# Escuela Politécnica Nacional

**Asignatura:** Métodos Numéricos
**Nombre:** Francisco Ulloa
**Fecha:** 5 de noviembre de 2025

**1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de $p$ y $p^*$**
Error absoluto $= [p - p^*]$
Error relativo $[\frac{p-p^*}{p}] * 100$

**a.** $p = \pi$, $p^* = \frac{22}{7}$ Error absoluto $= [p - p^*]$
Error absoluto $= [3.141592654 - 3.142857143]$
Error absoluto $= 1.264489267 \times 10^{-3}$

Error relativo $[\frac{p-p^*}{p}] * 100$
Error relativo $[\frac{\pi - \frac{22}{7}}{\pi}] * 100$
Error relativo $= 4.026 \times 10^{-2}\%$

**b.** $p = \pi$, $p^* = 3.1416$ Error absoluto $= [p - p^*]$
Error absoluto $= [3.141592654 - 3.1416]$
Error absoluto $= 7.3464102 \times 10^{-6}$

Error relativo $[\frac{p-p^*}{p}] * 100$
Error relativo $[\frac{\pi - 3.1416}{\pi}] * 100$
Error relativo $= 2.338 \times 10^{-4}\%$

**c.** $p = e$, $p^* = 2.718$ Error absoluto $= [p - p^*]$
Error absoluto $= [2.718281828 - 2.718]$
Error absoluto $= 2.81828459 \times 10^{-4}$

Error relativo $[\frac{p-p^*}{p}] * 100$
Error relativo $[\frac{e - 2.718}{e}] * 100$
Error relativo $= 1.037 \times 10^{-2}\%$

**d.** $p = \sqrt{2}$, $p^* = 1.414$ Error absoluto $= [p - p^*]$
Error absoluto $= [1.414213562 - 1.414]$
Error absoluto $= 2.135623731 \times 10^{-4}$

Error relativo $[\frac{p-p^*}{p}] * 100$
Error relativo $[\frac{\sqrt{2} - 1.414}{\sqrt{2}}] * 100$
Error relativo $= 1.510 \times 10^{-2}\%$

**2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de $p$ y $p^*$**

**a.** $p = e^{10}$, $p^* = 22000$
Error absoluto $= [p - p^*]$
Error absoluto $= [22026.46579 - 22000]$
Error absoluto $= 26.46579$

Error relativo $= \left[\frac{p-p^*}{p}\right] \times 100$

Error relativo $= \left[\frac{e^{10}-22000}{e^{10}}\right] \times 100$
Error relativo $= 0.1202\%$

**b.** $p = 10^{\pi}$**,** $p^{*} = 1400$
Error absoluto $= [p - p^{*}]$
Error absoluto $= [1385.455731 - 1400]$
Error absoluto $= 14.544269$

Error relativo $= \left[\frac{p-p^{*}}{p}\right] \times 100$
Error relativo $= \left[\frac{10^{\pi}-1400}{10^{\pi}}\right] \times 100$
Error relativo $= 1.050\%$

**c.** $p = 8!$**,** $p^{*} = 39900$
Error absoluto $= [p - p^{*}]$
Error absoluto $= [40320 - 39900]$
Error absoluto $= 420$

Error relativo $= \left[\frac{p-p^{*}}{p}\right] \times 100$
Error relativo $= \left[\frac{8!-39900}{8!}\right] \times 100$
Error relativo $= 1.042\%$

**d.** $p = 9!$**,** $p^{*} = \sqrt{18\pi} \times \left(\frac{9}{e}\right)^{9}$
Error absoluto $= [p - p^{*}]$
Error absoluto $= [362880 - 363046.421]$
Error absoluto $= 166.421$

Error relativo $= \left[\frac{p-p^{*}}{p}\right] \times 100$
Error relativo $= \left[\frac{9!-\sqrt{18\pi}\times\left(\frac{9}{e}\right)^{9}}{9!}\right] \times 100$
Error relativo $= 0.0458\%$

**Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar $p^*$ para aproximarse a p con error relativo máximo de $10^{-4}$ para cada valor de $p$.**

Error relativo $= |\frac{p-p^{*}}{p}|$
p* $= \pm(\frac{Errorrelativo*p}{100} - p)$

**a.** $\pi$ p* $= \pm(\frac{Error\ relativo*p}{100} - p)$

p* $= \pm(\frac{10^{-4}*3.141592654}{100} - 3.141592654)$
Intervalo $= (-3.141589512, 3.141589512)$

**b.** $e$
p* $= \pm(\frac{10^{-4}*2.718281828}{100} - 2.718281828)$

Intervalo $= (-2.718279109,\ 2.718279109)$

**c.** $\sqrt{2}$
p* $= \pm\left(\frac{10^{-4}*1.414213562}{100} - 1.414213562\right)$

Intervalo $= (-1.414212147,\ 1.414212147)$

**d.** $\sqrt[3]{7}$
p* $= \pm(\frac{10^{-4}*1.9129311827723891}{100} - 1.9129311827723891)$

Intervalo $= (-1.912929269,\ 1.912929269)$ **Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto de terminado para por lo menos cinco dígitos a.** $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$

