弦横波的速度

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ 波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$ 波动方程

由此可见波速（相速度）：

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

鸟栖息在电线上，波的传播速度由左式决定。

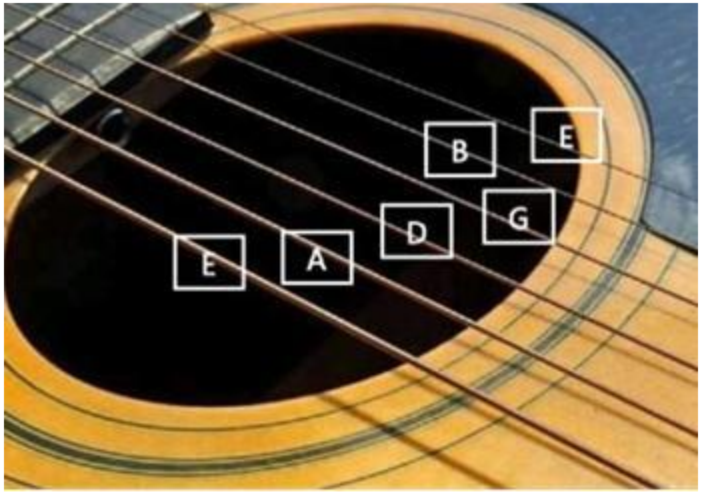
$$\boxed{v=\frac{w}{k}}$$

机械波的速度：

$$v=\sqrt{\frac{\text{系统回到平衡位置的回复力}}{\text{回到平衡位置的惯性阻力}}}$$

吉他

通过旋钮调整张力



琴弦粗细： 线密度不同

波动方程

波动方程： $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,t)=0$$

通解： $$u_1(x,t)=F\left(t-\frac{x}{v}\right)\quad\text{and}\quad u_2(x,t)=G\left(t+\frac{x}{v}\right)$$

一般解： $$u(x,t)=c_1F\left(t-\frac{x}{v}\right)+c_2G\left(t+\frac{x}{v}\right)$$

三维： $$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\mathbf{r},t)=0 \qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

通解： $$\psi_\pm(\mathbf{r},t)=\psi\left(t\pm\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{v^2}\right)$$

一般解： $$\psi(\mathbf{r},t)=c_+\psi\left(t+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{v^2}\right)+c_-\psi\left(t-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{v^2}\right)$$

波动方程

平面波： $$u(r,t) = a\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

$$\phi = \omega t - kx + \phi_0$$

柱面波： $$u(r,t) = \frac{a}{\sqrt{\rho}}\cos(\omega t - k\rho + \phi_0)$$

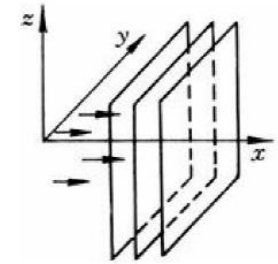
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \omega t - k\rho + \phi_0$$

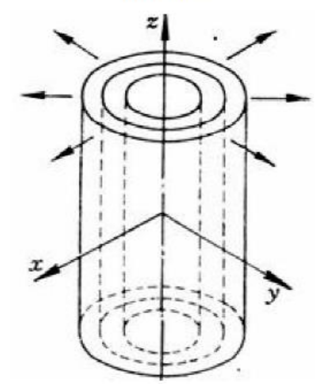
球面波： $$u(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr + \phi_0)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

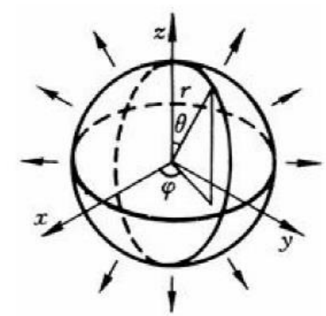
$$\phi = \omega t - kr + \phi_0$$



平面波



柱面波



球面波

复习 振动和波

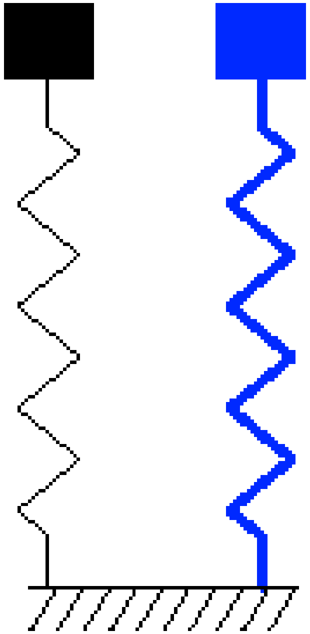
周期性的振动

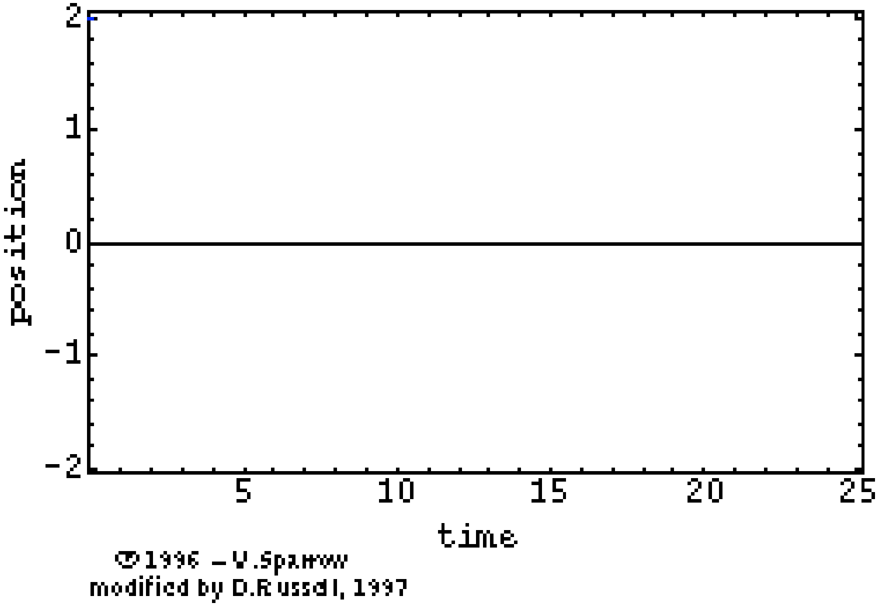
振幅 A

周期 T

频率 f=1/T

角频率 $w = 2\pi f$





简谐振动

$$F_x = -kx \tag{3}$$

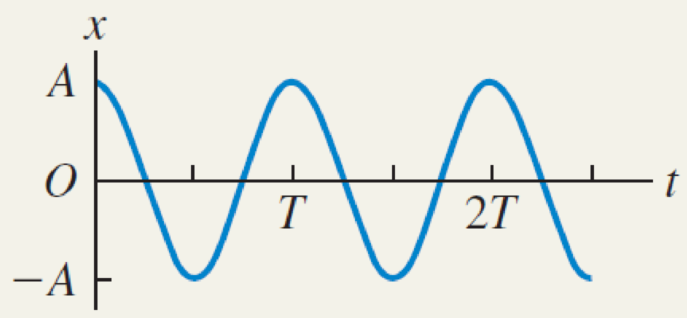
$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{4}$$

