角动量与角速度的关系

质点的动能：$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

定轴转动的动能$E_k = \frac{1}{2}Iw^2$

而质点动量 $\vec{P} = m\vec{v}$

那是不是定轴转动的角动量

$\vec{L} = I\vec{w}?$

角动量的方向和角速度方向一致?

No

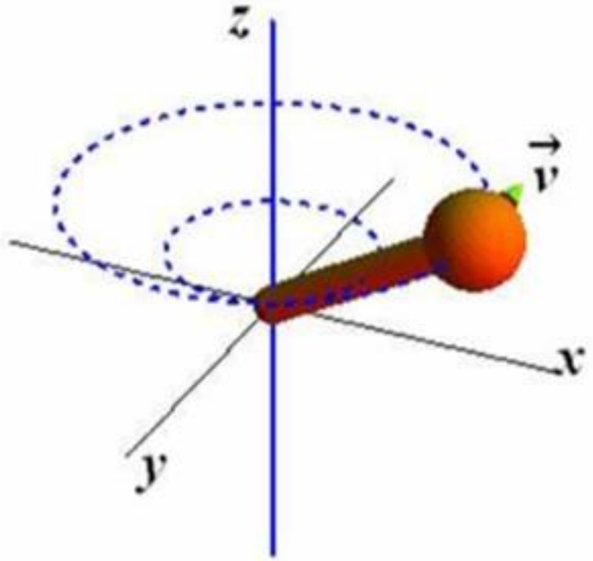
惯性张量

考虑定点转动，转动轴过原点， 角动量$\vec{L}$和角速度$\vec{\omega}$的关系

取一小质量元dm，位置为$\vec{r}$

速度为 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

相对于原点的角动量为$\vec{r}\times\vec{p}=(dm)\vec{r}\times\vec{v}=(dm)\vec{r}\times(\vec{w}\times\vec{r})$



总角动量

$$\vec{L}=\int\vec{r}\times(\vec{w}\times\vec{r})dm$$

$$=\sum m_i\vec{r}_i\times(\vec{w}\times\vec{r}_i)$$

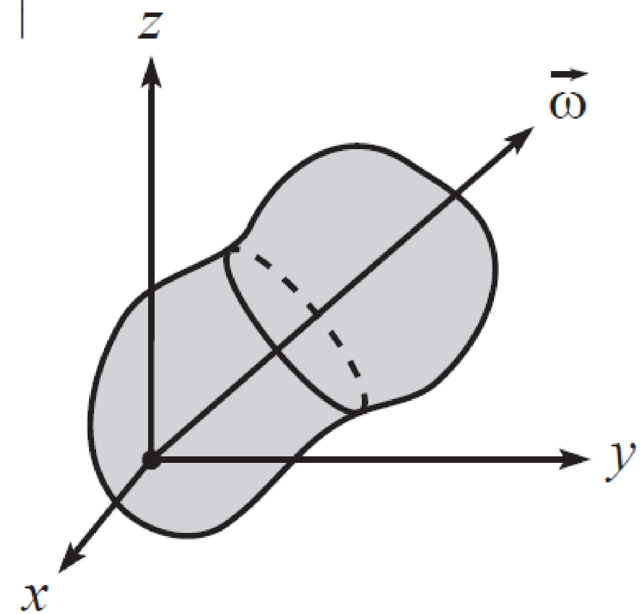
$$\vec{w}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=(\omega_2 z-\omega_3 y)\hat{\mathbf{x}}+(\omega_3 x-\omega_1 z)\hat{\mathbf{y}}+(\omega_1 y-\omega_2 x)\hat{\mathbf{z}}.$$

惯性张量

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) dm$$

$$\vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ (\omega_2 z - \omega_3 y) & (\omega_3 x - \omega_1 z) & (\omega_1 y - \omega_2 x) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\omega_1 (y^2 + z^2) - \omega_2 xy - \omega_3 zx\right)\hat{\mathbf{x}}$$
$$+ \left(\omega_2 (z^2 + x^2) - \omega_3 yz - \omega_1 xy\right)\hat{\mathbf{y}}$$
$$+ \left(\omega_3 (x^2 + y^2) - \omega_1 zx - \omega_2 yz\right)\hat{\mathbf{z}}.$$



