1. 设有向量组 $\alpha_1 = (1,0,2,1), \alpha_2 = (2,0,1,-1), \alpha_3 = (3,0,3,0), \beta_1 = (1,1,0,1), \beta_2 = (4,1,3,1)$. 令 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$. 求 $V_1 + V_2$ 的维数, 并求一组基

1. 设有向量组 $\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(2,0,1,-1),\alpha_3=(3,0,3,0),\beta_1=(1,1,0,1),\beta_2=(4,1,3,1)$. 令 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),V_2=L(\beta_1,\beta_2)$. 求 V_1+V_2 的维数, 并求一组基

解答:

由于

$$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$$

故 V_1+V_2 的维数就是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的秩, 而这个向量组的极大无关组也就是 V_1+V_2 的基. 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 为列作为矩阵, 并对其进行初等变换:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1&4\\0&0&0&1&1\\2&1&3&0&3\\1&-1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

显然 A 的秩为 3, 故 V_1+V_2 的维数是 3. 变换后的矩阵中第 2,3,4 列线性无关, 故可以取 $\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 作为 V_1+V_2 的一组基

4. 判断以下结论的正确性:

若 U_1, U_2, W 是 V 的子空间,

(1) 若 $U_1 + W = U_2 + W$, 则 $U_1 = U_2$.

(2) 若 $V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$, 则 $U_1 = U_2$.

4. 判断以下结论的正确性:
若 U_1, U_2, W 是 V 的子空间,
(1) 若 $U_1 + W = U_2 + W$, 则 $U_1 = U_2$.
(2) 若 $V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$, 则 $U_1 = U_2$.
解答:
(1) 错误
反例: $U_1 = \{(a, b) \in R^2\}, U_2 = \{(a, 0) \in R^2\}$, $W = \{(0, b) \in R^2\}$, 显然有 $U_1 + W = U_2 + W$, 但是 $U_1 \neq U_2$
(2) 错误
反例: $V = R^2, U_1 = \{(a, 0) \in R^2\}, U_2 = \{(0, a) \in R^2\}, W = \{(a, a) \in R^2\}$

5. 若用 U_e 表示 $R \to R$ 上全体偶函数构成的空间, 用 U_o 表示 $R \to R$ 上全体奇函数构成的空间, 用 F 表示 R 上所有实值函数构成的空间, 证明:$F = U_e \oplus U_o$.

5. 若用 U_e 表示 $R \to R$ 上全体偶函数构成的空间，用 U_o 表示 $R \to R$ 上全体奇函数构成的空间，用 F 表示 R 上所有实值函数构成的空间，证明:$F = U_e \oplus U_o$.

解答:

$\forall f(x) \in F$，有

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

显然 $\frac{f(x)+f(-x)}{2} \in U_e, \frac{f(x)-f(-x)}{2} \in U_o$，所以有 $F = U_e + U_o$. 又 $U_e \cap U_o = \{f(x) = 0\}$，故 $F = U_e \oplus U_o$

6. 设 $U = \{(x, x, y, y) \in F^4\}$,
$W = \{(x, x, x, y) \in F^4\}, V = \{(x, x, y, z) \in F^4\}$, 证明:$V = U + W$.

6. 设 $U=\{(x,x,y,y)\in F^4\}$,
$W=\{(x,x,x,y)\in F^4\}, V=\{(x,x,y,z)\in F^4\}$, 证明:$V=U+W$.

解答:

设 $(a,a,b,b)\in U, (c,c,c,d)\in W$, 则 $U+W$ 中的元素有如下形式:

$$(a+c,a+c,b+c,b+d)$$

由于 a,b,c,d 的任意性,$(a+c,a+c,b+c,b+d)\in V$, 则 $U+W\subseteq V$.
另一方面,$\forall(x,x,y,z)\in V$, 有

$$(x,x,y,z)=(0,0,y-x,y-x)\in U+(x,x,x,z-y+x)\in W$$

故 $V\subseteq U+W$
综上有 $V=U+W$.

2. 设 G, H, K 为线性空间 V 的子空间. 证明: 以下等式成立:

(1) $G \cap (G \cap H + K) = G \cap H + G \cap K$

(2) $(G + H) \cap (G + K) = G + (G + H) \cap K$

2. 设 G, H, K 为线性空间 V 的子空间. 证明: 以下等式成立:
(1) $G \cap (G \cap H + K) = G \cap H + G \cap K$
(2) $(G + H) \cap (G + K) = G + (G + H) \cap K$
解答:
(1) 任取 $\alpha \in G \cap (G \cap H + K)$, 则 $\alpha \in G$ 且 $\alpha \in (G \cap H + K)$, 令

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in G \cap H, \alpha_2 \in K$$

