20220531-习题课

答案

求一阶常微分方程的通解

- 对于一般的一阶常微分方程，经常采用如下的方法来求通解：
- 1. 检查是否是全微分方程
- 2. 如果不是，则将方程写成标准形式$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
- 3. 判断方程的类型，确定求解的方法：
  - 变量可分离的方程
  - 齐次方程
  - 线性方程
  - Bernoulli方程
- 4. 如果方程不是上述类型中的任何一种，则改变方程的形式为：
  - $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$

求一阶常微分方程的通解

- 5. 判断该方程的类型
- 6. 实在没有办法的时候，才采用观察法找出积分因子，将方程凑成全微分方程
- 7. 在实际求解的时候，不要机械地套用这个过程，要具体问题具体分析
- 8.求通解的时候，我们可以不用考虑特殊情况：例如分母为0的情形

1.1 求定解问题$xy(y-xy')=x+yy', y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$的解

- 改写方程$xy(y-xy')=x+yy'$为：
- $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^2-x}{(x^2+1)y}$
- 再次变化
- $\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{x^2+1}=\frac{-xy^{-1}}{x^2+1}$
- 可知这是一个$Bernoulli$方程
- 两边同乘以y，得
- $y\frac{dy}{dx}-\frac{xy^2}{x^2+1}=\frac{-x}{x^2+1}$

1.1 求定解问题$xy(y-xy')=x+yy', y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$的解

- 即$\frac{dy^2}{dx}-\frac{2xy^2}{x^2+1}=\frac{-2x}{x^2+1}$
- $y^2=\left(\int\left(-\frac{2x}{x^2+1}e^{\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}\right)dx+c\right)e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}$
- $=\left(\frac{1}{x^2+1}+c\right)(x^2+1)$
- $=c(x^2+1)+1$
- 代入初始条件$y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$c=-\frac{1}{2}$
- $y=\sqrt{1-\frac{1}{2}(x^2+1)}=\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$

1.1 求定解问题$xy(y-xy')=x+yy', y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$的解

- 对于这个方程，我们还可以用另外一种方法
- 将方程改写为：
- $(x^2+1)y\,\frac{dy}{dx}=x(y^2-1)$
- 即
- $\frac{y}{(y^2-1)}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{(x^2+1)}$
- 这是一个变量可分离的方程：
- $\frac{dy^2}{y^2-1}=\frac{2x}{x^2+1}dx$

1.1求定解问题$xy(y-xy')=x+yy', y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$的解

- 两边求积分，得:
- $\int \frac{dy^2}{y^2-1} = \int \frac{2x}{x^2+1} dx$
- $\ln|y^2-1| = \ln(x^2+1)+c_1$
- $|y^2-1| = e^{c_1 \ln(x^2+1)}$
- 化简，去绝对值
- $y^2 = c(x^2+1)+1$
- 后面的做法和第一种方法相同

1.2 求$dx+2xydy=y^3dy$的通解

- 改写方程为$\frac{dx}{dy}=y^3-2xy$
  - (注意：在常微分方程中，x,y的地位是同等的，可以把y当成x的函数，也可以把x当成y的函数，视具体问题而定)
- $\frac{dx}{dy}+2yx=y^3$
- 这是一个一阶线性方程
- $x=\left(\int y^3 e^{\int 2ydy}dy+c\right)e^{-\int 2ydy}$
- $=\left(\frac{1}{2}(y^2-1)e^{y^2}+c\right)e^{-y^2}$
- $=\frac{1}{2}(y^2-1)+ce^{-y^2}$

1.3 求$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$的通解

- 改写方程为$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+2xy-y^2}{y^2+2xy-x^2}$
- 这是一个齐次方程
- 令$y=ux$，则
- $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}$
- $x\frac{du}{dx}=-\frac{(u+1)\left(u^2+1\right)}{(u+1)^2-2}$
- $\frac{(u+1)^2-2}{(u+1)(u^2+1)}du=-\frac{1}{x}dx$

