6. 证明：如果 n 阶矩阵满足 (A-aE)(A-bE)=O (其中$a \neq b$)，则A可对角化。

证明：

由$(A-aE)(A-bE)$=0，有|A $-aE$| =0或|A-bE| =0，故A的特征值为a或b.

（1）若a是A的特征值，b 不是A的特征值，则|A $-aE$| =0，则A-bE是可逆阵，于是A $-aE$ =0，即A=aE，所以A可对角化。

（2）若b是A的特征值，a不是A的特征值，同理知A可对角化。

（3）若a, b 都是A的特征值，则由矩阵秩的不等式有：

$R(A-aE)+R(A-bE) \leq n,$ （原因是 **(A-aE)(A-bE)=O** ）

$R(A-aE)+R(A-bE)=R(A-aE)+R(bE-A) \geq R(A-aE+bE-A)=$ $R[(b-a)E]=n\ (a \neq b)$, 所以$R(A-aE)+R(A-bE)=n$，即

$$[n-R(A-aE)]+[n-R(A-bE)]=n,$$

所以方程$(A-aE)x=0$与$(A-bE)x=0$的基础解系中向量个数之和为 n，则A有n 个线性无关的特征向量，故A可对角化。**综上可知A总可对角化。**

7. 证明: 方阵 A 与 B 相似的充要条件是, 存在方阵 P, Q, 使 $A = PQ, B = QP$, 且 P, Q 中至少有一个是可逆矩阵.

解答:

先证必要性: 若 A 与 B 相似, 则存在可逆阵 P 使得

$$P^{-1}AP = B.$$

令 $Q = P^{-1}A$, 则有 $A = PQ$ 且 $B = QP$, 其中 P 是可逆的.

再证充分性: 若有 $A = PQ, B = QP$(不妨设 P 可逆), 则

$$P^{-1}A = Q \qquad BP^{-1} = Q$$

从而有 $P^{-1}AP = B$, 即 A 与 B 相似.

8. 判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

能否对角化；若能，求出相应的可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解答:

先求特征值，由 $|\lambda E-A|=0$ 解得,$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

再求特征向量，对于 $\lambda_1=1$，解方程组 $(1\cdot E-A)X=0$，得到基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};$$

同理对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，得到基础解系为

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

容易验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 A 可以对角化

P 可以取以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列的矩阵，即

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

9. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值有重根，问 A 能否相似对角化？

解答：
矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 10 + a)$$

若 $\lambda = 2$ 是重根，则当 $\lambda = 2$ 时，$\lambda^2 - 8\lambda + 10 + a = 0$，解得 $a = 2$
进一步得到 A 的三个特征值为 2,2,6. 对于重根 $\lambda = 2$，由于

$$R(2E - A) = R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 1$$

故 A 可以相似对角化

另一方面, 若 $\lambda = 2$ 不是重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 10 + a$ 是完全平方, 则

$$8^2 - 4(10 + a) = 0,$$

解得 $a = 6$, 进一步可知矩阵的特征值为 2,4,4.
对于重根 $\lambda = 4$, 由于

$$R(4E - A) = R\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

这说明二重根 $\lambda = 4$ 只有一个线性无关的特征向量, 故 A 不能相似对角化.

10. 设 A 是 3 阶矩阵,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性无关的列向量, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 6\alpha_3, A\alpha_3 = 0.$

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 判断 A 能否相似对角化;

(3) 求秩 $R(A + E)$.

解答:

(1) 由 $A\alpha_3 = 0 = 0\alpha_3$ 可知,$\lambda = 0$ 是 A 的特征值,α_3 是其对应的特征向量. 另一方面,

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 P 可逆, 令

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

从而有 $P^{-1}AP=B$, 即 A 与 B 相似.

$$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-2)^2,$$

得 B 的特征值为 2,2,0, 从而 A 的特征值也为 2,2,0.
对于矩阵 B, 令 $(2E-B)x=0$, 可以得到 B 关于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量为 $\beta=(1,1,-2)^T$.
由 $B\beta=\lambda\beta$ 得,$A(P\beta)=\lambda(P\beta)$, 从而 A 关于 $\lambda=2$ 的特征向量为

$$P\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$$

综上所述,A 的特征值为 2,2,0;$\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$(对应特征值 2) 和 α_3 (对应特征值 0) 是其两个线性无关的特征向量.

(2) 矩阵 A 对于二重特征根 $\lambda=2$, 只有一个线性无关的特征向量, 故 A 不能相似对角化.

(3) 由于 $A\sim B$, 则 $A+E\sim B+E$. 所以有,

$$R(A+E)=R(B+E)=R\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&4&0\\2&-6&1\end{pmatrix}=3$$

注：相似矩阵关于同一特征值的几何重数相等

11. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解答:

$$|\lambda E-A|=(\lambda-7)^2(\lambda+2),$$

得到矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=7, \lambda_3=-2.$
对 $\lambda=7$, 令 $(7E-A)x=0$, 得其对应的特征向量
$\alpha_1=(-1,2,0)^T, \alpha_2=(-1,0,1)^T$. 同理对 $\lambda=-2$, 得到特征向量
$\alpha_3=(2,1,2)^T$.
对 α_1,α_2 进行 Schmidt 正交化, 有

$$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,0)^T$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{5}(-4,-2,5)^T$$

最后对 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ 单位化，得

$$P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

这里 P 是正交矩阵，且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

12. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$, 有正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵, 若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$, 求 a, Q.

