一般碰撞和完全非弹性碰撞

一般碰撞，定义恢复系数

$$e = \frac{v_{\mathrm{B2}} - v_{A2}}{v_{\mathrm{A1}} - v_{B1}}$$

仅考虑动量守恒（一般的碰撞）和e的定义
可以得到碰撞后动能变化

$$\Delta E = -(1-e^2)\frac{1}{2}\mu(v_{A1}^2 - v_{B1}^2)$$

定义约化质量：

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

系统碰撞前后动能有损失

完全非弹性碰撞 $$e = 0$$

$$v_{\mathrm{B2}} = v_{A2}$$

碰撞后速度相同

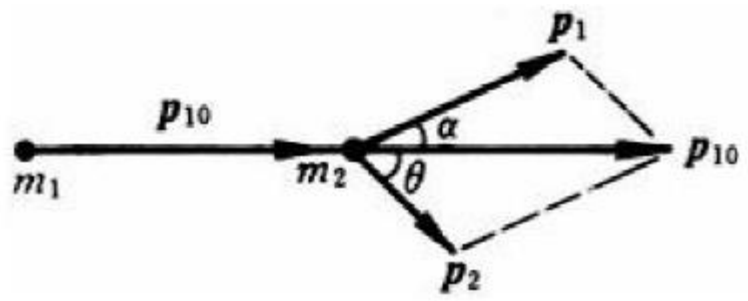
此时动能损失最大

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

二维弹性碰撞的守恒与共面

二维弹性碰撞（m_2静止）
动量守恒，显示共面

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_{10}$$



能量守恒

$$\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}=\frac{p_{10}^2}{2m_1}$$

假设碰撞后θ角已知，

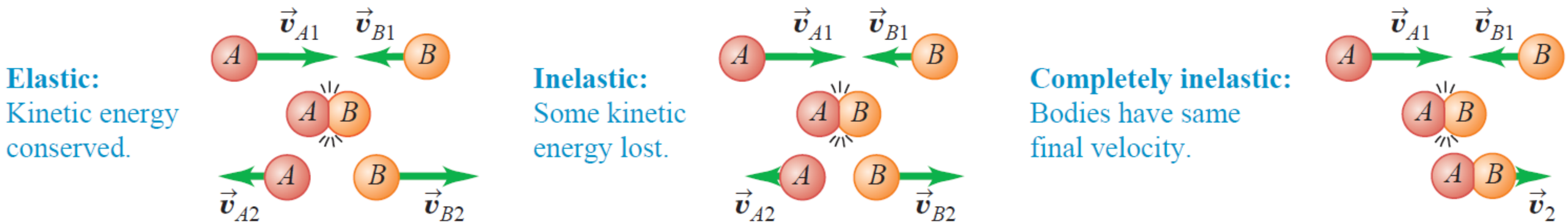
$$p_2=\frac{2\cos\theta}{1+\frac{m_1}{m_2}}p_{10},\ p_{1x}=p_{10}-p_2\cos\theta,\ p_{1y}=p_2\sin\theta$$

