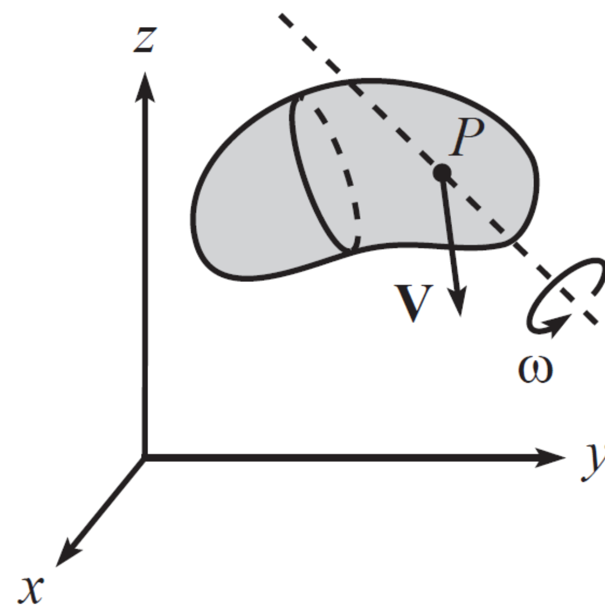
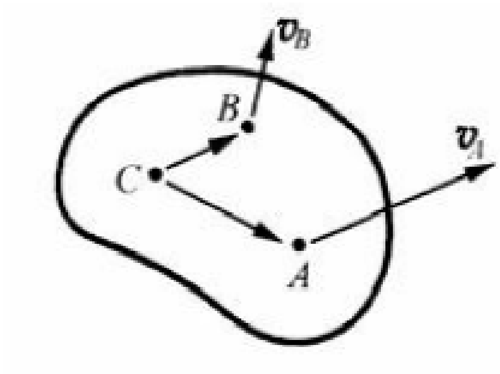
刚体的运动

刚体做任意运动。取刚体内任意一点P(基点)。在任何时刻，刚体的运动都可以写作P点的平移运动，加上绕穿过P点的一个轴的旋转运动 (Chasles' theorem， 夏莱定理)。



旋转的角速度与基点的选择无关

刚体的平面运动



设基点为C，线速度$\vec{v}_c$，基面上各点线速度

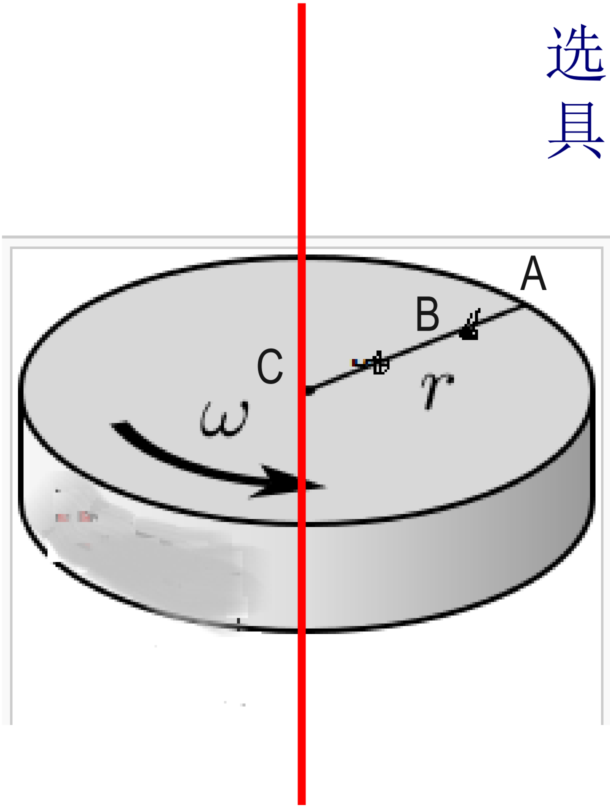
$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

瞬心：基面上一定存在一个点，其瞬时速度为0。

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R} = 0$$

（注意：瞬心可能在刚体外）。

刚体角速度矢量的唯一性



选择不同的基点，刚体的角速度矢量相同，具有唯一性。

设绕过圆盘中心C的轴以角速度ω旋转，若以A为基点，则B和C也以角速度ω绕A旋转。

A相对于C线速度：$V=\omega R_0$

B相对于C线速度：$V=\frac{1}{2}\omega R_0$

反之C相对于A线速度：$-\omega R_0$

B相对于A线速度：$-\frac{1}{2}\omega R_0$

因此B与C均绕A以角速度ω旋转

刚体角速度矢量的唯一性

以平面运动为例：

选C为基点，则P点的速度：

$$\vec{v}_p = \vec{v}_C + \vec{w}\times\vec{R}$$

选C'为基点，P点绕C’ 点角速度为ω’ .

$$\vec{v}_p = \vec{v}_C{}' + \vec{w}'\times\vec{R}'.$$

所以：$\vec{v}_C + \vec{w}\times\vec{R} = \vec{v}_C{}' + \vec{w}'\times\vec{R}'$

而$\vec{v}_C{}' = \boxed{\vec{v}_C + \vec{w}\times\vec{R}'_C}$, $\boxed{\vec{R} = \vec{R}'_C + \vec{R}'}$

因此：$\vec{v}_C + \vec{w}\times\vec{R} = \boxed{\vec{v}_C + \vec{w}\times\vec{R}'_C} + \vec{w}'\times\vec{R}'$