1.3 求$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$的通解

- $\int \frac{(u+1)^2-2}{(u+1)(u^2+1)}du=-\int \frac{1}{x}dx$
- 采用有理函数积分法
- $\int \frac{(u+1)^2-2}{(u+1)(u^2+1)}du=\int \frac{2u}{u^2+1}du-\int \frac{du}{u+1}=\ln \frac{u^2+1}{|u+1|}+c_1$
- $\ln \frac{u^2+1}{|u+1|}=-\ln|x|+c_2$
- 去对数，去绝对值
- $\frac{u^2+1}{|u+1|}=e^{-\ln|x|+c_2}$
- $\frac{u^2+1}{u+1}=\frac{c}{x}$

1.3 求$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$的通解

- 将$y=ux$代入，化简
- $\frac{y^2+x^2}{y+x}=c$
- 也可以写成
- $y^2+x^2=c(y+x)$

1.4 求$y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$的通解

- 将方程变形为$\frac{dx}{dy}=\frac{2y\ln y+y-x}{y}$，即
- $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=2\ln y+1$
- 这是一个线性方程
- $x=\left(\int(2\ln y+1)e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+c\right)e^{-\int\frac{1}{y}dy}$
- $=(y^2\ln y+c)\frac{1}{y}$
- $=y\ln y+\frac{c}{y}$
- 也可以写成
- $xy-y^2\ln y=c$

1.4 求$y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$的通解

- 也可以将方程变形为$-ydx + (2y\ln y + y - x)dy = 0$
- $P(x,y) = -y, Q(x,y) = 2y\ln y + y - x$
- $\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$
- 所以这是一个全微分方程
- $U(x,y) = \int_0^x (-1)dt + \int_1^y (2t\ln t + t - x)dt$
- $= y^2 \ln y - xy$
- 所以此方程的通解为
- $y^2 \ln y - xy = c$

1.5 求$(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2\ (a>0)$的通解

- 将方程改写为$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{(x+y)^2}$
- 这是一个形如$\frac{dy}{dx}=f(ax+by)$的方程
- 令$u=x+y$，则
- $\frac{du}{dx}=\frac{d(x+y)}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$
- $=1+\frac{a^2}{(x+y)^2}=\frac{u^2+a^2}{u^2}$
- 这是一个变量可分离的方程
- $\frac{u^2}{u^2+a^2}du=dx$

1.5 求$(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2\ (a>0)$的通解

- 两边求积分，得
- $u-a\arctan\frac{u}{a}=x+c$
- 所以方程的通解为
- $y-a\arctan\frac{x+y}{a}=c$

1.6 求$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$的通解

- 方程两边同乘以$2y$，得
- $\frac{dy^2}{dx}=\frac{y^2}{x}+\tan\frac{y^2}{x}$
- 令$z=y^2$,则
- $\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+\tan\frac{z}{x}$
- 这是一个齐次方程
- 令$z=ux$，则
- $u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u$

1.6 求$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$的通解

- 化简，得
- $\cot u\,du=\frac{1}{x}dx$
- 两边求积分
- $\ln|\sin u|=\ln|x|+c_1$
- 化简，去绝对值
- $|\sin u|=e^{\ln|x|+c_1}$
- $\sin u=cx$
- 所以
- $y^2=x\arcsin(cx)$

1.7 求方程$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$的通解

- 1. 求方程$y'' + 3y' + 2y = 0$的通解
- 特征方程$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$的根为
- $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$
- 所以其通解为
- $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$
- 2.求方程$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$的解
- 采用常数变易法
- 令$y^* = c_1(x) e^{-2x} + c_2(x) e^{-x}$

1.7 求方程$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$的通解

- 令$y^* = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-x}$
- $(y^*)' = c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{-x} - 2c_1(x)e^{-2x} - c_2(x)e^{-x}$
- 令$c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{-x} = 0 \cdots\cdots(*)$
- $(y^*)'' = -2c_1'(x)e^{-2x} - c_2'(x)e^{-x} + 4c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-x}$
- $y'' + 3y' + 2y$
- $= -2c_1'(x)e^{-2x} - c_2'(x)e^{-x} + 4c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-x}$
- $+3(-2c_1(x)e^{-2x} - c_2(x)e^{-x}) + 2(c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-x})$
- $= -2c_1'(x)e^{-2x} - c_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x+1} \cdots\cdots(**)$

