集合理論

数学の文章の中には，集合の概念が沢山使われています．数学における理論展開は，必ず対象となる集合を明確にします．ある集合に対して成り立つことが別な集合には成り立たないこともあります．そこで対象となる集合を明確に規定するために集合の記述が必要となります．

集合の理論は一旦理解してしまえば明確です．そこで使われる幾つかの記号および概念について説明します．

集合とは

集合とは「ものの集まり」ではありません． **集合とは数学的対象の重複を許さない集まり**です．いまま出てきた数学的対象としては，実数や複素数であったり，ベクトルや行列などがあります．

集合を表す簡単な方法は，それらの対象を波括弧の中にカンマ区切りで並べて記載する方法です．例として，5以下の自然数の集合を記載してみます．

> $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

また幾度も同じ集合を記載することは煩雑になるので，次の式のように，記号に代入して使うことができます．

> $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

一旦このように記述すれば，集合Sと記載するだけで5以下の自然数の集合であることが分かります．集合に含まれる対象を**要素**または元と言います．たとえば1は集合Sの要素です．このことを数学では次のように表します．

> $1 \in S$

読み方としては，「1はSに含まれる」あるいは「1はSの要素である」と言います．また$S \ni 1$と書いても同じ意味になり，「Sは1を要素として含む」と言います．

一般的に集合を表す記号は英字の大文字を使い，要素を表す記号は英字の小文字を使います．これは慣例ですので，集合を表す記号に小文字を使っても構いません．また，任意の集合を表すときにSを使用することが多いですが，これは集合「Set」の頭文字を連想しています．

> $x \in S$

この式は，「xはSの要素である」と言います．

また，xがSの要素ではない場合，$x \notin S$と記載します．

「ものの集まり」と「集合」の違い

「ものの集まり」は，常に実体を伴います．例として，次のようなコインの集まりを考えます．財布の中に10円玉が4枚，50円玉が1枚，100円玉が2枚あります．これを集合と同じように波括弧で囲って列記してみます．

$$\{10, 10, 10, 10, 50, 100, 100\}$$

これが「ものの集まり」です．これと比較して，単なる数字の「集合」は次のようになります．

$$\{10, 50, 100\}$$

すなわち，集合は重複を許さない集まりであり，10という数字があれば重複して複数の10を記載することはありません．この集合に10を追加しても集合に変化はなく，$\{10, 50, 100\}$のままです．

要素の特性による集合の記述

集合の要素の個数が多い場合に全ての要素を列記することは現実的ではありません．そのような場合は，その要素の特性を波括弧内に記述して表現します．対象としている全体集合をΩとして，要素$x \in \Omega$についての特徴を命題$P(x)$で表したとき，集合の特徴による表現は次のようになります．

$$\{x \mid x \in \Omega, P(x)\}$$

この式で x の後にある縦棒「$|$」は「～は以下の条件を満たす」という意味です．

例えば，100以下の自然数の集合と言った場合，つぎのように表現します．

$$\{x \mid x\text{は}100\text{以下の自然数}\}$$

これを数学的に洗練された記述にすると次のようになります．

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 100\}$$

ここで$\mathbb{N}$は自然数全体の集合を表しています．

集合のパラドックス

集合を要素の特性を記述する方法で規定すると，次のような困った集合が考えられます．

$$\mathscr{R} = \{s \mid s\text{は自分自身を要素に含まない集合}\}$$

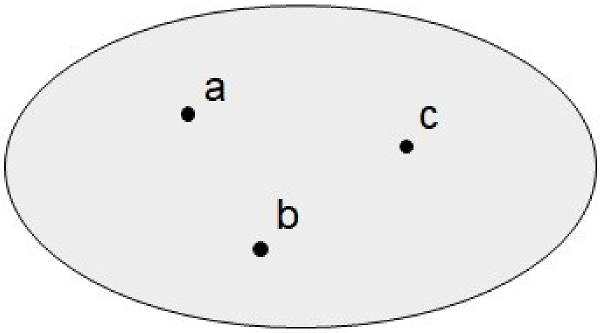
この集合$\mathscr{R}$が自分自身を含んでいないと仮定すると，この条件に合致するので$\mathscr{R}$に含まれなければなりません．しかし，自分自身を含んでいると仮定すると$\mathscr{R}$の対象とはならず，$\mathscr{R}$には含むことはできません．これをRussellのパラドックスと言います．

