

# Escuela Politécnica Nacional

**Asignatura:** Métodos Numéricos

**Nombre:** Francisco Ulloa

**Fecha:** 5 de noviembre de 2025

## 1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de $p$ y $p^*$

$$\text{Error absoluto} = [p - p^*]$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] * 100$$

**a.**  $p = \pi$ ,  $p^* = \frac{22}{7}$  Error absoluto =  $[p - p^*]$

$$\text{Error absoluto} = [3.141592654 - 3.142857143]$$

$$\text{Error absoluto} = 1.264489267 \times 10^{-3}$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{\pi - \frac{22}{7}}{\pi} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = 4.026 \times 10^{-2}\%$$

**b.**  $p = \pi$ ,  $p^* = 3.1416$  Error absoluto =  $[p - p^*]$

$$\text{Error absoluto} = [3.141592654 - 3.1416]$$

$$\text{Error absoluto} = 7.3464102 \times 10^{-6}$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{\pi - 3.1416}{\pi} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = 2.338 \times 10^{-4}\%$$

**c.**  $p = e$ ,  $p^* = 2.718$  Error absoluto =  $[p - p^*]$

$$\text{Error absoluto} = [2.718281828 - 2.718]$$

$$\text{Error absoluto} = 2.81828459 \times 10^{-4}$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{e - 2.718}{e} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = 1.037 \times 10^{-2}\%$$

**d.**  $p = \sqrt{2}$ ,  $p^* = 1.414$  Error absoluto =  $[p - p^*]$

$$\text{Error absoluto} = [1.414213562 - 1.414]$$

$$\text{Error absoluto} = 2.135623731 \times 10^{-4}$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{\sqrt{2} - 1.414}{\sqrt{2}} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = 1.510 \times 10^{-2}\%$$

## 2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de $p$ y $p^*$

**a.**  $p = e^{10}$ ,  $p^* = 22000$

$$\text{Error absoluto} = [p - p^*]$$

$$\text{Error absoluto} = [22026.46579 - 22000]$$

$$\text{Error absoluto} = 26.46579$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] * 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{e^{10} - 22000}{e^{10}} \right] \times 100$$

$$\text{Error relativo} = 0.1202\%$$

**b.**  $p = 10^\pi$ ,  $p^* = 1400$   
 Error absoluto =  $[p - p^*]$   
 Error absoluto =  $[1385.455731 - 1400]$   
 Error absoluto = 14.544269

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] \times 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{10^\pi - 1400}{10^\pi} \right] \times 100$$

$$\text{Error relativo} = 1.050\%$$

**c.**  $p = 8!$ ,  $p^* = 39900$   
 Error absoluto =  $[p - p^*]$   
 Error absoluto =  $[40320 - 39900]$   
 Error absoluto = 420

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] \times 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{8! - 39900}{8!} \right] \times 100$$

$$\text{Error relativo} = 1.042\%$$

**d.**  $p = 9!$ ,  $p^* = \sqrt{18\pi} \times \left(\frac{9}{e}\right)^9$   
 Error absoluto =  $[p - p^*]$   
 Error absoluto =  $[362880 - 363046.421]$   
 Error absoluto = 166.421

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{p - p^*}{p} \right] \times 100$$

$$\text{Error relativo} = \left[ \frac{9! - \sqrt{18\pi} \times \left(\frac{9}{e}\right)^9}{9!} \right] \times 100$$

$$\text{Error relativo} = 0.0458\%$$

**Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar  $p^*$  para aproximarse a  $p$  con error relativo máximo de  $10^{-4}$  para cada valor de  $p$ .**

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{p - p^*}{p} \right|$$

$$p^* = \pm \left( \frac{\text{Error relativo} \times p}{100} - p \right)$$

**a.**  $\pi$   $p^* = \pm \left( \frac{\text{Error relativo} \times p}{100} - p \right)$

$$p^* = \pm \left( \frac{10^{-4} \times 3.141592654}{100} - 3.141592654 \right)$$

$$\text{Intervalo} = (-3.141589512, 3.141589512)$$

**b.**  $e$   
 $p^* = \pm \left( \frac{10^{-4} \times 2.718281828}{100} - 2.718281828 \right)$

$$\text{Intervalo} = (-2.718279109, 2.718279109)$$

**c.**  $\sqrt{2}$   
 $p^* = \pm \left( \frac{10^{-4} \times 1.414213562}{100} - 1.414213562 \right)$

d.  $\sqrt[3]{7}$

Intervalo =  $(-1.912929269, 1.912929269)$  Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto de terminado para por lo menos cinco dígitos a.  $\frac{\frac{13}{14} - \frac{5}{7}}{2e^{-5.4}}$

$$\frac{\frac{13}{14} - \frac{5}{7}}{2e - 5.4}$$

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{5.860620418 - 5.86}{5.860620418} \right| * 100 = 1.058 \times 10^{-2} \%$$

