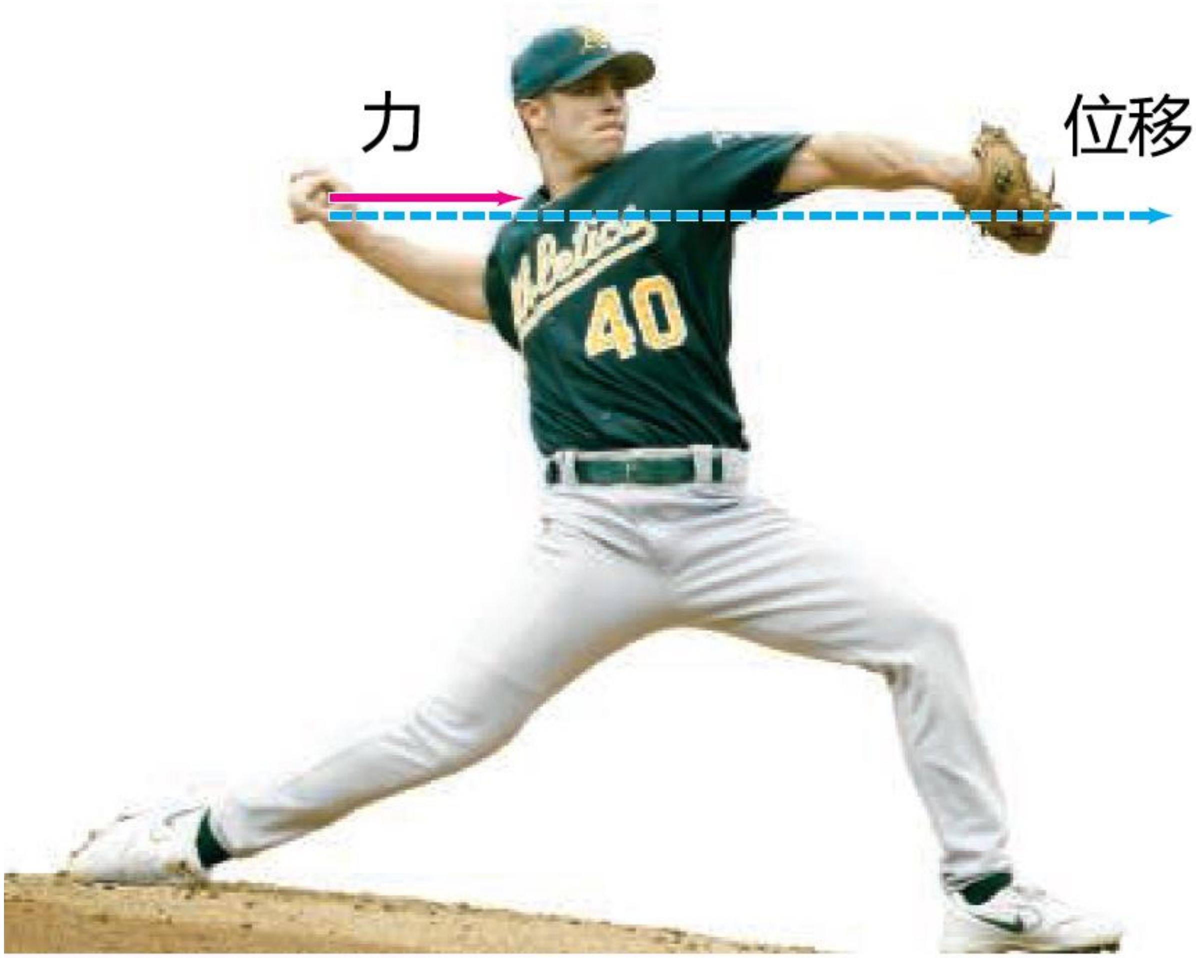
功：力在空间上的累积效应

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

功

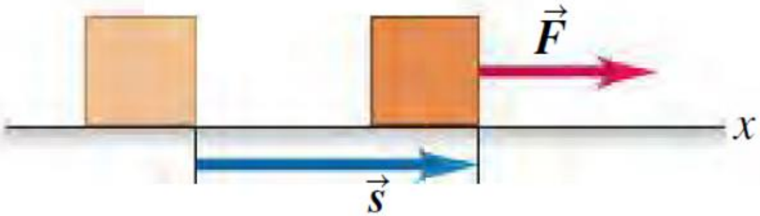
做功导致了物体什么的变化？



物体最后所获得的动能

几种情况下的做功

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = FS$$

恒定的力和移动方向相同

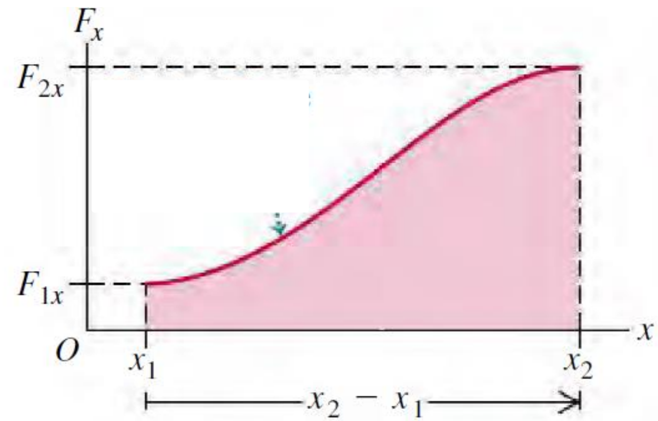
单位

$$1 \text{ joule} = (1 \text{ newton})(1 \text{ meter})$$

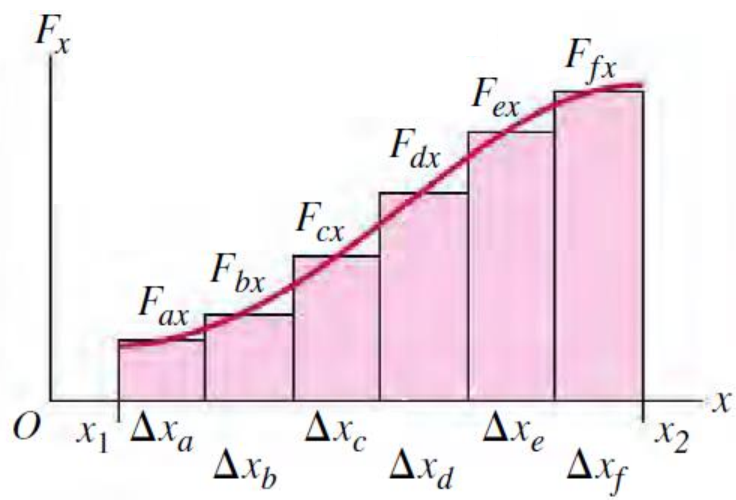
