Chapter 4

正则语言的性质

4.1 正则语言

直观来讲, 正则语言是从单独的字符串以并 *(union)*, 连接 *(concatenation)* 和重复 *(repetition)* 构建而来的. 我们已经有了两种形式化描述的工具有穷自动机和正则表达式. 而实际上, 我们是可以直接给出形式定义的. 即, 如果一个语言 L 是正则的, 那么当且仅当 (递归的) 满足:

1. $L = \varnothing$;
2. L 中仅有一个字符串 (可以是空串);
3. L 是两个正则语言的并;
4. L 是两个正则语言的连接;
5. L 是某个正则语言的克林闭包.

4.2 证明语言的非正则性

"泵引理" 是正则语言的一个必要条件: 如果一个语言是正则的, 则一定满足泵引理.

例 1. $L = \{ 0^m 1^n \mid m, n \geq 0 \}$ 是否是正则语言?

例 2. $L = \{ 0^m 1^n \mid m \geq 2, n \geq 4 \}$ 是否是正则语言?

例 3. $L_{01} = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 0 \}$ 是否是正则语言?

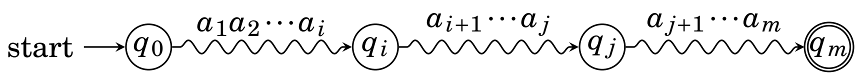
4.2.1 正则语言的泵引理

定理 5 (正则语言的泵引理 (Pumping Lemma))**.** *如果语言 L 是正则的, 那么存在正整数 N, 它只依赖于 L, 对 $\forall w \in L$, 只要 $|w| \geq N$, 就可以将 w 分为三部分 $w = xyz$ 满足:*

1. $y \neq \varepsilon$ ($|y| > 0$);
2. $|xy| \le N$;
3. $\forall k \ge 0$, $xy^k z \in L$.

证明:

1. 如果 L 正则, 那么存在有 n 个状态 DFA A 使 $\mathbf{L}(A) = L$;
2. 取 $w = a_1 \ldots a_m \in L$ $(m \ge n)$, 定义 $q_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \ldots a_i)$; q_0 是开始状态, 当 A 输入 w 的前 n 个字符时, 经过的状态分别是 $q_0, q_1, \cdots, q_n$ 共 $n+1$ 个;



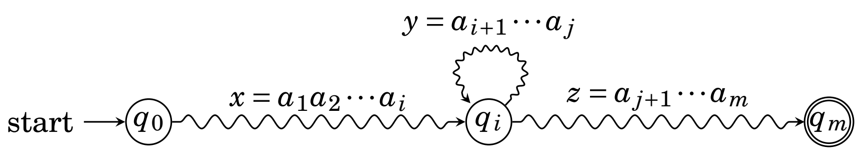
3. 由鸽巢原理, 必有两状态相同 $q_i = q_j$ $(0 \le i < j \le n)$; 由 q_i 和 q_j 将 w 分为

$$x = a_1 a_2 \cdots a_i$$

$$y = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_j$$

$$z = a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_m$$

4. 那么 $w = xyz$ 如图, 且有 $\forall k \ge 0$, $xy^k z \in L$;



因为如果从 q_i 出发, 输入 y, 会到达 q_j, 而 $q_i = q_j$, 所以当输入 $y^k(k \ge 0)$ 时, 始终会回到 q_i. 所以当 DFA A 输入 $xy^k z$ 时, 由 q_0 始终会达到 q_m. 那么, 如果 $xyz \in \mathbf{L}(A)$, 一定有 $xy^k z \in \mathbf{L}(A)$ 对所有 $k \ge 0$ 成立.

5. 而因为 $i < j$ 所以 $y \neq \varepsilon$ (即 $|y| > 0$), 因为 $j \le n$ 所以 $|xy| \le n$. □

任何从开始状态到接受状态的路径, 如果长度超过 n, 一定会经过 $n+1$ 个状态, 必定有一个重复状态, 因此会形成一个循环 (loop); 那么, 这个循环可以被重复多次后, 沿原路径还会到达接收状态. 泵引理中的 N, 是正则语言固有存在的.

泵引理可以用来确定特定语言不在给定语言类 (正则语言) 中. 但是它们不能被用来确定一个语言在给定类中, 因为满足引理是类成员关系的必要条件, 但不是充分条件.

4.2.2 泵引理的应用

续例 3. 证明 $L_{01} = \{ 0^n 1^n \mid n \ge 0 \}$ 不是正则语言.

证明:

1. 假设 L_{01} 是正则的.
2. 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L_{01} \left(|w| \geq N\right)$ 满足泵引理.
3. 从 L_{01} 中取 $w = 0^N 1^N$, 显然 $w \in L_{01}$ 且 $|w| = 2N \geq N$.
4. 那么, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$ 和 $y \neq \varepsilon$.
5. 因此 y 只能是 0^m 且 $m > 0$.
6. 那么 $xy^2z = 0^{N+m}1^N \notin L_{01}$, 而由泵引理 $xy^2z \in L_{01}$, 矛盾.
7. 所以假设不成立, L_{01} 不是正则的. □

例 4. 证明 $L_{\text{eq}} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; w \text{ 由数量相等的 } 0 \text{ 和 } 1 \text{ 构成} \right\}$ 不是正则的.

思考题

刚刚已经证明了

$$L_{01} = \left\{ 0^n 1^n \;\middle|\; n \geq 0 \right\}$$

不是正则语言, 那么能否使用

$$L_{01} \subseteq L_{\text{eq}}$$

来说明 L_{eq} 也不是正则的呢?

证明:

1. 假设 L_{eq} 是正则的.
2. 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L_{\text{eq}} \left(|w| \geq N\right)$ 满足泵引理.
3. 从 L_{eq} 中取 $w = 0^N 1^N$, 显然 $w \in L_{\text{eq}}$ 且 $|w| = 2N \geq N$.
4. 那么, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$ 和 $y \neq \varepsilon$.
5. 因此 y 只能是 0^m 且 $m > 0$.
6. 那么 $xy^2z = 0^{N+m}1^N \notin L_{\text{eq}}$, 而由泵引理 $xy^2z \in L_{\text{eq}}$, 矛盾.
7. 所以假设不成立, L_{eq} 不是正则的. □

例 5. 证明 $L = \left\{ 0^i 1^j \;\middle|\; i > j \right\}$ 不是正则的.

证明:

1. 假设 L 是正则的.