因为共面，分解成x和y方向

$$x: p_1\cos\alpha+p_2 cos\theta=p_{10}$$

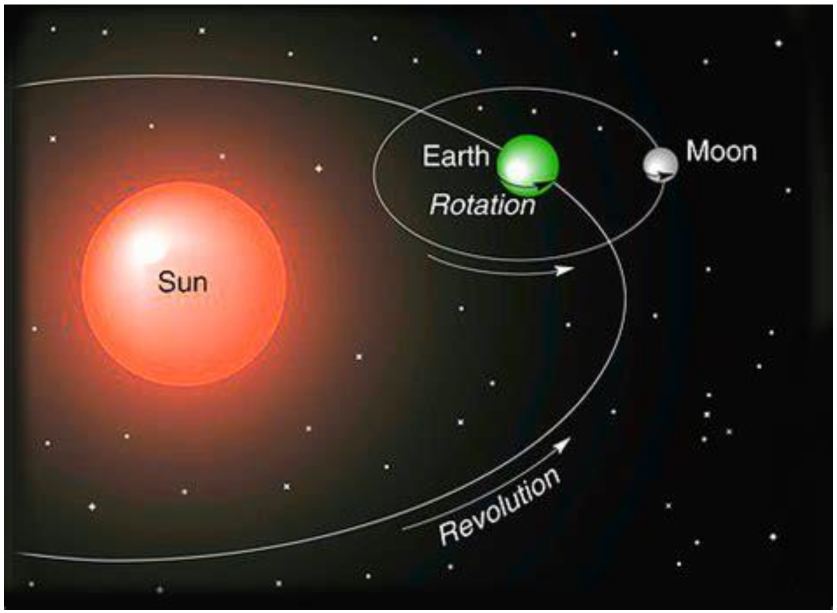
$$y: p_1\sin\alpha-p_2\sin\theta=0$$

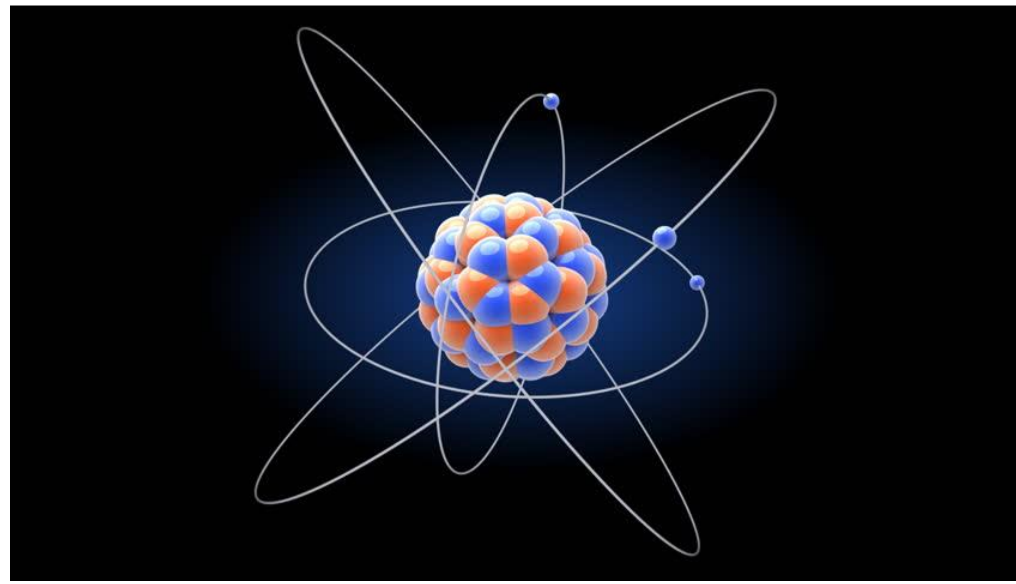
弹性碰撞和非弹性碰撞



弹性碰撞	非弹性碰撞	完全非弹性碰撞
机械能：守恒	机械能：不守恒	机械能：不守恒（损失最大）
动量：守恒	动量：守恒	动量：守恒

圆周运动





自然界的普遍现象

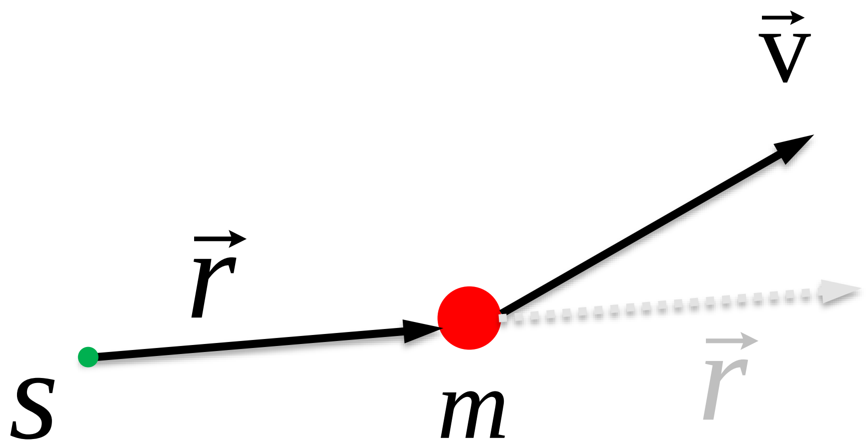
角动量

质点的动量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

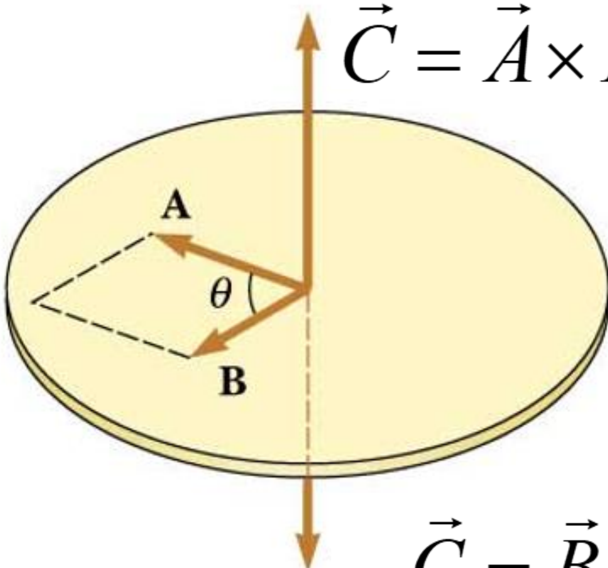
质点绕任意一点S运动的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



角动量： 对空间某点s,
质点m的角动量大小为
相对于s的位矢和动量的
矢积（叉乘）

矢积（叉乘）



$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$-\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$

右手定则

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB\sin\theta)\hat{e}_c$$

$\hat{e}_c$垂直于$\vec{A}, \vec{B}$所在平面

