第三篇 《动力学》

理论力学

第十四章　虚位移原理

在第一篇静力学中，我们从静力学公理出发，通过力系的简化，得出刚体的平衡条件，用来研究刚体及刚体系统的平衡问题。

在这一章里，我们将介绍普遍适用于研究任意质点系的平衡问题的一个原理，它从位移和功的概念出发，得出任意质点系的平衡条件。该原理叫做虚位移原理。它是研究平衡问题的最一般的原理，不仅如此，将它与达朗贝尔原理相结合，就可得到一个解答动力学问题的动力学普遍方程。

第十四章　虚位移原理

§ 14–1　约束 • 虚位移 • 虚功

§ 14–2　虚位移原理

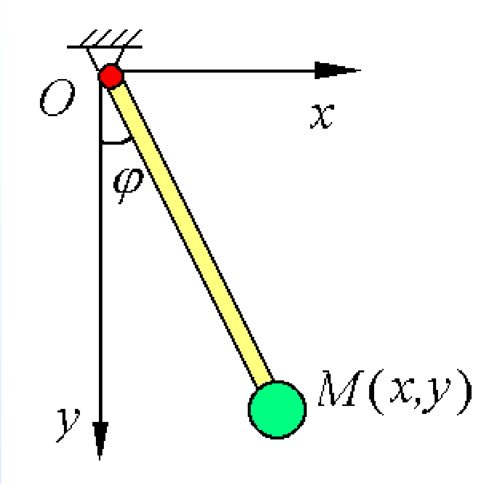
§ 14-1　约束 • 虚位移 • 虚功

一、约束

限制非自由质点（或质点系）运动的各种条件称为约束。

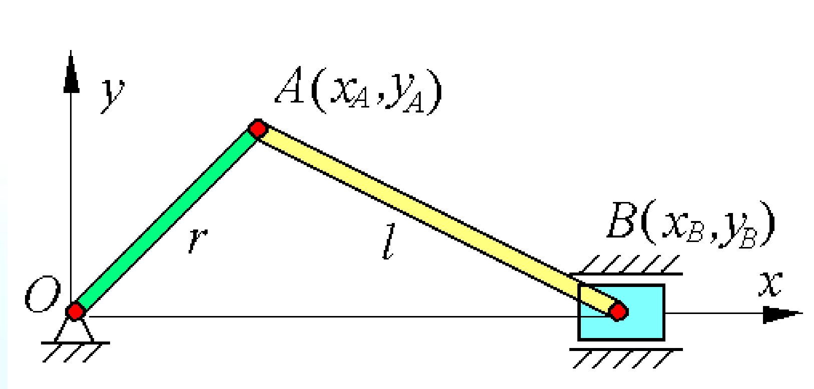
将约束的限制条件以数学方程来表示，则称为约束方程。

例如：



平面单摆

$$x^2 + y^2 = l^2$$



曲柄连杆机构

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

约束的分类

根据约束的形式和性质，可将约束划分为不同的类型，通常按如下分类：

1、几何约束和运动约束

2、定常约束和非定常约束

3、完整约束和非完整约束

1、几何约束和运动约束

限制质点或质点系在空间几何位置的条件称为几何约束。如前述的平面单摆和曲柄连杆机构例子中的限制条件都是几何约束。

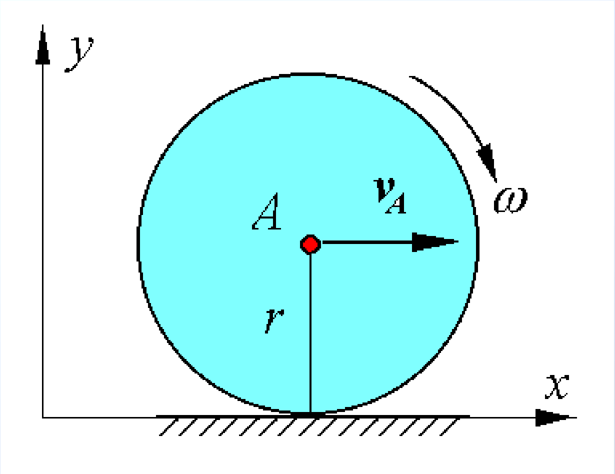
当约束对质点或质点系的运动情况进行限制时，这种约束条件称为运动约束。

例如：车轮沿直线轨道作纯滚动时。

几何约束： $y_A = r$

运动约束： $v_A - r\omega = 0$

$$(\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0)$$

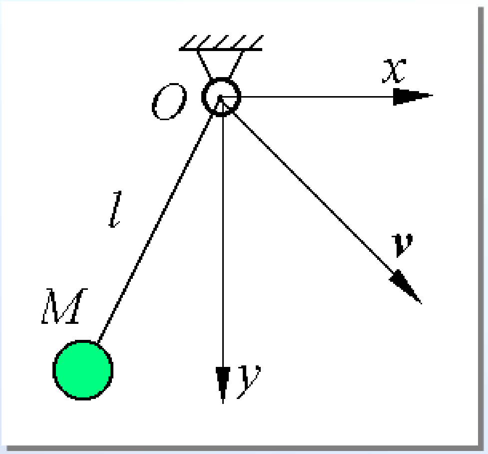


2、定常约束和非定常约束

约束条件不随时间改变的约束为稳定约束（定常约束）。

当约束条件与时间有关，并随时间变化时称为非定常约束。

前面的例子中约束条件皆不随时间变化，它们都是定常约束。



例如：重物M由一条穿过固定圆环的细绳系住。初始时摆长l_0, 匀速v拉动绳子。

$$x^2+y^2=(l_0-vt)^2$$

约束方程中显含时间 t

3、完整约束和非完整约束

如果在约束方程中含有坐标对时间的导数（例如运动约束）而且方程中的这些导数不能经过积分运算消除，即约束方程中含有的坐标导数项不是某一函数全微分，从而不能将约束方程积分为有限形式，这类约束称为非完整约束。一般地，非完整约束方程只能以微分形式表达。

如果约束方程中不含有坐标对时间的导数，或者约束方程中虽有坐标对时间的导数，但这些导数可以经过积分运算化为有限形式，则这类约束称为完整约束。

例如：车轮沿直线轨道作纯滚动，$\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$是微分方程，但经过积分可得到 $x_A - r\varphi = C$（常数），该约束仍为完整约束。

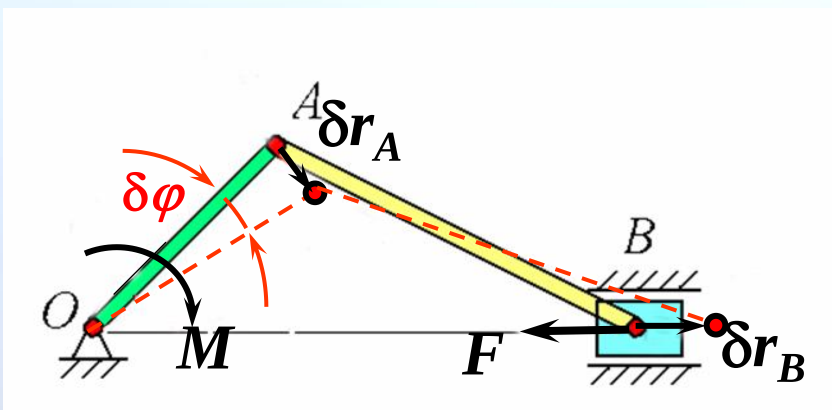
几何约束必定是完整约束，但完整约束未必是几何约束。

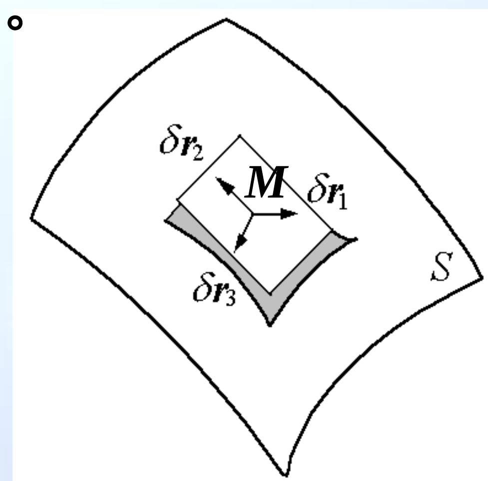
非完整约束一定是运动约束，但运动约束未必是非完整约束。

二、虚位移

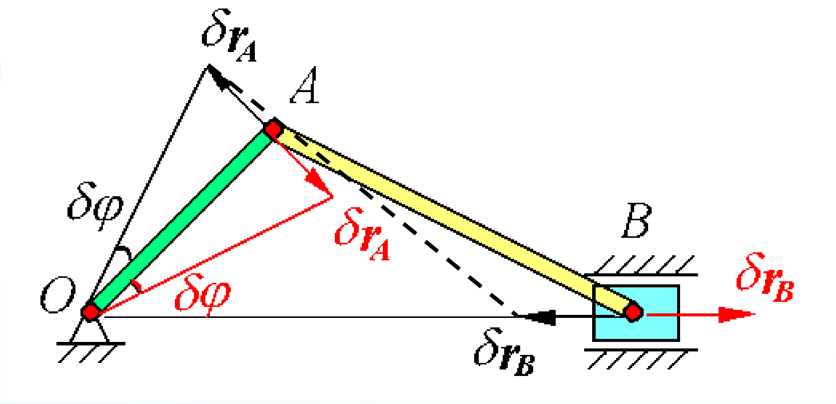
质点从空间的一个位置运动到另一个位置，它的位置变化叫做质点在这一运动过程中的位移。它是一个有大小和方向的物理量。位移是矢量。物体在某一段时间内，如果由初位置移到末位置，则由初位置到末位置的有向线段叫做位移。它的大小是运动物体初位置到末位置的直线距离；方向是从初位置指向末位置。

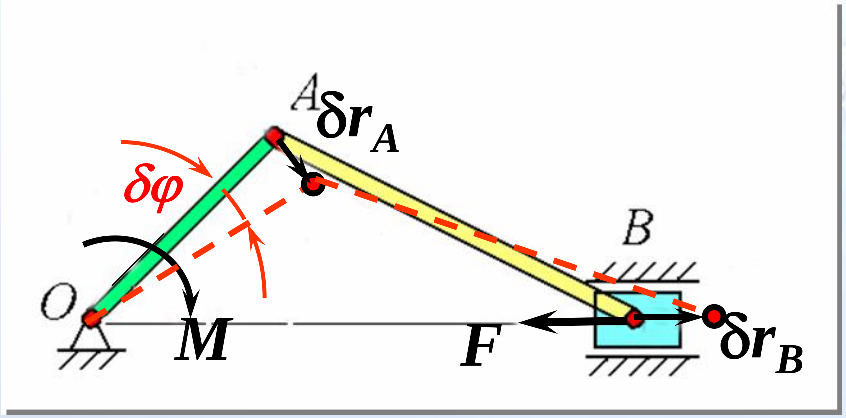
某瞬时，质点系在约束所允许的条件下，可能实现的任何无限小的位移，称为虚位移（可能位移）。