$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

变化的力和恒定一致方向做功

沿直线运动，但力是变化的



不同的位置，力是不同的

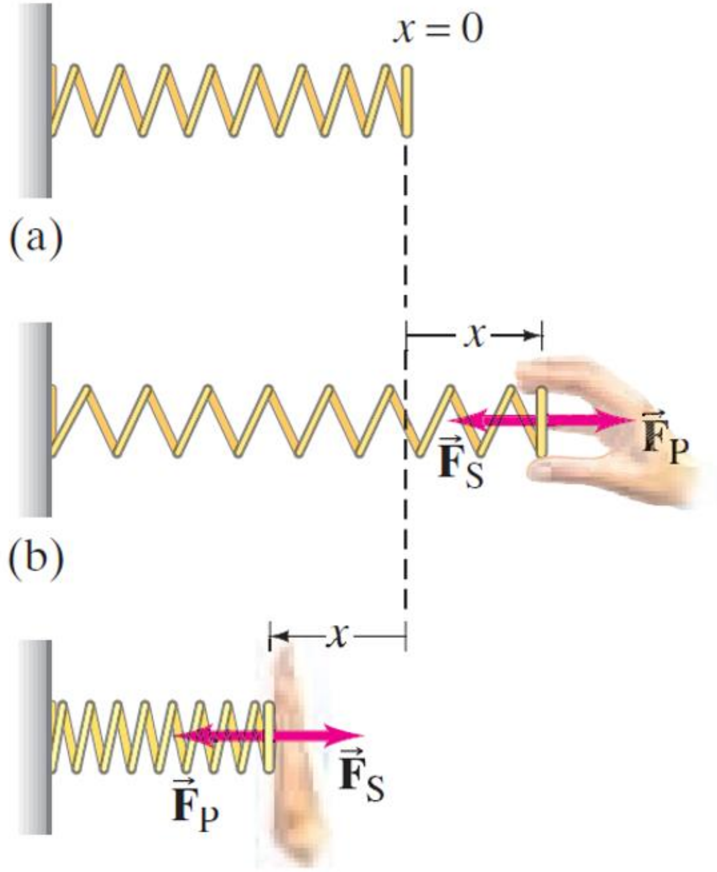


功：$A = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \cdots$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

变化的力和相同的移动方向做功

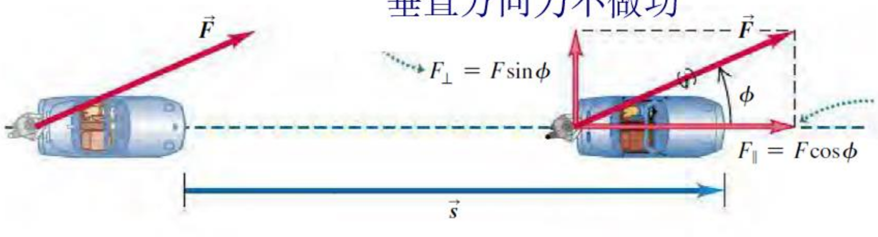
$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b f_x dx=\int_a^b(-kx)dx=\frac{1}{2}k(x_a^2-x_b^2)$$