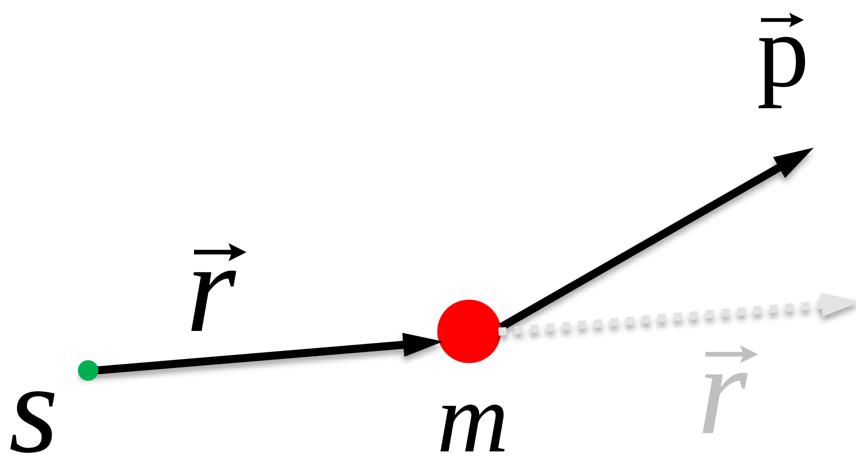
角动量

质点的动量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

质点绕点S运动的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

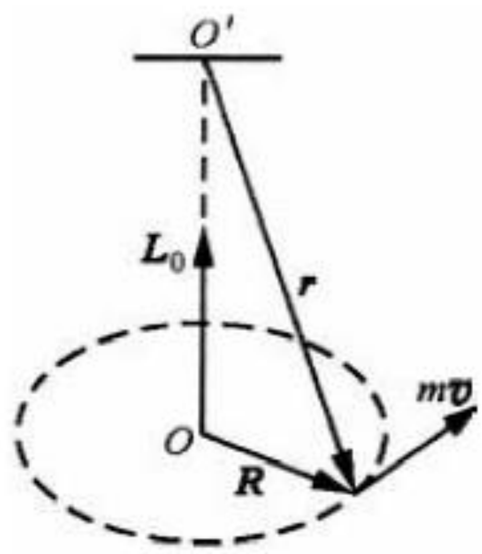


$$\left|\vec{L}\right| = rp\sin(\varphi)$$

角动量单位：

$$kg \cdot m^2 / s$$

圆锥摆的角动量



取O点为参考点

$$\vec{L}_0 = \vec{R} \times m\vec{v}$$

$\vec{L}_0$方向：垂直轨道平面向上，角动量为常矢量

取悬挂点O'点为参考点

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$\vec{p} = m\vec{v}$

动量不守恒

$\vec{L}$方向时时变化，不是常矢量

角动量的分量表示

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\vec{\mathrm{r}} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$$

$$\vec{\mathrm{p}} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}) \times (p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k})$$

