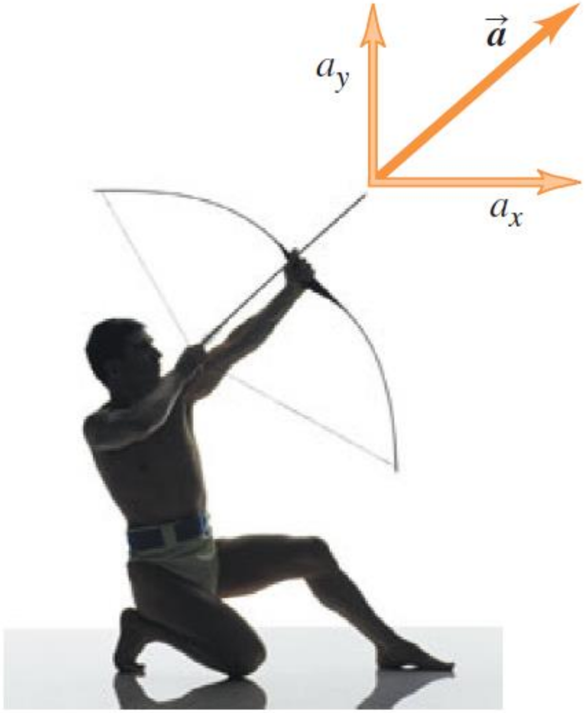
加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_x = m(dv_x/dt) = m(d^2x/dt^2) = ma_x,$$
$$F_y = m(dv_y/dt) = m(d^2y/dt^2) = ma_y,$$
$$F_z = m(dv_z/dt) = m(d^2z/dt^2) = ma_z.$$

人体承受加速度

宇航员乘火箭起飞时加速度: 3 – 4g

$1g=9.8m/s^2$

1-3： 5s内由静止加速到188m/s
4-6: 减速（更大的加速度）

运动学中的逆问题

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

匀加速运动：地面附近 重力作用

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{g} dt = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t) dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

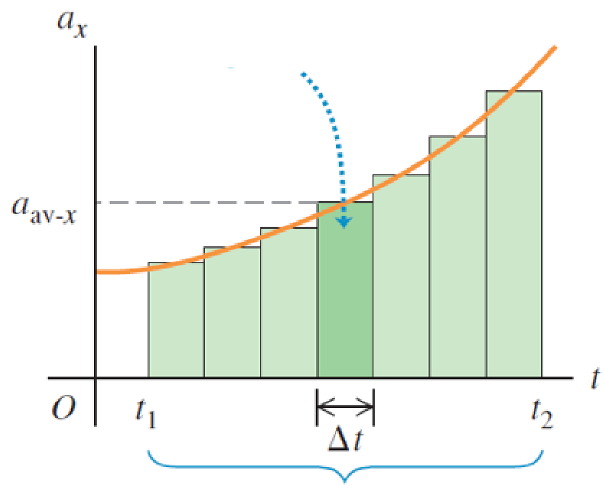
运动学中的逆问题

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}dt$$

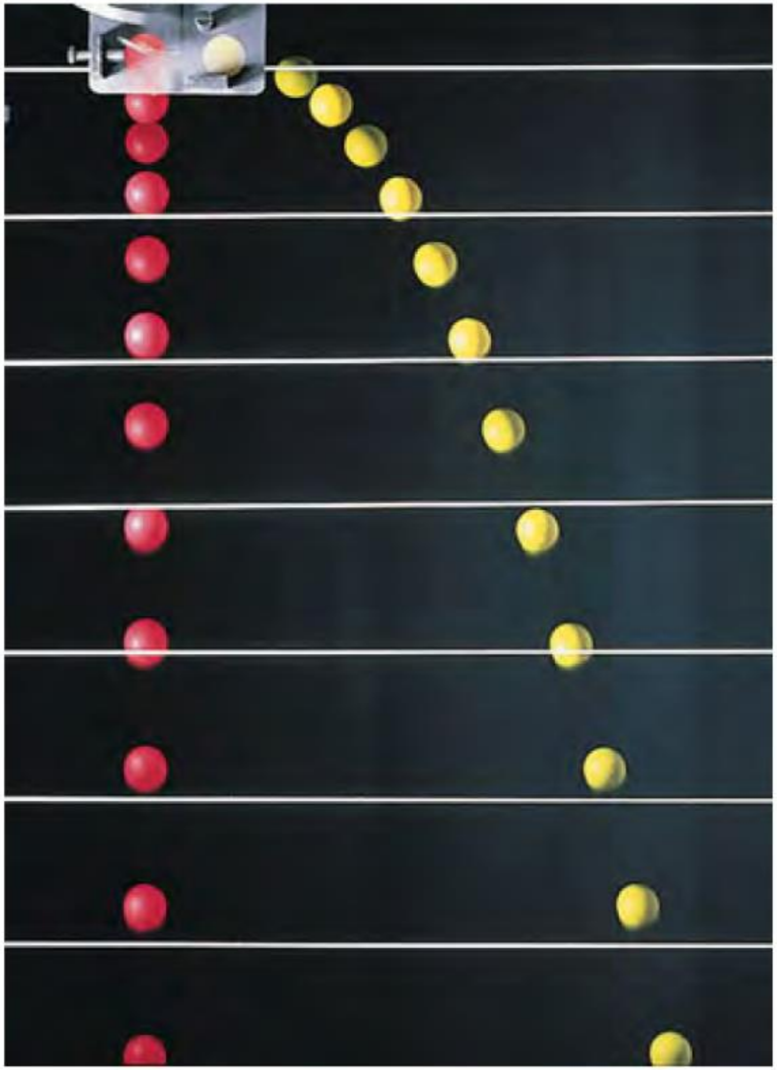
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}dt$$

