如何判断一个矩阵是否可逆？

(1) 找一个同阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_n$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$);

(2) 找一个同阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB}$ 或 $\boldsymbol{BA}$ 是可逆矩阵;

(3) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆阵, 反之 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

- 设 n 阶矩阵 A 适合等式 $A^2 - 3A + 2I_n = O$，求证：A 和 $A + I_n$ 都是可逆矩阵，而若 $A \neq I_n$，则 $A - 2I_n$ 必不是可逆矩阵.

- 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A + B = AB$，求证：$I_n - A$ 是可逆矩阵且 $AB = BA$.

- 设A是奇数阶矩阵, $|A|>0$, 又$AA^T = I_n$, 证明 $I_n - A$ 是奇异阵.

习题1. 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=4$, 则 $\left|(\frac{1}{2}A)^2\right| =$ ____.

设 A 为 3×3 矩阵，B 为 4×4，且 $|A|=1$， $|B|=-2$, 则 $\left||B|A\right| =$ ____.

习题1. 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=4$, 则 $\left|(\frac{1}{2}A)^2\right| =$ ____.

设 A 为 3×3 矩阵，B 为 4×4，且 $|A|=1$， $|B|=-2$, 则 $\left||B|A\right| =$ ____.

$$\left|(\frac{1}{2}A)^2\right| = \left|\frac{1}{4}A^2\right| = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left|A^2\right| = \frac{1}{4}$$

$$\left||B|A\right| = |B|^3\,|A| = (-2)^3 \cdot 1 = -8.$$

习题2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$,求矩阵 A 的伴随矩阵及逆矩阵

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/2&1&-1/2\\5&-1&1\\7/2&-1&1/2\end{pmatrix}.$$

习题2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$,求矩阵 A 的伴随矩阵及逆矩阵

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&0\\-3&-5\end{vmatrix}=10,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0&1\\2&-5\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\-3&-5\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\-3&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1.$$

$$\therefore\ A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}.$$

习题3. 设 A 为三阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|=\frac{1}{8}$，计算 $\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-8A^*\right|$

习题3. 设 A 为三阶方阵，A^*为 A 的伴随矩阵，$|A|=\frac{1}{8}$，计算$\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-8A^*\right|$

因为 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{8}A^{-1}$，所以

$$\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-8A^*\right|=\left|3A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|2A^{-1}\right|=2^3\frac{1}{|A|}=64$$

习题4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 且$AB+E=A^2+B$ 求 **B**

习题4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 且 $AB+E=A^2+B$ 求 B

由 $AB+E=A^2+B$，得 $(A-E)B=A^2-E$

即 $(A-E)B=(A-E)(A+E)$

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $(A-E)$ 可逆

从而，$B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

习题5. 解矩阵方程 $AX+B=X$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

习题5. 解矩阵方程 $AX+B=X$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$

由 $AX+B=X$ 得 $(I-A)X=B$

因为 $|I-A|\neq 0$ 所以 $X=(I-A)^{-1}B$

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2/3&1/3\\-1&2/3&1/3\\0&-1/3&1/3\end{pmatrix}$$

因而 $X=(I-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}0&2/3&1/3\\-1&2/3&1/3\\0&-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$

习题6. 已知矩阵 A 满足关系式 $A^2+2A-3E=O$，求 $(A+4E)^{-1}$

习题6. 已知矩阵 A 满足关系式 $A^2+2A-3E=O$，求 $\left(A+4E\right)^{-1}$

因为 $O=A^2+2A-3E=\left(A+4E\right)\left(A-2E\right)+8E-3E$

$$\Rightarrow\left(A+4E\right)\left(\mathrm{A}-2\mathrm{E}\right)=-5E\Leftrightarrow\left(A+4E\right)\left(\frac{2}{5}E-\frac{1}{5}A\right)=E,$$

$$\Rightarrow\left(A+4E\right)^{-1}=\frac{2}{5}E-\frac{1}{5}A.$$

注：此类问题，首先应想到的是把所求问题的因式给分解出来

习题7. 已知矩阵A可逆，证明其伴随矩阵 A^* 也可逆，且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

习题7. 已知矩阵A可逆，证明其伴随矩阵 A^* 也可逆，且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

由$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$,得$A^*=A^{-1}|A|$,所以当A可逆时

$|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}\neq 0$ 从而A^*也可逆.

因为$A^*=|A|A^{-1}$,所以

$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$.

又$A=\dfrac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*=|A|(A^{-1})^*$,所以

$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A=|A|^{-1}|A|(A^{-1})^*=(A^{-1})^*$.

习题8. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$$

习题8. 设 A、B、$A+B$ 都可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$$

证. 根据定义

$$(A^{-1}+B^{-1})\left[A(A+B)^{-1}B\right]$$

$$=A^{-1}A(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$$

$$=E\,(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$$

$$=B^{-1}B(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$$

$$=B^{-1}(B+A)\,(A+B)^{-1}B=E$$

习题8. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$$

解2. 恒等变形　将 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$恒等变形，得到

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}$$

从而 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$$

题目： 设矩阵 $A = (a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^* = A^T$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵，若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数，求 a_{11}

题目： 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^T$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵，若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，求 a_{11}

解答： 因为 $A^*=A^T$，即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

由此可知 $a_{ij}=A_{ij},\forall i,j=1,2,3$。那么

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2>0$$

又由 $A^*=A^T$, 两边取行列式并利用 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 及 $\left|\boldsymbol{A}^\top\right|=|\boldsymbol{A}|$，得 $|\mathbf{A}|^2=|\mathbf{A}|$

从而 $|A|=1$，因此 $3a_{11}^2=1$，$a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$