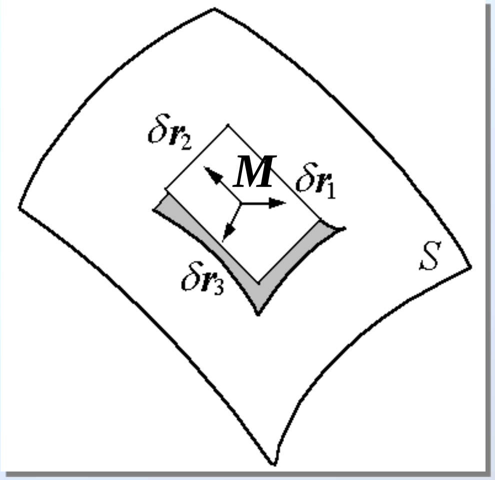




虚位移可以是线位移，也可以是角位移。通常用变分符号δ表示虚位移。







虚位移可以是线位移，也可以是角位移。通常用变分符号δ 表示虚位移。

虚位移与真正运动时发生的实位移区别：

实位移是在一定的力作用下和给定的初条件下运动而实际发生的；虚位移是在约束容许的条件下可能发生的。

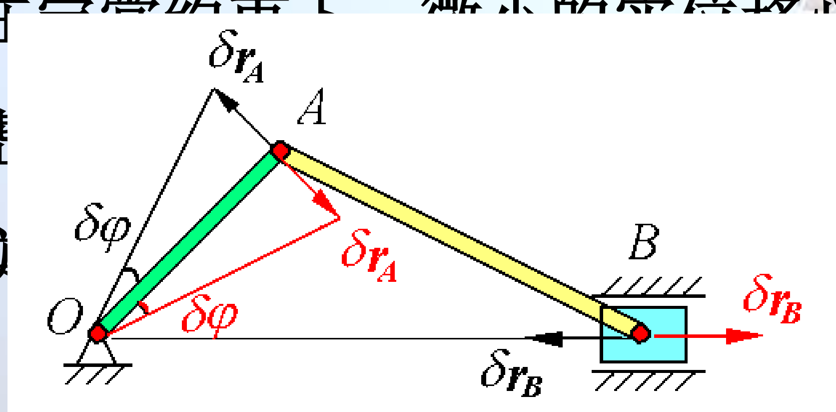
实位移具有确定的方向，可能是微小值，也可能是有限值；虚位移则是微小位移，视约束情况可能有几种不同的方向。

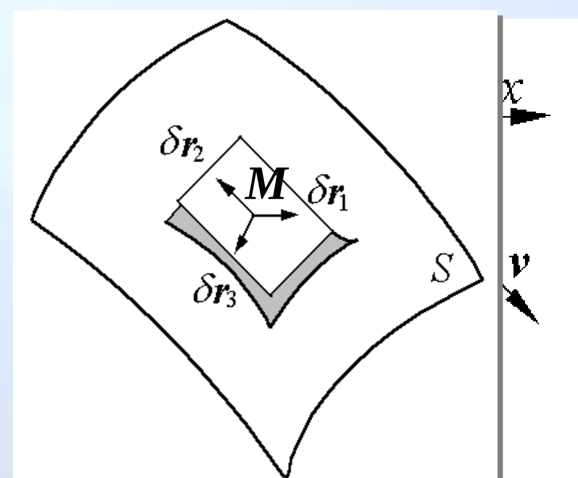
实位移是在一定的时间内发生的；虚位移只是纯几何的概念，完全与时间无关。

在定常约束下，微小的实位移必

然是虚 ，

微小实





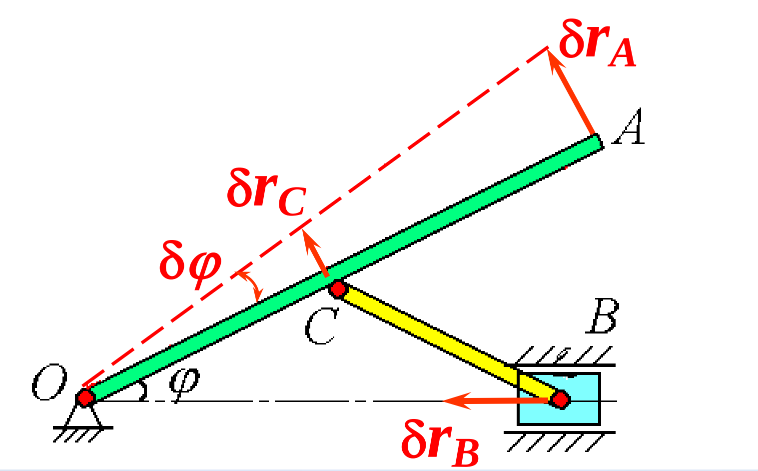
描述虚位移的两种方法——几何法和解析法。

（一）几何法

作图法，用矢量直接在图上画出虚位移，

由运动学知，质点的位移与速度成正比，即 $\mathrm{d}\bar{r}=\bar{v}\mathrm{d}t$

因此可以用分析速度的方法分析各点虚位移之间的关系。



$$\frac{\delta r_A}{\delta r_C}=\frac{OA}{OC}$$

(二) 解析法

解析式，用虚位移在直角坐标上的投影来表示。

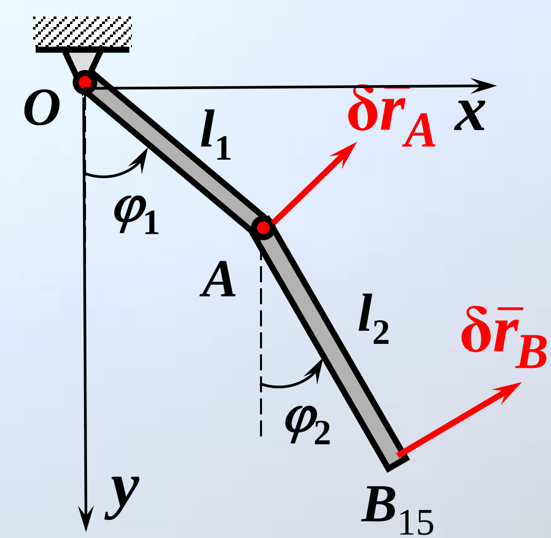
$$\bar{r}_A = x_A \bar{i} + y_A \bar{j}$$

$$\delta \bar{r}_A = \delta x_A \bar{i} + \delta y_A \bar{j}$$

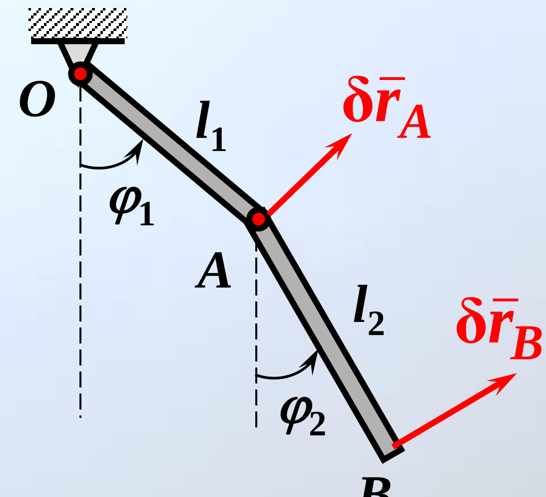
$$\delta x_A \qquad \delta y_A$$

质点系中各质点的坐标可表示为广义坐标 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_k)$ 的函数，广义坐标分别有变分 $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \cdots, \delta\varphi_k$，各质点的虚位移 $\delta \bar{r}_i$ 在直角坐标上的投影可以表示为

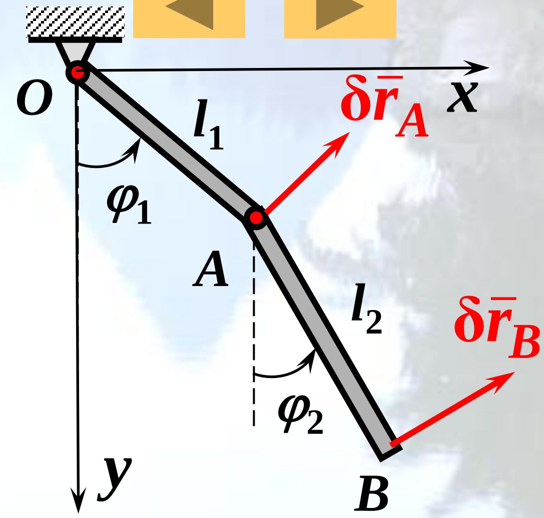
$$\begin{cases} \delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_1} \cdot \delta\varphi_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_2} \cdot \delta\varphi_2 + \cdots + \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_k} \cdot \delta\varphi_k \\ \delta y_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_1} \cdot \varphi_1 + \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_2} \cdot \delta\varphi_2 + \cdots + \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_k} \cdot \delta\varphi_k \end{cases}$$



$$\begin{cases} \delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_1}\cdot\delta\varphi_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_2}\cdot\delta\varphi_2 + \cdots + \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_k}\cdot\delta\varphi_k \\ \delta y_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_1}\cdot\varphi_1 + \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_2}\cdot\delta\varphi_2 + \cdots + \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_k}\cdot\delta\varphi_k \end{cases}$$



$$\begin{cases} \delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_1}\cdot\delta\varphi_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_2}\cdot\delta\varphi_2 + \cdots + \dfrac{\partial x_i}{\partial \varphi_k}\cdot\delta\varphi_k \\ \delta y_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_1}\cdot\varphi_1 + \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_2}\cdot\delta\varphi_2 + \cdots + \dfrac{\partial y_i}{\partial \varphi_k}\cdot\delta\varphi_k \end{cases}$$



取广义坐标 φ_1和φ_2，广义坐标的变分 $\delta\varphi_1$和$\delta\varphi_2$

A点：

$$\begin{cases} x_A = l_1\sin\varphi_1 \\ y_A = l_1\cos\varphi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta x_A = l_1\cos\varphi_1\,\delta\varphi_1 \\ \delta y_A = -l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 \end{cases}$$

B点：

$$\begin{cases} x_B = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \\ y_B = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta x_B = l_1\cos\varphi_1\,\delta\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\,\delta\varphi_2 \\ \delta y_B = -l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2 \end{cases}$$

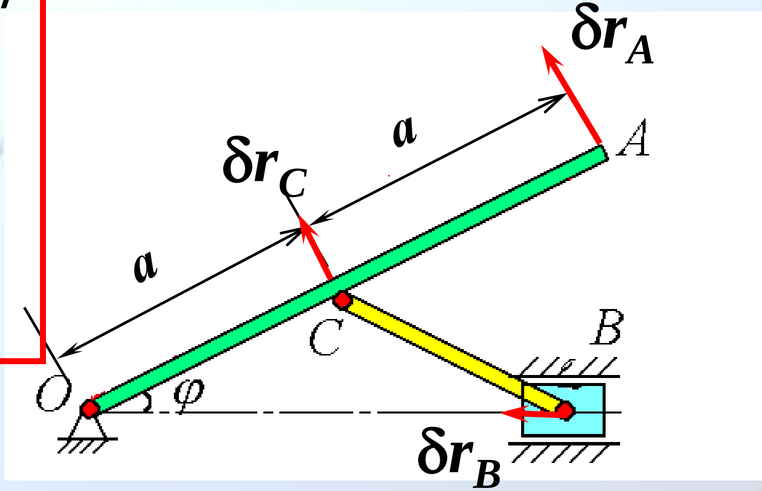
[例1] 用解析式表示*A*、*B*、*C*三点的虚位移

将*A*、*B*、*C*点的坐标表示成广义坐标φ的函数，得

$$\begin{cases} x_A = 2a\cos\varphi \\ y_A = 2a\sin\varphi \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} \delta x_A = -2a\sin\varphi \cdot \delta\varphi \\ \delta y_A = 2a\cos\varphi \cdot \delta\varphi \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x_B = 2a\cos\varphi \\ y_B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta x_B = -2a\sin\varphi \cdot \delta\varphi \\ \delta y_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = a\cos\varphi \\ y_C = a\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta x_C = -a\sin\varphi \cdot \delta\varphi \\ \delta y_C = a\cos\varphi \cdot \delta\varphi \end{cases}$$



$$\delta r_C = a\delta\varphi,$$

$$\delta r_A = 2a\delta\varphi, \qquad \delta r_B = 2a\sin\varphi \cdot \delta\varphi,$$

