

## 行列の積についての考察

行列の和は各成分ごとの和で定義するのに、行列の積は各成分ごとの積で定義しないのは何故か、という疑問があります。すなわち、仮に行列の積  $\mathbf{A} * \mathbf{B}$  を次のように定義したらどうなのでしょう。（ただし、この定義は線形代数において適切ではありません。）

$$\begin{aligned}\mathbf{A} * \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これを行列の積としても良いように思われます。しかも、PythonのNumPyにおいて行列の積を普通の数値の積と同じフォーマット「 $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ 」で実行すると、上記の通りに計算されます。試しにPythonで次の計算をしてみましょう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

```
In [1]: import numpy as np
```

```
In [2]: A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
        B = np.array([[5, 6], [7, 8]])
        A*B
```

```
Out[2]: array([[ 5, 12],
               [21, 32]])
```

このように、プログラム言語における計算ルールは必ずしも数学的に厳密とは言えず、その言語内の独自ルールがあることに注意してください。

## 正しい行列の積

さて、行列の積の定義を再確認しましょう。

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{lk}b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{lk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{lk}b_{kn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ベクトル空間の説明において行列の積の定義はベクトル空間における写像を表したものとして明確になりますが，ここで

$$\text{は連立方程式の立場から考えてみましょう. 行列 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ とベクトル } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ との}$$

積  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  は次のように定義されていました.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}v_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}v_k \end{pmatrix}$$

さて，連立方程式を行列で表現することを考えてみましょう．例として，次の連立方程式について調べます．

$$\begin{cases} 2x + 8y = 560 \\ 5x + 3y = 550 \end{cases}$$

2行2列の行列  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  と2次元ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  との積を計算すると

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 8y \\ 5x + 3y \end{pmatrix}$$

となります．ここでもう一つの2次ベクトルを  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 560 \\ 550 \end{pmatrix}$  とすると，上記の連立方程式は  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  と書くことができます．すなわち，最初の連立方程式が行列を用いた表現で，

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 \\ 550 \end{pmatrix}$$

となり，これを行列記号で表せば，

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と記述できます．この単純な表現ができるのは，行列の積の定義が連立方程式を表現することに適しているからにほかなりません．

ここで，一般の連立一次方程式について行列による表現を確認します．まず連立方程式として，変数の個数を  $n$  個として各変数を  $x_i (i = 1, \dots, n)$  とします．そして，方程式の個数が  $m$  個とすると，連立一次方程式は下記のようになります．

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ここで，次の行列とベクトルを定義します．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

すると，連立方程式は  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  と表すことができます．実際に計算すると確かに成立しています．

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{b}
\end{aligned}$$

## 行列積を定義する根拠

行列の積をどのように定義するかは、その奥に数学構造への配慮があります。やみくもに積を定義しては、豊かな数学理論が生成されません。連立方程式を行列による表現に置き換えたときに自然と発生する操作、すなわち、左行列の行と右行列の列を取り出して順番に掛け合わせたものの総和をとることが積の定義として認められる根拠となっています。

上記の連立方程式において定数ベクトル $\mathbf{b}$ の代わりに $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ を次のように定義して、その時の解を $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ とします。

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1m} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2m} \end{pmatrix} \\
\mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

すると、2種類の連立方程式 $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1$ と $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2$ ができますが、ここで

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} \end{pmatrix}$$

と定義し、変数についても $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2)$ と置くと2種類の連立方程式をひとまとめにすることができます。

$$\begin{aligned}
\mathbf{AX} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} & a_{11}x_{21} + a_{12}x_{22} + \cdots + a_{1n}x_{2n} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{12} + \cdots + a_{2n}x_{1n} & a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{11} + a_{m2}x_{12} + \cdots + a_{mn}x_{1n} & a_{m1}x_{21} + a_{m2}x_{22} + \cdots + a_{mn}x_{2n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} \end{pmatrix} = \mathbf{B}
\end{aligned}$$

となります。これは  $m$  行  $n$  列の行列と  $n$  行  $2$  列の行列の積  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  となっています。

---