例：设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\ \hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},$$

$$A_1=5,\quad A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{5}; \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

习题2. 设三阶矩阵 A, B 满足关系: $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$, 求 B.

习题2. 设三阶矩阵 A, B 满足关系: $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$, 求 B.

由 $A^{-1}BA - BA = 6A$

$(A^{-1} - E)BA = 6A$

$(A^{-1} - E)B = 6E$

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1} = 6\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题4. 已知$A^6 = E$，试求 A^{11} 并证明 $A^{-1} = A^{11}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

习题4. 已知$A^6=E$，试求A^{11}并证明$A^{-1}=A^{11}$，其中

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

由$A^6=E$ 得到$A^6=E\bullet A^6=A^6\bullet A^6=A\bullet A^{11}=E$

故 $A^{-1}=A^{11}$

$$A^{11}=A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

注：A的逆矩阵刚好为A的转置，满足这种性质的矩阵A称为正交矩阵

习题5. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^n

解： 由分块矩阵知 $A=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$，其中 $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

∴ $$A^n=\begin{pmatrix}B^n & 0\\ 0 & C^n\end{pmatrix}$$

又 $$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2E+P$$

∴ $$B^n=(2E+P)^n=(2E)^n+n(2E)^{n-1}P$$

$$=\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$$

而 $\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ 的秩为 1，有 $\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}^n=6^{n-1}\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

注：虽然还没有接触矩阵的秩概念，但可以看出该矩阵可写为一个列向量和行向量之积

从而 $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot 6^{n-1} & 9\cdot 6^{n-1} \\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 3\cdot 6^{n-1} \end{pmatrix}$