



5

向量组的 线性相关性



§ 1 向量组定义

定义1: n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 所组成的有序数组称为一个 n 维向量, 这 n 个数称为该向量的 n 个分量, 第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量。

这里定义的 n 维向量就是指 $n \times 1$ (或 $1 \times n$) 矩阵。



$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \text{ 称为列向量。}$$

$$\alpha^T = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ 称为行向量。}$$

n 维向量默认指 n 维列向量。



例. 3 维向量的全体所组成的集合

$$R^3 = \{ (x, y, z)^T \mid x, y, z \in R \}$$

通常称为 3 维Euclid几何空间。

集合

$$\Pi = \{ (x, y, z)^T \mid ax + by + cz = d \}$$

称为 R^3 中的一个平面。



向量的集合：例

例. 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集合

$$S_* = \{x \mid Ax = b\}$$

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集合

$$S = \{x \mid Ax = 0\}$$



同一维数的列向量 (或行向量) 所组成的集合称为**向量组**。

$m \times n$ 阵 A 的

列向量组: $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

行向量组: $A = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$



§ 2 向量组的线性相关性

定义1: 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 及一组实数 k_1, k_2, \dots, k_m , 表达式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合,

k_1, k_2, \dots, k_m 称为线性组合的系数。



定义2: 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 和向量 b
若存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$,
使得 $b = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m$
则称向量 b 是向量组 A 的一个线性组合,
或称向量 b 能由向量组 A 线性表示/表出。
试证: 0 向量 $(0, 0, \dots, 0)^T$
能由任意向量组 线性表示。



例如:

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示吗?

解方程组 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$

既解方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$



得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以，存在一组数 $(-1, -2, 0)$ 使得：

$$b = -a_1 - 2a_2$$



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \qquad \qquad \qquad \cdots \qquad \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\text{记 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$



若 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

则方程组的向量表示为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b$$



定理1: 向量 b 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

$$\Leftrightarrow Ax = b \text{ 有解, 其中 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A, b)$$



定义3: 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$
若 B 组中的每一个向量都能由向量组 A 线性表示,
则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示。

若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示,
则称向量组 A 与向量组 B 等价。



$A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ $B : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ B 能由 A 线性表示

$$\beta_j = k_{1j}\alpha_1 + k_{2j}\alpha_2 + \dots + k_{mj}\alpha_m, \quad j = 1, 2, \dots, l$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_l) = (k_{11}\alpha_1 + \dots + k_{m1}\alpha_m, \dots, k_{1l}\alpha_1 + \dots + k_{ml}\alpha_m)$$

$$= (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \dots & k_{ml} \end{pmatrix}$$



定理2: 向量组 $B : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 能由 $A : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示

$$\Leftrightarrow AX = B \text{ 有解, 其中 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$$

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$$



定理3: 向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 能由 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 则 $R(B) \leq R(A)$ 。

其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$

证: 根据定理 2 有 $R(A) = R(A, B)$

而 $R(B) \leq R(A, B)$, 因此 $R(B) \leq R(A)$ 。

若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示,
则称向量组 A 与向量组 B 等价。

问: $R(A)$ 与 $R(B)$ 大小关系



定义4: 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,
若存在不全为零实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$,
使得 $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m = \mathbf{0}$
则称向量组 A 线性相关.

否则称向量组 A 线性无关.

上式当且仅当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 全为0时才成立

试证: $\mathbf{0}$ 向量 $(0, 0, \dots, 0)^T$
与任意向量均线性相关



线性相关的本质

定理:

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 线性相关的充要条件:
该向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表出

证明: ?

线性相关本质:

向量组中存在某些向量可由其余向量线性表出

$m=1$ 时?



定理4: n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

$$\iff Ax = 0 \text{ 有非零解, 其中 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

$$\iff R(A) < m$$

推论: n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关

$$\iff Ax = 0 \text{ 只有零解, 其中 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

$$\iff R(A) = m$$



例2: 已知: $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, 5)^T$, $\alpha_3 = (2, 4, 7)^T$

试讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及向量组 α_1, α_2 的
线性相关性.



解： 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}$

$$\text{即 } x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{系数行列式 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

齐次线性方程组有非零解，所以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
向量 α_1, α_2 对应分量不成比例，所以线性无关。

仅含两个向量的向量组特有的判定方法



例3: n 维向量

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$$

讨论它们的线性相关性.

解: $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

结论: 线性无关

问题: $n=3$ 时, e_1, e_2, e_3 分别是什么?

上述向量组又称基本向量组或单位坐标向量组.



