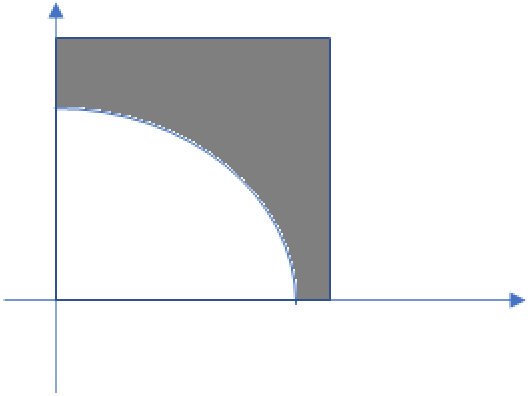
20220411-课堂练习答案

1.交换积分顺序：$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz$,按$x,y,z$的次序积分

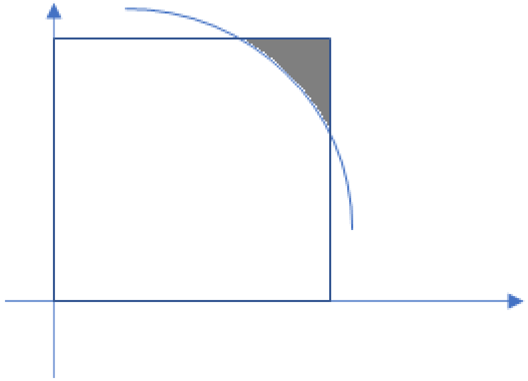
- 分析这个积分，可以知道是由平面$x=0, x=1, y=0, y=1, z=0$和抛物面$z=x^2+y^2$在第一掛限内所围成的一个有界闭区域
- 用平行于XOY的平面去截此积分区域，可得以下两种类型的截面：



$0 \le z \le 1$

$\{0 \le y \le \sqrt{z}, \sqrt{z-y^2} \le x \le 1\}$

$\cup \{\sqrt{z} \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$



$1 \le z \le 2$

$\{\sqrt{z-1} \le y \le 1, \sqrt{z-y^2} \le x \le 1\}$

1.交换积分顺序：$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$,按$x,y,z$的次序积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$$
$$= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz$$
$$+ \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x,y,z)\,dz$$
$$+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz$$

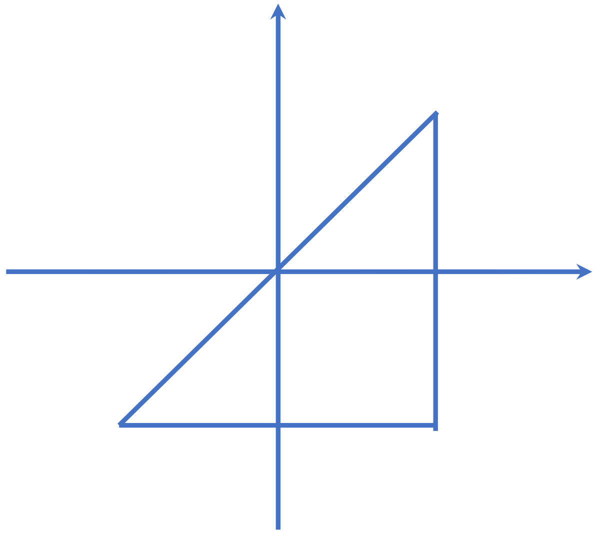
1.交换积分顺序：$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$,按$x,y,z$的次序积分

- 三次积分交换积分顺序，还可以采用如下的方法：
  - 将积分顺序交换分解为若干个二次积分积分顺序的交换
- 以本题为例 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$
  - 1. 交换x,y的积分顺序（注意本次交换和z无关），得
    - $\int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$
  - 2. 交换x,z的积分顺序（注意本次交换与y无关，出现的y 应当看成常数）
    - $\int_0^1 dx \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz = \int_0^{y^2} dz \int_0^1 f(x,y,z)dx + \int_{y^2}^{1+y^2} dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$
    - 那么三次积分变为
    - $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} dz \int_0^1 f(x,y,z)dx + \int_0^1 dy \int_{y^2}^{1+y^2} dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$

1.交换积分顺序：$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz$,按$x,y,z$的次序积分

- 3.交换y,z的积分顺序（注意本次交换和x无关）
  - $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} g(y,z)dz = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 g(y,z)dy$
  - $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{1+y^2} h(y,z)dz = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} h(y,z)dy + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 h(y,z)dy$
- 4.最终交换顺序之后的三次积分为
  - $\int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x,y,z)dx + \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx$

2. 求二重积分$\iint_D y\left(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)dxdy$，其中$D$是由直线$y=x, y=-1, x=1$所围成的一个三角形区域

