20220520课堂练习

答案

1.1 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n^{n/2}}$的敛散性

- 分析：
  - 这是一个正项级数，而且通项中包含了$n!$，所以可以用d'Alembert判别法
- 解：
  - 因为$\frac{\sqrt{n!}}{n^{n/2}}=\sqrt{\frac{n!}{n^n}}$，而
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}}{\sqrt{\frac{n!}{n^n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}}$
  - $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}=\sqrt{\frac{1}{e}}<1$
  - 所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n^{n/2}}$收敛

1.2判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$的敛散性

- 分析：
  - $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^n\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right)$
  - 而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n\alpha}{n^2}$都收敛
  - 所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$收敛
  - 通项加绝对值之后的级数为
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right)$
  - 而$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sin n\alpha}{n^2}\sim\frac{1}{\sqrt{n}},(n\to\infty)$
  - 所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$条件收敛

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 分析：
  - 对于这种形式的级数，首先需要用$Taylor$公式对通项进行化简
  - 得到一个以$\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$为变量的多项式
  - 然后再进一步处理

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 解：
  - 当$p>0$时
  - $ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right),$
  - 其中$r\left(\frac{1}{n^p}\right)=o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right), n\to\infty$
  - 所以$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right)$

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 当$p>0$时
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$收敛
  - $\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\sim\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}, n\to\infty\Longrightarrow$
    - 当$0<p\le\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)$发散
    - 当$p>\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)$收敛

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 所以
  - 当$0<p\le\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right)$发散
  - 当$p>\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right)$收敛

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 以下判断是否绝对收敛
- 当$p>\frac{1}{2}$时
  - $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right|$
  - $=\frac{1}{n^p}\left|1+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right|\ (n\to\infty)$
  - 当n充分大时
    - $\frac{1}{2}\frac{1}{n^p}<\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right|<2\frac{1}{n^p}$

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 所以
  - 当$\frac{1}{2}<p\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right|$ 发散
  - 当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+r\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)\right|$收敛

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 综上所述
  - 当$0<p\le\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$发散
  - 当$\frac{1}{2}<p\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$条件收敛
  - 当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$绝对收敛

1.3判断$\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)\ (p>0)$的敛散性

- 问题：下面的做法是否正确？为什么？
  - $\because ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}, n \to \infty$
  - $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$与$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$具有相同的敛散性，
  - $\therefore$当$0<p\leq 1$时条件收敛， $p>1$时绝对收敛

2.设$\{a_n\}$是一个单调递减数列，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，判断$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$的敛散性

- 分析：
  - $\{a_n\}$是一个单调递减数列$\Longrightarrow$
  - $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$并且$a_n \geq a$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$是一个正项级数
  - $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$
  - $= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) + \cdots$
  - $= a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 - a \Longrightarrow$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$收敛$\Longrightarrow$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛

3.1计算幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{(x-1)^n}{n}$的收敛半径与收敛域

- 分析:
  - 令$t=x-1$,考察幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{t^n}{n}$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(-3)^n+2^n}\right|\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\right|\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$
  - 所以$R=3$
  - 当$t=3$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{3^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\frac{1}{n}$
  - 一个交错级数

3.1计算幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{(x-1)^n}{n}$的收敛半径与收敛域

- 分析：
  - 考察数列$\left\{\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)n\right\}$的单调性
  - $\because \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n n=0$，所以$\exists N,\forall n>N$: $\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n n\right|<\frac{1}{2}$
  - 令$x_n=\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)n$，则当$n>N$时
  - $x_n<n+\frac{1}{2}$
  - $x_{n+1}=n+1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}(n+1)>n+1-\frac{1}{2}=n+\frac{1}{2}$
  - $\therefore$当$n>N$时，$\left\{\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)n\right\}$单调增加

3.1计算幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{(x-1)^n}{n}$的收敛半径与收敛域

- 分析：
  - 当$n>N$时，数列$\left\{\frac{1}{\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)n}\right\}$的单调减少
  - 而且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)n}=0$
  - 所以$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\frac{1}{n}$是$Leibniz$级数，收敛
  - 从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\frac{1}{n}$收敛

3.1计算幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{(x-1)^n}{n}$的收敛半径与收敛域

- 分析：
  - 当$t=-3$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{(-3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)n}$
  - 是正项级数，由比较判别法知此级数发散
  - 当$t\in(-3,3]$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{t^n}{n}$收敛
  - 所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n+2^n}\frac{(x-1)^n}{n}$
    - 收敛半径为3
    - 收敛域为$(-2,4]$

3.2计算幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$的收敛半径与收敛域

- 分析:
  - 这是一个缺项幂级数，缺少了除x^{n^2}项之外的所有其他项
  - 用$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{ln^2 n}{n^n}}=0$推断收敛半径为$+\infty$是不对的
  - 正确的方法是用$Cauchy$判别法判断此级数何时绝对收敛
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{ln^2 n}{n^n}x^{n^2}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{ln^2 n}}{n}|x|^n=\begin{cases}0 & |x|\le 1\\ +\infty & |x|>1\end{cases}$
  - 所以此幂级数的收敛半径为1，收敛域为$[-1,1]$

4.1求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$的和函数

- 分析：
  - 幂级数的收敛域为$(-1,1)$
  - 先化简
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1-2)^2}{n+1}x^n$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+4}{n+1}x^n$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=1}^{\infty}x^n+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n-3\sum_{n=1}^{\infty}x^n+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

4.1求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$的和函数

- 分析:
  - 已知
    - $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$
    - $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$
    - $ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$
    - $ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

4.1求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$的和函数

- 分析：
  - 当$x \neq 0$时
    - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$
    - $= \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$
    - $= \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - x\right)$
    - $= \frac{1}{x}(-ln(1-x) - x)$

