論理学

数学の言葉は論理学です．数学の専門書を読んでいて理解が進まない状況に陥る理由の一つが論理についての知識不足があります．「何故そんなことをするのか」という疑問が解消されずに先へは進めません．

例えば，$\sqrt{2}$が無理数であることを証明するときに，最初に$\sqrt{2}$を有理数と仮定します．この証明には，論理学でいう背理法という方法を利用しています．つまり，背理法が何なのかを知らずしてこの証明を理解することは不可能です．

そこで，数学を学ぶ者は論理学の基礎を理解する必要があります．論理学自体も広大な学術分野なので，本格的に学習することは大変です．ここは，数学を理解するための最小限の論理学を学ぶという方針で進めます．

論理と集合

論理学の内容には記号式が多く，暗号のようで取っ付き難い印象があります．そこで，より直感的に把握するために集合との対比を行うことをお勧めします．なぜならば，集合と論理は極めて類似的な構造を持っているからです．

論理についての記述の後に，集合との対比も載せますので，集合と一緒に論理を理解してください．

論理と集合の対応は次のように考えてください．

- 命題Pが成立する対象を要素と考えて，その集合を集合S_pと置いてみまる．
- 集合Sが先にある場合，命題P_sを対象の要素が集合Sに含まれればTrueと置いてみる．

命題

論理で取扱う対象を**命題**と言います．命題とは，文章と真偽値のペア，すなわち，真偽値を付随する文章です．命題とそうでない文章の例を幾つか見て見ましょう．

命題の例

> - 机の上に本が置いてある．
> - 私は左の道を進んだが，他の人は右の道に進んだ．
> - 全ての受験者が合格した

どの文章も客観的に真偽値が確定しますので，命題と言えます．

命題でない文章の例

> - ドアを開けてください．
> - あの人は誰ですか．
> - 君は綺麗だ．

どの文章も客観的に真偽値を決定することが出来ませんので，命題とは言えません．

命題の記号への代入

命題は文章なので，命題の操作を行う場合に，文章のまま扱うのは煩わしいので，その文章を変数に代入して使用します．例えば，次に示すように「机の上に本が置いてある」をPという変数で表せば，その後は単にPと書くだけで済みます．

> P：机の上に本が置いてある．

一般に命題を表す変数には英大文字を使います．慣例的に$P, Q, R, \cdots$が頻繁に使用されます

数学の命題

数学において，この命題の文章は数学的記述となります．

> - P_1：整数の7は正の数です．
> - P_2：整数の7は負の数です．
> - P_3：整数xは負の数です．

最初の命題「整数の7は正の数です」の真偽値はTrueとなります．
次の命題「整数の7は負の数です」の真偽値はFalseとなります．
最後の命題「整数xは負の数です」については二通りの解釈があります．まず整数xが変数であると設定した場合は真偽値が確定していません．しかしxの値が確定した段階で真偽値が確定します．このようなものを開いた命題と言います．もう一つの解釈としては，変数xを負の整数として定義する場合です．この場合は，真の命題となります．

また，これらの数学的命題の多くは数式に置き換えて表現することができます．

> - $P_1 : 7 > 0$
> - $P_2 : 7 < 0$
> - $P_3 : x < 0$

単純命題と複合命題

命題がただ一つの事を述べているとき，これを単純命題と言います．単純命題は，これ以上細かく分解できない命題です．幾つかの命題に分解できるものを複合命題といいます．複合命題は，命題の論理積や論理和で表現できます．

命題の否定

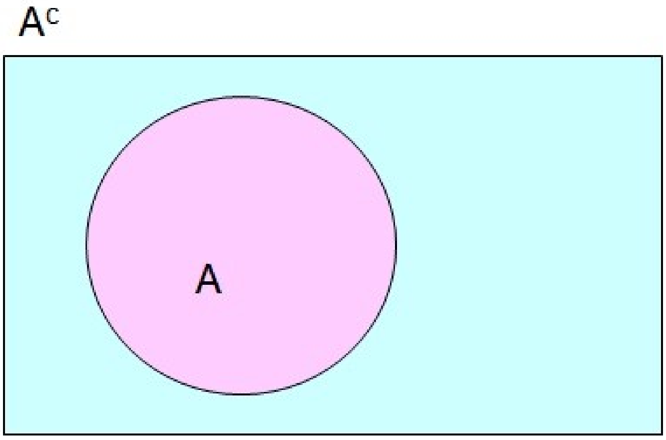
ある命題の否定とは，その真偽値が逆になるような命題を言います．任意の命題Pに対して，Pの否定を$\neg P$と記載します．

