1. 设$f(x,y)$具有连续二阶偏导数，求$\lim\limits_{h\to 0+}\frac{f\left(2h,e^{-\frac{1}{(2h)}}\right)-2f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)+f(0,0)}{h^2}$

因为$f(x,y)$具有连续二阶偏导数，所以当$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$时

$$f(\Delta x,\Delta y)=f(0,0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)+o(\Delta x^2+\Delta y^2)$$

又因为当$h\to 0+$时，$\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)\to(0,0)$，且$\lim\limits_{h\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^2}=0$，所以：

$$f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)=f(0,0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+e^{-\frac{1}{h}}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+e^{-\frac{1}{h}}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)+o(h^2)$$

$$=f(0,0)+hf_x'(0,0)+e^{-\frac{1}{h}}f_y'(0,0)+\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}''(0,0)+2h\,e^{-\frac{1}{h}}f_{xy}''(0,0)+e^{-\frac{1}{2h}}f_{yy}''(0,0)\right)+o(h^2)$$

$$=f(0,0)+hf_x'(0,0)+\frac{1}{2}h^2f_{xx}''(0,0)+o(h^2)$$

$$f\left(2h,e^{-\frac{1}{2h}}\right)=f(0,0)+2hf_x'(0,0)+2h^2f_{xx}''(0,0)+o(h^2)$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f\left(2h,e^{-\frac{1}{(2h)}}\right)-2f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)+f(0,0)}{h^2}=f_{xx}''(0,0)$$

2. 设函数$f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$定义在区域$\Omega=\{(x,y)|0<x<+\infty,0<y<+\infty\}$，判断此函数有无最大值、最小值，如果有，请求出；如果没有，请说明理由

a) 无最大值，因为$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=+\infty$

b) 如果有最小值，则此最小值一定是极小值，先求出驻点

$\begin{cases} f_x'=y-\frac{1}{x^2}=0 \\ f_y'=x-\frac{1}{y^2}=0 \end{cases}$得$x=1$，所以$(x,y)=(1,1)$是唯一的驻点

$A=f_{xx}''(1,1)=\left.\frac{2}{x^3}\right|_{(1,1)}=2$

$B=f_{xy}''(1,1)=1$

$C=f_{yy}''(1,1)=\left.\frac{2}{y^3}\right|_{(1,1)}=2$

$AC-B^2=3>0,A>0$

所以$(1,1)$是唯一的极小值点，此极小值点为$f(x,y)$在$\Omega$上的最小值点，最小值为$f(1,1)=3$

3. 设$z=z(x,y)$是由方程$z^3-2xz+y=0$在点$\vec{P}(1,1,1)$附近所定义的隐函数，写出$z$在$x=1,y=1$处的带$Peano$余项的二阶$Taylor$展开式。

方程$z^3-2xz+y=0$两边关于自变量$x$求偏导，得

$$3z^2\cdot z_x'-2z-2x\cdot z_x'=0$$

方程两边关于$x$再次求偏导，得

$$6z\cdot(z_x')^2+3z^2\cdot z_{xx}''-2z_x'-2z_x'-2x\cdot z_{xx}''=0$$

将(1,1,1)代入上述方程得

$$z_x'(1,1)=2,z_{xx}''(1,1)=-16$$

方程$z^3-2xz+y=0$两边关于自变量$y$求偏导，得

$$3z^2\cdot z_y'-2x\cdot z_y'+1=0$$

方程两边关于$y$再次求偏导，得

$$6z\cdot\left(z_y'\right)^2+3z^2\cdot z_{yy}''-2x\cdot z_{yy}''=0$$

将(1,1,1)代入上述方程得

$$z_y'(1,1)=-1,z_{yy}''(1,1)=-6$$

方程$3z^2\cdot z_y'-2x\cdot z_y'+1=0$关于$x$再次求偏导，得

$$6z\cdot z_x'\cdot z_y'+3z^2\cdot z_{xy}''-2z_y'-2x\cdot z_{xy}''=0$$

将(1,1,1)代入得

$$z_{xy}''(1,1)=10$$

所以$z=z(x,y)$在(1,1)处的$Taylor$展开式为

$$z(x,y)=z(1,1)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)z(1,1)+\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z(1,1)+o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$$

$$=1+(2\Delta x-\Delta y)+(-8(\Delta x)^2+10\Delta x\Delta y-3(\Delta y)^2)+o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$$

其中$\Delta x=x-1,\Delta y=y-1$

4. 求由方程$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值。

1) 求驻点

$$4x+2zz'_x+8yz'_x-z'_x=0 \Rightarrow z'_x=-\frac{4x}{2z+8y-1}=0$$

$$4y+2zz'_y+8z+8yz'_y-z'_y=0 \Rightarrow z'_y=-\frac{4y+8z}{2z+8y-1}=0$$

结合方程$2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$的两个驻点：

$$(0,-2,1),\left(0,\frac{16}{7},-\frac{8}{7}\right)$$

分别对应两个隐函数

2) 判断两个驻点是否是极值点

$$z''_{xx}=-\frac{4(2z+8y-1)-4x(2z+8y-1)'_x}{(2z+8y-1)^2}$$

$$z''_{xy}=\frac{4x(2z+8y-1)'_x}{(2z+8y-1)^2}$$

$$z''_{yy}=-\frac{\left(4+8z'_y\right)(2z+8y-1)-(4y+8z)(2z+8y-1)'_y}{(2z+8y-1)^2}$$