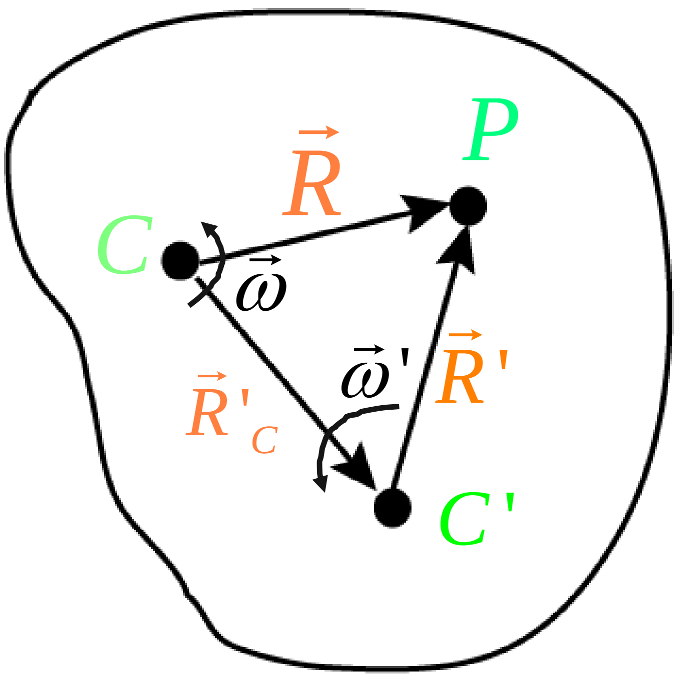
$$\vec{w}\times\vec{R} = \vec{w}\times\vec{R}'_C + \vec{w}'\times\vec{R}'$$

$$\vec{w}\times\boxed{(\vec{R}-\vec{R}'_C)} - \vec{w}'\times\vec{R}' = 0$$

$$\vec{w}\times\vec{R}' - \vec{w}'\times\vec{R}' = 0$$

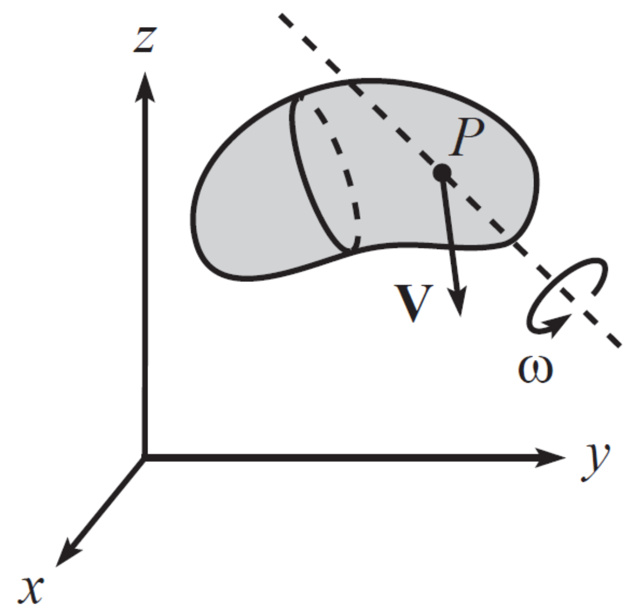
于是有：

$$\vec{w} = \vec{w}'$$



以C与C'为基点，角速度矢量$\vec{w}$一样

刚体的运动

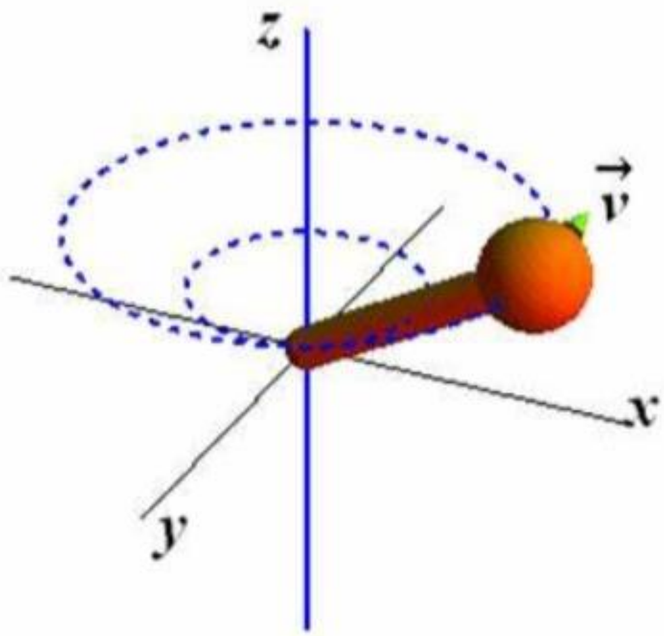


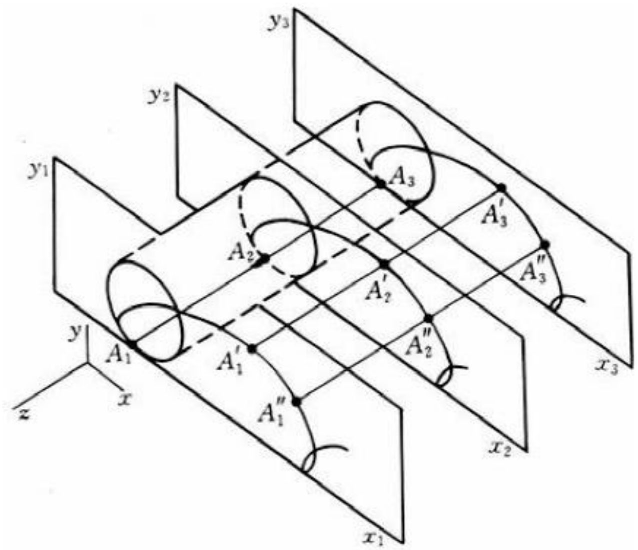
刚体做任意运动。取刚体内任意一点P(基点)。在任何时刻，刚体的运动都可以写作P点的平移运动，加上绕穿过P点的一个轴的旋转运动 (Chasles' theorem， 夏莱定理)。