因此角动量$\vec{L}$和角速度$\vec{\omega}$的关系

矢量

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int (z^2 + x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} dm$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{张量}} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}}_{\text{矢量}} \equiv \vec{I} \cdot \vec{w}$$

定轴转动中角动量的轴分量

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y^2+z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int (z^2+x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int (x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \equiv \vec{I} \cdot \vec{w}$$

定轴转动，轴沿z方向， $w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = w$

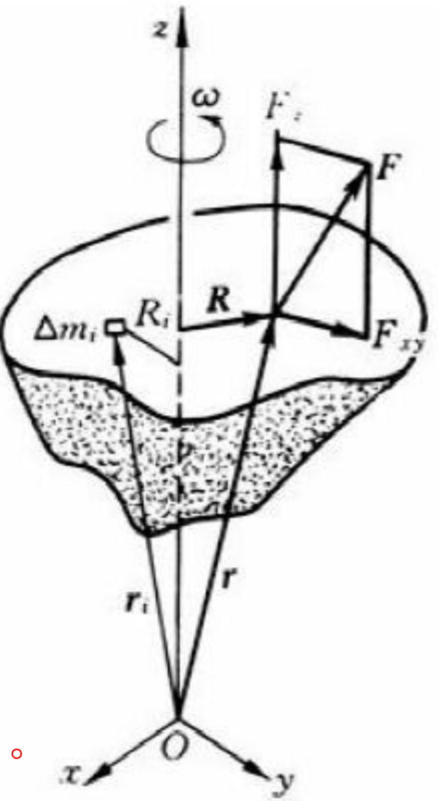
$$L_1 = I_{xz} w = w \int -zx dm = w \sum (-x_i z_i m_i)$$

