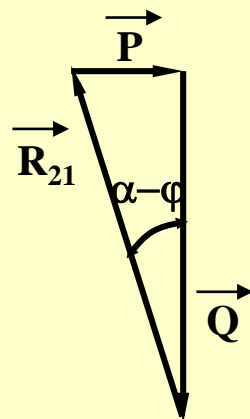
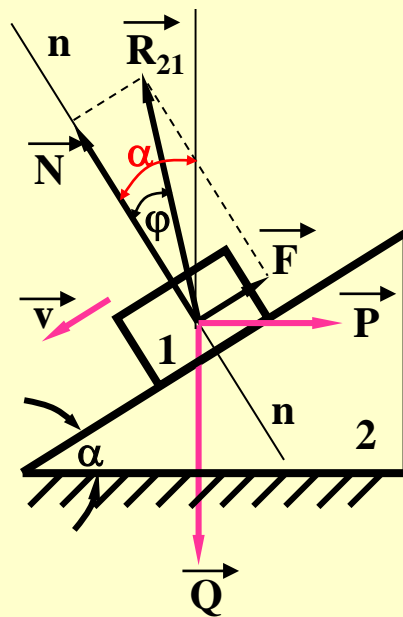
所以有: $P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$



b. 等速下降

物体平衡: $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} =$

所以有: $P = Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$



4. 螺旋副摩擦

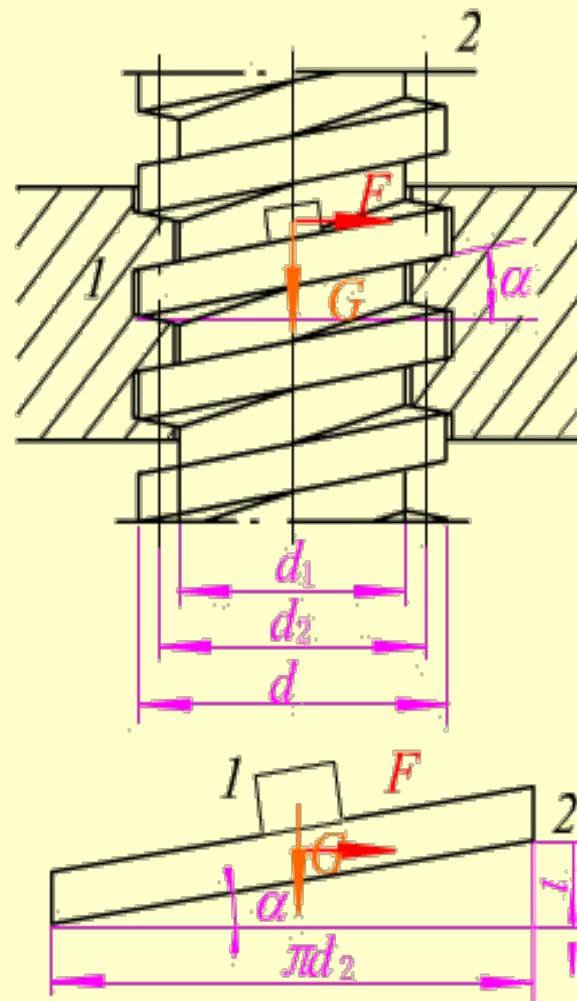
螺母1在铅垂载荷G和力矩M的共同作用下等速轴向运动。

拧紧螺母时：

$$M = Fd_2/2 = Gd_2 \tan(\alpha + \varphi)/2$$

放松螺母时：

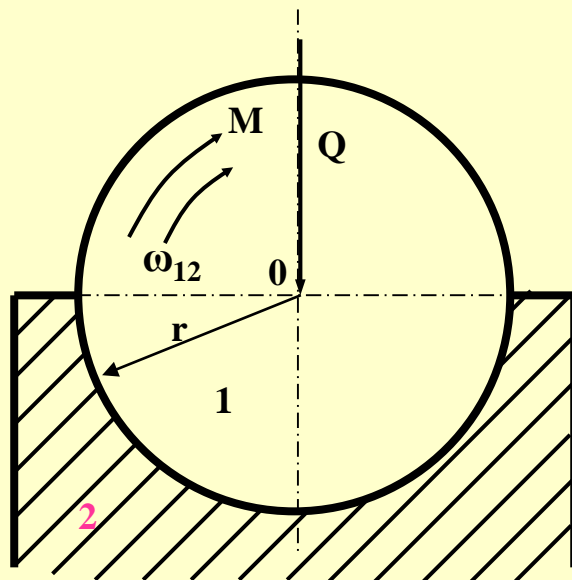
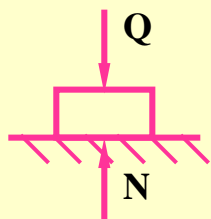
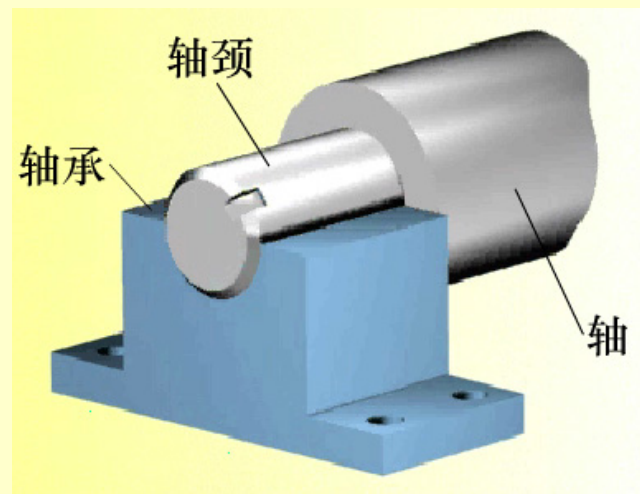
$$M' = Gd_2 \tan(\alpha - \varphi)/2$$