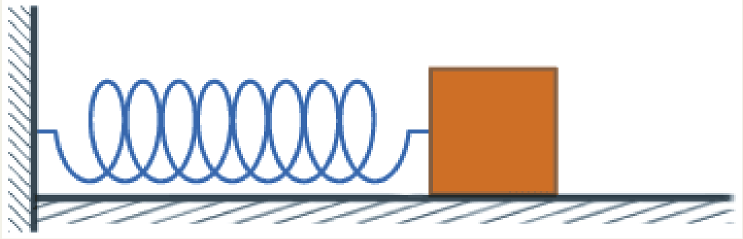
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{12}$$

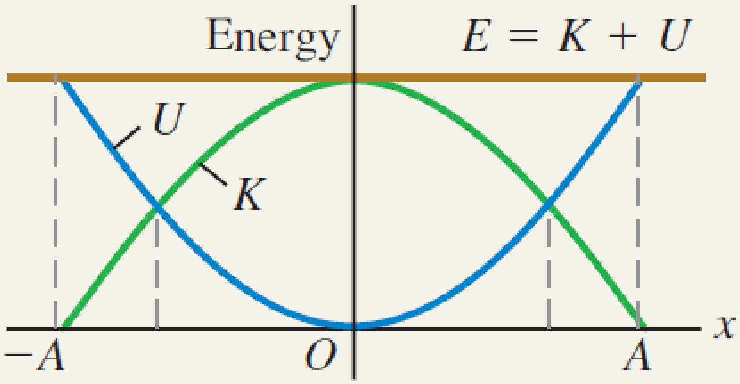
$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{13}$$





简谐振动的能量

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constant} \quad (21)$$

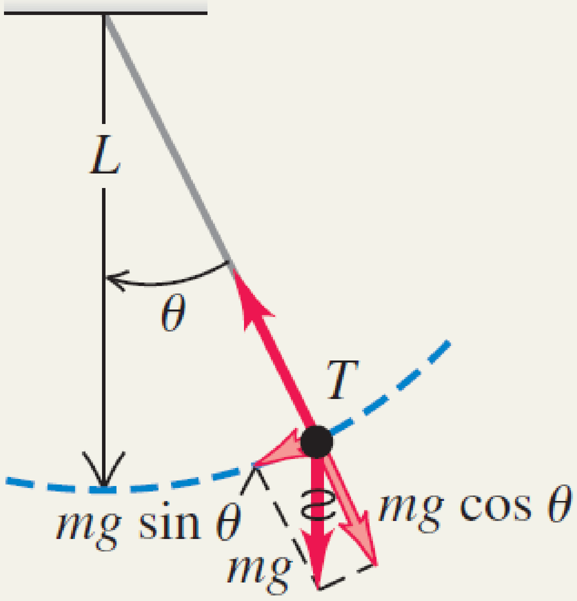


单摆的简谐运动

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{32}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{33}$$

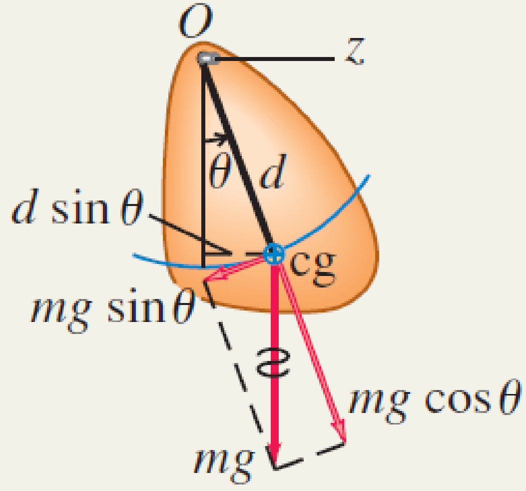
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{34}$$



复摆

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{38}$$

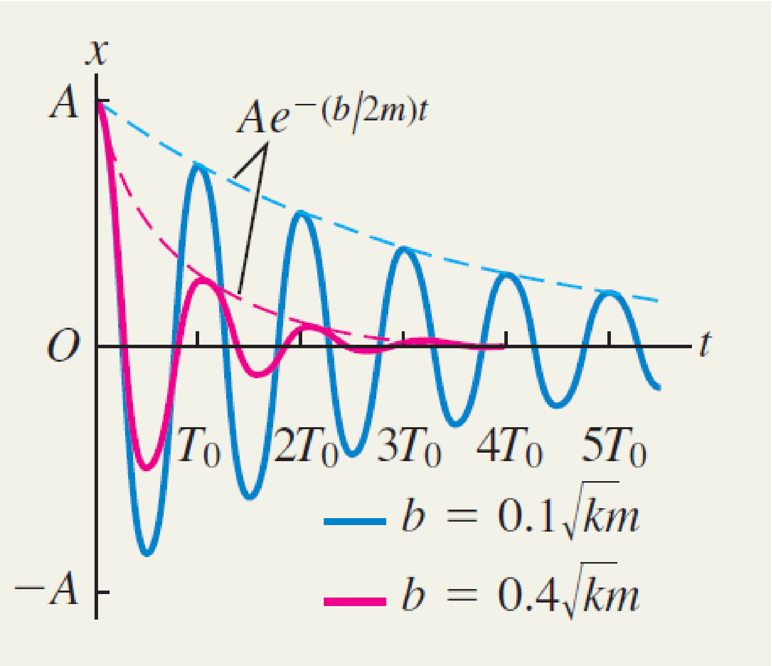
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{39}$$