$$L_2 = I_{yz} w = w \int -yz dm = w \sum (-y_i z_i m_i)$$

$$L_3 = I_{zz} w = w \int (x^2 + y^2) dm = w \sum (x_i^2 + x_j^2) m_i$$

$$I_{zz} = \int r^2 dm$$

定轴转动中，角速度沿轴方向，但是总角动量却不一定沿轴的方向。



我们所求的定轴转动的转动惯量I其实是惯性张量沿转动轴方向的分量I_{zz}

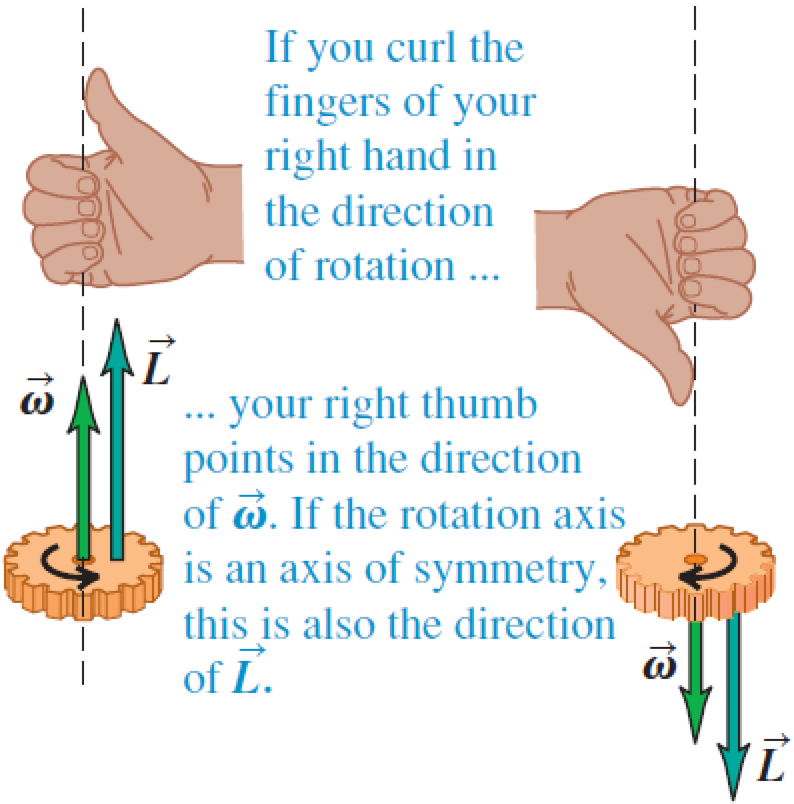
Z轴角动量分量和角速度

$$\mathrm{L}_z = Iw$$

转动惯量

$$I = \int r^2 dm$$

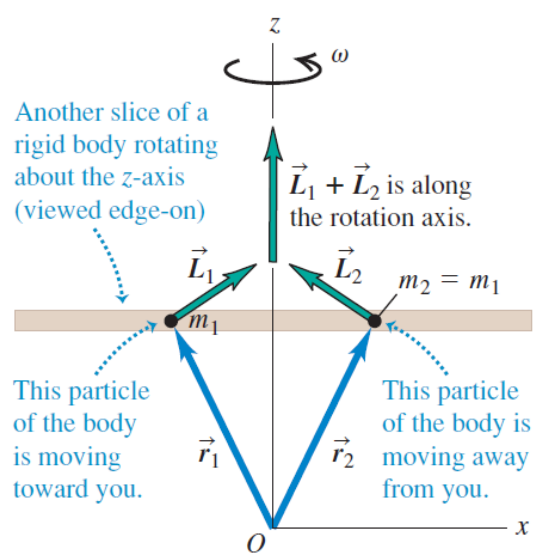
定轴转动中的旋转轴为刚体对称轴



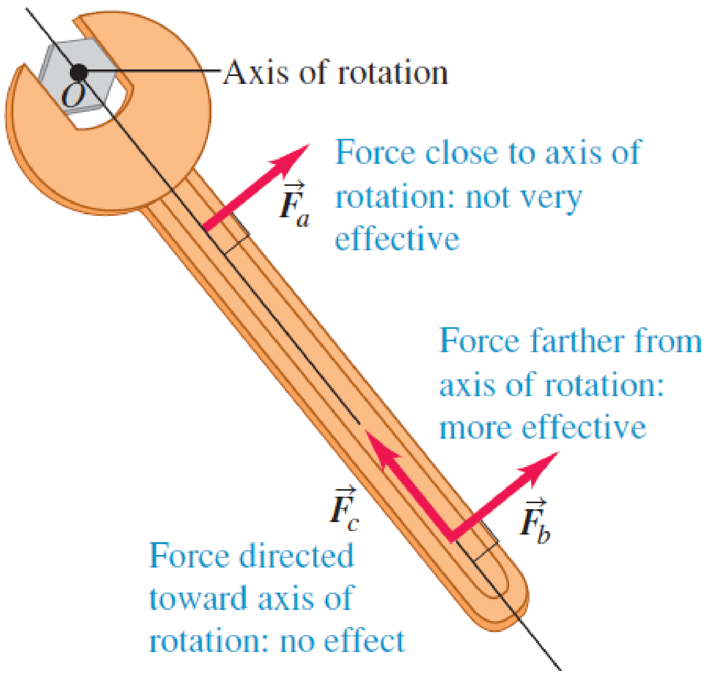
只有转动轴为刚体的对称轴，

$\vec{L}$与$\vec{w}$平行

m_1向我们运动，m_2远离我们，当m_1和m_2相同，合角动量沿z.



力矩



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

定轴转动定理

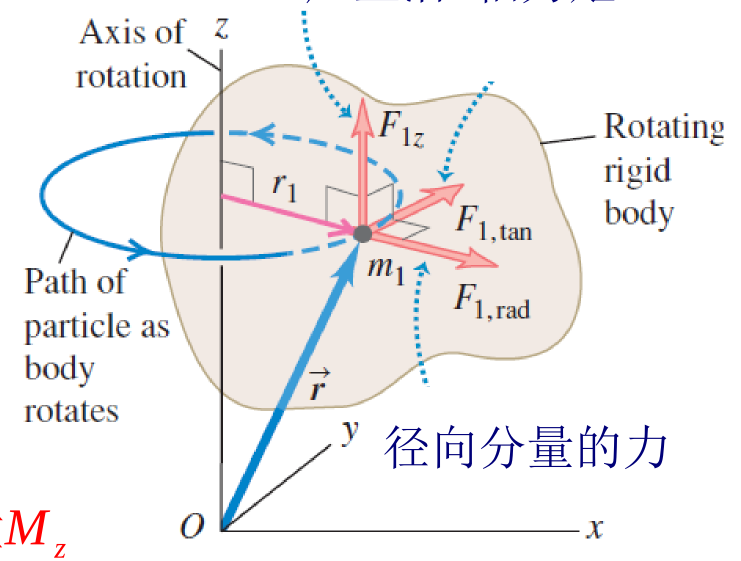
由质点组角动量变化定理可得：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(Iw)}{dt} = I\frac{dw}{dt} = I\alpha_z = M_z$$