从而 $\alpha_1 \in G, \alpha_1 \in H$. 进一步有 $\alpha_2 (= \alpha - \alpha_1) \in G$, 故 $\alpha_2 \in G \cap K$, 则

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in G \cap H + G \cap K$$

所以,$G \cap (G \cap H + K) \subseteq G \cap H + G \cap K$
另一方面, 任取 $\alpha \in (G \cap H + G \cap K)$, 令

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in G \cap H, \alpha_2 \in G \cap K$$

于是,$\alpha_1 \in G, \alpha_1 \in H, \alpha_2 \in G, \alpha_2 \in K$
从而 $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) \in G, \alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) \in (G \cap H + K)$ $\boxed{\alpha_2 \in G \cap K,\ 则也 \in K}$
故 $\alpha \in G \cap (G \cap H + K)$, 进一步可知 $G \cap H + G \cap K \subseteq G \cap (G \cap H + K)$.
综上有,$G \cap (G \cap H + K) = G \cap H + G \cap K$

2. 设 G, H, K 为线性空间 V 的子空间. 证明: 以下等式成立:
(1) $G\cap(G\cap H+K)=G\cap H+G\cap K$
(2) $(G+H)\cap(G+K)=G+(G+H)\cap K$

(2) 由 (1) 可知

$$G\cap(G\cap H+K)=G\cap H+G\cap K$$

在该式中, 把 G 全部换成 $G+H$, 由于 $(G+H)\cap H=H$, 则有

$$(G+H)\cap(H+K)=H+(G+H)\cap K$$

再将上式中的 G, H 对调, 即

$$(G+H)\cap(G+K)=G+(G+H)\cap K$$

8. 设 $U = span((1,1,0,0),(1,1,1,2))$, 求 $u \in U$ 使得 $\|u-(1,2,3,4)\|$ 最小.

8. 设 $U=span((1,1,0,0),(1,1,1,2))$, 求 $u\in U$ 使得 $\|u-(1,2,3,4)\|$ 最小.

解答: （法一）

这是一个极小化问题. 只需要求 $(1,2,3,4)$ 在 U 上的投影即可.

由于 $R^4=U\oplus U^{\perp},\forall v\in R^4$, 令 $v=u+w$, 其中 $u\in U,w\in U^{\perp}$, 则 v 在 U 中投影可以表示为 $u=<v,e_1>e_1+\cdots+<v,e_m>e_m$, 其中 $e_1,\cdots,e_m$ 是 U 的规范正交基.

将 $(1,1,0,0),(1,1,1,2)$ 进行规范正交化得,

$$e_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$$

,

$$e_2=(0,0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$$

. 故

$$\begin{aligned}u&=<v,e_1>e_1+<v,e_2>e_2(v=(1,2,3,4))\\&=(1.5,1.5,0,0)+(0,0,2.2,4.4)=(1.5,1.5,2.2,4.4)\end{aligned}$$

（法二） 正交投影公式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 直接计算得到.

（法三） 求U 的正交补，写出向量 $(1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$ 的唯一表示式

（法二） 正交投影公式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 直接计算得到.

（法三） 求 U 的正交补，写出向量 $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$ 的唯一表示式

① 求 $U^{\perp}$，解方程组得基础解系. $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$

$U^{\perp}=\mathrm{span}(\beta_1,\beta_2)$

② 求向量 $(1,2,3,4)$ 的表出系数.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&0&1\\1&1&1&0&2\\0&1&0&-2&3\\0&2&0&1&4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&0&1\\0&0&2&0&1\\0&1&0&-2&3\\0&0&0&5&-2\end{array}\right)$$

系数为: $-\frac{7}{10}$ $\frac{11}{5}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{2}{5}$

③ 因此 $(1,2,3,4)^T$ 在 U 上的正交投影为: $-\frac{7}{10}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{11}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5\\1.5\\2.2\\4.4\end{pmatrix}$

7. 设 V 是有限维空间且 U 是 V 的子空间, 证明: $P_{U^\perp} = I - P_U$. 其中 P_X 代表到空间 X 上的正交投影 (变换),I 代表 V 上的恒等变换

7. 设 V 是有限维空间且 U 是 V 的子空间, 证明: $P_{U^\perp} = I - P_U$. 其中 P_X 代表到空间 X 上的正交投影 (变换),I 代表 V 上的恒等变换

解答:

$\forall v \in V$, 令 $v = u + w$, 其中 $u \in U, w \in U^\perp$, 则

$$P_U(v) = u$$

$$P_{U^\perp}(v) = w = v - u$$

即 $\forall v \in V$, 都有 $P_{U^\perp}(v) = (I - P_U)(v)$, 则 $P_{U^\perp} = I - P_U$.