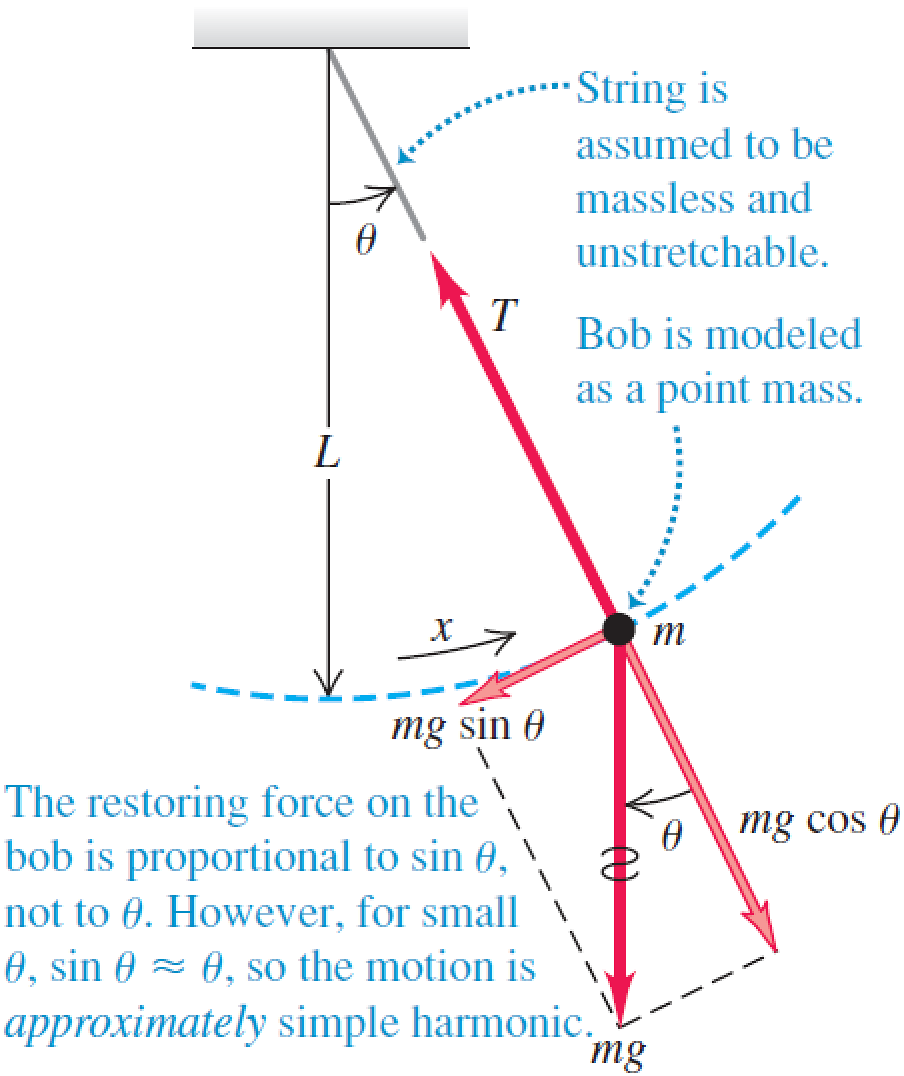
单摆



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = M_z$$

$$I = ml^2 \qquad M_z = -mgl\sin\theta$$

因此:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

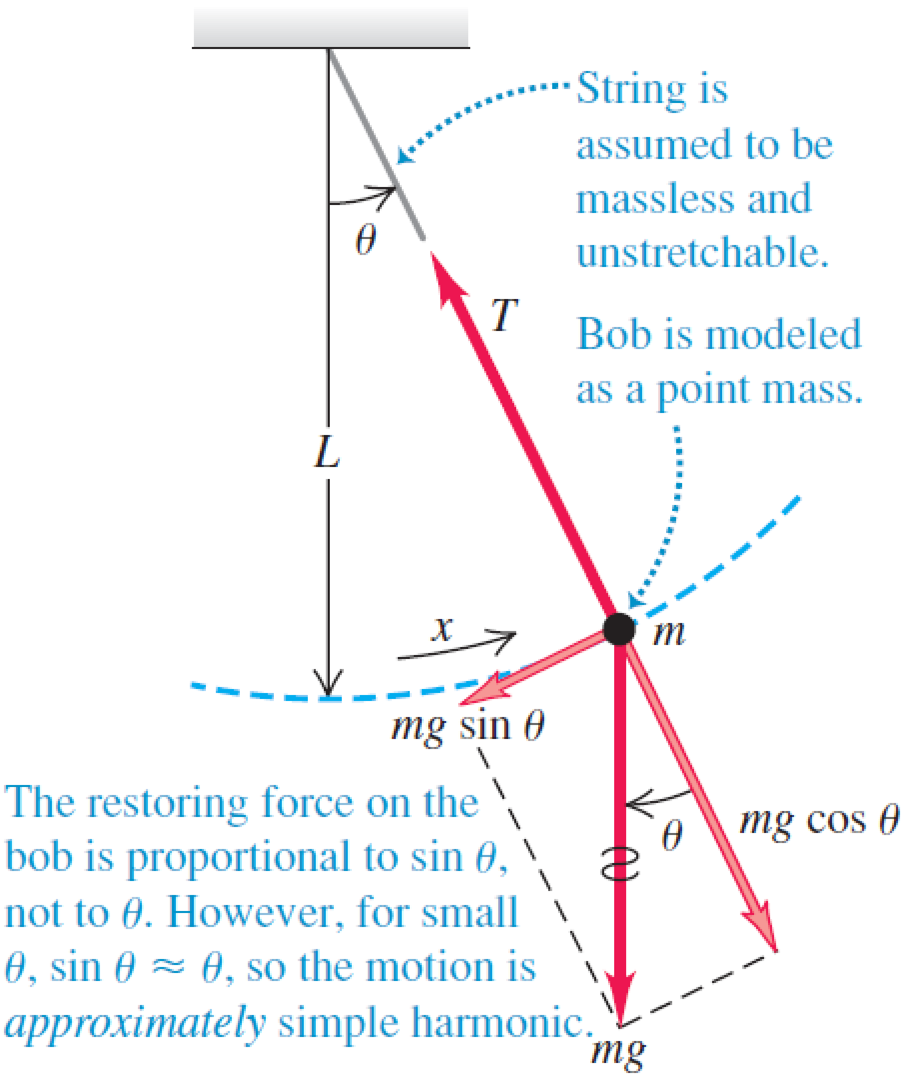
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots$$