沿轴向分量的力

只有切向分量的力才能产生沿Z轴力矩



径向分量的力

定轴转动的角加速度$\boldsymbol{\alpha}_z$正比于外力矩的轴向分量M_z

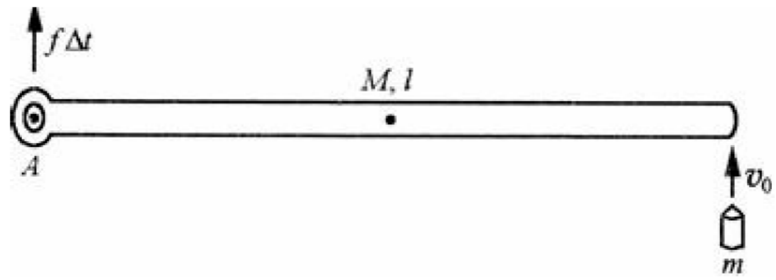
$$\vec{M}_z = (\vec{r} \times \vec{F})_z = (xF_y - yF_x)$$

$$= \mathrm{F}_{tan} r_1$$

角动量守恒

$$M_z = 0, 则 L_z = 常数$$

$$Iw = 常数，角动量守恒$$



系统
机械能不守恒
动量不守恒
但外力矩为0， 角动量守恒

例：如图所示一根均质木棒被置于一光滑水平面上，其一端可绕固定点A转动．现有一颗子弹以初速v_0垂直棒入射于木棒另一端，且很快地嵌于木棒中．试求含子弹的木棒的转动角速度ω.

初始　　末态

$$mv_0 l = Iw$$

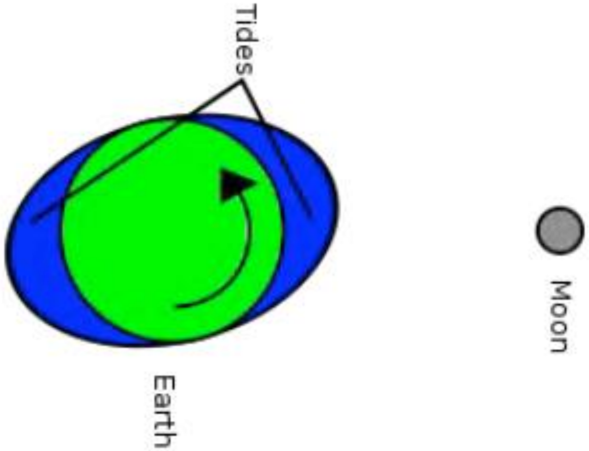
系统转动惯量 $I=I_1 + I_2 = ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2$

$$w = \frac{m}{m+\frac{1}{3}M} \cdot \frac{v_0}{l}$$

角动量守恒

今天日出：05:46

今天日落：18:11



$$\sum \mathbf{L}_i = \text{const.}$$

月亮远离地球：4厘米/年

地球每天变长：23毫秒

太阳照常升起吗？


14+
NEW STYLE
Doraemon

定轴转动的动能公式与动能定理

$$E_k=\frac{1}{2}\sum\Delta m_i v_i{}^2=\frac{1}{2}\sum\left(\Delta m_i R_i{}^2\right)w^2$$

