

1. 设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导, α, β 为任意实数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha x) - f(x_0 - \beta x)}{x}$ 等于()

- A. $(\alpha - \beta)f'(x_0)$ B. $(\beta - \alpha)f'(x_0)$
C. $(\alpha + \beta)f'(x_0)$ D. $\alpha\beta f'(x_0)$

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\sin x) - f(1 - \cos x)}{x^2} = ()$

- A. $-2f'(0)$ B. $\frac{1}{2}f'(0)$
C. $-\frac{1}{2}f'(0)$ D. $f'(0)$

3. 设函数 $f(x) = \frac{(\cos 2x - 2) \cdots (\cos nx - n) \sin x}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+2x}\cdots\sqrt{1+nx}}$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) = ()$

- A. $(-1)^{n-1} n!$ B. $(-1)^n (n-1)!$
C. $(-1)^n n!$ D. $(-1)^{n-1} (n-1)!$

4. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\sin(xy) + e^{1-y} + x = 1$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\sin \frac{2}{n}\right) - 1 \right] = ()$

- A. 2 B. 4 C. -1 D. -2

5. 设 $f(x) = \frac{e^{x^2} \cos x}{\sqrt{1+x^2}}$, $g(0) = f'(0)$, 且 $g'(0)$ 存在, 则函数 $\varphi(x) = \frac{g(x)}{x}$ ()

- A. 在 $x = 0$ 的去心邻域无界 B. 有跳跃间断点 $x = 0$
C. 有无穷间断点 $x = 0$ D. 有可去间断点 $x = 0$

6. 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(e^x + |x|)$, 若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则必有()

- A. $f(0) = 0$ B. $f'(0) = 0$
C. $f(0) + f'(0) = 0$ D. $f(0) - f'(0) = 0$

7. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充要条件是()

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a) \right]$ 存在

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a-x^2) - f(a)}{x^2}$ 存在

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{1 - \cosh h} \right]$ 存在

D. $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a) - f(a-3h)}{\sinh h} \right]$ 存在

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[h - \ln(1+h)]}{-h^2} = 1$, 则()

A. $f(0)=0$, 且 $f'(0)=-2$

B. $f(0)=0$, 且 $f'_-(0)=-2$

C. $f(0)=0$, 且 $f'_+(0)=-2$

D. $f(0)=1$, 且 $f'(0)=-1$

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则()

A. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1-\cos x}}$ 存在

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1-\cos x}}$ 存在时, $f'(0)=0$

10. 设函数 $f(x) = |x^3 - x| \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 的某领域有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充分必要条件是()

A. $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处可导

B. $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续

C. $\varphi(1^-) = -\varphi(1^+)$

D. $\varphi(1) = 0$

1. 设 $f(x) = \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + 2)}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $f'(a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)+1]x^2}{x - \sin x} = 6$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -2 , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y = \ln x$ 相切, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{x + \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+t)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\sin t}}$, 则 $\varphi'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. (数三不要求) 设 $\begin{cases} x = 2 + t^2 \\ y = \sin t \end{cases}$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $f(x) = \frac{x^{2027}}{x-1}$, 则 $f^{(2027)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(x) = \frac{x}{2x+3}$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

1. 设 $f(x) = x \ln(2+x)$, 求 $f^{(n)}(0)$, ($n > 1$)

2. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $f^{(n)}(x)$

3. 设 $f(x) = \sin^2 x$, 求 $f^{(n)}(x)$

4. 设 $f(x)$ 为可导函数, 且 $f(0) = f'(0) = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\ln f(x)}$

5. 已知 $f(0) = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) + 2xf(x)}{x^2} = 1$, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$