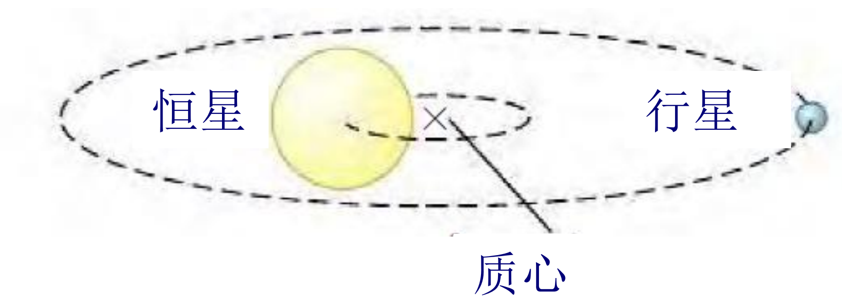
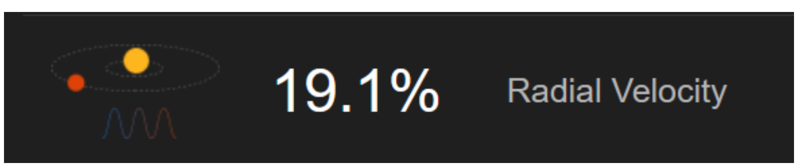
发现地外行星



恒星在周期性晃动,进而影响光谱变化



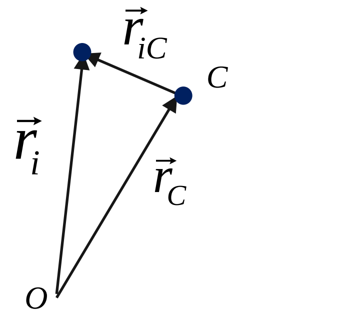
质心参照系

以质心为参考点建立参照系。

质心系中，质心的速度为0。

质心动能定理

质心动能是否等于质点组动能之和？ NO!



$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{iC}, \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{iC}$$

质心动能：

$$\mathrm{E}_C = \frac{1}{2} M v_C^2$$

质点组总动能：

$$\mathrm{E}_k = \sum \{ \frac{1}{2} m_i v_i^2 \}$$

展开$v_i{}^2$

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_C + \vec{v}_{iC}) \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}_{iC})$$

$$= \boxed{v_C^2} + v_{iC}^2 + \boxed{2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC}}$$

计算$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$，第一项为质心动能，最后一项变为

$$\sum (\frac{1}{2} m_i \cdot 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{\mathrm{i}C}) = \vec{v}_C \cdot \sum m_i \vec{v}_{ic} = \vec{v}_c \cdot 0 = 0$$

质心动能定理

质心动能是否等于质点组动能之和？ **NO!**

质心动能：

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2$$

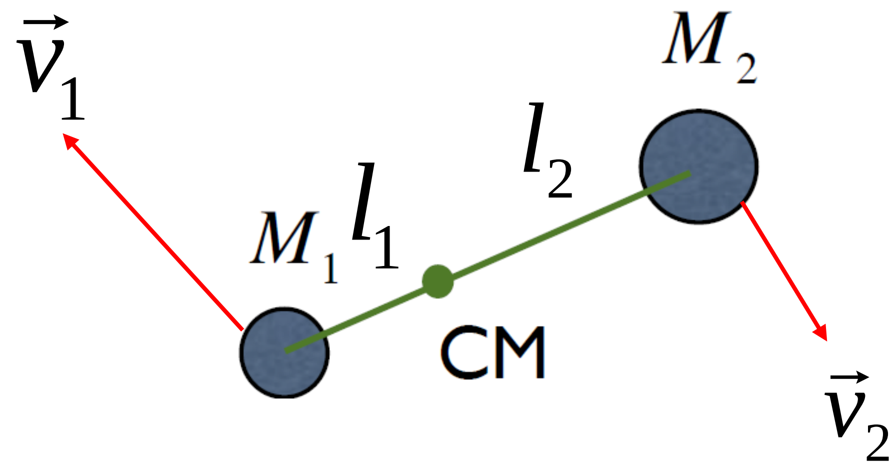
质点组总动能：

$$\begin{aligned} E_k &= \sum \{ \frac{1}{2} m_i v_i^2 \} \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum (\frac{1}{2} m_i v_{iC}^2) \\ &= E_C + \sum (\frac{1}{2} m_i v_{iC}^2) \\ &= E_C + E_{rC} \end{aligned}$$