阻尼振动

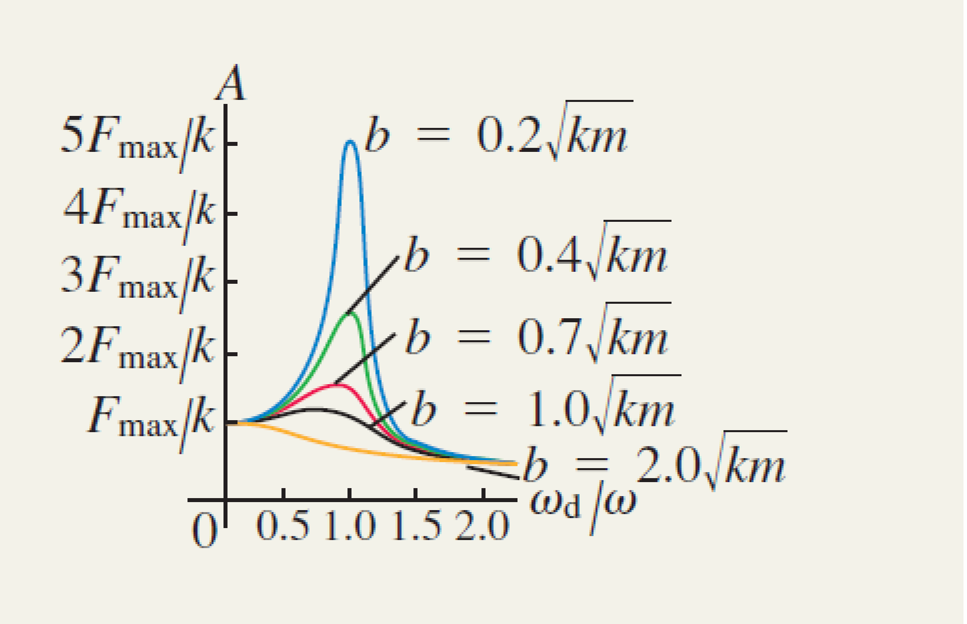
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

阻尼振动



$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+w_0^2x=F\cos(wt)$$

受迫振动

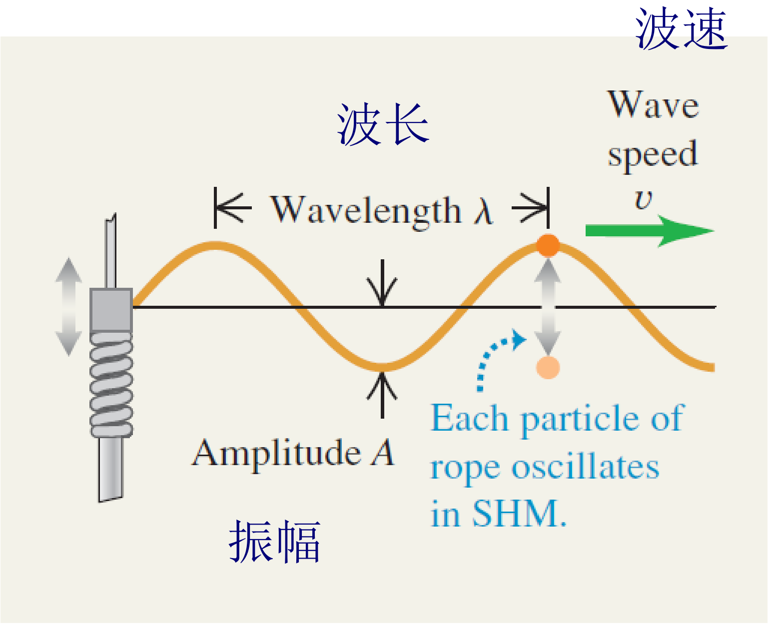


波

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$w = 2\pi f$$

$$v = \lambda f$$



波函数

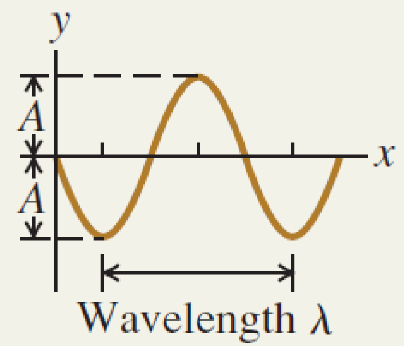
$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)}$$

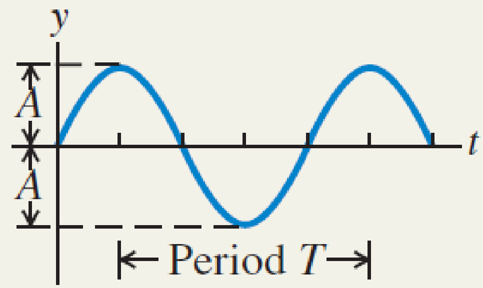
where $k = 2\pi/\lambda$ and $\omega = 2\pi f = vk$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

