2 词法分析

徐辉，xuh@fudan.edu.cn

词法分析主要包括词法声明和解析两部分内容。本章学习目标包括：

- 掌握正则表达式。
- 掌握 Regex=>NFA 转化算法。
- 掌握 NFA=>DFA 转化算法。

2.1 词法声明：正则表达式

正则表达式（Regular Expression，简写为 Regex）定义了字母表 Σ 上的字符串集合，由基本的字符元素和构造方式组成。

2.1.1 字符表示

单个字符元素可以采用如下（表 2.1）的表述形式。

表 2.1: 单个字符元素表示方法。

字符元素	示例	含义
特定字符	a	$x = a$
排除特定字符	$\hat{}a$	$x \in \Sigma/\{a\}$
字符范围	$[ab]$	$x \in \{a, b\}$
字符范围	$[a-z]$	$x \in \{a, ..., z\}$
字符范围	$[a-zA-Z]$	$x \in \{a, ..., z, A, ..., Z\}$
通配符	.	$x \in \Sigma$
空字符	ϵ	$x \in \emptyset$
特定字符或空	$a?$	$x = a$ or $x = \epsilon$

2.1.2 构造方式

单个字符之间组合方式包括选择、连接、和闭包三种基本形式。为了不失一般性，一般可以采用如下（表 2.2）递归形式定义正则表达式的构造方法。

表 2.2: 正则表达式构造方法；其中 S 和 T 为子正则表达式或单个字符。

构造方式	符号	示例	含义	说明
选择	|	$S\|T$	匹配 S 或 T	
连接		ST	连续匹配 S 和 T	
闭包	$*$	S^*	匹配若干个（≥ 0）连续 S	
正闭包	$^+$	S^+	匹配若干个（≥ 1）连续 S	为提升表达能力、非必要

上述构造运算符的优先级顺序：闭包 > 连接 > 选择。以正则表达式 a|bc* 为例，其对应的正则集是 {a,bc,bcc,...}。正则表达式可以使用括号，如 (a|b)c* 对应的正则集是 {ac,bc,acc,bcc,...}。

下面我们使用正则表达式设计计算器的词法规则。首先，计算器的输入符号是一个有限集：

$$\Sigma = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ . \ , +, -, *, /, \hat{}, (,)\}$$

表 2.3定义了计算器中的词法。

表 2.3: 计算器程序词法定义。

标签/标识	含义	定义	说明
DIGIT		[0-9]	临时变量，非标签
DIGITS		{DIGIT} {DIGIT}*	临时变量，非标签
FRAC		.{DIGITS} | ϵ	临时变量，非标签
<UNUM>	无符号数字	{DIGITS} {FRAC}	
<ADD>	加号	+	
<SUB>	减号	−	
<MUL>	乘号	*	
<DIV>	除号	/	
<POW>	指数运算	^	
<LPAR>	左括号	(	
<RPAR>	右括号	)	

在使用正则表达式进行匹配时，如同时满足多条规则或模式，一般采用最长匹配原则。

2.2 词法解析：Regex=>DFA

本节解决一个重要问题：给定任意一条或一组正则表达式，如何自动生成该正则表达式对应的字符串识别程序。理论上，所有正则表达式都可以用确定性有穷自动机（DFA：Deterministic Finite Automaton）表示；DFA 可进一步转化为等价的程序。

定义 1 (有穷自动机（FA: Finite Automaton）)**.** 有穷自动机是一个五元组：$(Q, q_0, F, \Sigma, \Delta)$：

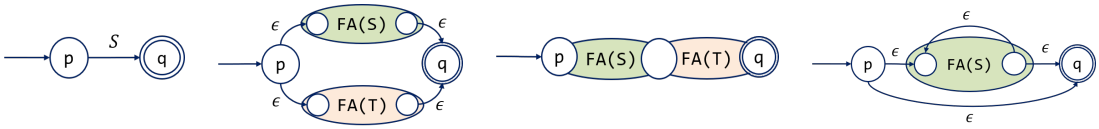
- Q 表示有限状态集合；
- $q_0 \in Q$ 是初始状态；
- $F \subseteq Q$ 是结束状态集合；
- Σ 表示有限字符集合；
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ 为边的集合，表示输入特定字符后有穷自动机的状态转移关系；如果对于所有状态 $\forall q_i \in Q$ 和所有字符，至多存在一个转移目标状态，则该有穷自动机为确定性有穷自动机，否则是非确定性有穷自动机（Non-Deterministic Finite Automaton）。