二. 转动副中的摩擦力

1. 径向轴颈的摩擦

设 r 为轴颈半径， Q 为铅垂径向载荷， M 为驱动力矩。



$$R_{21} = \sqrt{N^2 + F_f^2} = \sqrt{N^2 + (fN)^2} = \sqrt{1 + f^2} N$$

$$\therefore N = \frac{R_{21}}{\sqrt{1 + f^2}}$$

摩擦矩:

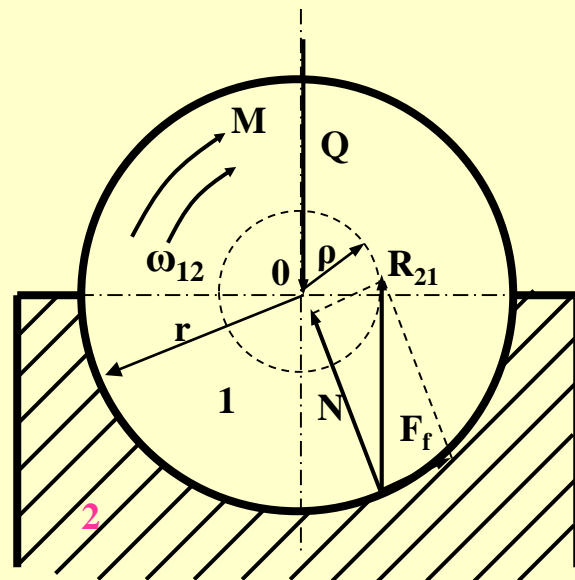
$$M_f = F_f r = fNr = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} r R_{21}$$

由平衡条件: $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{Q}$ 和 $M_f = R_{21} \rho$

得:

$$\rho = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} r = f_0 r$$

且 $M_f = R_{21} f_0 r = Q f_0 r$



$$f_0 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \quad \text{— 径向轴颈转动副的当量摩擦系数}$$