König定理

质点组动能等于质心动能加上质点组相对质心动能

两体相对质心动能公式



杠杆关系：$M_1 l_1 = M_2 l_2$

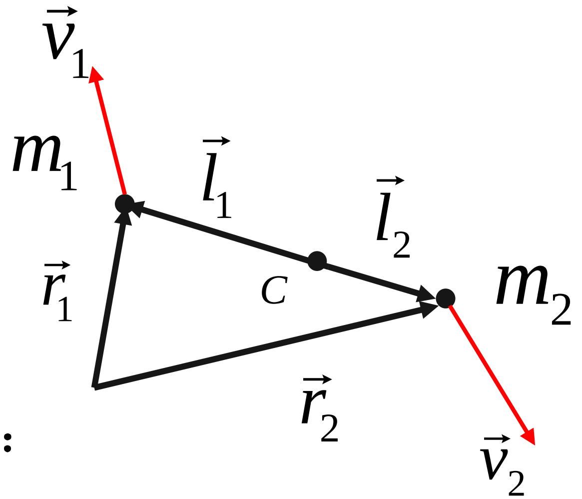
两体相对质心动能有没有简化的形式？

$$E_{rC} = \frac{1}{2}\mu v_r^{\ 2}$$

两体相对质心动能公式

两质点各自相对质心运动为：

$$\vec{v}_{1C}=\frac{d\vec{l}_1}{dt},\vec{v}_{2C}=\frac{d\vec{l}_2}{dt}$$



相对质心运动动能：

$$E_{rC}=\frac{1}{2}m_1\left|\frac{d\vec{l}_1}{dt}\right|^2+\frac{1}{2}m_2\left|\frac{d\vec{l}_2}{dt}\right|^2$$

由杠杆关系

$$\vec{l}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{l},\vec{l}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{l}$$

相对动能公式简化为：

$$\mathrm{E}_{rC}=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left|\frac{d\vec{l}}{dt}\right|^2$$

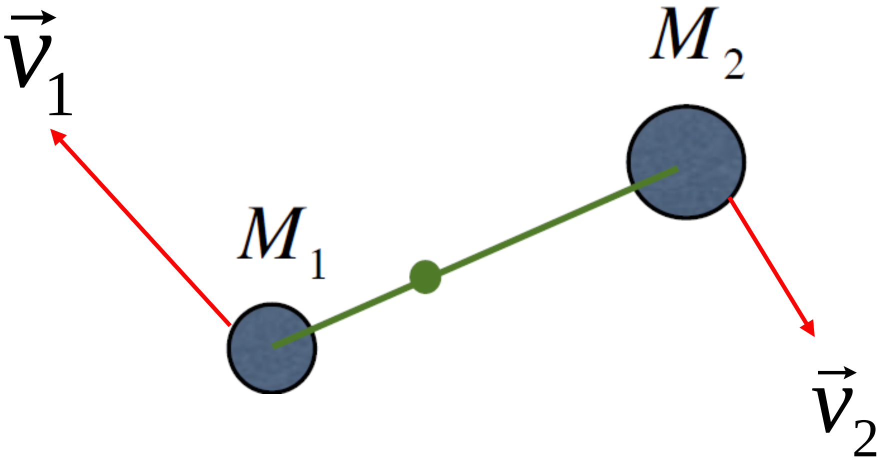
而$\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}/\mathrm{dt}=\vec{\mathrm{v}}_1-\vec{v}_2=\vec{v}_r$两体相对速度

$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$为约化质量

两体相对质心动能公式：

$$E_{rC}=\frac{1}{2}\mu v_r^{\,2}$$

两体相对质心动能公式

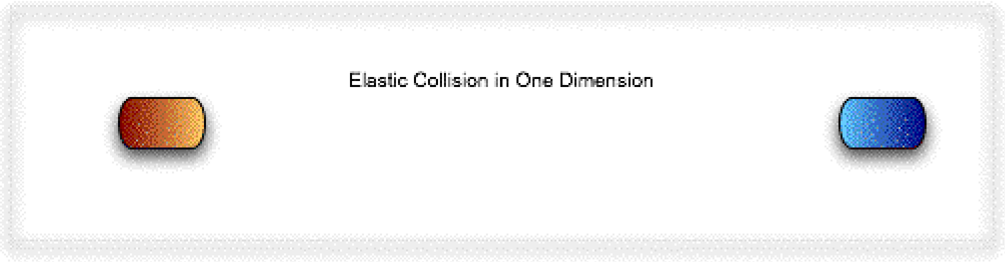


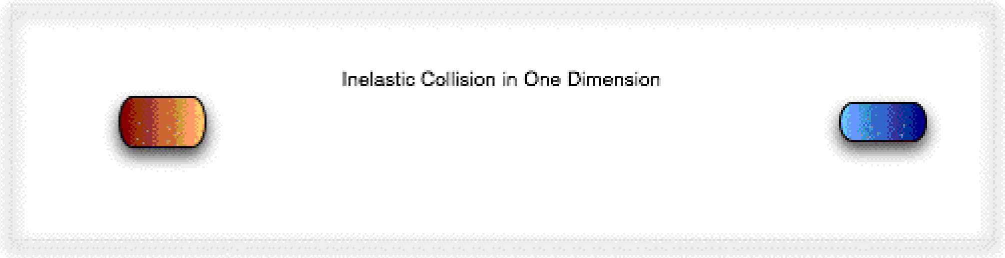
$$E_{rC} = \frac{1}{2}\mu v_r^{\ 2}$$

两体相对质心动能有没有简化的形式？

$$\mu_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

两体碰撞


Elastic Collision in One Dimension


Inelastic Collision in One Dimension

碰撞动能亏损公式

两体碰撞前动能：

$$\mathrm{E}_k = E_C + E_{rC}$$

碰撞后

$$E_k' = E_C' + E_{rC}'$$

选取质心参考系，则

$$\mathrm{E}_C' = E_C = 0$$

动能改变量：

$$\Delta \mathrm{E}_k = E'_{rC} - E_{rC} = \frac{1}{2}\mu v_r'^2 - \frac{1}{2}\mu v_r^2$$