2. 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L\,(|w| \ge N)$ 满足泵引理.
3. 从 L 中取 $w = 0^{N+1}1^N$, 则 $w \in L$ 且 $|w| = 2N+1 \ge N$.
4. 由泵引理, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \le N$ 和 $y \ne \varepsilon$.
5. 那么, y 只能是 0^m 且 $m \ge 1$.
6. 那么, $xz = xy^0z = 0^{N+1-m}1^N \notin L$, 因为 $N+1-m \le N$, 而由泵引理 $xy^0z \in L$, 矛盾.
7. 所以假设不成立, L 不是正则的. □

例 6. Prove $L = \left\{ a^3b^nc^{n-3} \,\middle|\, n \ge 3 \right\}$ is not regular.

证明:

1. 假设 L 是正则的.
2. 那么, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall w \in L\,(|w| \ge N)$ 满足泵引理.
3. 从 L 中取 $w = a^3b^Nc^{N-3}$, 则 $w \in L$ 且 $|w| = 2N \ge N$.
4. 由泵引理, w 可被分为 $w = xyz$, 且 $|xy| \le N$ 和 $y \ne \varepsilon$.
5. 那么, 则 y 只可能有 3 种情况 $(m>0, r>0, s>0)$:
   (a) $y = a^m$, 则 $xy^2z = a^{3+m}b^Nc^{N-3} \notin L$;
   (b) $y = b^m$, 则 $xy^2z = a^3b^{N+m}c^{N-3} \notin L$;
   (c) $y = a^rb^s$, 则 $xy^2z = a^3b^sa^rb^Nc^{N-3} \notin L$.
6. 无论 y 为何种情况, xy^2z 都不可能在 L 中, 与泵引理矛盾.
7. 所以假设不成立, L 不是正则的. □

例. 证明 $L = \left\{ a^{n!} \,\middle|\, n > 0 \right\}$ 不是正则的.

… 取 $w = a^{N!}$, 那么 $|y| = m > 0$, $|xy^2z| = N! + m$, 而 $0 < m \le N < N! < N \cdot N!$, 所以 $N! < |xy^2z| = N! + m < N! + N \cdot N! = (N+1)!$, 即 $|xy^2z|$ 在两个阶乘数之间, 不可能是阶乘数, …

思考题

- $L = \left\{ 0^n1^n \,\middle|\, 0 \le n \le 100 \right\}$ 是否是正则语言?
- 有限的语言, 是否符合泵引理呢? 如 $\varnothing$, $\{\varepsilon\}$, $\{0, 00\}$ 等.

课堂练习. Prove that $L = \{a^ib^jc^k \mid i + j = k\}$ is not regular with pumping lemma.

4.2.3 泵引理只是必要条件

即“正则 ⇒ 泵引理成立”, 所以“¬ 泵引理成立 ⇒ ¬ 正则”.

- 泵引理只是正则语言的必要条件
- 只能用来证明某个语言不是正则的
- 与正则语言等价的定理 — Myhill-Nerode Theorem

例 7. 语言 L 不是正则的, 但每个串都可以应用泵引理

$$L = \left\{ ca^n b^n \;\middle|\; n \ge 1 \right\} \cup \left\{ c^k w \;\middle|\; k \ne 1, w \in \{a, b\}^* \right\}$$

- 其中 $A = \left\{ ca^n b^n \;\middle|\; n \ge 1 \right\}$ 部分不是正则的
- 而 $B = \left\{ c^k w \;\middle|\; k \ne 1, w \in \{a, b\}^* \right\}$ 部分是正则的
- 而 A 的任何串 $w = ca^i b^i$, 都可应用泵引理, 因为

  $$w = (\varepsilon)(c)(a^i b^i)$$

  重复字符 c 生成的新串都会落入 B 中

思考题

对任何正则语言 L, 在泵引理中, 与 L 相关联的正整数 N

- 与识别 L 的 DFA 的状态数 n 之间有何关系?
- 与识别 L 的 NFA 的状态数之间呢?

思考题

语言

$$L = \left\{ 0^n x 1^n \;\middle|\; n \ge 1, x \in \{0, 1\}^* \right\}$$

是否是正则语言?

4.3 正则语言的封闭性

定义. 正则语言经某些运算后得到的新语言仍保持正则, 称为在这些运算下封闭.

4.3.1 并/连接/闭包

定理 6 (并/连接/闭包的封闭性)**.** 正则语言在并, 连接和闭包运算下保持封闭.

证明: 由正则表达式的定义得证. □

4.3.2 补

定理 7 (补运算封闭性)**.** 如果 L 是 Σ 上的正则语言, 那么 $\overline{L} = \Sigma^* - L$ 也是正则的.

证明: 设接受语言 L 的 DFA

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

即 $\mathbf{L}(A) = L$. 构造 DFA

$$B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$$

则有 $\overline{L} = \mathbf{L}(B)$, 因为 $\forall w \in \Sigma^*$

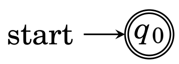
$$w \in \overline{L} \iff \hat{\delta}(q_0, w) \notin F \iff \hat{\delta}(q_0, w) \in Q - F \iff w \in \mathbf{L}(B).$$

□

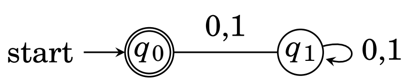
注意

使用这种方法求正则语言的补时, DFA 不能有缺失状态.

例 8. 若 $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{\varepsilon\}$ 的 DFA 如图, 请给出 $\overline{L}$ 的 DFA.



应使用完整的 DFA 去求补:



思考题

如何求正则表达式的补?

例 9. 证明 $L_{\text{neq}} = \{ w \mid w$ 由数量不相等的 0 和 1 构成 $\}$ 不是正则的.

证明:

- 由泵引理不易直接证明 L_{neq} 不是正则的;

- 因为无论如何取 w, 将其分为 $w = xyz$ 时, 都不易产生 L_{neq} 之外的串;
- 而证明 L_{eq} 非正则很容易;
- 由补运算的封闭性, 所以 $L_{\text{neq}} = \overline{L_{\text{eq}}}$ 也不是正则的. □

4.3.3 交

定理 8. *[习题 4.2.15] 若 DFA A_L, A_M 和 A 的定义如下*

$$\begin{aligned} A_L &= \big(Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L\big) \\ A_M &= \big(Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M\big) \\ A &= \big(Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta, (q_L, q_M), F_L \times F_M\big) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \delta : \big(Q_L \times Q_M\big) \times \Sigma &\to Q_L \times Q_M \\ \delta\big((p,q),a\big) &= \big(\delta_L(p,a), \delta_M(q,a)\big). \end{aligned}$$

则对任意 $w \in \Sigma^*$,

$$\hat{\delta}\big((q_L, q_M), w\big) = \big(\hat{\delta}_L\big(q_L, w\big), \hat{\delta}_M\big(q_M, w\big)\big).$$

证明: 对 w 的结构归纳.