命題PがTrueならば，否定命題$\neg P$はFalseとなります．逆に，命題PがFalseならば，否定命題$\neg P$はTrueとなります．このような関係を分かりやすく表現する方法として真理表があります．命題の否定についての真理表は下記のようになります．

P	$\neg P$
T	F
F	T

命題の否定〜補集合

命題の否定は，集合論での補集合と対応しています．補集合のベン図と否定命題の真理表を比較してください．考え方としては，命題Pが成立する対象の集合をAとすると，否定命題$\neg P$が成立する対象の集合がA^cとなります．



真理表の$\neg P$列のTrueをライトブルー，Falseをピンクにするとベン図と一致します．

論理積

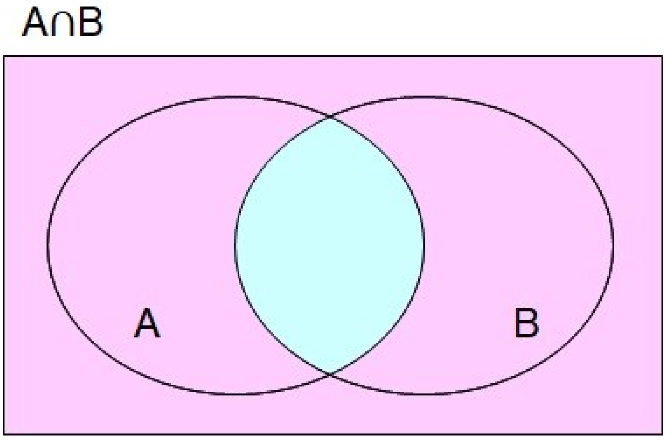
論理積は，2つの命題が両立している状態です．ここに命題PとQがあります．そこでPが成り立って，かつ，Qも成り立っている状況を，PとQの論理積と言い，$P \wedge Q$と記載します．論理積$P \wedge Q$は次の真理表で定義されます．

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

このように，PとQの両方がTrueの場合のみ$P \wedge Q$はTrueとなり，その他の組み合わせの場合はFalseとなります．論理積は2つの命題の複合命題になっています．

論理積～共通集合

命題の論理積は，集合論の共通集合と対応しています． Pが成立する対象の集合をAとし，Qが成立する対象の集合をBと置いてみます．



真理表の$P \wedge Q$列のTrueをライトブルー，Falseをピンクにするとベン図と一致します．

論理和

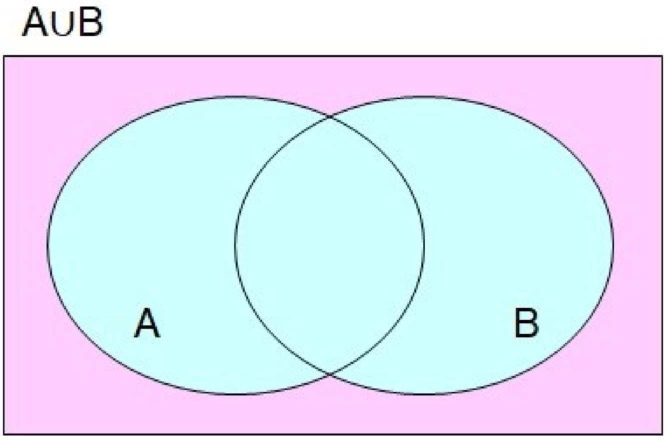
論理和は，2つの命題のどちらか片方あるいは両方が成立している状態です．ここに命題PとQがあります．そこでPが成り立つ，または，Qが成り立つ状況を，PとQの論理和と言い，$P \vee Q$と記載します．論理和$P \vee Q$は次の真理表で定義されます．

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

このように，PとQの少なくとも一方がTrueの場合のみ$P \wedge Q$はTrueとなり，両方ともFalse場合はFalseとなります．論理和も2つの命題の複合命題となります．