惯性导航系统

利用加速度计和时间，可以积分出速度，再对时间积分得到位置。飞机起飞时开始启动加速度测量。



自由落体: 分量求解



竖直方向的加速运动和水平方向匀速运动的运动可以分离，互不相关

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

竖直位置、速度、加速度与水平运动无关

水平运动

$$v_x = v_{0x}$$

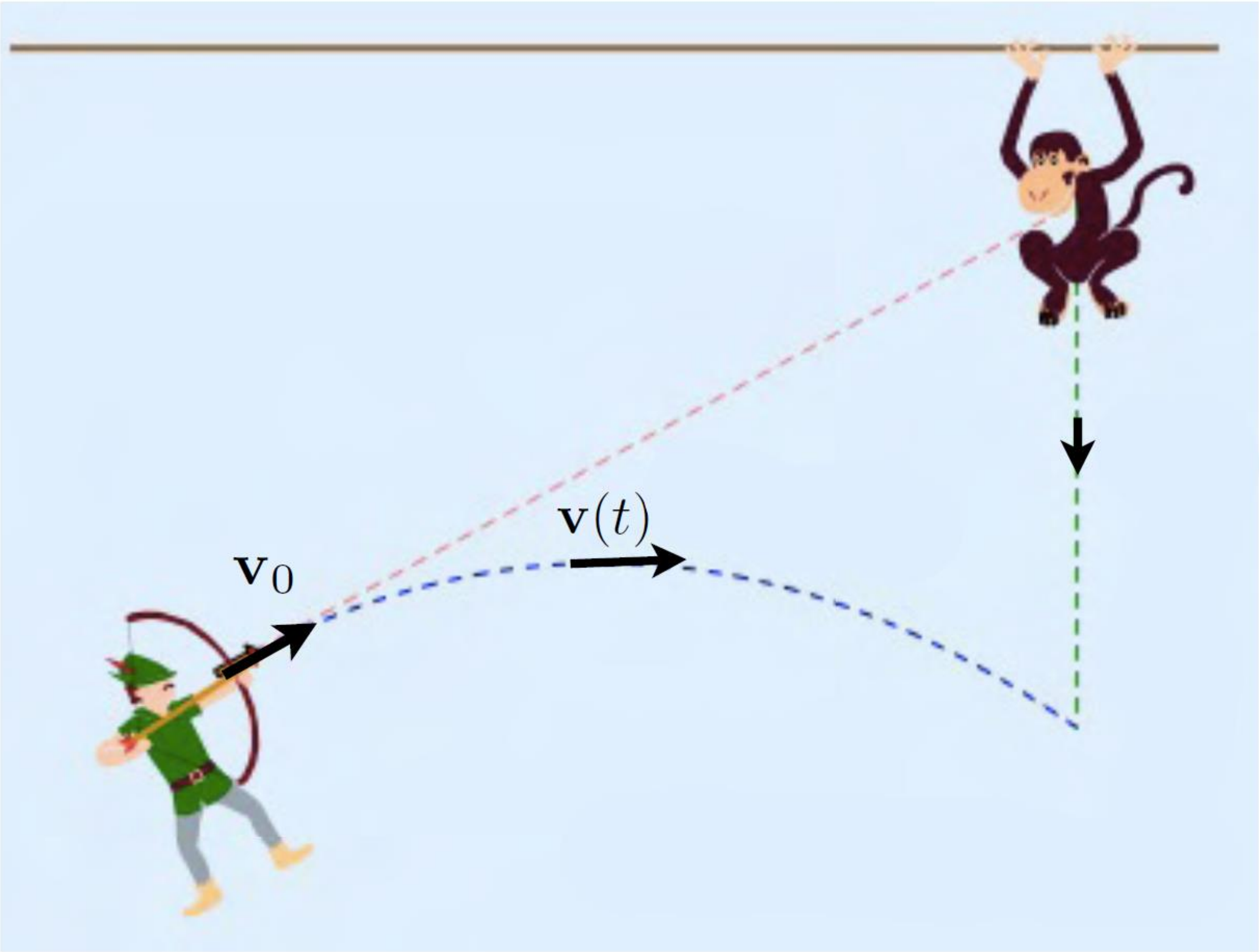
$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt = x_0 + \int_0^t v_{0x} dt = x_0 + v_{0x} t$$