$\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$
Valor real $= 5.860620418$, Valor redondeado $= 5.86$ Error absoluto $= |5.860620418 - 5.86| = 6.20418 \times 10^{-4}$
Error relativo $= |\frac{5.860620418-5.86}{5.860620418}| * 100 = 1.058 \times 10^{-2}\%$

**b.** $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$
Valor real $= -12.25619913$, Valor redondeado $= -12.3$
Error absoluto $= |-12.25619913 - (-12.3)| = 0.04380087$
Error relativo $= \left|\frac{-12.25619913-(-12.3)}{-12.25619913}\right| * 100 = 0.357\%$

**c.** $(\frac{2}{9}) * (\frac{9}{11})$
Valor real $= 0.181818$, Valor redondeado $= 0.182$
Error absoluto $= |0.181818 - 0.182| = 1.8182 \times 10^{-4}$
Error relativo $= |\frac{0.181818-0.182}{0.181818}| * 100 = 1 \times 10^{-1}\%$

**d.** $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$
Valor real $= 7.5937511$, Valor redondeado $= 7.59$
Error absoluto $= |7.5937511 - 7.59| = 3.7511 \times 10^{-3}$
Error relativo $= |\frac{7.5937511-7.59}{7.5937511}| * 100 = 4.94 \times 10^{-2}\%$

**5. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son:** $x - (\frac{1}{2}) * x^3 + (\frac{1}{3}) * x^5$ **Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de** $\pi$ **mediante el polinomia en lugar del arcotangente**

**a.** $4[\arctan\frac{1}{2} + arctan\frac{1}{3}]$

**Usando el polinomio**$P_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$ **(hasta** $x^5$**):**

Para $x = \frac{1}{2}$:
$$P_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5}$$
$P_5(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160}$
$P_5(\frac{1}{2}) = 0.5 - 0.041666666666666666666666666667 + 0.00625$
$P_5(\frac{1}{2}) = 0.464583333333333333333333333333$

Para $x = \frac{1}{3}$:
$P_5(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{(\frac{1}{3})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{5}$
$P_5(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}$
$P_5(\frac{1}{3}) = 0.333333333333333333333333333333 - 0.012345679012345679012345679012 + 0.000823045267489711942156490701$
$P_5(\frac{1}{3}) = 0.32181069958847736625514403292$

Aproximación de $\pi$ usando $4(\arctan(1/2) + \arctan(1/3))$ con $P_5$:
$\pi_{\text{approx}} = 4\big(P_5(\frac{1}{2}) + P_5(\frac{1}{3})\big)$

$\pi_{\text{approx}} = 4\big(0.4645833333333333333333333333333 + 0.3218106995884773662551440329 22\big)$
$\pi_{\text{approx}} = 3.1455761316872427983539094 6502$

Errores (comparando con $\pi = 3.1415926535897932384626433832 79\ldots$):
Error absoluto:
$|\pi - \pi_{\text{approx}}| = |3.1415926535897932384626433832 79 - 3.1455761316872427983539094 6502|$
$|\pi - \pi_{\text{approx}}| = 0.0039834780974495598912660817 41$

Error relativo (%):
$\frac{|\pi - \pi_{\text{approx}}|}{\pi} \times 100\% = 0.1267980459814792414325322040 02\%$

**Usando el polinomio truncado $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ (hasta $x^5$):**

Para $x = \frac{1}{5}$:
$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{(\frac{1}{5})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{5})^5}{5}$
$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = 0.2 - \frac{1}{375} + \frac{1}{15625}$
$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = 0.2 - 0.0026666666666667 + 0.000064$
$P_5\left(\frac{1}{5}\right) = 0.1973973333333333$

Para $x = \frac{1}{239}$:
$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{1}{239} - \frac{(\frac{1}{239})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{239})^5}{5}$
$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = 0.0041841004184100 - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5}$
$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = 0.0041841004184100 - 2.43971594 \times 10^{-8} + 2.60628853 \times 10^{-13}$
$P_5\left(\frac{1}{239}\right) = 0.0041840760213$

Aproximación de $\pi$ usando $16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239)$ con $P_5$:
$\pi_{\text{approx}} = 16P_5(\frac{1}{5}) - 4P_5(\frac{1}{239})$
$\pi_{\text{approx}} = 16(0.1973973333333333) - 4(0.0041840760213)$
$\pi_{\text{approx}} = 3.151341333333333 - 0.0167363040852$
$\pi_{\text{approx}} = 3.1346050292481$

Errores (comparando con $\pi = 3.141592653589793238\ldots$):
Error absoluto:
$|\pi - \pi_{\text{approx}}| = |3.141592653589793238 - 3.1346050292481|$
$|\pi - \pi_{\text{approx}}| = 0.006987624341693238$