**b.**  $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{-12.25619913 - (-12.3)}{-12.25619913} \right| * 100 = 0.357\%$$

**c.**  $\left(\frac{2}{9}\right) * \left(\frac{9}{11}\right)$

$$\text{Error relative} = \left| \frac{0.181818 - 0.182}{0.181818} \right| * 100 = 1 \times 10^{-1} \%$$

d.  $\frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{7.5937511 - 7.59}{7.5937511} \right| * 100 = 4.94 \times 10^{-2}\%$$

**a.**  $4[\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}]$

Usando el polinomio  $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$  (hasta  $x^5$ ):

Para  $x = \frac{1}{2}$ :

$$P_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}$$

$$P_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160}$$

$$P_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5 - 0.04166666666666666666666666667 + 0.00625$$

$$P_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0.46458333333333333333333333333333$$

Para  $x = \frac{1}{3}$ :

$$P_5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5}$$

$$P_5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}$$

$$P_5\left(\frac{1}{3}\right) = \overset{\begin{matrix} 9 \\ 9 \end{matrix}}{0.33333333333333333333333333333333} - \overset{\begin{matrix} 81 & 1215 \\ 9 & 9 \end{matrix}}{0.012345679012345679012345679012} + \overset{\begin{matrix} 9 & 81 & 1215 \\ 9 & 9 & 9 \end{matrix}}{0.000823045267489711942156490701}$$

$$P_5\left(\frac{1}{3}\right) = 0.321810699588477366255144032922$$

$$\pi_{\text{approx}} = 4(P_5(\frac{1}{2}) + P_5(\frac{1}{3}))$$

$$\begin{aligned}\pi_{\text{approx}} &= 4(0.46458333333333333333333333333333 + 0.321810699588477366255144032922) \\ \pi_{\text{approx}} &= 3.14557613168724279835390946502\end{aligned}$$

Errores (comparando con  $\pi = 3.141592653589793238462643383279\dots$ ):

Error absoluto:

$$\begin{aligned} |\pi - \pi_{\text{approx}}| &= |3.141592653589793238462643383279 - 3.14557613168724279835390946502| \\ |\pi - \pi_{\text{approx}}| &= 0.003983478097449559891266081741 \end{aligned}$$

Error relativo (%):

$$\frac{|\pi - \pi_{\text{approx}}|}{\pi} \times 100\% = 0.126798045981479241432532204002\%$$

Usando el polinomio truncado  $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$  (hasta  $x^5$ ):

Para  $x = \frac{1}{5}$ :

$$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5}$$

$$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = 0.2 - \frac{1}{375} + \frac{1}{15625}$$

$$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = 0.2 - 0.00266666666666667 + 0.000064$$

$$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = 0.197397333333333$$

Para  $x = \frac{1}{239}$ :

$$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{1}{239} - \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^5}{5}$$

$$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = 0.0041841004184100 - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5}$$

$$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = 0.0041841004184100 - 2.43971594 \times 10^{-8} + 2.60628853 \times 10^{-13}$$

$$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = 0.0041840760213$$

Aproximación de  $\pi$  usando  $16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)$  con  $P_5$ :

$$\pi_{\text{approx}} = 16P_5(\frac{1}{5}) - 4P_5(\frac{1}{239})$$

$$\pi_{\text{approx}} = 16(0.1973973333333333) - 4(0.0041840760213)$$

$$\pi_{\text{approx}} = 3.15134133333333 - 0.0167363040852$$

$$\pi_{\text{approx}} = 3.1346050292481$$

Errores (comparando con  $\pi = 3.141592653589793238\dots$ ):

Error absoluto:

$$|\pi - \pi_{\text{approx}}| = |3.141592653589793238 - 3.1346050292481|$$

$$|\pi - \pi_{\text{approx}}| = 0.006987624341693238$$

Error relativo (%):

$$\frac{|\pi - \pi_{\text{approx}}|}{\pi} \times 100\% = 0.2224\%$$

El número  $e$  se puede definir por medio de  $e = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!})$ , donde  $n! = n(n-1)...2*1$  para  $n! = 0$  y  $0! = 1$ . Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de  $e$ :

a.  $\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}$

Aproximación:

$$S_5 = \sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

$$S_5 = 2.71667$$

Valor real:

$$e = 2.71828183$$

Error absoluto:

