写像

数学の理論を展開する上において写像の概念を使わずに済ますことは不可能です．線形代数においても写像の概念が中心的役割を果たします．実は，行列は写像そのものとして扱われます．

ここでは，まず写像の定義を明確にします．

写像の定義

2つの集合XとYがあり，Xの任意の要素xに対してYの要素yが一意的に対応するとき，この対応関係を**写像**と言います．この対応関係を記号fを使って表す場合，$y = f(x)$と記述します．また，この写像を次のように表現します．

> $f : X \to Y$

写像の定義において重要な点は，Yの要素yが**一意的**であることです．「一意的である」という言葉の意味は，xに対応するYの要素がただ一つであることです．

この写像fについてXを**定義域**と言い，Yを**終域**と言います．

また，Xの全ての要素xに対応するYの要素 $f(x)$全てを合わせた集合を**値域**と言い，$f(X)$と書きます．

> $f(X) = \{y \mid y = f(x),\ \forall x \in X\}$

全射・単射・全単射

写像fの値域 $f(X)$は集合Yの部分集合です．

> $f(X) \subset Y$

しかし，値域 $f(X)$が集合Yと一致する保証はありません．

また，ある$y \in Y$に対応するXの要素が唯一つである保証もありません．

全射

写像 fの値域が終域Yと一致するとき，すなわち $f(X) = Y$のとき，この写像 fを集合Xから集合Yへの全射（surjection）と言います．

単射

任意の$y \in f(X)$に対して $y = f(x)$となる$x \in X$がただ一つに限るとき，この写像 fを集合Xから集合Yへの単射（injection）と言います．

全単射

写像 fが集合Xから集合Yへの全射かつ単射であるとき，この写像を集合Xから集合Yへの全単射（bijection）と言います．

逆写像

fが集合Xから集合Yへの全単射であるとき，任意の$y \in Y$に対して一意的に$x \in X$が対応して$y = f(x)$となっています．これを集合Yから集合Xへの写像と見なすことができます．この写像を f^{-1} と記載して，写像 fの逆写像と言います．

$$f^{-1} : Y \to X$$

定義から f^{-1}の逆写像は元の写像となります．すなわち，$(f^{-1})^{-1} = f$となっています．

合成写像

fを集合Xから集合Yへの写像とし，gを集合Yから集合Zへの写像とします．このとき写像 fとgを続けて行うことで，集合Xから集合Zへの写像が定義できます．これを合成写像と言い，$g \circ f$と記載します．

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

合成写像が成立する条件として，写像 fの値域 $f(X)$が写像 gの定義域に含まれている必要があります．

結合法則

fを集合Aから集合Bへの写像とし，gを集合Bから集合Cへの写像とし，hを集合Cから集合Dへの写像とします．このとき集合Aから集合Dへの合成写像を構成することができますが，合成する順序に依存しません．

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

すなわち，fとgを合成した写像に後からhを合成しても，fに対してgとhの合成写像を合成しても結果は変わりません．このことを結合法則と言います．したがって，3つの写像の合成は括弧を外して表現することができます．

$$h \circ g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

変換

集合Xから集合X自身への写像を変換と言います．写像 fが集合X上の変換であるとすると，

$$f : X \to X$$

となります．

変換の場合，常に同じ集合に留まるので複数の変換を続けて合成することが可能となります． f, gを集合X上の変換として，fとgを連続して実施する変換を合成変換と言い，$g \circ f$と書きます．これも集合X上の変換となります．

$$g \circ f : X \to X$$

任意の$x \in X$に対して同じxを対応させる変換，すなわち，全く変化させない変換を恒等変換と言い，Idと記載します．

$$Id : x \in X \mapsto x$$

写像の概念と記載方法について慣れておきましょう.