归纳基础：当 $w = \varepsilon$ 时

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\big((q_L, q_M), \varepsilon\big) &= (q_L, q_M) && \hat{\delta}\text{的定义} \\ &= \Big(\hat{\delta}_L(q_L, \varepsilon), \hat{\delta}_M(q_M, \varepsilon)\Big) && \text{同理} \end{aligned}$$

归纳递推：当 $w = xa$ 时

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\big((q_L, q_M), xa\big) &= \delta\Big(\hat{\delta}\big((q_L, q_M), x\big), a\Big) && \hat{\delta}\text{的定义} \\ &= \delta\Big(\big(\hat{\delta}_L(q_L, x), \hat{\delta}_M(q_M, x)\big), a\Big) && \text{归纳假设} \\ &= \Big(\delta_L\big(\hat{\delta}_L(q_L, x), a\big), \delta_M\big(\hat{\delta}_M(q_M, x), a\big)\Big) && \delta\text{的构造} \\ &= \big(\hat{\delta}_L(q_L, xa), \hat{\delta}_M(q_M, xa)\big) && \hat{\delta}\text{的定义} \end{aligned}$$

□

定理 9 (交运算封闭性)**.** *如果 L 和 M 是正则语言, 那么 $L \cap M$ 也是正则语言.*

证明 1: 由 $L\cap M=\overline{\overline{L}\cup\overline{M}}$ 得证. □

证明 2: 由定理 8 构造识别 $L\cap M$ 的 DFA A, 则 $\forall w\in\Sigma^*$,

$$\begin{aligned} w\in L\cap M &\iff \hat{\delta}_L(q_L,w)\in F_L\wedge\hat{\delta}_M(q_M,w)\in F_M \\ &\iff \big(\hat{\delta}_L(q_L,w),\hat{\delta}_M(q_M,w)\big)\in F_L\times F_M \\ &\iff \hat{\delta}\big((q_L,q_M),w\big)\in F_L\times F_M \\ &\iff w\in\mathbf{L}(A). \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{L}(A)=L\cap M$, 所以 $L\cap M$ 也是正则的. □

思考题

有语言 M,N 和 L, 满足

$$M\cap N=L$$

1. 若 M 和 N 都是正则语言, 由定理9, 则 L 是一定正则语言.
2. 若 M 和 N 都不是正则语言, 则 L 一定不是正则语言吗?
3. 若 M 和 L 都是正则语言, 则 N 一定是正则语言吗?
4. 若 M 正则而 L 非正则, 则 N 一定非正则吗?
5. 若 M 非正则而 L 正则, 则 N 呢?

例 10. 如果已知语言

$$L_{01}=\{\,0^n1^n \mid n\ge 0\,\}$$

不是正则的, 请用封闭性证明语言

$$L_{\mathrm{eq}}=\{\,w\in\{0,1\}^* \mid w \text{ 由数量相等的 0 和 1 构成}\,\}$$

也不是正则的.

证明:

1. 首先, 因为 $\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$ 是正则语言;
2. 而 $L_{01}=\mathbf{L}\big(\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*\big)\cap L_{\mathrm{eq}}$;
3. 如果 L_{eq} 是正则的, L_{01} 必然也是正则的;

4. 因为已知 L_{01} 不是正则的, 所以 L_{eq} 一定不是正则的. □

思考题

为什么又能用 L_{eq} 的子集 L_{01} 是非正则的, 来证明 L_{eq} 是非正则的呢?

例 11. 如果 L_1 和 L_2 都不是正则的, 那么 $L_1 \cap L_2$ 一定不是正则的吗?

4.3.4 差

定理 10 (差运算封闭性)**.** *如果 L 和 M 都是正则语言, 那么 $L-M$ 也是正则的.*

证明: $L-M = L\cap\overline{M}$. □

例 12. [习题 4.2.6 a)] 证明正则语言在以下运算下封闭

$$\min(L) = \left\{ w \,\middle|\, w \text{ is in } L, \text{but no proper prefix of } w \text{ is in } L \right\}$$

证明 1:

设接受 L 的 DFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, 构造接受 $\min(L)$ 的 DFA $B=\left(Q,\Sigma,\delta',q_0,F\right)$, 其中 δ' 如下, 往证 $L(B)=\min(L)$.

$$\delta'\left(q,a\right) = \begin{cases} \delta\left(q,a\right) & \text{if } q \notin F \\ \varnothing & \text{if } q \in F \end{cases}$$

1. $\forall w \in L(B)$, 存在状态转移序列 $q_0,q_1,\cdots q_{n-1},q_n \in F$ 使 B 接受 w, 其中 $q_i \notin F\left(0 \le i \le n-1\right)$. $\therefore w \in \min(L)$.

2. $\forall w \in \min(L) \subseteq L$, A 接受 w 的状态序列如果为 $q_0,q_1,\cdots,q_n$, 则显然 $q_i \notin F\left(0 \le i \le n-1\right)$ 且 $q_n \in F$, 否则 w 会有 L 可接受的前缀. $\therefore w \in L(B)$. □

证明 2:

由封闭性

$$\min(L) = L - L\Sigma^{+}$$

得证. □

4.3.5 反转

定义. 字符串 $w = a_1a_2\dots a_n$ 的反转 *(Reverse)*, 记为 w^R, 定义为

$$w^R = a_na_{n-1}\dots a_1.$$

定义. 语言 L 的反转, 记为 L^R, 定义为

$$L^R = \{ w^R \in \Sigma^* \mid w \in L \}.$$

定理 11 (反转的封闭性)**.** 如果 L 是正则语言, 那么 L^R 也是正则的.

两种证明方法:

- 对正则表达式 E 的结构归纳, 往证

$$\mathbf{L}(E^R) = (\mathbf{L}(E))^R.$$

- 构造识别 L 的 NFA $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$, 将其转换为识别 L^R 的 NFA

$$B = (Q \cup \{q_s\}, \Sigma, \delta_B, q_s, \{q_0\})$$

1. 将 A 的边调转方向;
2. 将 A 的初始状态 q_0, 改为唯一的接受状态;
3. 新增初始状态 q_s, 且令 $\delta_B(q_s, \varepsilon) = F$.