旋转的角速度与基点的选择无关

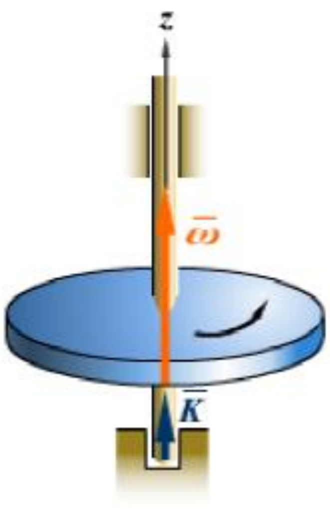
刚体运动的自由度

自由运动：6个自由度　　定点转动 3个 自由度　　平面运动：3个 自由度

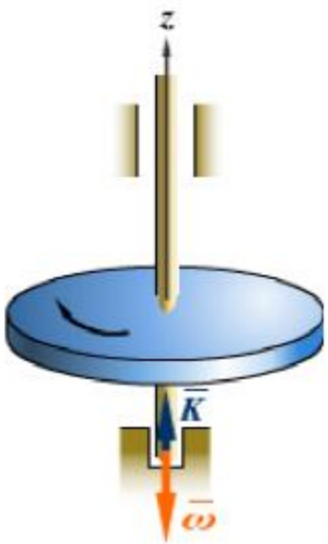




定轴转动



(a)



(b)

定轴转动是平面运动的一个特例，其自由度为？

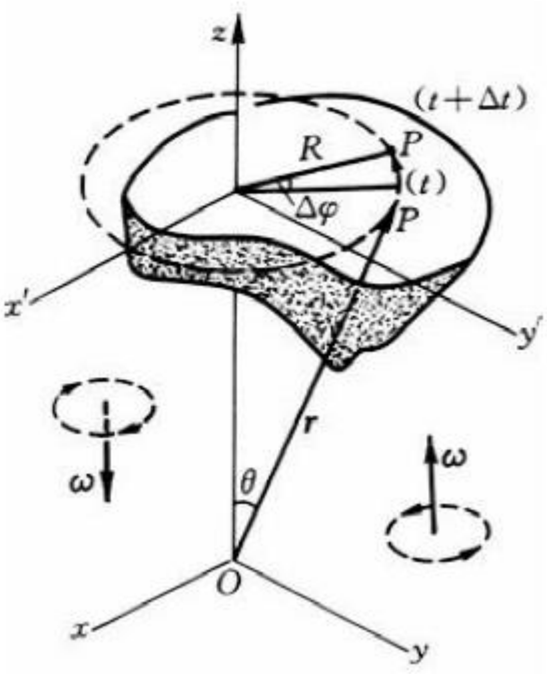
1个　仅有绕轴方向转动的自由度

定轴转动的角速度

取参考点O在旋转轴上，

线速度为：

$$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$$

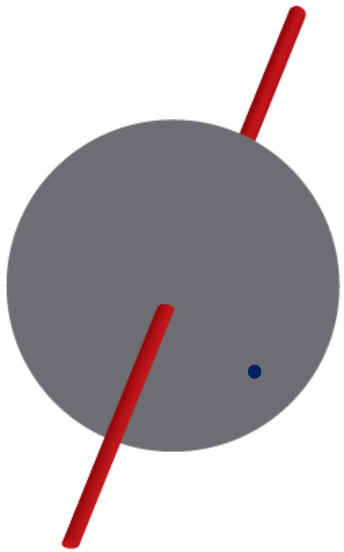


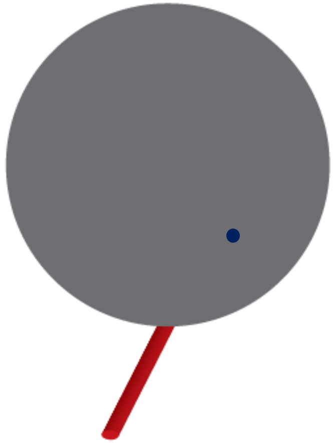
线加速度为：

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{w}\times\vec{r})=\frac{d\vec{w}}{dt}\times\vec{r}+\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$$

切向加速度　　法向加速度

定轴转动中的动能





任意一个质量元，其动能为：

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 w^2$$

总动能：

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 w^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2 w^2 + \ldots = \frac{1}{2}(\sum_i m_i r_i^2) w^2$$

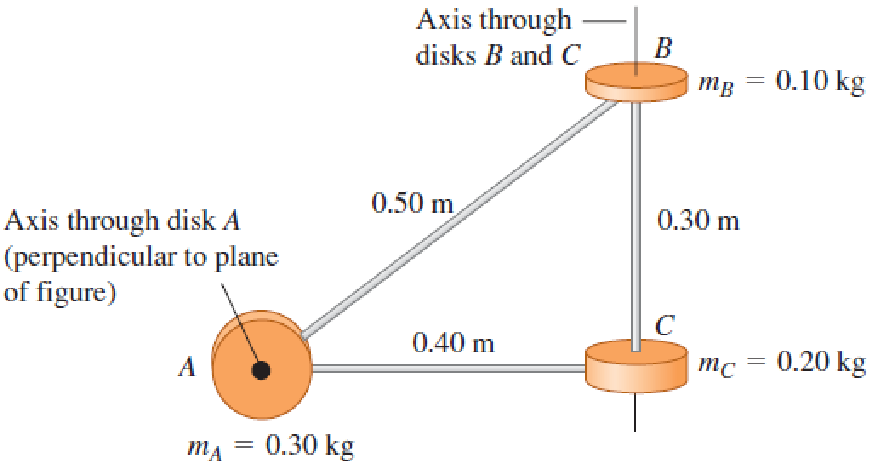
定义转动惯量I= $\sum_i m_i r_i^2$

$$E_k = \frac{1}{2} I w^2$$

r_i为质量元到轴的距离

转动惯量的计算

$$I_A = \sum m_i r_i^2 = (0.10\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.20\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2$$
$$= 0.057\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$



$$I_{BC} = \sum m_i r_i^2 = (0.30\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2 = 0.048\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