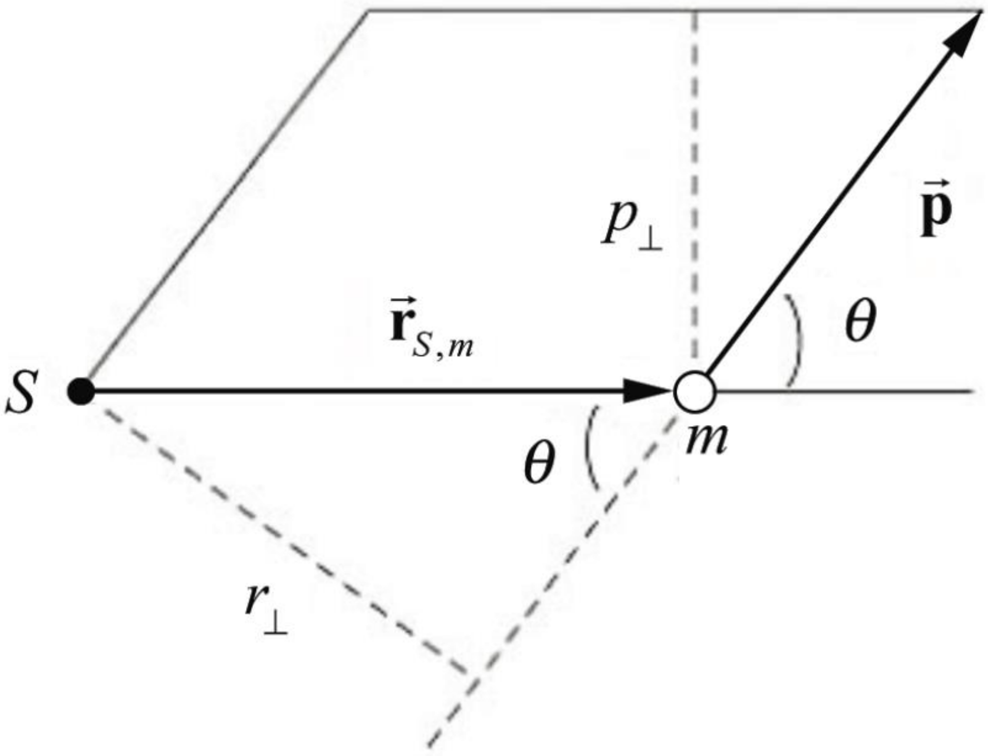
$$= (\mathrm{r}_x p_y - r_y p_x)\hat{i} \times \hat{j} + (r_x p_z - r_z p_x)\hat{i} \times \hat{k} + (r_y p_z - r_z p_y)\hat{j} \times \hat{k}$$

$$\vec{\mathrm{L}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

行列式

$$\vec{\mathrm{L}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ p_x & p_y \end{vmatrix}$$

角动量的计算



$\vec{p}$为$\vec{p}_{\parallel}$和$\vec{p}_{\perp}$

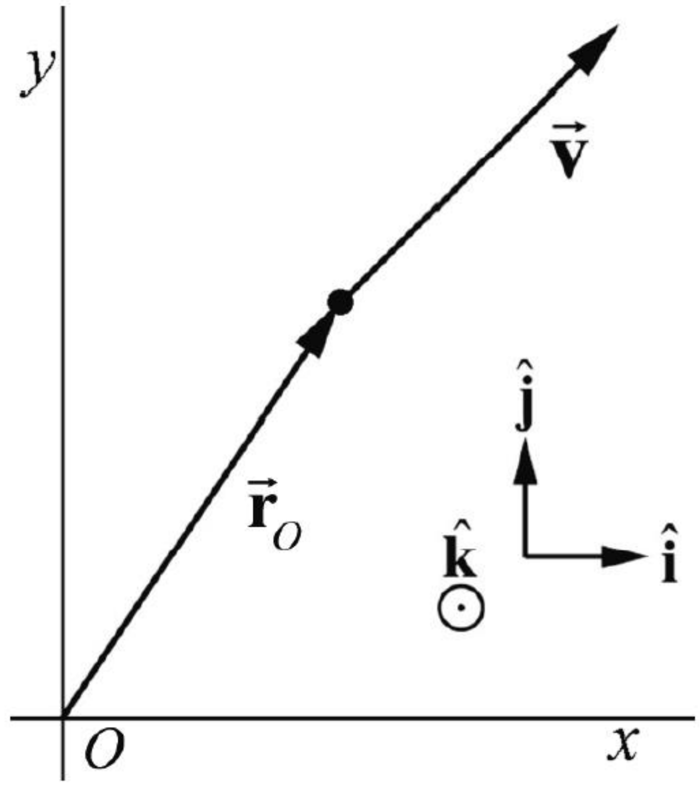
$\vec{r}$为$\vec{\mathrm{r}}_{\parallel}$和$\vec{r}_{\perp}$