例 13. 语言 L 及其反转 L^R 分别为

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ends in 01.} \}$$

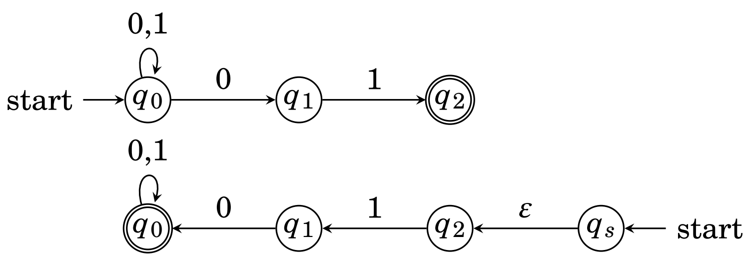
$$L^R = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ starts with 10.} \}$$

正则表达式分别为

$$L = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}$$

$$L^R = \mathbf{10}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*.$$

自动机分别为



证明: 往证如果有正则表达式 E, 则存在正则表达式 E^R 使

$$\mathbf{L}\left(E^R\right)=\left(\mathbf{L}(E)\right)^R.$$

归纳基础:

1. 当 $E=\varnothing$ 时, 有 $\varnothing^R=\varnothing$;
2. 当 $E=\boldsymbol{\varepsilon}$ 时, 有 $\boldsymbol{\varepsilon}^R=\boldsymbol{\varepsilon}$;
3. $\forall a\in\Sigma$, 当 $E=\mathbf{a}$ 时, 有 $\mathbf{a}^R=\mathbf{a}$;

都满足 $\mathbf{L}\left(E^R\right)=\left(\mathbf{L}(E)\right)^R$, 因此命题成立.

归纳递推:

1. 当 $E=E_1+E_2$ 时, 有 $\left(E_1+E_2\right)^R=E_1^R+E_2^R$

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{L}(E_1+E_2)\right)^R && \\
&=\left(\mathbf{L}(E_1)\cup\mathbf{L}(E_2)\right)^R && \text{正则表达式的加}\\
&=\left\{\, w^R \;\middle|\; w\in\mathbf{L}(E_1) \text{ or } w\in\mathbf{L}(E_2)\,\right\} && \text{语言的反转}\\
&=\left(\mathbf{L}(E_1)\right)^R\cup\left(\mathbf{L}(E_2)\right)^R && \text{同上}\\
&=\mathbf{L}\left(E_1^R\right)\cup\mathbf{L}\left(E_2^R\right) && \text{归纳假设}\\
&=\mathbf{L}\left(E_1^R+E_2^R\right) && \text{正则表达式的加}
\end{aligned}$$

2. 当 $E=E_1E_2$ 时, 有 $\left(E_1E_2\right)^R=E_2^RE_1^R$

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{L}(E_1E_2)\right)^R=\left(\mathbf{L}(E_1)\mathbf{L}(E_2)\right)^R && \text{正则表达式的连接}\\
&=\left\{\, w_1w_2 \;\middle|\; w_1\in\mathbf{L}(E_1), w_2\in\mathbf{L}(E_2)\,\right\}^R && \text{语言的连接}\\
&=\left\{\, (w_1w_2)^R \;\middle|\; w_1\in\mathbf{L}(E_1), w_2\in\mathbf{L}(E_2)\,\right\} && \text{语言的反转}\\
&=\left\{\, w_2^Rw_1^R \;\middle|\; w_1\in\mathbf{L}(E_1), w_2\in\mathbf{L}(E_2)\,\right\} && \text{字符串的反转}\\
&=\left\{\, w_2^R \;\middle|\; w_2\in\mathbf{L}(E_2)\,\right\}\left\{\, w_1^R \;\middle|\; w_1\in\mathbf{L}(E_1)\,\right\} && \text{语言的连接}\\
&=\left(\mathbf{L}(E_2)\right)^R\left(\mathbf{L}(E_1)\right)^R && \text{语言的反转}\\
&=\mathbf{L}(E_2^R)\mathbf{L}(E_1^R)=\mathbf{L}(E_2^RE_1^R) && \text{正则表达式的连接}
\end{aligned}$$

3. 当 $E=E_1^*$ 时, 有 $\left(E_1^*\right)^R=\left(E_1^R\right)^*$

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{L}(E_1^*)\right)^R && \\
&=\left\{\, w_1w_2\dots w_n \;\middle|\; n\ge 0, w_i\in\mathbf{L}(E_1)\,\right\}^R && \text{正则表达式的闭包}\\
&=\left\{\, (w_1w_2\dots w_n)^R \;\middle|\; n\ge 0, w_i\in\mathbf{L}(E_1)\,\right\} && \text{语言的反转}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\, w_n^R w_{n-1}^R \dots w_1^R \mid n \ge 0, w_i \in \mathbf{L}(E_1) \,\} && \text{字符串的反转} \\
&= \{\, w_n^R w_{n-1}^R \dots w_1^R \mid n \ge 0, w_i^R \in \mathbf{L}(E_1^R) \,\} && \text{归纳假设} \\
&= \{\, w_1 w_2 \dots w_n \mid n \ge 0, w_i \in \mathbf{L}(E_1^R) \,\} && \text{变量重命名} \\
&= \mathbf{L}\big((E_1^R)^*\big) && \text{正则表达式的闭包}
\end{aligned}
$$

都满足 $\big(\mathbf{L}(E)\big)^R = \mathbf{L}\big(E^R\big)$, 因此命题成立, 所以 L^R 也是正则语言. □

4.3.6 同态与逆同态

同态 (Homomorphism)

定义. 若 Σ 和 Γ 是两个字母表, 同态定义为函数 $h : \Sigma \to \Gamma^*$

$$\forall a \in \Sigma,\ h(a) \in \Gamma^*.$$

扩展 h 的定义到字符串,

$$(1)\ \ h(\varepsilon) = \varepsilon$$

$$(2)\ \ h(xa) = h(x)h(a)$$

再扩展 h 到语言, 对 $\forall L \subseteq \Sigma^*$,

$$h(L) = \{\, h(w) \mid w \in L \,\}.$$

例 14. 若由 $\Sigma = \{0,1\}$ 到 $\Gamma = \{a,b\}$ 的同态函数 h 为

$$h(0) = ab,\ \ h(1) = \varepsilon.$$

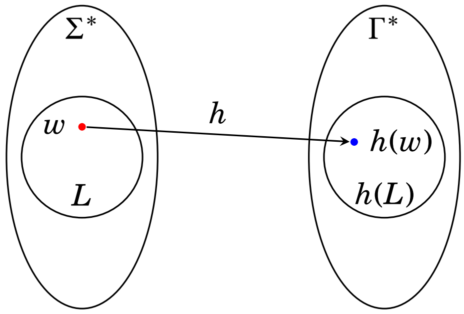
则 Σ 上的字符串 0011, 在 h 的作用下

$$
\begin{aligned}
h(0011) &= h(\varepsilon)h(0)h(0)h(1)h(1) \\
&= \varepsilon \cdot ab \cdot ab \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \\
&= abab.
\end{aligned}
$$

