（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2021～2022 学年第一学期期中考试试卷

课程名称：__高等数学 A(上)________ 课程代码：__MATH120021.08__

开课院系：___数学科学学院_________ 考试形式：闭卷

姓　名：________________ 学　号：________________ 专　业：________________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									
题 号	9	10	11	12					
得 分									

(以下为试卷正文)

注意：答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. 设$x_1=1, x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}, n=1,2,\cdots$，判断数列是否收敛（为什么？），如果收敛，请求出其极限。（6 分）

当$n\geq 1, x_n>0$，并且

当$n>1$时，$x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{1+x_n}-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$,

而$x_3-x_2=\frac{x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}>0$, 所以$\forall n, x_{n+1}-x_n>0$，即$\{x_n\}$单调增加

$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}<1+1=2$，所以$\{x_n\}$是单调增加有界数列，收敛;

令$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则$a=1+\frac{a}{1+a}$，解得$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

2. 设数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$满足：$\forall n, 0\leq a_n\leq b_n\leq c_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$，是否可以断言：$\exists A\in R$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$，为什么？（6 分）

不能断言，举反例：

令$a_n=n, b_n=n+\frac{1}{2n}, c_n=n+\frac{1}{n}$，满足$\forall n, 0\leq a_n\leq b_n\leq c_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但是$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

一个常见的错误：

设$a_n=b_n=c_n=\sin n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$但是$a_n,b_n,c_n$都不收敛

分析：1. $\sin n$不满足$0\leq a_n$的条件。2. 即使抛开$0\leq a_n$的条件，要说明$\sin n$不收敛还是有点难度的。

举反例的时候首先要注意是否满足条件，其次要举那些容易说清楚的例子。

3. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，求$f(x)$的间断点并确定间断点的类型。（6 分）

由$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, |x|<1\\ 1, |x|=1\\ +\infty, |x|>1\end{cases}$，得$f(x)=\begin{cases}1+x, |x|<1\\ 1, x=1\\ 0, x=-1\\ 0, |x|>1\end{cases}$

所以$x=1$是$f(x)$间断点，$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=0, \lim\limits_{x\to 1-}f(x)=2$，因此$x=1$是$f(x)$的第一类间断点（跳跃间断点），并且没有其他间断点

有的同学不理解$n\to\infty$的含义，认为$n\to+\infty$或$n\to-\infty$。实际上除非给出特殊说明，$n\to\infty$中的n首先是一个自然数，$n\to\infty$指的总是$n\to+\infty$。

展开：在使用$L'Hospital$法则计算数列的极限时，有的同学会直接对数列关于n进行求导，实际上这也是不对的，因为数列不是一个可求导的函数。正确的做法应该是先把数列改写成以x为自变量的函数，再使用$L'Hospital$法则。

4. 设函数$f(x)$在$x=1$处可导，且当$x\to 0$时，$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程（6 分）

1) 由函数$f(x)$在$x=1$处可导得$f(x)$在$x=1$处连续

$$\lim_{x\to 0}\big(f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)\big)=-2f(1)=\lim_{x\to 0}\big(8x+o(x)\big)=0$$

即$f(1)=0$

2) 函数$f(x)$在$x=1$处可导，则当$\Delta x\to 0$时，$f(1+\Delta x)=f(1)+f'(1)\Delta x+o(x)$

而当$x\to 0$时$\sin x\to 0$，所以

$$f(1+\sin x)=f(1)+f'(1)\sin x+o(\sin x)=f'(1)\sin x+o(\sin x)$$

$$f(1-\sin x)=f(1)-f'(1)\sin x+o(\sin x)=-f'(1)\sin x+o(\sin x)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(1)\sin x+o(\sin x)}{x}=8$$

得$4f'(1)=8$，即$f'(1)=2$

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=2(x-1)$

有的同学直接对$f(1+\sin x)$和$f(1-\sin x)$进行求导，实际上题目只告诉我们$f(x)$在$x=1$处可导，在其他自变量上是否可导未知，所以不能对$f(1+\sin x)$和$f(1-\sin x)$求导。

5. 设$y=\frac{x^2+1}{x-1}$，求$y^{(n)}$（6 分）

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{x^2-1+2}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$$

$$y'=1-\frac{2}{(x-1)^2}$$

当$n>1$时,用数学归纳法可以推导得到： $y^{(n)}=(-1)^n\frac{2\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$

6. 已知当$x\to 0+$ 时，$x^2+a(1-cosx)+b\ln\frac{sinx}{x}=o(x^4)$，求$a,b$（6 分）

当$x\to 0+$时

$$1-cosx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$\ln\frac{sinx}{x}=\ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{x}=\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\right)$$

$$=\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^3\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^5)$$

$$x^2+a(1-cosx)+b\ln\frac{sinx}{x}=\left(1+\frac{a}{2}-\frac{b}{6}\right)x^2+\left(-\frac{a}{24}-\frac{b}{180}\right)x^4+o(x^5)=o(x^4)$$

所以$\begin{cases}1+\frac{a}{2}-\frac{b}{6}=0\\-\frac{a}{24}-\frac{b}{180}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}a=-\frac{4}{7}\\b=\frac{30}{7}\end{cases}$