$\sin\theta \approx \theta$,当$\theta$较小时$(\theta < 0.4rad)$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

角度θ	弧度θ	$\sin\theta$
1°	0.017453	0.017452
3°	0.052360	0.052336
5°	0.087266	0.087156
10°	0.174532	0.173648
30°	0.523599	0.5
60°	1.047198	0.866

单摆

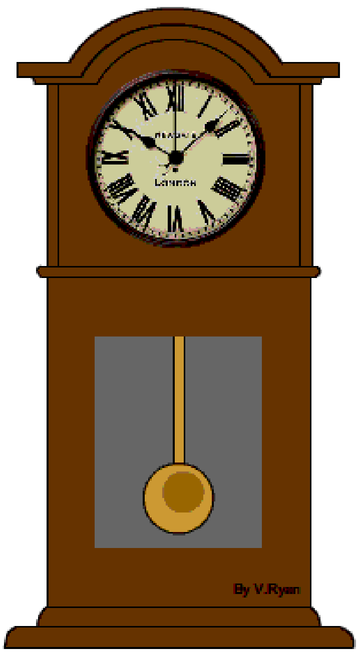


$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

小角度下，单摆简谐振动的角频率为：

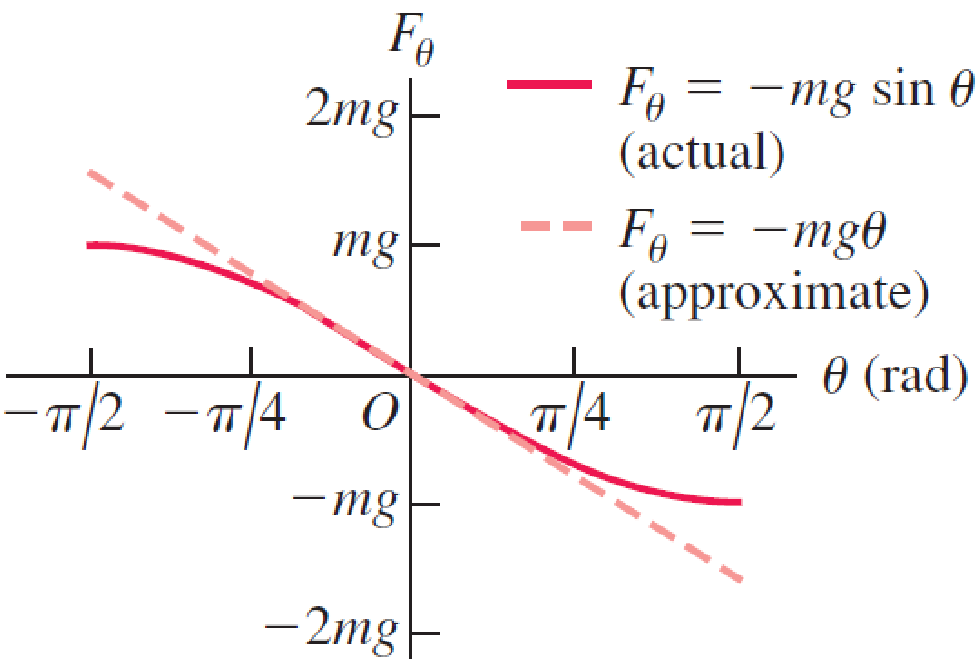
$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

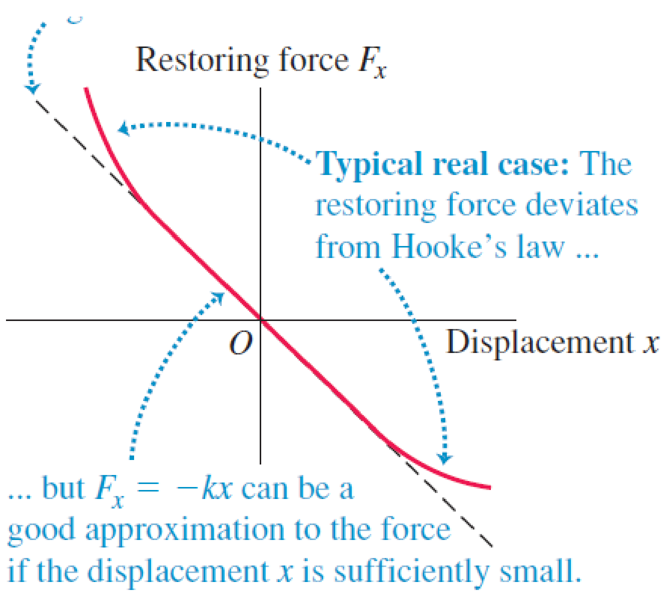
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



单摆的小角度近似

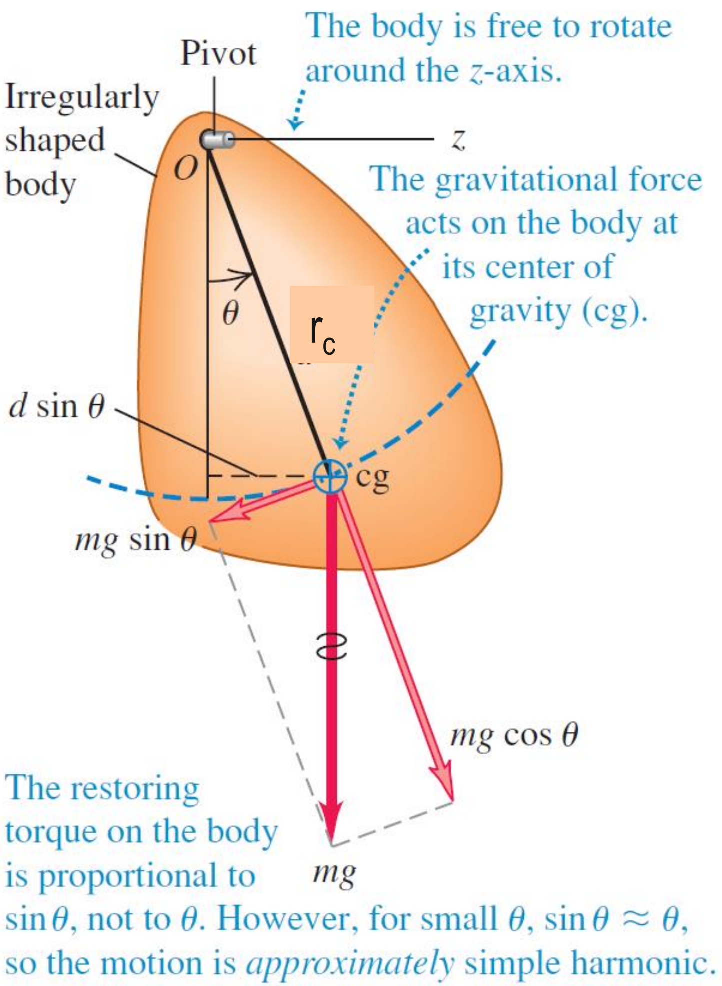
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\sin^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right)$$