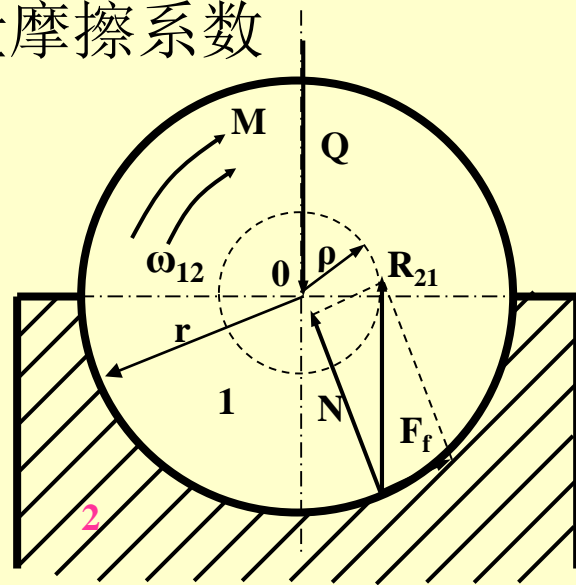
（该式当1、2间存在间隙时成立）

若1、2间没有间隙：

对于1、2间没有磨损或

磨损极少的非跑合者， $f_0 = 1.57f$

对于接触面经过一段时间的运转，其表面被磨成平滑，接触更加完善的跑合者， $f_0 = 1.27f$

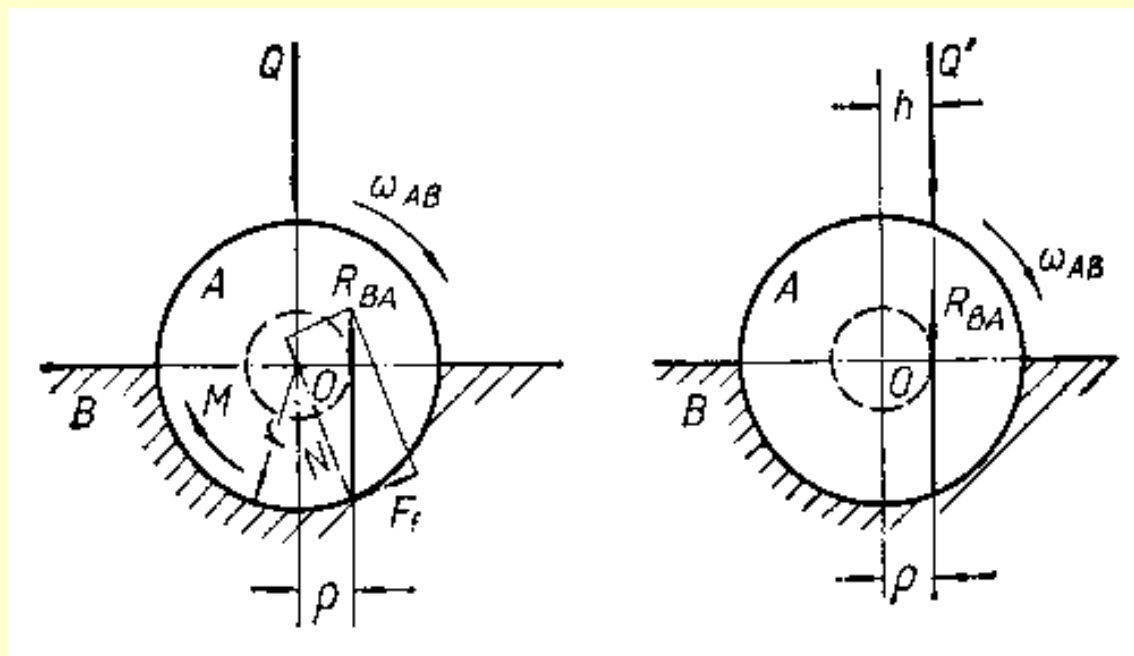


结论：

A. 总反力始终切于摩擦圆；

B. 总反力方向与作用点速度方向相反。

$$h = \frac{M}{Q}$$

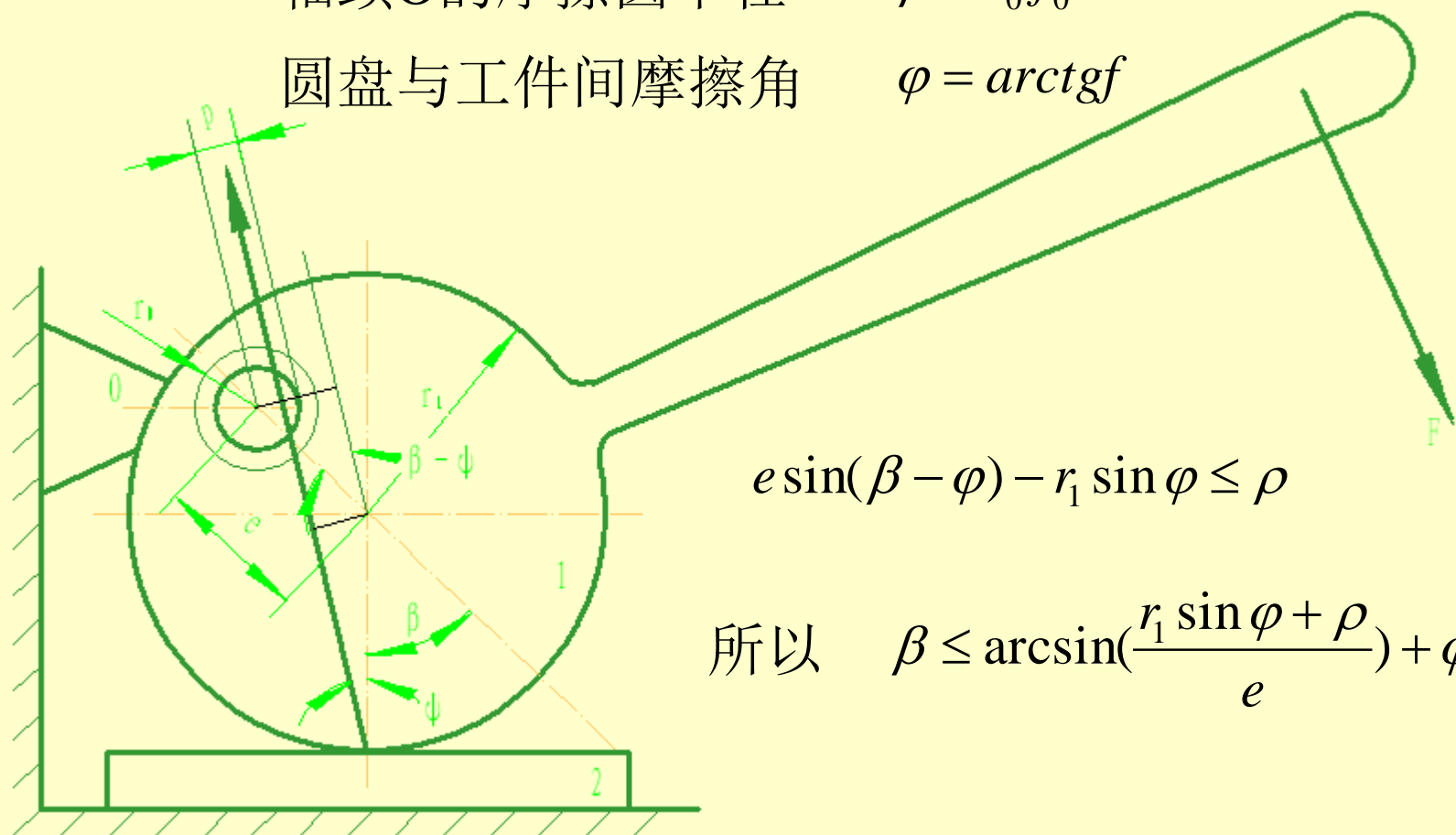


- 1) 当 $h > \rho$ 时, Q' 在摩擦圆外, $M_f < M$, 轴颈 A 作加速转动。
- 2) 当 $h = \rho$ 时, Q' 与摩擦圆相切, $M_f = M$, A 作匀速转动(若 A 原来就在转动)或者静止不动(若 A 原来就不动)。
- 3) 当 $h < \rho$ 时, Q' 与摩擦圆相割, $M_f > M$, 若 A 原来就在运动, 则作减速运动直至静止不动; 如 A 原来就不动, 则无论 Q' 大小如何, A 都不能转动。这就是自锁现象。