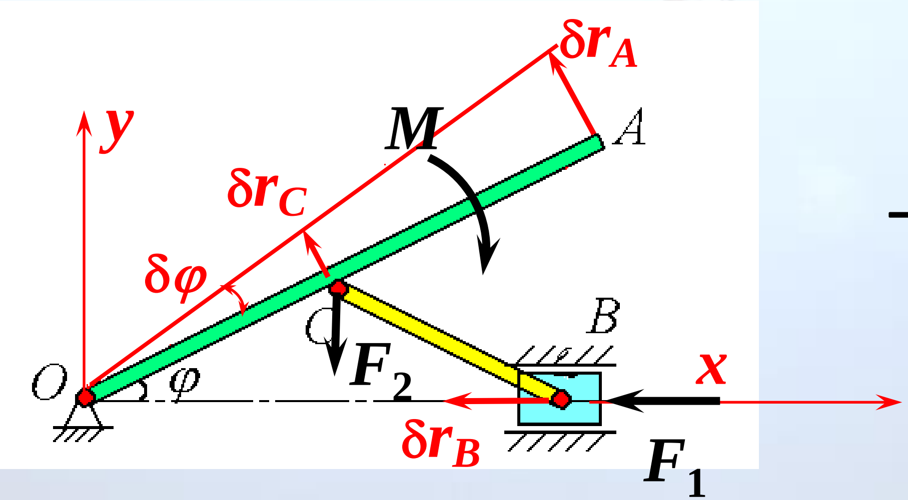
三、虚功

力 $\bar{F}$ 在质点发生的虚位移 $\delta\bar{r}$ 上所作的功称为虚功，记为 δW 。

$$\delta W = \bar{F}\cdot\delta\bar{r}$$ （不是变力作功，没有 $\frac{1}{2}$ ）

解析式： $\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j}$ $\qquad \delta\bar{r} = \delta x\bar{i} + \delta y\bar{j}$

$$\therefore \delta W = F_x\delta x + F_y\delta y$$



$F_1\delta r_B$

$-F_2\delta r_C\cos\varphi$

$-M\delta\varphi$

四、理想约束

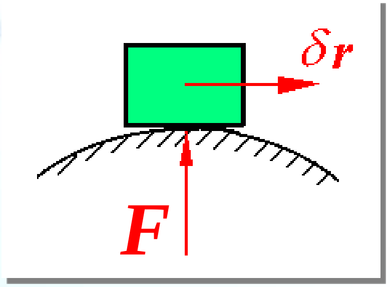
如果在质点系的任何虚位移上，质点系的所有约束反力F_{Ni}的虚功之和等于零，则称这种约束为理想约束。

质点系受有理想约束的条件：

$$\sum \delta W_{N} = \sum \overline{F}_{Ni} \cdot \delta \overline{r}_{i} = 0$$

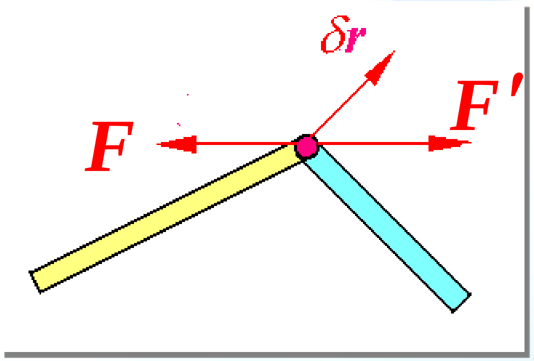
理想约束的典型例子如下：

1、光滑支承面



$$\delta W = \overline{F} \cdot \delta \overline{r} = 0$$

2、光滑铰链



$$\sum \delta W = \overline{F} \cdot \delta \overline{r} + \overline{F}' \cdot \delta \overline{r} = 0$$

3、无重刚杆

4、不可伸长的柔索

5、固定端

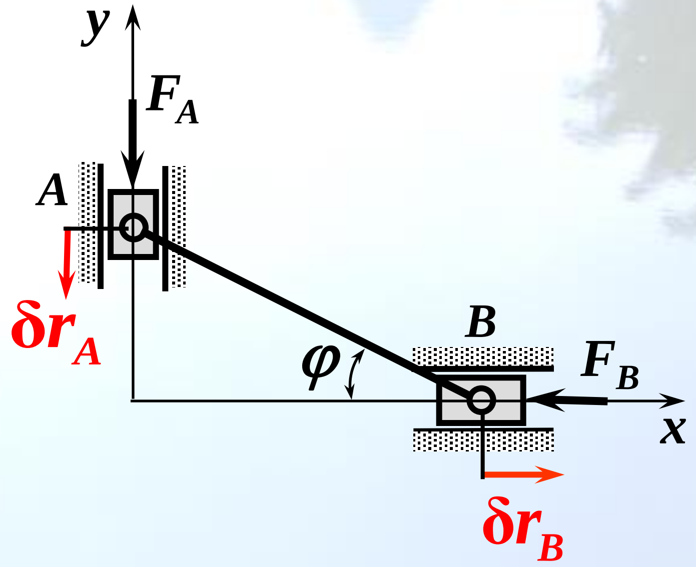
§14-2 虚位移原理

具有理想约束的质点系，平衡的必要与充分条件是：作用于质点系的所有**主动力**在任何虚位移上所作的**虚功**之和等于零。即

$$\boxed{\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0}$$

解析式： $\boxed{\sum (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i) = 0}$（平面问题）

[例14-3]（P355） 图示椭圆规机构，连杆AB长l，杆重和滑道摩擦不计，铰链为光滑的，求在图示位置平衡时，主动力F_A和F_B之间的关系。



解：研究整个机构。系统的所有约束都是理想约束。

1、几何法：使A发生虚位移$\delta\bar{r}_A$，B的虚位移$\delta\bar{r}_B$，则由虚位移原理，得虚功方程：

$$F_A\delta r_A - F_B\delta r_B = 0$$

而 $\delta r_A \cdot \sin\varphi = \delta r_B \cdot \cos\varphi$

$$\Rightarrow \delta r_B = \delta r_A \cdot \tan\varphi$$

$$\therefore F_A\delta r_A - F_B\tan\varphi\delta r_A = 0$$

或$(F_A - F_B\tan\varphi)\cdot\delta r_A = 0$

$$F_A - F_B\tan\varphi = 0$$

$$\boxed{\sum \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0}$$

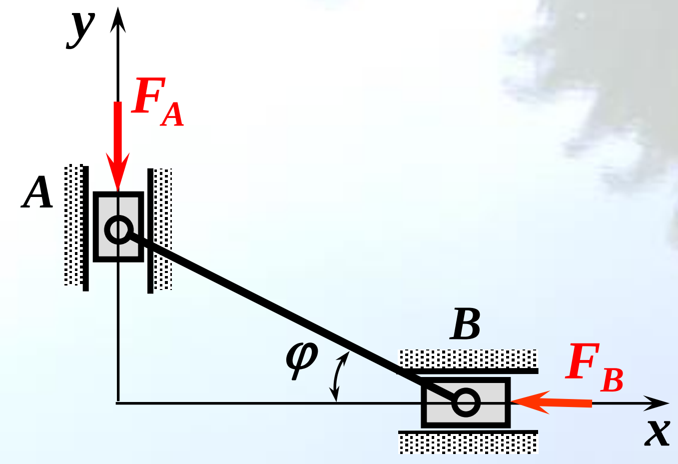
$$\therefore F_A = F_B\tan\varphi$$

2、解析法 $\boxed{\sum(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i)=0}$ $\boxed{i=1,2}$

虚功方程：$-F_A\delta y_A - F_B\delta x_B = 0$，

$$\begin{cases} y_A = l\sin\varphi \\ x_B = l\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta y_A = l\cos\varphi\,\delta\varphi \\ \delta x_B = -l\sin\varphi\delta\varphi \end{cases}$$



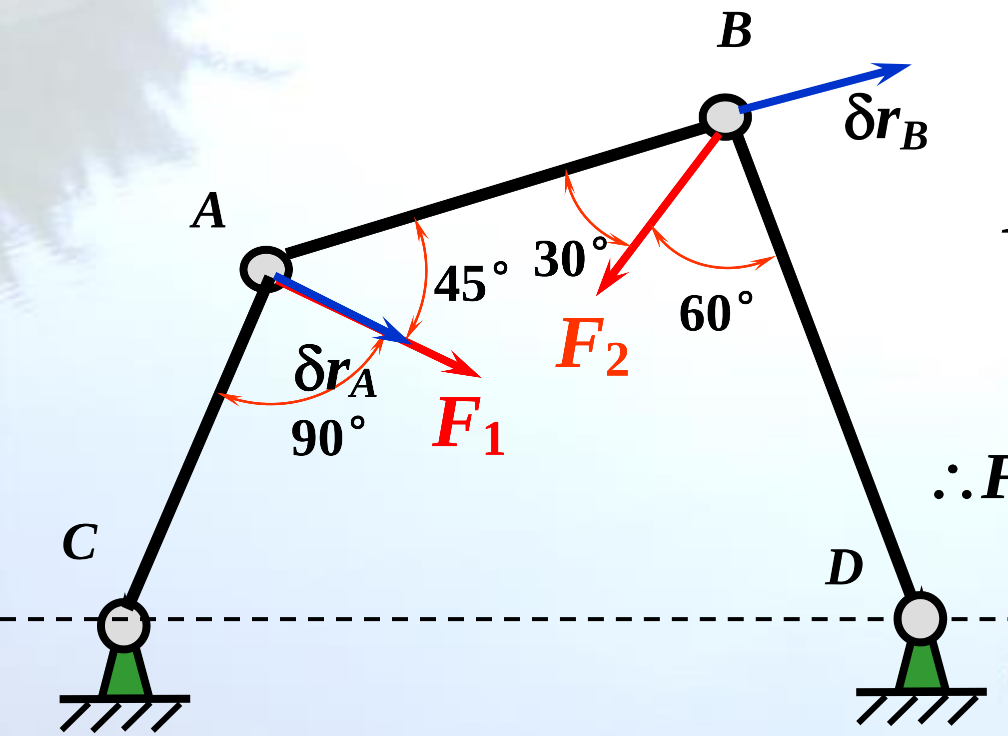
$$\therefore \quad -F_A l\cos\varphi\delta\varphi + F_B l\sin\varphi\delta\varphi = 0$$

$$(-F_A\cos\varphi + F_B\sin\varphi)l\delta\varphi = 0$$

解得： $F_A = F_B\tan\varphi$

$$\boxed{(F_{1x}\delta x_1 + F_{1y}\delta y_1) + (F_{2x}\delta x_2 + F_{2y}\delta y_2) = 0}$$

[例2] 机构在图示位置平衡，求F_1和 F_2的关系。



解：几何法，给出虚位移

建立F_1和F_2的虚功方程：

$$F_1 \cdot \delta r_A - F_2 \cos 30° \cdot \delta r_B = 0$$

$$\because \delta r_A \cos 45° = \delta r_B$$

$$\therefore F_1 \cdot \cancel{\delta r_A} - F_2 \cos 30° \cdot \cancel{\delta r_A} \cos 45° = 0$$