弹簧的近似

复摆（真实摆)



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=M_z \qquad M_z=-mgr_c\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgr_c}{I}\theta=0$$

$$w=\sqrt{\frac{mgr_c}{I}}$$

自由谐振子的能量

$$x(t) = A\cos(w_0 t + \varphi_0)$$

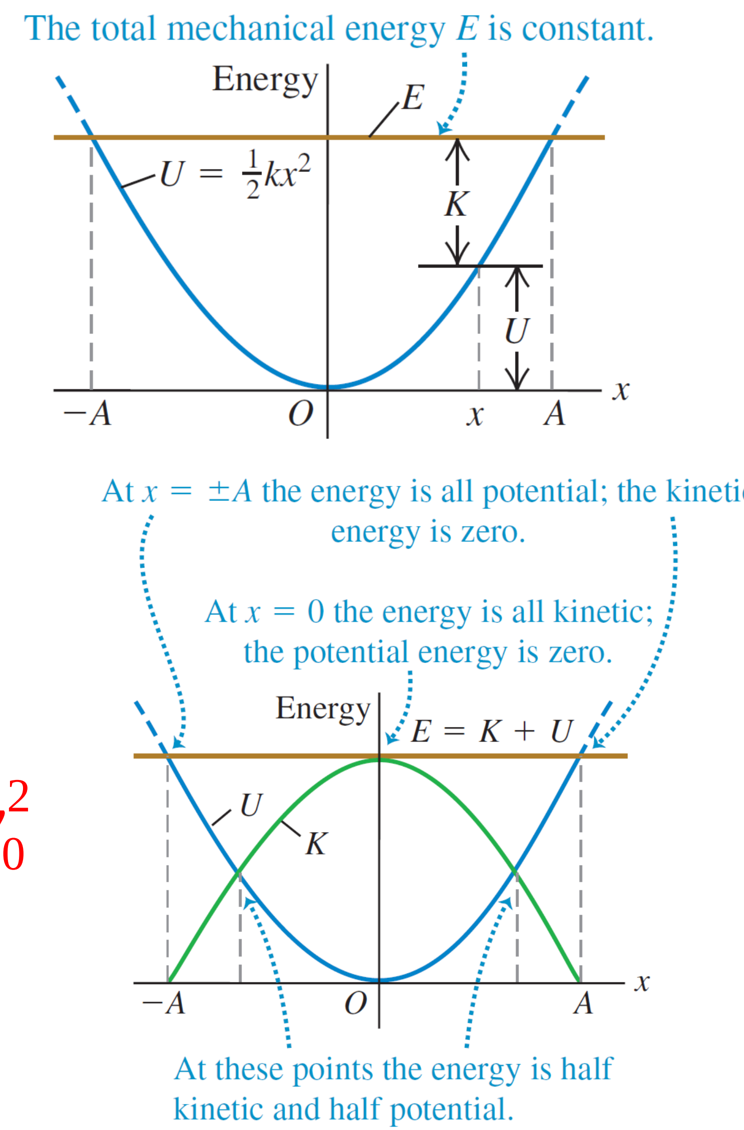
谐振子包含动能$\dfrac{1}{2}mv^2$和弹性势能:$\dfrac{1}{2}kx^2$

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{1}{2}mA^2 w_0{}^2 \sin^2(w_0 t + \varphi_0)$$

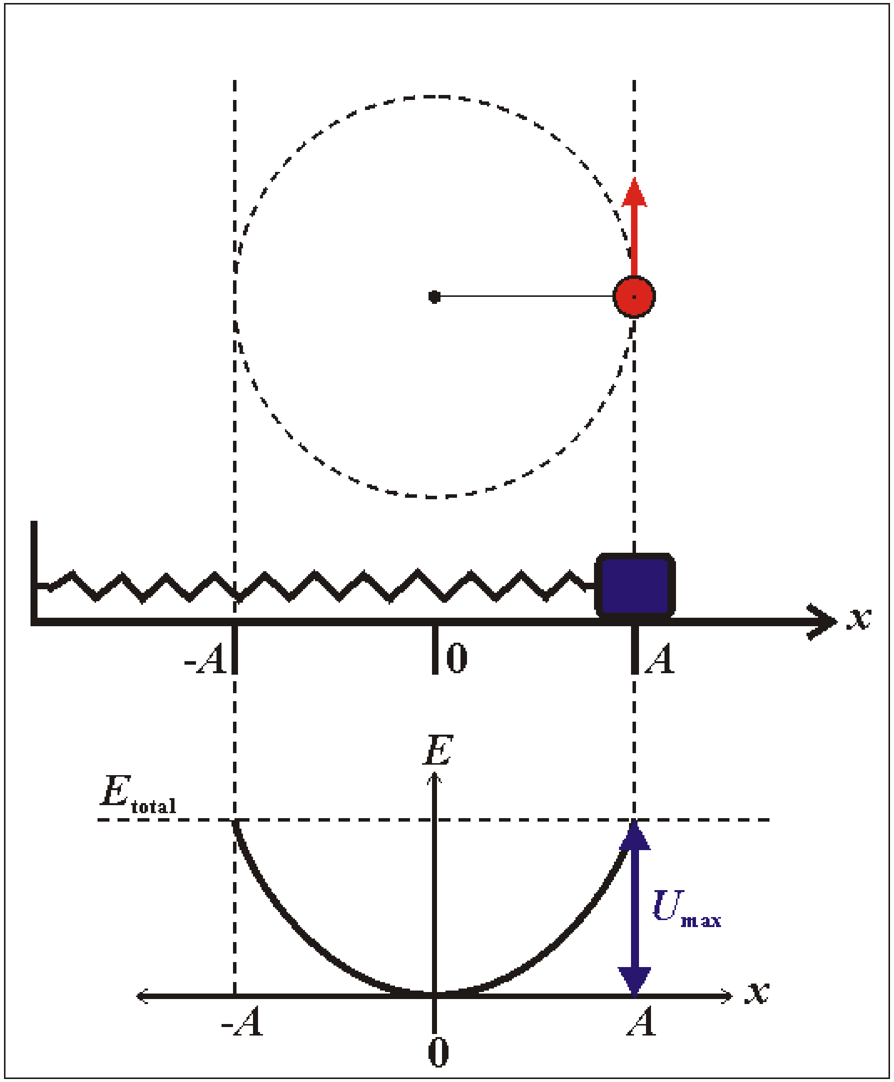
$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mw_0^2 A^2 \cos^2(w_0 t + +\varphi_0)$$

