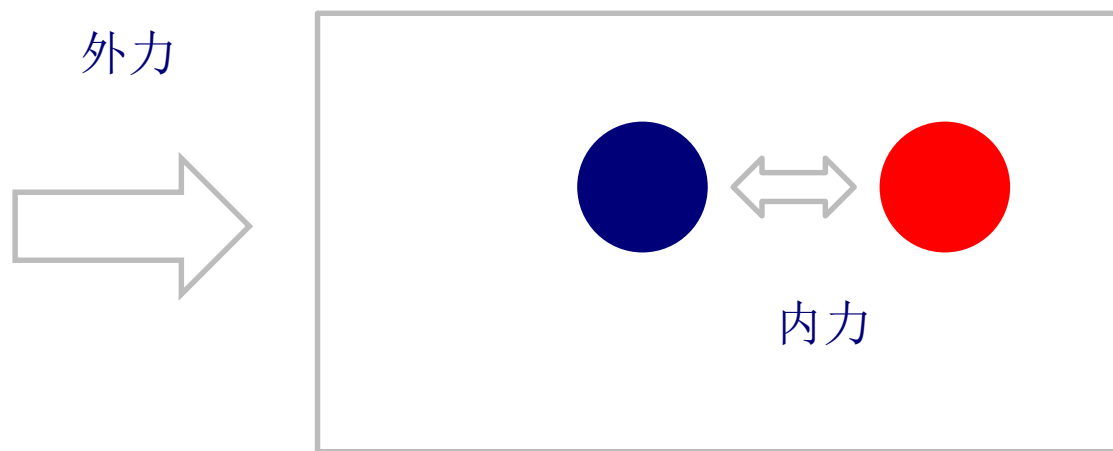


质点组动量变化定理



内力成对出现：服从牛顿第三定律

$$\vec{f}_{i,j} + \vec{f}_{j,i} = 0$$

一对内力冲量之和为零

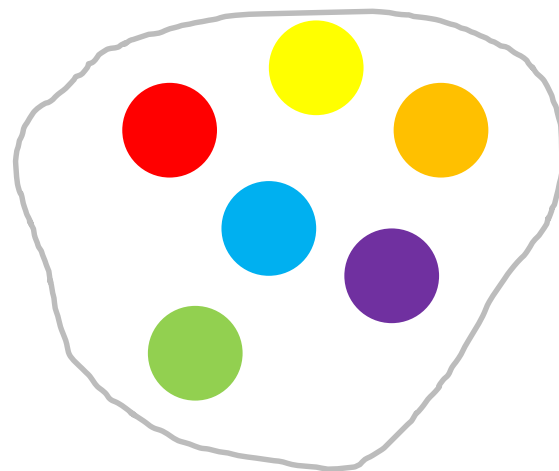
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_{i,j} dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_{j,i} dt = 0$$

质点组动量变化定理

质点组总动量等于各质点动量之和

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i$$



但是所有的内力和为0

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{i-ext}$$

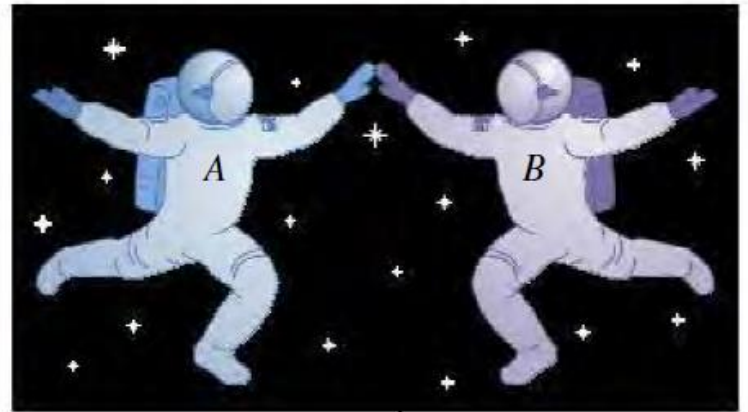
质点组动量的变化等于合外力冲量。

动量守恒定律

动量守恒定律：合外力为零时，质点组动量守恒。

等效于系统的质心保持匀速直线运动。

$$\text{当 } \sum \vec{F}_{i-\text{ext}} = 0 \quad \sum m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c = \text{常矢量}$$



两个宇航员在太空中不受外力作用，他们之间任何力的作用，根据牛顿第三运动定律，大小相同，方向相反，作用时间相同。

因此每个人受到的力的冲量大小相同，方向相反。因此每个人动量的改变大小相同，方向相反。所以系统总的动量保持不变。

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = \vec{P}_{start} - \vec{P}_{end}$$