1.7 求方程$y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$的通解

- 联立方程(*)和(**)
- $\begin{cases} c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)e^{-x}=0 \\ -2c_1'(x)e^{-2x}-c_2'(x)e^{-x}=\frac{1}{e^x+1} \end{cases}$
- 求解此方程组，得
- $c_1'(x)=-\frac{e^{2x}}{e^x+1}, c_2'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$
- $c_1(x)=-\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=-\int\frac{e^x}{e^x+1}de^x$
- $=-\int\frac{e^x+1-1}{e^x+1}de^x=-e^x+ln(e^x+1)+c_1$
- $c_2(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=ln(e^x+1)+c_2$

1.7 求方程$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$的通解

- 所以方程$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$的通解为
- $y = (-e^x + ln(e^x + 1) + c_1)e^{-2x} + (ln(e^x + 1) + c_2)e^{-x}$

1.8 求方程$x^2y'' - 2xy' + 2y = xlnx$的通解

- 这是一个$Euler$方程
- 令$x = e^t$，则$t = lnx$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$
- 则方程$x^2y'' - 2xy' + 2y = xlnx$转变为
- $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = te^t$

1.8 求方程$x^2y'' - 2xy' + 2y = xlnx$的通解

- 1)求齐次线性方程$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$的通解
- 特征方程$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$的根为
- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
- 所以其通解为
- $y = c_1e^t + c_2e^{2t}$
- 2)用待定系数法求$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = te^t$的一个特解
- 令$y^* = t(at + b)e^t$

1.8 求方程$x^2y'' - 2xy' + 2y = xlnx$的通解

- $(y^*)' = (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t$
- $(y^*)'' = 2ae^t + 2(2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t$
- $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y$
- $= \left(2a + 2(2at + b) + (at^2 + bt)\right)e^t$
- $-3\left((2at + b) + (at^2 + bt)\right)e^t + 2(at^2 + bt)e^t$
- $= (-2at + 2a - b)e^t = te^t$
- $a = -\frac{1}{2}, b = -1$
- 所以 $y^* = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t$

1.8 求方程$x^2y'' - 2xy' + 2y = xlnx$的通解

- 方程$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = te^t$的通解为
- $y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t$
- 所以方程$x^2y'' - 2xy' + 2y = xlnx$的通解为
- $y = \left(c_1 - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right)x + c_2x^2$

1.9 求方程$xyy''+x(y')^2=3yy'$的通解

- 因为$xyy''+x(y')^2=x(yy''+(y')^2)=x(yy')'$
- 所以方程$xyy''+x(y')^2=3yy'$变为
- $x\dfrac{d(yy')}{dx}=3yy'$
- 即
- $\dfrac{d(yy')}{yy'}=\dfrac{3}{x}dx$
- 两边求积分得
- $\ln|yy'|=3\ln|x|+c_1$
- 去对数，去绝对值得
- $yy'=c_1x^3$

1.9 求方程$xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$的通解

- 求解$y\frac{dy}{dx} = c_1x^3$得
- $\frac{1}{2}y^2 = \frac{c_1}{4}x^4 + c_2$
- 所以方程的通解为
- $y^2 = c_1x^4 + c_2$

2.设$f(x)$一阶导数连续，并且满足$2\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2-1+f(x)$，求$f(x)$

- 这是一个积分方程，需要把它变成一个常微分方程的初值问题，再进行求解
- 由这个积分方程可知，$f(0)=1$
- $2\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = 2(x+1)\int_0^x f'(t)dt - 2\int_0^x tf'(t)dt$
- 方程$2\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2-1+f(x)$两边求导，得
- $2(x+1)f'(x) + 2\int_0^x f'(t)dt - 2xf'(x) = 2x + f'(x)$
- $f'(x) + 2f(x) = 2(x+1)$
- 这是一个线性方程

2.设$f(x)$一阶导数连续，并且满足$2\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2-1+f(x)$，求$f(x)$

- $f(x) = \left(\int 2(x+1)e^{\int 2dx}dx + c\right)e^{-\int 2dx}$
- $= x + \frac{1}{2} + ce^{-2x}$
- 由$f(0)$ =1知 $c = \frac{1}{2}$
- 所以
- $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$