所以:$E = E_k(t) + E_p(t) = \dfrac{1}{2}mA^2 w_0^2$

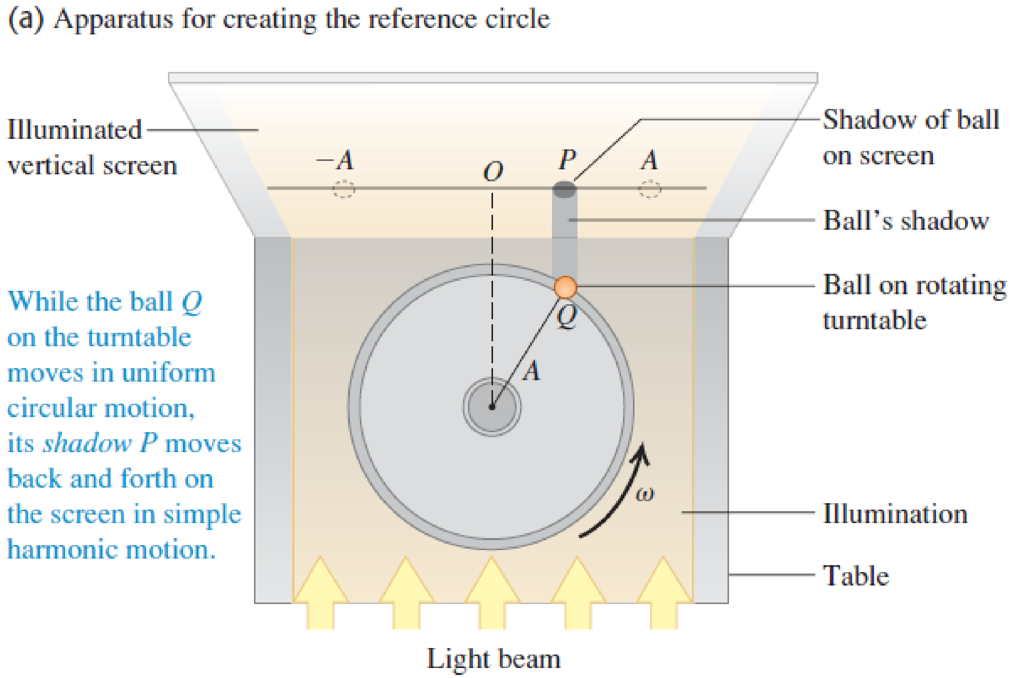
机械能守恒

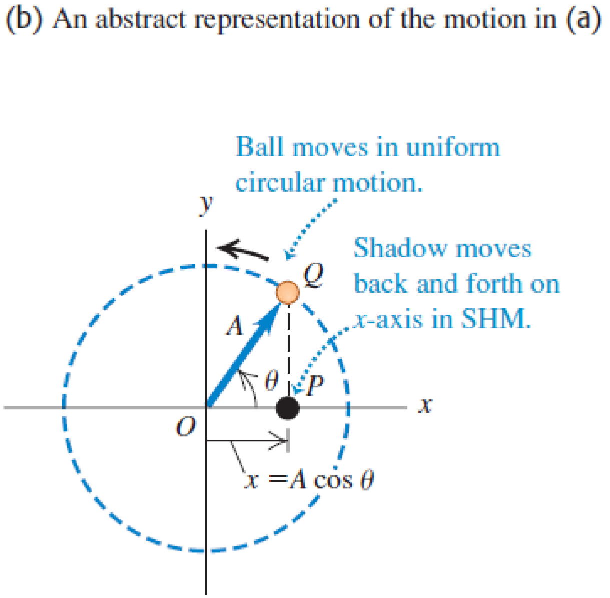


自由谐振子的能量



简谐运动和匀速圆周运动相似性





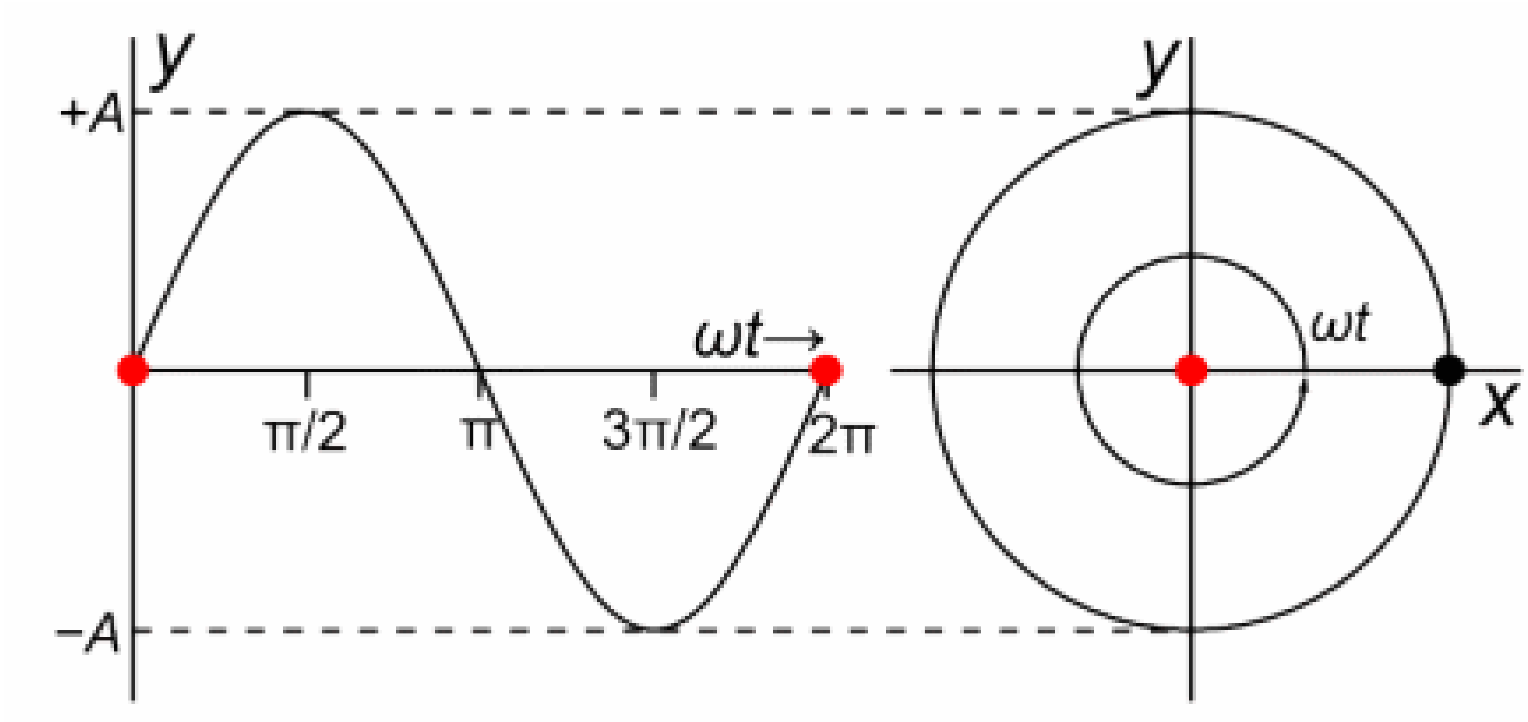
投影

$$x = A\cos\theta$$

$$\theta = w_0 t$$

$$x = A\cos(w_0 t + \varphi_0)$$

简谐运动和圆周运动相似性



振幅A=半径

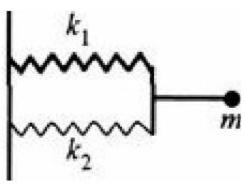
简谐运动是匀速圆周运动的投影

求本征频率的其他方法-等效劲度系数

方法1：考察力

$$\mathrm{f}=-\mathrm{k}_e x, w_0=\sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

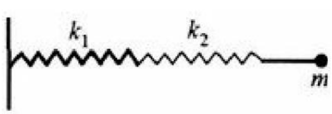
力相加 $k_e = k_1 + k_2$



弹簧被拉伸x

$$f=-k_1 x+(-k_2 x)=-(k_1+k_2)x=-k_e x$$

力相等 $k_e=\dfrac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$



（b）弹簧串联

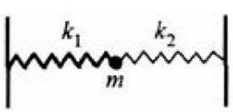
弹簧被拉伸x

$$x=x_1+x_2$$

$$f=-k_e x=-k_e(x_1+x_2)$$

$$f=-k_1 x_1=-k_2 x_2$$

$$k_e=-\frac{f}{x_1+x_2}=-\frac{f}{-\frac{f}{k_1}+(-\frac{f}{k_2})}=\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$$



（c）又一种弹簧并联

$$k_e=k_1+k_2$$

物理学中的微分方程

$$\nabla^2\psi = 0.$$

拉普拉斯方程（电磁现象，包括静电、介电、稳恒电流、静磁现象)

$$\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon_0.$$

泊松方程 (右边是源)

$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0.$$

波(亥姆赫兹)和时间独立的扩散方程（固体中的弹性波、声波、电磁波）

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

时间相关的扩散方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

