1. 证明： 方阵A的全体特征根(重根在内)之和等于它的迹tr(A)，而全体特征根的乘积等于它的行列式 det(A).

1. 证明：方阵A的全体特征根(重根在内)之和等于它的迹tr(A)，而全体特征根的乘积等于它的行列式 det(A).

证明 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征根(重根在内)为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 考察方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$, 一方面

$$
\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(\boldsymbol{A}) \\
&= \lambda^n - (\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}))\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(\boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \\
&= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n
\end{aligned}
$$

因此 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(\boldsymbol{A})$.

这里要用行列式第二种定义,即不同行不同列元素乘积，然后求和... 。考虑n阶方阵A的特征方

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

不含λ的项＝ **SUM (-1)^t *a*1j$_1$ *a*2j2… *a*nj$_n$,**

因为：两个行列式的唯一区别是把每项中的因子 ***aii*** 换成了**(*λ-aii*)**，把含*λ*的项剔除就是**det(A)**

用第二种定义把右边展开，你会发现要想生成 λ^{n-1} 这个东西，只有 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\dots(\lambda - a_{nn})$

这一项才可以，因为如果不选对角元的话，至多只能生成 λ^{n-2} ，因为错位至少错两项...

而 $-(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{nn})$ 就是 λ^{n-1} 的系数...

又因为代数基本定理， $det(\lambda I - A)$ 有n个根，它们就是n个特征值，也就是说 $det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$

λ^{n-1} 这一项的系数又恰好是 $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$

所以 $tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$

2. 设n阶矩阵A的各行元素之和均为$\boldsymbol{a}$, 证明：$\boldsymbol{\lambda = a}$是矩阵A的一个特征值，且向量$(\mathbf{1}, \mathbf{1}，\cdots，\mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}$是A的与$\boldsymbol{\lambda = a}$对应的特征向量。

解：设矩阵A=$(a_{ij})_{n\times n}$,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{各行加到第一列}} \begin{vmatrix} \lambda - a & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \lambda - a & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda - a & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda - a)\begin{vmatrix} 1 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 1 & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$, 所以$\lambda = a$是A的一个特征值，

又因为$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = a, i = 1,2,\cdots,n$写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$, 因此$(1,1,\cdots,1)^T$是对应于特征值$\lambda = a$的特征向量。

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ b & 1 & -2 \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

若 A 的三个特征值为-2,1,4, 求 a, b, c.

解答:

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (1+a)\lambda^2 + (a+2b-4)\lambda + 4(a-c) = 0$$

分别令 $\lambda = -2, 1, 4$, 得

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = -2 \\ 2a + b - 2c = 2 \\ 2a - 2b + c = 8 \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = -2, c = 0.$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

且 $\alpha = (1, k, 1)^T$ 是 A^{-1} 的一个特征向量, 求 k.

解答:

设 α 对应 (A^{-1}) 的特征值为 λ_0, 则 $A\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha$

容易求得 A 的特征值为 1 和 4, 则 $\lambda_0 = 1$ 或 $\frac{1}{4}$

当 $\lambda_0 = 1$ 时,$(E - A)\alpha = 0$, 得 $k = -2$;

当 $\lambda_0 = \frac{1}{4}$ 时,$(4E - A)\alpha = 0$, 得 $k = 1$;

因此,$k = 1$ 或 -2.

5. 已知三阶实对称方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 且 $\alpha=(0,1,1)^T$ 是对应于 λ_1 的一个特征向量, 求 A.

解答:

设

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

根据已知有, $Tr(A)=x_1+x_4+x_6=-1+1+1=1, A\alpha=-\alpha$,

解得

$$x_1=1-2x_6, x_2=-x_3, x_4=x_6, x_5=-1-x_6$$

由于 1 是 A 的特征值, 所以 $|A-E|=2(2x_3^2+4x_6^2)=0$,

由于 A 是实矩阵, 故 $x_3=x_6=0$, 代入上面的解可得,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$