弹簧弹性力做功

恒定的力和位移方向不同做功

垂直方向力不做功



平行方向力做功

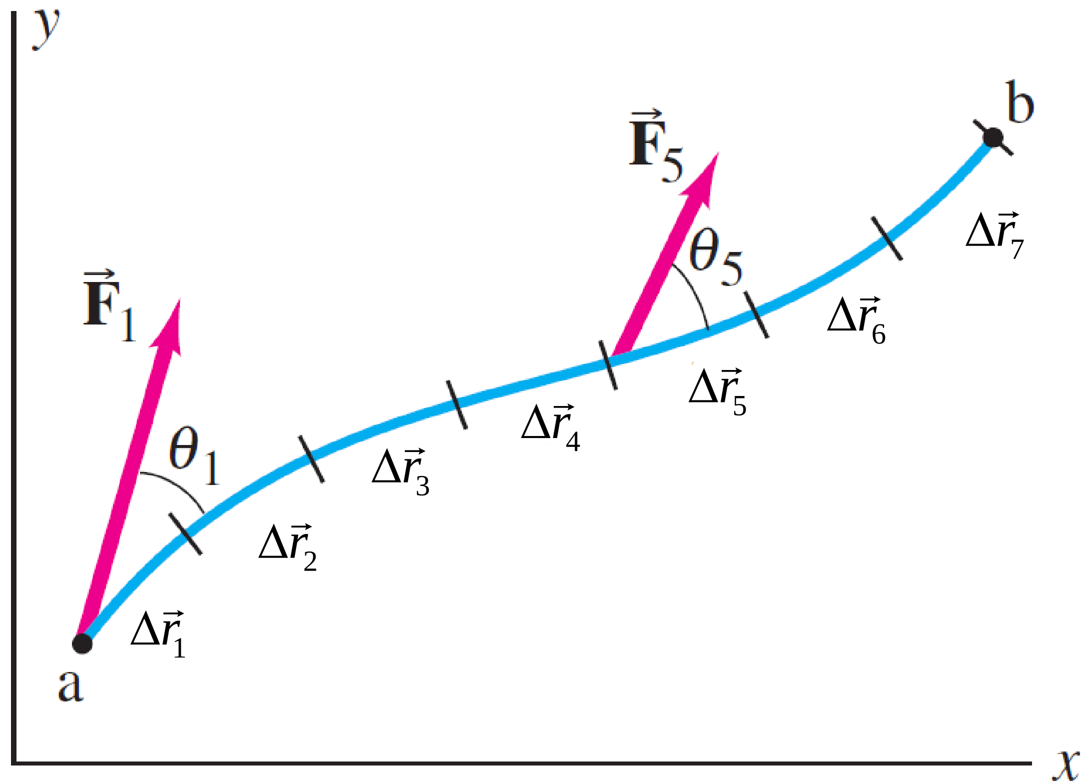
$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = FS\cos\phi$$

变化的力和变化的位移方向做功

元功:

$$dA = \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$A = \int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta |d\vec{r}|$$



直角坐标系下:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$A = \int_{x_a}^{x_b} F_x\,dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y\,dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z\,dz.$$

多种力同时做功

用手举一本书：

手的举力和重力同时对书做功

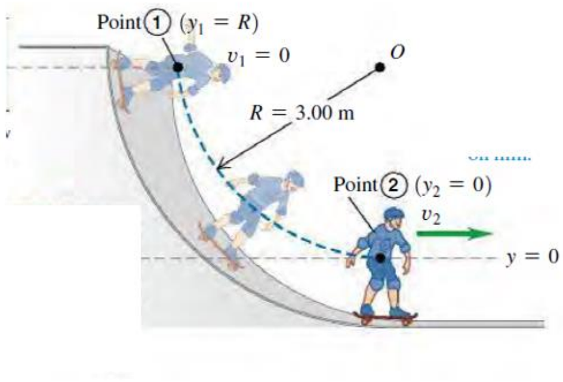
$$A=\int_a^b \vec{F}\bullet d\vec{r}$$

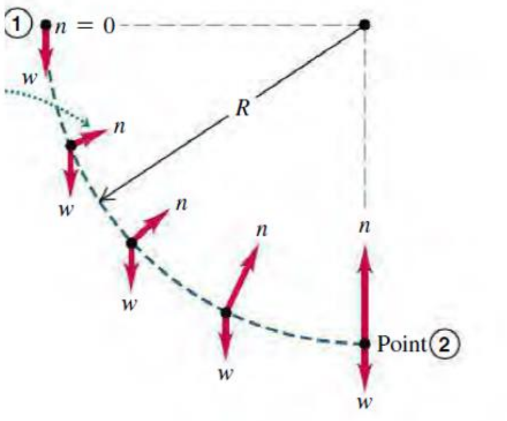
功是标量

方法一： 分别计算各个力做的功，简单标量相加

方法二：各个力做矢量求和，然后计算总的力做功

例





一个人从曲面滑下，求力做的功（假定无摩擦力）。

$$A = \int_a^b \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b F\cos\varphi |d\vec{r}|$$