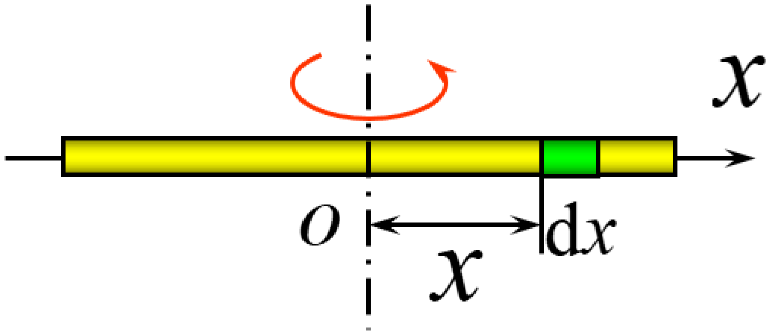
鸟翅膀的转动惯量

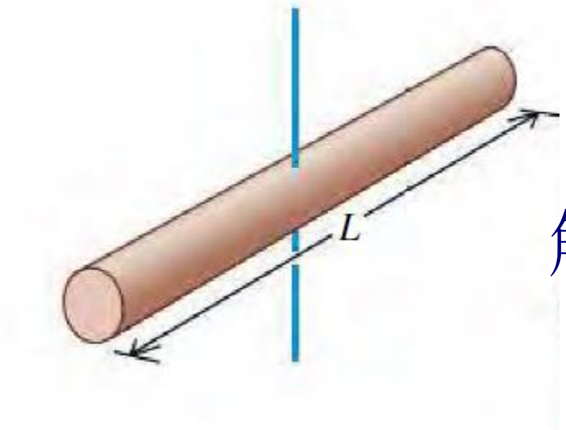
转动惯量小， 可以高频拍动

转动惯量大， 低频拍动

转动惯量的计算

$$I=\int r^2dm$$





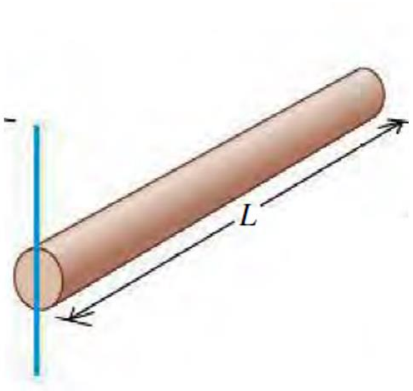
解:(1)建立坐标系，分割质量元

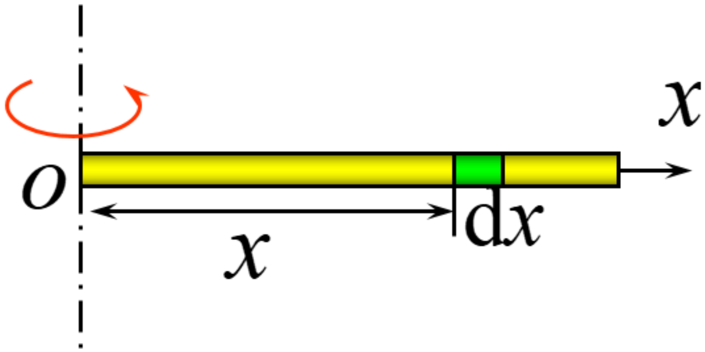
$$I=\sum_i m_i r_i^2$$

$$I=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_{-l/2}^{l/2}x^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{12}ml^2$$

转动惯量的计算



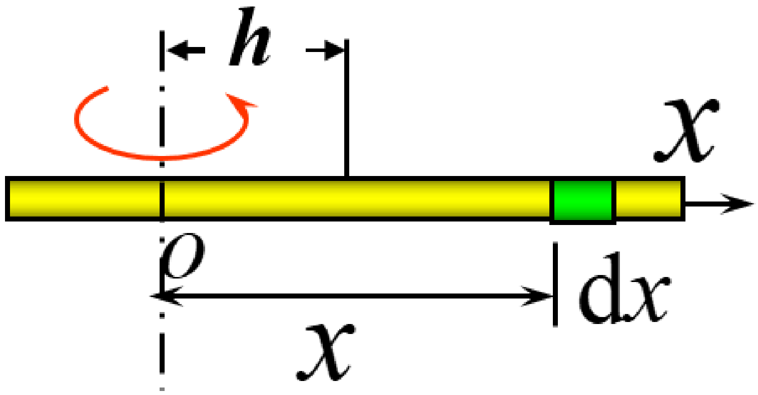


建立坐标系，分割质量元

$$I=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_0^l x^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ml^2$$