碰前相对速度：

$$\mathrm{v}_r = v_{20} - v_{10}$$

碰后相对速度

$$v_r' = v_1 - v_2$$

定义恢复系数

$$e = v_r'/v_r$$

上式被改写为

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2}(1-e^2)\mu v_r^2$$

重力势能与质心势能

只有在恒定力场中，势能中心与质心重合

质点组重力势能：

$$\sum m_i g h_i = g\sum(m_i h_i) = g\frac{\sum m_i h_i}{\sum m_i}\sum m_i = g h_C M$$

其中$M=\sum m_i$

因此质心重力势能等于质点组总势能

$$\mathrm{Mgh}_c = \sum m_i g h_i$$

但是一般引力场，质心引力势能不等于质点组的总引力势能

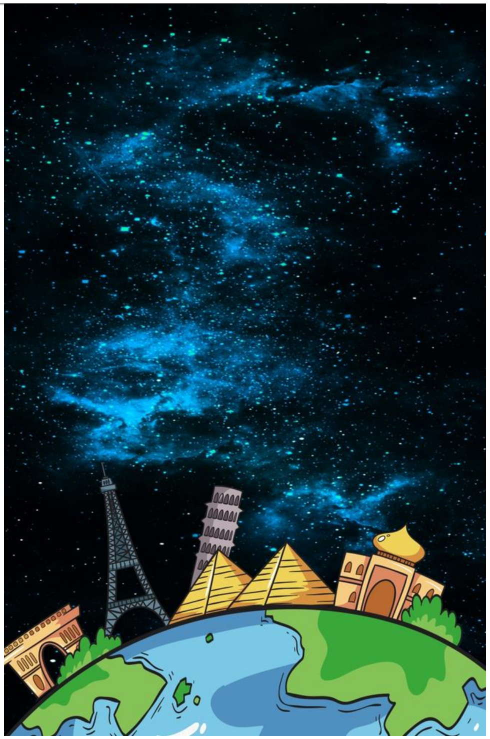
$$-\mathrm{G}\frac{M_0 M}{r_C} \neq -G\sum\frac{M_0 m_i}{r_i}$$

质心和重心

$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

$$\frac{dg}{dr} = \frac{-2GM}{r^3}$$



$$r_0 = 6000\ \mathrm{km}, h = 500\ \mathrm{m}$$

质心比重心高约2cm

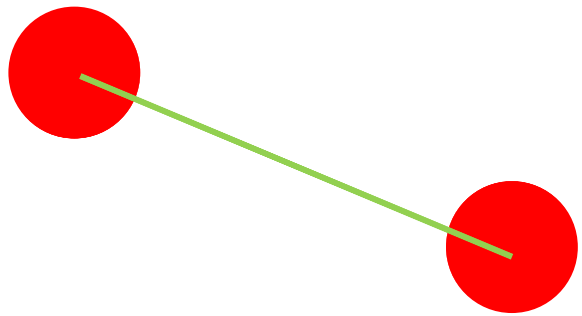
质心角动量定理

质点组总角动量等于质心角动量与质点组相对质心角动量之和

质点组总角动量是否等于质心角动量？**NO**

质点组总角动量为

$$\vec{L}=\sum(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)$$



$$r_i=\vec{r}_C+\vec{r}_{iC},\quad \vec{v}_i=\vec{v}_C+\vec{v}_{iC}$$

展开（$\vec{r}_i\times\vec{v}_i$），有

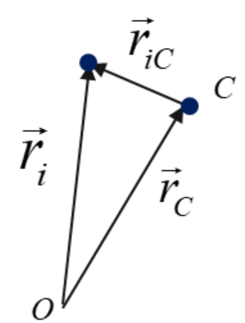
$$(\vec{r}_C+\vec{r}_{iC})\times(\vec{v}_C+\vec{v}_{iC})=\vec{r}_C\times\vec{v}_C+\vec{r}_{iC}\times\vec{v}_{iC}+\boxed{\vec{r}_C\times\vec{v}_{iC}+\vec{r}_{iC}\times\vec{v}_C}$$

第三四项进入求和后

$$\sum(\vec{r}_C\times m_i\vec{v}_{iC})=\vec{r}_C\times\sum m_i\vec{v}_{iC}=\vec{r}_C\times 0=0$$

$$\sum(m_i\vec{r}_{iC}\times\vec{v}_C)=(\sum m_i\vec{r}_{iC})\times\vec{v}_C=0\times\vec{v}_C=0$$