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{G}$$

但是支撑力 $\vec{\mathrm{F}}_n$ 始终与 $d\vec{r}$垂直，所以只有重力做功。

动能变化定理：力做功导致质点动能变化

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

定义元功：$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}$

所以质点从a运动到b, 沿路径(l)做的总功：

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=(m\frac{d\vec{v}}{dt})\cdot(\vec{v}dt)=m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$A=\int_{a\,(l)}^b dA=\int_{a\,(l)}^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v})=d(\frac{1}{2}v^2)$$

$$=\int_a^b dE_k=E_k(b)-E_k(a)$$

所以:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=d(\frac{1}{2}mv^2)$$

宏观积累效应

$$\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a{}^2=\int_{a\,(l)}^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

定义：$\mathrm{E}_k=\frac{1}{2}mv^2$为物体运动的动能

$$E_k(b)-E_k(a)=\int_{a\,(l)}^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$dE_k=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

动能变化定理(微分形式)

质点动能的改变量等于力所做的功

动能变化定理

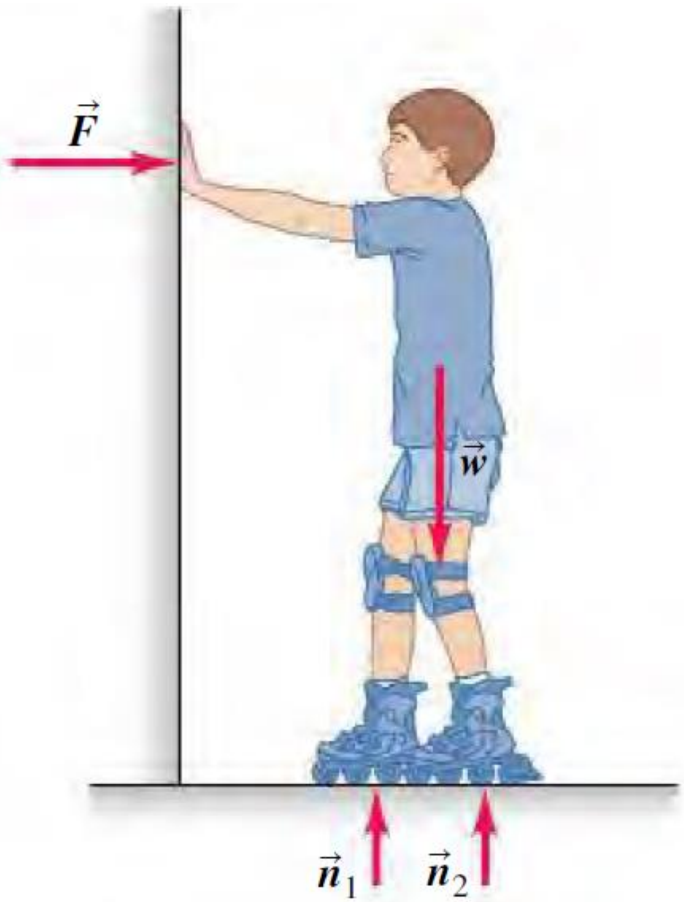
如何获知台球被击打过程中球杆所做的功？

$$E_k(b) - E_k(a) = \int_{a \atop (l)}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

问题

做功是否有正负？

问题



如果一个小孩穿滑冰鞋，以速率v撞向墙，又以速率v反弹回来。墙对小孩做功多少?

功率

同样的功需要多少时间做是由功率表示的，可以是1秒，1天或1年。

功率： 力在单位时间内做的功

$$P = \frac{dA}{dt}$$

功的单位 $N \bullet m$ 或者是 J（焦耳)

功率单位： J/s, 或者是 W(瓦)

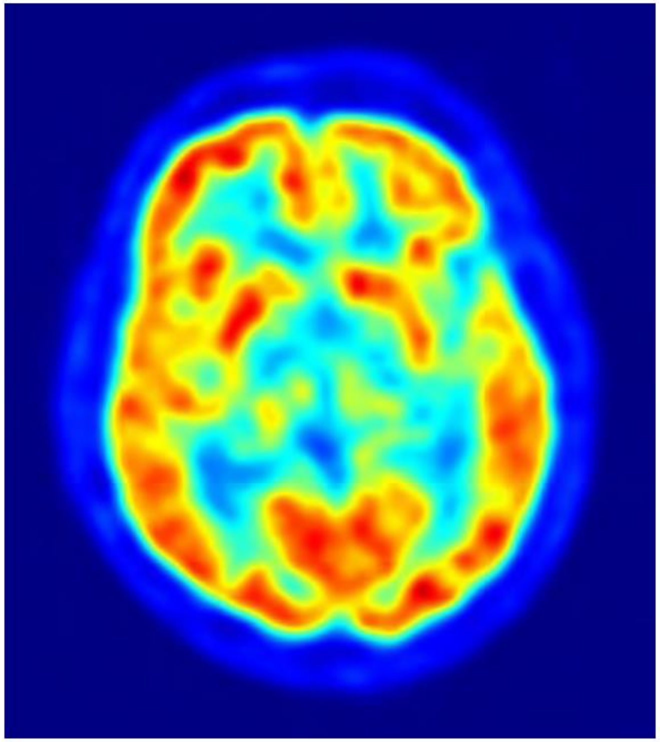
$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \bullet d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