弦横波的相速度





$$\text{介质中的波速}\begin{cases}\text{纵波的相速度？}\\ \text{横波的相速度？}\end{cases}$$

弹性体的应力与应变

拉伸应变

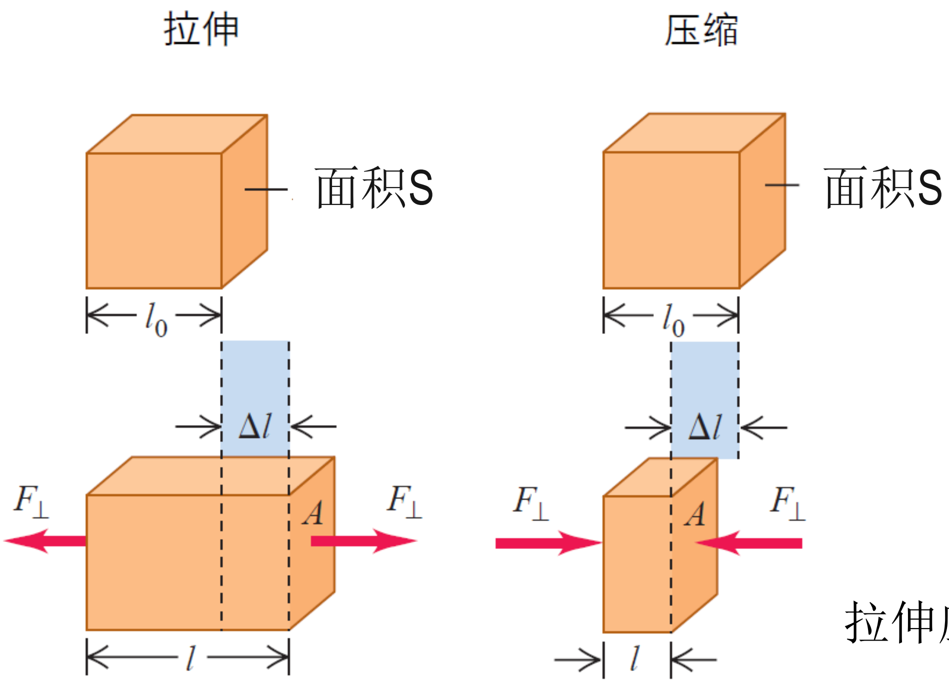
体积应变

剪应变

$$\frac{\text{应力}}{\text{应变}}=\text{弹性模量（胡克定律）}$$

应力类似于压强（单位面积所受的力）
应变是弹性体在外力作用下发生的形状改变

拉伸应变与杨氏模量



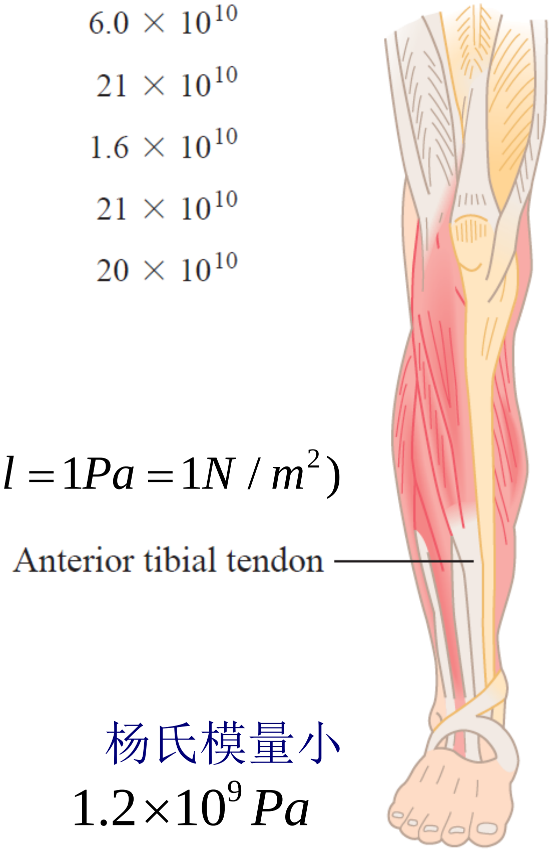
Material	Young's Modulus, Y (Pa)
Aluminum	7.0×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}
Copper	11×10^{10}
Crown glass	6.0×10^{10}
Iron	21×10^{10}
Lead	1.6×10^{10}
Nickel	21×10^{10}
Steel	20×10^{10}

拉伸应力$=\dfrac{F_\perp}{A}$

单位帕斯卡$(1Pascal = 1Pa = 1N/m^2)$

$$\frac{F}{S} \propto \frac{\Delta l}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta l}{l}$$

杨氏弹性模量

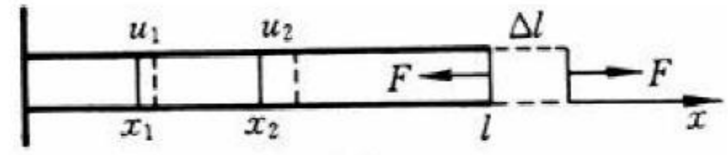


杨氏模量小

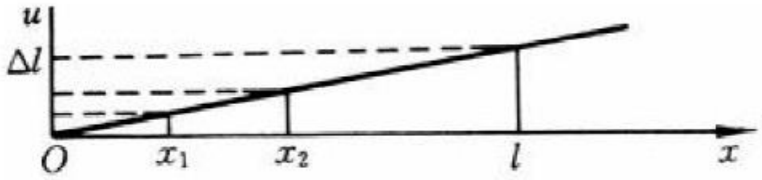
$1.2\times10^9\,Pa$

杆内各处应力和应变的关系

介质棒内位移函数$u(x)$，在$x \to x+\Delta x$段质量元，位移量$u \to u+\Delta u$



(a)



(b)

相对伸长率$:\Delta u/\Delta x$

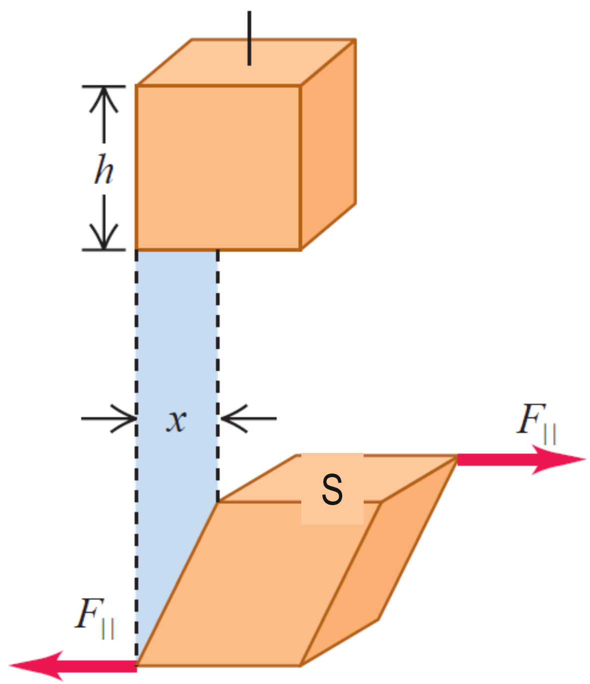
相应弹性力:

$$F(x)=ES(\frac{du}{dx})$$

$du/dx=$常数，均匀应变

du/dx与x有关，非均匀应变

切变模量



纵向伸长的杆
必有横向的收缩

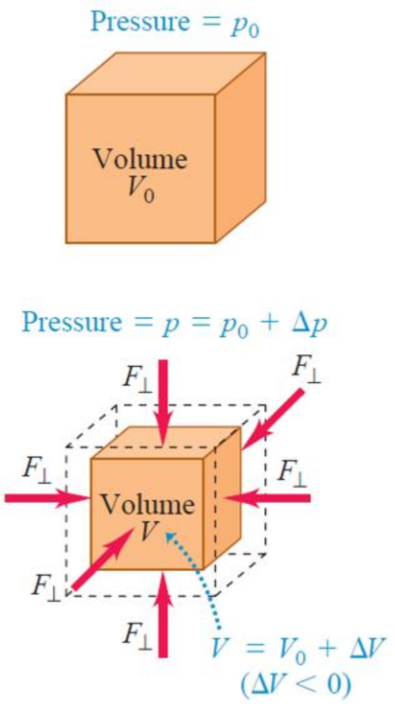
收缩和延伸率之比为泊松比σ

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

$$\frac{F}{S} \propto \frac{x}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{S} = G\,\frac{x}{h}$$