竖直运动

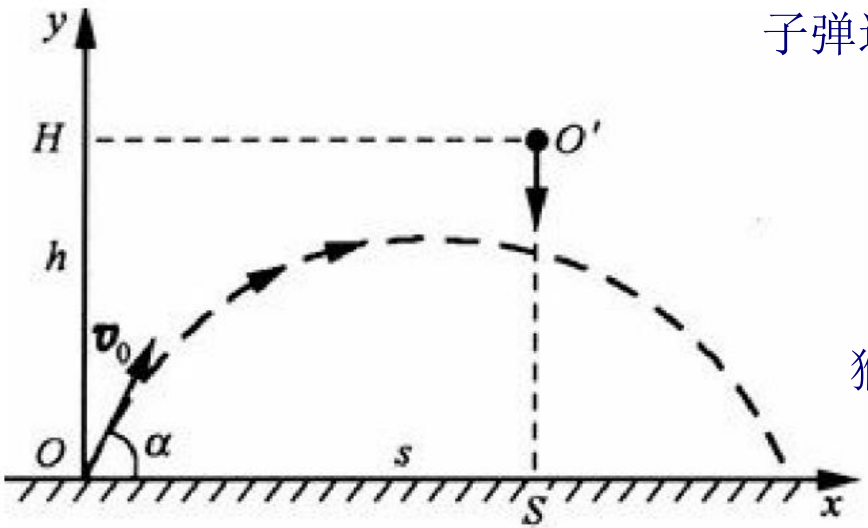
$$v_y = v_{y0} + \int_0^t (-g) dt = v_{y0} - gt$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt = y_0 + \int_0^t (v_{y0} - gt) dt = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

打靶-空中相遇： 矢量求解



打靶-空中相遇：分量求解



子弹运动方程

$$x_1(t) = v_0 t\cos\alpha$$

$$y_1(t) = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

猴子（靶）运动方程

$$x_2(t) = s$$

$$y_2(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

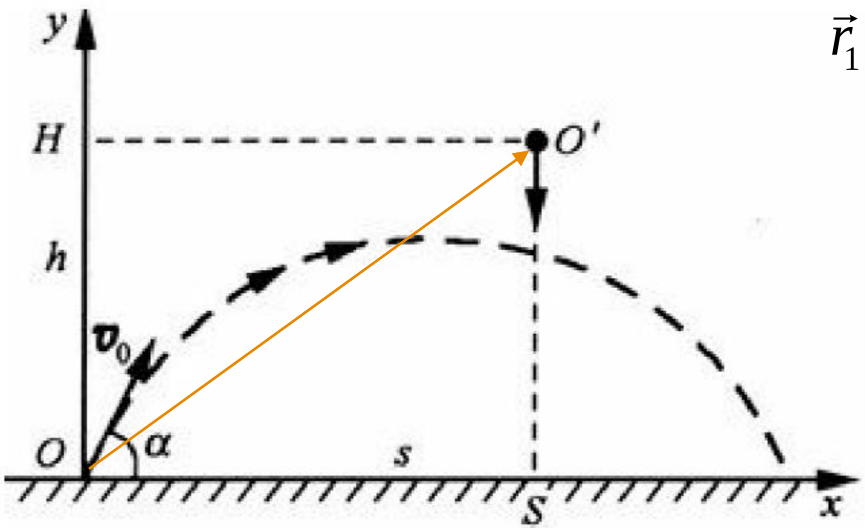
$x_1(t) = x_2(t)$, 且$y_1(t) = y_2(t)$，因此

$$v_0 t\cos\alpha = s$$

$$v_0 t\sin\alpha = h$$

由此: $\tan\alpha = h/s$

打靶-空中相遇：矢量求解



相遇时： $\vec{r}_1(t)=\vec{r}_2(t)$

$$\vec{r}_1(t)=\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad \vec{r}_2(t)=\vec{r}_{20}+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