汽车发动机功率： ~100 kW
波音777发动机功率： ~80000 kW
或80MW

传统单位： 马力
1马力=746W=0.746kW

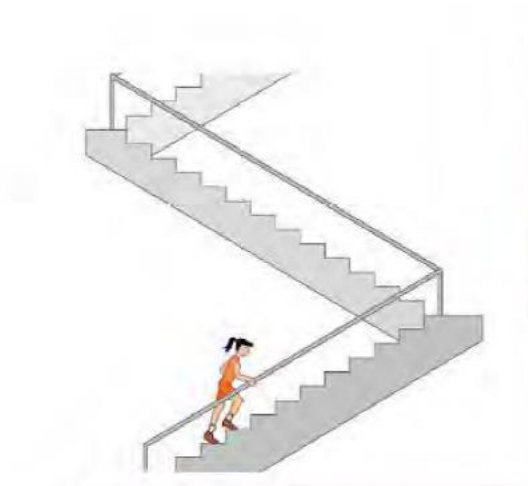
功率

- 1pW (10^{-12}W)：人类细胞
- 1μW (10^{-6}W)：石英表
- 1mW (10^{-3}W)：光驱中的激光
- 100W (10^{2}W)：人（人脑20%-40%）
- 1kW (10^{3}W)：微波炉
- 1MW (10^{6}W)：风力发电机
- 20GW (10^{10}W)：三峡电站
- 50-200TW (10^{14}W)：台风
- 170PW (10^{17}W)：地球接收的太阳辐射



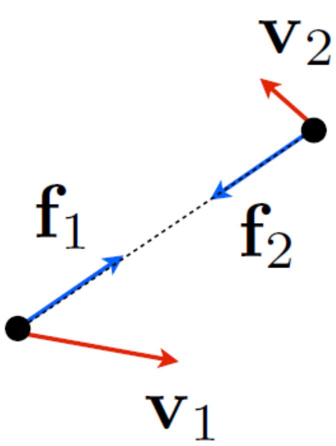
100W：人，20W-40W： 人脑

例题



体重50公斤， 12 分钟 爬到东方明珠第三个球(350米), 需要的功率是多少？

内力做功



$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$$

$$P_1 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1$$

$$P_2 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v}_2$$

一对作用力和反作用力做功，其代数和不为0，但是和参照系无关。和一对作用力施加的两个质点相对速度有关。

相对运动速度，与参照系无关

$$P = P_1 + P_2 = \mathbf{f}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_{12}$$

$$A = \int P dt$$

内力做功代数和不为0

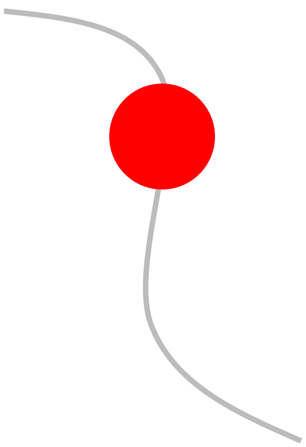
$$\mathbf{v}_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 0$$

摩擦力做功

保守力做功

重力沿任意曲线做功

$$A=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2 F_x dx+F_y dy+F_z dz$$



重力仅有z分量不为0

$$A=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{z_1}^{z_2} mgdz=-mg(z_2-z_1)$$

所以重力做功和路径无关，仅和初始处的高度差有关。这和摩擦力不同。我们称这种力为保守力。

保守力沿闭合路径做功

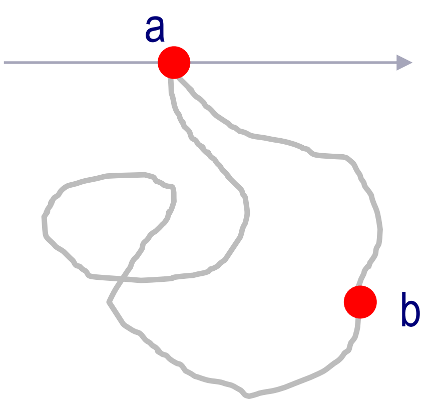
分两个阶段：

a-b

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{z_1}^{z_2} mgdz=-mg(z_2-z_1)$$

b-a

$$A'=\int_b^a \vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{z_2}^{z_1} mgdz=-mg(z_1-z_2)$$