正则表达式转化 DFA 的过程可分为三步：

1) 正则表达式 =>NFA
2) NFA=>DFA
3) DFA 优化

2.2.1 Regex=>NFA

Thompson 构造法 (McNaughton–Yamada–Thompson) [1, 2] 是一种经典的 NFA 构造算法。其基本思想是由于所有正则表达式的构造模式有限，如果可以为这些模式设计相应的 NFA 构造方法，则可从初始 NFA 开始按照正则表达式的运算优先级顺序递归展开构造该正则表达式的 NFA。



(a) 初始化　(b) 选择展开 $S|T$　(c) 连接展开 ST　(d) 闭包展开 S^*

图 2.1: Thompson 构造法

图 2.1展示了表 2.2中的正则表达式构造模式对应的 NFA 构造方法。从图 2.1a开始，如果遇到选择操作，则按照图 2.1b的方式展开；如果遇到连接操作，则根据图 2.1c的方式展开；如果遇到闭包操作，则采用图 2.1d的方式展开。

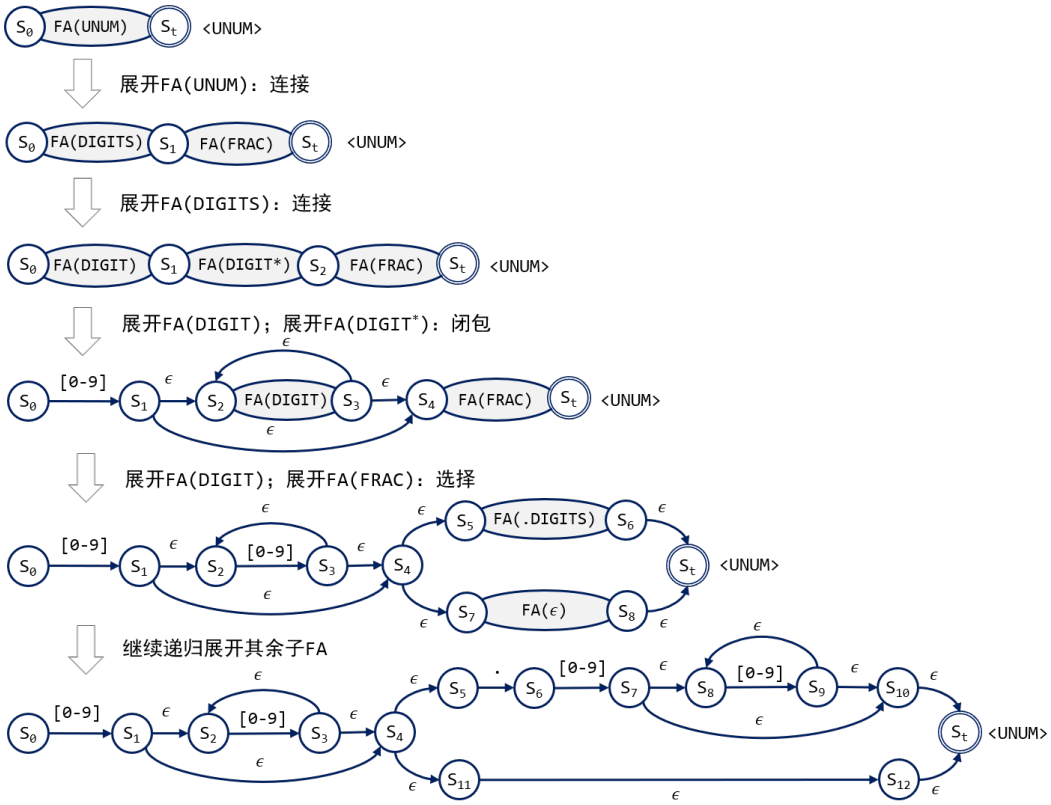


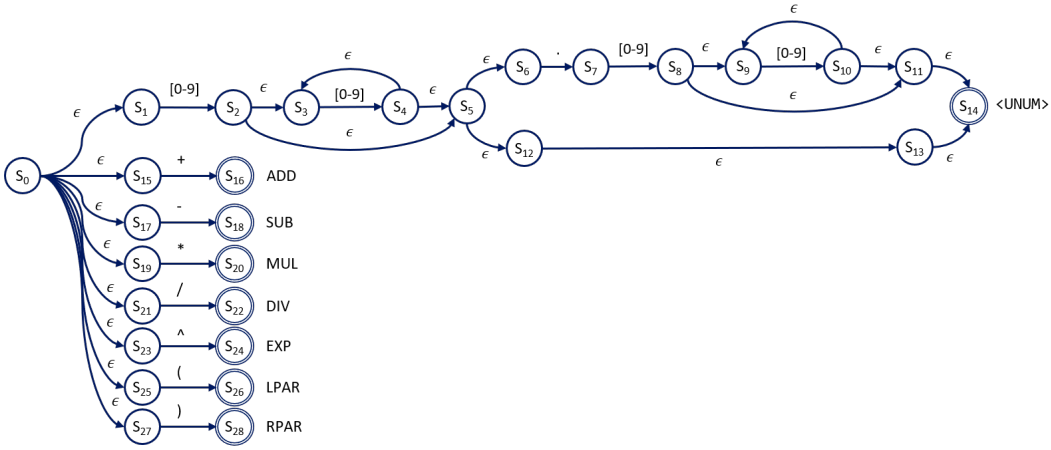
图 2.2: 应用 Thompson 构造法将 <UNUM> 的正则表达式表示为 NFA

图 2.2展示了如何递归构造词法表 2.3中<UNUM> 标签对应的 NFA。有了每个标签的 NFA，接下来我们可以将表 2.3中所有词法标签对应的 NFA 通过 ϵ 转移合并为一个大的 NFA（图 2.3a）。

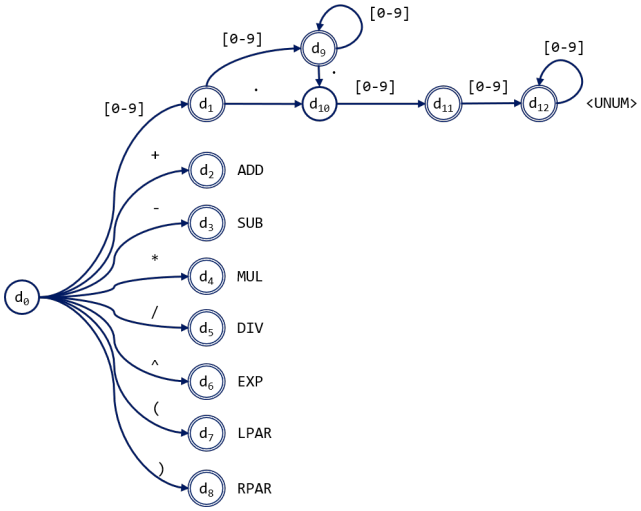
2.2.2 NFA=>DFA

所有的 NFA 都可以转化为 DFA。本节介绍一种基于子集构造法（powerset）的 DFA 构建思路。在介绍该方法之前，我们先定义两个基本概念 ϵ 闭包（closure）和 α 转移（transition）。

