

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则()

A. 对任意 $x, f'(x) > 0$

B. 对任意 $x, f'(-x) < 0$

C. 对任意 $x, f'(-x) > 0$

D. 对任意 $x, f'(-x) \geq 0$

2. 设 $f(x)$ 是可微函数, 当 $0 < a < x < b$ 时, 恒有 $xf'(x) < f(x)$, 则()

A. $af(x) > xf(a)$

B. $bf(x) > xf(b)$

C. $xf(x) < bf(b)$

D. $xf(x) > af(a)$

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处()

A. 不连续

B. 可导

C. 取极大值

D. 取极小值

4. 设 $f(x), g(x)$ 在 $x = 0$ 的某个领域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g^2(x)} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ ()

A. 不可导

B. 可导且 $f'(0) \neq 0$

C. 取得极小值

D. 取得极大值

5. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 则()

A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点

B. 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点

C. 若 $f'(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点

D. 若 $f''(0) \neq 0$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点

6. 设 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 且 $f(x_0) = g(x_0) = 0, f'(x_0)g'(x_0) > 0$, 则 ()

- A. x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点
- B. x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 但不是极值点
- C. x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 且是极小值点
- D. x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点, 且是极大值点

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x(1-\cos x)} = -1$, 则 $x=0$ ()

- A. 是 $f(x)$ 的驻点, 且为极大值点
- B. 是 $f(x)$ 的驻点, 且为极小值点
- C. 是 $f(x)$ 的驻点, 但不是极值点
- D. 不是 $f(x)$ 的驻点

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)+1}{x} = \text{[redacted]}$ 则 $x=0$ ()

- A. 不是 $f(x)+e^x$ 的驻点
- B. 不是 $f(x)+e^x$ 的极值点
- C. 是 $f(x)+e^x$ 的极小值点
- D. 是 $f(x)+e^x$ 的极大值点

9. 设 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{f'(x)} = -1$, 则 ()

- A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f'(x)$ 在 $x=a$ 的领域内单调

10. 已知函数 $f(x)$ 对一切的 x 满足 $xf''(x) + f'(x) = e^x - 1$, 则 ()

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点

11. 已知函数 $f(x)$ 对一切的 x 满足 $xf''(x) + [f'(x)]^2 = x^2$, 则 ()

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是 $y = f(x)$ 的拐点

12. 设函数 $f(x), g(x)$ 对一切的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 满足方程 $f''(x) + g(x)f'(x) - f(x) = 0$, 又 $f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 内 $f(x)$ ()

A. 恒正

B. 恒负

C. 可正可负

D. 恒为零

13. 设函数 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $f'(x)$ 零点个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

14. 曲线 $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ 的渐近线条数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

1. 函数 $y = x^x (x > 0)$ 的最小值为 _____.

2. 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的拐点为 _____.

3. 当 $x > 0$ 时, $x^2 \leq e^{ax}$ 恒成立, 则 a 的最小值为 _____.

4. 已知方程 $x = e^{ax}$ 无实根, 则实数 a 的取值范围为 _____.

5. (数三不要求) 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是 _____.

1. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线, 椭圆及两坐标轴所围成平面图形的面积最小 (其中 $a > 0, b > 0$)

2. 证明方程 $x^3 + x^2 + x = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个实根

3. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为任意实数, 求证方程 $a \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = 0$ 在 $[0, \pi]$ 内必有实根

4. 试证明 $|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|$

5. 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x) < 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{x} = A$,

试证: 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x) \leq (1+A)x$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 试证明

(1) $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$

(2) $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) - f(\xi) = 0$

(3) $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 试证明 $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $\xi f'(\xi) = -f(\xi)$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$, 试证明 $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$