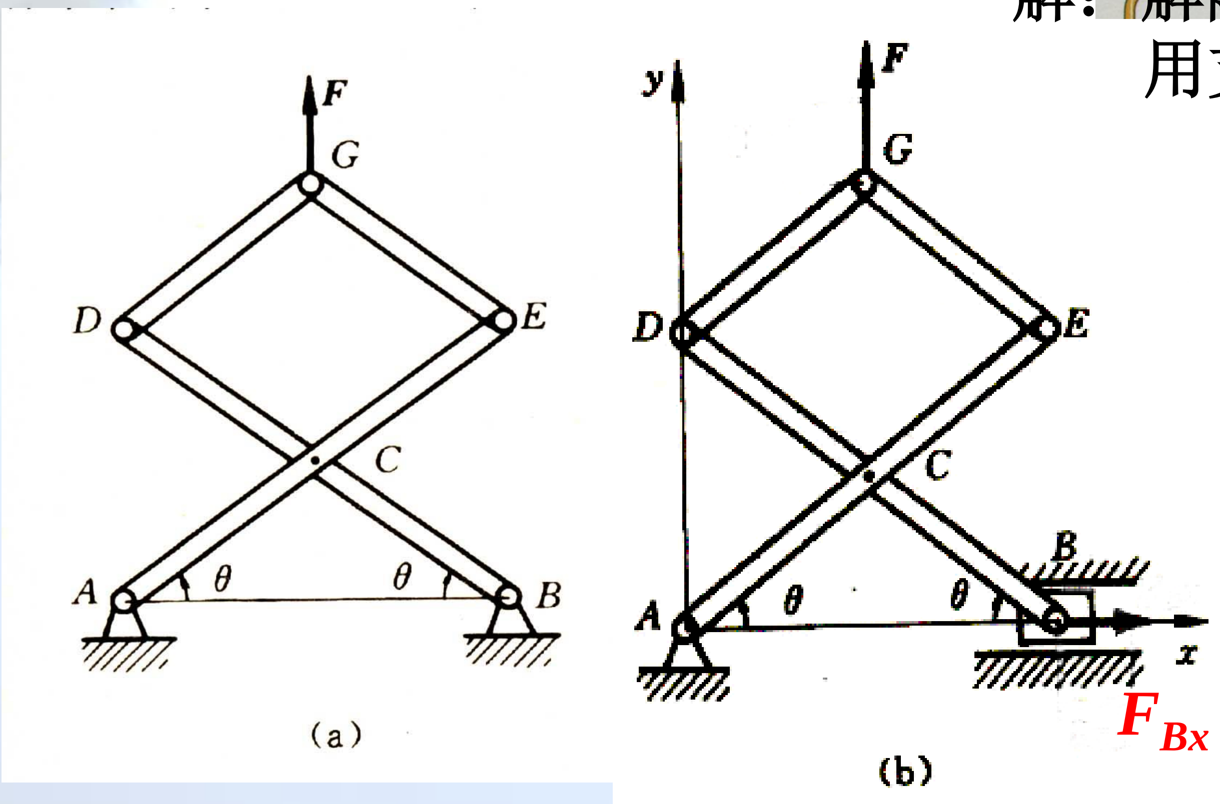
$$\therefore \frac{F_1}{F_2} = \cos 30° \cos 45°$$

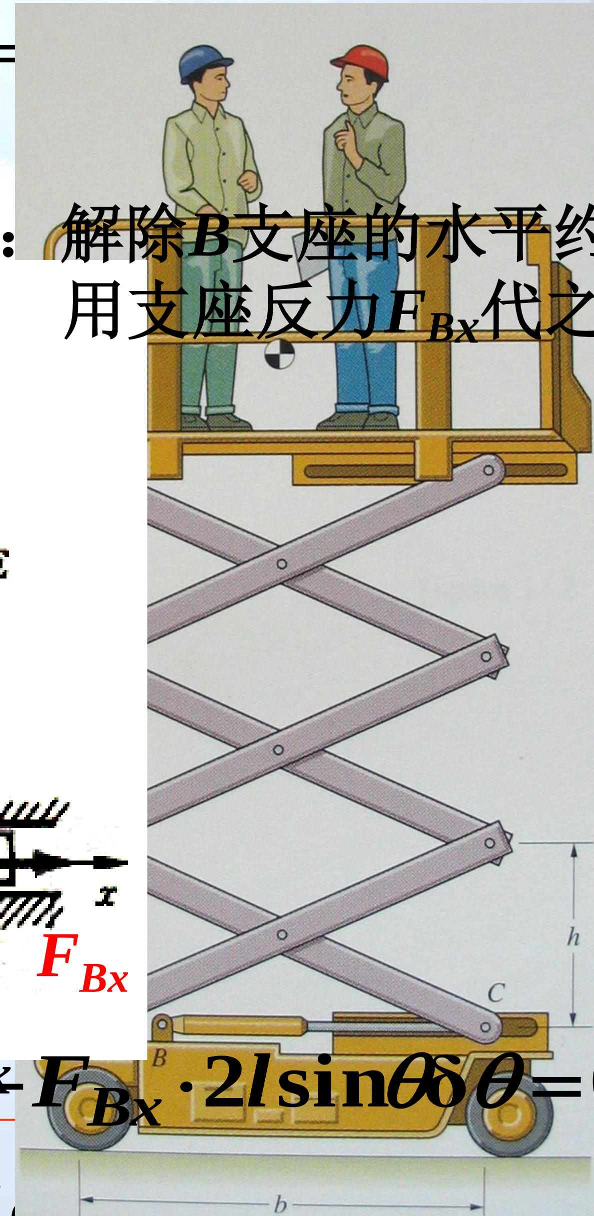
$$= 0.612$$

$$\boxed{\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0}$$

[例14-2]（P353） $AC=CE=BC=CD=DG=GE=$ … B 的水平约束反力。

解：解除B支座的水平约束，用支座反力F_{Bx}代之。





代入（a）得: $$F\cdot 3l\cos\theta\delta\theta - F_{Bx}\cdot 2l\sin\theta\delta\theta = 0$$

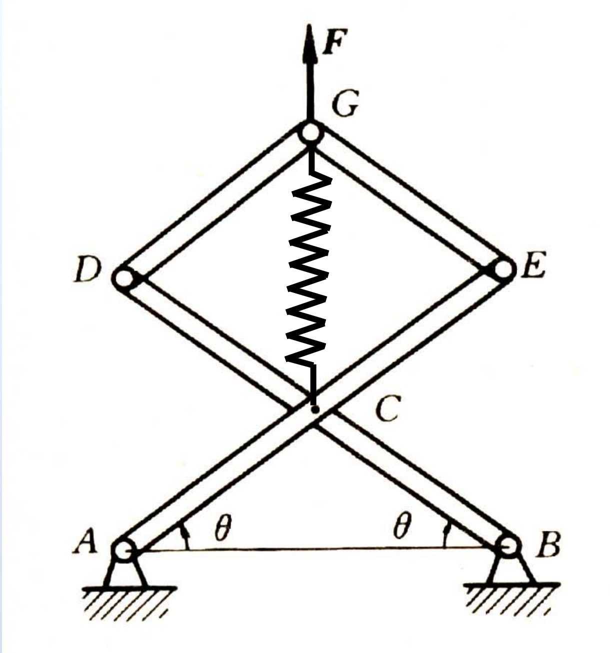
$$\therefore F_{Bx} = \frac{2}{3}F\cot\theta$$

另：如在G、C之间加一弹簧，弹簧刚度为k，在图示位置弹簧伸长量为δ_0，求支座B的水平约束反力。

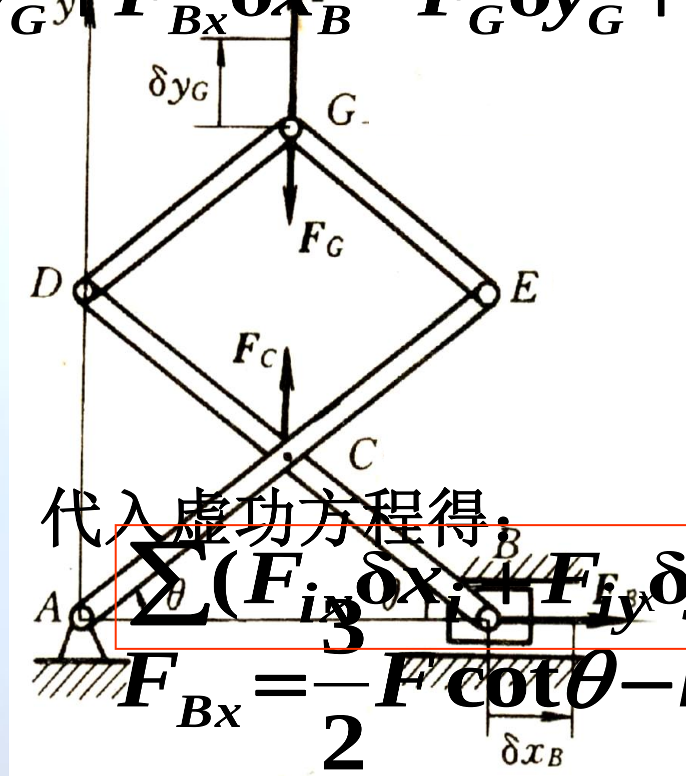
解：解除B支座的水平约束，用支座反力F_{Bx}代之，

去掉弹簧，用拉力代之。 应用解析法，

$$F\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B - F_G\delta y_G + F_C\delta y_C = 0$$



(a)