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

动量守恒分解

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \cdots m_n v_{nx} = \text{常量}$$

$$\text{若 } \sum F_{ix} = 0$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + \cdots m_n v_{ny} = \text{常量}$$

$$\text{若 } \sum F_{iy} = 0$$

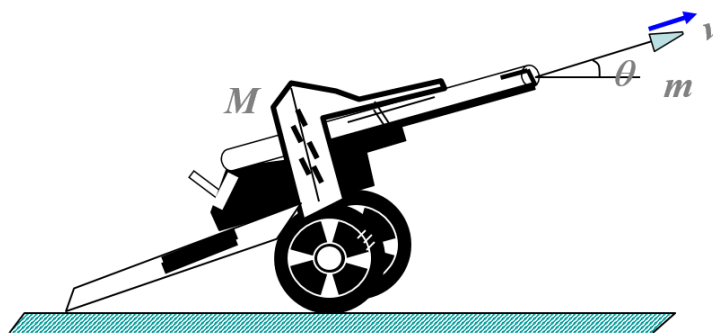
$$m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} + \cdots m_n v_{nz} = \text{常量}$$

$$\text{若 } \sum F_{iz} = 0$$

若外力在某一方向为0， 则系统在该方向的动量守恒。

例-1

如图所示, 设炮车以仰角 θ 发射一炮弹, 炮车和炮弹的质量分别为 M 和 m , 炮弹的出口速度为 v , 求炮车的反冲速度。炮车与地面间的摩擦力不计。



炮车和炮弹作为一个系统:

竖直方向, 动量是否守恒?

水平方向, 不考虑摩擦力, 系统无外力作用, 动量守恒。

炮车水平方向相对地面速度为 $-v'$, 炮弹水平方向相对地面速度为 $v \cos(\theta)$

根据动量守恒: $-Mv' + m(v \cos \theta - v') = 0$

$$v' = \frac{m}{m + M} v \cos \theta$$

例-2

一个静止物体炸成三块，其中两块质量相等，且以相同速度**30m/s**沿相互垂直的方向飞开，第三块的质量恰好等于这两块质量的总和。试求第三块的速度（大小和方向）。