$$E_k=\frac{1}{2}Iw^2$$

动能变化：

$$dE_k=d\left(\frac{1}{2}Iw^2\right)=wIdw$$

而

$Id\omega=M_z dt$

所以动能变化：

$dE_k=M_z wdt$或者$dE_k=M_z d\varphi$

$d\boldsymbol{\varphi}$为dt时间内的角位移

积分形式：

$$\frac{1}{2}Iw_2^2-\frac{1}{2}Iw_1^2=\int_1^2 M_z d\varphi$$

定轴转动

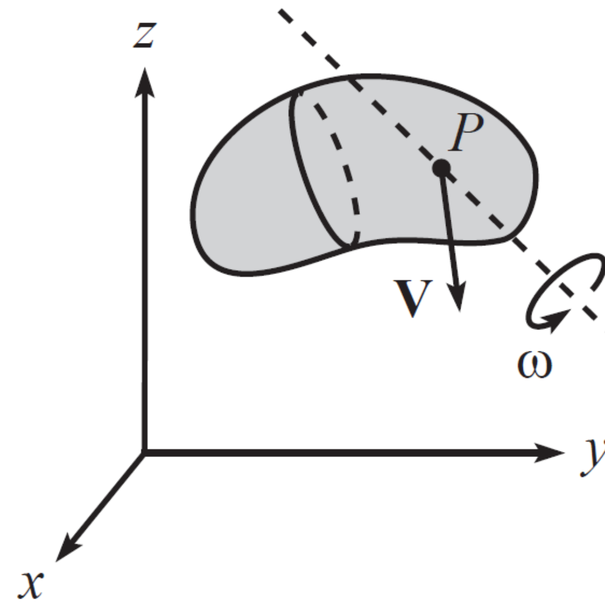
$$L_z = I\omega \qquad I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha_z = M_z \qquad E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$P = mv \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = ma = \vec{F} \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

刚体绕运动的轴转动

刚体做任意运动。取刚体内任意一点P(基点)。在任何时刻，刚体的运动都可以写作P点的平移运动，加上绕穿过P点的一个轴的旋转运动 (Chasles' theorem， 夏莱定理)。

旋转的角速度与基点的选择无关



我们可以选择质心为基点P, 此时刚体动能为：

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}^{\ 2} + \frac{1}{2} I_{cm} w^2$$

刚体动能为质心的平动动能加上绕质心的转动动能

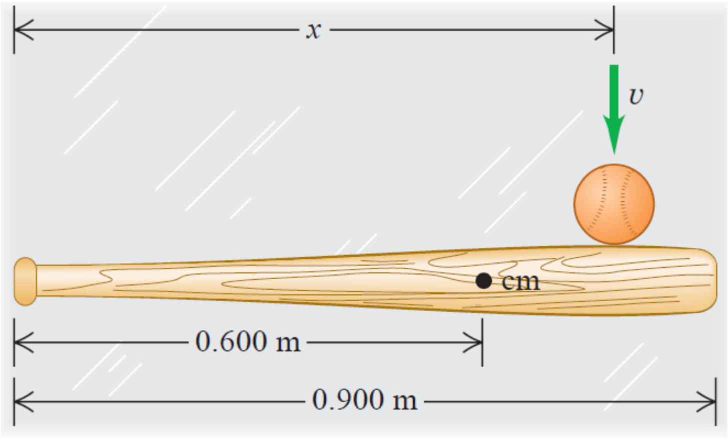
注意： 除非是特殊情况， 否则刚体动能不等于基点平动动能加上绕该基点转动动能

刚体力学的典型题目

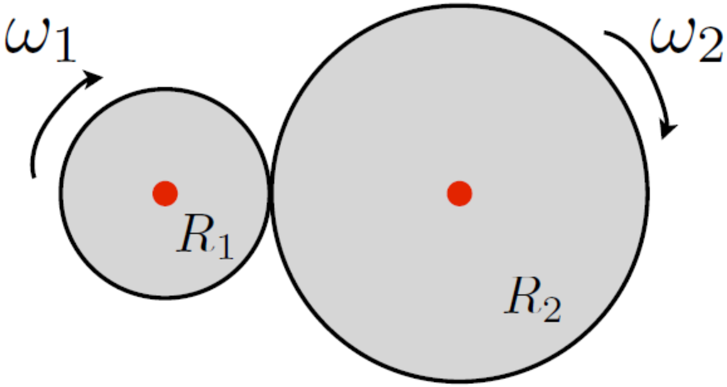
$$L_z = Iw \qquad I\frac{dw}{dt} = Ia_z = M_z \qquad E_k = \frac{1}{2}Iw^2$$

$$P = mv \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = ma = \vec{F} \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

击球中心



两轮磨合



斜靠的梯子

一个梯子斜靠在光滑垂直的墙壁上。梯子的质量为m,
梯子和地面的静摩擦系数为 $\boldsymbol{\mu}_s = 0.40$ 。求梯子不滑动的最小角度 $\boldsymbol{\theta}_{min}$.

