行列による群

ここでは，行列により構成される群について学習します．自然数nを一つ定めて，n行n列の行列を考えます．これをn次正方行列と言います．
この中で逆行列が存在する行列の集合が行列の積によって群を構成します．

ここでは簡単な2次正方行列による群を確認します．具体的には，次にような行列です．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ここで行列の各成分$a_{12}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{K}$は，実数$\mathbb{R}$か複素数$\mathbb{C}$のどちらかに定めます．

2次正方行列の単位行列$\mathbf{I}_2$は対角線成分が1でその他が0の行列となります．

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2次正方行列$\mathbf{A}$は，行列式$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} \neq 0$のときに逆行列と呼ばれる逆元$\mathbf{A}^{-1}$が存在します．逆行列の存在する正方行列を正則行列と言います． 2次正則行列$\mathbf{A}$の逆行列は次のようになります．

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

正則行列により構成される群を一般線形群（General Linear Group）と言い，その成分が実数の場合$GL_2(\mathbb{R})$と表し，複素数の場合$GL_2(\mathbb{C})$と表します．

$GL_2(K)$が群であることの証明

スカラー$\mathbf{K}$が実数であるか複素数であるかは群構造を確認する上では影響を与えませんので，スカラー$\mathbf{K}$として一般化して説明します．

ここで使用する行列$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$を次のように定義します．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

ここで，行列の積の定義を再度掲示しておきます．

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

単位元の存在

単位行列$\mathbf{I}_2$が単位元であることを確認します．

$$\mathbf{I}_2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a_{11} + 0 \times a_{21} & 1 \times a_{12} + 0 \times a_{22} \\ 0 \times a_{11} + 1 \times a_{21} & 0 \times a_{12} + 1 \times a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times 1 + a_{12} \times 0 & a_{11} \times 0 + a_{12} \times 1 \\ a_{11} \times 0 + a_{12} \times 1 & a_{21} \times 0 + a_{22} \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

逆元の存在

逆行列が逆元であることを確認します． $GL_2(K)$の定義により$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} \neq 0$であることが前提条件になっています．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} + (-a_{12})a_{21} & a_{22}a_{12} + (-a_{12})a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & 0 \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{I}_2
\end{aligned}
$$

同様に計算すれば$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$も求まり，$GL_2(K)$の任意の元について逆元があることが分かります．

積について閉じていること

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in GL_2(K)$であるときに，$\mathbf{AB} \in GL_2(K)$となることを確認します．

- $\mathbf{I}_2$の逆行列は$\mathbf{I}_2$自身なので，$\mathbf{I}_2 \in GL_2(K)$です．
- $\mathbf{A}^{-1}$の逆行列は$\mathbf{A}$なので$\mathbf{A}^{-1} \in GL_2(K)$です．
- $\mathbf{AB}$の逆行列は$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$なので，$GL_2(K)$は積について閉じています．

積の結合法則

結合則$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$について，実数の分配法則を使って確認します．

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right] \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{BC})
\end{aligned}
$$

以上で$GL_2(K)$が群であることが証明されました．

一般線形群$GL_n(K)$

さて一般の$n \in \mathbb{N}$について正則行列すなわち逆行列の存在する行列全体の集合も行列の積によって群となります．n次の一般線形群を$GL_n(K)$と表します． $GL_n(K)$の単位元$\mathbf{I}_n$は，

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となります．任意の行列$\mathbf{A} \in GL_n(K)$について，その逆行列がどのように求められるかといことが課題となってきますが，これは連立方程式の解を求めることと深く関連してきます．これは，今後の話になりますので，まずは技術的に行列演算を行えるようにトレーニングをしてください.

対称群の行列表現

群の例として対称群を定義しましたが，群の要素を独特の表現で表しました．しかし，要素の個数が有限の群については行列によって表現することができます．そこで，対称群の要素を行列で表現してみます.

3次対称群について，次の式の左辺側が対照群独自の表現で，右辺が行列表現になっています.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例として，次式における行列の作用をご確認ください.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

この行列によって，$(1, 2, 3)$が$(1, 3, 2)$に変更されました．すなわち，2と3の置換が行われました．

このように，対称群の行列はどの列や行において必ず1の値が1ヶ所あり，その他は0になっています．この6個の行列からなる集合は，行列の積について閉じており群になっています．