Error relativo (%):
$\frac{|\pi - \pi_{\text{approx}}|}{\pi} \times 100\% = 0.2224\%$

**El número e se puede definir por medio de $e = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!})$, donde $n! = n(n-1)...2*1$ para $n! = 0$ y $0! = 1$. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de $e$:**

**a.** $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$

Aproximación:
$S_5 = \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$
$S_5 = 2.71667$

Valor real:
$e = 2.71828183$

Error absoluto:
$|e - S_5| = |2.71828183 - 2.71667| = 0.00161$

Error relativo (%):
$\frac{|e - S_5|}{e} \times 100 = 0.0594\%$

**b.** $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

Aproximación:
$S_{10} = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{10!}$
$S_{10} = 2.71828$

Error absoluto:
$|e - S_{10}| = |2.71828183 - 2.71828| = 0.00000$

Error relativo (%):
$\frac{|e - S_{10}|}{e} \times 100 = 0.0000010\%$

**Suponga que los dos puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$ se encuentran en línea recta con $y_1! = y_0$. Existen dos fórmulas para calcualr la intersección con $x$ de la línea: $x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$ y $x_0 = \frac{(x_1 - y_0)y_0}{y_1 - y_0}$**

**a. Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93, 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con $x$ de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?**

**Suponga que los dos puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$ están en línea recta con $y_1 \neq y_0$.**
Existen dos fórmulas para calcular la intersección con $x$ (intersección con el eje $x$, es decir $y = 0$):
$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$ y $x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)\, y_0}{y_1 - y_0}$

**Datos:** $x_0 = 1.31,\ y_0 = 3.24,\ x_1 = 1.93,\ y_1 = 5.76.$
Usaremos aritmética de redondeo a **3 cifras significativas** en cada paso.

**Método A:** $x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$

Calculemos paso a paso (redondeando cada resultado a 3 cifras significativas):
$y_1 - y_0 = 5.76 - 3.24 = 2.52 \quad$ (3 cifras: 2.52).

$x_0 y_1 = 1.31 \times 5.76 = 7.5456 \Rightarrow$ redondeo a 3 cifras: 7.55.

$x_1 y_0 = 1.93 \times 3.24 = 6.2532 \Rightarrow$ redondeo a 3 cifras: 6.25.

Numerador: $x_0 y_1 - x_1 y_0 = 7.55 - 6.25 = 1.30$ (3 cifras: 1.30).

División: $x_A = \dfrac{1.30}{2.52} = 0.515873\ldots \Rightarrow$ redondeo a 3 cifras: $\boxed{0.516}$.

**Método B:** $x = x_0 - \dfrac{(x_1 - x_0)\, y_0}{y_1 - y_0}$

Paso a paso (redondeando a 3 cifras en cada paso):
$x_1 - x_0 = 1.93 - 1.31 = 0.62$ (3 cifras: 0.62).

$(x_1 - x_0)\, y_0 = 0.62 \times 3.24 = 2.0088 \Rightarrow$ redondeo a 3 cifras: 2.01.

División: $\dfrac{2.01}{2.52} = 0.797619\ldots \Rightarrow$ redondeo a 3 cifras: 0.798.

Resta final: $x_B = 1.31 - 0.798 = 0.512$ (3 cifras: $\boxed{0.512}$).

**Comparación con el valor exacto (sin redondeo intermedio):**
Valor exacto (calc. con precisión completa):
$$x_{\text{exacto}} = \frac{1.31 \cdot 5.76 - 1.93 \cdot 3.24}{5.76 - 3.24} = \frac{7.5456 - 6.2532}{2.52} = \frac{1.2924}{2.52} = 0.512619\ldots$$

Errores absolutos de las aproximaciones redondeadas:
$|x_A - x_{\text{exacto}}| = |0.516 - 0.512619\ldots| \approx 0.00338$
$|x_B - x_{\text{exacto}}| = |0.512 - 0.512619\ldots| \approx 0.00062$

**Conclusión — ¿qué método es mejor y por qué?**

El método B ($x = x_0 - \dfrac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$) produce una aproximación mucho más cercana al valor exacto en aritmética de 3 cifras significativas (0.512 frente a 0.516).

La razón es la propagación del error por *subtracción entre cantidades de orden similar* en el método A: al calcular $x_0 y_1 - x_1 y_0$ se restan dos números relativamente grandes y cercanos ($\sim 7.55$ y $\sim 6.25$) dando un numerador pequeño ($\sim 1.29$). Esa resta magnifica los errores de redondeo (cancelación numérica).

El método B evita esa resta directa de dos productos grandes: primero se toma la diferencia $x_1 - x_0$ (un número pequeño, aquí 0.62), se escala y se sustrae de $x_0$. En práctica, esto reduce la cancelación numérica y la pérdida de precisión en aritmética con pocas cifras significativas, por eso B es preferible en este caso.