$(A+E)x=0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad p = k\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k \neq 0$$

$2 \quad 3 \quad \Big| = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(6-\lambda)-9\right]-$

当$\lambda_3=9$时

$(A-9E$

$A-9E$

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{matrix} \Bigg) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$=\lambda_3=-1$，特征向量$k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。$k \neq 0$

习题1 设三阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3，向量$\boldsymbol{\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T}$ 是线性方程组$Ax=0$ 的两个解。

（1）求A的特征值与特征向量。

解:

(1)因为$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=0$，即故$\lambda_1=\lambda_2=0$是A的二重特征值，

α_1，α_2为A的属于特征值为0的两个线性无关的特征向量；

由于矩阵A的各行元素之和均为3，所以$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

故$\lambda_3=3$是A的一个特征值，$\alpha_3=(1,1,1)^T$为A的属于特征值为3的特征向量。

(2)因属于不同特征值的特征向量正交，故只需对α_1，α_2正交化。

$\xi_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\xi_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\ \xi_1)}{(\xi_1,\ \xi_1)}\xi_1=\dfrac{3}{2}(-1,0,1)^T$.

再分别将ξ_1，ξ_2，α_3单位化得$\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T$，

$\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$，$\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，

令$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{bmatrix}$, 那么$Q$为正交矩阵，且$Q^TAQ=\Lambda$.

习题2 设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{4} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{4} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$，正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵，若$\boldsymbol{Q}$的第一列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{T}$，求 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}$.

解:

由A是实对称可知：Q的第一列$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$为$A$的一个特征向量，于是

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&\alpha\\4&\alpha&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\text{解得}\alpha=-1,\lambda_1=2.$$

则A的特征多项式为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4)$，

所以A的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$.

属于$\lambda_1=2$的单位特征向量为$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，属于$\lambda_2=5$的单位特征向量为$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$，

属于$\lambda_3=-4$的单位特征向量为$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$，

取$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则$Q$是正交矩阵，且$Q^TAQ=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$.

习题3 设A为实对称矩阵，试证：对任意正奇数k,必有实对称矩阵B，使 B^{k}=A.

解： 因为A为实对称矩阵，则存在正交阵P，使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$，其中$\lambda_{\mathrm{i}}(i=1,2,\cdots.n)$为A的全部特征值。且$\lambda_i$为实数（$i=1,2,\cdots.n$），

故A=P$\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}$,又因为k为奇数，因此可令B=P$\begin{bmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}&&&\\&\sqrt[k]{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt[k]{\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1}$,则$B^{\mathrm{k}}=$

$$P\begin{bmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}&&&\\&\sqrt[k]{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt[k]{\lambda_n}\end{bmatrix}^kP^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}=A.$$

再验证B为对称阵.

$$B^T=(P^{-1})^T\begin{bmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}&&&\\&\sqrt[k]{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt[k]{\lambda_n}\end{bmatrix}^TP^T=P\begin{bmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}&&&\\&\sqrt[k]{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt[k]{\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1}=B.$$因此B为实对称矩阵.

习题4 证明n阶实对称阵A是正交阵$\Leftrightarrow$对任一n维列向量$\boldsymbol{\alpha}$, 均有$\|\boldsymbol{A\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|$.

证明：

(1)充分性,$\|A\alpha\|^2 = (A\alpha, A\alpha) = (A\alpha)^T A\alpha = \alpha^T\alpha = \|\alpha\|^2$，因此$\|A\alpha\| = \|\alpha\|$。

(2)必要性，因为$\|A\alpha\| = \|\alpha\|$对任一向量α都成立，取$\alpha = \ell_i + \ell_j$, 其中ℓ_i是第i个元素为1其他都是0的n维列向量.

则$\|\ell_i + \ell_j\|^2 = \|A(\ell_i + \ell_j)\|^2 = (A(\ell_i + \ell_j))^T A(\ell_i + \ell_j)$

$= (A\ell_i)^T A\ell_i + (A\ell_j)^T A\ell_j + 2(A\ell_i)^T A\ell_j$,

又因为$\|\ell_i + \ell_j\|^2 = \|\ell_i\|^2 + \|\ell_j\|^2 + 2\ell_i^T\ell_j$, 因此$(A\ell_i)^T A\ell_j = \ell_i^T\ell_j$.