角动量计算

一个粒子质量 m=2.0 kg按图示常速度运动

$$v = 3.0m \cdot s^{-1}\hat{i} + 3.0m \cdot s^{-1}\hat{j}$$

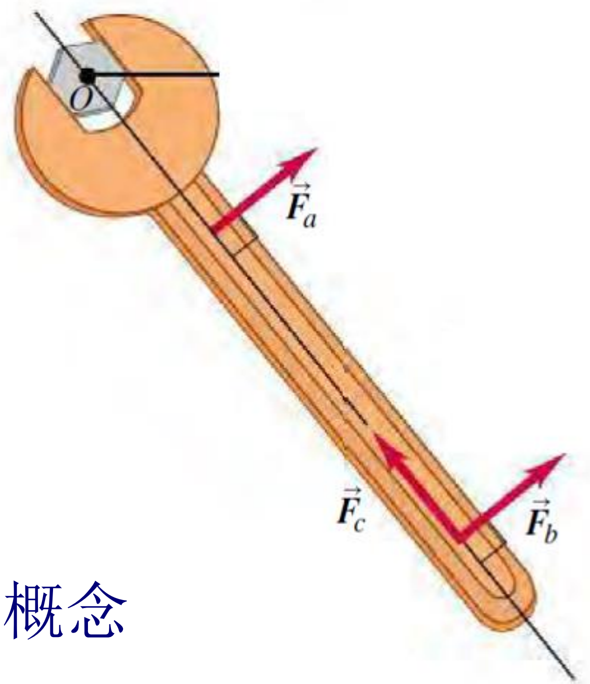
在时刻t穿过点 (2.0m, 3.0m)
求在时刻t相对于原点的角动量大小和方向。



$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{L}}_O &= \vec{\mathbf{r}}_O \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}}_O \times m\vec{\mathbf{v}} \\
&= (2.0\,\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{i}} + 3.0\,\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{j}}) \times (2\mathrm{kg})(3.0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\hat{\mathbf{i}} + 3.0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\hat{\mathbf{j}}) \\
&= 0 + 12\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}\,\hat{\mathbf{k}} - 18\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}(-\hat{\mathbf{k}}) + \vec{\mathbf{0}} \\
&= -6\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}\,\hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

力矩

转动： 不仅受力的大小和方向影响，还和施加力的地方有关

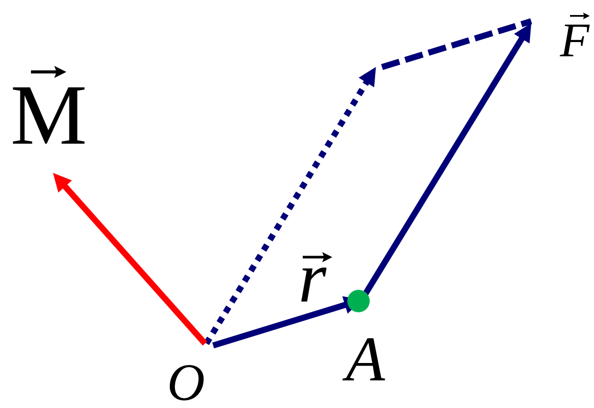


所以我们需要力矩的概念

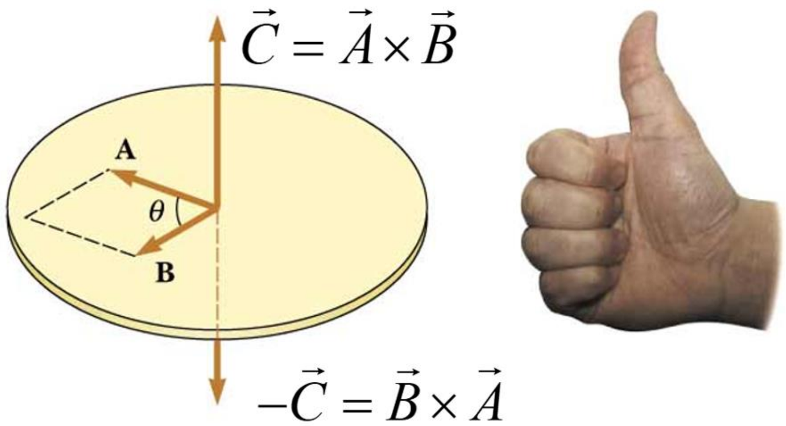
力矩

施加于某一质点A的力为$\vec{\mathrm{F}}$,则相对于空间任意一点0，力矩定义为：

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$



右手定则



$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=(\mathrm{AB}\sin\theta)\hat{\mathrm{e}}_c$$

