线性代数之行列式习题

1. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

答案： 一行(列)与另一行(列)的分行(列)成比例，将成比例的部分消掉。

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_k - c_{n+1}a_k} \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$$

2. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1-b & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2-b & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3-b & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4-b \end{vmatrix}$$

答案： 行的和或列的和相等。

$$D \xlongequal{r_1+(r_2+r_3+r_4)} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{4} a_k-b & \sum_{k=1}^{4} a_k-b & \sum_{k=1}^{4} a_k-b & \sum_{k=1}^{4} a_k-b \\ a_2 & a_2-b & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3-b & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4-b \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{4} a_k-b\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_2-b & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3-b & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[k=2,3,4]{r_k-a_k r_1}\left(\sum_{k=1}^{4} a_k-b\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$=-b^3\left(\sum_{k=1}^{4} a_k-b\right)$$

3. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

答案：

$n \geq 3$ 时,

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0$$

$n = 1$ 时，$D_1 = a_1 + b_1$

$n = 2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$

4. 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

答案：爪型行列式，消去第一列（行）后成三角行列式。

$$D_{n+1}\xlongequal{c_1-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{c_k}{a_{k-1}}}\begin{vmatrix} a_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=a_1\cdots a_n\left(a_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$$

5. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$$

答案：

解法 1： 用第一列消去其他列，化为爪型行列式。

$$D\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\ c_3-c_1}}\begin{vmatrix}1+x & -x & -x & -x\\ 1 & -x & 0 & 0\\ 1 & 0 & y & 0\\ 1 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x-1+\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{y} & -x & -x & -x\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

5. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$$

答案：

解法 2： 用“加边法”化为爪型行列式。

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}\xlongequal{r_k-r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -x & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & y & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+1/x-1/x+1/y-1/y & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$原式 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= xy^2 - xy^2 + x^2y^2 = x^2y^2$$

6. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n\end{vmatrix}(n\geq 2)$$

答案：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n\end{vmatrix}\overset{r_k-r_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2\end{vmatrix}=(-2)(n-2)!$$

7. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+\mathrm{b} & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

答案： 三斜行列式，直接按第一列（最后一列）展开得到递推式。

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix} a+\mathrm{b} & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\text{（按最后一列展开）}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix} a+\mathrm{b} & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}\text{（按最后一行展开）}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)$$

7. 计算行列式

答案：

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

$$D_2 = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$$

$$D_1 = a + b$$

$$D_2 - aD_1 = b^2$$

…

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

$$D_n = b^n + ab^{n-1} + \cdots a^{n-1}b + a^n = \begin{cases} (n+1)a^n & a = b \\ \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} & a \neq b \end{cases}$$

13. 利用行列式展开定理计算$2n$阶行列式，其中未标明的元素都为0

$$D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}}_{2n}$$

$$D_{2n} = a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & b & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{(2n-1)} +(-1)^{2n+1} b\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(2n-1)}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(2n-2)} - (-1)^{2n-1+1} b^2\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(2n-2)}$$

$$= (a^2 - b^2) D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = (a^2 - b^2)^{n-1} D_2$$

$$= (a^2 - b^2)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n$$