König定理



总角动量展开仅保留两项

$$\vec{L}=(\sum m_i)\vec{r}_C\times\vec{v}_C+\sum(\vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC})=\vec{L}_C+\vec{L}_{rC}$$

$\vec{L}_{rC}$：自旋角动量

质心角动量变化定理

$\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}_{rC}$

总角动量随时间变化：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_C}{dt} + \frac{d\vec{L}_{rC}}{dt}$$

而质点组总角动量变化

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

代入$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{iC}$

所以：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_C \times \sum \vec{F}_i + \sum(\vec{r}_{iC} \times \vec{F}_i)$$

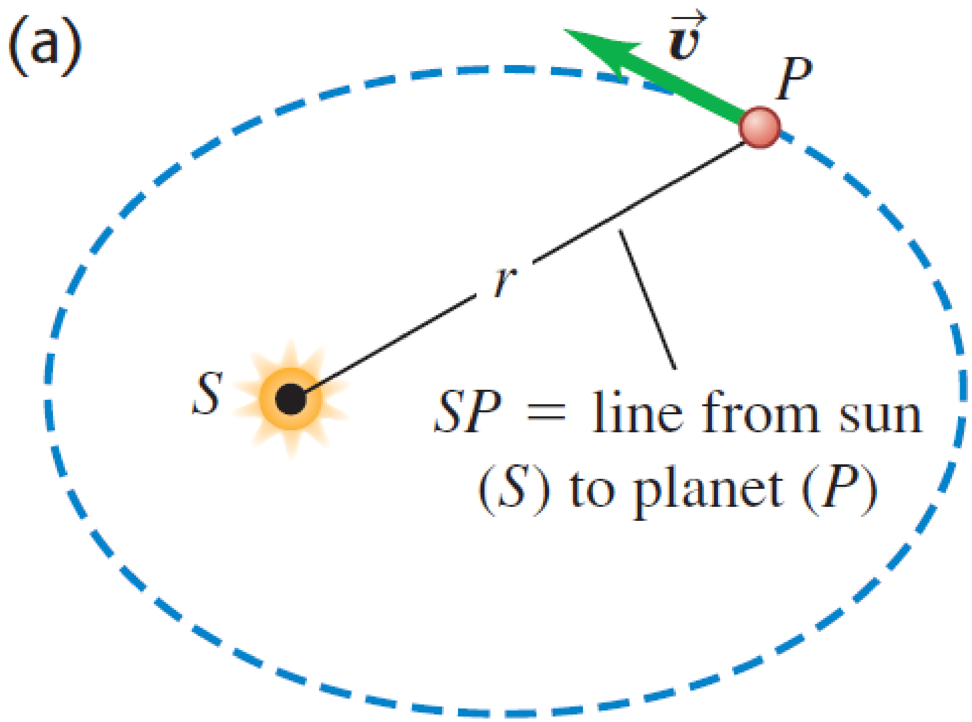
$= \vec{M}_C + \vec{M}_{rC}$

$\vec{M}_C$:合外力作用于质心的力矩　$\vec{M}_{rC}$:外力相对于质心的总力矩

$$\frac{d\vec{L}_{rC}}{dt} = \vec{M}_{rC}$$

相对质心的角动量变化等于外力相对质心的总力矩。

有心运动方程与约化质量

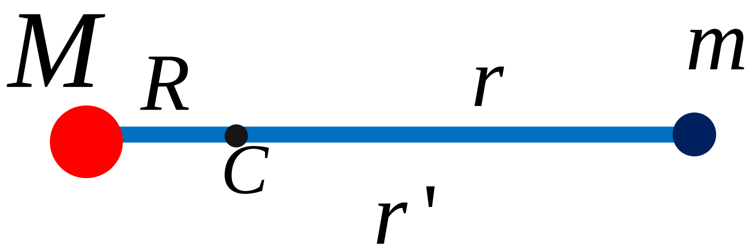


偏差有多少？

地-日运动：　质心系　无外力时，为惯性系

日心系　只有当太阳质量很大时，才是准非惯性系

有心运动方程与约化质量



质心系为惯性系， 满足牛顿定律：

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{f},\text{即}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{1}{m}\vec{f}$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\vec{f}',\text{即}\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\frac{1}{M}\vec{f}'$$

$$\frac{d^2(\vec{r}-\vec{R})}{dt^2}=(\frac{1}{m}\vec{f}-\frac{1}{M}\vec{f}')$$

$$\vec{f}=-\vec{f}'$$

因此

$$\frac{d^2(\vec{r}-\vec{R})}{dt^2}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{M})\vec{f}$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{M})\vec{f}$$