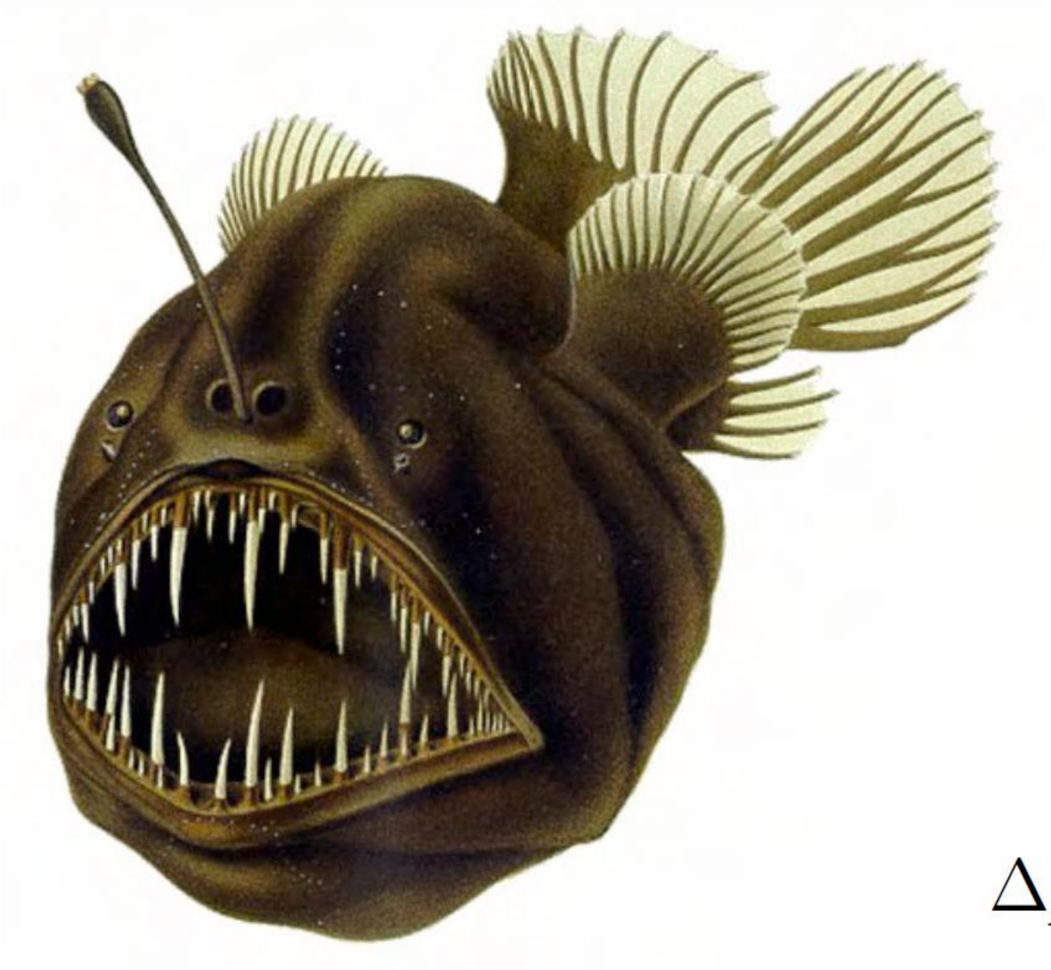
切变模量

体变模量

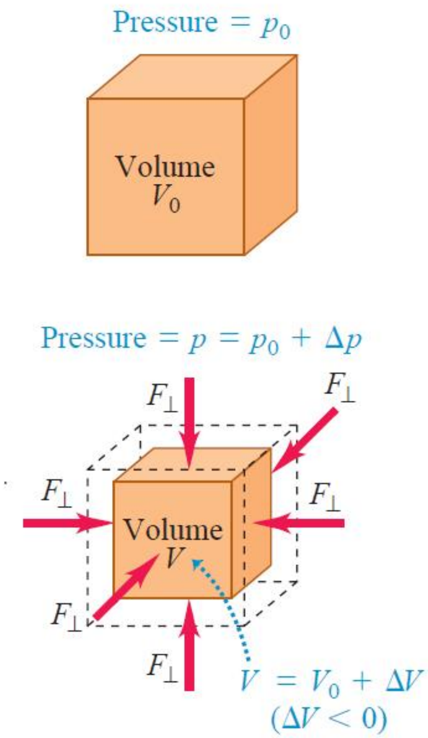


$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} = \underset{\text{体变模量}}{K}\frac{\Delta \rho}{\rho}$$

体变模量



Anglerfish
生活在海底约1000米（100个大气压）

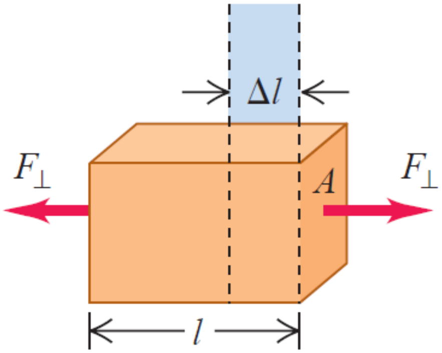


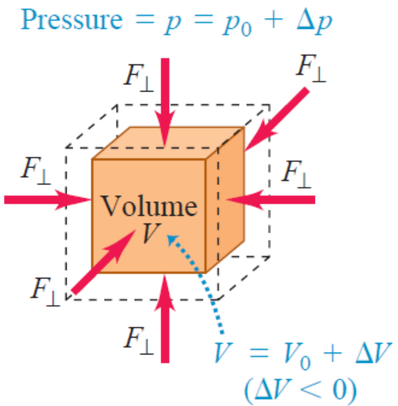
$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} = K\frac{\Delta \rho}{\rho}$$