语言 $L = \mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}$, 在 h 的作用下, $h(L)$ 为:

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}) &= \big(h(\mathbf{1})\big)^* h(\mathbf{0}) + \big(h(\mathbf{0})\big)^* h(\mathbf{1}) \\
&= (\boldsymbol{\varepsilon})^*(\mathbf{ab}) + (\mathbf{ab})^*(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= (\mathbf{ab})^*
\end{aligned}
$$

定理 12 (同态的封闭性)**.** 若 L 是字母表 Σ 上的正则语言, h 是 Σ 上的同态, 则 $h(L)$ 也是正则的.



- 若 L 的正则表达式为 E, 即 $L = \mathbf{L}(E)$, 按如下规则构造表达式 $h(E)$

$$
\begin{aligned}
h(\varnothing) &= \varnothing & \qquad h(\mathbf{r}+\mathbf{s}) &= h(\mathbf{r}) + h(\mathbf{s}) \\
h(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \boldsymbol{\varepsilon} & h(\mathbf{rs}) &= h(\mathbf{r})h(\mathbf{s}) \\
\forall a \in \Sigma,\ h(\mathbf{a}) &= h(a) & h(\mathbf{r}^*) &= \big(h(\mathbf{r})\big)^*
\end{aligned}
$$

- 往证 $\mathbf{L}\big(h(E)\big) = h\big(\mathbf{L}(E)\big)$, 而 $h(E)$ 显然也是正则表达式, 因此 $h(L)$ 正则

证明: 对 E 的结构归纳, 往证 $\mathbf{L}\big(h(E)\big) = h\big(\mathbf{L}(E)\big)$.

归纳基础:

- 当 $E = \boldsymbol{\varepsilon}$ 时

$$h\big(\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon})\big) = h\big(\{\varepsilon\}\big) = \{\varepsilon\} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{L}\big(h(\boldsymbol{\varepsilon})\big)$$

- 当 $E = \varnothing$ 时

$$h\big(\mathbf{L}(\varnothing)\big) = h(\varnothing) = \varnothing = \mathbf{L}(\varnothing) = \mathbf{L}\big(h(\varnothing)\big)$$

- $\forall a \in \Sigma$, 当 $E = \mathbf{a}$ 时

$$h\big(\mathbf{L}(\mathbf{a})\big) = h\big(\{a\}\big) = \big\{h(a)\big\} = \mathbf{L}\big(h(a)\big) = \mathbf{L}\big(h(\mathbf{a})\big)$$

所以命题成立.

归纳递推: 假设对正则表达式 F, G 分别有

$$\mathbf{L}\big(h(F)\big) = h\big(\mathbf{L}(F)\big),\ \ \mathbf{L}\big(h(G)\big) = h\big(\mathbf{L}(G)\big)$$

- 当 $E = F + G$ 时:

$$
\begin{aligned}
h\big(\mathbf{L}(F+G)\big) &= h\big(\mathbf{L}(F) \cup \mathbf{L}(G)\big) && \text{正则表达式的加} \\
&= h\big(\mathbf{L}(F)\big) \cup h\big(\mathbf{L}(G)\big) && h\ \text{作用在每个集合的串上}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{L}\big(h(F)\big) \cup \mathbf{L}\big(h(G)\big) && \text{归纳假设} \\
&= \mathbf{L}\big(h(F)+h(G)\big) && \text{正则表达式的加} \\
&= \mathbf{L}\big(h(F+G)\big) && h(F+G)\text{的定义}
\end{aligned}
$$

- 当 $E = FG$ 时:

$$
\begin{aligned}
h\big(\mathbf{L}(E)\big) &= h\big(\mathbf{L}(F)\mathbf{L}(G)\big) && \text{正则表达式的连接} \\
&= h\big(\mathbf{L}(F)\big)h\big(\mathbf{L}(G)\big) && \heartsuit \\
&= \mathbf{L}\big(h(F)\big)\mathbf{L}\big(h(G)\big) && \text{归纳假设} \\
&= \mathbf{L}\big(h(F)h(G)\big) && \text{正则表达式的连接} \\
&= \mathbf{L}\big(h(FG)\big) && h(FG)\text{的定义} \\
&= \mathbf{L}\big(h(E)\big)
\end{aligned}
$$

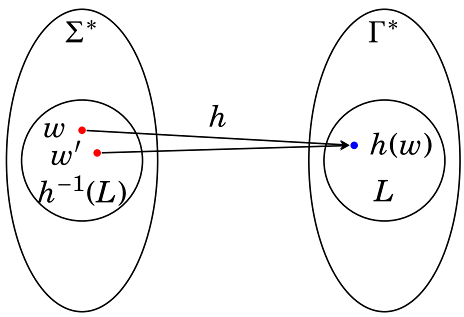
$\heartsuit$: $h(a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m) = h(a_1)\cdots h(b_m) = h(a_1\cdots a_n)h(b_1\cdots b_m)$

- 当 $E = F^*$ 时: 略 (提示: $\forall w \in \mathbf{L}(F^*)$ 可看作 $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, 其中 $w_i \in \mathbf{L}(F)$.) □

逆同态 (Inverse homomorphism)

定义. *若 h 是字母表 Σ 到 Γ 的同态, 且 L 是 Γ 上的语言, 那么使 $h(w) \in L$ 的 w ($w \in \Sigma^*$) 的集合, 称为语言 L 的 h 逆, 记为 $h^{-1}(L)$, 即*

$$h^{-1}(L) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; h(w) \in L \right\}.$$



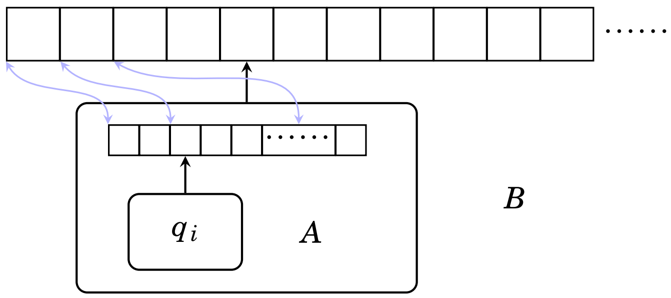
定理 13 (逆同态的封闭性)**.** *如果 h 是字母表 Σ 到 Γ 的同态, L 是 Γ 上的正则语言, 那么 $h^{-1}(L)$ 也是正则语言.*

证明: 由 L 的 DFA $A = (Q, \Gamma, \delta, q_0, F)$, 构造识别 $h^{-1}(L)$ 的 DFA

$$B = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F),$$

其中

$$\delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, h(a)).$$



为证明 $\mathbf{L}(B) = h^{-1}(L)$, 先证明 $\widehat{\delta'}(q,w) = \hat{\delta}(q,h(w))$.