例9-2 图示偏心夹具中，已知轴颈O的半径 r_0 、当量摩擦系数 f_0 、偏心距 e 、偏心圆盘1的半径 r_1 以及它与工件2之间的摩擦系数 f ，求不加力 F 仍能夹紧工件时的楔紧角 β 。

轴颈O的摩擦圆半径 $\rho = r_0 f_0$

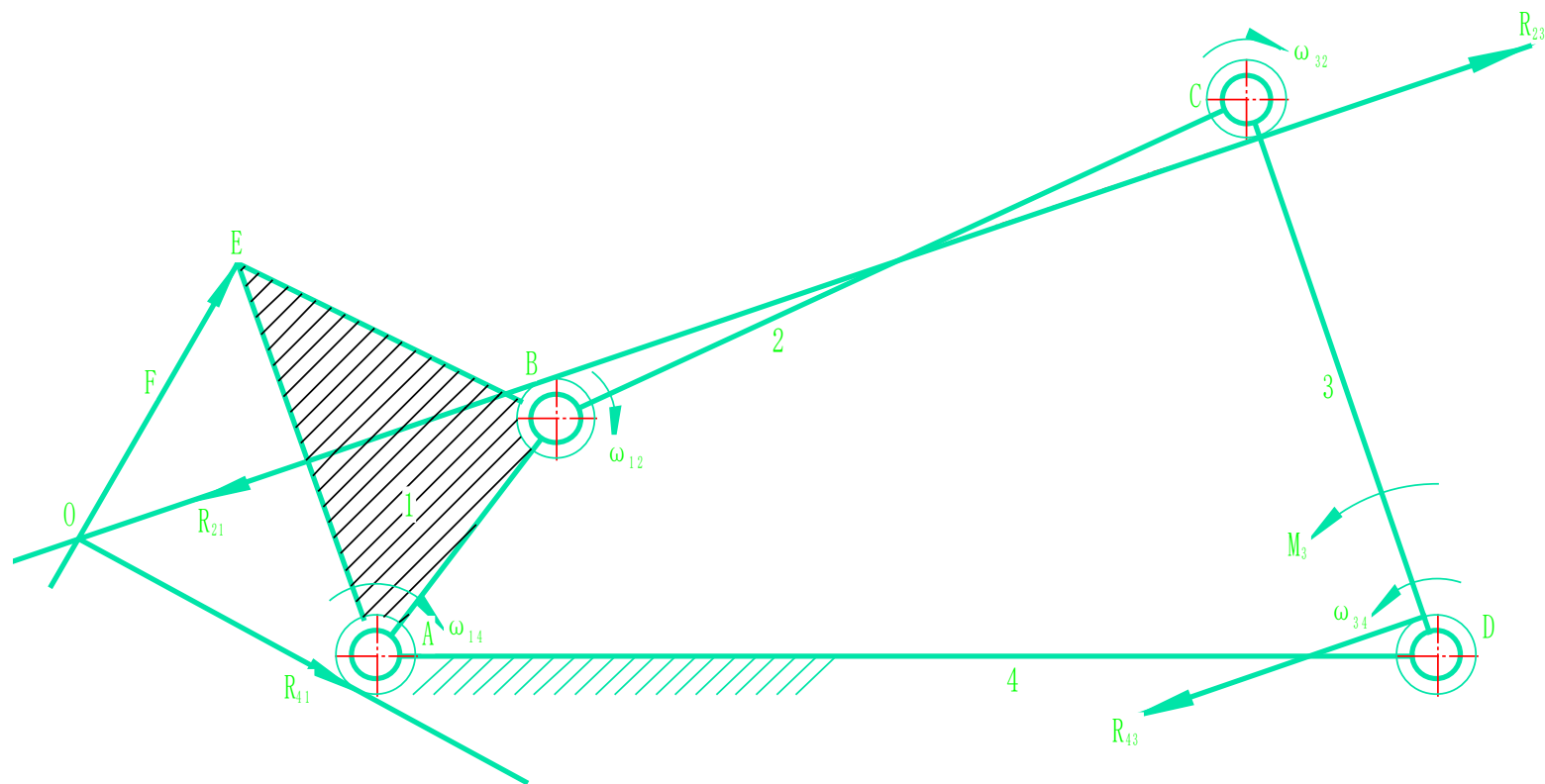
圆盘与工件间摩擦角 $\varphi = \arctan f$



$$e \sin(\beta - \varphi) - r_1 \sin \varphi \leq \rho$$

所以
$$\beta \leq \arcsin\left(\frac{r_1 \sin \varphi + \rho}{e}\right) + \varphi$$