如果在极短作用时间内，系统所受外力 and 内力相比极小而可以忽略不计，也可以使用动量守恒。

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 = 0$$

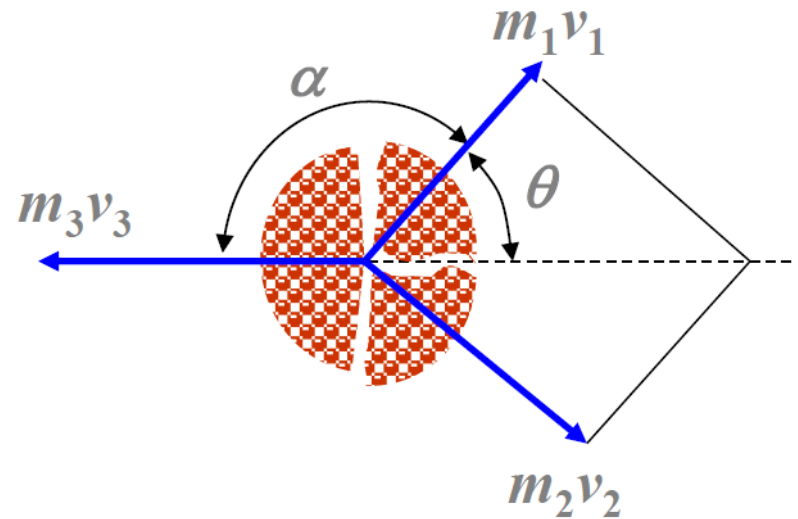
v_1 和 v_2 垂直

$$(m_3 v_3)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2$$

质量关系

$$m_1 = m_2 = m, m_3 = 2m$$

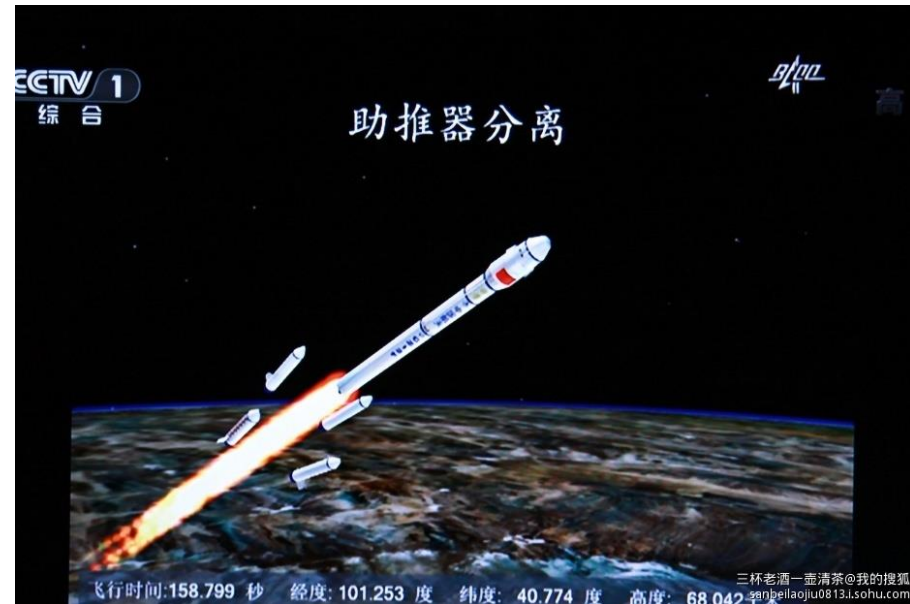
$$v_3 = \frac{1}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 21.2 m / s$$



角度： $\tan \theta = \frac{v_2}{v_1} = 1, \theta = 45^\circ$

火箭推进速度

变质量问题



火箭推进速度



$$mv = (m - dm')(v + dv) + (v - u)dm'$$

展开后忽略二级小量 $dm'dv$ 同时 $dm = -dm'$

u 为喷出的物质相对火箭的速度

$$mdv = -udm,$$

$$dv = -u \frac{1}{m} dm$$

通过积分求解

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{u} = \int_{M_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$v = v_0 + u \ln \frac{M_0}{m}$$

当某级燃料烧尽，末速度

M' 该级燃料的质量

$$M = M_0 - M'$$

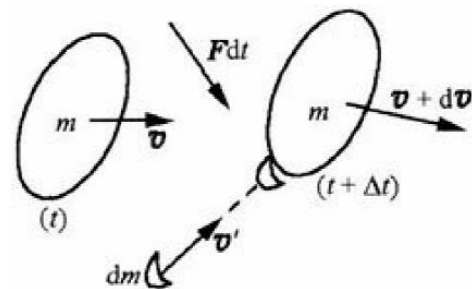
变质量运动方程



主体受外力冲量 $\vec{F}dt$,同时添加物相对惯性系以速度 \vec{v}' 附着

主体动量变化 $m(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} = \vec{F}dt + \vec{f}dt$

附着物动量变化 $dm \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \cdot \vec{v}' = -\vec{f}dt$



两式相加忽略二阶小量

$$md\vec{v} = \vec{F}dt + (\vec{v}' - \vec{v})dm$$

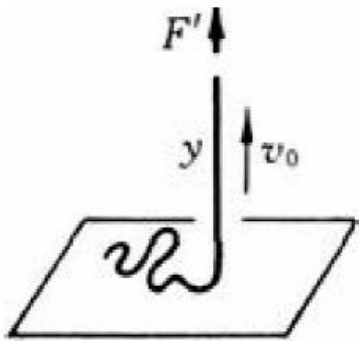
两边除以dt, 得到变质量运动方程

\vec{u} 为相对速度

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{v}' - \vec{v}) \frac{dm}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

而 $d(m\vec{v}) = md\vec{v} + \vec{v}dm$, 则 $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$

柔体的提升或下落



桌面上有根柔软绳子，被匀速提升，试求提升力。
设绳的质量线密度为 η (kg/m)，上升速度为 v_0 。

变质量系统，动量改变率：

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt}(\eta y v_0) = \eta v_0 \frac{dy}{dt} = \eta v_0^2$$

y 段受外力提升力 F' 与重力 $(-\eta y g)$ ，且下端 dm 初速 $v' = 0$

应用变质量方程 $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt}$

$$\eta v_0^2 = F' - \eta y g$$

解出提升力

$$F' = \eta y g + \eta v_0^2$$



2016年11月3日我国最大推力新一代运载火箭长征五号在中国文昌航天发射场首飞成功。标志着我国运载火箭实现升级换代，运载能力进入国际先进行列，是由航天大国迈向航天强国的关键一步。

长征五号，高度达到了57米，箭体直径达5米，打破了中国40余年来3.35米箭体直径结构的限制，大幅提升了我国进入空间的能力，全箭起飞重量达到了870吨，起飞时十台发动机同时点火产生了1060吨的推力，实现了我国近地轨道运载能力由10吨升至25吨，地球同步转移轨道由5吨升到了14吨，地月转移轨道由4吨提升到8吨。