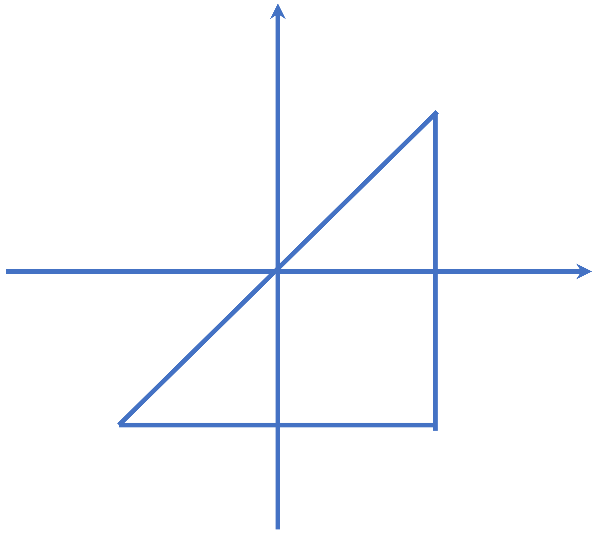


- 画出积分区域，如右图
- $D=\{(x,y)|-1\le y\le 1, y\le x\le 1\}$

$$\iint_D y\left(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)dxdy=\iint_D ydxdy+\iint_D yxe^{\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\iint_D ydxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{y}^{1}ydx=\int_{-1}^{1}y(1-y)dy=-\frac{2}{3}$$

2. 求二重积分$\iint_D y\left(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)dxdy$，其中$D$是由直线$y=x, y=-1, x=1$所围成的一个三角形区域



$$\iint_D yxe^{\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{y}^{1}yxe^{\frac{x^2+y^2}{2}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{y}^{1}ye^{\frac{y^2}{2}}xe^{\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-1}^{1}ye^{\frac{y^2}{2}}\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{y^2}{2}}\right)dy$$

$$=0$$

- (此处运用了奇偶性)

$$\therefore \iint_D y\left(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)dxdy=-\frac{2}{3}$$

3.求$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}(2x+y^2)dxdy\,,(a>0,b>0,c>0)$

- 由对称性知

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}(2x+y^2)dxdy=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}y^2dxdy$$

- 换元$\begin{cases}x=u\\y=v+c\end{cases}$，$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=1$，则

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}y^2dxdy=\iint\limits_{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\le 1}(v+c)^2dudv$$

3.求$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}(2x+y^2)dxdy\,,(a>0,b>0,c>0)$

$$=\iint_{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\le 1}(v^2+2cv+c^2)dudv$$ （再次运用对称性）

$$=\iint_{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\le 1}(v^2+c^2)dudv$$

$$=\iint_{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\le 1}v^2dudv+\pi abc^2$$

$$3.\text{求}\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}(2x+y^2)dxdy\,,(a>0,b>0,c>0)$$

再次换元：$\begin{cases} u = arcos\theta \\ v = brsin\theta \end{cases},\left|\frac{D(u,v)}{D(r,\theta)}\right| = abr$

$$\iint\limits_{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\le 1} v^2dudv = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 b^2r^2sin^2\theta\cdot abrdr$$

$$= ab^3\int_0^{2\pi} sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$= \frac{1}{4}\pi ab^3$$

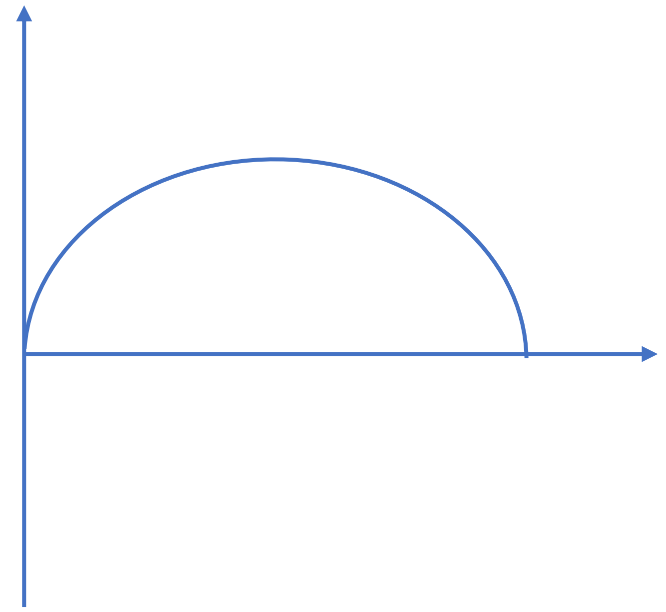
3.求$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}(2x+y^2)dxdy\,,(a>0,b>0,c>0)$

所以：

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}\le 1}(2x+y^2)dxdy=\frac{1}{4}\pi ab^3+\pi abc^2$$