例9-3 图中，已知机构位置、各构件尺寸，各转动副半径和当量摩擦系数均为 r 和 f 。不计重力和惯性力，求各转动副中反作用力方向和作用点并求作用在构件3上的阻力偶矩 M_3 。



2. 止推轴颈的摩擦

$$M_f = fQr'$$

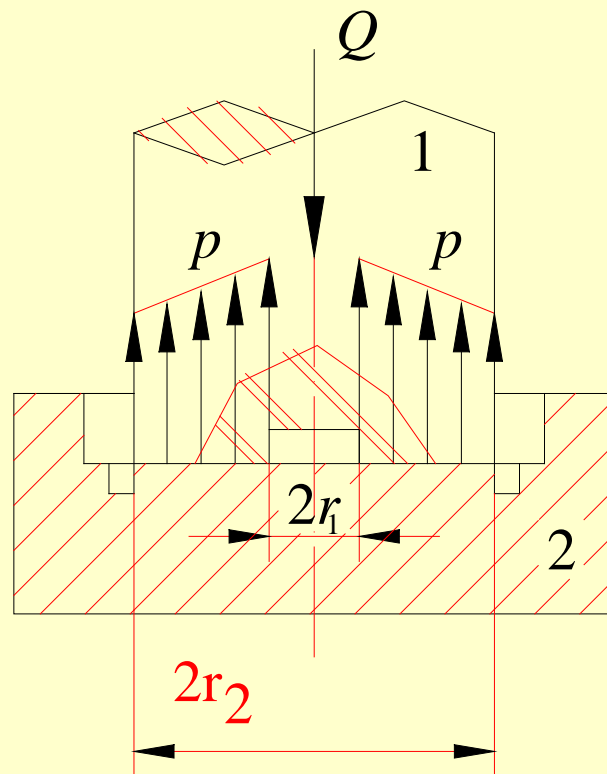
r' ——当量摩擦半径

非跑合:

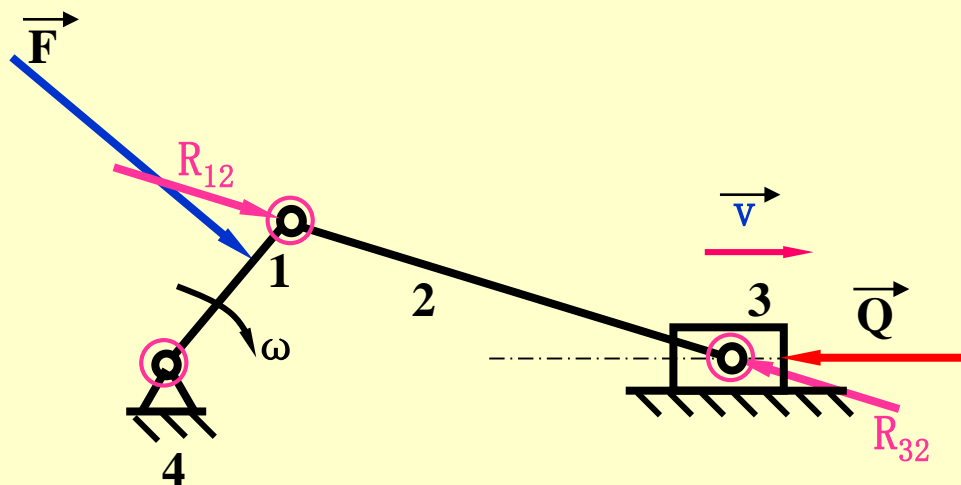
$$r' = \frac{2}{3} \left(\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right)$$

跑合:

$$r' = \frac{r_1 + r_2}{2}$$



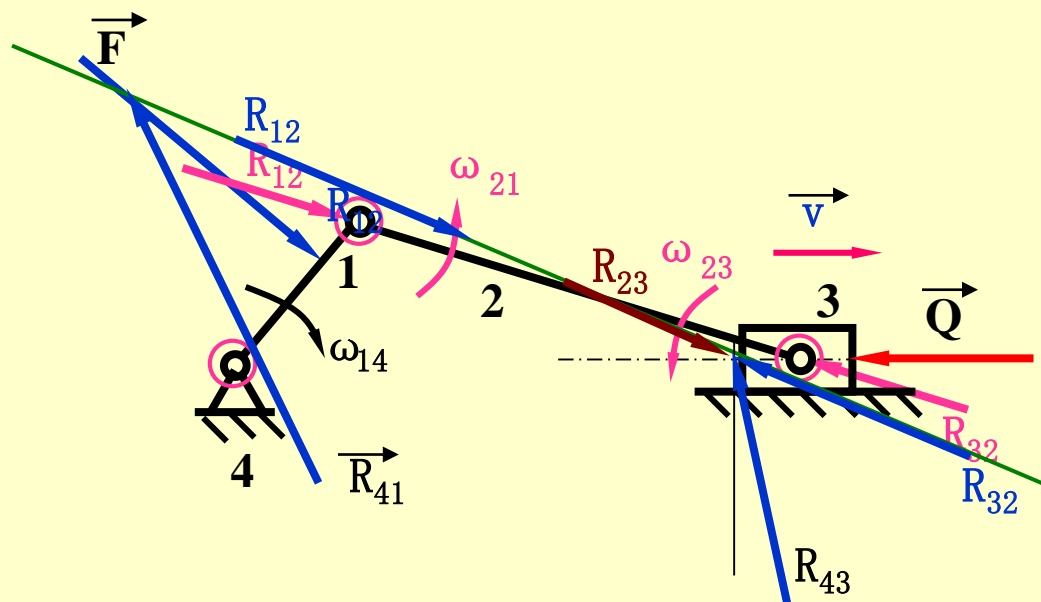
例9-4：如图所示为一曲柄滑块机构。已知 ω_1 转向， Q 为作用于滑块上的阻力，驱动力 F 作用点位置、方向已知。不计各构件质量、惯性力。求各支反力及 F 的大小。