多个发动机的喷气式飞机：

飞行时，吸入机外气体，气体与汽油燃烧后喷出气体获得动力。

但是一般飞机喷出气体的速度方向相对于机身是固定的，即动力方向相对于机身不变。

矢量发动机：

喷出气体的方向相对于机身可以改变，动力的方向和力矩都可以调节，大大提高飞机的机动性。



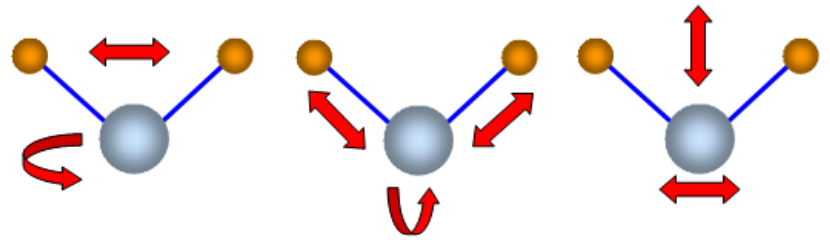
头条号 / 军品阅读



功和能量



微波炉中的能量转化



能量

人体每天需要约8000千焦的能量

8000千焦/24小时 = 92焦耳/秒 \approx 100瓦



- $0.1\mu\text{J}$ (10^{-7}J) : 一只蚊子飞行的动能

- 1J (10^2J) : 苹果从1m高落地时的动能

- 10kJ (10^4J) : 一克糖代谢放出的能量

- 10MJ (10^7J) : 一个人高强度劳动一天

- 100GJ (10^{11}J) : MOAB (FOAB/4)

- 100TJ (10^{14}J) : 台风一秒钟释放的能量

little boy & fat man atomic bomb,

- 90PJ (10^{17}J) : 一公斤物质的能量 ($E=mc^2$)