在点$(0,-2,1)$处

$$z''_{xx}z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2=\frac{16}{(2z+8y-1)^2}>0, z''_{xx}=-\frac{4}{2z+8y-1}=\frac{4}{15}>0$$

所以$(x,y)=(0,-2)$是隐函数的极小值点，$z=1$是极小值

在点$\left(0,\frac{16}{7},-\frac{8}{7}\right)$处

$$z''_{xx}z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2=\frac{16}{(2z+8y-1)^2}>0, z''_{xx}=-\frac{4}{2z+8y-1}=\frac{4}{14z+1}<0$$

所以$(x,y)=\left(0,\frac{16}{7}\right)$是隐函数的极大值点，$z=-\frac{8}{7}$是极大值

5. 在第一卦限作$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,>0)$的切平面，求切平面与三个坐标平面所围成的四面体的最小体积，并求此平面方程。(要求用$Lagrange$乘数法)。

设$(x_0,y_0,z_0)$为椭球面上第一卦限内的一点，则此点处切平面的法向量为

$$\vec{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$$

切平面方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

与三个坐标轴的交点分别为$\left(\frac{a^2}{x_0},0,0\right)$，$\left(0,\frac{b^2}{y_0},0\right)$，$\left(0,0,\frac{c^2}{z_0}\right)$

四面体的体积为：

$$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$$

而使四面体的体积达到最小的点$(x_0,y_0,z_0)$是函数

$f(x,y,z)=xyz$在约束$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (x>0,y>0,z>0)$下的最大值

引入$Lagrange$函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

所以：

$$\begin{cases} yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0 \\ xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

由前三个方程得$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

得到唯一的极值可疑点

$$(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$$

由于自变量限定在第一卦限的椭球面上时，函数 $f(x,y,z)=xyz$存在最大值，所以此唯一的极值可疑点是其最大值点

因此四面体体积达到最小的点为

$$(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$$

$$V_{min}=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$$

并且切平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$$

6. 已知曲线$C$:$\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求$C$上的点到$XOY$坐标平面的最大距离。

设$(x,y,z)$是曲线上一点，则该点到$XOY$坐标平面的距离为$|z|$,

引入$Lagrange$函数：

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$$

所以：

$$\begin{cases}L'_x=2\lambda x+4\mu=0\\L'_y=4\lambda y+2\mu=0\\L'_z=2z-\lambda+\mu=0\\L'_\lambda=x^2+2y^2-z-6=0\\L'_\mu=4x+2y+z-30=0\end{cases}$$

由方程(1)和方程(2)得$\lambda=\mu=0$或$x=4y$

若$\lambda=\mu=0$，由方程(3)得$z=0$，代入方程(4)(5)，计算之后发现$z=0$的点都不满足方程(4)和(5)

若$x=4y$，代入方程(4)(5)，解得两个点$(-8,-2,66),(4,1,12)$，这两个点是前述$Lagrange$函数的驻点

由于曲线$C$是椭圆，$C$上的点到$XOY$坐标平面的最大距离必存在，且在驻点处取到，所以$C$上的点到$XOY$坐标平面的最大距离为66。

7. 当$x>0,y>0,z>0$时，求函数$f(x,y,z)=x^a y^b z^c$在约束条件$x^k+y^k+z^k=1$下的最大值（其中$k,a,b,c$均为正常数）；并由此证明：当$u,v,w$为正实数时，成立不等式$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c \le \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$。

1) 令$g(x,y,z)=\ln f(x,y,z)=a\ln x+b\ln y+c\ln z$，则$g(x,y,z)$在约束条件$x^k+y^k+z^k=1$下的最大值点即为$f(x,y,z)$在此约束条件下的最大值点。

引入$Lagrange$函数

$$L(x,y,z,\lambda)=a\ln x+b\ln y+c\ln z+\lambda(x^k+y^k+z^k-1)$$

所以：

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}+k\lambda x^{k-1}=0\\ \dfrac{b}{y}+k\lambda y^{k-1}=0\\ \dfrac{c}{z}+k\lambda z^{k-1}=0\\ x^k+y^k+z^k-1=0\end{cases}$$

由前三个方程得：$\frac{a}{x^k}=\frac{b}{y^k}=\frac{c}{z^k}$，代入方程(4)得

$$x^k=\frac{a}{a+b+c},y^k=\frac{b}{a+b+c},z^k=\frac{c}{a+b+c}$$

所以$f(x,y,z)=x^a y^b z^c$在约束$x^k+y^k+z^k=1$下的最大值为：

$$\left(\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

2) 令$R=u+v+w,x^k=\frac{u}{R},y^k=\frac{v}{R},z^k=\frac{w}{R}$，则$x^k+y^k+z^k=1$，所以：

$$(x^a y^b z^c)^k \le \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}$$

即

$$\left(\frac{u}{R}\right)^a\left(\frac{v}{R}\right)^b\left(\frac{w}{R}\right)^c \le \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}$$

变化之后的：

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c \le \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$$