解题步骤：

- (1) 判定连杆是受拉或受压；
- (2) 判定构件间的相对转向；
- (3) 判定作用力在摩擦圆上切点位置；
- (4) 依据力平衡条件求解。

(2) 判定构件间的相对转向；

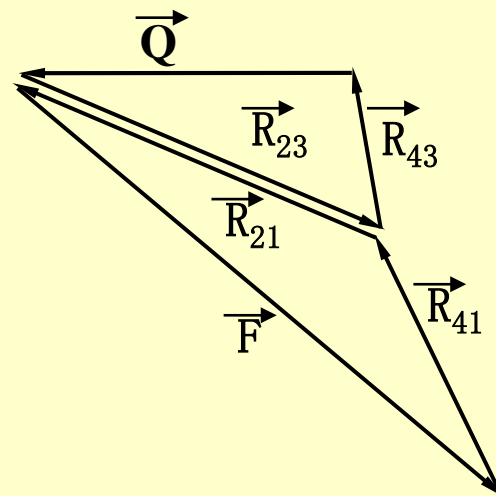


(3) 判定作用力在摩擦圆上切点位置；

(4) 依据力平衡条件求解。

$$\text{对构件3: } \vec{Q} + \vec{R}_{23} + \vec{R}_{43} = 0$$

$$\text{对构件1: } \vec{R}_{21} + \vec{R}_{41} + \vec{F} = 0$$



§ 9-4 不考虑摩擦力的机构力分析

一、计算理论：动态静力法

（根据达朗贝尔原理，假想地将惯性力加在产生该力的构件上，构件在惯性力和其他外力的作用下，认为是处于平衡状态，因此可以用静力计算的方法进行计算）

二、分析步骤

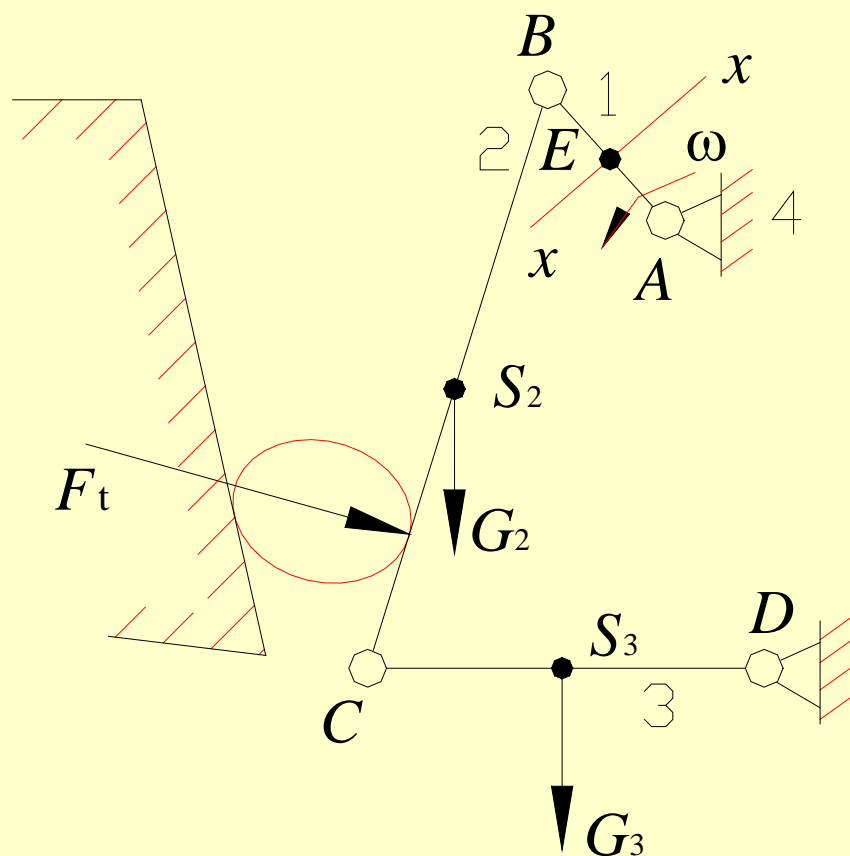
- 1、运动分析（假设原动件匀速运动）
- 2、计算惯性力
- 3、考虑反力、惯性力、重力、驱动力、生产阻力的平衡
- 4、解方程（图解法，力多边形）