力矩是矢量，而且矢量 $\vec{r}$ 是指从某个转动点出发O，至 $\vec{F}$ 所作用的点P

回到牛顿定律

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dm\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

角动量定义： $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v} \qquad \vec{p}=m\vec{v} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{v}\times(m\vec{v})=0$$

如果对转动，力矩对力有等效的对应关系，那力矩等于什么对时间的微分？

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

力矩等于角动量对时间的微分

答案： 角动量

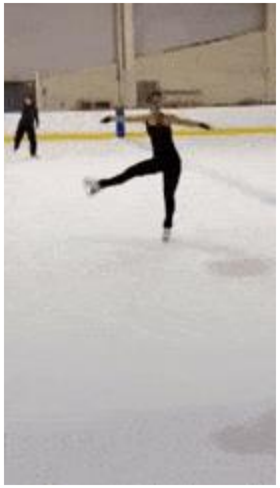
$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{L}_2-\vec{L}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt$$

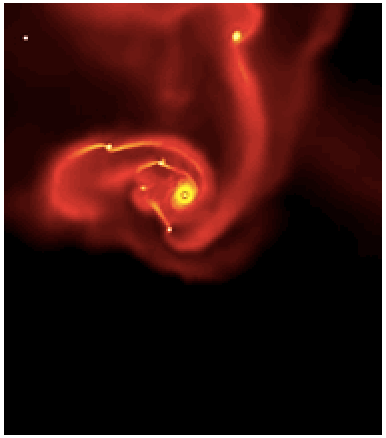
角动量守恒

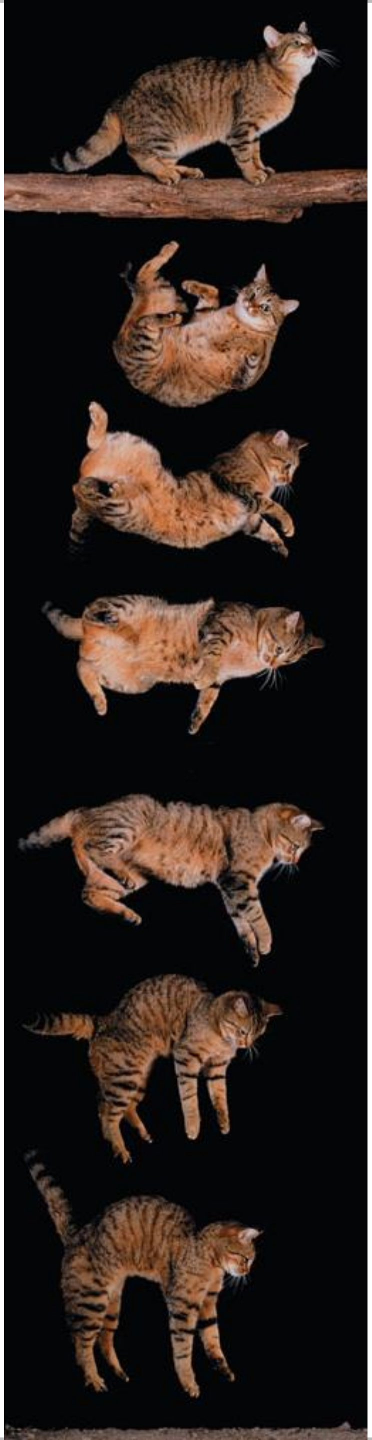
如果作用在质点上的外力对某给定O的力矩为0，则质点对O的角动量在运动过程中保持不变。