闭合路径

$$\oint \vec{G}\cdot d\vec{r}=0$$

保守力沿任一闭合路径运动一周，所做的功为0。

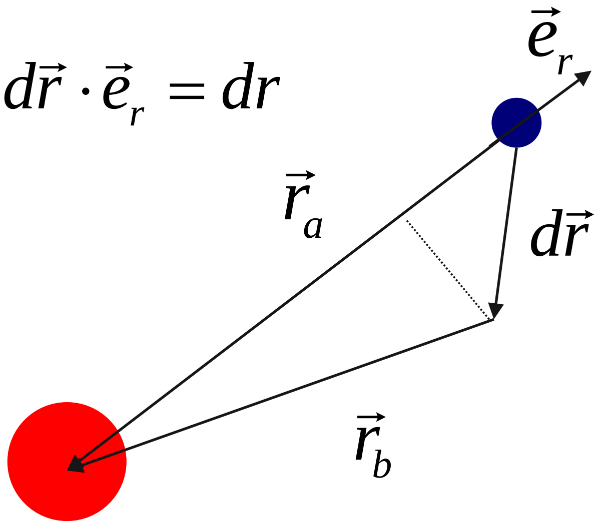
万有引力：保守力

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= -GmM \int_a^b \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= -GmM \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = -GMm\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

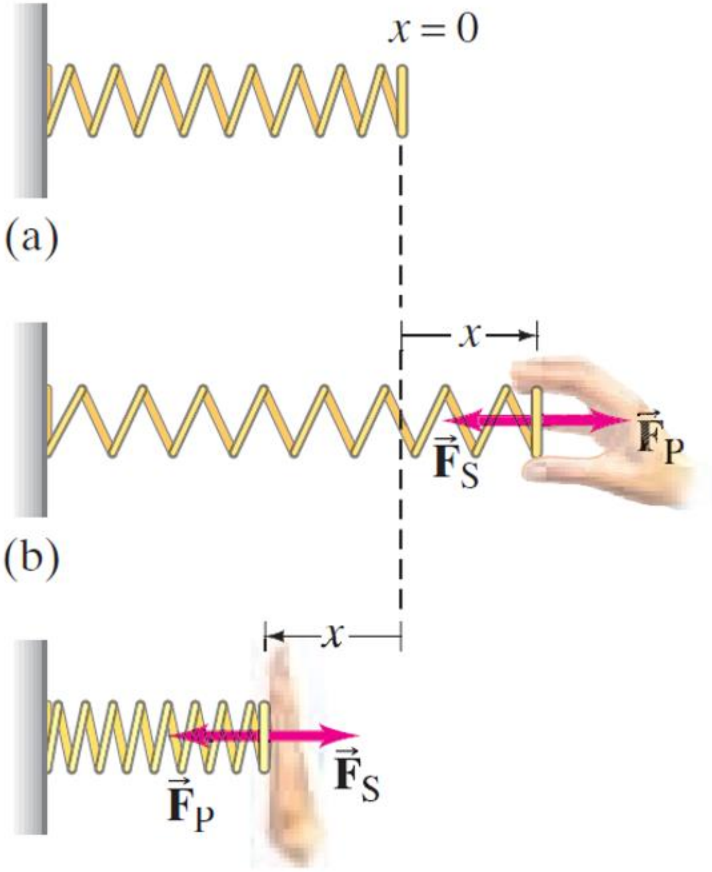
$$d\vec{r} \cdot \vec{e}_r = dr$$



只和位置r_a和r_b有关。

弹簧弹性力做功：保守力

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b f_x dx=\int_a^b (-kx)dx=\frac{1}{2}k(x_a^2-x_b^2)$$



保守力：如何判断？

Stokes 定理

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dA.$$

其中

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y)\hat{i} + (\partial_z F_x - \partial_x F_z)\hat{j} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{k}.$$

因此如果力满足条件

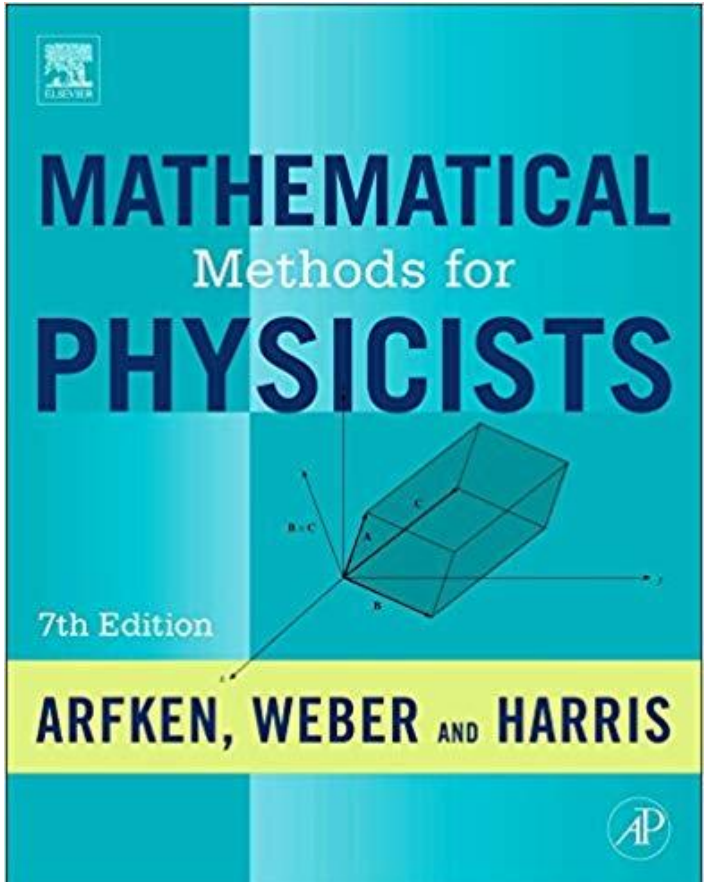
$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}$$

