习题1 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$的乘积$AB$.

习题1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 的乘积 AB.

解

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2 & -1\\ 9 & 9 & 11\end{pmatrix}$$

习题2 **求矩阵** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ **与** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$ **的乘积$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.**

习题2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$ 的乘积$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

习题3： 已知$f(x)=2-3x+x^2$ 且$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，求$f(A)$

习题3：已知$f(x)=2-3x+x^2$ 且$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，求$f(A)$

解：$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}$

$$f(A)=2E-3A+A^2$$

$$=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

习题4 $f(x)=x^n+2x^2+1$，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

习题4 $f(x)=x^n+2x^2+1$，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

$$f(A)=A^n+2A^2+E$$

因为 $A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

用数学归纳法，设 $A^{n-1}=\begin{pmatrix}1 & n-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

则 $A^n=A^{n-1}A=\begin{pmatrix}1 & n-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$f(A)=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & n+4\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

习题5. 已知$\alpha=(1\quad 2\quad 3)^T, \beta=(1\quad \frac{1}{2}\quad 0)^T\quad A=\alpha\beta^T$，则$A^4=$____

习题5. 已知$\alpha = (1 \quad 2 \quad 3)^T, \beta = (1 \quad \frac{1}{2} \quad 0)^T \quad A = \alpha\beta^T$, 则$A^4 =$ ____

分析：因为矩阵乘法有结合律，注意到$\beta^{\mathrm{T}}\alpha = 2$是一个数，于是

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2\alpha\beta^T = 2A$$

归纳一下：

$$A^4 = A^2A^2 = (2A)(2A) = 4A^2 = 8A$$

$$A^4 = 2^3A = 8\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\2 & 1 & 0\\1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 4 & 0\\16 & 8 & 0\\8 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

习题**6.** 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$，求与**A**可交换的所有矩阵。

习题6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求与A可交换的所有矩阵。

解：设所求矩阵为 $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,

由 $AX=XA$,

得 $\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}$

$\therefore c=0, a=d$

$\therefore X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, 其中$a$，$b$为实数

习题7. 求解关于X 矩阵方程：

$$2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3X + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = O$$

习题7. 求解关于X 矩阵方程：

$$2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 3X + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = O$$

$$3X = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$