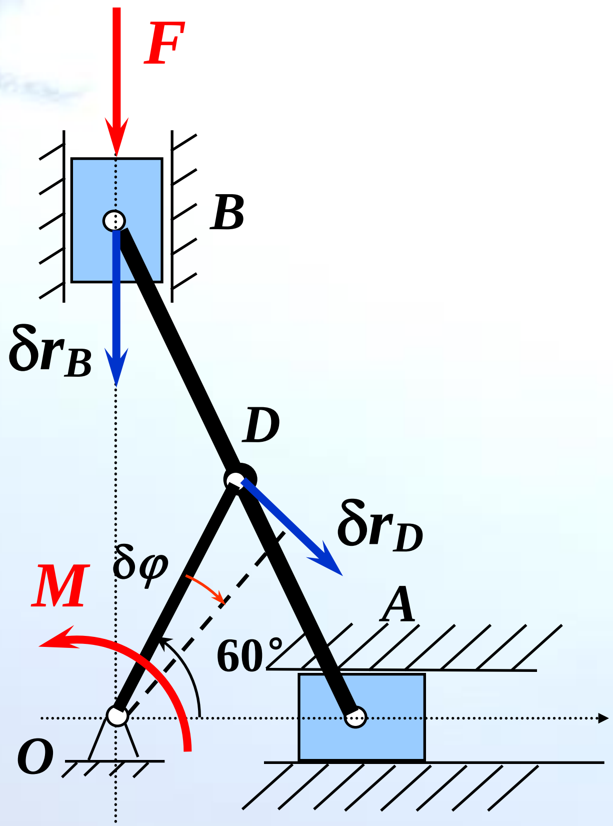


代入虚功方程得：

$$\boxed{\sum(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i)=0}$$

$$F_{Bx} = -\frac{3}{2}F\cot\theta - k\delta_0\cot\theta$$

[例] 椭圆规机构，$OD=AD=BD=l$，在图示位置平衡，求F和M的关系。



解：建立F和M的虚功方程。几何法。

$$F\cdot\delta r_B - M\cdot\delta\varphi = 0$$

$$\because \delta r_B\cos 30° = \delta r_D\cos 30°$$

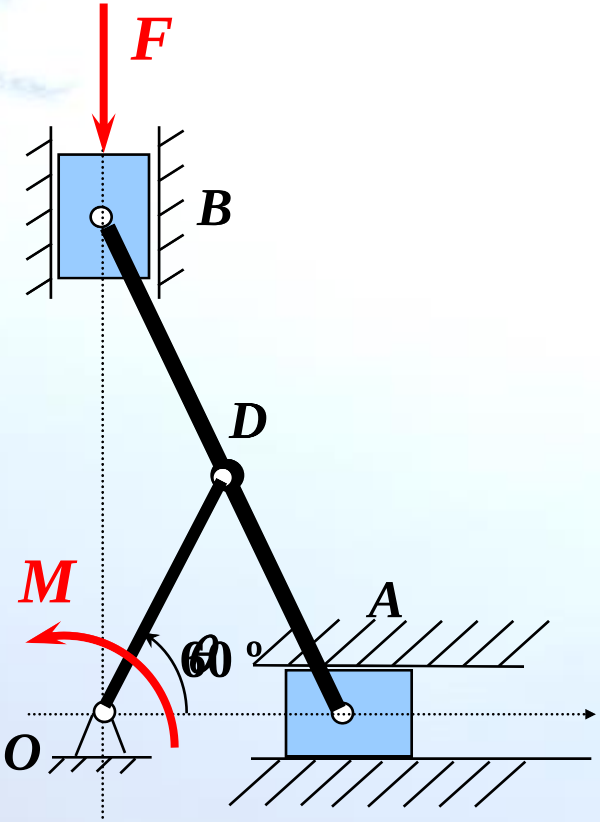
$$\delta r_D = l\delta\varphi$$

$$\therefore \delta r_B = \delta r_D = l\delta\varphi$$

$$\therefore Fl\delta\varphi = M\delta\varphi$$

解得：$\dfrac{F}{M} = \dfrac{1}{l}$

[例] 椭圆规机构，$OD=AD=BD=l$，在图示位置平衡，求F和M的关系。



另解：解析法。取θ为广义坐标。

$$-F\cdot\delta y_B+M\cdot\delta\theta=0$$

$$y_B=2l\sin\theta$$

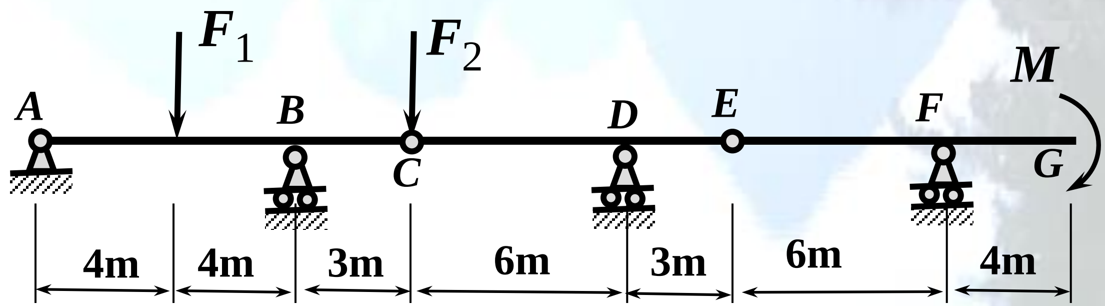
$$\delta y_B=2l\cos\theta\,\delta\theta$$

$$\therefore -F\,2l\cos\theta\,\delta\theta+M\delta\theta=0$$

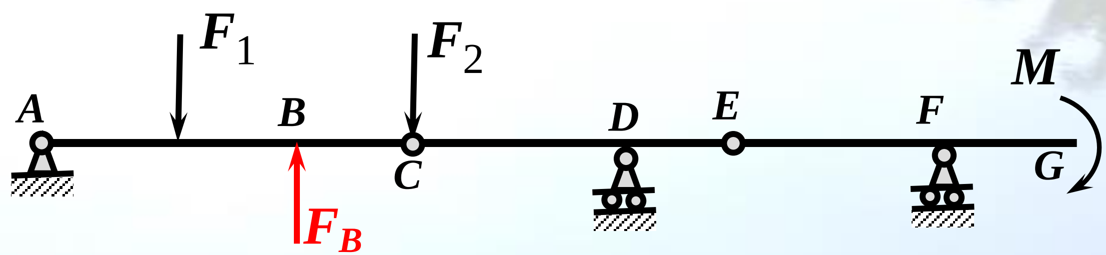
即 $$2Fl\cos\theta=M$$

取$\theta=60°$，解得：$\dfrac{F}{M}=\dfrac{1}{l}$

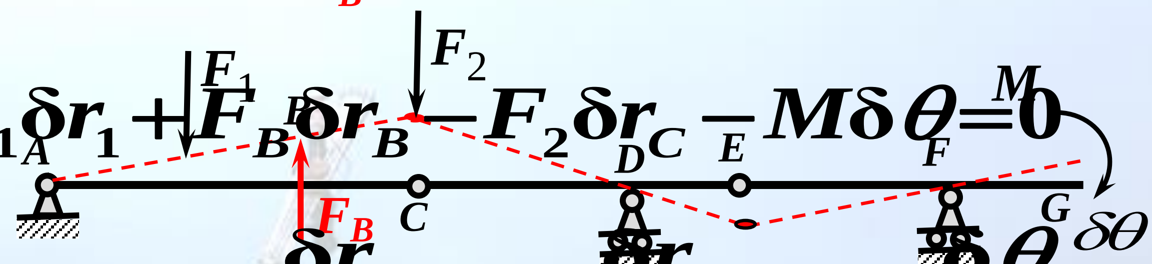
[例3] 多跨静定梁，求支座B处反力。



解：将支座B 除去，代入相应的约束反力。



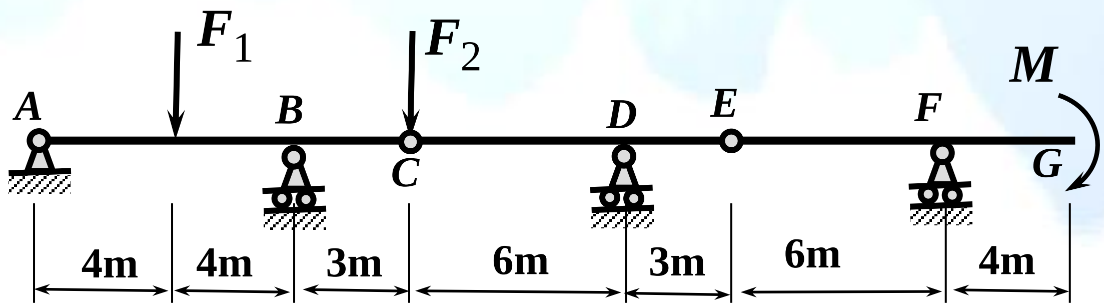
给出虚位移

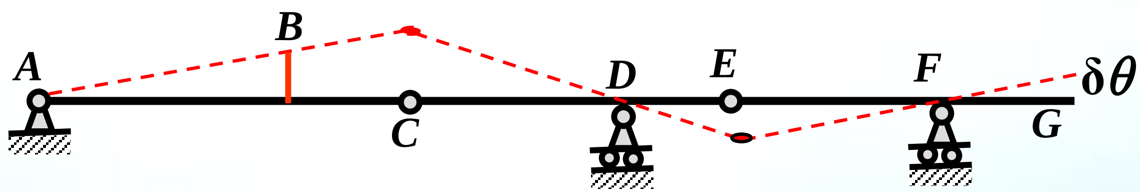


建立虚功方程: $-F_1\delta r_1 + F_B\delta r_B - F_2\delta r_C - M\delta\theta = 0$

$$\therefore \quad F_B = F_1\frac{\delta r_1}{\delta r_B} + F_2\frac{\delta r_C}{\delta r_B} + M\frac{\delta\theta}{\delta r_B}$$

由 $\dfrac{\delta r_1}{\delta r_B} = \dfrac{1}{2}$， $\dfrac{\delta r_C}{\delta r_B} = \dfrac{11}{8}$，





$$\because\ \delta\theta = \frac{\delta r_E}{EF} = \frac{\delta r_E}{6}$$

$$\therefore \frac{\delta\theta}{\delta r_B} = \frac{\delta r_E}{6\times\delta r_B} = \frac{\delta r_C/2}{6\delta r_B} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{1}{12}\times\frac{11}{8} = \frac{11}{96}$$

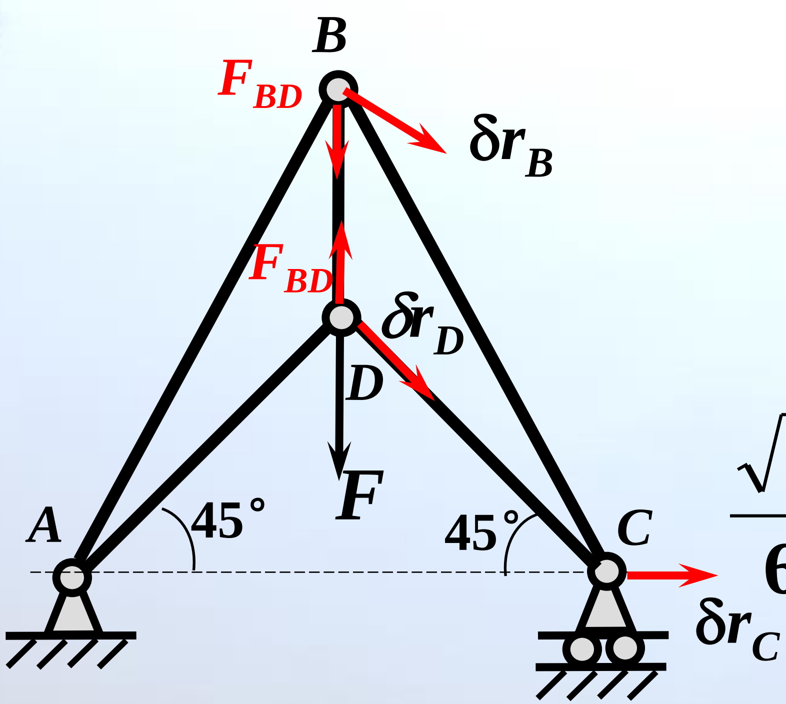
$$\therefore\quad F_B = F_1\frac{\delta r_1}{\delta r_B} + F_2\frac{\delta r_C}{\delta r_B} + M\frac{\delta\theta}{\delta r_B} = \frac{1}{2}F_1 + \frac{11}{8}F_2 + \frac{11}{96}M$$

[例4] 平面桁架，已知$AB=BC=CA=a$，$AD=DC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a$