转动惯量的计算

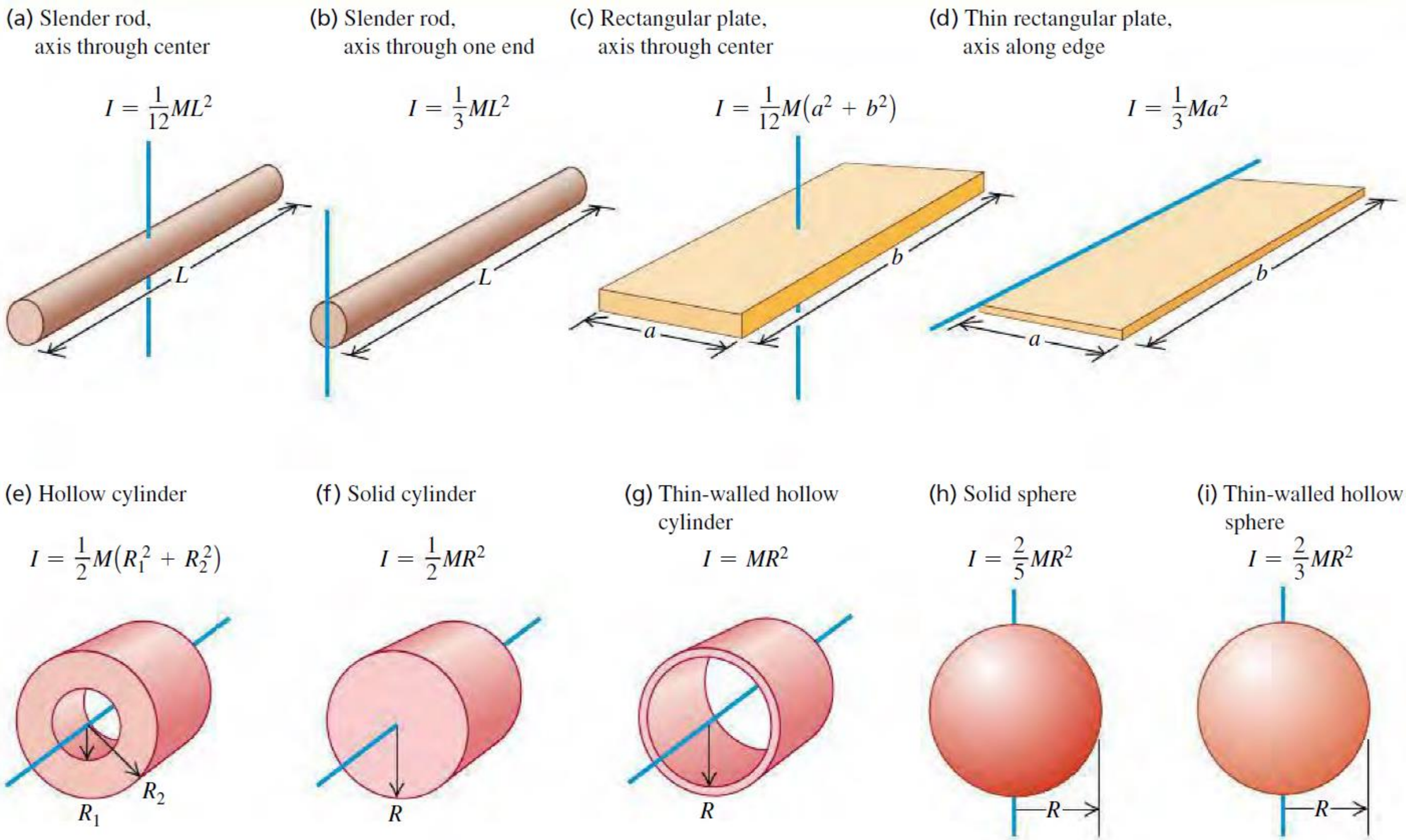


建立坐标系，分割质量元

$$I = \int x^2 \mathrm{d}m$$

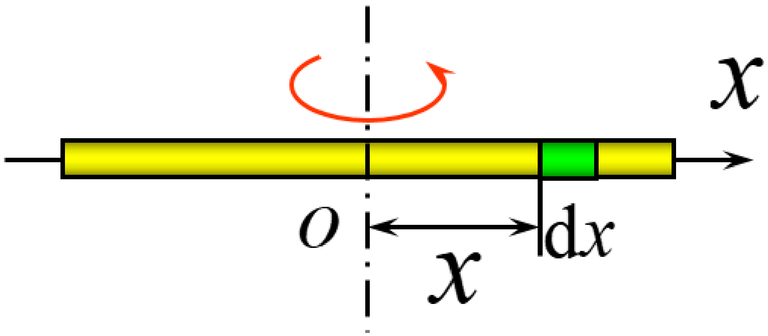
$$= \int_{-l/2+h}^{l/2+h} x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}x \quad = \frac{1}{12} m l^2 + m h^2$$

I 与刚体质量、质量分布、轴的位置有关

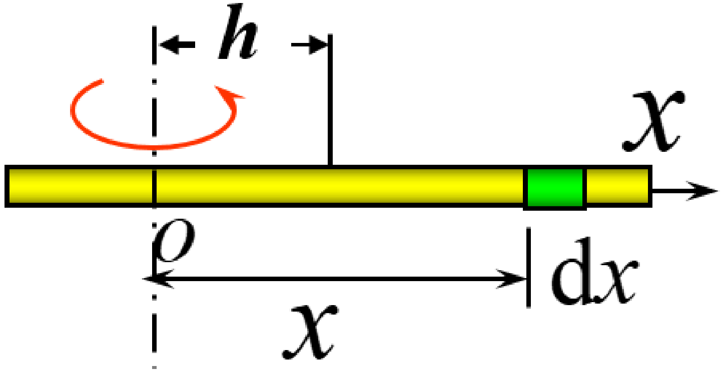

(a) Slender rod, axis through center
$I = \frac{1}{12}ML^2$
L
(b) Slender rod, axis through one end
$I = \frac{1}{3}ML^2$
L
(c) Rectangular plate, axis through center
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
a
b
(d) Thin rectangular plate, axis along edge
$I = \frac{1}{3}Ma^2$
a
b
(e) Hollow cylinder
$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
R_1
R_2
(f) Solid cylinder
$I = \frac{1}{2}MR^2$
R
(g) Thin-walled hollow cylinder
$I = MR^2$
R
(h) Solid sphere
$I = \frac{2}{5}MR^2$
R
(i) Thin-walled hollow sphere
$I = \frac{2}{3}MR^2$
R

