矩阵的初等变换

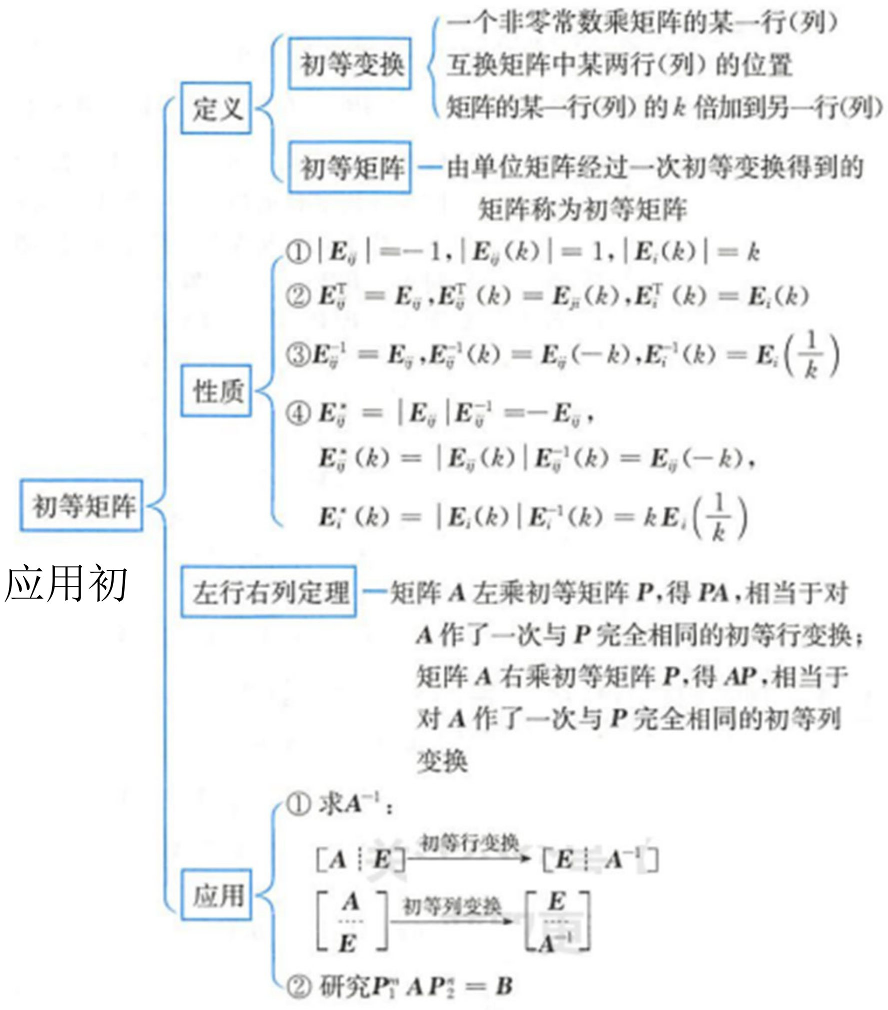
重难点

1. 矩阵的线性运算、乘法运算及其性质；
2. 用矩阵的初等变换求逆矩阵；
3. 可逆矩阵与初等矩阵的关系；

触类旁通

矩阵的初等变换运算是后续章节学习的基础，以初等行变换为例，应用初等行变换可以：

1. 计算矩阵的秩，化标准型；
2. 求逆矩阵；
3. 线性方程组求解；
4. 讨论向量组的线性相关性，求极大无关组等。



习题课7

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & a\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(1) 当a为何值时，矩阵A和B等价？

(2) 当矩阵A和B等价时，用初等变换把矩阵A化成矩阵B，并写出所用的初等矩阵。

习题课7

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(1) 当a为何值时，矩阵A和B等价？

(2) 当矩阵A和B等价时，用初等变换把矩阵A化成矩阵B，并写出所用的初等矩阵。

(1) 矩阵A和B同型，A等价于$B \Leftrightarrow r(A)=r(B)$. 对于$B$, 显然有$r(B)$=2.

对于A, 因 $\begin{vmatrix}1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\neq 0$ 要求 $r(A)=r(B)=2$, 故应有$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&a+4\end{vmatrix}$

得$a=-4$. 因此，当$a=-4$时，A和B等价。

(2) 当 $a=-4$时，$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{bmatrix}$

先对矩阵A做行变换如下：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{P_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{P_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=B_1,\quad P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

再对矩阵B_1做列变换如下：

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{Q}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=B,\quad Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

故 $P_2P_1AQ=B$

本题考察等价矩阵、初等矩阵和矩阵的初等变换的结合

习题课8

已知$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}+2a_{31} & a_{23}+2a_{33} & a_{22}+2a_{32} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$.

若$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,求$B^{-1}$.

已知$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}+2a_{31} & a_{23}+2a_{33} & a_{22}+2a_{32} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$.

若$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,求$B^{-1}$.

分析可知A经过一次初等行变换和一次初等列变换得到矩阵B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+2\cdot r_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+2a_{31} & a_{22}+2a_{32} & a_{23}+2a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}+2a_{31} & a_{23}+2a_{33} & a_{22}+2a_{32} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix},$$ 则

$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,所以

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

本题考察利用矩阵的初等
变换求矩阵的逆

设 $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，其中 A,D 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 $n\times m$ 矩阵。

证明：T 可逆的充要条件是 $D-CA^{-1}B$ 可逆。

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}A & O\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

即：$\begin{pmatrix}E_m & O\\ -CA^{-1} & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & -A^{-1}B\\ O & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O\\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}E_m & O\\ -CA^{-1} & E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_m & -A^{-1}B\\ O & E_n\end{vmatrix}=1$$

所以，$|T|=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_m & O\\ -CA^{-1} & E_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_m & -A^{-1}B\\ O & E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & O\\ O & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$

因为 A 是可逆矩阵，所以 $|A|\neq 0$

所以，$|T|\neq 0 \iff |D-CA^{-1}B|\neq 0$