用虚位移原理求BD杆的内力。

解：几何法，给出虚位移， 建立虚功方程：

$$F_{BD}\cdot\delta r_B\cos 60^\circ - F_{BD}\delta r_D\cos 45^\circ + F\delta r_D\cos 45^\circ = 0$$



$$\delta r_C\cos 60^\circ = \delta r_B\cos 30^\circ$$

$$\delta r_C\cos 45^\circ = \delta r_D$$

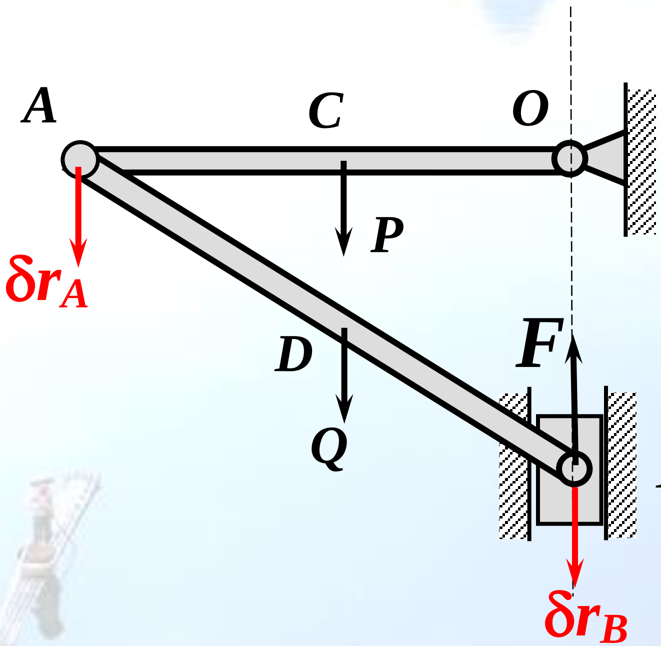
$$\delta r_B = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta r_C \qquad \delta r_D = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta r_C$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}F_{BD}\cdot\cancel{\delta r_C} - \frac{1}{2}F_{BD}\cancel{\delta r_C} + \frac{1}{2}F\cancel{\delta r_C} = 0$$

$$\boxed{\sum F_i\cdot\delta r_i = 0 \quad F_{BD} = \frac{3}{3-\sqrt{3}}F}$$

[例6] AB和AO为均质杆，重量分别为Q和P，不计各处的摩擦和滑块的重量，用虚位移原理求维持系统平衡的力F的大小。

解：建立虚功方程，几何法



$$-F\delta r_B + Q\delta r_D + P\delta r_C = 0$$

$$\delta r_D = \delta r_B$$

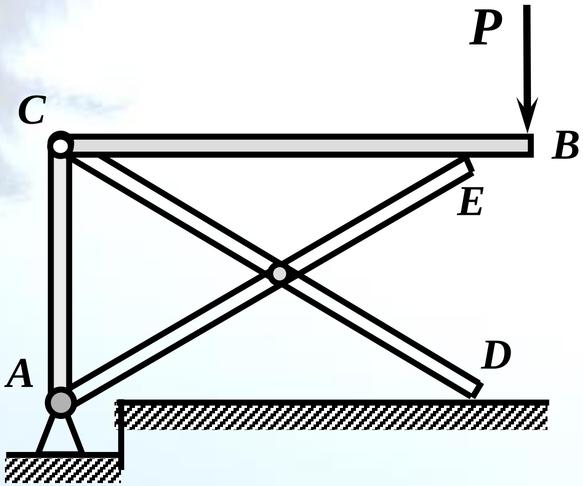
$$\delta r_C = \frac{\delta r_A}{2} = \frac{\delta r_B}{2}$$

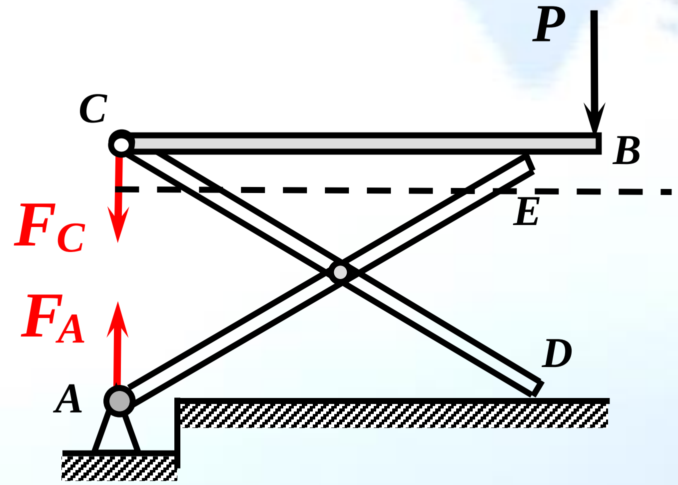
$$-F\delta r_B + Q\delta r_B + P\frac{\delta r_B}{2} = 0$$

$$(-F + Q + \frac{P}{2})\delta r_B = 0$$

即：$-F + Q + \dfrac{P}{2} = 0$ $\therefore\ F = Q + \dfrac{P}{2}$

【题3】已知：$AE=CD=CB=0.5\text{m}$，$AC=0.3\text{m}$，$P=60\text{kN}$，求CA杆内力。





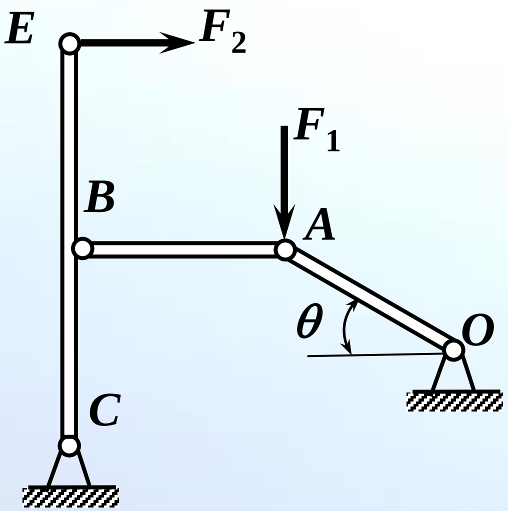
建立虚功方程：

$$P\delta r_B + F_C \delta r_C = 0$$

$$\delta r_B = \delta r_C$$

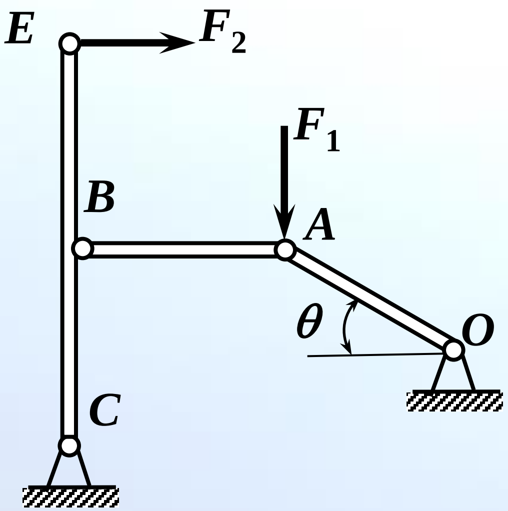
$$\therefore F_C = -P = -60\text{kN}$$

【例3】 图示机构，已知$OA=AB=BC=BE=l$,不计各构件的自重与各处摩擦,在图示位置,杆AB水平,杆EC铅垂,$\theta=30°$,试应用虚位移原理，求机构在图示位置平衡时，力F_1与F_2之间的关系。



【例3】 图示机构，已知$OA=AB=BC=BE=l$,不计各构件的自重与各处摩擦,在图示位置,杆AB水平,杆EC铅垂,$\theta=30°$,试应用虚位移原理，求机构在图示位置平衡时，力F_1与F_2之间的关系。

不能使用解析法

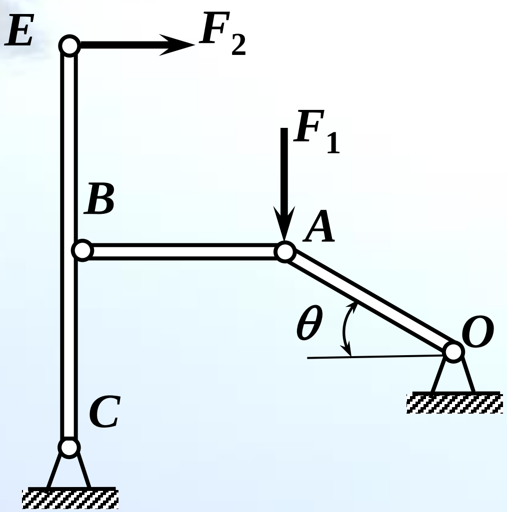


$$\boxed{\sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0}$$

$$\boxed{\sum (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i) = 0}$$

【例3】 图示机构，已知*OA*=*AB*=*BC*=*BE*= *l*,不计各构件的自重与各处摩擦,在图示位置,杆*AB*水平,杆*EC*铅垂,θ=30º,试应用虚位移原理，求机构在图示位置平衡时，力F_1与F_2之间的关系。

不能使用解析法



$$\boxed{\sum(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i)=0}$$

$$-F_1\delta y_A + F_2\delta x_E = 0,$$

$$y_A = l\sin\theta$$

$$x_E = l + l\cos\theta$$

$$\delta y_A = l\cos\theta\,\delta\theta$$

$$\delta x_E = -l\sin\theta\delta\theta$$

$$\therefore\quad -F_1 l\cos\theta\delta\theta + F_2 l\sin\theta\delta\theta = 0$$

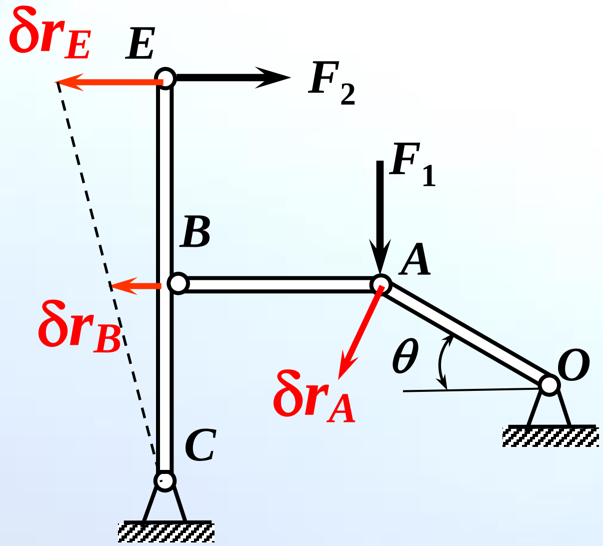
$$(-F_1\cos\theta + F_2\sin\theta)l\delta\theta = 0$$

$$F_1 = F_2\tan\theta$$

$$\therefore\ F_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}F_2$$

【例3】 图示机构，已知$OA=AB=BC=BE=l$,不计各构件的自重与各处摩擦,在图示位置,杆AB水平,杆EC铅垂,$\theta=30°$,试应用虚位移原理，求机构在图示位置平衡时，力F_1与F_2之间的关系。