一些结论:

(1) 一个零向量线性相关,
一个非零向量线性无关;

(2) 两个向量线性相关当且仅当
它们的对应分量成比例;

(3) 一个向量组线性无关, 则增加其中每个向量的分量所得新向量组仍线性无关。

(4) 向量组线性相关当且仅当向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示。



一些结论:

(5) 若一个向量组线性无关,
则其任何一个部分向量组线性无关

(6) 若一个向量组中有部分向量线性相关,
则整个向量组线性相关



定理5-1: 若向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关,
则向量组 $B : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 也线性相关。

推论: 若向量组 $B : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 线性无关,
则向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 也线性无关。

定理5-2: m 个 n 维向量($m > n$)构成的向量组一定线性相关。
特别地, $n+1$ 个 n 维向量线性相关。

定理5-3: 向量组 $A : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,
向量组 $B : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, b$ 线性相关,
则 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式唯一。



例4: 已知向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 并且

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)K$$

证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关的充要条件是 $R(K) = 3$

证: " \Rightarrow " $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 则方程

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = 0, \text{ 只有零解}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Kx = 0 \text{ 只有零解} \end{aligned}$$

故系数矩阵 $= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)K$ 秩为3, 于是 $R(K) = 3$
 $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$



$$" \Leftarrow " R(K) = 3$$

$$\text{设 } x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T$$

只要证此方程组只有零解即可

$$\begin{aligned} \text{则 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Kx &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x \\ &= x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0 \end{aligned}$$

又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

故 $Kx = 0$, 而 $R(K) = 3$, 于是 $x = 0$,

即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关



例5: 已知向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

证明: 向量 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ 线性无关。

$$\text{证: 因 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{故 } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 线性无关。}$$



§ 3 向量组的秩

定义1:

设 A 为一个向量组, A 的部分组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足:

- (i) $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关,
- (ii) A 中任意 $r+1$ 个向量(如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话)都线性相关

那么称部分组 A_0 为向量组 A 的一个**最大线性无关组**,

简称**最大无关组**, r 称为向量组 A 的秩, 记作: $R(A), R_A$
或 $rank(A)$

向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的秩也记作 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$

问: 1) 只含零向量的向量组的秩?

2) A 是线性无关组, 其秩?



注:

- (1) 只含零向量的向量组没有最大无关组, 规定秩为0。
- (2) 一个线性无关向量组的最大无关组就是其本身。
- (3) 向量组的最大无关组一般不是唯一的。
- (4) 向量组 A 能由 A_0 线性表示。
- (5) 任意一个最大线性无关组都与向量组本身等价。



例如：在向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 中，

首先 α_1, α_2 线性无关，又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，
所以 α_1, α_2 是一个最大无关组。

还可以验证 α_2, α_3 也是一个最大无关组。



注意：两个有相同的秩的向量组不一定等价。
两个向量组有相同的秩，并且其中一个可以被另一个线性表示，则这两个向量组等价。

例如：向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的秩为2。

向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩为2。



例：设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

矩阵A 的行向量组是

$$\alpha_1^T = (1, 1, 3, 1), \alpha_2^T = (0, 2, -1, 4),$$

$$\alpha_3^T = (0, 0, 0, 5), \alpha_4^T = (0, 0, 0, 0)$$

可以验证， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个最大无关组，

所以矩阵A的行向量组秩为3。



矩阵A的列向量组是

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

可以验证 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 是一个最大无关组

所以矩阵A的列秩是3。



定理6: 矩阵的秩 = 矩阵的行向量组的秩
= 矩阵的列向量组的秩

证: 矩阵 A 经过初等变换变为行最简形 B

又初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性关系,

所以, A 的秩 = A 的列向量组的秩

同理, A^T 的秩 = A^T 的列向量组的秩
= A 的行向量组的秩

又因为, A 的秩 = A^T 的秩

所以, A 的秩 = A 的行向量组的秩



例1：向量组

$$\alpha_1 = (-7, -2, 1, -11)^T,$$

$$\alpha_2 = (1, -1, 5, 8)^T$$

$$\alpha_3 = (3, 1, -1, 4)^T,$$

$$\alpha_4 = (5, 3, -7, 0)^T,$$

$$\alpha_5 = (-4, -2, 1, -11)^T$$

求向量组的秩和一个最大无关组。



解: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 36 & -4 & -44 & 3 \\ 0 & 63 & -7 & -77 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & \textcircled{9} & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore R(A) = 3$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 是一个最大无关组。



例2：求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

的列向量组的一个最大无关组，并把其余的向量用这个最大无关组线性表示。



解: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$\therefore \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 是一个最大无关组.

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3$$

$$\alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5$$



最大无关组的等价定义:

设 A 为一个向量组, A 的部分组 $A_0 : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足:

- (i) $A_0 : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- (ii) A 的任意向量都能由 A_0 线性表示。

那么称部分组 A_0 为向量组 A 的一个最大无关组。



证：只需证明 A 中的任意 $r+1$ 个向量都线性相关。

设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}$ 为 A 中的 $r+1$ 个向量，

由(ii)知，这 $r+1$ 个向量能由 A_0 线性表示，故

$$R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}) \leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r$$

因此，这 $r+1$ 个向量线性相关。



定理2': 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示的充要条件是

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$$

定理3': 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 则

$$R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) \leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$