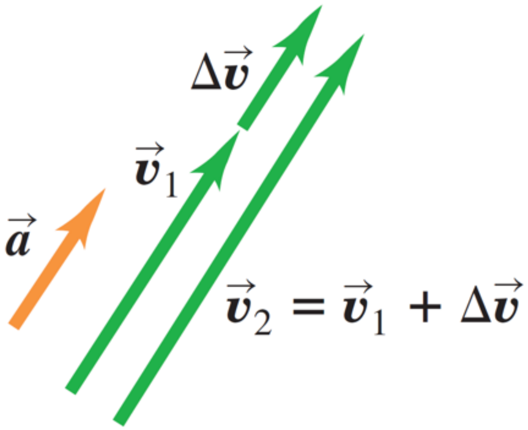
$$\vec{v}_0=\frac{\vec{r}_{20}}{t}$$

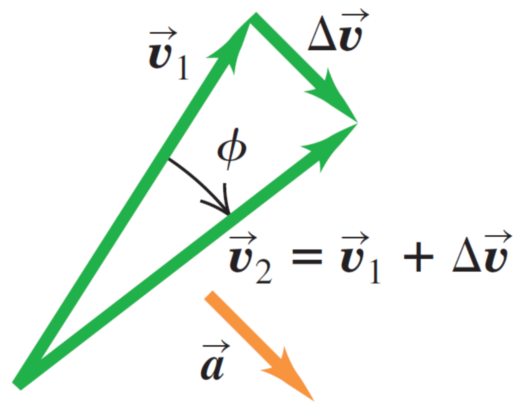
给出了子弹发射的速度和方向，保证两体相遇

子弹方向瞄准猴子即可。子弹初速度决定了相遇的时间。但是相遇时间要在落地之前。

加速度

两种特殊情况





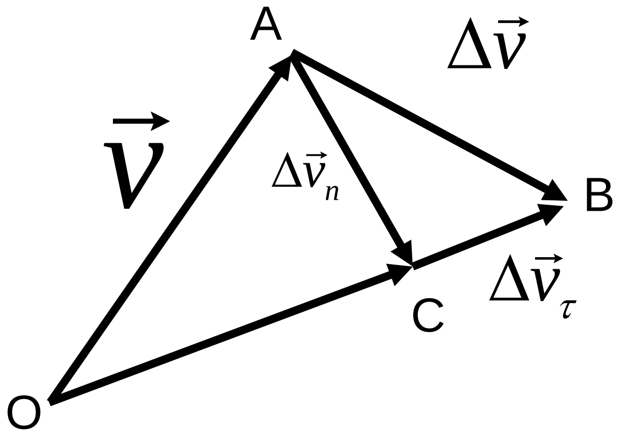
速度方向不变，速度大小改变

(加速度方向平行于速度方向）

速度大小不变，速度方向改变

(加速度方向垂直速度方向）

法向加速度和切向加速度



$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau$$

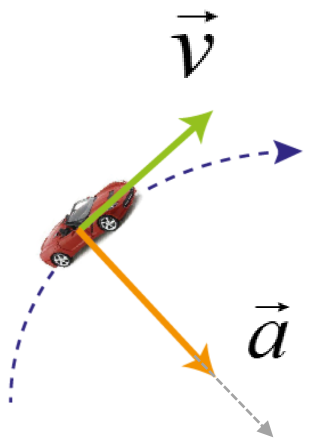
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt} \qquad \vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}$$