正确解法：使用几何法



$$\boxed{\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0}$$

$$F_1 \delta r_A \cos 30° - F_2 \delta r_E = 0,$$

$$\delta r_B = \delta r_A \sin 30°$$

$$\delta r_E = 2\delta r_B$$

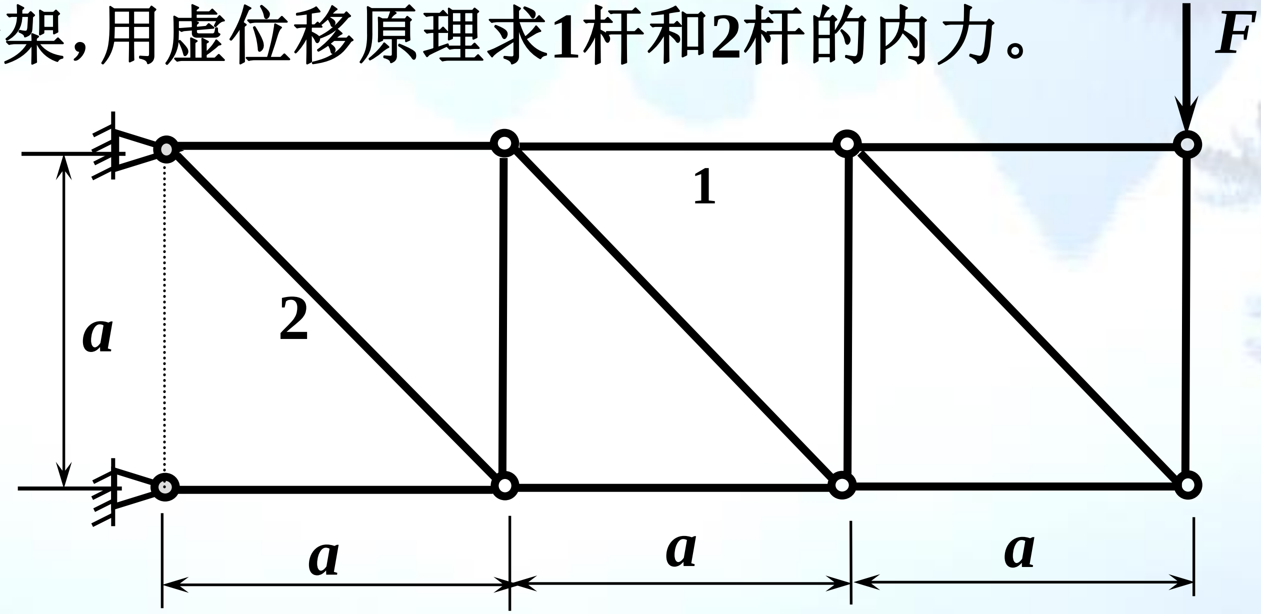
$$\therefore \delta r_E = \delta r_A$$

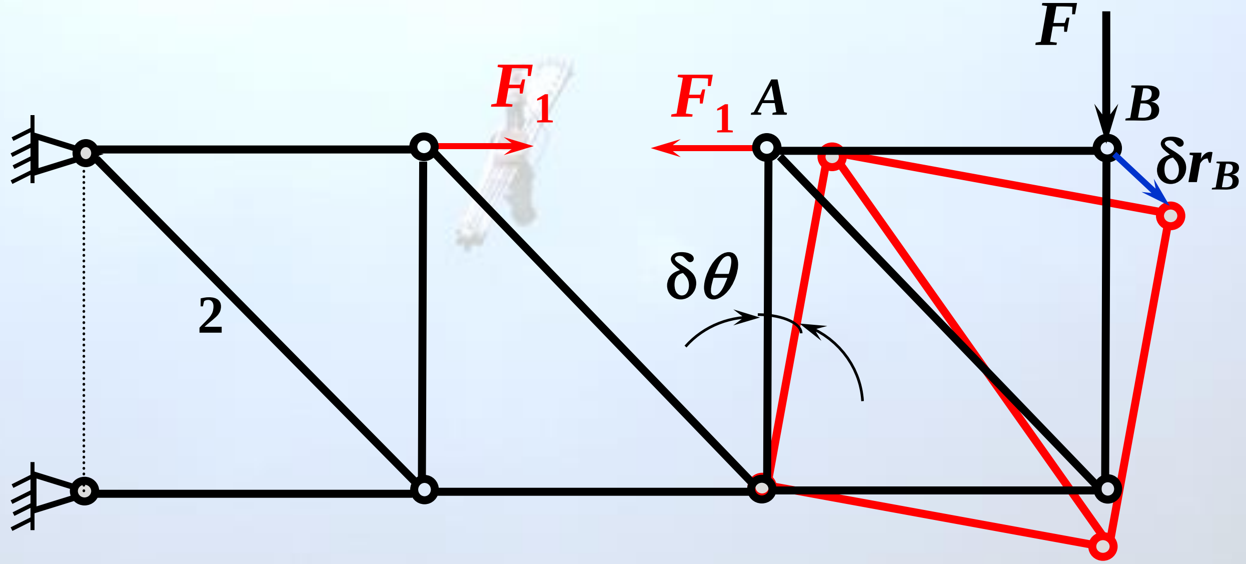
$$F_1 \delta r_A \cos 30° - F_2 \delta r_A = 0,$$

$$(F_1 \cos 30° - F_2)\delta r_A = 0$$

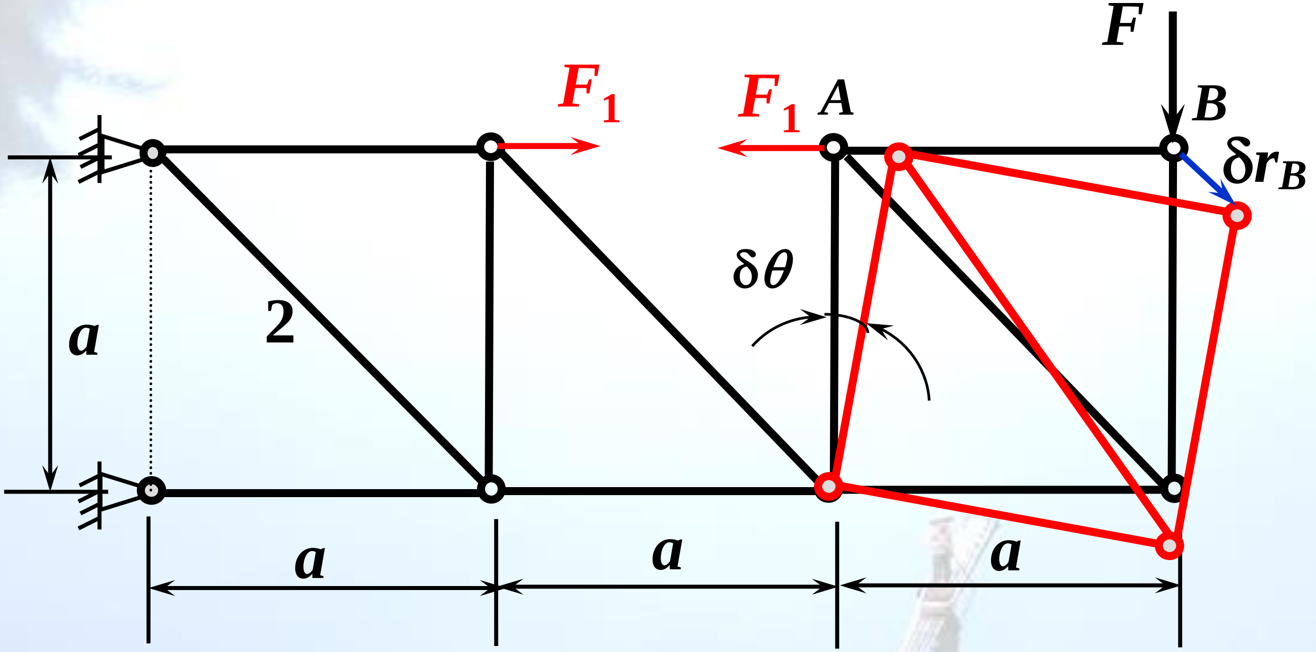
$$F_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} F_2$$