转动惯量的平行轴定理

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$



$$I = \frac{1}{12}ml^2 + mh^2$$



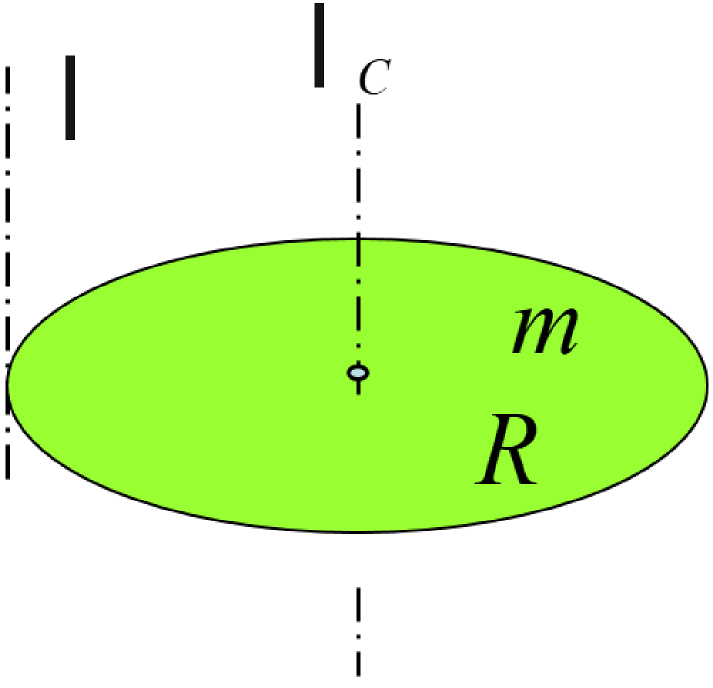
转动惯量的平行轴定理

定理表述：刚体绕平行于质心轴的转动惯量 I，等于绕质心轴的转动惯量 I_C 加上刚体质量与两轴间的距离平方的乘积：

如：
$$I_C = \frac{1}{2}mR^2$$

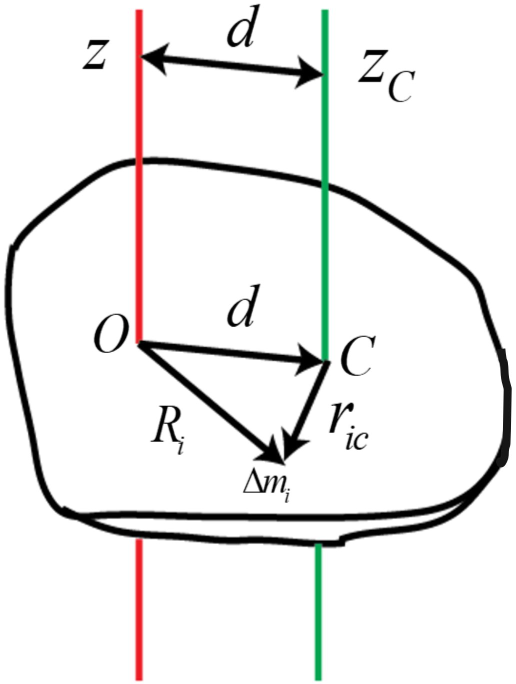
$$I = I_C + mR^2$$

$$= \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$



刚体绕质心轴的转动惯量最小

转动惯量的平行轴定理



$$\vec{R}_i = \vec{r}_{iC} + \vec{d}$$

$$R_i^2 = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_i = (\vec{r}_{iC} + \vec{d})(\vec{r}_{iC} + \vec{d})$$

$$= r_{ic}{}^2 + d^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{r}_{ic}$$

代入转动惯量公式

$$I = \sum(\Delta m_i R_i{}^2) = \sum(\Delta m_i r_{ic}{}^2) + \sum(\Delta m_i) d^2 + 2\vec{d} \cdot \sum \Delta m_i \vec{r_{ic}}$$