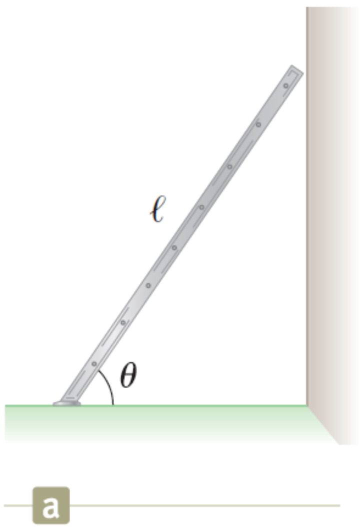
(1) $\sum F_x = f_s - P = 0$

(2) $\sum F_y = n - mg = 0$

(3) $P = f_s$

(4) $n = mg$

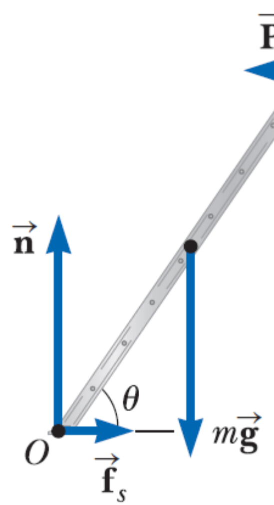
(5) $P = f_{s,\max} = \mu_s n = \mu_s mg$



$$\sum \tau_O = P\ell \sin\theta_{\min} - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_{\min} = 0$$

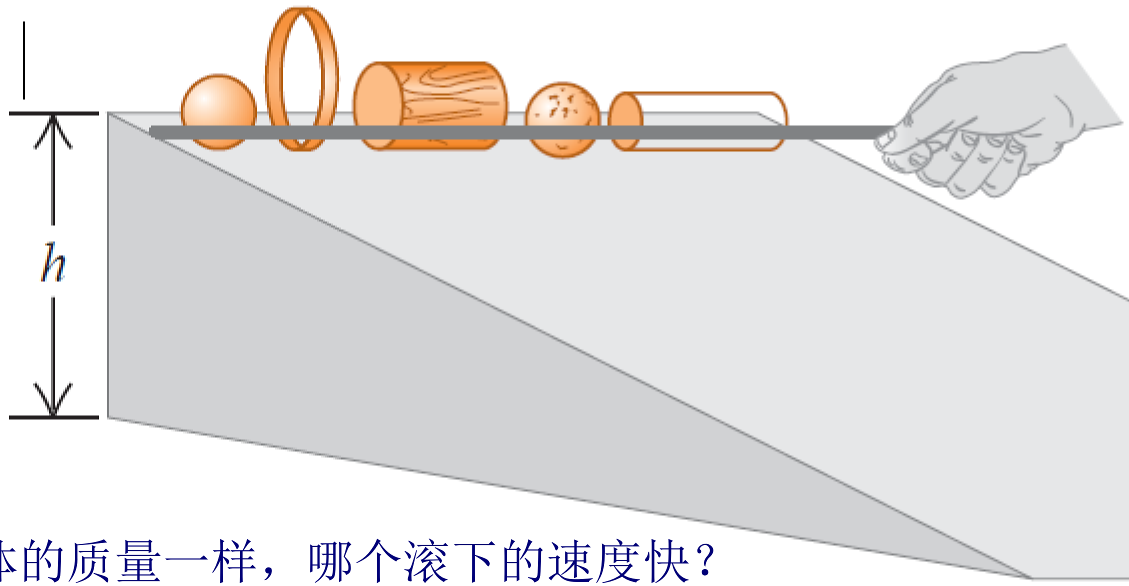
$$\frac{\sin\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}} = \tan\theta_{\min} = \frac{mg}{2P} = \frac{mg}{2\mu_s mg} = \frac{1}{2\mu_s}$$

$$\theta_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu_s}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2(0.40)}\right] = \boxed{51^\circ}$$