4.求$\iint_D ydxdy$，其中D是由x轴和摆线$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$所包围的区域

- 本题没有直接给出区域得边界上y和x的函数关系
- 实际上$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$
- 可以将y表示成x的函数$y = \varphi(x)$
- 此处我们没有必要写出$\varphi(x)$的具体表达式
- 所以积分区域可以表示成
- $D = \{(x, y) | 0 \le x \le 2\pi a, 0 \le y \le \varphi(x)\}$
- 那么



4.求$\iint_D ydxdy$，其中D是由x轴和摆线$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$所包围的区域

$$\iint_D ydxdy = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{\varphi(x)} ydy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi a} \varphi^2(x)dx$$

- 引入变量代换$x = a(t - sint), 0 \le t \le 2\pi$
- 则根据$\varphi(x)$的定义可知$\varphi(x) = a(1 - cost)$:

$$\int_0^{2\pi a} \varphi^2(x)dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - cost)^2 da(t - sint)$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} (1 - cost)^3 dt = 5\pi a^3$$

$$\therefore \iint_D ydxdy = \frac{5\pi a^3}{2}$$

5.求由曲线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2),(a>0)$围成的有界闭区域的面积

- 由曲线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$围成的有界闭区域可以用不等式$(x^2+y^2)^2\le a(x^3-3xy^2)$表示
- 引入极坐标变量代换$\begin{cases}x=rcos\theta\\y=rsin\theta\end{cases}$，得
- $r^4\le ar^3cos\theta(cos^2\theta-3sin^2\theta)$ 即
- $0\le r\le acos\theta(cos^2\theta-3sin^2\theta)$
- 用不等式组来确定θ的范围：
- $\begin{cases}cos\theta\ge 0\\cos^2\theta-3sin^2\theta\ge 0\end{cases}$或$\begin{cases}cos\theta\le 0\\cos^2\theta-3sin^2\theta\le 0\end{cases}$

5.求由曲线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2),(a>0)$围成的有界闭区域的面积

- 得
- $-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{5\pi}{6}$或$\frac{7\pi}{6}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$
- 因此，区域的面积为

$$S=\iint\limits_{(x^2+y^2)^2\le a(x^3-3xy^2)}dxdy=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^{acos\theta\left(cos^2\theta-3sin^2\theta\right)}rdr$$

$$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(cos\theta(cos^2\theta-3sin^2\theta)\right)^2d\theta$$

5.求由曲线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2),(a>0)$围成的有界闭区域的面积

- 由于$cos\theta(cos^2\theta-3sin^2\theta)=cos3\theta$，所以

$$S=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}cos^2(3\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}a^2$$

6. 设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq y, x\geq 0\}$，$f(x,y)$是$D$上的连续函数，且$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$，求$f(x,y)$

- 注意到$f(x,y)$在D上的二重积分是一个确定的数，所以令

$$A=\iint\limits_D f(u,v)dudv$$

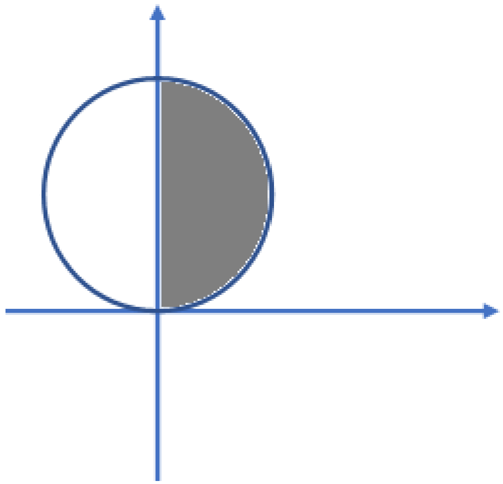
- 则

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A$$

- 上式两边在D上求二重积分，得

$$A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\frac{8}{\pi}A\iint\limits_D dxdy$$

6. 设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le y,x\ge 0\}$，$f(x,y)$是$D$上的连续函数，且$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$，求$f(x,y)$

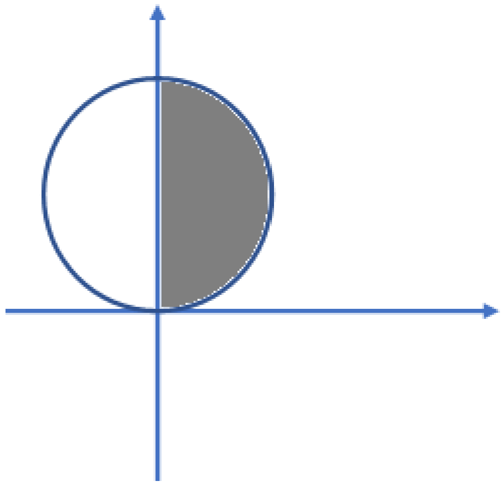


- 因为$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le y,x\ge 0\}$
- $=\left\{(x,y)\middle|x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4},x\ge 0\right\}$
- 积分区域如右图
- 引入极坐标$\begin{cases}x=rcos\theta\\y=rsin\theta\end{cases}$,则由$\begin{cases}r^2\le rsin\theta\\rcos\theta\ge 0\end{cases}$知
- $\begin{cases}r\le sin\theta\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