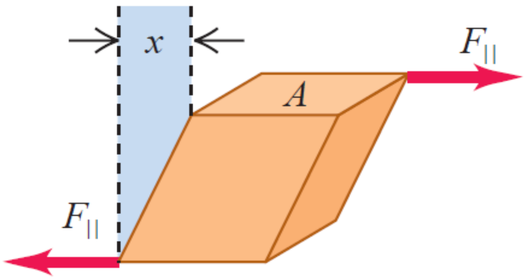
体变模量

杨氏模量、切变模量和体变模量

Material	Young's Modulus, E (Pa)	Bulk Modulus K (Pa)	Shear Modulus, G (Pa)
Aluminum	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Copper	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Crown glass	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Iron	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Lead	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Nickel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Steel	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}

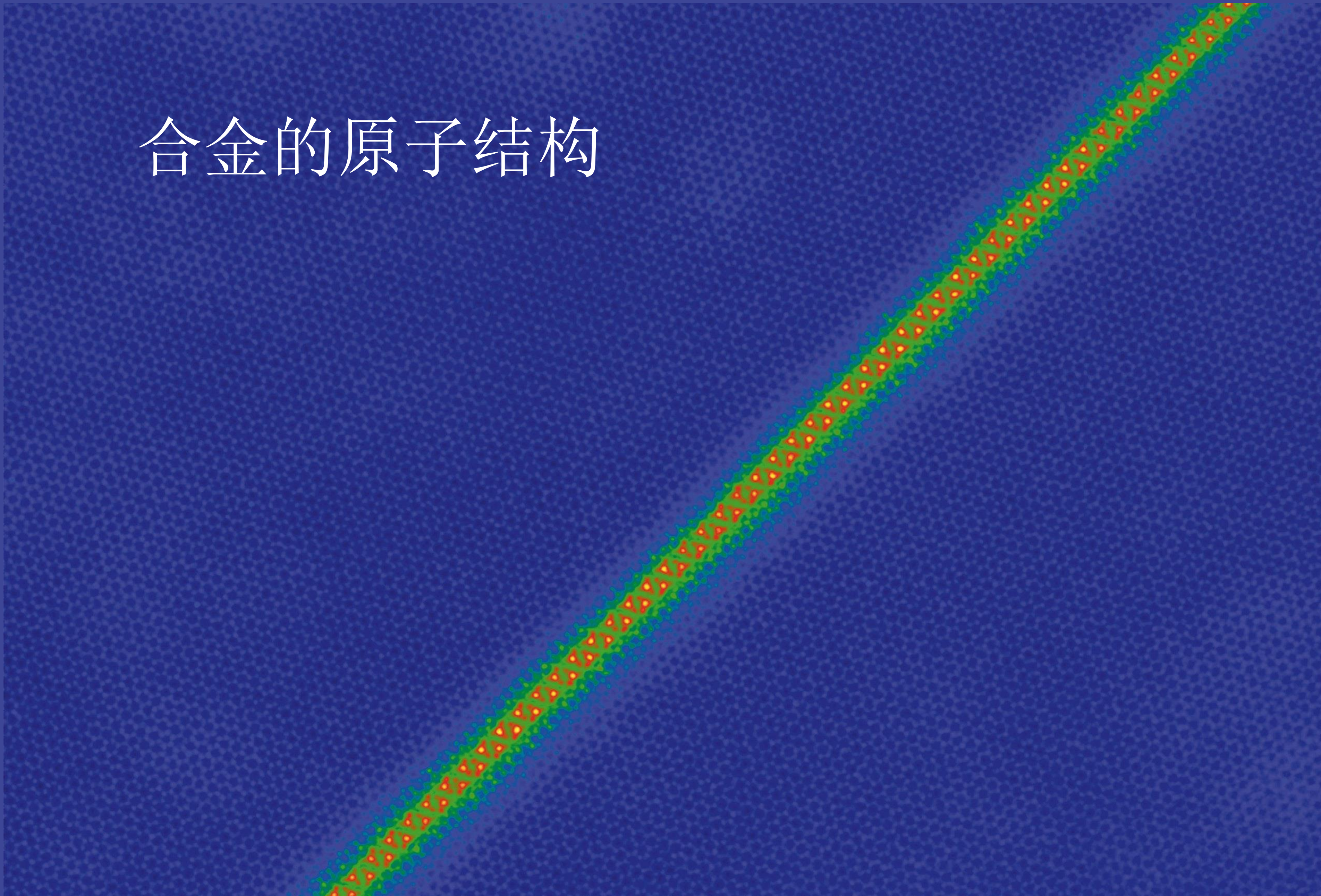




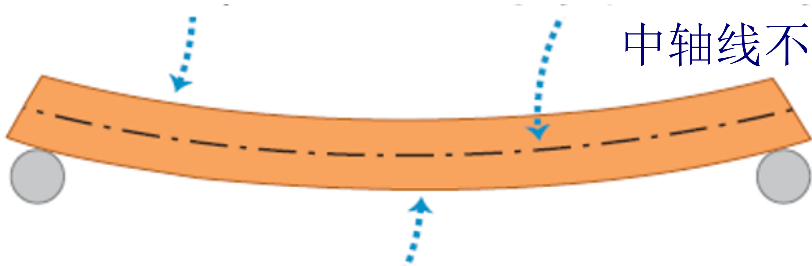


原子结构决定了宏观的凝聚态物理性质

合金的原子结构



弯曲



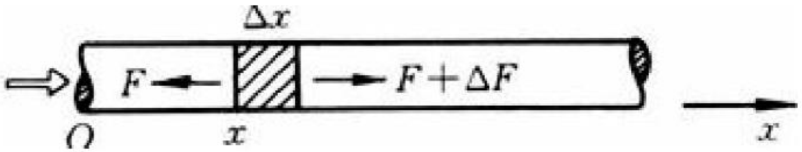
工字形结构

介质中的波速

纵波的波速和波动方程

木棒敲击，纵向位移函数u(x, t)。应力分布:

$$F(x,t)=ES\frac{\partial u}{\partial x}$$



$x \rightarrow x+dx$段质量为:

$$\Delta m=\rho\Delta V=\rho S\Delta x$$

由牛顿定律

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

所以

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta F=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x=ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x=\rho S\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