Russellのパラドックのような状況を回避するために，集合論において$\mathscr{R}$のような存在をクラスと呼び集合とは区別しています．要素の特性を記述することによって集合を規定するとき，特に文章で表現するときは，このようなクラスにしない配慮が必要です．

ベン図

集合を理解する上で視覚的に図式化した図をベン図と言います．ベン図では，集合を円などの分かりやすい閉じた図形で表します．その集合の要素は図形の内部にあるものとします．

集合$A = \{a, b, c\}$としたとき，下図がベン図の一例となります．



包含関係

2つの集合AとBの間に含む／含まれるという関係が成立する場合があります．この関係について明確な定義を与えます．

「AはBに含まれる」という状況を次の式で表します．

$$A \subset B$$

また式の向きを逆にして，

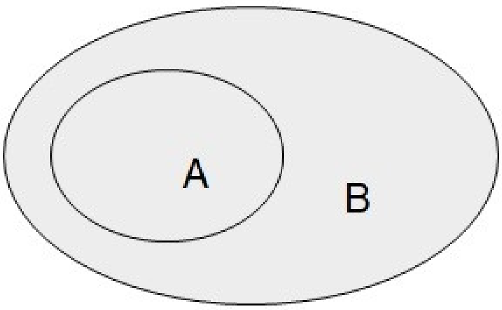
$$B \supset A$$

と書いても同じ意味で，「BはAを含む」と言います．また，「AはBの**部分集合**である」とも言います．

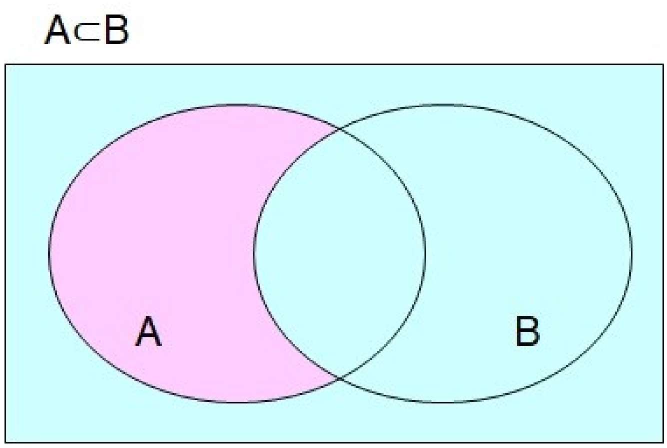
ここで，厳密な定義を与えておきます．「$A \subset B$」とは，「Aの任意の要素xは必ずBの要素になっている」ことです．これを数学的表現にすると次のようになります．

$$\forall x (x \in A \to x \in B)$$

直感的には下図のようになります．



しかし，これには注意が必要です．上のベン図は直感的には分かり易くて良いのですが，不完全な表現となっています．完全な包含関係の表現は次のベン図となります．



このベン図において，ライトブルーの部分は正しく，ピンクの部分は間違っていることを示しています．直感的ベン図ではピンクの部分の表現がありませんので，包含関係の全てを説明してないことになります．

真部分集合

AはBの部分集合となっているが，BにはAにない要素が存在している場合に限り，AをBの真部分集合と言い，$A \subsetneq B$と書きます．実は，部分集合と真部分集合の表現には統一規格がなく，幾つかの流儀がありますので，下表で比較します．

流儀	部分集合	真部分集合	主張
流儀1	$A \subset B$	$A \subsetneq B$	真部分集合を使う頻度が極めて少ない
流儀2	$A \subseteq B$	$A \subset B$	順序関係の記号（$\leq, <$）と同調している
流儀3	$A \subseteq B$	$A \subsetneq B$	絶対に誤解を生じない