设$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 则$\alpha_i^T\alpha_j = (A\ell_i)^T A\ell_j = \ell_i^T\ell_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

因此A的列向量组成一组标准正交基，因此A是正交阵.

习题5 证明：若$i_1 i_2 \cdots i_n$是一个 n 级排列，则下面两个矩阵合同，

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$$

证明：

记$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$.

对于二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TBx=\lambda_{i_1}x_1^2+\lambda_{i_2}x_2^2+\cdots+\lambda_{i_n}x_n^2$,作可逆线性变换

$x_1=y_{i_1},x_2=y_{i_2},\cdots,x_n=y_{i_n}$,则

$f=\lambda_{i_1}y_{i_1}^{\ 2}+\lambda_{i_2}y_{i_2}^{\ 2}+\cdots+\lambda_{i_n}y_{i_n}^{\ 2}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=y^TAy$,

所以两矩阵合同，其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$.

习题6 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换 $(x,y,z)^T=P(\epsilon,\eta,\xi)^T$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\xi^2=4$, 求 a,b 的值和正交矩阵P.

提示:二次型矩阵与其正交变换所得的标准形矩阵即合同又相似。

解: 设$f=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$其对应的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,标准形矩阵

$B=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{bmatrix}$,因此A与B相似且合同，所以$tr(A)=tr(B)$,且$|A|=|B|$.因此有

$\begin{cases} a+2=5, \\ |A|=-(b-1)^2=|B|=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ b=1. \end{cases}$

由(-A)x=0解出$\lambda=0$对应的特征向量$\alpha_1=(1,0,-1)^T$.

由(E-A)x=0解出$\lambda=1$对应的特征向量$\alpha_2=(1,-1,1)^T$.

由(4E-A)x=0解出$\lambda=4$对应的特征向量$\alpha_3=(1,2,1)^T$.

将α_1，α_2，α_3单位化后有： $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$即为所求正交矩阵。

习题7（配方法）化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_1x_3+x_2^2+6x_2x_3+8x_3^2$为标准形。

解：

因为$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 + 8x_3^2$

$= (x_1 + x_2 + 3x_3)^2 - (x_1 + 5x_3)^2 + 24x_3^2$,

因此可作可逆线性变换$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 + 5x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1 = y_2 - 5y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_3 - y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

代入原二次型化f为标准型$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 + 24y_3^2$.

习题8 设A、B分别为m阶，n阶正定矩阵，试判定分块矩阵C=$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

解法一: 验证各阶主子式法.

由于A、B均为正定矩阵，故A、B的各阶主子式均为正，

由分块矩阵及行列式的知识可知，

C的各阶主子式，或是A的某一主子式，或是B的某一主子式与$|A|$的乘积，

故C的各阶主子式均为正，故C为正定矩阵。

习题8 设A、B分别为m阶，n阶正定矩阵，试判定分块矩阵C=$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

解法二： 特征值法

设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，$B$的特征值为$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，

而 $|\lambda\ \ E_{m+n}-C| = \begin{vmatrix} \lambda\ \ E_m - A & 0 \\ 0 & \lambda\ \ E_n - B \end{vmatrix}$

$= |\lambda E_m - A|\,|\lambda E_n - B| = (\lambda\ \ -\lambda_1)\cdots(\lambda\ \ -\lambda_m)(\lambda\ \ -\mu_1)\cdots(\lambda\ \ -\mu_n).$

又因为A、B正定，所以$\lambda_i > 0, \mu_j > 0(i = 1,\cdots,m, j = 1,\cdots,n)$，因此C为正定矩阵。

习题8 设A、B分别为m阶，n阶正定矩阵，试判定分块矩阵C=$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$是否为正定矩阵.