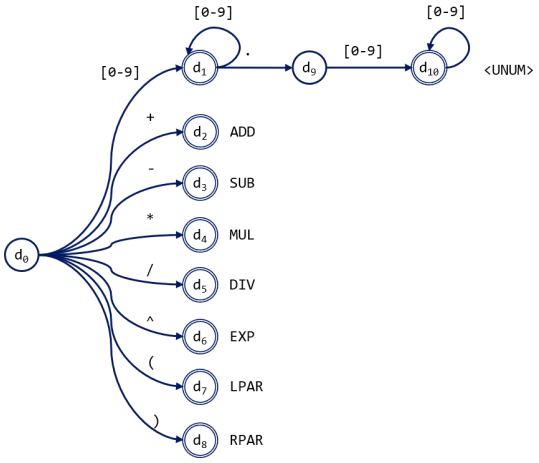
对于 NFA 上的单个状态 s_i 来说，其 ϵ 闭包指的是 s_i 的 ϵ 转移的状态集合。



(a) 合并所有标签 NFA 后的 NFA



(b) NFA 转化后的 DFA



(c) 优化后的 DFA

图 2.3: NFA 转化 DFA

$$Cl^{\epsilon}(s_i) = \cup\{s_j : (s_i, \epsilon) \rightarrow^* (s_j, \epsilon)\}$$

对于 NFA 上的状态集合 S 来说，其 ϵ 闭包指的是 S 中的所有状态的 ϵ 闭包的集合。

$$Cl^{\epsilon}(S) = \cup_{q \in S}\{q : (q, \epsilon) \rightarrow^* (q', \epsilon)\}$$

对于 NFA 上的状态集合 S 来说，其 α 转移指的是 S 读取字符 α 后所有状态的 ϵ 闭包的集合。

$$\Delta(S, \alpha) = Cl^{\epsilon}(\cup_{q \in S}\{q' : (q, a) \rightarrow q'\})$$

基于上述工具，我们可以定义 NFA 等价 DFA 的构造方法。

定义 2 (NFA→DFA)**.** 给定一个 NFA$\{N, n_0, N_f, \Sigma, \Delta\}$，其对应的 DFA 可表示为 $\{D, d_0, D_f, \Sigma, \Theta\}$，其中：

- D 表示 DFA 中的状态集合，其中的每一个状态 d_i 是 NFA 中若干状态的集合；
- d_0 为 DFA 的初始状态，且 d_0 是 n_0 的 ϵ 闭包 $d_0 := Cl^{\epsilon}(n_0)$；
- D_f 为 DFA 的结束状态，且 $D_f := \{S \subseteq N, S \cap N_f \neq \emptyset\}$；

- Θ 为边的集合，对应原 NFA 上状态集合 S 的 α 转移 $\Theta := \{(S, a, \Delta(S, \alpha)), \alpha \in \Sigma\}$。

算法 1描述了将 NFA 转化为 DFA 的详细过程，通过迭代方式从 d_0 开始，分析其对于每个字符的 α 转移，将得到的新状态加入 $worklist$，直到不再有新的状态生成为止。表 2.4描述了使用算法 1将图 2.3a中的 NFA 转化为等价 DFA 的过程。

算法 1 NFA 转化为 DFA

```
1: procedure NFATODFA({N, n_0, N_f, Σ, Δ})
2:     let d_0 = Cl^ϵ(n_0)
3:     let D = {d_0}
4:     let worklist = {d_0}
5:     while worklist ≠ NULL do
6:         d = worklist.pickremove()
7:         for each α ∈ Σ do:
8:             t = Δ(d, α)
9:             if !D.find(t) then:
10:                worklist.add(t)
11:                D.add(t)
12:            end if
13:        end for
14:    end while
15: end procedure
```

表 2.4: 图 2.3a中的 NFA 转化为等价 DFA 的过程分解

DFA 状态	**NFA 状态集合**	**0-9**	**.**	+	**-**	*****	/	^	(	)
d_0	$\{s_0, s_{15}, s_{17}, s_{19}, s_{21}, s_{23}, s_{25}, s_{27}\}$	d_1	-	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
d_1	$\{s_2, s_3, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	d_9	d_{10}	-	-	-	-	-	-	-
d_2	$\{s_{16}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_3	$\{s_{18}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_4	$\{s_{20}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_5	$\{s_{22}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_6	$\{s_{24}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_7	$\{s_{26}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_8	$\{s_{28}\}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
d_9	$\{s_3, s_4, s_5, s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}$	d_9	d_{10}	-	-	-	-	-	-	-
d_{10}	$\{s_7\}$	d_{11}	-	-	-	-	-	-	-	-
d_{11}	$\{s_8, s_9, s_{11}, s_{14}\}$	d_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-
d_{12}	$\{s_9, s_{10}, s_{11}, s_{14}\}$	d_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-