含时薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

不含时薛定谔方程

线性微分方程

对时间微分的简写 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

线性微分方程：未知数及各阶导数都为1次方。

$3\ddot{x} + 7\dot{x} + x = 0$ 线性微分方程

$3\ddot{x} + 7\dot{x}^2 + x = 0$ 非线性微分方程

线性微分方程的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax$$

猜解x(t)=Ae$^{\alpha t}$,代入原方程

$$\alpha = \pm\sqrt{a}$$

线性组合的通解:

x(t)=Ae$^{\sqrt{a}t}$+Be$^{-\sqrt{a}t}$

如果$a<0$, $a=-w^2$

其中w是实数

x(t)=Ae^{iwt}+Be^{-iwt}

利用$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

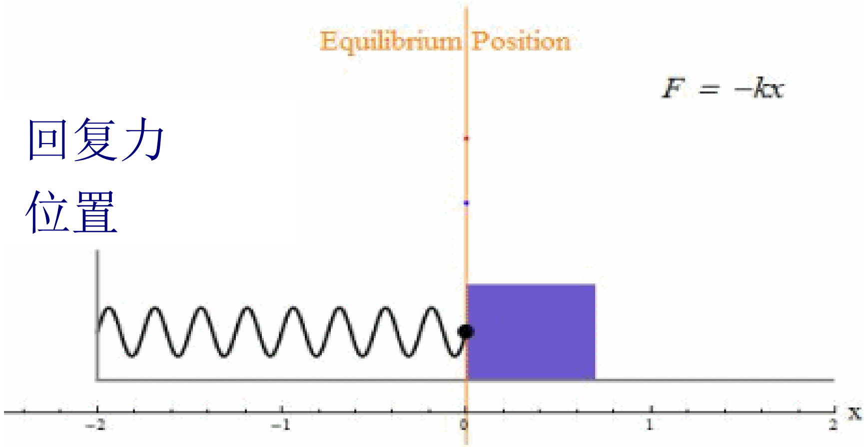
等价表示 (根据情况任选一种)

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t},$$

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t,$$

$$x(t) = E\cos(\omega t + \phi_1),$$

$$x(t) = F\sin(\omega t + \phi_2).$$



简谐振动

运动方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

引入$w_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$

$$x(t) = A\cos(w_0 t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax$$

如果$a < 0$, $a = -w^2$

其中w是实数

线性微分方程的解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax$$

猜解x(t)=Ae$^{\alpha t}$,代入原方程

$$\alpha = \pm\sqrt{a}$$

线性组合的通解:

x(t)=Ae$^{\sqrt{a}t}$+Be$^{-\sqrt{a}t}$

如果$a > 0, a \equiv \alpha^2$

x(t)=Ae$^{\alpha t+}$Be$^{-\alpha t}$

利用$e^{\theta} = \cosh\boldsymbol{\theta} + \sinh\boldsymbol{\theta}$

等价表示(根据情况任选一种)

