数值分析第四次作业:

1 什么是函数φ(x)的不动点？什么是不动点迭代法？迭代函数满足什么条件可使不动点存在和迭代序列收敛？

2 什么是迭代法的收敛阶？怎样确定迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 的收敛阶？

3 什么是不动点迭代法的埃特金加速？什么是斯特芬森迭代法？斯特芬森迭代法的收敛阶是多少？

4 什么是方程f(x) = 0的牛顿切线法？为什么方程在单重根处牛顿切线法是二阶局部收敛的？在方程重根处牛顿切线法为什么只是局部线性收敛的？如何在重根处构造肯有二阶收敛的迭代法？

5 什么是弦截法和快速弦截法？它们收敛阶是否相同？

6 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，如果选择迭代函数 $\varphi(x)$：

（1） $\varphi(x)=1+1/x^2$ ；（2） $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$ ；（3） $\varphi(x)=x^2-1/x$

（4） $\varphi(x)=1/\sqrt{x-1}$ ；（5） $\varphi(x)=\frac{1}{9}+\frac{2x}{3}-\frac{1}{2x}+\frac{31}{18(3x-2)}$

试分析迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 的收敛性，并选择一种迭代求出有四个有效数字的近似根。

7. 用斯特芬森迭代法，对迭代函数 $\varphi(x)=x^2-1/x$ 进行加速计算方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根。(迭代 2 步，结果保留 5 位小数)

8. 设迭代函数 $\varphi(x)$ 的不动点为 x^*，用斯特芬森迭代法加速后的迭代函数为 $\psi(x)$。

（1）求证：当 $\varphi'(x^*)\neq 1$ 时，斯特芬森迭代法 $x_{k+1}=\psi(x_k)=x_k-\frac{(\varphi(x_k)-x_k)^2}{\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k}$

至少是平方收敛的，并求 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}$

（2）若 $\varphi'(x^*)=1$ 时，斯特芬森迭代法是几阶收敛的？

（3）若 $\varphi'(x^*)=0$ 时，斯特芬森迭代法是几阶收敛的？

9. 证明迭代公式 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶迭代方法，当初始值 $x_0>0$ 时迭代序列收敛，并求 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}$。

10. 如何选取下山因子 c,才能使迭代法 $x_{k+1}=x_k+c(\frac{31}{3x_k-2}-\frac{9}{x_k}-6x_k+2)$ 收敛？c 取多少时，收敛速度最快？

11. 如果求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，另取点 $x_1=1.4$，分别给出使用弦截法和快速弦截法迭代三步的结果。(保留 4 位小数。)

数值分析第四次作业:

1 什么是函数$\varphi(x)$的不动点？什么是不动点迭代法？迭代函数满足什么条件可使不动点存在和迭代序列收敛？
答：使$\varphi(x)=x$的点称为$\varphi(x)$的不动点；利用迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生迭代序列逼近$\varphi(x)$的不动点达到求方程的根的数值计算方法称为不动点迭代法，也叫简单迭代法。在区间$[a,b]$上满足$a\le\varphi(x)\le b$的连续函数$\varphi(x)$必在该区间上存在不动点；同时当$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$,其中 $L<1$时不动点唯一，且由迭代函数$\varphi(x)$产生的迭代序列收敛。

注：还可利用$\varphi(x)$在不动点x^*处是否有$|\varphi'(x^*)|<1$判断迭代是否局部收敛。

2 什么是迭代法的收敛阶？怎样确定迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 的收敛阶？

答：见定义和收敛阶的判定定理。

3 什么是不动点迭代法的埃特金加速？什么是斯特芬森迭代法？斯特芬森迭代法的收敛阶是多少？
答：参见相关内容。

4 什么是方程$f(x)=0$的牛顿切线法？为什么方程在单重根处牛顿切线法是二阶局部收敛的？在方程重根处牛顿切线法为什么只是局部线性收敛的？如何在重根处构造肯有二阶收敛的迭代法？
答：参见相关内容。

5 什么是弦截法和快速弦截法？它们收敛阶是否相同？
答：弦截法和快速弦截法参见相关定义。弦截法是线性收敛的，但快速弦截法是超线性收敛的，收敛阶约为$p=1.618$

6 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，如果选择迭代函数 $\varphi(x)$：

(1) $\varphi(x)=1+1/x^2$ ；(2) $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$ ；(3) $\varphi(x)=x^2-1/x$