日心系（非惯性系）

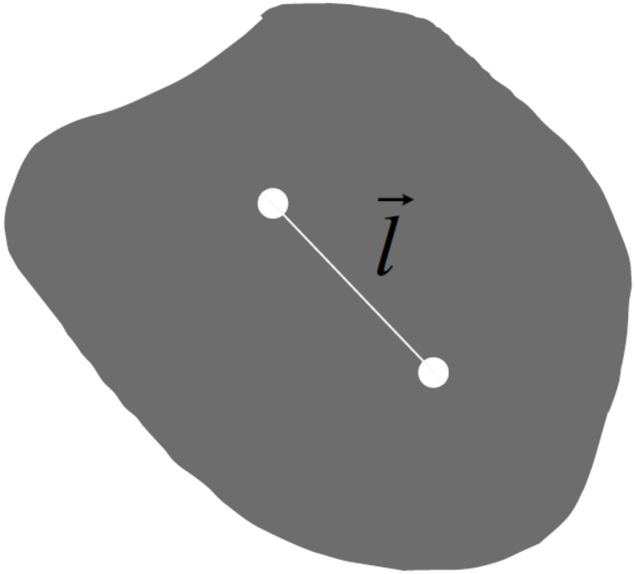
$$\mu_r=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$\mu\frac{d^2r'}{dt^2}=f$$