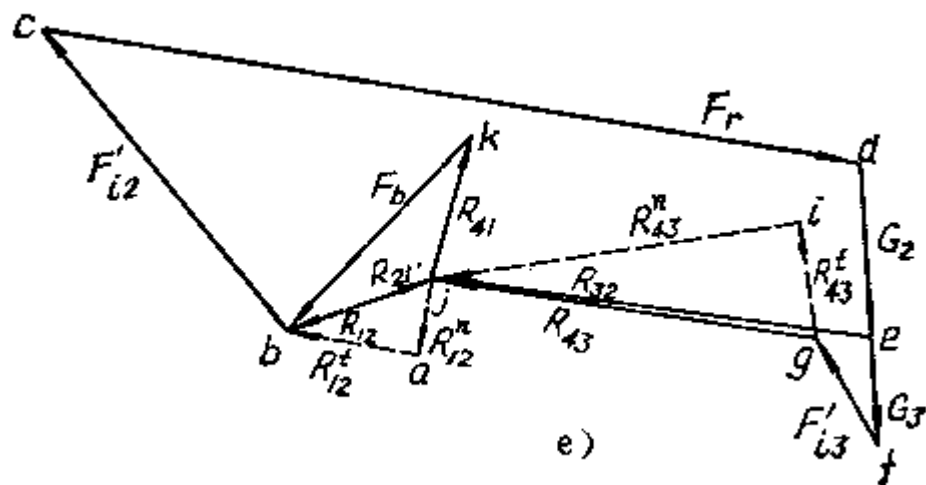
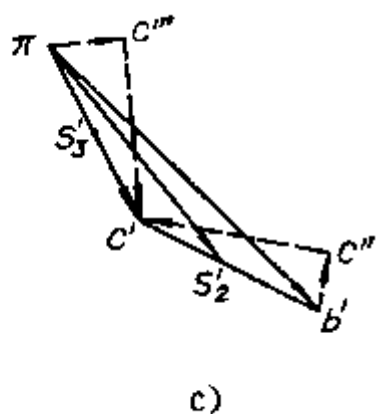
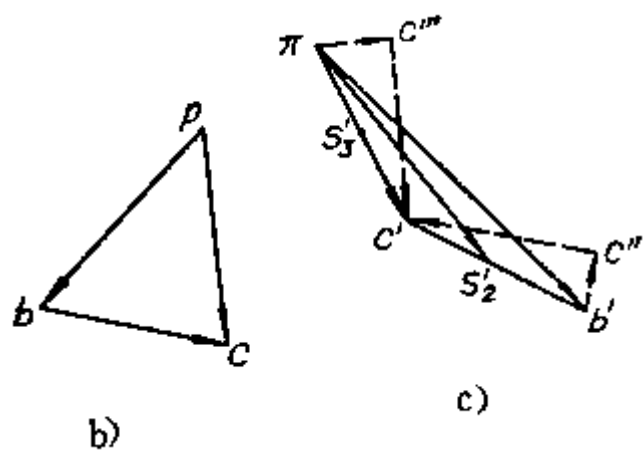
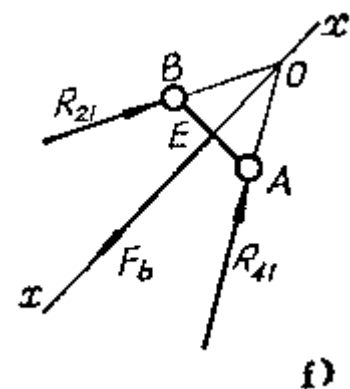
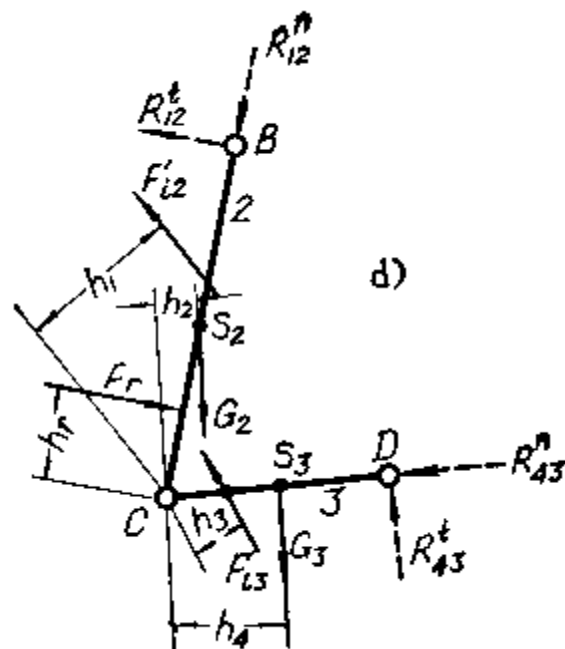
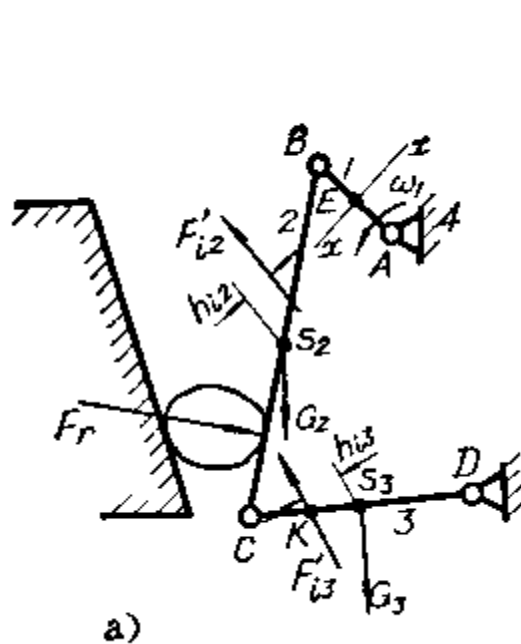
杆组

