20220506-课堂练习答案

1.$\oint_{\partial D}\frac{xy^2}{b^2}dy-\frac{yx^2}{a^2}dx$，其中$\partial D$是区域$D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}(a>0,b>0)$的边界，方向取正向

- 令$P(x,y)=-\frac{yx^2}{a^2},Q(x,y)=\frac{xy^2}{b^2},P,Q$在$D$内具有连续的一阶偏导数，而$\partial D$方向取正向，所以
- $\oint_{\partial D}\frac{xy^2}{b^2}dy-\frac{yx^2}{a^2}dx=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$
- $=\iint_D\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)dxdy$（引入广义极坐标）
- $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot abrdr$
- $=\frac{\pi ab}{2}$

2. $\int_L (x^2 - y)dx - (x + sin^2 y)dy$，其中$L$是圆周$x^2 + y^2 = 2x$的上半部分，方向从点(0,0)到点(2,0)

- L是圆周$x^2 + y^2 = 2x$的上半部分，方向从点(0,0)到点(2,0)并不是一条闭曲线
- 因此如果要使用Green公式计算本题，需要添加一条简单曲线使其成为一条闭曲线
- 令$L_1: y = 0, x: 2 \to 0$（即x轴上从2 到0 的那一段）
- 则$L + L_1$构成一条简单闭曲线，其内部是一个简单闭区域，记为D
- 则$\partial D = L + L_1$,方向为反向，那么
- 令$P(x, y) = x^2 - y, Q(x, y) = -(x + sin^2 y), P, Q$在$D$内具有连续的一阶偏导数
- $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

2. $\int_L (x^2 - y)dx - (x + sin^2 y)dy$，其中$L$是圆周$x^2 + y^2 = 2x$的上半部分，方向从点(0,0)到点(2,0)

- $\therefore \int_L (x^2 - y)dx - (x + sin^2 y)dy$
- $= \int_{L+L_1} (x^2 - y)dx - (x + sin^2 y)dy - \int_{L_1} (x^2 - y)dx - (x + sin^2 y)dy$
- $= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \int_0^2 x^2 dx$
- $= \frac{8}{3}$

3. $\int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$是以点$(1,0)$为中心、$R(R>1)$为半径的圆周，方向取逆时针

- 令$P(x,y)=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{x}{4x^2+y^2}$
- 设L所围的区域为D
- 由于L是以点$(1,0)$为中心、$R(R>1)$为半径的圆周，$(0,0)\in D$
- 所以P,Q并非是D上的连续函数
- 如果要用Green公式，则需要用一条简单闭曲线将(0,0)挖掉
- 令$L_1: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$,方向取顺时针，其中$\varepsilon$是一个充分小的正实数，使得$L_1$完全落在$D$内
- 设$D_1=D-\{4x^2+y^2\leq\varepsilon^2\}, \partial D_1=L+L_1$
- 则$(0,0)\notin D_1, P, Q$在D_1内具有连续的一阶偏导数

3. $\int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$是以点$(1,0)$为中心、$R(R>1)$为半径的圆周，方向取逆时针

- 令$P(x,y)=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{x}{4x^2+y^2}$
- $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$
- $\therefore \int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_{L+L_1} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\int_{L_1} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$
- $=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\int_{-L_1} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$ （令$\begin{cases} x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t \\ y=\varepsilon \sin t \end{cases}$）
- $=\int_0^{2\pi} \frac{\frac{\varepsilon}{2}\cos t\cdot\varepsilon\cos t+\varepsilon\sin t\cdot\frac{\varepsilon}{2}\sin t}{\varepsilon^2}dt$
- $=\pi$

4. $\int_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$，其中$L$是平面$x + y + z = 2$与柱面$|x| + |y| \le 1$的交线，从$z$轴正方向看去为顺时针方向

- 设Σ是平面$x + y + z = 2$上被曲线$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$所围的部分，方向取下侧，
- 令$P(x, y, z) = y^2 - z^2, Q(x, y, z) = 2z^2 - x^2, R(x, y, z) = 3x^2 - y^2$，则
- $\int_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$
- $= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
- $= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$
- $= \iint_\Sigma (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy$

4. $\int_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$，其中$L$是平面$x + y + z = 2$与柱面$|x| + |y| \le 1$的交线，从$z$轴正方向看去为顺时针方向