转化后的 DFA 如图 2.3b所示。可以看出该 DFA 有很多冗余的 ϵ 转移，这些 ϵ 转移前后的状态是可以合并的，我们可以对其进行优化。

2.2.3 DFA 优化

DFA 优化的核心思路是找出可以合并的 DFA 节点。对于两个同类型（初始状态、中间状态、或标签相同的结束状态）节点 d_i 和 d_j，如果满足下列条件则可以合并：

$$\forall \alpha \in \Sigma, \Theta(d_i, \alpha) = \Theta(d_j, \alpha)$$

Hopcroft 分割算法 [3] 是基于上述思想的一种算法，但采用了基于分割的实现方法。如算法 2所示，该方法将 DFA 的状态集合 D 初始化为两个子集：结束状态 D_f 和其它状态 $D \backslash D_f$，然后依次检查每一个子集是否需要继续分割；重复上述过程直至不能再分割为止，即找到了最优的 DFA。图 2.3c展示了优化后的 DFA。

算法 2 Hopcroft 分割算法

```
1: procedure HopcroftOpt({D, d_0, D_f, Σ, Θ})
2:     let R = {D_f, D\D_f}
3:     let S = {}
4:     while S ≠ R do
5:         S = R
6:         R = {}
7:         for each s_i ∈ S do:
8:             R = R∪ Split(s_i)
9:         end for
10:    end while
11: end procedure
12: procedure Split(S)
13:    for each α ∈ Σ do:
14:        if α splits S into {s_1, s_2} then:
15:            Return {s_1, s_2}
16:        end if
17:    end for
18: end procedure
```

除了上述方法以外，还有一种直接构造最优 DFA 的方法，称为 Brzozowski 算法 [4]，有兴趣的同学可以自己学习。

练习

1. RESTful API 由字符串常量和变量拼接而成。其中，变量以 ":" 开头，如下面的三个 API 中的`:id`、`:branch` 和`:sha` 均为变量。

```
API-1: GET /projects/:id/repository/branches
API-2: GET /projects/:id/repository/branches/:branch
API-3: GET /projects/:id/repository/commits/:sha
```

   变量在实际 API 调用时会被替换为实际的值，如下列三条 API 调用日志分别对应 API-1 和 API-3。

```
2021-07-04 16:43:47.193: Sending:
 'GET /projects/MyProject/repository/branches?'
2021-07-04 16:43:49.761: Sending:
 'GET /projects/MyProject/repository/commits/ed899a2f?'
```

   问题：给定多个 API 定义和一组访问日志，如何识别每条日志属于哪个 API?

2. 选择一门你熟悉的语言（如 Markdown、Latex、HTML、C/C++、Java）进行词法分析:
   1）用正则表达式设计该语言的词法规则；
   2）将正则表达式转化为 NFA；
   3）将 NFA 转化为 DFA 并优化。

Bibliography

[1] Robert McNaughton, and Hisao Yamada. “Regular expressions and state graphs for automata.” IRE Transactions on Electronic Computers 1 (1960): 39-47.

[2] Ken Thompson. “Programming techniques: Regular expression search algorithm.” Communications of the ACM 11, no. 6 (1968): 419-422.

[3] John E. Hopcroft, “An nlog n algorithm for minimizing the states in a finite automaton.” The Theory of Machines and Computation (1970): 189496.

[4] Janusz A. Brzozowski, “Canonical regular expressions and minimal state graphs for definite events.” In Proc. Symposium of Mathematical Theory of Automata, pp. 529-561. 1962.