注：$\because \lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^4}=0,\therefore o(x^5)=o(x^4)\ (x\to 0)$

（装订线内不要答题）

7. 计算函数的导数：（10 分）

1) $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$，其中$a<0$，求$y'$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

2) 方程$\tan(x+y)-xy=x\ln y$确定了隐函数$y\ =\ y(x)$，求$y'(x)$。

方程两边求导：

$$(\sec(x+y))^2\,(1+y')-y-xy'=\ln y+x\frac{y'}{y}$$

$$y'=\frac{y+\ln y-sec^2(x+y)}{sec^2(x+y)-x-\frac{x}{y}}$$

8. 设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$。（6 分）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

9. 计算函数的极限：（20 分）

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\left(1+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{1}{6}$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}}{e^{-x}\ln(1+x)-x}$

$$\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+o(x^2)\ (x\to0)$$

$$e^{-x}\ln(1+x)=\big(1-x+o(x)\big)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=x-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\ (x\to0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}}{e^{-x}\ln(1+x)-x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{8}+o(x^2)}{-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{1}{12}$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}}$$

由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}=1$

方法一：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{3x^2\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

方法二：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}{2x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x\cdot x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

10. 求函数$y = x^3e^{-x}$的极值和拐点。（9 分）

$y' = x^2(3-x)e^{-x}$

$y'' = x(6-6x+x^2)e^{-x}$

驻点：$x = 0, x = 3$

二阶导数零点：$x = 0, x = 3 \pm \sqrt{3}$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3)$	3	$(3,3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
y'	>0		>0		>0		<0		<0
y''	<0		>0		<0		<0		>0
y	↗上凸		↗下凸		↗上凸		↘上凸		↘下凸

极大值：$y(3) = 27e^{-3}$

拐点：$(0,0), \left(3-\sqrt{3}, \left(3-\sqrt{3}\right)^3 e^{-3+\sqrt{3}}\right), \left(3+\sqrt{3}, \left(3+\sqrt{3}\right)^3 e^{-3-\sqrt{3}}\right)$

注意：拐点是曲线上的点，以(x,y)的方式呈现，有的同学写成$x = 0, x = 3-\sqrt{3}, x = 3+\sqrt{3}$是不对的

11. 证明：当$x > 0$时成立$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$。（9 分）

[证明]:

方法一：

令$f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$，则$f(0) = 0$

$x > 0$时，$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} > 0$

∴当$x > 0$时，$f(x) > f(0)$，即$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$

令$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$，则$g(0) = 0$

$x > 0$时，$g'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} > 0$

∴当$x > 0$时，$g(x) > g(0)$，即$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} > \ln(1+x)$

命题得证

方法二：

$$(\ln(1+x))^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$(\ln(1+x))^{(4)} = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

$x > 0$时 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3(1+\theta x)^3}x^3 > x - \frac{x^2}{2}, (0 < \theta < 1)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4(1+\theta x)^4}x^4 < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, (0 < \theta < 1)$$

命题得证

12. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导，如果 $f(a)=f(b)$，且$f'_+(a)>0$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$。（10 分）

[证明]:

1) $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)$，则$\exists\alpha\in(a,b)$，使得$f'(\alpha)=0$。

2) $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，则$\exists\delta\in(0,\alpha-a)$，使得当$x\in(a,a+\delta)$时，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$。取定$x_0\in(a,a+\delta)$，由于$f(x)$在$[a,x_0]$上连续，在$(a,x_0)$上可导，则$\exists\beta\in(a,x_0)$，使得$f'(\beta)=\frac{f(x_0)-f(a)}{(x_0-a)}>0$。

3) $f(x)$在(a,b)上二阶可导，所以$f'(x)$在$[\beta,\alpha]$上连续，在(β,α)上可导，所以$\exists\xi\in(\beta,\alpha)$，使得$f''(\xi)=\frac{f'(\alpha)-f'(\beta)}{\alpha-\beta}<0$.

命题得证。

常见的错误：

1) 由$Lagrange$中值定理知，对于$\eta\in(a,b),\exists\xi\in(a,\eta)$,使得$\frac{f'(\eta)-f'(a)}{\eta-a}=f''(\xi)$

分析：上式成立要求$f'(x)$在$[a,\eta]$上连续，在(a,η)内可导，而题目的条件中仅给出了$f'(x)$在(a,b)内可导，在a点处是否右连续未知。所以上面这个结论是错误的。

2) 反证法：假设$\forall x\in(a,b),f''(x)\geq 0$,则$f'(x)$在$(a,b)$内单调增加，所以$\forall x\in(a,b),f'(x)\geq f'_+(a)>0$

分析：上面的结论“$\forall x\in(a,b),f'(x)\geq f'_+(a)$”是有条件的：要求$f'(x)$在$a$点处右连续，而题目没有给出这个条件。而且要根据$\forall x\in(a,b),f''(x)\geq 0$推出$f'(x)$在$a$点处的连续性已经超出了我们的现有知识。所以要用上述结论必须严格证明。

3) 根据带$Lagrange$余项的$Taylor$公式知：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a+\theta(x-a))}{2}(x-a)^2$

分析：上式成立要求$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的一阶导数，在(a,b)内二阶可导，而题目没有给出$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的一阶导数这个条件。

（装订线内不要答题）