数学的帰納法について

帰納法と言う言葉は一般的な議論でも使うことがありますが，数学的帰納法とは一般的な帰納法とは別物と考えてください．私たちが数学を行うとき，無意識のうちに数学的帰納法，あるいは数学的帰納法の考え方を利用しています．

数学的帰納法の前に，普通の帰納法について確認します．

普通の帰納法

帰納法とは，幾つかの事例で成立したことを見て，同様な状況では常にその状況が成立すると考えることです．数学においては，予想を立てるときに利用します．その例を見て見ましょう．

メルセンヌ（Mersenne）数の素数予想

自然数$n \in \mathbb{N}$に対して，$\mathscr{M}(n) = 2^n - 1$をメルセンヌ数と言います．ここで，nに素数pを入れた数$\mathscr{M}(p) = 2^p - 1$を考えてみます．

$\mathscr{M}(2) = 2^2 - 1 = 3$
$\mathscr{M}(3) = 2^3 - 1 = 7$
$\mathscr{M}(5) = 2^5 - 1 = 31$

となり，素数であることが分かります．この事例から，一般化して「素数pについて$\mathscr{M}(p) = 2^p - 1$は素数である」と予想します．この考え方が帰納法です．

それでは，この予想が正しいか否かを確認してみましょう．

- 数学的に正しいことを確認するには証明する必要があります．
- 間違っていることを確認する場合は反例を上げます．

ここでは，反例を示して，この予想を否定します．

$\mathscr{M}(11) = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$

これは素数でないので，予想が間違いであることが分かります．

数学的帰納法の原理

自然数$n \in \mathbb{N}$を変数に持つ命題$P(n)$があるとき，

- $P(1)$が成り立つ．
- 任意の$k \in \mathbb{N}$について$P(k)$が成立てば$P(k+1)$も成り立つ．

この条件が証明できれば，任意の$n \in \mathbb{N}$について$P(n)$が成り立ちます．

この手法を数学的帰納法と言います．

数学的帰納法の例

簡単な例として，次の計算問題を取り上げます．

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

この初等的な解法は，数字の1から足す式とnから足す式の2つの式を並べて足す方法です．

$$\begin{array}{rrcccccccc} & S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ +) & S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \\ \hline & 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}$$

$(n+1)$がn個並んでいるので， $2S_n = n(n+1)$ となり，答えが求まります．

数学的記方法による解法

まず，$n = 1$の場合について確認します．

$$S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

なので$S = 1$の場合は成立します．

次に，$n = k$のときに$S_k = \frac{k(k+1)}{2}$が成り立つと仮定します．その前提の下でS_{k+1}を計算します．

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

よって，$n = k + 1$のときも$S_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$が成り立ちます．

以上により数学的帰納法の前提が成立するので，任意の自然数$n \in \mathbb{N}$について$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$が成立することが証明されました．

初等的な証明方法がトリッキーであることに対して，数学的帰納法はシステマティックな方法なので，良い証明であると言えます．

数学的帰納法は利用価値が高いので，ぜひ身に付けてください．