(4) $\varphi(x)=1/\sqrt{x-1}$ ；(5) $\varphi(x)=\frac{1}{9}+\frac{2x}{3}-\frac{1}{2x}+\frac{31}{18(3x-2)}$

试分析迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 的收敛性，并选择一种迭代求出有四个有效数字的近似根。

解：在 $x_0=1.5$ 附近的一个根设为 x^*，显然 $x^*\neq 0$，

令 $t=1/x^*, g(t)=t^3+t-1, g'(t)=3t^2+1>0$ 知方程 $t^3+t-1=0$ 只有唯一实根 $t^*\in(1/2,1)$，进而 $x^3-x^2-1=0$ 也只有一个实根 $x^*\in(1,2)$.

对各迭代函数在不动点 x^* 处求导可得：

（1）当 $x\in(1,2)$ 时，$\varphi(x)=1+\dfrac{1}{x^2}\in(1,2)$，$\varphi'(x)=-2/x^{*3}, |\varphi'(x^*)|=\dfrac{2}{1+x^{*2}}<1$,故迭代过程收敛；

（2）当 $x\in(1,2)$ 时，$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\in(1,2)$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{1+x^{*2}})^2}=\dfrac{1}{3x^{*2}}, |\varphi'(x^*)|=\dfrac{1}{3x^{*2}}<1$,故迭代过程收敛；

（3）当 $x\in(1,2)$ 时，$\varphi(x)=x^2-1/x, \varphi'(x^*)=2x^*+1/x^{*2}>2$，迭代过程发散。

（4）当 $x\le 1.5$ 时，$\varphi(x)=1/\sqrt{x-1}\ge\sqrt{2}>1.4$，$|\varphi'(x^*)|=\dfrac{1}{2(\sqrt{x^*-1})^3}=\dfrac{1}{2x^{*3}}<1$，迭代过程收敛。

（5）$\varphi(x)=\dfrac{1}{9}+\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{31}{18(3x-2)}$, $\varphi'(x^*)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2x^{*2}}-\dfrac{31}{6(3x^*-2)^2}=0$，迭代过程收敛。且至少二阶局部收敛。

若选 $\varphi(x)=\dfrac{1}{9}+\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{31}{18(3x-2)}$, 有 $x_0=1.5$，$x_1=1.4667, x_2=1.4656, x_3=1.4656$.

7. 用斯特芬森迭代法，对迭代函数 $\varphi(x)=x^2-1/x$ 进行加速计算方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根。(迭代 2 步，结果保留 5 位小数)

解：第一次：$x_0=1.5, y_0=1.5^2-1/1.5=1.58333, z_0=1.87537,$

$$x_1=\frac{(x_0z_0-y_0{}^2)}{z_0-2y_0+x_0}=1.46673$$

第二次：$y_1=1.46951, z_1=1.47895, x_2=1.46557$

8. 设迭代函数 $\varphi(x)$ 的不动点为 x^*，用斯特芬森迭代法加速后的迭代函数为 $\psi(x)$。

（1）求证：当 $\varphi'(x^*)\neq 1$ 时，斯特芬森迭代法 $x_{k+1}=\psi(x_k)=x_k-\dfrac{(\varphi(x_k)-x_k)^2}{\varphi(\varphi(x_k))-2\varphi(x_k)+x_k}$

至少是平方收敛的，并求 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}$

（2）若 $\varphi'(x^*)$=1 时，斯特芬森迭代法是几阶收敛的？

（3）若 $\varphi'(x^*)$=0 时，斯特芬森迭代法是几阶收敛的？

证明：令 $h=x-x^*$， $\varphi(x)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)h+\dfrac{\varphi''(x^*)}{2}h^2+\dfrac{\varphi'''(x^*)}{6}h^3+o(h^3)$，

$$\varphi(\varphi(x))=\varphi(\varphi(x^*))+\varphi'(\varphi(x^*))\varphi'(x^*)h+\frac{\varphi''(\varphi(x^*))\varphi'^2(x^*)+\varphi'(\varphi(x^*))\varphi''(x^*)}{2}h^2$$
$$+\frac{\varphi'''(\varphi(x^*))\varphi'^3(x^*)+3\varphi''(\varphi(x^*))\varphi''(x^*)\varphi'(x^*)+\varphi'(\varphi(x^*))\varphi'''(x^*)}{6}h^3+o(h^3)$$
$$=x^*+\varphi'^2(x^*)h+\frac{\varphi''(x^*)\varphi'(x^*)(\varphi'(x^*)+1)}{2}h^2+\frac{\varphi'''(x^*)\varphi'^3(x^*)+3\varphi''^2(x^*)\varphi'(x^*)+\varphi'''(x^*)\varphi'(x^*)}{6}h^3+o(h^3)$$