第三章：刚体

刚体：直观的理解，运动中形状保持不变（或者形变可以忽略）

如何严格的定义刚体？



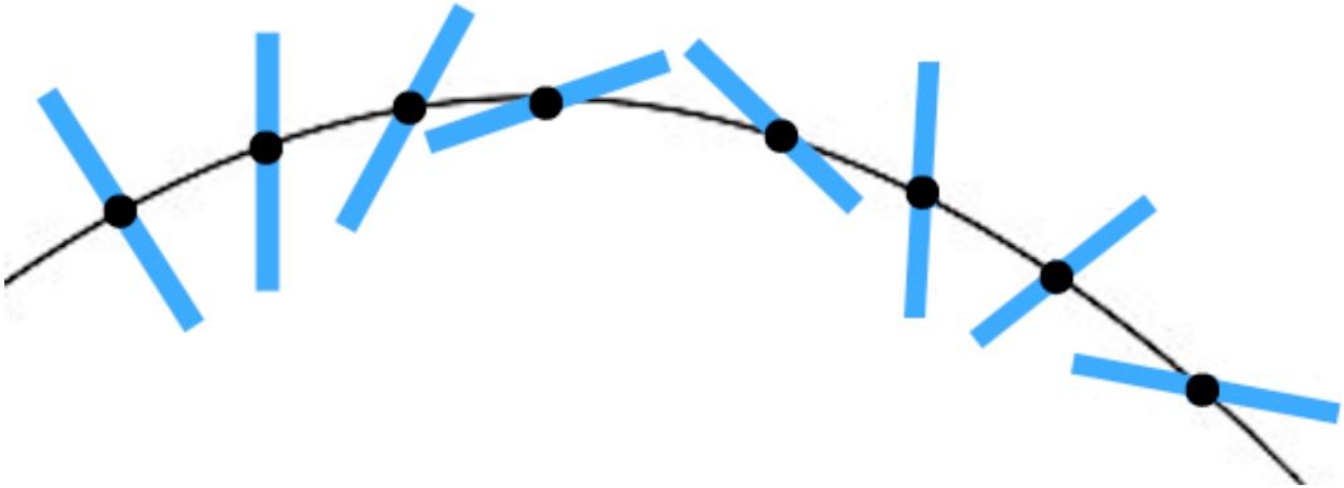
无论在多大外力的作用下，系统内任意两质点间的距离始终保持不变

$$\left|\vec{l}(t)\right| = 0$$

刚体是一个理想模型

刚体的平动和转动

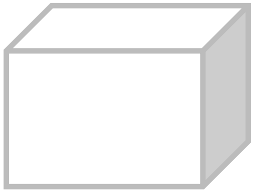
平动 + 转动



如何定义平动和转动？

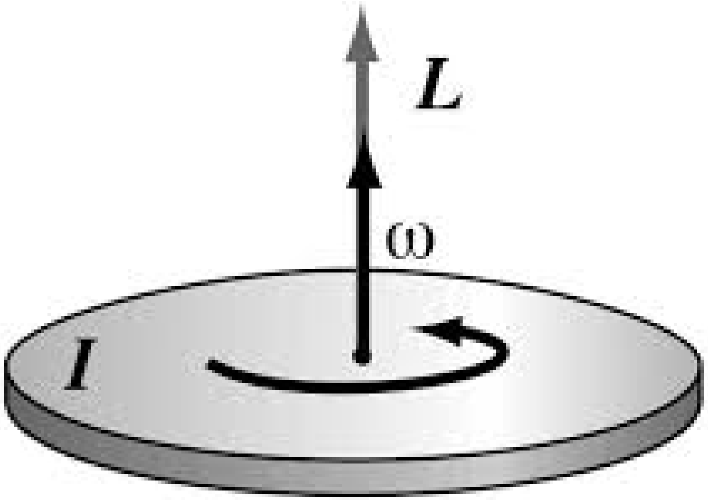
平动

平动： 刚体内任意一条给定的直线，在运动中始终保持它的方向不变

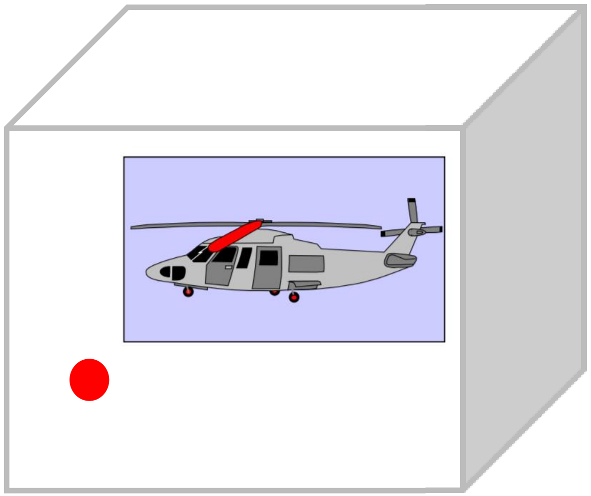


转动

转动： 各个质点在运动中都在绕同一直线做圆周运动

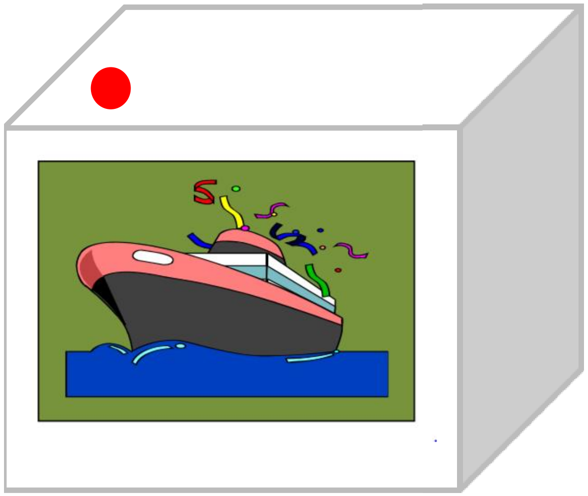


自由度

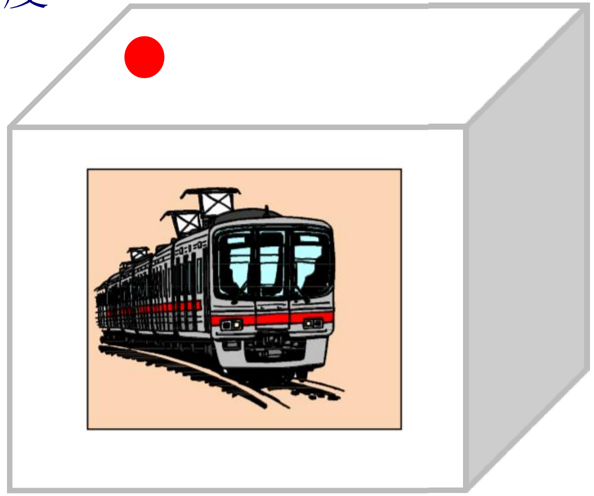


x,y,z

三个自由度



x, y 两个自由度



x 一个自由度

自由度

如果没有限制，每个质点3个自由度