弧线运动

法向加速度：改变速度方向
切向加速度：改变速度大小

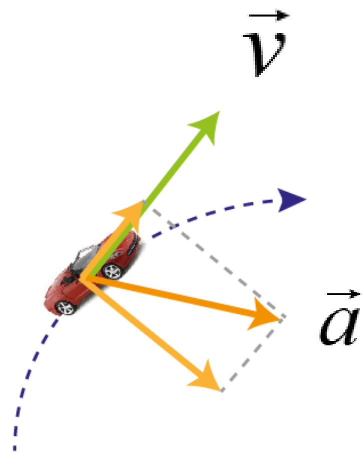
绕圆以均匀速率运动



指向圆心

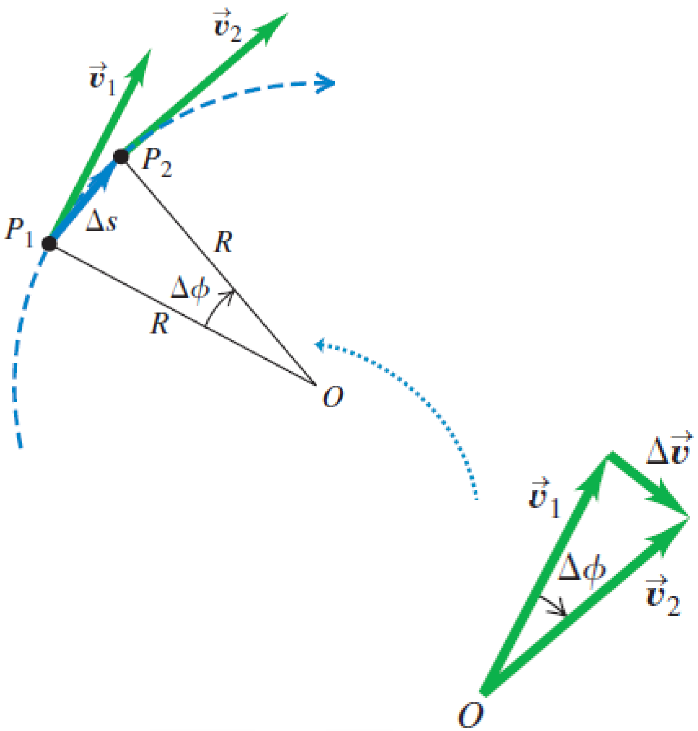
加速度严格垂直于速度

平行于速度的加速度分量，
改变汽车速率

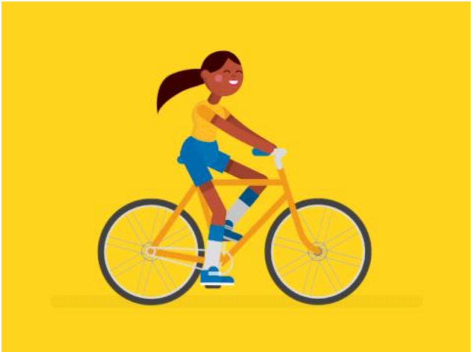


垂直于速度的加速度分量，
改变汽车方向

匀速圆周运动法向加速度



两个角度是相似的



$$a_n = \frac{v^2}{\mathrm{R}}$$

$$\vec{\mathrm{a}}_n = \frac{v^2}{\mathrm{R}}\vec{e}_n$$

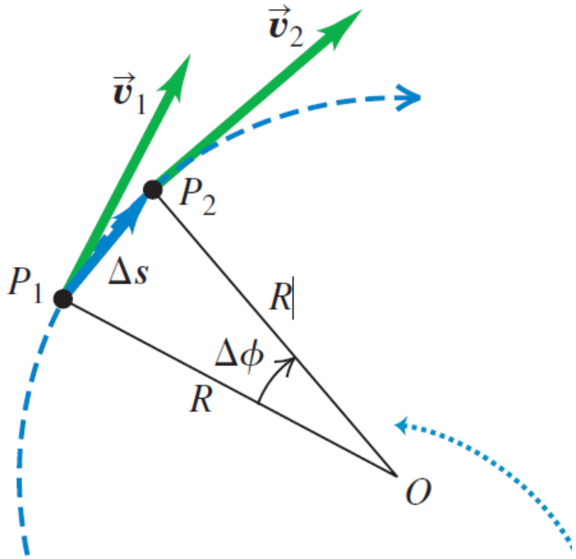
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R}$$ 或者 $$|\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

Δt内 平均加速度的大小a_{av}

$$a_{\mathrm{av}} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

非匀速圆周运动切向加速度



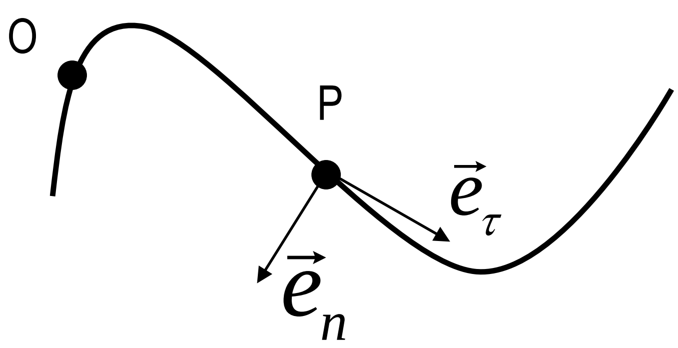
$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau \quad 或 \quad \vec{a}_\tau = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\vec{e}_\tau$$