$$\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)+x=h(1+\varphi'^2(x^*)-2\varphi'(x^*))+h^2\frac{\varphi''(x^*)(\varphi'^2(x^*)+\varphi'(x^*)-2)}{2}$$
$$+h^3\frac{\varphi'''(x^*)\varphi'^3(x^*)+3\varphi''^2(x^*)\varphi'(x^*)+\varphi'''(x^*)\varphi'(x^*)-2\varphi'''(x^*)}{6}+o(h^3)$$

$$(\varphi(x)-x)^2=((\varphi'(x^*)-1)h+\frac{\varphi''(x^*)}{2}h^2+\frac{\varphi'''(x^*)}{6}h^3+o(h^3))^2$$
$$=(\varphi'(x^*)-1)^2h^2+(\varphi'(x^*)-1)\varphi''(x^*)h^3+(\frac{\varphi'''(x^*)(\varphi'(x^*)-1)}{3}+\frac{\varphi''^2(x^*)}{4})h^4+o(h^5)$$

所以，当 $\varphi'(x)\neq 1$ 时，$\lim\limits_{x\to x^*}\dfrac{\psi(x)-x^*}{(x-x^*)^2}=\dfrac{\varphi'(x^*)\varphi''(x^*)}{2(\varphi'(x^*)-1)}$，斯特芬森方法至少是平方收敛的；

当 $\varphi'(x)$=1 时， $\lim\limits_{x\to x^*}\dfrac{\psi(x)-x^*}{x-x^*}=\dfrac{1}{2}$，斯特芬森方法只是线性收敛的；

当 $\varphi'(x)$=0 时， $\lim\limits_{x\to x^*}\dfrac{\psi(x)-x^*}{(x-x^*)^3}=-\dfrac{\varphi''^2(x^*)}{4}$；斯特芬森方法至少是 2 阶收敛的。

9. 证明迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶迭代方法，当初始值 $x_0>0$ 时迭代序列收敛，并求 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^3}$。

证明：因 $x_{k+1}-x_k=\dfrac{2x_k(a-x_k^2)}{3x_k^2+a}$，易知，当 $x_0\in(0,\sqrt{a})$ 时，$\{x_k\}$ 单调增加且有上界 $\sqrt{a}$；

当 $x_0\in(\sqrt{a},\ \infty)$ 时，$\{x_k\}$ 单调减少且有下界 $\sqrt{a}$；当 $x_0=\sqrt{a}$ 时 $x_k=\sqrt{a}$, $\{x_k\}$ 是常序列。无论是哪种情形，都可知迭代序列收敛且极限为 $\sqrt{a}$ 。

$x_{k+1}-\sqrt{a}=\dfrac{(x_k-\sqrt{a})^3}{3x_k^2+a}$，可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^3}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{3x_k^2+a}=\dfrac{1}{4a}$，因此，该迭代序列是三阶收敛的。

10. 如何选取下山因子 c,才能使迭代法 $x_{k+1}=x_k+c(\dfrac{31}{3x_k-2}-\dfrac{9}{x_k}-6x_k+2)$ 收敛？c 取多少时，收敛速度最快？

解：迭代函数 $\varphi(x)=x+c(\dfrac{31}{3x-2}-\dfrac{9}{x}-6x+2)$ 满足：

$$\varphi'(x)=1+c(-\frac{93}{(3x-2)^2}+\frac{9}{x^2}-6)=1-18c$$

由收敛定理知，当 $|\varphi'(x^*)|<1$ 即 0<c<$\dfrac{1}{9}$ 时迭代过程收敛。且在 $c=\dfrac{1}{18}$ 时 $\varphi'(x^*)=0$，迭代过程具有至少二阶收敛速度，而其它情形迭代过程仅是线性收敛的。

11. 如果求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，另取点 $x_1=1.4$，分别给出使用弦截法和快速弦截法迭代三步的结果。(保留 4 位小数。)

解：由弦截法：$x_{k+1}=x_k+\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0)$,

可得 $x_2=1.46334, x_3=1.46550, x_4=1.46557$.

由快速弦截法：$x_{k+1}=x_k+\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$,

可得 $x_2=1.46334, x_3=1.46572, x_4=1.46557$.