滚下的物体

没有滑动，纯滚动



机械能守恒

C是不一样的
球： C=2/5
圆柱： C=1/2
圆球壳: C=2/3
圆环: C=1

如果物体的质量一样，哪个滚下的速度快？还是都一样快？

$$E_{k1}+U_1=E_{k2}+U_2$$

$$0+Mgh=\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}Iw^2$$

$$=\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I(\frac{v_{cm}}{R})^2$$

$$0+Mgh=\tfrac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}{}^2+\tfrac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{\mathrm{cm}}}{R}\right)^2+0$$

$$Mgh=\tfrac{1}{2}(1+c)Mv_{\mathrm{cm}}{}^2$$

$$v_{\mathrm{cm}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

Yoyo球

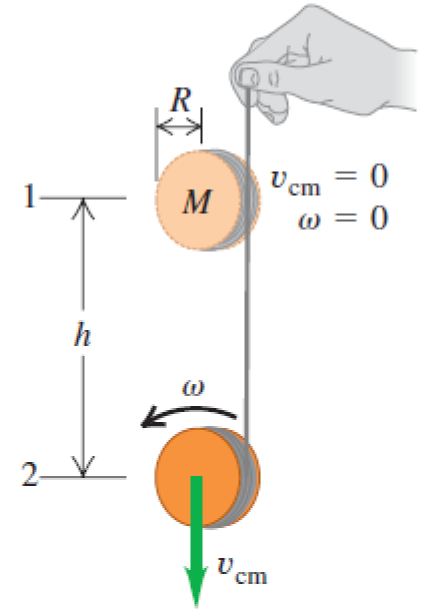
求下落时的质心速度

系统机械能守恒 $$E_{k1}+U_1=E_{k2}+U_2$$

系统动能等于质心平移动能加绕质心转动的动能（和转动惯量相关）。

$$E_{k1}=\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}Mv_{cm}^2$$



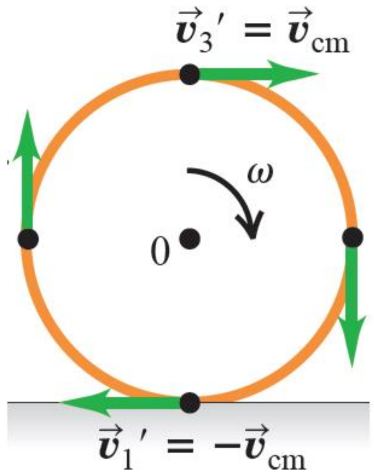
绳子接触出
滚动无滑动，
接触点速度为0

刚体力学的典型题目

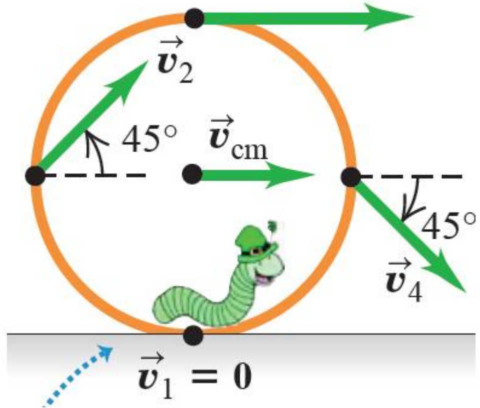
轮子滚动问题

纯滚到滚动

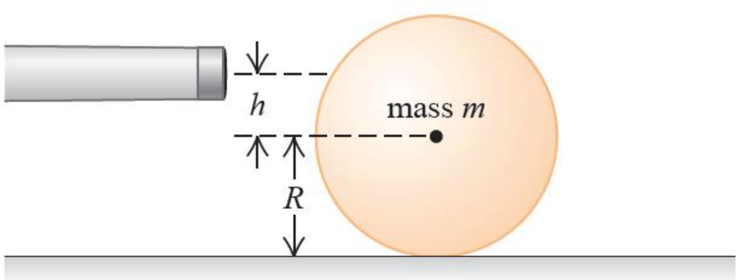
纯滑到滚动



人行走问题



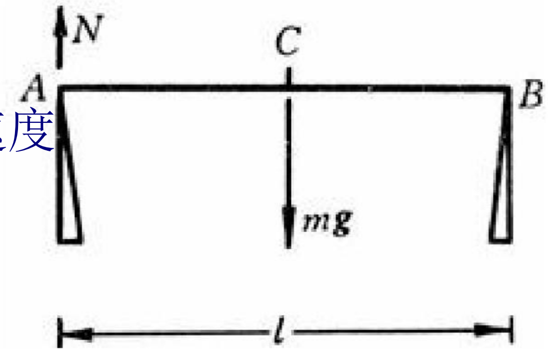
台球



汽车前进问题

两人抬杠一人撒手

B撒手，问横杠的运动



横杠受力：向下的重力和支点向上的力，决定质心加速度

$$m\frac{dv_c}{dt} = mg - N$$

横杠力矩(A为转轴)：重力力矩，决定横杠定轴转动角加速度.