$$\frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} \neq \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

总加速度的大小：

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

自然坐标系



$\vec{e}_\tau$: 切向单位矢量

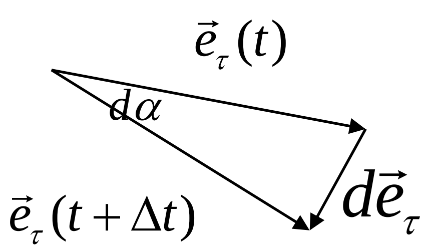
$\vec{e}_n$: 法向单位矢量

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_\tau)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$$

注意： 切向单位矢量也随时间变化

$$d\vec{e}_\tau = d\alpha\vec{e}_n \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{d\alpha}{dt}\vec{e}_n$$

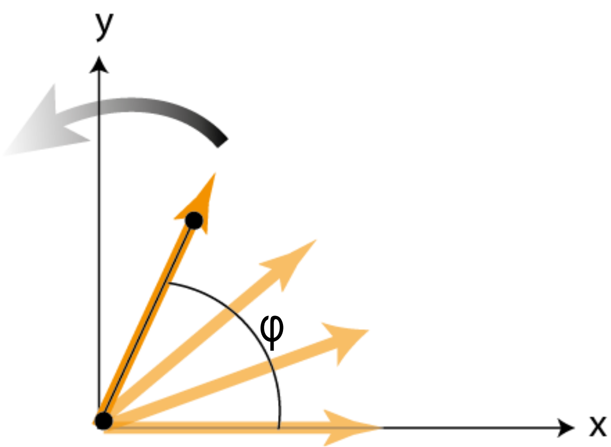
$d\alpha = \dfrac{ds}{\rho}$, ρ为曲率半径



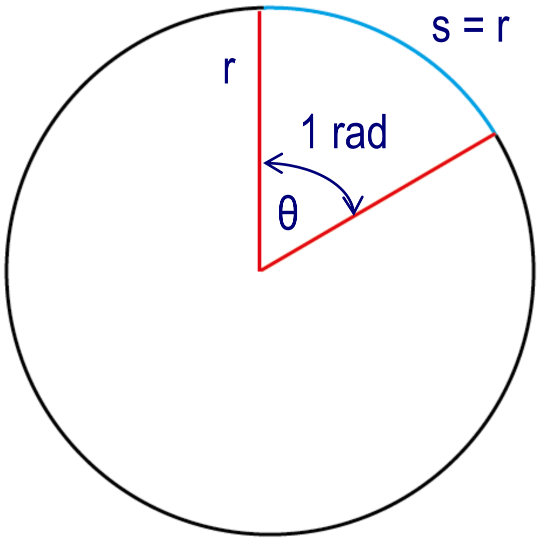
$ds=vdt$, 所以$\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{ds}{\rho}\dfrac{1}{dt} = \dfrac{vdt}{\rho}\dfrac{1}{dt} = \dfrac{v}{\rho}$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, a_n = v\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$$