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t},$$

$$x(t) = C\cosh\alpha t + D\sinh\alpha t,$$

$$x(t) = E\cosh(\alpha t + \phi_1),$$

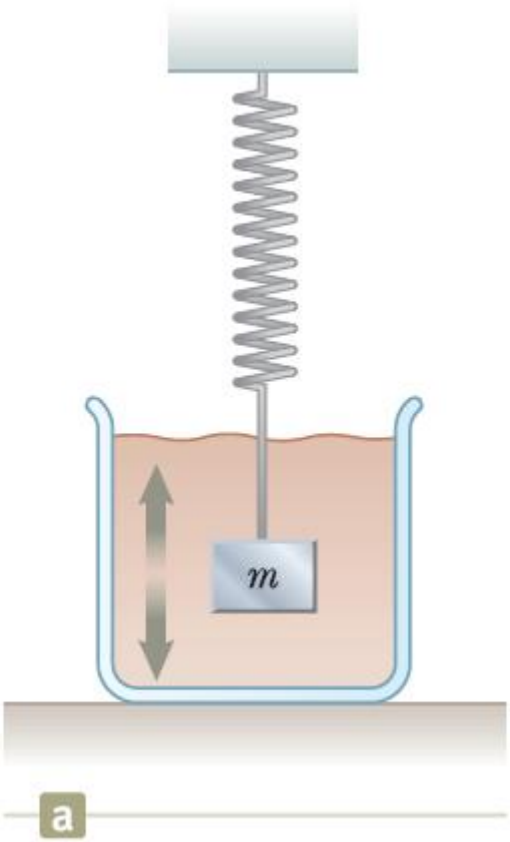
$$x(t) = F\sinh(\alpha t + \phi_2).$$

阻尼振动

上海中心 阻尼器


CH
好看
1
按Ctrl+F2停止
本地录制
00:01 / 01:12
倍速
超清

阻尼振动

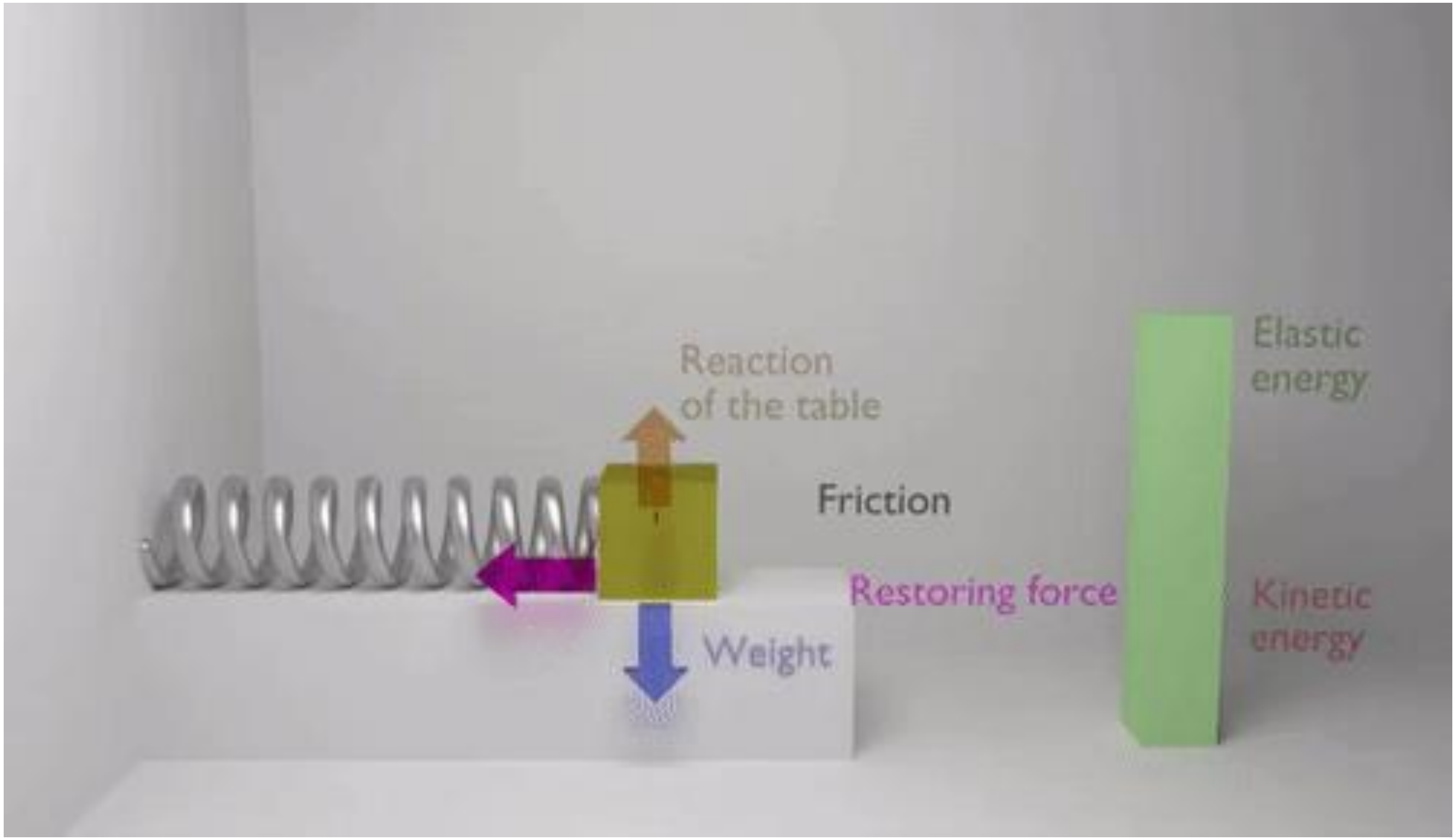


弹簧振子在液体中振荡，液体粘滞力

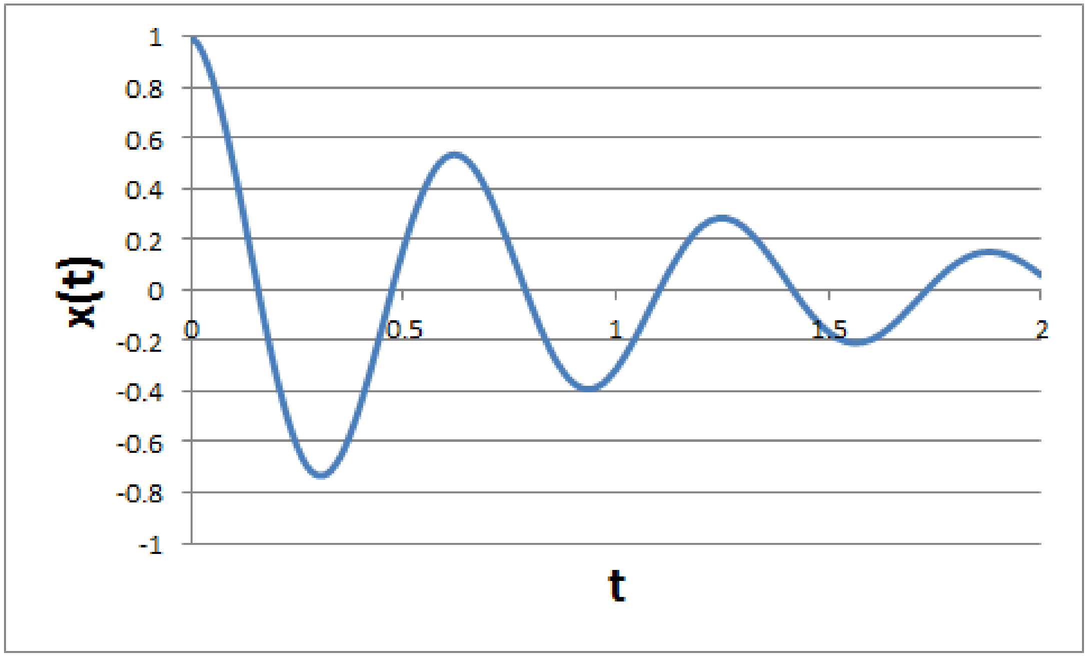
$$f = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

大小正比于速度, 方向与速度方向相反

阻尼振动


Reaction
of the table
Friction
Restoring force
Weight
Elastic
energy
Kinetic
energy

阻尼振动



质点受力: $m\frac{d^2x}{dt^2}=f_1+f_2=-kx\boxed{-\gamma\frac{dx}{dt}}$

弹性力　　阻尼力

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

无阻尼自由振动

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

阻尼振动

引入阻尼因子β

$$2\beta=\frac{\gamma}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+w_0^2x=0$$