为保守力

$\vec{\nabla}$ 矢量微分算符，作用于标量得到一个矢量

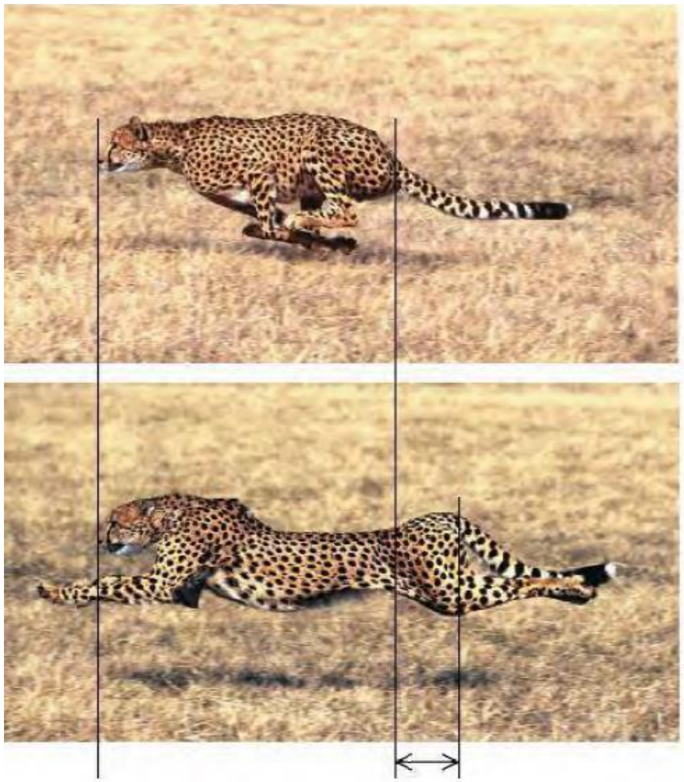
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

数学提高



1 Vector Analysis

动能和势能转换



肌腱和肌肉收缩时，动能转化为势能存储
身体扩展时，势能转换为动能

保守力场中的势能

天荒坪蓄能水电站

势能-动能相互转化

势能定义： $E_p(Q)=\int_Q^{(0)}\vec{F}_c\cdot d\vec{r}$

任意两处势能差： $E_p(a)-E_p(b)=\int_a^b\vec{F}_c\cdot d\vec{r}$

保守力场中的势能

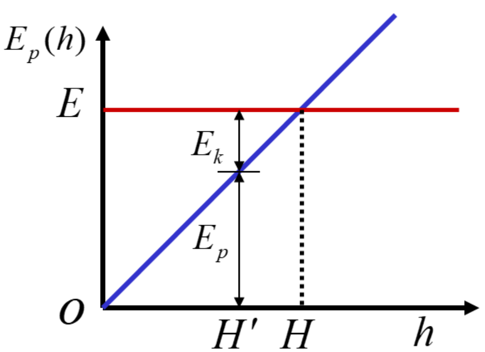
保守力做功，动能与势能互相转化，能量守恒。

动能 + 势能 =总能量

$$E_k + E_p = E$$

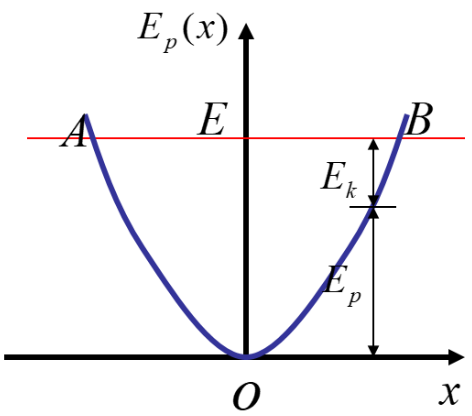
重力势能

$$E_p = mgh$$



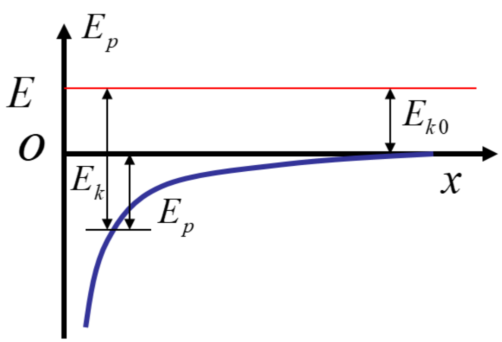
弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