两个质点构成的系统有6个自由度

刚体内部各质点相对距离不变，所以刚体最多6个自由度：

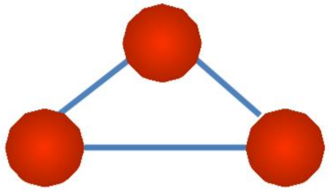
3个平动自由度
3个转动自由度

但存在一定约束关系，如两个质点间距离固定

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=r_0$$

约束方程使得自由度由6个减少到5个

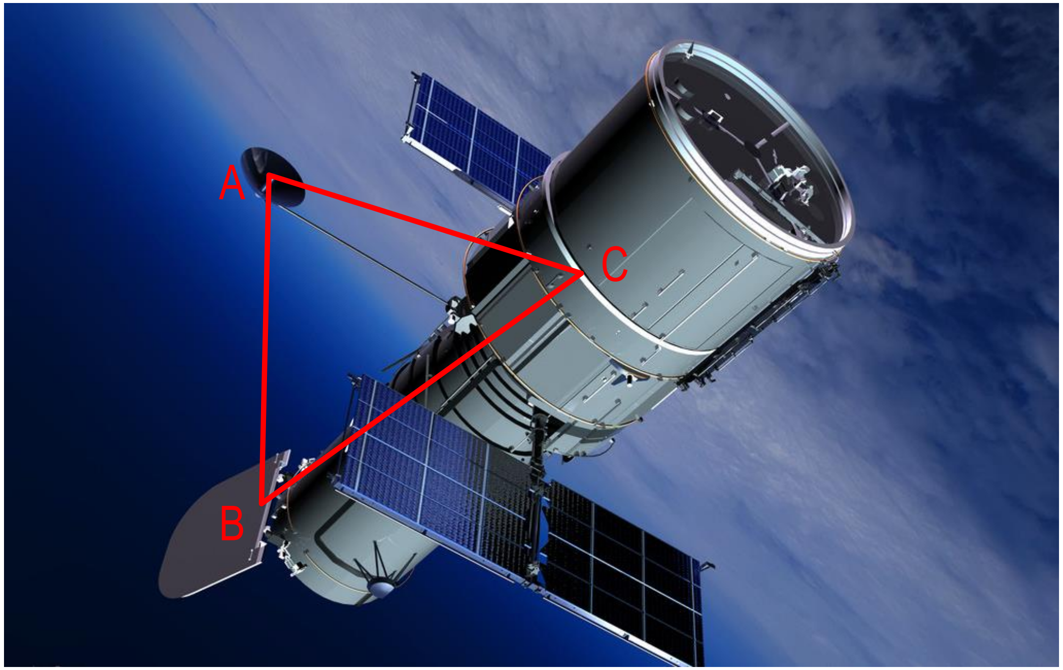
若三个质点之间距离固定，三个质点需要9个坐标，加上三个约束方程，剩6个自由度



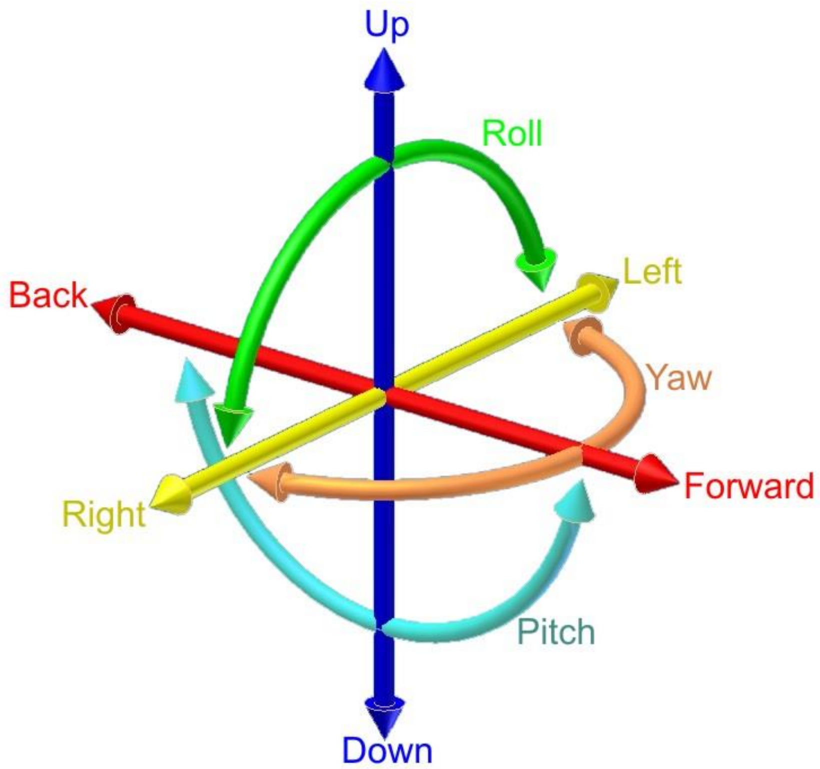
三个以上质点距离固定，也只有6个自由度

刚性三角形

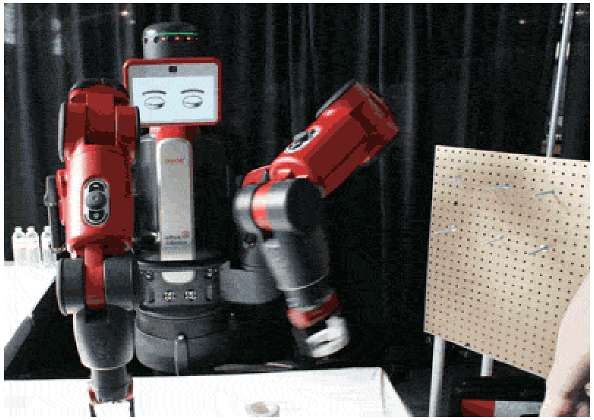
刚体上任意不共线三点可以完全确定刚体方位



刚体自由度



最多6个自由度
质心的3个平动自由度加上转动自由度



刚体自由度

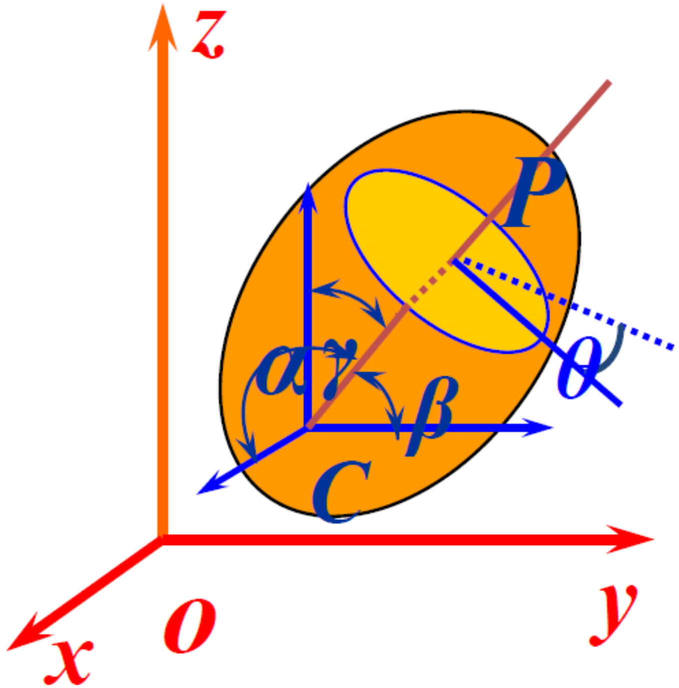
- 确定刚体质心C 的位置，需三个独立坐标（x，y，z），因此自由刚体有三个平动自由度 ；