私達は流儀1を採用しています．

空集合

何も要素を持たない集合を**空集合**と言い「$\emptyset$」と表します．空集合は任意の集合の部分集合になっています．このことを数学的に表現すると次式となります．

$$\forall A(A \supset \emptyset)$$

集合演算

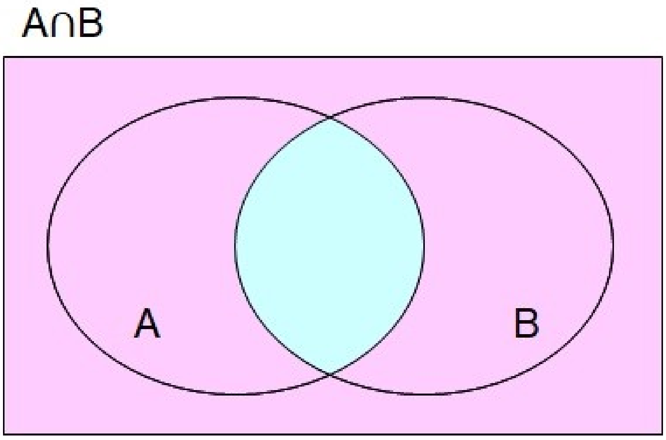
集合には，積（共通部分），和（合併集合）および補集合という演算が用意されています．

積（共通部分）

2つの集合AとBの共通部分を$A \cap B$と書き，AとBの積といいます．

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ここで「$\wedge$」は「かつ」の記号です．この式を解読すると，$A \cap B$とはAとBの両方に含まれる要素全体の集合となります．



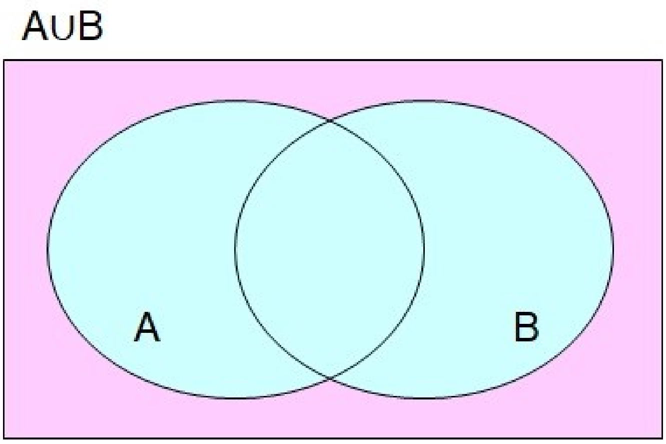
ライトブルーの部分が$A \cap B$になります．

和（合併集合）

2つの集合AとBの合併集合を$A \cup B$と書き，AとBの和と言います．

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

ここで「∨」は「または」の記号です．この式を解読すると，$A \cup B$とはAまたはBに含まれる要素全体の集合となります．



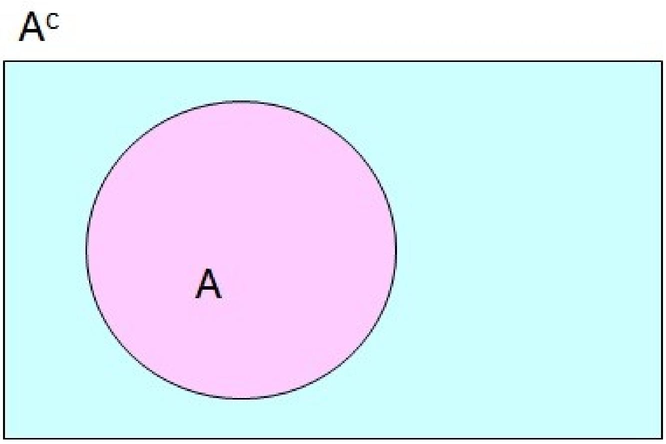
ライトブルーの部分が$A \cup B$になります．

補集合

ある集合Aに対して，Aに含まれない要素全体の集合をAの補集合と言い，A^cと記載します．補集合を考えるときに注意しなければならないことは，全体集合を明確にすることです．全体集合とは，前提として決めておくものです．全体集合をΩで表します．

$$A^c = \{x \mid x \in \Omega \wedge x \notin A\}$$

すなわち，A^cは全体集合Ωの中でAに含まれない要素全体の集合となります．
例えば，全体集合を実数$\mathbb{R}$として集合Aを正の実数とした場合，A^cはゼロ以下の実数となります．



ライトブルーの部分がA^cになります．

積集合

2つの集合AとBに対して，Aの要素xとBの要素yとの順序対(x, y)全体を集合と見なすことができます．この集合をAとBの積集合と言い，$A \times B$と書きます．

> $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

AとAの積集合はA^2と書きます．さらにAのn個の積集合をA^nと書きます．

AとAの積集合の2つの要素$(x, y), (y, x) \in A^2$について，$x \neq y$ならば$(x, y) \neq (y, x)$であることに注意してください．

集合に関して以上のことは理解しておきましょう．