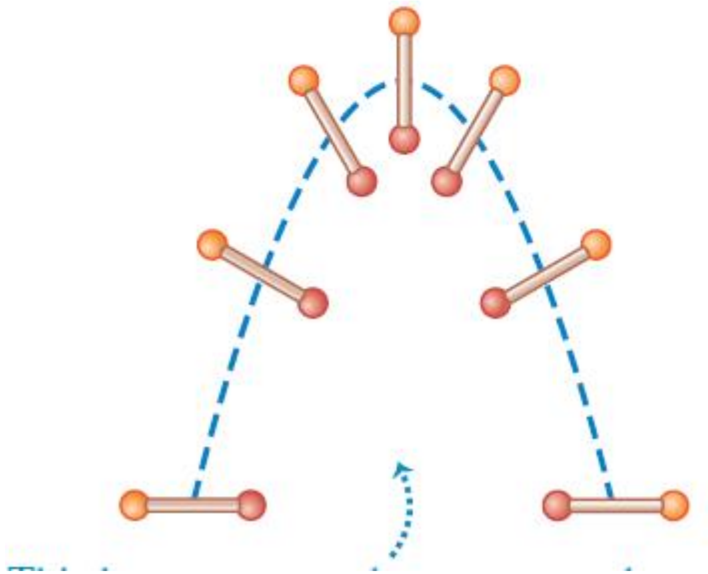
过质心的转动惯量

0

同时具有平移和旋转运动刚体的动能

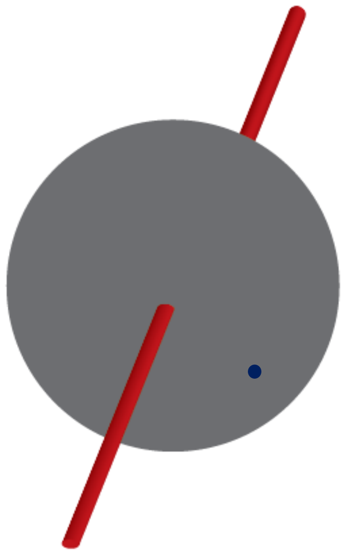
由质点组动能定理：

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I}_C w^2$$

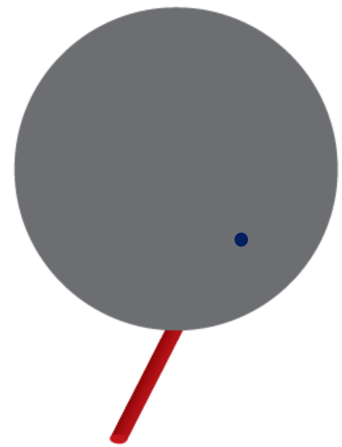


等于质心的平动动能加上绕质心旋转的动能。

从动能关系看平行轴定理



转轴过圆盘质心



转轴在圆盘边缘

$$\frac{1}{2}I_1 w^2$$

$$\frac{1}{2}I_2 w^2$$

质点组的动能等于质心动能加上绕质心转动的动能

质心速度$v = wR_0$，质心动能$E_{KC} = \frac{1}{2}M(wR_0)^2$

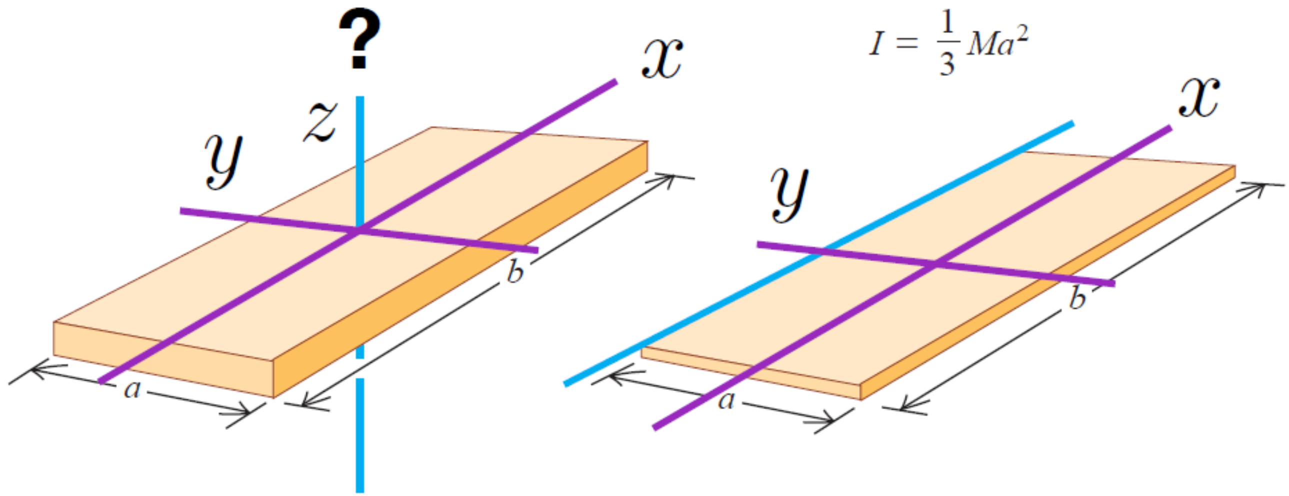
绕质心旋转动能为$\frac{1}{2}I_1 w^2$，总动能$E_{K2} = \frac{1}{2}(I_1 + MR_0{}^2)w^2$