对 $|w|$ 归纳, 往证 $\widehat{\delta'}(q,w) = \hat{\delta}(q,h(w))$.

1. 归纳基础: 若 $w = \varepsilon$
$$\hat{\delta}(q,h(\varepsilon)) = \hat{\delta}(q,\varepsilon) = q = \widehat{\delta'}(q,\varepsilon),$$

2. 归纳递推: 若 $w = xa$
$$\begin{aligned}
\widehat{\delta'}(q,xa) &= \delta'(\widehat{\delta'}(q,x),a) && \widehat{\delta'}\text{ 定义}\\
&= \delta'(\hat{\delta}(q,h(x)),a) && \text{归纳假设}\\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q,h(x)),h(a)) && \delta'\text{ 构造}\\
&= \hat{\delta}(q,h(x)h(a)) && \text{DFA 节例 5}\\
&= \hat{\delta}(q,h(xa)).
\end{aligned}$$

所以 $\forall w \in \Sigma^*$, $\widehat{\delta'}(q_0,w) = \hat{\delta}(q_0,h(w)) \in F$, 即 w 被 B 接受当且仅当 $h(w)$ 被 A 接受, B 是识别 $h^{-1}(L)$ 的 DFA, 因此 $h^{-1}(L)$ 是正则的. □

例 15. Prove that $L = \{\, 0^n 1^{2n} \mid n \geq 0 \,\}$ is a language not regular.

证明: 设同态 $h : \{0,1\} \to \{0,1\}^*$ 为
$$h(0) = 0,$$
$$h(1) = 11,$$

那么
$$h^{-1}(L) = \{\, 0^n 1^n \mid n \geq 0 \,\} = L_{01},$$

我们已知 L_{01} 非正则, 由封闭性, L 不是正则的. □

例 16. 若语言 $L = (\mathbf{00} + \mathbf{1})^*$, 同态 $h : \{a,b\} \to \{0,1\}^*$ 为
$$h(a) = 01,\ \ h(b) = 10,$$

请证明 $h^{-1}(L) = (\mathbf{ba})^*$.

证明: 往证 $h(w) \in L \iff w = (ba)^n$.

(⇐) 若 $w=(ba)^n$, 而 $h(ba)=1001$, 因此 $h(w)=(1001)^n\in L$.

(⇒) 若 $h(w)\in L$, 假设 $w\notin(\mathbf{ba})^*$, 则只能有四种情况:

1. w 以 a 开头, 则 $h(w)$ 以 01 开头, 显然 $h(w)\notin(\mathbf{00}+\mathbf{1})^*$;
2. w 以 b 结尾, 则 $h(w)$ 以 10 结尾, 显然 $h(w)\notin(\mathbf{00}+\mathbf{1})^*$;
3. w 有连续的 a, 即 $w=xaay$, 则 $h(w)=z1010v$, 显然 $h(w)\notin(\mathbf{00}+\mathbf{1})^*$;
4. w 有连续的 b, 即 $w=xbby$, 则 $h(w)=z0101v$, 显然 $h(w)\notin(\mathbf{00}+\mathbf{1})^*$;

因此 w 只能是 $(ba)^n, n\geq 0$ 的形式. □

例 17. [习题 4.2.6 b)] 证明正则语言在以下运算下封闭

$$\max(L)=\left\{w \,\middle|\, w \text{ is in } L \text{ and for no } x \text{ other than } \varepsilon \text{ is } wx \text{ in } L\right\}.$$

证明 1:

由接受 L 的 DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, 构造接受 $\max(L)$ 的 DFA $M'=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F')$, 其中

$$F'=F-\{q \mid q\in F,\ \exists x\in\Sigma^+,\ \hat{\delta}(q,x)\in F\}$$

则 $L(M')=\max(L)$. □

证明 2: 利用封闭性.

如果 $\Sigma=\{a,b\}$, 设 $\Gamma=\{a,\hat{a},b,\hat{b}\}$, 定义同态 $h\ (\Gamma\to\Sigma^*)$ 和 $g\ (\Gamma\to\Sigma^*)$:

$$\begin{array}{llll} h(a)=a & h(\hat{a})=a & g(a)=a & g(\hat{a})=\varepsilon \\ h(b)=b & h(\hat{b})=b & g(b)=b & g(\hat{b})=\varepsilon \end{array}$$

那么

$$\max(L)=L-g\left(h^{-1}(L)\cap(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*(\hat{\mathbf{a}}+\hat{\mathbf{b}})^+\right).$$

□

注意: $\min(L)$ 和 $\max(L)$ 不同, 设 $L=\mathbf{10}^+$, 则 $\min(L)=\{10\}$ 而 $\max(L)=\varnothing$.

例 18. For a language L, define head(L) to be the set of all prefixes of strings in L. Prove that if L is regular, so is head(L).