$$|e - S_5| = |2.71828183 - 2.71667| = 0.00161$$

Error relativo (%):

$$\frac{|e - S_5|}{e} \times 100 = 0.0594\%$$

b.  $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

Aproximación:

$$S_{10} = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{10!}$$

$$S_{10} = 2.71828$$

Error absoluto:

$$|e - S_{10}| = |2.71828183 - 2.71828| = 0.00000$$

Error relativo (%):

$$\frac{|e - S_{10}|}{e} \times 100 = 0.0000010\%$$

**Suponga que los dos puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  se encuentran en línea recta con  $y_1 \neq y_0$ . Existen dos fórmulas para calcular la intersección con  $x$  de la línea:  $x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$  y  $x_0 = \frac{(x_1 - y_0) y_0}{y_1 - y_0}$**

**a. Use los datos  $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$  y  $(x_1, y_1) = (1.93, 5.76)$  y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con  $x$  de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?**

**Suponga que los dos puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  están en línea recta con  $y_1 \neq y_0$ .**

Existen dos fórmulas para calcular la intersección con  $x$  (intersección con el eje  $x$ , es decir  $y = 0$ ):

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{y} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$$

**Datos:**  $x_0 = 1.31$ ,  $y_0 = 3.24$ ,  $x_1 = 1.93$ ,  $y_1 = 5.76$ .

Usaremos aritmética de redondeo a **3 cifras significativas** en cada paso.

**Método A:**  $x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$

Calculemos paso a paso (redondeando cada resultado a 3 cifras significativas):

$$y_1 - y_0 = 5.76 - 3.24 = 2.52 \quad (3 \text{ cifras: } 2.52).$$

$$x_0 y_1 = 1.31 \times 5.76 = 7.5456 \Rightarrow \text{redondeo a 3 cifras: } 7.55.$$

$$x_1 y_0 = 1.93 \times 3.24 = 6.2532 \Rightarrow \text{redondeo a 3 cifras: } 6.25.$$

$$\text{Numerador: } x_0 y_1 - x_1 y_0 = 7.55 - 6.25 = 1.30 \quad (3 \text{ cifras: } 1.30).$$

$$\text{División: } x_A = \frac{1.30}{2.52} = 0.515873 \dots \Rightarrow \text{redondeo a 3 cifras: } \boxed{0.516}.$$

$$\textbf{Método B: } x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$$

Paso a paso (redondeando a 3 cifras en cada paso):

$$x_1 - x_0 = 1.93 - 1.31 = 0.62 \quad (3 \text{ cifras: } 0.62).$$

$$(x_1 - x_0) y_0 = 0.62 \times 3.24 = 2.0088 \Rightarrow \text{redondeo a 3 cifras: } 2.01.$$

$$\text{División: } \frac{2.01}{2.52} = 0.797619 \dots \Rightarrow \text{redondeo a 3 cifras: } 0.798.$$

$$\text{Resta final: } x_B = 1.31 - 0.798 = 0.512 \quad (3 \text{ cifras: } \boxed{0.512}).$$

### Comparación con el valor exacto (sin redondeo intermedio):

Valor exacto (calc. con precisión completa):

$$x_{\text{exacto}} = \frac{1.31 \cdot 5.76 - 1.93 \cdot 3.24}{5.76 - 3.24} = \frac{7.5456 - 6.2532}{2.52} = \frac{1.2924}{2.52} = 0.512619 \dots$$

Errores absolutos de las aproximaciones redondeadas:

$$|x_A - x_{\text{exacto}}| = |0.516 - 0.512619 \dots| \approx 0.00338$$

$$|x_B - x_{\text{exacto}}| = |0.512 - 0.512619 \dots| \approx 0.00062$$

### Conclusión — ¿qué método es mejor y por qué?

El método B ( $x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$ ) produce una aproximación mucho más cercana al valor exacto en aritmética de 3 cifras significativas (0.512 frente a 0.516).

La razón es la propagación del error por *subtracción entre cantidades de orden similar* en el método A: al calcular  $x_0 y_1 - x_1 y_0$  se restan dos números relativamente grandes y cercanos ( $\sim 7.55$  y  $\sim 6.25$ ) dando un numerador pequeño ( $\sim 1.29$ ). Esa resta magnifica los errores de redondeo (cancelación numérica).

El método B evita esa resta directa de dos productos grandes: primero se toma la diferencia  $x_1 - x_0$  (un número pequeño, aquí 0.62), se escala y se sustrae de  $x_0$ . En práctica, esto reduce la cancelación numérica y la pérdida de precisión en aritmética con pocas cifras significativas, por eso B es preferible en este caso.