阻尼振动

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+w_0^2x=0$$

猜想一个解$x=Ae^{\alpha t}$

需要：$\alpha^2+2\alpha\beta+w_0{}^2=0$

该方程解为：

$$\alpha=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-w_0^2}$$

原方程通解为：

$$x(t)=Ae^{a_1t}+Be^{a_2t}$$

$$=e^{-\beta t}(Ae^{t\sqrt{\beta^2-w_0^2}}+Be^{-t\sqrt{\beta^2-w_0^2}})$$

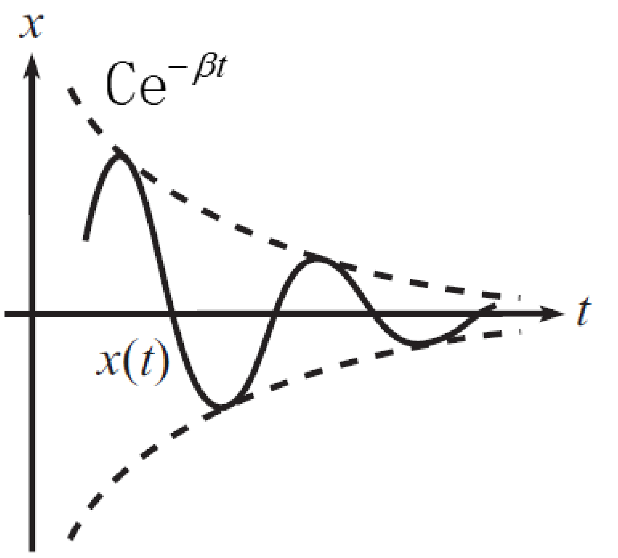
1.弱阻尼振动，$\beta^2<w_0^2$

定义$w=\sqrt{w_0^2-\beta^2}$

因此

$$x(t)=e^{-\beta t}(Ae^{iwt}+Be^{-iwt})$$

$$=\mathrm{C}e^{-\beta t}\cos(wt+\phi_0)$$



阻尼振动

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+w_0^2x=0$$

猜想一个解$x=Ae^{\alpha t}$

需要：$\alpha^2+2\alpha\beta+w_0{}^2=0$

该方程解为：

$$\alpha=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-w_0^2}$$

原方程通解为：

$$x(t)=Ae^{a_1t}+Be^{a_2t}$$

$$=e^{-\beta t}(Ae^{t\sqrt{\beta^2-w_0^2}}+Be^{-t\sqrt{\beta^2-w_0^2}})$$

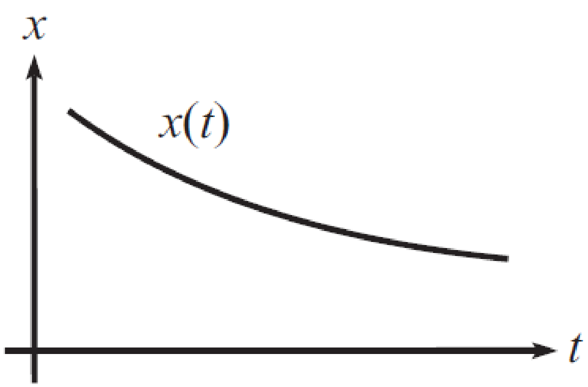
1.强阻尼振动，$\beta^2>w_0^2$