解答:

由于 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$ 是 Q 的第一列, 故 $x=(1,2,1)^T$ 是 A 的特征向量, 设对应的特征值为 λ_1, 则

$$Ax=\lambda_1 x$$

解得 $\lambda_1=2, a=-1$. 故,

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

由此可求得 A 的其他两个特征值为 5,-4 和对应的特征向量 $\alpha_2=(1,-1,1)^T, \alpha_3=(1,0,-1)^T$.

注意到 A 是实对称矩阵，其对应不同特征值的特征向量相互正交，则只需要将 α_2, α_3 单位化即可，得 $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$，则

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，判断 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似.

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}$，判断 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似.

解

对于 $\boldsymbol{B}$，由特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\1&\lambda-3&-1\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-3)^2=0$$

可得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 3,3,0. 当 $\lambda=3$ 时，

$$r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\-2&0&2\end{bmatrix}=1$$

所以齐次线性方程组有 2 个线性无关的解，$\boldsymbol{B}$ 可对角化.

B 的特征值是 3,3,0

又因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 3,3,0，所以 $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$ 相似

理由：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可对角化，且都与 $\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 相似.

证明n阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似。

证明

设A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$.

$|\lambda E-A| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-\mathrm{n})\lambda^{n-1}$.所以A的n个特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_n=0$.又因为A是一个实对称矩阵，所以A可以相似对角化，且A相似于 $\begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $|\lambda E-B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-n \end{vmatrix}$ $=(\lambda-\mathrm{n})\lambda^{n-1}$, 所以$B$的n个特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_n=0$. 又0E-B= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mathrm{n} \end{bmatrix}$.所以R(0E-B)=1,故B的n-1重特征值0有n-1个线性无关的特征向量，且B 相似于 $\begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，所以A与B相似。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，秩 $r(\boldsymbol{A})=2$, 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是多少?

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，秩 $r(\boldsymbol{A})=2$, 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是多少?

解

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\neq 0$，那么

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$$

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 有 $\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即 $(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 或 0.
因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，且 $\boldsymbol{\Lambda}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值所构成，根据秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})$，有

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,1,0.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{AB}-6\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量.

(2) 求 $\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{AB}-6\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量.

（2）求 $\boldsymbol{A}$.

解（1）由 $r(\boldsymbol{A})=2$, 知 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

记 $\boldsymbol{B}=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$，由 $\boldsymbol{AB}-6\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，得

$$\boldsymbol{A}\left[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right]=6\left[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right]$$

即 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda=6$ 的特征向量（注意 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 必线性相关）

因实对称矩阵中不同特征值的特征向量相互正交，设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2\ \ x_3)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量.

有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\gamma_1=0$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\gamma}_2=0$，即

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\qquad = 0\\ 2x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

解得基础解系为 $[-1,1,1]^T$。

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $6,6,0,k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,1,1)^{\mathrm{T}}$ （其中 $k_1,k_2,$ 不全为 0）是 $\lambda=6$ 的所有特征向量 $k_3(-1,1,1)^{\mathrm{T}},(k_3\neq 0)$ 是 $\lambda=0$ 的所有特征向量.

（2）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma_1},\boldsymbol{\gamma_2},\boldsymbol{\alpha})$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{bmatrix}$

那么

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\\
&=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&3&-3\\1&-1&2\\-1&1&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

习题6. 设向量$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\cdots,\boldsymbol{a_n}),\boldsymbol{\alpha_i}\neq \mathbf{0}.$

(1)证明：若A=$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$，则存在常数$\boldsymbol{m}$，使得$\boldsymbol{A^k}=\boldsymbol{mA}.$

(2)求可逆阵P，使得$\boldsymbol{P^{-1}AP}$为对角阵。

证明

(1) $A^k=(\alpha^T\alpha)(\alpha^T\alpha)\cdots(\alpha^T\alpha)=\alpha^T(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)\cdots(\alpha\alpha^T)\ \alpha$

$=(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{k-1}\alpha^T\alpha=mA,$其中$m=(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{k-1}.$

$(2)|\lambda E-A|=\lambda^n-\sum_{i=1}^n a_i^2\lambda^{n-1}$,因此$A$的特征值为$\sum_{i=1}^n a_i^2$,0($n$-1重).

$\beta_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T$为属于特征值$\sum_{i=1}^n\alpha_i^2$的特征向量.

$\beta_2=(-\alpha_2,\ \alpha_1,\cdots,0)^T,\cdots,\ \beta_n=(-\alpha_n,\ \alpha_1,\cdots,0)^T$是$A$的属于特征值0的特征向量。

令$P=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，则$|P|\neq 0$，且使$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n\alpha_i^2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}.$