所以：$I_2 = I_1 + MR_0^2$

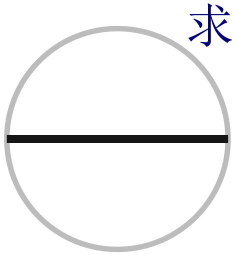
薄板正交轴定理

设薄板平面为（xy），绕x轴转动惯量为I_x，绕y轴转动惯量为I_y，而绕垂直薄板的z轴转动惯量为I_z，

$$I_z = I_x + I_y$$



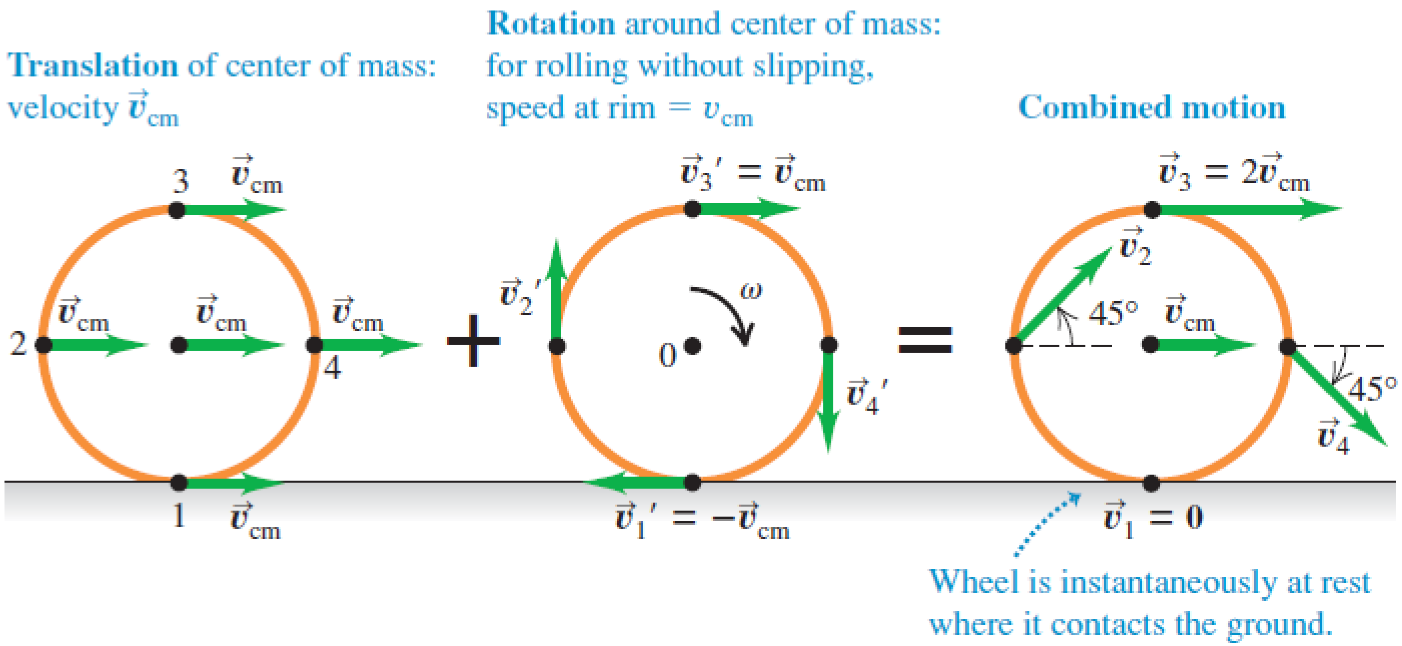
求过圆盘直径的转动惯量I_x



$$I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

平行轴定理

轮子的运动（无滑动）



有滑动

角动量与角速度的关系

质点的动能：$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

定轴转动的动能$E_k = \frac{1}{2}Iw^2$

而质点动量 $\vec{P} = m\vec{v}$

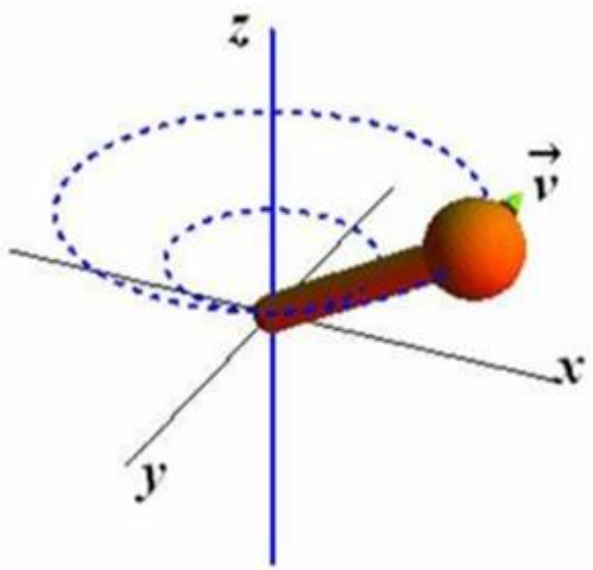
那是不是定轴转动的角动量

$\vec{L} = I\vec{w}$?

角动量的方向和角速度方向一致? No

惯性张量

考虑定点转动，转动轴过原点， 角动量$\vec{L}$和角速度$\vec{\omega}$的关系



取一小质量元dm，位置为$\vec{r}$

速度为 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

相对于原点的角动量为$\vec{r}\times\vec{p}=(dm)\vec{r}\times\vec{v}=(dm)\vec{r}\times(\vec{w}\times\vec{r})$

总角动量

$$\vec{L}=\int\vec{r}\times(\vec{w}\times\vec{r})dm$$

$$=\sum m_i\vec{r}_i\times(\vec{w}\times\vec{r}_i)$$

$$\vec{w}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=(\omega_2 z-\omega_3 y)\hat{\mathbf{x}}+(\omega_3 x-\omega_1 z)\hat{\mathbf{y}}+(\omega_1 y-\omega_2 x)\hat{\mathbf{z}}.$$

惯性张量

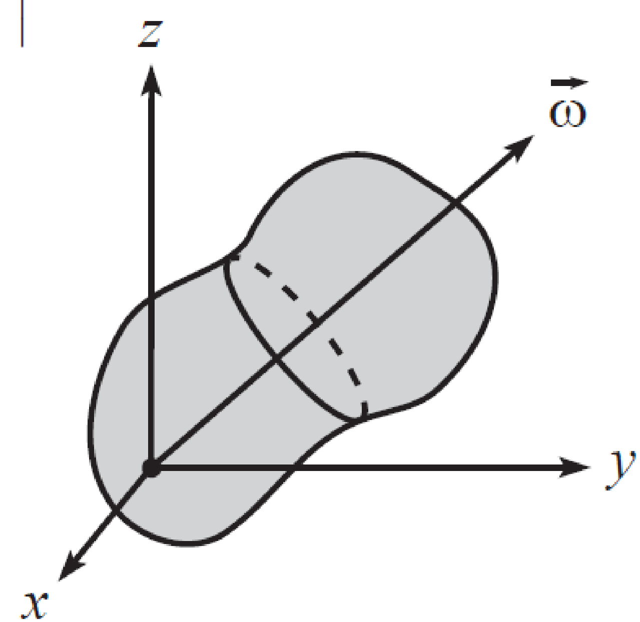
$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) dm$$

$$\vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ (\omega_2 z - \omega_3 y) & (\omega_3 x - \omega_1 z) & (\omega_1 y - \omega_2 x) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\omega_1 (y^2 + z^2) - \omega_2 xy - \omega_3 zx\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$+ \left(\omega_2 (z^2 + x^2) - \omega_3 yz - \omega_1 xy\right)\hat{\mathbf{y}}$$

$$+ \left(\omega_3 (x^2 + y^2) - \omega_1 zx - \omega_2 yz\right)\hat{\mathbf{z}}.$$



因此角动量$\vec{L}$和角速度$\vec{\omega}$的关系

矢量

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int (z^2 + x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} dm$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{张量}} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}}_{\text{矢量}} \equiv \vec{I} \cdot \vec{w}$$

定轴转动中角动量的轴分量

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int(y^2+z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int(z^2+x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int(x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \equiv \vec{I} \cdot \vec{w}$$

定轴转动，轴沿z方向，$w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = w$

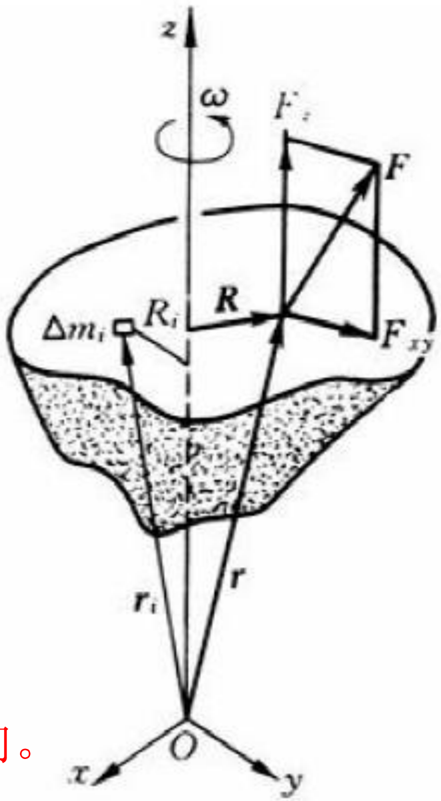
$$L_1 = I_{xz} w = w\int -zxdm = w\sum(-x_i z_i m_i)$$

$$L_2 = I_{yz} w = w\int -yzdm = w\sum(-y_i z_i m_i)$$

$$L_3 = I_{zz} w = w\int (x^2+y^2)dm = w\sum(x_i^2 + x_j^2)m_i$$

$$I_{zz} = \int r^2 dm$$

定轴转动中，角速度沿轴方向，但是总角动量却不一定沿轴的方向。



我们所求的定轴转动的转动惯量I其实是惯性张量沿转动轴方向的分量I_{zz}

Z轴角动量分量和角速度

$$\mathrm{L}_z = I w$$

转动惯量

$$I = \int r^2 dm$$