- Σ方程改写为$z = 2 - x - y$，$\vec{n} = \left(z'_x, z'_y, -1\right) = (-1,-1,-1)$则
- 上式$= -\iint_{|x|+|y|\le 1}\left(-8x - 4y - 6(2 - x - y)\right)dxdy$
- $= 12\iint_{|x|+|y|\le 1} dxdy + \iint_{|x|+|y|\le 1}(2x - 2y)dxdy$
- $= 24$
- （由对称性知$\iint_{|x|+|y|\le 1}(2x - 2y)dxdy = 0$）

5. $\int_L (x+2y)dx+(4x-2y)dy+(3x+z)dz$，其中$L$是椭圆$\begin{cases}(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2=1\\ z=4\end{cases}$，从$z$轴正方向看去为逆时针方向

- 设Σ是平面$z=4$上被曲线$\begin{cases}(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2=1\\ z=4\end{cases}$所围的部分，方向取上侧，
- 令$P(x,y,z)=x+2y, Q(x,y,z)=4x-2y, R(x,y,z)=3x+z$，则
- $\int_L (x+2y)dx+(4x-2y)dy+(3x+z)dz$
- $=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
- $=\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$
- $=\iint_\Sigma (0-0)dydz+(0-3)dzdx+(4-2)dxdy$

5. $\int_L (x+2y)dx+(4x-2y)dy+(3x+z)dz$，其中$L$是椭圆$\begin{cases}(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2=1\\ z=4\end{cases}$，从$z$轴正方向看去为逆时针方向

- 曲面Σ的法向量$\vec{n}=(0,0,1)$，则
- 上式$=2\iint_{(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2\le 1} dxdy$
- 引入变量代换$\begin{cases}u=3x+2y-5\\ v=x-y+1\end{cases}$, $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{5}$
- 上式$=2\iint_{(3x+2y-5)^2+(x-y+1)^2\le 1} dxdy$
- $=2\iint_{u^2+v^2\le 1}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dxdy$
- $=\frac{2}{5}\pi$

6. $\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，其中$L$是螺线$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \\ z=\frac{h}{2\pi}\varphi \end{cases}$上从$(a,0,0)$到$(a,0,h)$间的一段$(a>0,h>0)$

- 由于L是螺线$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \\ z=\frac{h}{2\pi}\varphi \end{cases}$上从$(a,0,0)$到$(a,0,h)$间的一段，$L$不是一条闭曲线，要使用Stokes公式，必须补上一条简单曲线，使其成为一条闭曲线
- 令L_1: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, z: h\to 0$（$z$ 轴上从h到0的那一段）
- 则$L+L_1$是R^3中的一条简单闭曲线，设Σ是以$L+L_1$为边界的某一个简单曲面，方向取$L+L_1$的诱导定向
- 令$P(x,y,z)=x^2-yz, Q(x,y,z)=y^2-xz, R(x,y,z)=z^2-xy$，则
- $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-x+x=0, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$

6. $\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，其中$L$是螺线$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \\ z=\frac{h}{2\pi}\varphi \end{cases}$上从$(a,0,0)$到$(a,0,h)$间的一段$(a>0,h>0)$

- $\therefore \int_L (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$
- $=\int_{L+L_1} (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz-\int_{L_1} (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$
- $=\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{L_1} (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$
- $=\int_{-L_1} (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$
- $=\int_0^h z^2dz$
- $=\frac{h^3}{3}$

7.判断向量场$(x^2-2yz, y^2-2xz, z^2-2xy)$是否存在势函数，如果有则求出势函数的全体

- 令$P=x^2-2yz, Q=y^2-2xz, R=z^2-2xy$
- 向量场$\vec{F}=(P,Q,R)$存在势函数的充分必要条件是$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\vec{0}$
- $\mathrm{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-2yz & y^2-2xz & z^2-2xy \end{vmatrix}$
- $=\big(-2x-(-2x), -2y-(-2y), -2z-(-2z)\big)=\vec{0}$
- 所以此向量场存在势函数
- 令$U(x,y,z)$是此向量场的势函数，则

7.判断向量场$(x^2-2yz, y^2-2xz, z^2-2xy)$是否存在势函数，如果有则求出势函数的全体

- 令$P=x^2-2yz, Q=y^2-2xz, R=z^2-2xy$
- $U(x,y,z)=\int_0^x P(r,0,0)dr+\int_0^y Q(x,s,0)ds+\int_0^z R(x,y,t)dt+C$
- $=\int_0^x r^2dr+\int_0^y s^2ds+\int_0^z(t^2-2xy)dt+C$
- $=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}-2xyz+C$