$$3n = 2p_l$$

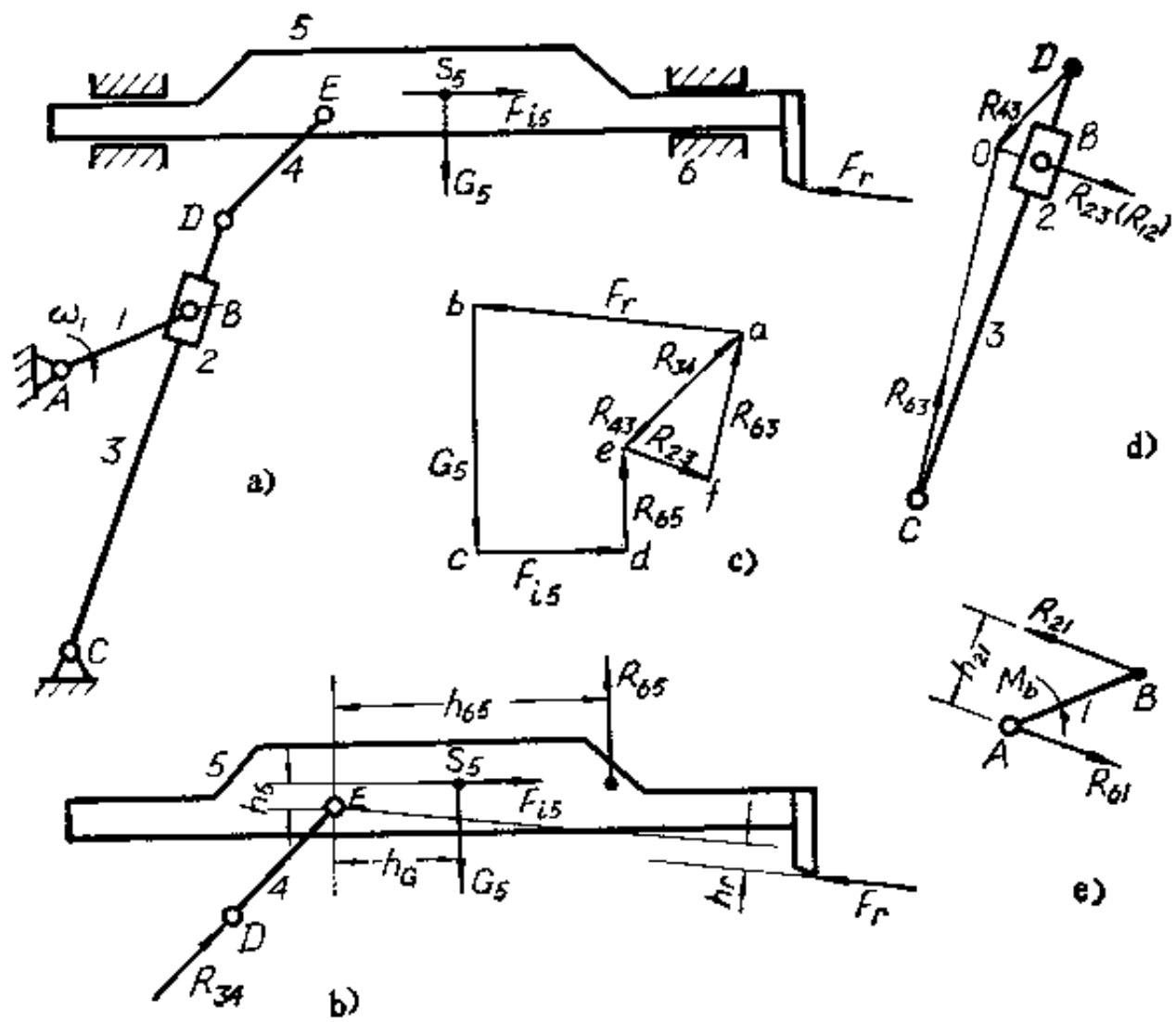
$$p_L = \frac{3}{2}n$$

例9-5：鄂式破碎机中，已知各构件的尺寸、重力及其对自身质心轴的转动惯量，以及矿石加于活动鄂板2上的压力 F_r 。设构件1以等角速度 ω_1 转动，其重力可以忽略不计，求作用在其上E点沿已知方向x-x的平衡力 F_b 以及各运动副中的反力。





例9-6 在图示的牛头刨床机构中，已知机构的位置和尺寸，曲柄1的等角速度 ω_1 顺钟向转动。设只计刨头重力 \mathbf{G}_5 、惯性力 \mathbf{F}_{i5} 及切削阻力 \mathbf{F}_r 。求各运动副中的反力和相应加于曲柄1上的平衡力偶矩。



作业：

题9-1、题9-7、题9-13

本章結束