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

$$\vec{M}=0,则\frac{d\vec{L}}{dt}=0$$

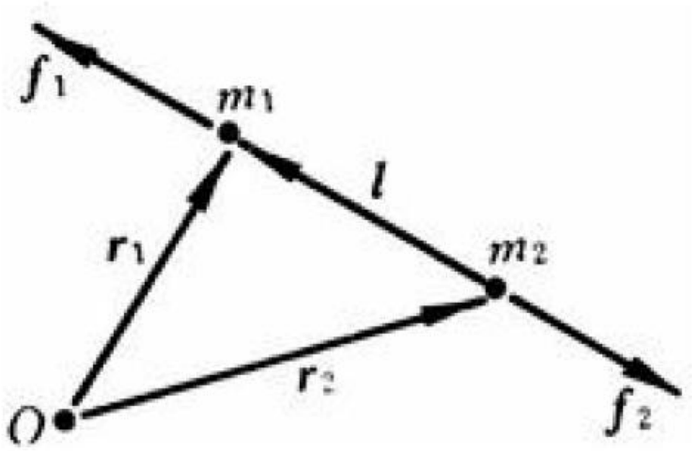






质点组角动量变化定理

一对内力角冲量之和为零



两质点m_1, m_2相互作用力为$\vec{f}_1, \vec{f}_2$,相互距离为$\vec{l}$。

内力对点o角冲量之和：

$$\vec{M}_1 dt + \vec{M}_2 dt = (\vec{r}_1 \times \vec{f}_1)dt + (\vec{r}_2 \times \vec{f}_2)dt$$

$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_1 dt$$

$$= \vec{l} \times \vec{f}_1 dt = 0$$

质点组角动量变化定理

质点组总角动量等于各质点的角动量之和。

$$d\vec{L} = d(\sum \vec{L}_i) = \sum (d\vec{L}_i)$$

单个质点角动量变化$d\vec{L}_i = \vec{M}_i dt$:

$$d\vec{L} = \sum (\vec{M}_i dt) = (\sum \vec{M}_i) dt$$

内力矩角冲量为0.因此质点组角动量的变化等于合外力矩的角冲量

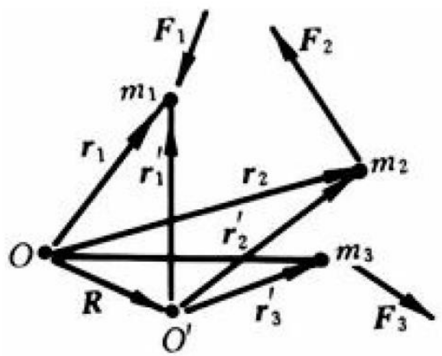
$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\sum M_{\{i\text{-外力}\}}) dt$$

质点组角动量变化定理

合外力矩为0， 质点组角动量守恒

合外力矩为0$\neq$合外力外0

通常力矩和参考点有关，外力矩也与参考点有关。
但合外力为0时，合外力矩与参考点无关



参考点o： $\vec{M}=\sum(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)$

参考点o’： $\vec{M}=\sum(\vec{r}_i'\times\vec{F}_i)$

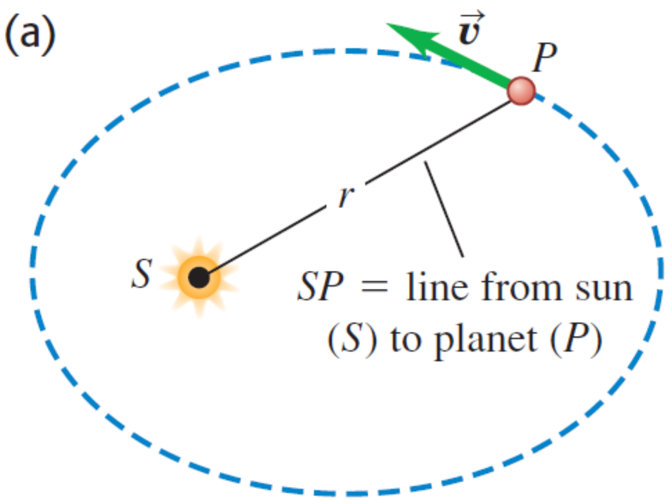
两者差：

$$(\vec{M}-\vec{M}')=\sum(\vec{r}_i\times\vec{F}_i-\vec{r}_{i'}\times\vec{F}_i)=\sum((\vec{r}_i-\vec{r}'_i)\times\vec{F}_i)$$

