線形代数のための数学の基礎

ここでは，線形代数を学習するために必要な数学の基礎について簡単のまとめておきます．線形代数を理解する上では，数式を変形させていく計算力が必要です．そして，もう一つ大切なことは数学的構造に対する知識です．その基礎が，次にあげる分野です．

- 集合
- 論理
- 写像
- 積集合上の写像（二項演算，二項関係，同値関係）

私たちは，これらの数学的基礎について，線形代数を理解する上で最小限の知識について確認します．

最初に，数式計算力について確認しておきましょう．

数式計算力

私達は小学生の頃から「計算」という作業のトレーニングを行ってきました．そして，計算力というと数字の四則演算と思われるかもしれませんが，それらのスキルはあまり必要としません．暗算などの数値計算能力はビジネスシーンでは大変重要になりますが，しっかり数学を学習するためには数値計算が苦手でも大丈夫です．私たちに求められる計算力とは，数式変形力と言っても過言ではありません．

線形代数を学習する上での数式計算では，次のものを扱わなければなりません．

- 添え字付き変数
- Σ（シグマ）記号

連立方程式の問題でも分かるように，線形代数では変数をたくさん扱う必要があり，変数の表現も添え字付き変数になります．例えば3次元ベクトルを表すとき，$(x, y, z)^{\mathsf{T}}$と異なるアルファベットを使って表現しますが，次元数が大きくなるとアルファベットの文字が足らなくなってしまいます．

この状況を打開するために添え字付き変数が開発されました．例えば，10次元ベクトルを$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})^{\mathsf{T}}$と同じアルファベットに添え字を付けて表します．この方法ならば，いくら次元数が大きくなっても変数の記号が足らなくなることはありません．

さらに数学では**一般化**という方向性があり，任意の自然数nをもってn次元ベクトルを考えます． $\mathbf{x}$をn次元ベクトルとしたときに，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathsf{T}}$というような表現を用います．

このような添え字付き変数を使って何らかの計算をする場合に，総和記号Σを用いた計算式の式変形が必須となってきます．

これらの計算に対して拒絶反応を示さないように，しっかり克服してください．

添え字付き変数の表し方

添え字付き変数は，右下のインデックスと呼ばれる数字を付けて表します．いま2つの変数を添え字付き変数で表現します．

$$x_1, x_2$$

この2つの変数を使って簡単な計算式を記載します．

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$

このケースでは添え字付き変数が2個でしたが，数学理論を一般的に記述する場合に変数の個数を不定数として扱います．すなわちn個の変数があると仮定します． n個の変数を添え字付き変数として表すと，次のようになります，

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

このように最後の変数は添え字にも記号を使って表現します．さて，この場合に全ての変数を使った計算式の例を記載してみましょう．

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$\vdots$
$x_n = n$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

この例で分かるように，変数の個数を一般化してn個とした場合，計算式を完全に記述することができず，ドット「$\cdots$」を使って調整しています．

Σ記号の導入

そこで，このモヤモヤをスッキリさせるために総和記号Σ が導入されました．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

これにより，計算式をスッキリした形で表現できます．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ここでの i は単なるインデックスですので，虚数単位とは異なります．ちなみにインデックスとして使われる英字としては，i, j, k が好まれています．

2つの添え字

添え字が2つの場合は，右下に2つの添え字を列記します．

$$x_{ij}$$

具体的には，$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ のように表します．ただし，インデックスの値が2桁以上になった場合は，添え字の区切りを明確にするために添え字と添え字の間にカンマを挟みます．

$$x_{12,21}$$

この変数は2個の添え字があり，1個目の添え字が12で2個目の添え字が21となっています．

複数添え字とΣ計算

行列計算では添え字が2個付く変数を扱います．行列の積では，次の計算式が出現します．

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

このような計算は頻出しますので，明確なイメージが無いと数式を追うことができません．そこで，計算イメージを明確にするために次の事を行います．

1. 変数の個数nを少ない固定の個数にしてみる．具体的には3個がよい．
2. その数式をΣを使わない形で記載する．
3. そのイメージを頭に入れて，変数の個数がn個の場合を想像します．

上のΣ 計算式をこのステップの2までの式として表示してみましょう．

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j}$$

このようになります．これで，容易にn個の場合の計算式もイメージできるようになります．ちなみに，なぜ3個が良いのかと言うと，先頭と中間および最後が記載できていて一般性を損なう恐れが少ないからです．

数学の本を読むときに，数式を飛ばして読むことは内容を理解することを放棄することになります．一見，複雑で難しく見える数式でも，イメージを掴むアプローチをすれば読めるようになります．是非とも数式計算力を身に付けてください．