波动方程

$$波速 v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

横波相速度

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G为切变模量

例题 对于铸铁$\rho \approx 7.60\times10^3$kg/m^3，E≈$10^{11}$N/m^2，并且G≈$5\times10^{10}$N/m^2，求得铸铁中纵波和横波相速度分别为

$$v_p = \sqrt{\frac{10^{11}}{7.60\times10^3}}\ \mathrm{m/s} \approx 3800\ \mathrm{m/s},$$

纵波

$$v_s = \sqrt{\frac{5\times10^{10}}{7.60\times10^3}}\ \mathrm{m/s} \approx 2560\ \mathrm{m/s},$$

横波

若设一振动频率f＝3200Hz，则相应的在铸铁中的纵波与横波波长为

$$\lambda_p = \frac{v_p}{f} \approx 1.2\ \mathrm{m},\quad \lambda_s = \frac{v_s}{f} \approx 0.8\ \mathrm{m}.$$

固体中的声速

纵波： $v_p = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ 杨氏模量

横波： $v_s = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ 切变模量

Material	Young's Modulus, (Pa)	Bulk Modulus, B (Pa)	Shear Modulus, (Pa)
Aluminum	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Copper	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Crown glass	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Iron	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Lead	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Nickel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Steel	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}

弦横波的速度

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ 波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$ 波动方程

由此可见波速（相速度）：

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

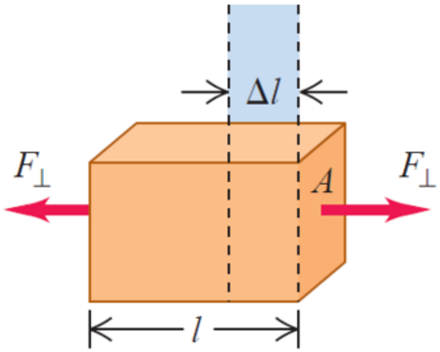
鸟栖息在电线上，波的传播速度由左式决定。

机械波的速度：

$$v = \sqrt{\frac{\text{系统回到平衡位置的回复力}}{\text{回到平衡位置的惯性阻力}}}$$

气体中的声速

气体切变模量为0，仅有纵波。绝热过程：



$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

E : 杨氏模量　　$E=\gamma p_0$

γ : 气体绝热指数

ρ_0 : 气体密度

μ : 气体摩尔质量

空气：

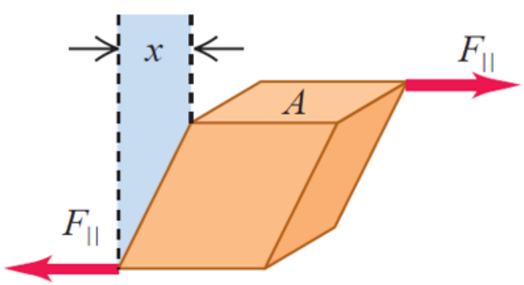
$p_0 = 1.013 \times 10^5 N/m^2$

T=273.16K

$\rho_0 = 1.293 kg/m^3$

绝热指数$\gamma = 1.40$

$v = 331.2 m/s.$

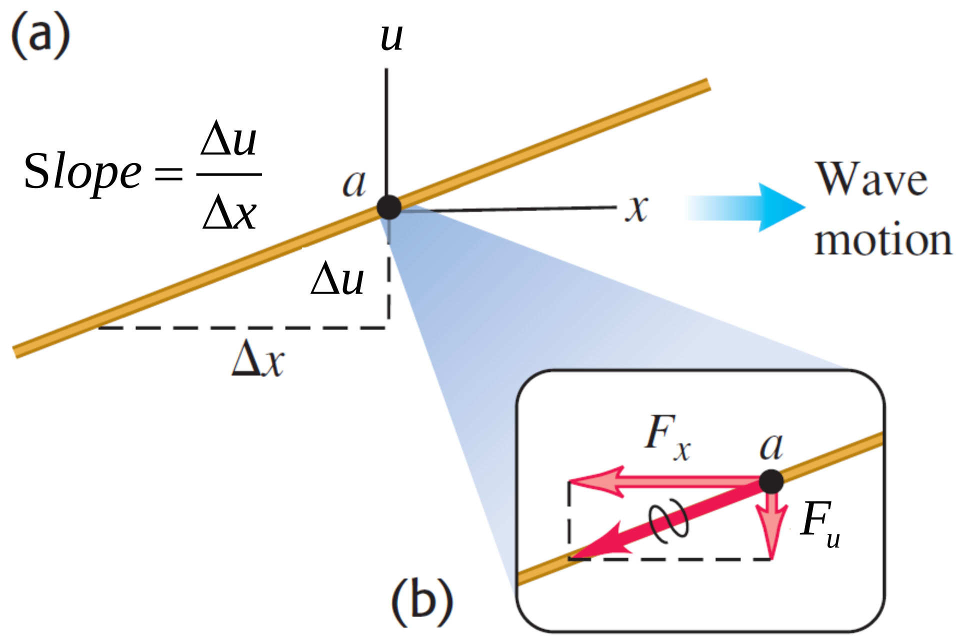


$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{331.2\ \mathrm{m/s}}{300\ \mathrm{Hz}} = 1.1\ \mathrm{m}$$

$$G_a = 0$$

波的传播的能量（推导方式1）

波传播时，介质中每一点施加力，对相邻质点做功。



$F_u\,/\,F$:弦的斜率

$$F_u(x,t) = -F\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

a沿u方向运动，力F_u做的功功率P为F_u乘以横向速度：

$$P(x,t) = F_u(x,t)v_u(x,t) = -F\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

