5 向量组的线性相关性

§4 线性方程组解的结构

(1) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

或 $$A_{m\times n}x = 0 \qquad (*_0)$$

1. 解的性质

性质1：若 ξ_1,ξ_2 是 $(*_0)$ 的解，

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 仍然是 $(*_0)$ 的解。

$\because A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0$

性质2：若 ξ_1 是 $(*_0)$ 的解，

则 $x=\lambda\xi_1$ 仍是 $(*_0)$ 的解。

那么 $x=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$ 呢？

2. 基础解系

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的解，满足

（1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

（2）$Ax=0$ 的任一解都可以由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示。

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。

定理7： 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，如果 $R(A)=r<n$，

则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系存在，

且每个基础解系中含有 $n-r$ 个解向量。

证明分三步: 1. 以某种方法找 $n-r$个解。

2. 证明这 $n-r$ 个解线性无关。

3. 证明任一解都可由这 $n-r$个解线性表示。

证明:

$$A \xrightarrow{\text{化为行最简形}} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = B$$

与B对应的方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + b_{11} x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r} x_n = 0 \\
x_2 + b_{21} x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r} x_n = 0 \\
\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
x_r + b_{r1} x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r} x_n = 0
\end{cases}
\qquad (B)
$$

（1）令 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 依次为 $c_1,\cdots,c_{n-r}$ 得方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

（2）向量组

$$\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (C)$$

线性无关。

综合(1) (2)得, 向量组(C)是齐次线性方程组的基础解系.

记

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 所得。

$Ax = 0$ 的通解是 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

例4：求下列齐次方程组的通解。

$$
(1)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}
$$

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为

(2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \dfrac{1}{5}x_4 = 0 \\ x_3 + \dfrac{3}{10}x_4 = 0 \end{cases}$$ x_2, x_4是自由变量。

法1：先求通解，再求基础解系 令 $x_2 = c_1, x_4 = c_2$

则 $\begin{cases} x_1 = -2c_1 + \dfrac{1}{5}c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \dfrac{-3}{10}c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{-3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$

法2： 先求基础解系，再求通解。

在(2)中令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix}$

则通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$

例5：求下列齐次方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad 令 \ x_3 = 1 \quad 得 \ \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解 $x = k\xi$

(2) 非齐次性线性方程组

$$A_{m\times n}x=b \qquad (*)$$

对应的齐次线性方程组

$$A_{m\times n}x=0 \qquad (*_0)$$

性质1：η_1, η_2 是 $Ax=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是

对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解。

性质2：η 是 $Ax=b$ 的解，ξ 是对应的齐次线性方程组

$Ax=0$ 的解，则 $\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解。

若 $A_{m\times n}x=b$ (*) 有解，则其通解为 $x=\eta^{*}+\xi$

其中 η^{*} 是 (*) 的一个特解，

ξ 是 (*) 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解。

分析: 1. 证明 $x=\eta^{*}+\xi$ 是解；

2. 任一解都可以写成 $x=\eta^{*}+\xi$ 的形式。

例6：求解非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

解：

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/7 & 13/7 & 13/7 \\ 0 & 1 & -2/7 & -4/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{7}x_3 + \dfrac{13}{7}x_4 = \dfrac{13}{7} \\ x_2 - \dfrac{2}{7}x_3 - \dfrac{4}{7}x_4 = -\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

令 $x_3 = x_4 = 0$, 得 $\eta^* = \begin{pmatrix} 13/7 \\ -4/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -3/7 \\ 2/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -13/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以原方程组的通解是 $x = \eta^* + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$

例: 设 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + (u+3)x_3 = v+1 \end{cases}$

问u, v =?方程组(1)有唯一解;(2)无解;(3)有无穷多解.

解: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & u+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & u-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & u-2 \end{vmatrix} = -u+2$$

当$u \neq 2$时有唯一解;

当$u=2$, $v\neq 3$时, 无解;

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\2&1&3&3\\3&2&5&v+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&v-3\end{pmatrix}$$

当$u=2$, $v=3$时,有无穷多解;

$$(A,b)\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x_1+x_3=2\\x_2+x_3=-1\end{cases}\qquad \text{通解}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$