4.1求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$的和函数

- 分析：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$$

$$=\begin{cases}\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{3x}{1-x}-\frac{4}{x}(ln(1-x)+x) & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & x=0\end{cases}$$

4.2求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^n$的和函数

- 分析:
  - 幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^n$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)!}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

4.2求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^n$的和函数

- 分析：
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1=e^x-1$
  - 当$x\neq 0$时
    - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$
    - $=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
    - $=\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
    - $=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1-x\right)$
    - $=\frac{1}{x}(e^x-1-x)$

4.2求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^n$的和函数

- 分析:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^n=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x} & x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\\ 0 & x=0\end{cases}$$

说明

- 对于第4.1,4.2两题，我们没有采用幂级数的逐项求导或逐项求积的方法来计算幂级数的和函数，而是通过简单的代数运算，将幂级数分解成几个简单幂级数的代数和，并且这几个简单幂级数的和函数是已知的。
- 写出幂级数的和函数时，**必须同时写出和函数的定义域**。同时要注意和函数的表达式是否在每一个自变量上都有定义，如果存在某些自变量上表达式无意义（可能是展开点、区间端点（收敛时）），则需要用**分段函数**的形式完整地写出和函数的表达式。

5.证明$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$满足方程$xy''+y'=y$

- 分析：
  - 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$
  - 用逐项求导的方法来计算y',y''
  - $y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}$
  - $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+1)!}$
  - $y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!(n+1)!}$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}$

5.证明$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$满足方程$xy''+y'=y$

- 分析：
  - $xy''+y'$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!(n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+1)!}$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{1}{n!(n+1)!}\right)x^n+1$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n!(n+1)!}+\frac{1}{n!(n+1)!}\right)x^n+1$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n!}x^n+1$
  - $=y$

6.将$f(x)=\frac{1}{4}ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctan\,x-x$在$x=0$处展开成幂级数

- 分析：
  - 已知
    - $ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},x\in(-1,1]$
    - $ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},x\in[-1,1)$
    - $arctan\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1},x\in[-1,1]$

6.将$f(x)=\frac{1}{4}ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctan\,x-x$在$x=0$处展开成幂级数

- 分析:
  - 那么
    - $ln\frac{1+x}{1-x}=ln(1+x)-ln(1-x)$
    - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$
    - $=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{1}{n}\right)x^n$
    - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1}$

6.将$f(x)=\frac{1}{4}ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctan\,x-x$在$x=0$处展开成幂级数

- 分析：
  - $\frac{1}{4}ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctan\,x-x$
  - $=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}x^{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}-x$
  - $=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)x^{2n-1}-x$
  - $=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2(2n-1)-1}x^{2(2n-1)-1}-x$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^{4n-3}-x$
  - $=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^{4n-3}$
  - $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1},x\in(-1,1)$

7.设$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}}, x\in[0,\pi]$，将$f(x)$展开成一个正弦级数

- 概念上将$f(x)$延拓成一个周期为2π的奇函数，则：
- $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^x-e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}} sin(nx)dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1}$
- $f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}sin(nx)$

8.设$f(x)=\begin{cases}\pi, & \sqrt{\pi}<x<\pi \\ -\pi, & 0\le x\le\sqrt{\pi}\end{cases}$，将$f(x)$展开成以$2\pi$为周期的余弦级数，求其和函数在$x=\frac{\pi}{2}$处的值，并分别求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2n\sqrt{\pi})}{n}$的和

- $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}-\pi dx+\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{\pi}}^{\pi}\pi dx=2(\pi-2\sqrt{\pi})$
- $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}-\pi cos(nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{\pi}}^{\pi}\pi cos(nx)dx$
- $=-\frac{4}{n}sin(n\sqrt{\pi})$
- $f(x)\sim(\pi-2\sqrt{\pi})-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}cos(nx)$

8.设$f(x)=\begin{cases}\pi,\ \sqrt{\pi}<x<\pi\\ -\pi,\ 0\le x\le\sqrt{\pi}\end{cases}$，将$f(x)$展开成以$2\pi$为周期的余弦级数，求其和函数在$x=\frac{\pi}{2}$处的值，并分别求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2n\sqrt{\pi})}{n}$的和

- $f(x)$延拓成周期为2π的偶函数之后，在$x=0,x=\pm\pi$时连续
- 在$x=\sqrt{\pi}$处间断，$f(\sqrt{\pi}-)=-\pi,f(\sqrt{\pi}+)=\pi$，所以
- $f(x)\sim(\pi-2\sqrt{\pi})-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}cos(nx)$
- $=\begin{cases}\pi & \sqrt{\pi}<x\le\pi,-\pi\le x<-\sqrt{\pi}\\ -\pi & -\sqrt{\pi}<x<\sqrt{\pi}\\ 0 & x=\pm\sqrt{\pi}\end{cases}$
- $x=\frac{\pi}{2}$时，和函数的值为$-\pi$

8.设$f(x)=\begin{cases}\pi, & \sqrt{\pi}<x<\pi \\ -\pi, & 0\le x\le\sqrt{\pi}\end{cases}$，将$f(x)$展开成以$2\pi$为周期的余弦级数，求其和函数在$x=\frac{\pi}{2}$处的值，并分别求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2n\sqrt{\pi})}{n}$的和

- $x=0$时
- $(\pi-2\sqrt{\pi})-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}=-\pi$
- 所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}=\frac{\pi-\sqrt{\pi}}{2}$
- $x=\sqrt{\pi}$时
- $(\pi-2\sqrt{\pi})-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}cos(n\sqrt{\pi})=0$
- 所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(2n\sqrt{\pi})}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\sqrt{\pi})}{n}cos(n\sqrt{\pi})=\frac{\pi-2\sqrt{\pi}}{2}$