[例5] 平面桁架，用虚位移原理求1杆和2杆的内力。





[例5] 平面桁架，用虚位移原理求1杆和2杆的内力。

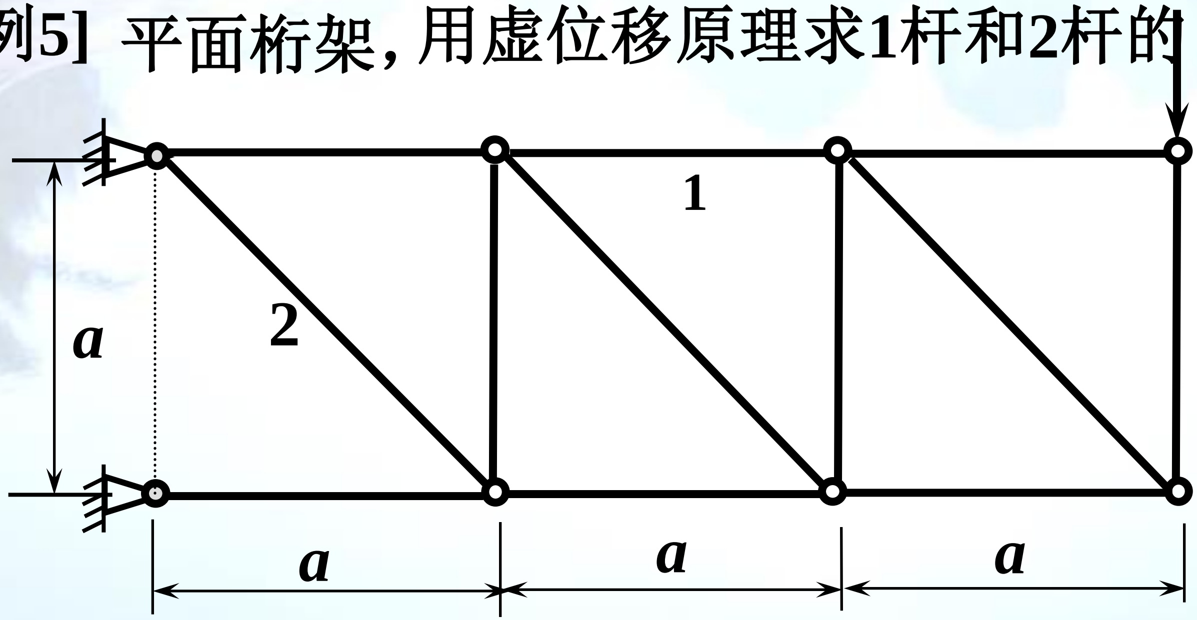


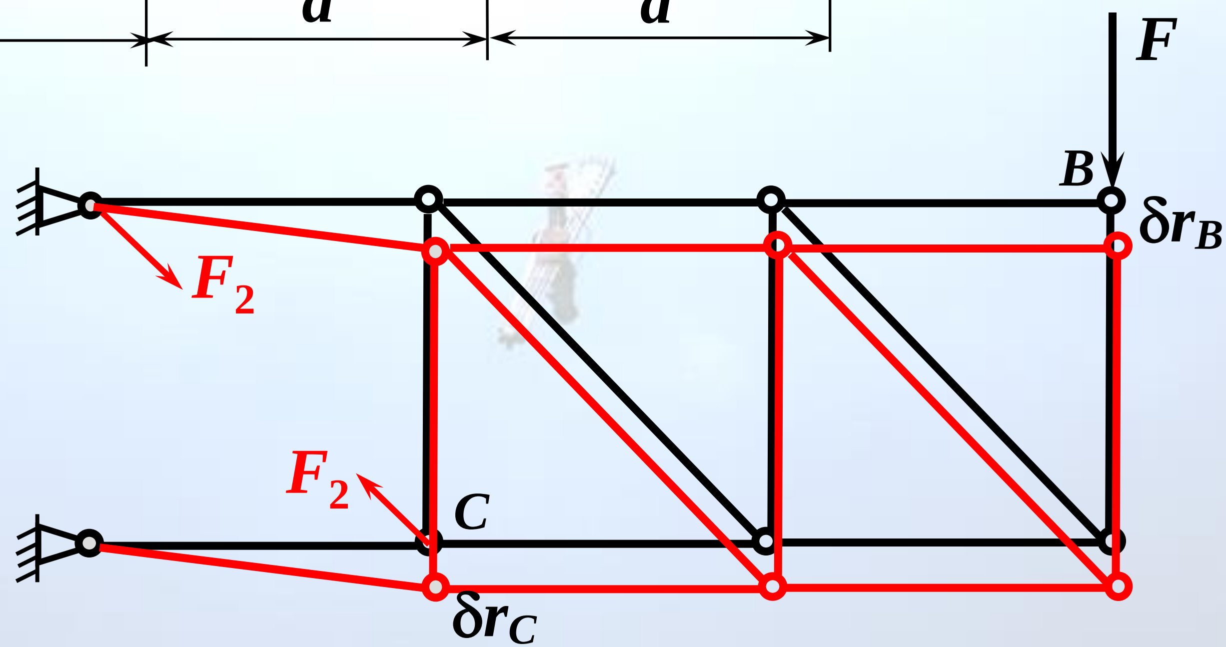
解：建立虚功方程

$$-F_1\delta r_A+F\delta r_B\cos45°=0$$

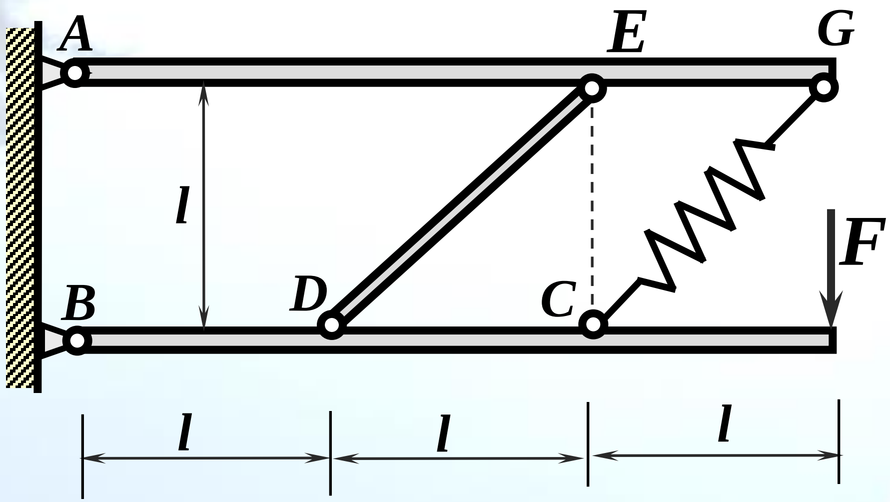
$\delta r_A=a\cdot\delta\theta$　　$\delta r_B=\sqrt{2}a\cdot\delta\theta$　　$\therefore F_1=F$

[例5] 平面桁架，用虚位移原理求1杆和2杆的内力。





[例] 机构如图所示，在F作用下平衡，求弹簧拉力的大小，不计构件自重和所有摩擦。



应用虚位移原理求解质点系平衡问题的步骤和要点：

1、正确选取研究对象：

以不解除约束的理想约束系统为研究对象，系统至少有一个自由度。若系统存在非理想约束，如弹簧力、摩擦力等，可把它们计入主动力，则系统又是理想约束系统，可选为研究对象。

若要求解约束反力，需解除相应的约束，代之以约束反力，并计入主动力。应逐步解除约束，每一次研究对象只解除一个约束，将一个约束反力计入主动力，增加一个自由度。

2、正确进行受力分析：

画出主动力的受力图，包括计入主动力的弹簧力、摩擦力和待求的约束反力。

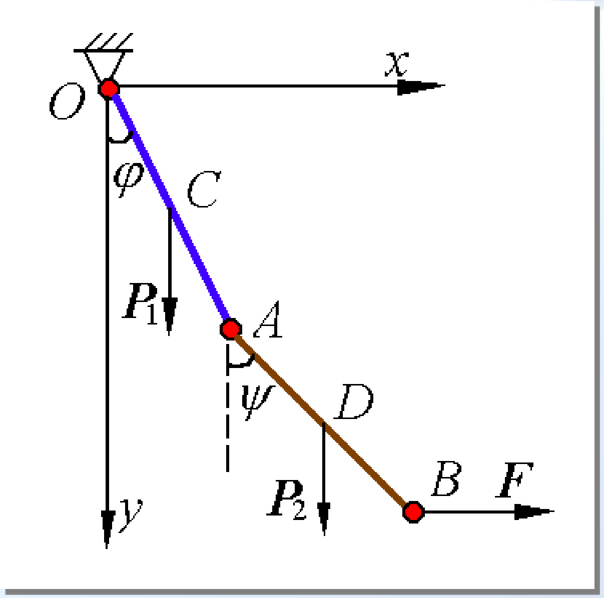
3、正确进行虚位移分析，确定虚位移之间的关系。

4、应用虚位移原理建立方程。

5、解虚功方程求出未知数。

[例4] 均质杆OA及AB在A点用铰连接，并在O点用铰支承，如图所示。两杆各长$2a$和$2b$，各重P_1及P_2，设在B点加水平力$\overline{F}$以维持平衡，求两杆与铅直线所成的角φ及ψ。

解：这是一个具有两个自由度的系统，取角φ及ψ为广义坐标，现用两种方法求解。



y

解法一：解析法

应用虚位移原理，

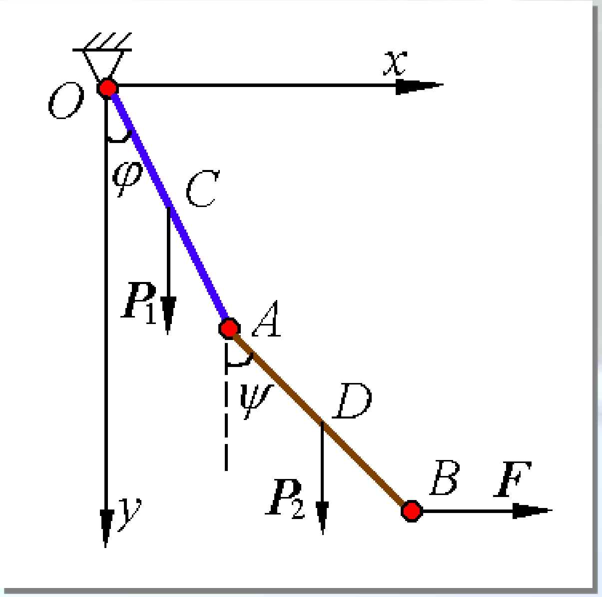
$$P_1\delta y_C+P_2\delta y_D+F\delta x_B=0 \qquad (a)$$

而 $y_C=a\cos\varphi$ ， $\delta y_C=-a\sin\varphi\delta\varphi$

$y_D=2a\cos\varphi+b\cos\psi$ ，

$\delta y_D=-2a\sin\varphi\delta\varphi-b\sin\psi\delta\psi$

$x_B=2a\sin\varphi+2b\sin\psi$ ，$\delta x_B=2a\cos\varphi\delta\varphi+2b\cos\psi\delta\psi$



代入(*a*)式，得：

$$(-P_1a\sin\varphi-P_2 2a\sin\varphi+F\,2a\cos\varphi)\delta\varphi+(-P_2b\sin\psi+F\,2b\cos\psi)\delta\psi=0$$

$$(-P_1 a\sin\varphi - P_2 2a\sin\varphi + F2a\cos\varphi)\delta\varphi + (-P_2 b\sin\psi + F2b\cos\psi)\delta\psi = 0$$

由于$\delta\varphi,\delta\psi$是彼此独立的，所以：

$$-P_1\cdot a\sin\varphi - P_2\cdot 2a\sin\varphi + F\cdot 2a\cos\varphi = 0$$

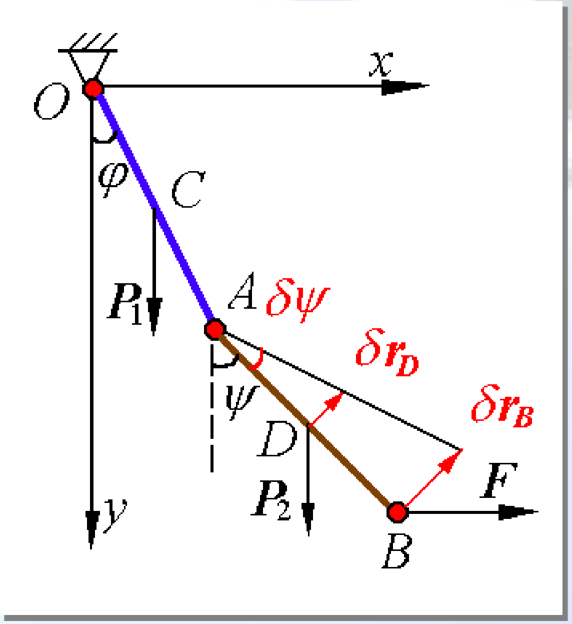
$$-P_2\cdot b\sin\psi + F\cdot 2b\cos\psi = 0$$

由此解得：

$$\tan\varphi = \frac{2F}{P_1 + 2P_2}\quad,\quad \tan\psi = \frac{2F}{P_2}$$

解法二：

先使φ保持不变，而使ψ获得变分$\delta\psi$，得到系统的一组虚位移，如图所示。



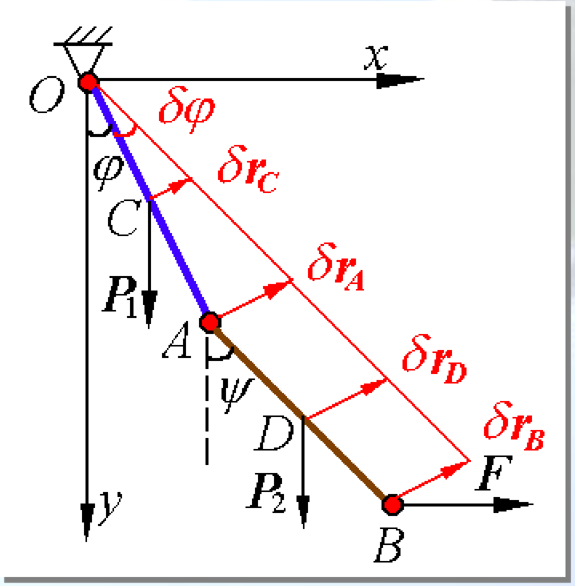
$$F\delta r_B\cos\psi - P_2\delta r_D\sin\psi = 0$$

而 $\delta r_B = 2b\delta\psi$ ，$\delta r_D = b\delta\psi$

代入上式，得

$$\tan\psi = \frac{F\cdot 2b\delta\psi}{P_2\cdot b\delta\psi} = \frac{2F}{P_2}$$

再使ψ保持不变，而使φ获得变分$\delta\varphi$，得到系统的另一组虚位移，如图所示。



图示中：
$$\delta\overline{r}_A=\delta\overline{r}_D=\delta\overline{r}_B$$

$$F\delta r_B\cos\varphi-P_1\delta r_C\sin\varphi-P_2\delta r_D\sin\varphi=0$$

而
$$\delta r_C=a\delta\varphi\ ,$$
$$\delta r_B=\delta r_D=\delta r_A=2a\delta\varphi$$

代入上式后，得：

$$(F\cos\varphi\cdot 2a-P_1\cdot a\sin\varphi-P_2\cdot 2a\sin\varphi)\delta\varphi=0$$

$$\tan\varphi=\frac{2F}{P_1+2P_2}$$

应用虚位移原理求解质点系平衡问题的步骤和要点：

1、正确选取研究对象：

以不解除约束的理想约束系统为研究对象，系统至少有一个自由度。若系统存在非理想约束，如弹簧力、摩擦力等，可把它们计入主动力，则系统又是理想约束系统，可选为研究对象。

若要求解约束反力，需解除相应的约束，代之以约束反力，并计入主动力。应逐步解除约束，每一次研究对象只解除一个约束，将一个约束反力计入主动力，增加一个自由度。

2、正确进行受力分析：

画出主动力的受力图，包括计入主动力的弹簧力、摩擦力和待求的约束反力。

3、正确进行虚位移分析，确定虚位移之间的关系。

4、应用虚位移原理建立方程。

5、解虚功方程求出未知数。