論理和～和集合

命題の論理和は，集合論の和集合に対応しています． Pが成立する対象の集合をAとし，Qが成立する対象の集合をBと置いてみます．



真理表の$P \lor Q$列のTrueをライトブルー，Falseをピンクにするとベン図と一致します．

論理包含

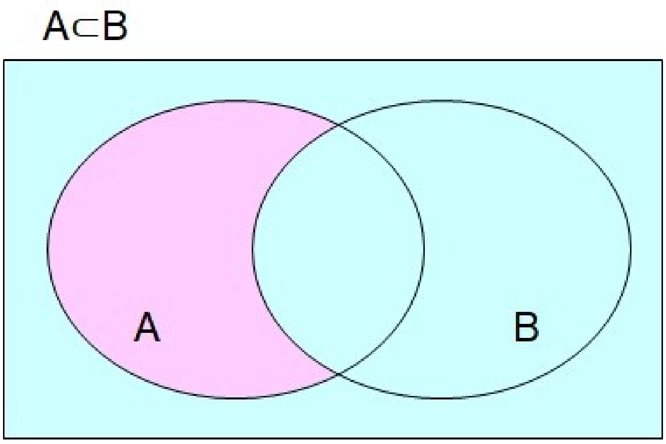
2つの命題PとQの間に「PならばQである」という関係が成り立つとき，この関係を論理包含と言い，$P \Rightarrow Q$あるいは$P \to Q$と書きます．すなわち，「命題PがTrueの場合に命題QもTrueになる」という複合命題です．論理包含$P \Rightarrow Q$は次の真理表で定義されます．

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

このように，PがTrueにも拘わらずQがFalseの場合のみ$P \Rightarrow Q$はFalseとなり，それ以外の場合はTrueとなります．

論理包含と集合の包含関係

命題の論理包含は，集合論の包含関係に対応しています．



真理表の$P \Rightarrow Q$列のTrueをライトブルー，Falseをピンクにするとベン図と一致します．

全称量化子と存在量化子

次の命題について考えてみます．

> 全ての実数xについて，$x^2 \geq 0$が成り立つ．

この文章の数式化を試みます．「$x^2 \geq 0$」という部分は明確な数式なのでそのままとします．「実数xについて」という部分は$x \in \mathbb{R}$と表すことができます．文頭の「全ての〜」という部分を論理的に表現するために，全称量化子 $\forall$ という記号を導入します．すると上記の文章命題を「$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$」と書き換えることができます．

これを汎用的な表現にして，集合Sに属する要素xについて$P(x)$が成り立つことを次式で表現します．

> $\forall x \in S, P(x)$

また次の命題について考えてみます．

> $x^2 = 2$となる実数xが存在する．

この文章の数式化を試みます．この文章の中で「〜が存在する」という部分を論理的に表現するために存在量化子 $\exists$ という記号を導入します．これにより上記の文章命題は「$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$」と書き換えることができます．

これを汎用的な表現にして，集合Sに属する要素xで$P(x)$が成り立つものが存在することを次式で表現します．

> $\exists x \in S, P(x)$

全称量化子と論理積

全称量化子は論理積の拡張になっています．例によって説明します．

集合$S = \{1, 3, 5\}$としたとき，下記の命題を考えます．

- 命題P_1：1は奇数である．
- 命題P_2：3は奇数である．
- 命題P_3：5は奇数である．

これらの命題の真偽値は真です．そして，これらの論理積を作ります．

- 命題$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$：1は奇数，かつ，3は奇数，かつ，5は奇数である．

ここで，集合$S = \{1, 3, 5\}$として，この命題の表現を下記のように変えても命題の意味は同じです．

- 命題：集合Sの全ての要素は奇数である．

この命題を全称量化子を使った表現にします．

- 命題：$\forall x \in S$は奇数である．

すなわち，論理積での表現が全称量化子を使った表現に置き換わりました．このメリットとして，集合Sが無限集合でも通用する点にあります．

存在量化子と論理和

存在量化子は論理和の拡張になっています．例によって説明します．

集合$S = \{1, 2, 3\}$としたとき，下記の命題を考えます．

- 命題P_1：1は偶数である．
- 命題P_2：2は偶数である．
- 命題P_3：3は偶数である．

これらの命題の真偽値は，命題P_2が真ですが，P_1とP_3は偽になっています．そして，これらの論理和を作ります．

- 命題$P_1 \vee P_2 \vee P_3$：1は偶数，または，2は偶数，または，3は偶数である．

ここで，集合$S = \{1, 2, 3\}$として，この命題の表現を下記のように変えても命題の意味は同じです．

- 命題：集合Sに偶数の要素が存在する．

この命題を存在量化子を使った表現にします．

- 命題：$\exists x \in S$は偶数である．

すなわち，論理和での表現が存在量化子を使った表現に置き換わりました．このメリットとして，集合Sが無限集合でも通用する点にあります．

以上が論理についての最小限の知識となります．