题目： 设

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

证明向量组 a_1,a_2 与 b_1,b_2,b_3 等价

解答： 记 $A=(a_1,a_2)$，$B=(b_1,b_2,b_3)$，若要证明 a_1,a_2 与 b_1,b_2,b_3 等价只需证明 $R(A)=R(B)=R(A,B)$

将矩阵 (A,B) 化成阶梯形，

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此 $R(A)=R(B)=R(A,B)$

从而向量组 a_1,a_2 与 b_1,b_2,b_3 等价

题目： 判别下列向量组的线性相关性：

(1) $\alpha_1 = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (0,1,0,3)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0,0,1,4)^{\mathrm{T}}$

(2) $\alpha_1 = (1,2,3,5)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (4,1,0,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (5,10,15,25)^{\mathrm{T}}$

(3) $\alpha_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_4 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$

题目： 判别下列向量组的线性相关性：

(1) $\alpha_1=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,0,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,0,1,4)^{\mathrm{T}}$

(2) $\alpha_1=(1,2,3,5)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(4,1,0,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(5,10,15,25)^{\mathrm{T}}$

(3) $\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$

解答：

(1) 因为 $e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},e_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},e_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

(2) 因为 $\alpha_3=5\alpha_1$, 故 α_1,α_3 线性相关，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

(3) 4 个 3 维向量一定线性相关，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。

题目： 若 $\boldsymbol{a}_1=(1,3,4,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(2,1,3,t)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_3=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 求 t

题目： 若 $\boldsymbol{a}_1=(1,3,4,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(2,1,3,t)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_3=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 求 t

解答： 设 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$，按分量写出，即有

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+tx_2=0 \end{cases}$$

对系数矩阵 $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ 作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & t & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & t+4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & t+4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2(t+4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ 线性相关} \Leftrightarrow [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ 有非零解} \Leftrightarrow \text{秩 } r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) < 3$$

$6 - 2(t + 4) = 0$, 即 $t = -1$

题目：

若 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, 2, 3, 1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [1, 1, 2, -1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [2, 6, a, 5]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = [3, 4, 7, -1]^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 求 a

题目：

若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,6,a,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[3,4,7,-1]^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 求 a

解答：4 个 4 维向量计算行列式，有

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\2&1&6&4\\3&2&a&7\\1&-1&5&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&-1&2&-2\\0&-1&a-6&-2\\0&-2&3&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&-2\\-1&a-6&-2\\-2&3&-4\end{vmatrix}=0$$

说明 $\forall a,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 恒线性相关.

题目:

已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1+a\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,a\alpha_1-\alpha_3$ 线性相关, 求 a

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + a\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, a\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 求 a

解答:

令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + a\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = a\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$, 有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

由课件 ppt 中的例 4 可知这两个向量组线性无关的充要条件是系数矩阵的秩为 3，即系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可逆，$|\boldsymbol{K}| \neq 0$, 则若两个向量组线性相关，则有 $|\boldsymbol{K}| = 0$，从而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0$$

故 $a = 1$ 或 $a = -2$

题目：

设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵,$n < m$ 且 $AB = E$ 。证明 B 的列向量组线性无关。

题目：

设 A 为 $n\times m$ 矩阵, B 为 $m\times n$ 矩阵,$n<m$ 且 $AB=E$ 。证明 B 的列向量组线性无关。

证明：

因为 $AB=E$，所以 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(E)=n$,

又因为 $\mathrm{r}(AB)\le\mathrm{r}(B)\le n$, 所以 $\mathrm{r}(B)=n$

设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$,

则 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$ 只有0解

即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，由定义可知，B 的列向量线性无关