角度和弧度



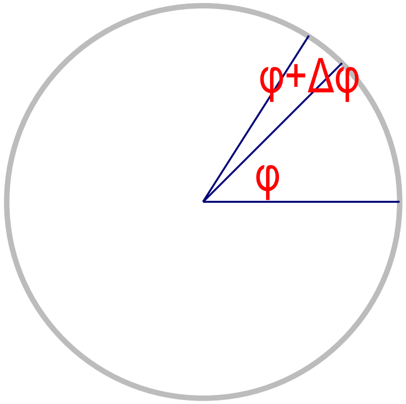
$$\varphi = \frac{s}{r}$$



单位： 1 rad (弧度)：s = r

转换成角度： $1\text{rad} = \frac{360^o}{2\pi} = 57.3^O$

角速度



角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

角速度单位： rad/s (弧度/秒）

匀速圆周运动：

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

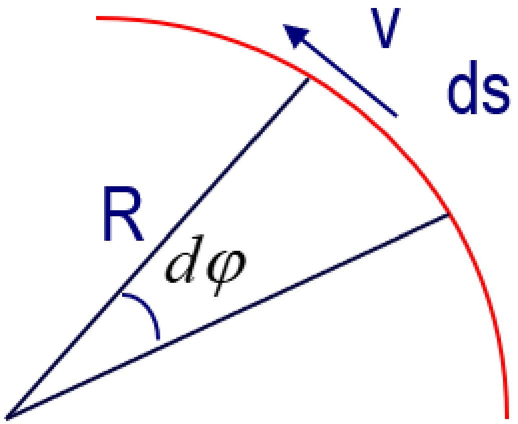
角速度与线速度

线速度v和角速度w

$$v = \frac{ds}{dt}$$

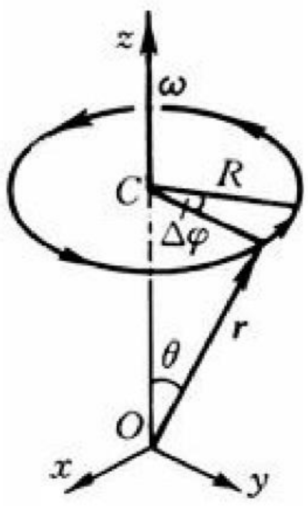
$$ds = Rd\varphi$$

R是半径



$$v = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

角速度的方向



$$v = R\omega$$

$$R = r\sin\theta$$

$$v = \omega r\sin\theta$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

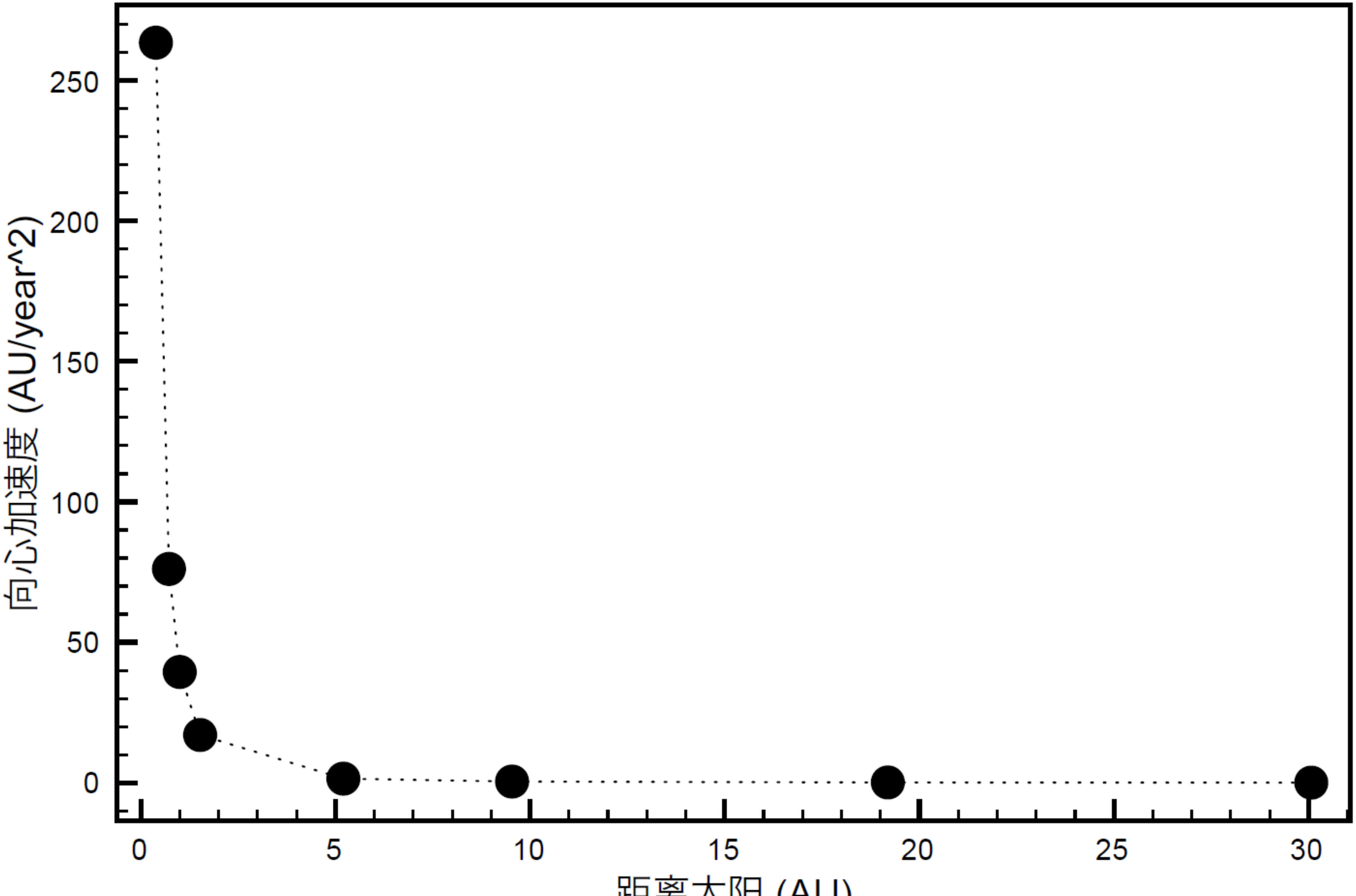
太阳系中的匀速圆周运动

一个天文单位：1AU = 149,597,870.7 km

$$a = \frac{v^2}{R} = R(\frac{v}{R})^2 = R\omega^2 = R(\frac{2\pi}{T})^2$$

行星	平均距离 r (AU)	周期 T (year)	向心加速度(au/y^2)
水星	0.388	0.241	263.46
金星	0.723	0.62	74.25
地球	1.000	1.00	39.44 0.006m/s^2
火星	1.524	1.88	17.01
木星	5.203	11.86	1.46
土星	9.537	29.45	0.43
天王星	19.191	84.02	0.11
海王星	30.069	164.79	0.04