解法三：

因为A、B正定，所以A合同于E_{m}，B合同于E_{n}，则存在可逆阵P，Q使

$$P^T AP=E_{\mathrm{m}}, \quad Q^T AQ=E_n,$$

令 $D=\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$，则$D^T CD = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} P^T AP & 0 \\ 0 & Q^T BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{m}} & 0 \\ 0 & E_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} = E_{\mathrm{m}+n}.$$

显然$\begin{vmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{vmatrix} = |P||Q| \neq 0$，所以 D 可逆，因此$\boldsymbol{C}$合同于单位矩阵，故$\boldsymbol{C}$为正定矩阵。

习题9 设为 3 阶实对称矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$,

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

当 k 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵?

习题9

解. $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ, 以及 λ 的任意特征向量 $\mathbf{x}$, 须满足

$$(\mathbf{A}^2+2\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{O}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$
$$(\lambda^2+2\lambda)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$
$$\lambda^2+2\lambda=0$$

所以 $\lambda_1=-2, \lambda_2=0$ 就是 $\mathbf{A}$ 的全部特征值.

由 $rank(\mathbf{A})=2$ 可知, $\mathbf{A}$ 对角化所得对角阵必为 $\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$(不考虑对角线元素重新排列).

设 $\mathbf{P}$ 为使 $\mathbf{A}+k\mathbf{I}$ 对角化之正交阵, 即

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{A}+k\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}+k\mathbf{I}$$

为对角阵. 这就要求 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ 也为对角阵, 从而 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\Lambda$.

所以, 要使 $\mathbf{A}+k\mathbf{I}$ 正定, 只需让 $\Lambda+k\mathbf{I}$ 的对角线元素为正, 即 $k>2$. □

习题10

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f(y_1, y_2, y_3) = y_2^2 + 2y_3^2$, 求 a, b.

解. 记二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $\mathbf{A}$, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

由

$$\begin{cases} tr(\mathbf{A}) & = 3 \\ \det(\mathbf{A}) & = -(a-b)^2 = 0 \\ |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| & = x(x^2 - 3x - 2a^2 + 2) = x(x-1)(x-2) \end{cases}$$

解得 $a = b = 0$.

习题11 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+ax_1x_3-4x_2x_3$ 的秩为 2,

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(3) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解. 记二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\mathbf{A}$, 即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & a/2 \\ 2 & 4 & -2 \\ a/2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$r(\mathbf{A})=2<3$, 所以 $\det(\mathbf{A})=0$, 解得 $a_1=-8, a_2=4$, 代入 $\mathbf{A}$ 验证秩均为 2.

当 $a=-8$ 时, 求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6+2\sqrt{3}, \lambda_2=6-2\sqrt{3}, \lambda_3=0$. 因而 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P_1}\boldsymbol{y}$ (求值过程略) 下化为标准形 $(6+2\sqrt{3})y_1^2+(6-2\sqrt{3})y_2^2$, $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $y_1=0, y_2=0, y_3\in\mathbb{R}$, 即 $\mathbf{P_1}[0,0,t], t\geq 0$.

当 $a=4$ 时, 求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=0$. 因而 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P_2}\boldsymbol{y}$ (求值过程略) 下化为标准形 $6y_1^2+6y_2^2$, $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $y_1=0, y_2=0, y_3\in\mathbb{R}$, 即 $\mathbf{P_2}[0,0,t], t\geq 0$. □

习题12 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \geqslant 0$, 等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

证明. $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 为实对称矩阵, 所以可对角化, 即存在正交矩阵 $\mathbf{P}$, 使得

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T$$

令 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T\mathbf{x}$, 则 $\mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y}$ 为二次型 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x}$ 的标准型, 且 Λ 的对角线元素之和等于 $tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$.

而对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{x})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{x}) = |\mathbf{A}^T\mathbf{x}|^2 \geq 0$$

所以二次型 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x}$ 半正定, 即 Λ 对角线元素全部非负, $tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \geq 0$.

$tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 0$ 当且仅当 $\Lambda = \mathbf{O}$, 当且仅当 $\forall\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} = 0$; 由于 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, 即当且仅当 $\forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{x})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{x}) = 0$, 即 $\mathbf{A}^T = \mathbf{O}, \mathbf{A} = \mathbf{O}$.