6. 设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le y,x\ge 0\}$，$f(x,y)$是$D$上的连续函数，且$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$，求$f(x,y)$

- $$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{sin\theta}\sqrt{1-r^2}rdr$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^3\theta)d\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

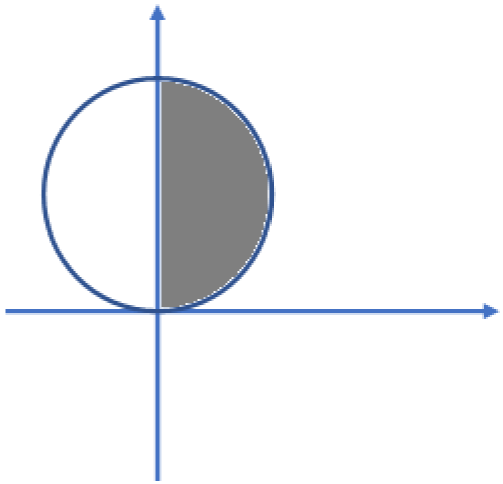


- 而

$$\iint_D dxdy=\frac{\pi}{8}$$

6. 设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le y,x\ge 0\}$，$f(x,y)$是$D$上的连续函数，且$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$，求$f(x,y)$

- 所以
- $A=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)-A$
- $A=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$
- $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$



7. 设$f(x)$连续，$f(0)=1$，令

$F(t)=\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(x^2+y^2)\,dxdy$，$t\ge 0$，求$F''(0)$

- 引入极坐标$\begin{cases} x=rcos\theta \\ y=rsin\theta \end{cases}$

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^t f(r^2)rdr=2\pi\int_0^t f(r^2)rdr$$

$$F'(t)=2\pi f(t^2)t$$

$$F''(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)-F'(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi f(t^2)t}{t}=2\pi$$

- 注意：因为$f(x)$不一定可导，所以不能在$F'(t)$的基础上直接求导。

8.$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，$\Omega$是由$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$与平面$z=c$所围成的有界闭区域$(a>0,b>0,c>0)$

- 积分区域：$\left\{(x,y,z)\middle|0\le z\le c,0\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{z^2}{c^2}\right\}$
- 引入广义柱坐标代换
- $\begin{cases}x=arcos\theta\\ y=brsin\theta,\\ z=z\end{cases}\left\{(r,\theta,z)\middle|0\le z\le c,0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le\frac{z}{c}\right\}$
- $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}=abr$
- 那么

8.$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，$\Omega$是由$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$与平面$z=c$所围成的有界闭区域$(a>0,b>0,c>0)$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=\int_0^c dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{z}{c}}(a^2r^2cos^2\theta+b^2r^2sin^2\theta+z^2)abrdr$$

$$=\int_0^c z^4dz\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^3b}{4c^4}cos^2\theta+\frac{ab^3}{4c^4}sin^2\theta+\frac{ab}{2c^2}\right)d\theta$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+c^2\right)\frac{\pi abc}{5}$$

$$9.\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-2)^2},\quad \Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

$$\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-2)^2}=\int_{-1}^{1}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}\frac{dxdy}{x^2+y^2+(z-2)^2}$$

$$=\int_{-1}^{1}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\frac{rdr}{(z-2)^2+r^2}$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\big(ln(5-4z)-2ln(2-z)\big)dz$$

$$=\pi\left(2-\frac{3}{2}ln3\right)$$

10. $\iiint_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{matrix}0\le x+y-z\le 1\\0\le x-y+z\le 1\\0\le y+z-x\le 1\end{matrix}\right\}$

- 引入变量代换$\begin{cases}u=x+y-z\\v=x-y+z\\w=y+z-x\end{cases}$，则$\Omega'=\left\{(u,v,w)\middle|\begin{matrix}0\le u\le 1\\0\le v\le 1\\0\le w\le 1\end{matrix}\right\}$
- $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=-4$
- $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=-\frac{1}{4}$
- 所以

10. $\iiint_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$, $\Omega = \left\{(x,y,z)\middle| \begin{array}{l} 0 \le x+y-z \le 1 \\ 0 \le x-y+z \le 1 \\ 0 \le y+z-x \le 1 \end{array}\right\}$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega'} \frac{1}{4}uvwdxdydz = \frac{1}{4}\int_0^1 udu \int_0^1 vdv \int_0^1 wdw$$

$$= \frac{1}{32}$$