- 确定刚体通过质心轴的空间方位需三个方位角（α，β，γ中只有其中两个是独立的)，需2个转动自由度；另外还要确定刚体绕通过质心轴转过的角度 θ，即还需1个转动自由度。所以自由刚体共有3个转动自由度。

C ： x, y, z;　　CP :α, β, γ;　绕 CP 转角:θ;

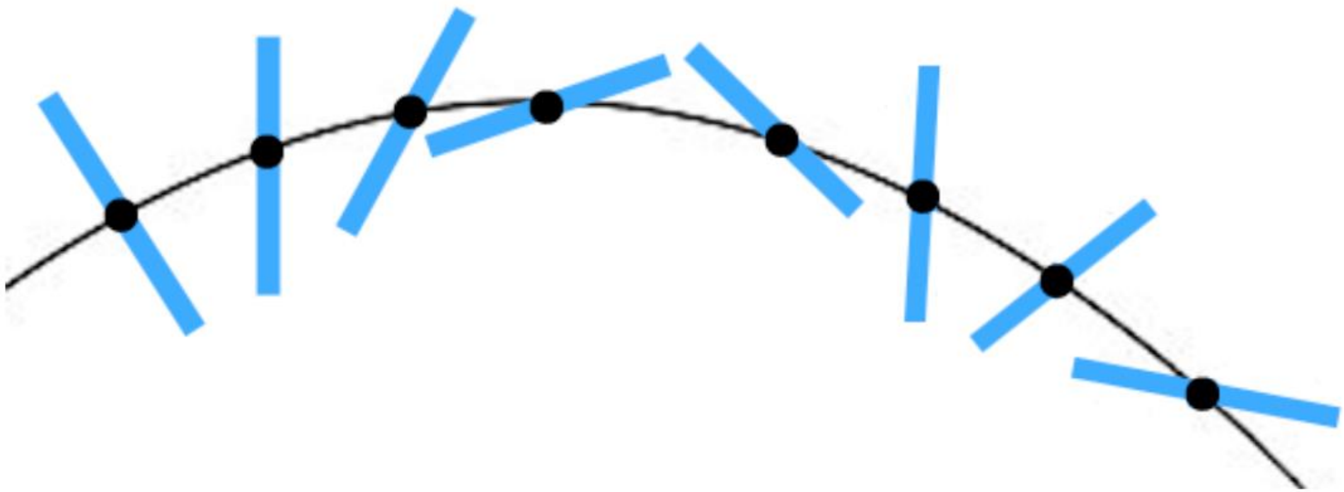
约束条件：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$$\text{刚体自由度数 } 6\begin{cases}\text{平动自由度} & 3\text{个}\\ \text{转动自由度} & 3\text{个}\end{cases}$$



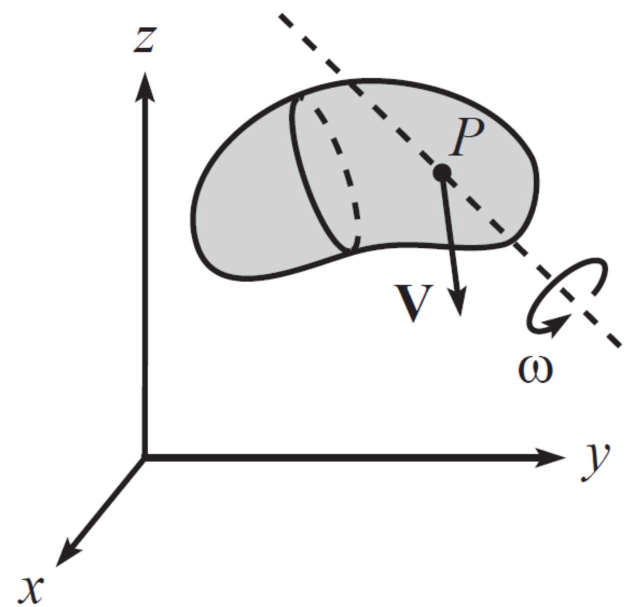
刚体的平动和转动

平动 + 转动



刚体的运动

刚体做任意运动。取刚体内任意一点P(基点)。在任何时刻，刚体的运动都可以写作P点的平移运动，加上绕穿过P点的一个轴的旋转运动 (Chasles' theorem， 夏莱定理)。



旋转的角速度与基点的选择无关