波的传播的能量

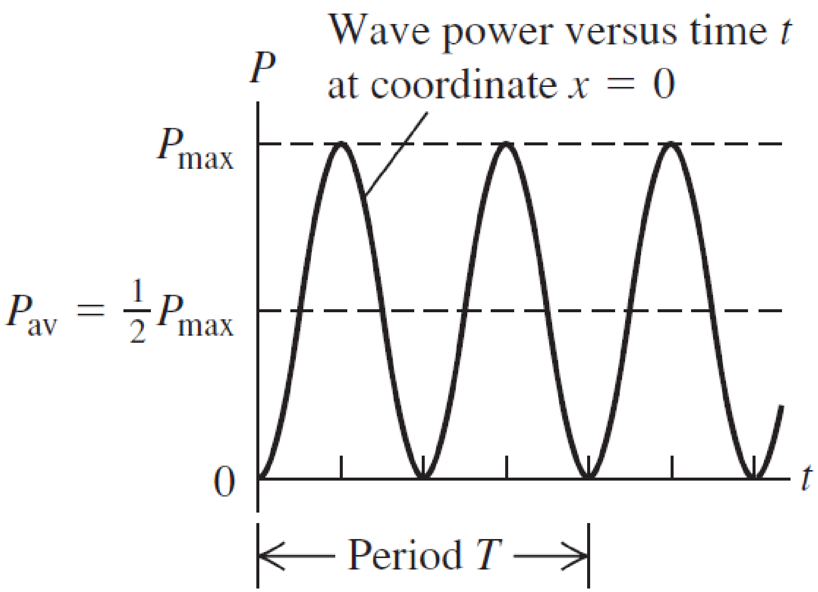
$$P(x,t)=F_u(x,t)v_u(x,t)=-F\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$u(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=-kA\sin(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\omega A\sin(kx-\omega t)$$

$$P(x,t)=Fk\omega A^2\sin^2(kx-\omega t)$$



代入：

$$\omega = vk \text{ 及 } v^2 = F/\mu$$

$$P(x,t)=\sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t)$$

$$P_{\max}=\sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2$$

$$P_{av}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2$$

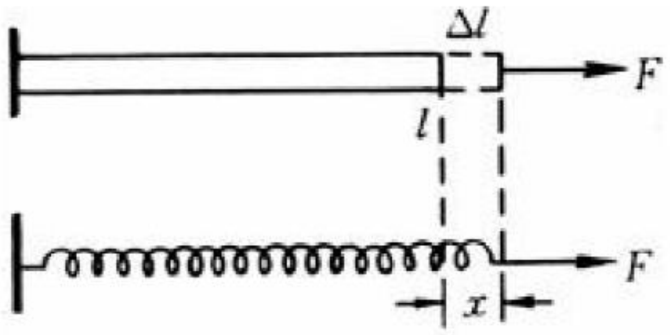
平均功率

$$P_{av}=\frac{1}{2}\mu v\omega^2A^2$$

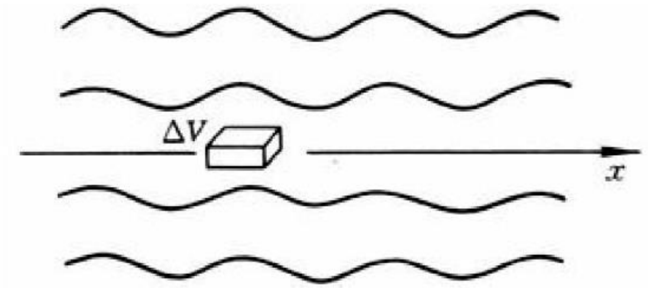
波的传播的能量 (推导方式2）

$u(x,t) = A\cos(wt - kx)$

如何求势能？类比弹簧



介质元的振动动能和弹性势能



弹簧		介质棒
$F = kx$	$\leftrightarrow$	$F = ES\dfrac{1}{l}\Delta l$
x	$\leftrightarrow$	Δl
k	$\leftrightarrow$	$\mathrm{k}_c = \dfrac{ES}{l}$
$E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{E}_p = \dfrac{1}{2}k_c(\Delta l)^2 = \dfrac{1}{2}E(\dfrac{\Delta l}{l})^2 V$

介质元$:\Delta m = \rho\Delta V$

振动动能ΔE_k和弹性势能ΔE_p

位移函数（波函数)$u(x,t)$,则

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial u}{\partial t})^2\Delta V$$

对波场代换$:V \to \Delta V, \Delta l / l \to \partial u / \partial x$

波的能量

势能：

纵波：$\Delta E_p = \frac{1}{2} E (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \Delta V$

动能：$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho (\frac{\partial u}{\partial t})^2 \Delta V$

横波：$\Delta E_p = \frac{1}{2} G (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \Delta V$

$$u(x,t) = A\cos(wt - kx)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -wA\sin(wt - kx)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = kA\sin(wt - kx)$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} E k^2 A^2 \Delta V \sin^2(wt - kx)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho w^2 A^2 \Delta V \sin^2(wt - kx)$$

机械能：$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2}(\rho w^2 + E k^2) A^2 \Delta V \sin^2(wt - kx)$

波的能量

机械能：$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2}(\rho w^2 + E k^2) A^2 \Delta V \sin^2(wt - kx)$

由波相速度公式: v=$\omega/k=\sqrt{E/\rho}$，得到$\rho w^2 = E k^2$(动能等于势能）

因此ΔV包含机械能：

$$\Delta E = \rho w^2 A^2 \Delta V \sin^2(wt - kx)$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} E k^2 A^2 \Delta V \sin^2(wt - kx)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho w^2 A^2 \Delta V \sin^2(wt - kx)$$

波场动能和势能同时达到最大或最小（和振动不同，
振动时平衡位置动能最大，势能最小。最大位移时相反。）

波场平衡位置时动能最大，介质间单位元相距也是最远，势能最大。

平均能量密度与平均能流密度

平均能量密度：单位体积内蕴含的能量

$$w(x,t)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta E}{\Delta V}=\rho w^2 A^2 \sin^2(wt-kx)$$

时间平均的平均能量密度

$$\bar{w}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta E}{\Delta V}=\frac{1}{T}\int_0^T w(x,t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\rho w^2 A^2$$

声音状态	声强/$(W\cdot m^{-2})$
刚能听到的声音	$1\times10^{-9}\sim10^{-12}$
钟表的滴答声	1×10^{-7}
平和的谈话声	1×10^{-5}
中等强度的演讲声	1×10^{-3}
叫喊声	1×10^{-1}
流行乐队演唱声	1×10
震耳欲聋声	1×10^{3}

平均能流密度

$$I=\bar{w}v=\frac{1}{2}\rho w^2 A^2 v(W/m^2)$$

$$P_{av}=\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

$$P_{av}/\Delta s=I$$