证明. 设 L 是 Σ 上的正则语言且 $\Sigma=\{a,b\}$, $\Gamma=\{a,b,\hat{a},\hat{b}\}$. 定义同态 $h:\Gamma\to\Sigma^*$ 和 $g:\Gamma\to\Sigma^*$ 分别为:

$$\begin{array}{llll} h(a)=a & h(\hat{a})=a & g(a)=a & g(\hat{a})=\varepsilon \end{array}$$

$$h(b) = b \qquad h(\hat{b}) = b \qquad\qquad g(b) = b \qquad g(\hat{b}) = \varepsilon$$

则因为 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*(\hat{\mathbf{a}}+\hat{\mathbf{b}})^*$ 是 Γ 上的正则语言, 所以

$$\mathrm{head}(L) = g\big((\mathbf{a}+\mathbf{b})^*(\hat{\mathbf{a}}+\hat{\mathbf{b}})^* \cap h^{-1}(L)\big)$$

是 Σ 上的正则语言, 因此 head(L) 是正则的. □

例如, 若字符串 $001 \in L$，则

$$\begin{aligned} h^{-1}(\{001\}) &= \{001, 00b, 0a1, 0ab, a01, a0b, aa1, aab\}, \\ (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \cap h^{-1}(\{001\}) &= \{001, 00b, 0ab, aab\}, \\ g((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \cap h^{-1}(\{001\})) &= \{001, 00, 0, \varepsilon\}. \end{aligned}$$

4.4 正则语言的判定性质

正则语言, 或任何语言, 典型的 3 个判定问题:

1. 以某种形式化模型描述的语言是否为空? 是否无穷?
2. 某个特定的串 w 是否属于所描述的语言?
3. 以两种方式描述的语言, 是否是相同的? — 语言的等价性

我们想知道, 要回答这类问题的具体算法, 是否存在.

4.4.1 空性, 有穷性和无穷性

正则语言的空, 有穷和无穷 (Emptiness, finiteness and infiniteness), 可以通过定理14来判定.

定理 14. *具有 n 个状态的有穷自动机 M 接受的集合 S:*

1. S 是非空的, 当且仅当 M 接受某个长度小于 n 的串;

2. S 是无穷的, 当且仅当 M 接受某个长度为 m 的串, $n \le m < 2n$.

所以, 对于正则语言:

- 存在算法, 判断其是否为空, 只需检查全部长度小于 n 的串;

- 存在算法, 判断其是否无穷, 只需检查全部长度由 n 到 $2n-1$ 的串.

证明: 设接受正则语言 S 的 DFA 为 A.

1. 必要性: 显然成立. 充分性:
   - i 如果 S 非空, 设 w 是 A 接受的串中长度最小者之一;
   - ii 必然 $|w| < n$, 否则由泵引理 $w = xyz$, 接受 xz 更短.
2. 必要性: 由泵引理, 显然成立. 充分性:
   - i 如果 S 无穷, 假设没有长度 n 到 $2n-1$ 之间的串;
   - ii 那么取 $w \in \mathbf{L}(A)$ 是长度 $\geq 2n$ 中最小者之一;
   - iii 由泵引理 $w = xyz$, 且 A 会接受更短的串 xz;
   - iv 于是, 或者 w 不是长度最小的, 或者长度 n 到 $2n-1$ 之间有被接受的串, 因此假设不成立. □

4.4.2 等价性

定理 15. *存在算法, 判定两个有穷自动机是否等价 (接受语言相同).*

证明:

1. 设 M_1 和 M_2 是分别接受 L_1 和 L_2 的有穷自动机;
2. 则 $(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2)$ 是正则的, 所以可被某个有穷自动机 M_3 接受;
3. 而 M_3 接受某个串, 当且仅当 $L_1 \neq L_2$;
4. 由于存在算法判断 $\mathbf{L}(M_3)$ 是否为空, 因此得证. □

4.5 自动机的最小化

4.5.1 DFA 状态的等价性

定义. *DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 中两个状态 p 和 q, 对 $\forall w \in \Sigma^*$:*

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F,$$

则称这两个状态是等价的, 否则称为可区分的.

- 等价性只要求 $\hat{\delta}(p, w)$ 和 $\hat{\delta}(q, w)$ 同时在或不在 F 中, 而不必相同.

4.5.2 填表算法与 DFA 最小化

填表算法

递归寻找 DFA 中全部的可区分状态对:

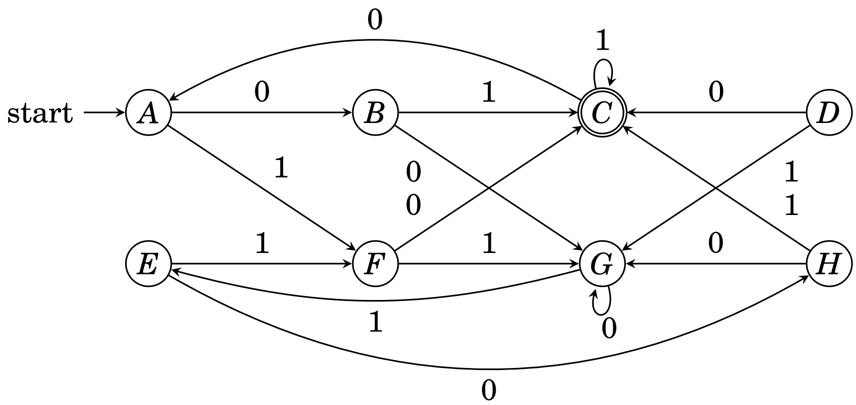
1. 如果 $p \in F$ 而 $q \notin F$, 则 $[p,q]$ 是可区分的;
2. $\exists a \in \Sigma$, 如果
$$[r = \delta(p,a), s = \delta(q,a)]$$
是可区分的, 则 $[p,q]$ 是可区分的.

定理 16. *如果填表算法不能区分两个状态, 则这两个状态是等价的.*

Algorithm 1 MinimizeDFA($Q, \Sigma, \delta, q_0, F$)

```
for all (p,q) ∈ Q × Q do
    if (p ∈ F and q ∉ F) or (p ∉ F and q ∈ F) then
        T[p,q] ← ★
repeat
    done ← True
    for all (p,q) ∈ Q × Q do
        if T[p,q] ≠ ★ then
            for all a ∈ Σ do
                if T[δ(p,a), δ(q,a)] = ★ then
                    T[p,q] ← ★
                    done ← False
until done
return T
```

例 19. 用填表算法找到如图 DFA 中全部可区分状态对.