3.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，$f(r)$具有二阶连续导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$，求$f(r)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{df}{dr}\frac{x}{r}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{d^2 f}{dr^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{df}{dr}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{d^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{df}{dr}\frac{r^2-x^2}{r^3}$
- 同理可得
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{d^2 f}{dr^2}\left(\frac{y}{r}\right)^2+\frac{df}{dr}\frac{r^2-y^2}{r^3}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{d^2 f}{dr^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{df}{dr}\frac{r^2-z^2}{r^3}$
- 所以
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}=0$

3.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，$f(r)$具有二阶连续导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$，求$f(r)$

- 求解常微分方程$\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}=0$
- 令$p=\frac{df}{dr}$，则方程变为
- $\frac{dp}{dr}+\frac{2}{r}p=0$
- 解得
- $p=\frac{c_1}{r^2}$
- 继续求解，得
- $f(r)=\frac{c_1}{r}+c_2$（此处，$-c_1$仍记为c_1）

4.设一元函数$f(x)$二阶导数连续，且$f(0)=f'(0)=1$，试确定$f(x)$，使得在全平面上曲线积分$\int_L \left(5e^{2x}-f(x)\right)ydx+(f'(x)-siny)dy$与路径无关，并求$\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} \left(5e^{2x}-f(x)\right)ydx+(f'(x)-siny)dy$

- 令$P(x,y)=\left(5e^{2x}-f(x)\right)y, Q(x,y)=f'(x)-siny$
- 要使曲线积分与路径无关，必须满足$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则
- $f''(x)=5e^{2x}-f(x)$
- 得定解问题
- $\begin{cases} f''(x)+f(x)=5e^{2x} \\ f(0)=f'(0)=1 \end{cases}$
- 用待定系数法，求得
- $f(x)=e^{2x}-sinx$

4.设一元函数$f(x)$二阶导数连续，且$f(0)=f'(0)=1$，试确定$f(x)$，使得在全平面上曲线积分$\int_L\left(5e^{2x}-f(x)\right)ydx+(f'(x)-siny)dy$与路径无关，并求$\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)}\left(5e^{2x}-f(x)\right)ydx+(f'(x)-siny)dy$

- $\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)}\left(5e^{2x}-f(x)\right)ydx+(f'(x)-siny)dy$
- $=\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)}(5e^{2x}-e^{2x}+sinx)ydx+(2e^{2x}-cosx-siny)dy$
- $=\int_0^{\pi}0dx+\int_0^{\pi}(2e^{2\pi}-cos\pi-siny)dy$
- $=(2e^{2\pi}+1)\pi-2$

5.设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，其和函数$S(x)$满足方程$y''-2xy'-4y=0$以及$S(0)=0, S'(0)=1$，求$S(x)$

- $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$
- $S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}$
- $=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$
- 代入方程$y''-2xy'-4y=0$得
- $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n-4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- $=\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n\big)x^n+(2a_2-4a_0)=0$
- 则
- $(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n=0\ (n\geq 1)$
- $2a_2-4a_0=0$

5.设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-\infty, +\infty)$上收敛，其和函数$S(x)$满足方程$y'' - 2xy' - 4y = 0$以及$S(0) = 0, S'(0) = 1$，求$S(x)$

- 化简
- $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \ (n \geq 1)$
- $a_2 = 2a_0$
- 由于$S(0) = 0, S'(0) = 1$，所以
- $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$
- 当$n = 2k \ (k \geq 1)$时
- $a_{2k+2} = \frac{2}{2k+1} a_{2k} = \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{2}{2k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} a_2 = 0$
- 当$n = 2k - 1 \ (k \geq 1)$时
- $a_{2k+1} = \frac{2}{2k} a_{2k-1} = \frac{2}{2k} \cdot \frac{2}{2(k-1)} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2} a_1 = \frac{1}{k!}$

5.设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，其和函数$S(x)$满足方程$y''-2xy'-4y=0$以及$S(0)=0, S'(0)=1$，求$S(x)$

- $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- $=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$
- $=x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^k}{k!}$
- $=xe^{x^2}$