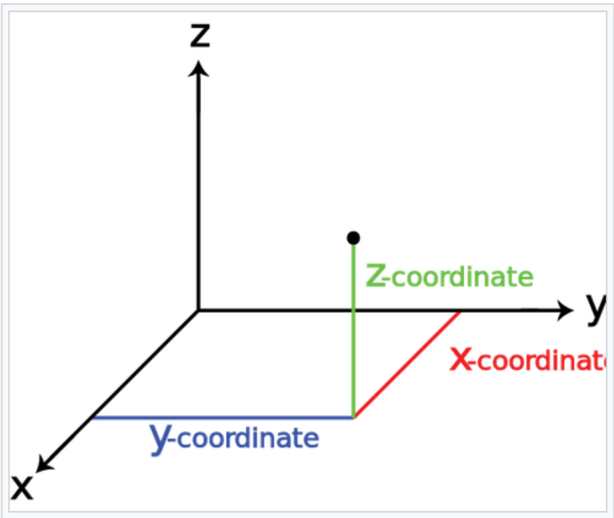
太阳系中的匀速圆周运动



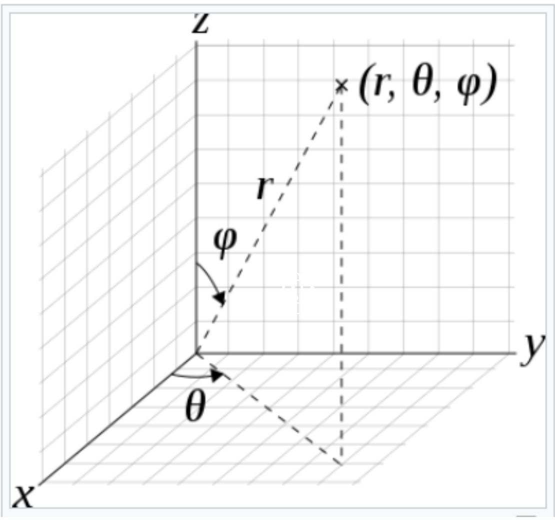
人造重力

$$a = w^2 r$$

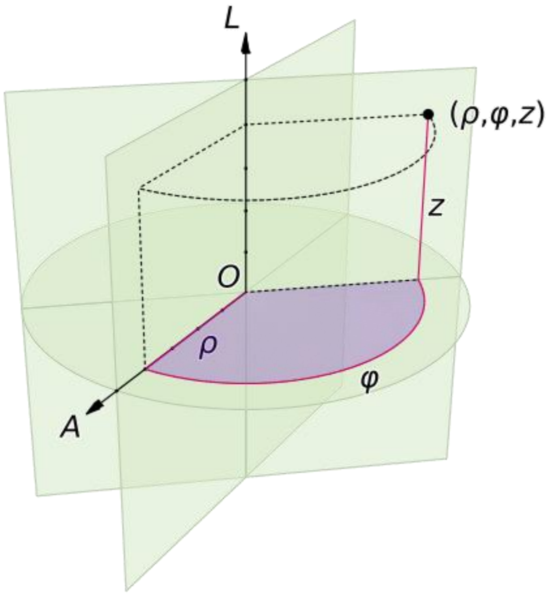
坐标系



直角坐标系

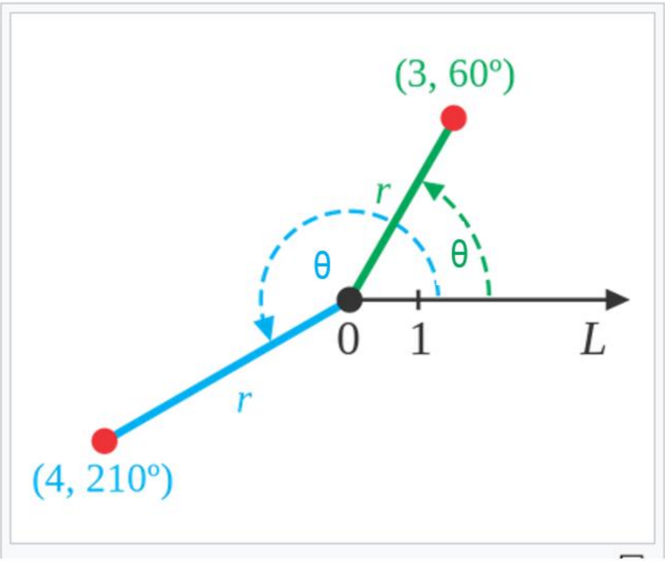


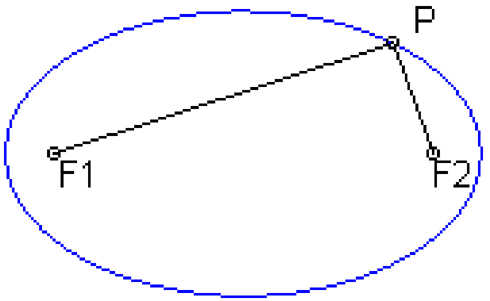
球坐标系



柱坐标系

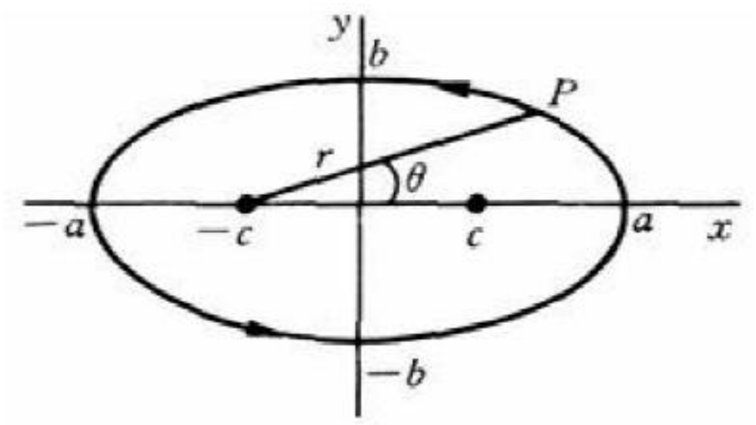
二维极坐标系





椭圆

椭圆轨道极坐标



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$r(\theta)=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

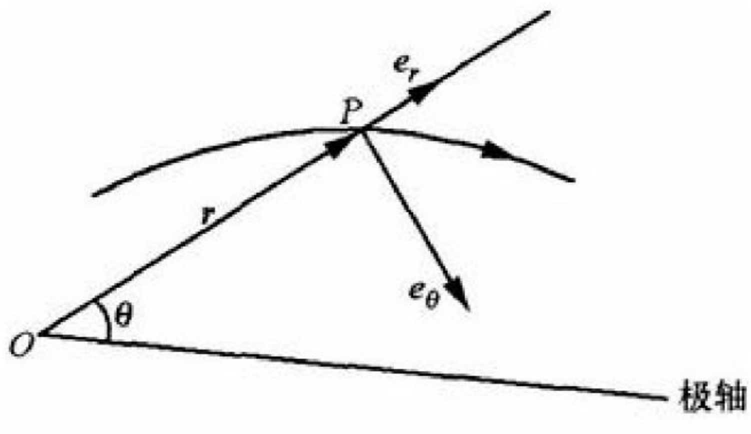
$$e=c/a$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

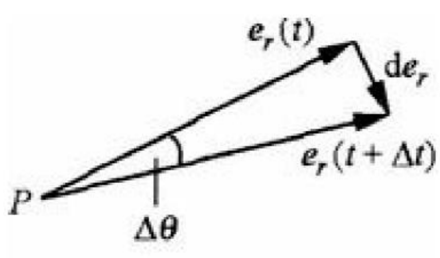
$$p=(1-e^2)a/e$$

二维极坐标系中的速度

$\vec{e}_r$径向单位矢量,$\vec{e}_\theta$横向单位矢量



（a）



（b）

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$d\vec{e}_r = d\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$