Tsar bomb

- 0.4ZJ (10^{20}J) : 世界能量年耗

- 10^5YJ (10^{29}J) : 地球自转的能量

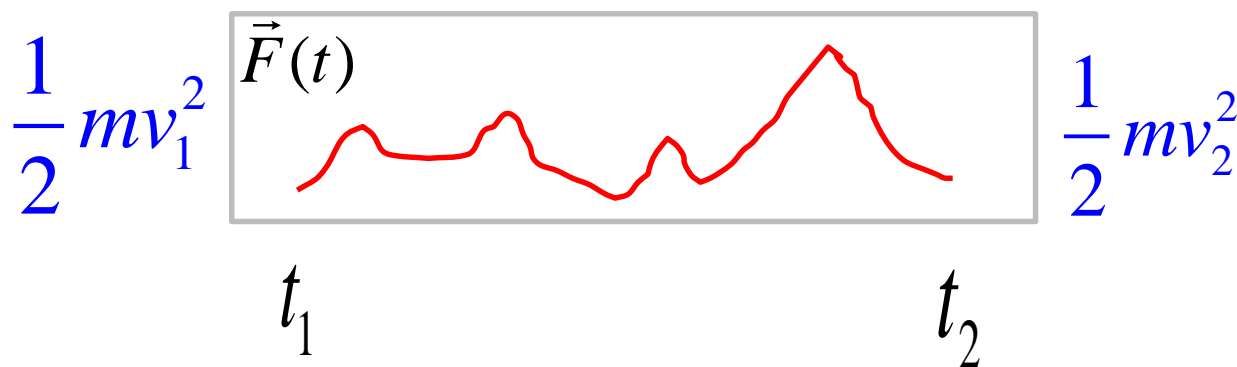
力的累积效应：时间和空间

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

部分研究的系统，瞬时的力的形式是未知的。



不再考虑瞬时的力的作用，而是终末态的状态变化。



力与位移

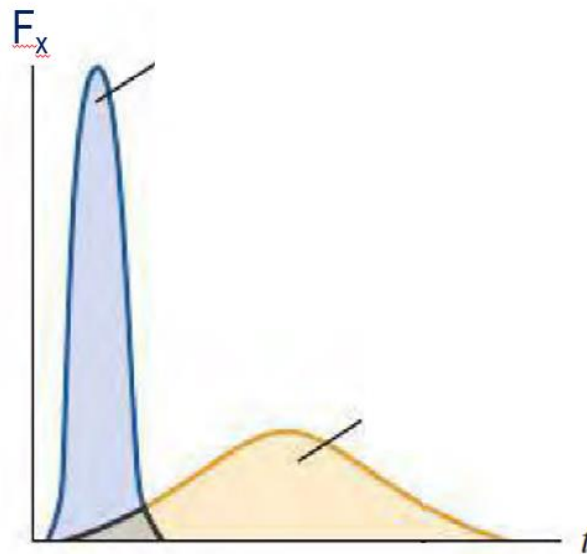
力的冲量：力在时间上的积累

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$$

定义冲量：

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

冲量：力在时间上的积累效应，反应为物体动量的改变

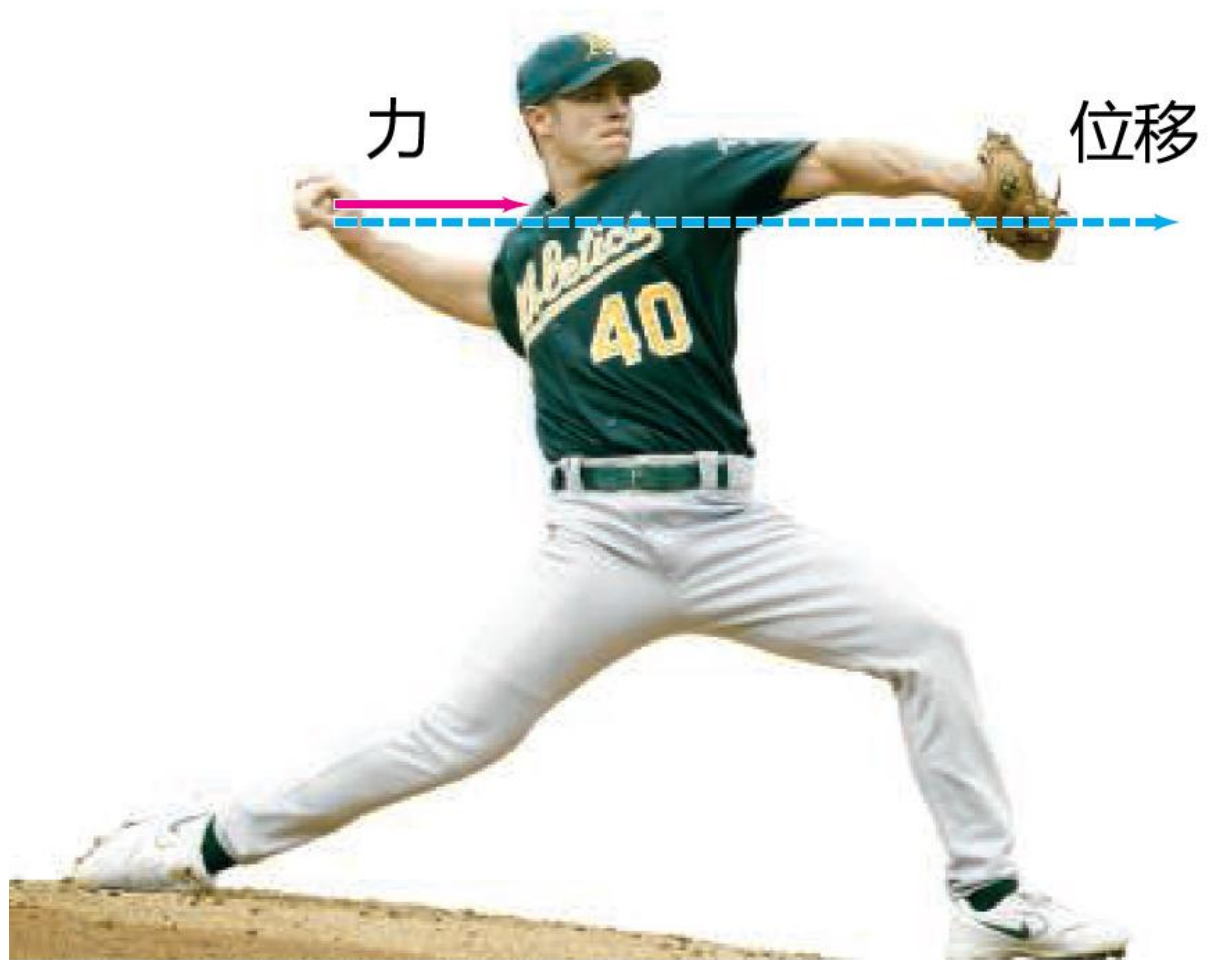


功：力在空间上的累积效应

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

功

做功导致了物体什么的变化？



物体最后所获得的动能