定义 $\beta_0=\sqrt{\beta^2-w_0^2}$

因此

$$x(t)=Ae^{-(\beta-\beta_0)t}+Be^{-(\beta+\beta_0)t}$$

因为$\beta>\beta_0$,两项指数均为负数，衰减



阻尼振动

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+w_0^2x=0$$

猜想一个解$x=Ae^{\alpha t}$

需要：$\alpha^2+2\alpha\beta+w_0{}^2=0$

该方程解为：

$$\alpha=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-w_0^2}$$

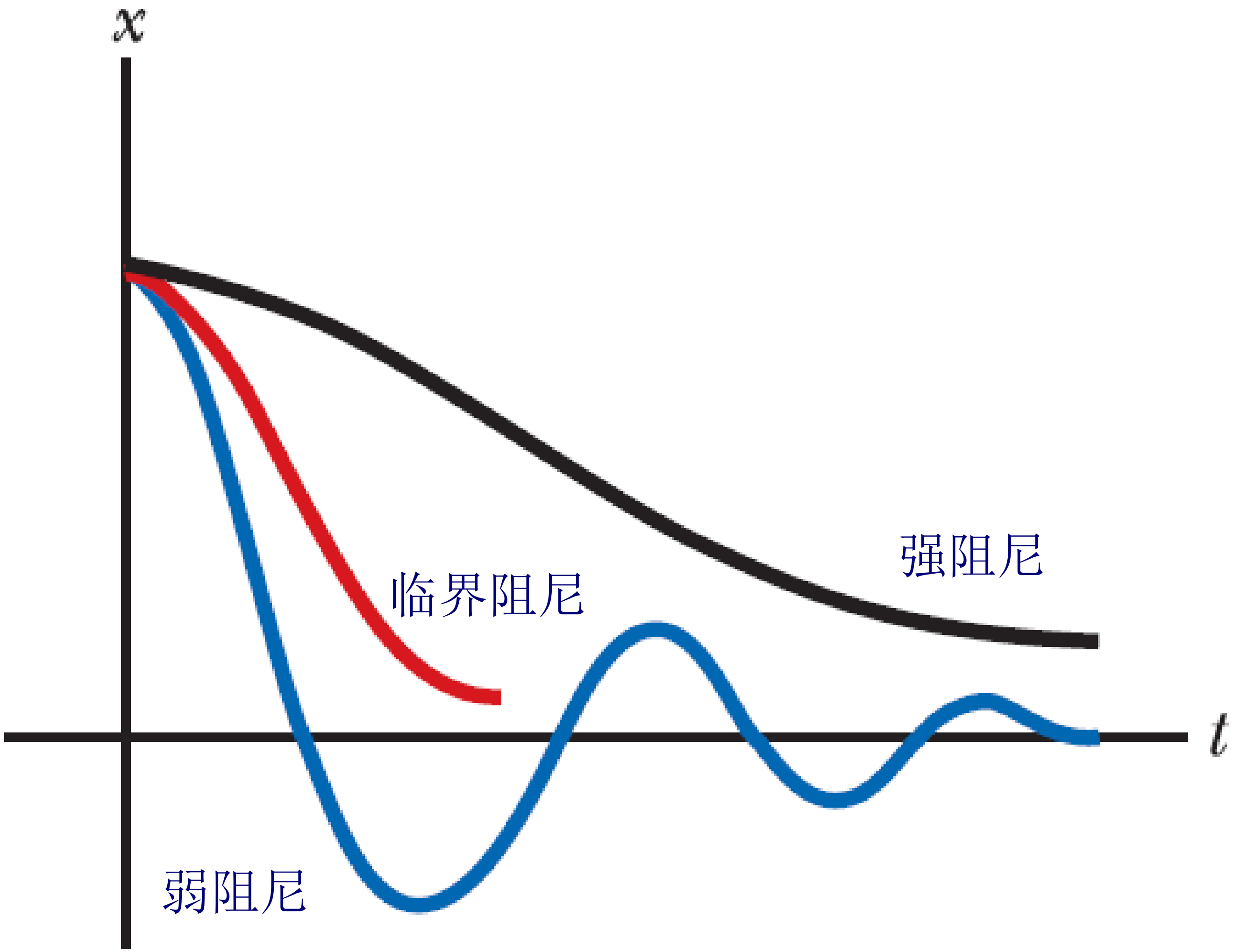
临界阻尼振动

$$\beta=w_0^2$$

$$x(t)=$$

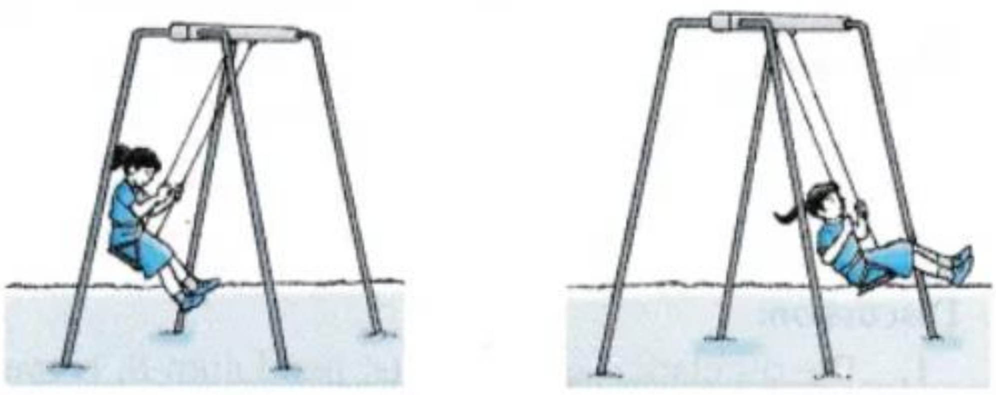
$$=e^{-\beta t}(A+Bt)$$

阻尼振动



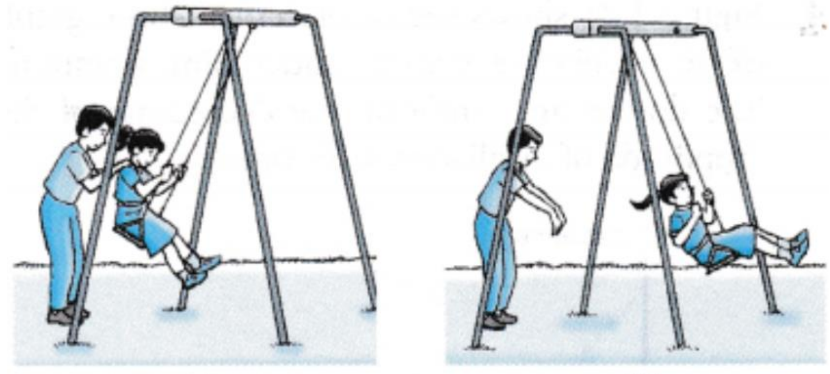
受迫振动

周期性的驱动力 $f(t) = F\cos wt$



(a) (b)

自由振动

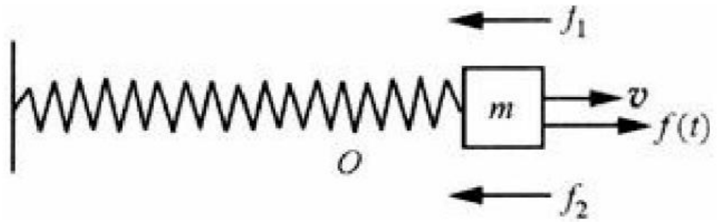


(a) (b)

受迫振动

弹性系统的受迫振动

周期性的驱动力 $f(t) = F\cos wt$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = f(t)$$

非其次线性二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = C\cos(wt)$$

$$= \frac{C}{2}(e^{iwt} + e^{-iwt})$$

其中$2\beta = \frac{\gamma}{m}, w_0^2 = \frac{k}{m}, C = F/m$