$$=\sum(\vec{R}\times\vec{F}_i)=\vec{R}\times\sum\vec{F}_i$$

有心运动

$$\vec{F} = f\hat{r}$$



1. 机械能守恒

有心力为保守力：

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

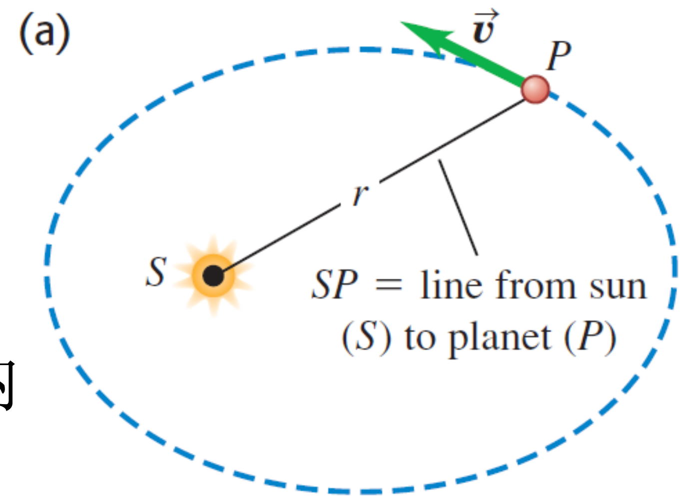
2. 角动量守恒

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\text{因为}\vec{r} // \vec{F}, \vec{M} = 0; \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{角动量守恒}$$

有心运动：平面轨道

有心运动在平面内运动



时刻t_0,位置矢量$\vec{r}_0$和速度矢量$\vec{v}_0$定义一个平面,则粒子必然一直在该平面内运动。

该平面与矢量$\vec{n}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$正交

任意时刻所处平面法线：$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{r} \times \vec{p}) / m = \vec{L} / m$

因为角动量守恒：$d\vec{L} / dt = 0$, 所以$d\vec{n} / dt = 0$

$\vec{n} = \vec{n}_0$

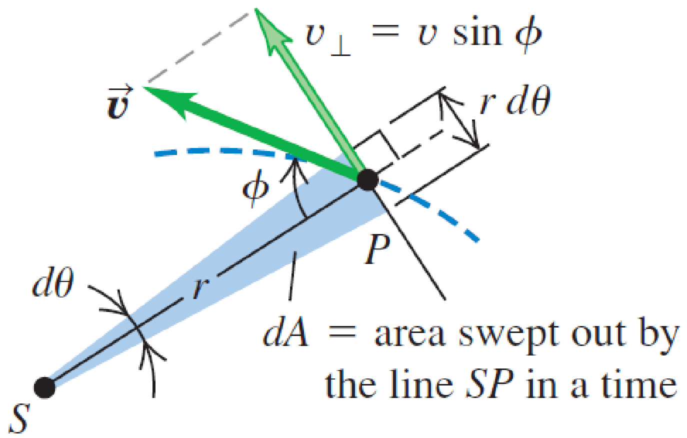
有心运动：掠面速度不变

掠面速度 $v_A = dA/dt$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

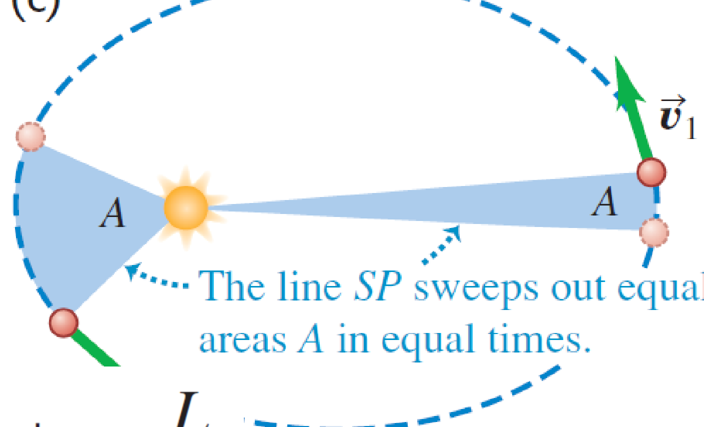
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

(b)



掠面速度不变 显示为有心运动。但是并不对应$1/r^2$的平方反比有心运动。

(c)



切向速度： $v_\perp = v \sin\phi$

而 $v_\perp = r\,d\theta/dt.$

所以 $$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin\phi = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{L}{2m}$$