B	×						
C	×	×					
D	×	×	×				
E		×	×	×			
F	×	×	×		×		
G	×	×	×	×	×	×	
H	×		×	×	×	×	×
	A	B	C	D	E	F	G

1. 直接标记终态和非终态之间的状态对:
$$\{C\} \times \{A,B,D,E,F,G,H\}.$$

2. 标记所有经过字符 0 到达终态和非终态的状态对:

$$\{D,F\}\times\{A,B,C,E,G,H\}.$$

3. 标记所有经过字符 1 到达终态和非终态的状态对:

$$\{B,H\}\times\{A,C,D,E,F,G\}.$$

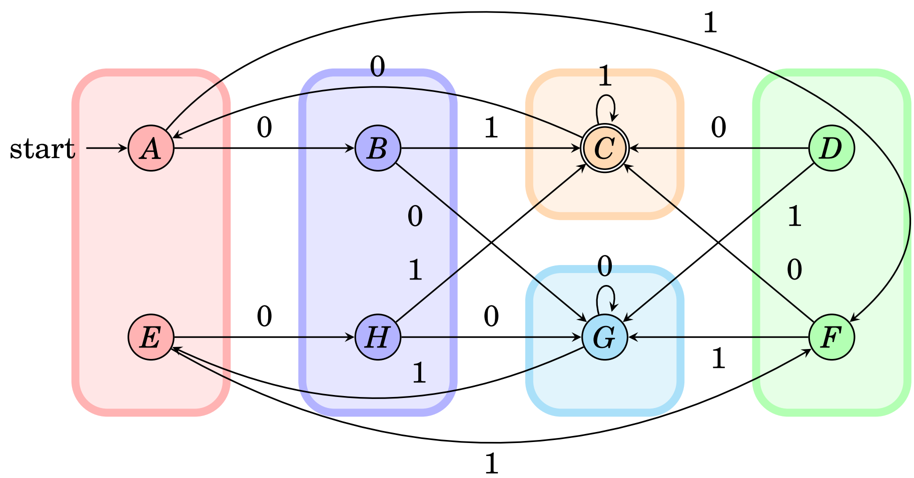
4. 此时还有 $[A,E]$, $[A,G]$, $[B,H]$, $[D,F]$, $[E,G]$ 未标记, 只需逐个检查.
   - × $[A,G]$ 是可区分的, 因为字符 0 到可区分的 $[B,G]$;
   - × $[E,G]$ 是可区分的, 因为字符 1 到可区分的 $[E,F]$.

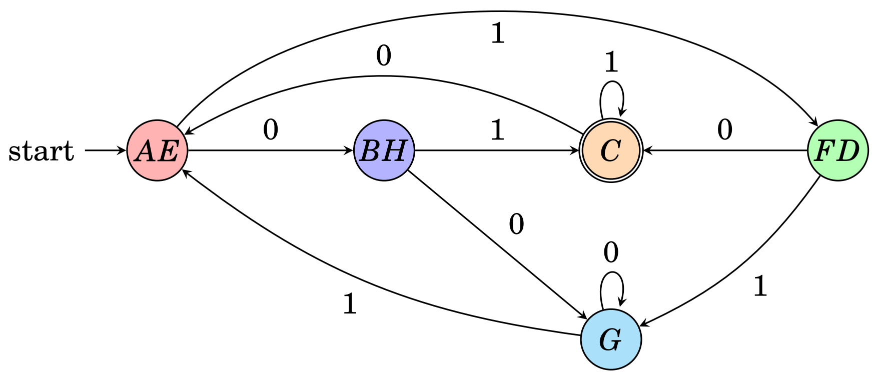
5. 而 $[A,E]$, $[B,H]$ 和 $[D,F]$ 在经过很短的字符串后, 都会到达相同状态, 因此都是等价的.

DFA 最小化

根据等价状态, 将状态集划分成块, 构造等价的最小化 DFA. 根据填表算法取得的 DFA A 状态间的等价性, 将状态集进行划分, 得到不同的块; 利用块构造新的 DFA B, B 的开始状态的为包含 A 初始状态的块, B 的接受状态为包含 A 的接收状态的块, 转移函数为块之间的转移; 则 B 是 A 的最小化 DFA.

续例 19. 构造其最小化的 DFA.

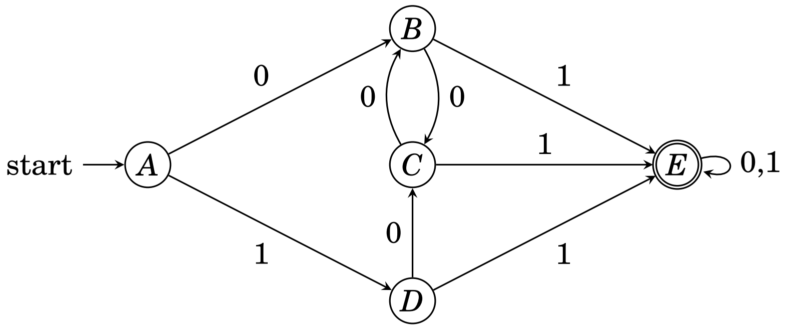




思考题

NFA 能否最小化?

课堂练习. Minimize the given DFA.



4.6 练习题

1. [Exercise 4.1.2] Prove that the following are not regular languages.

d) The set of strings of 0's and 1's whose length is a perfect square.

e) The set of strings of 0's and 1's that are of the form ww, that is some string repeated.

2. [Exercise 4.2.2] If L is a language, and a is a symbol, then L/a, the quotient of L and a, is the set of strings w such that wa is in L. For example, if $L = \{a, aab, baa\}$, then $L/a = \{\varepsilon, ba\}$. Prove that if L is regular, so is L/a. Hint: Start with a DFA for L and consider the set of accepting states.

3. [Exercise 4.2.6] Show that the regular languages are closed under the following operations:

   (a) min(L) = $\{w|w$ is in L, but no proper prefix of w is in L $\}$.

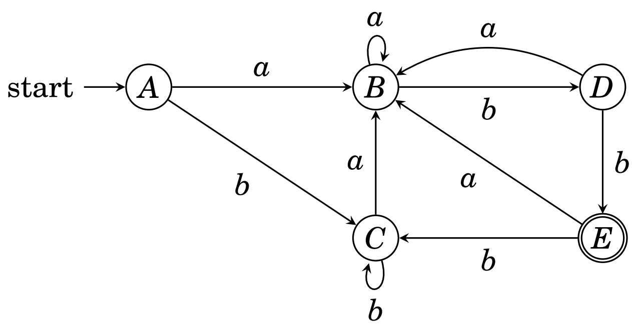
4. [Exercise 4.2.6 b)] max(L) = $\{ w \mid$ w is in L and for no x other than ε is wx in $L\}$

5. [Exercise 4.2.6 b)] max(L) = $\{ w \mid$ w is in L and for no x other than ε is wx in $L\}$

6. [Exercise 4.2.6 c)] init(L)=$\{ w \mid$ for some x, wx is in L $\}$

7. [Exercise 4.2.6 c)] init(L)=$\{ w \mid$ for some x, wx is in L $\}$

8. Minimize the given DFA.


start
A
B
C
D
E
a
a
a
a
a
b
b
b
b
b