题目： 设有向量组 A

$$a_1 = (1,4,2,1)^{\mathrm{T}}, a_2 = (-2,1,5,1)^{\mathrm{T}}, a_3 = (-1,2,4,1)^{\mathrm{T}}$$
$$a_4 = (-2,1,-1,1)^{\mathrm{T}}, a_5 = \left(2,3,0,\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

(1) 求向量组 A 的秩

(2) 求向量组 A 的一个最大无关组

(3) 将 A 中其余向量用所求出的最大无关组线性表示

解答:

(1) 以 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 为列向量作矩阵 A, 用初等行变换将矩阵 A 化为阶梯形

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

于是 $R(A) = A$ 的列秩 $=R(B_1) = 3 < 5$

故向量组 A 的秩为 3，向量组 A 线性相关

(2) 由于最后所得的行阶梯形的三个非零行的非零首元在 1,2,4 三列，故 a_1, a_2, a_4 为向量组 A 的一个最大无关组。这是因为

$$(a_1, a_2, a_4) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R(a_1, a_2, a_4) = 3$, 故 a_1, a_2, a_4 线性无关

(3) 对 B_1 继续作初等行变换，化为最简形

$$B_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \triangleq B$$

由此可知 b_1, b_2, b_4 构成 B 的列向量组的最大线性无关组

$$b_3 = \frac{1}{3} b_1 + \frac{2}{3} b_2$$

$$b_5 = \frac{8}{9} b_1 - \frac{7}{18} b_2 - \frac{1}{6} b_4$$

且矩阵的初等行变换并不改变矩阵的列向量组之间的线性关系，因此有

$$a_3 = \frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2$$

$$a_5 = \frac{8}{9} a_1 - \frac{7}{18} a_2 - \frac{1}{6} a_4$$

题目：

已知向量组 $a_1 = [1,1,1,3]^T, a_2 = [1,3,-5,-1]^T, a_3 = [-2,-6,10,a]^T, a_4 = [4,1,6,a+10]^T$ 线性相关，求向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 的极大线性无关组

题目：

已知向量组 $a_1=[1,1,1,3]^T, a_2=[1,3,-5,-1]^T, a_3=[-2,-6,10,a]^T, a_4=[4,1,6,a+10]^T$ 线性相关，求向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 的极大线性无关组

解答：

$$[a_1,a_2,a_3,a_4]=\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\1&3&-6&1\\1&-5&10&6\\3&-1&a&a+10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&-6&12&2\\0&-4&a+6&a-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&0&0&-7\\0&0&a-2&a-8\end{bmatrix}$$

那么 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(a_1,a_2,a_3,a_4)<4\Leftrightarrow a=2$

此时，$r(a_1,a_2,a_3,a_4)=3$，极大线性无关组是 a_1,a_2,a_4 或 a_1,a_3,a_4

题目：

设 4 维向量组 $\alpha_1 = [1+a,1,1,1]^T, \alpha_2 = [2,2+a,2,2]^T, \alpha_3 = [3,3,3+a,3]^T, \alpha_4 = [4,4,4,4+a]^T$, 问 a 为何值时，该向量组线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示

题目：

设 4 维向量组 $\alpha_1 = [1+a,1,1,1]^T, \alpha_2 = [2,2+a,2,2]^T, \alpha_3 = [3,3,3+a,3]^T, \alpha_4 = [4,4,4,4+a]^T$, 问 a 为何值时，该向量组线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示

解答： 设 $A = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，则

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (a+10)a^3$$

那么当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

当 $a=0$ 时，α_1 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$

当 $a=-10$ 时，对 A 作初等行变换，有

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & -10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]
$$

易知 β_2,β_3,β_4 是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\beta_1=-\beta_2-\beta_3-\beta_4$

故 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组且 $\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$

习题4　已知向量组（I）$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$; (II)$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4}$; (III)$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_5}$,如果向量组的秩分别 为R(I)=R(II)=3,R(III)=4，求证向量组$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_5}$-$\boldsymbol{a_4}$的秩为4.

思路：　$\mathbf{R}(\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_5 - a_4}) = \mathbf{4}$，等价于$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_5 - a_4}$线性无关；

证明：

由R(I)=R(II)=3 可知$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$线性无关，而$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4}$线性相关。

从而$\boldsymbol{a_4}$可由$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$唯一线性表出，从而有一组数$\boldsymbol{l_1, l_2, l_3}$使得

$\boldsymbol{a_4}=\boldsymbol{l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3}$，若有关系式$\mathrm{x}_1\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{x_2 a_2 + x_3 a_3} + \boldsymbol{x_4(a_5 - a_4) = 0}$,

将$\boldsymbol{a_4}=\boldsymbol{l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3}$代入后整理可得:

$(\mathrm{x}_1 - \boldsymbol{l_1}\mathrm{x}_4)\boldsymbol{a_1} + (\mathrm{x}_2 - \boldsymbol{l_2}\mathrm{x}_4)\boldsymbol{a_2} + (\mathrm{x}_3 - \boldsymbol{l_3}\mathrm{x}_4)\boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{x_4 a_5}=0.$

又因为R(III)=4，则$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_5}$线性无关，所以有齐次线性方程组:

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 - \boldsymbol{l_1}\mathrm{x}_4 = \mathbf{0}, \\ \mathrm{x}_2 - \boldsymbol{l_2}\mathrm{x}_4 = \mathbf{0}, \\ \mathrm{x}_3 - \boldsymbol{l_3}\mathrm{x}_4 = \mathbf{0}, \\ \mathrm{x}_4 = \mathbf{0}. \end{cases}$$

, 解得$\mathrm{x}_1=\mathrm{x}_2=\mathrm{x}_3=\mathrm{x}_4=0$, 所以$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_5 - a_4}$线性无关，

所以该向量组的秩为4.