

1. 设 $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \alpha > 0$, (1) 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的可导性, (2) 当 $f(x)$ 可导时, 讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。(P67.5)
2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & x > 2 \\ ax + 1, & x \leq 2 \end{cases}$, 确定 a, b , 使得 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处可导。(P67.7)
3. 证明 $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$ 。(P81.16)
4. 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出: (1) $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$, (2) $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$ (P81.17)
5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶连续导数, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ 。P112.12
6. 设函数 f 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且在 $[0, 1]$ 上成立 $|f(x)| \leq 1$ 及 $|f''(x)| \leq 2$, 证明: 在 $[0, 1]$ 上成立 $|f'(x)| \leq 3$ 。P112.13
7. 设函数 $f(x) = |x^3 - 1|\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 求 $\varphi(1)$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{e}\right)^x$
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\cos(x-1))}{1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2\right) \ln(1 + ax)\right) \quad (a \neq 0)$
12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明:
 - 1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$
 - 2) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda(f(\xi) - \xi) = 1$
13. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $f'(x)$ 单调下降, 证明: 对任意 $x \in (a, b)$, $f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$