8. $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$，其中$\Sigma: 1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\ (z \geq 0)$的上侧

- 曲面Σ是一个最高点在(0,0,5)，开口向下的椭圆抛物面的上侧
- 添加曲面$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2, z \geq 0$,方向取下侧（其中$\varepsilon$是一个充分小的正实数，使得$\Sigma_1$ 完全落在Σ所围空间的内部）
- $\Sigma_2: z=0$满足$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9} \leq 1$且$x^2+y^2 \geq \varepsilon^2$之间的部分，方向取下侧
- 令$\Omega=\left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \geq \varepsilon^2, z \geq 0, 1-\frac{z}{5} \geq \frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\right\}$
- 则
- $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$
- $=\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}-\iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}-\iint_{\Sigma_2} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$

8. $\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$，其中$\Sigma: 1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\ (z\geq 0)$的上侧

- 令$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, P=\frac{x}{r^3}, Q=\frac{y}{r^3}, R=\frac{z}{r^3}$，则
- $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5}, \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5}, \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}$
- $\frac{\partial P}{\partial x}++\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$
- $\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}=\iiint_{\Omega}0dxdydz=0$
- $\iint_{\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}=0$
- $\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$

8. $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$，其中$\Sigma: 1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\ (z \geq 0)$的上侧

- 这个曲面积分继续使用Gauss公式
- 令$\Sigma_3: z=0$满足$x^2+y^2 \leq \varepsilon^2$的部分,方向取上侧
- 令$\Omega' = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq \varepsilon^2, z \geq 0\}$
- $\iint_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$
- $= \iint_{\Sigma_1+\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy - \iint_{\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy$
- $\iint_{\Sigma_1+\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy = -\iiint_{\Omega'} (1+1+1)dxdydz$
- $= -2\pi\varepsilon^3$
- $\therefore \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -2\pi$

8. $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$，其中$\Sigma: 1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\ (z \geq 0)$的上侧

- $\iint_{\Sigma_3} xdydz + ydzdx + zdxdy = 0$
- $\therefore \iint_{\Sigma} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$
- $= -\iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$
- $= 2\pi$

9.设$u(x,y,z)$在R^3上具有二阶连续偏导数，且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，$\Sigma$为任意的分片光滑简单闭曲面，$\vec{n}$是$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的单位外法向，$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$是方向导数，求$\iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$

- 设Ω是由Σ所围成的有界闭区域,Σ取外侧
- $\because \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = gradu \cdot \vec{n}$
- $\therefore \iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iint_\Sigma gradu \cdot \vec{n} dS$
- $= \iint_\Sigma u'_x dydz + u'_y dzdx + u'_z dxdy$
- $= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz$
- $= 0$

10.设Σ为分片光滑简单闭曲面，原点不在Σ上，$\vec{r}=(x,y,z)$是Σ上的点与坐标原点间的方向向量（称为径向量），$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\vec{n}$是Σ上点(x,y,z)处的单位外法向，ψ是$\vec{n}$与$\vec{r}$的夹角，计算曲面积分$I=\iint_\Sigma \frac{cos\psi}{r^2}dS$

- 设Σ所围的有界闭区域为Ω
- $I=\iint_\Sigma \frac{cos\psi}{r^2}dS$
- $=\iint_\Sigma \frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}dS$
- $=\iint_\Sigma \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$
- 令$P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},R=\frac{z}{r^3}$
- (1)如果坐标原点不在Ω内，则P,Q,R在Ω内具有连续的偏导数，且$\frac{\partial P}{\partial x}++\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，所以
- $I=\iiint_\Omega 0dxdydz=0$

10.设Σ为分片光滑简单闭曲面，原点不在Σ上，$\vec{r}=(x,y,z)$是Σ上的点与坐标原点间的方向向量（称为径向量），$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\vec{n}$是Σ上点(x,y,z)处的单位外法向，ψ是$\vec{n}$与$\vec{r}$的夹角，计算曲面积分$I=\iint_\Sigma \frac{cos\psi}{r^2}dS$

- (2)如果坐标原点在Ω内，由于原点不在Σ上，则令
- $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，方向取内侧，其中$\varepsilon$是充分小的正实数，使得$\Sigma_1$完全落在$\Omega$内，那么
- $I=\iint_\Sigma \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$
- $=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}-\iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$
- $=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{-\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$
- $=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_1} dxdydz=4\pi$