万有引力势能

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

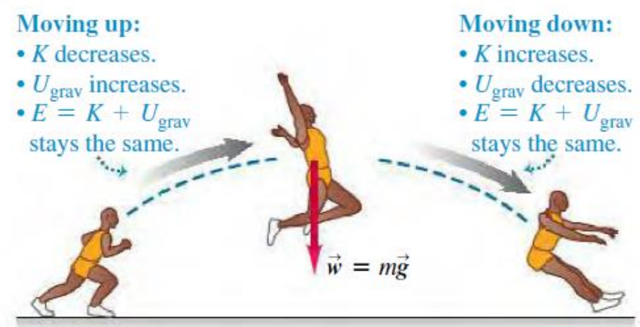


势能

势能的绝对值没有意义，只有相对值有意义。因此可以任意选取势能原点。

部分问题为简化计算，可选择适当的原点，如重力选择最低平面，弹性力选择弹簧原长处。

$$E_p = mgh$$



$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

动能和势能之和始终相同。

保守力场中的势能

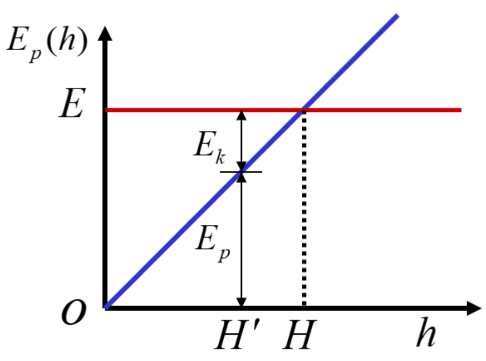
保守力做功，动能与势能互相转化，能量守恒。

动能 + 势能 =总能量

$$\mathrm{E}_k + E_p = E$$

重力势能

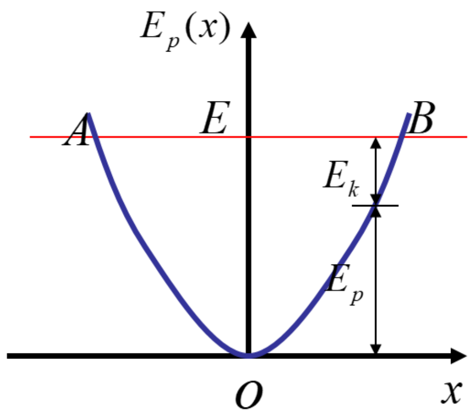
$$\mathrm{E}_p = mgh$$



势能原点在地面

弹性势能

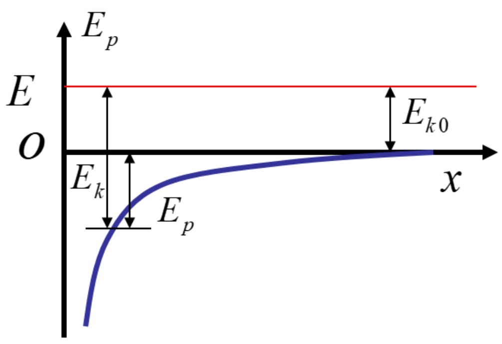
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$



势能原点在x=0处

万有引力势能

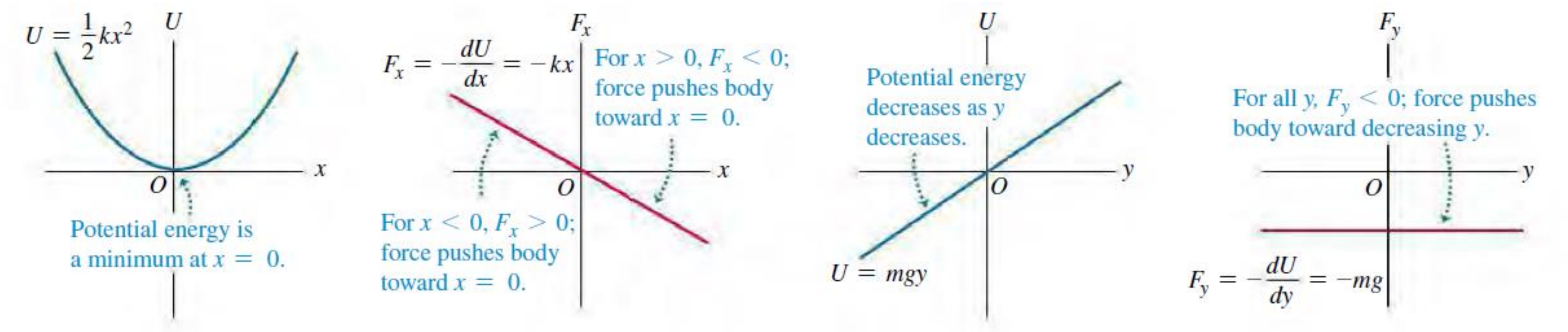
$$\mathrm{E}_p = -G\frac{Mm}{r}$$



势能原点无穷远处

势函数导出保守力的大小

已知势能的分布，能不能知道力（方向和大小）？



$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

举例：弹簧

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{d\frac{1}{2}kx^2}{dx} = -kx$$