支持力N力矩为0

$$Ia = I\frac{dw}{dt} = mg \times \frac{l}{2}$$

质心速度，加速度和角加速度关系

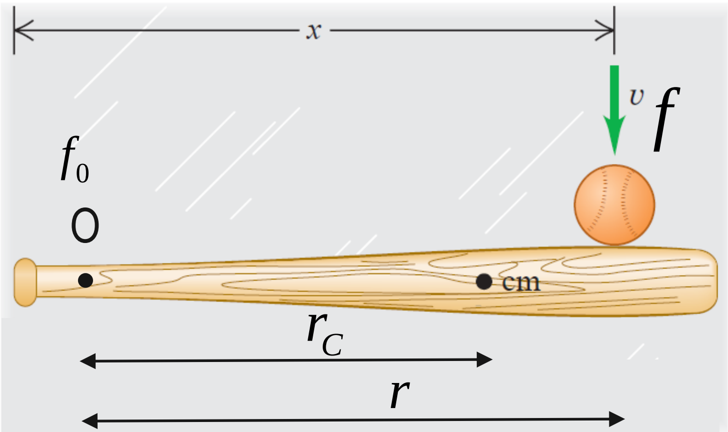
$$v_c = \frac{l}{2} \times w \qquad \frac{dv_c}{dt} = \frac{l}{2} \times \frac{dw}{dt}$$

横杠绕支点转动惯量I=$\frac{ml^2}{3}$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{3}{4}g, N = \frac{1}{4}mg$$

打击中心

击球中心



希望手握得约束力为0。取握手处为支点。

转动定理：　$\mathrm{fr} = I\alpha = I\dfrac{dw}{dt}$

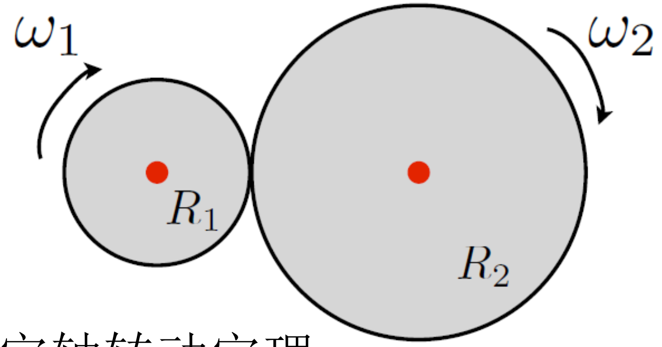
质心定理：$f - f_0 = m\dfrac{dv_c}{dt}$

运动学关系：$\dfrac{dv_c}{dt} = r_C\dfrac{dw}{dt}$

K为质心转动惯量和实际转动惯量之比

两轮磨合

见图7-25，两个轮子各自绕z_1轴、z_2轴作定轴转动，其初始角速度、转动惯量和半径分别为（ω_{10}，I_1，R_1）和（ω_{20}，I_2，R_2）．让两者逐渐靠近而相接触．由于摩擦力矩的作用，各自的角速度将发生变化．经历一磨合过程，最终达到一稳定的角速度ω_1'和ω_2'.此时两轮在接触点的相对速度为零，摩擦力消失．因此，角速度ω_1'与ω_2'的方向必定相反．试求出最终角速度ω_1'和ω_2'.



思考：

末态相对速度为0，因此：

$$w_1'R_1 = w_2'R_2$$

系统角动量守恒？

$$I_1 w_1^2 = I_2 w_2^2$$

NO

因为有两个轴，选一个轴则另外一个轴的约束力矩作用对系统不为0.

根据定轴转动定理：

$$I_1 dw_1 = f_1 R_1 dt$$

$$I_2 dw_2 = f_2 R_2 dt$$

摩擦力大小$f_1 = f_2$

$$I_1 R_2 dw_1 = I_2 R_1 dw_2$$

两边积分从初态到末态：

$$I_1 R_2 (w'_1 - w_{10}) = I_2 R_1 (w'_2 - w_{20})$$

最后$v_1 = v_2$,因此$w'_1 R_1 = -w'_2 R_2$

水平面内的球杆碰撞

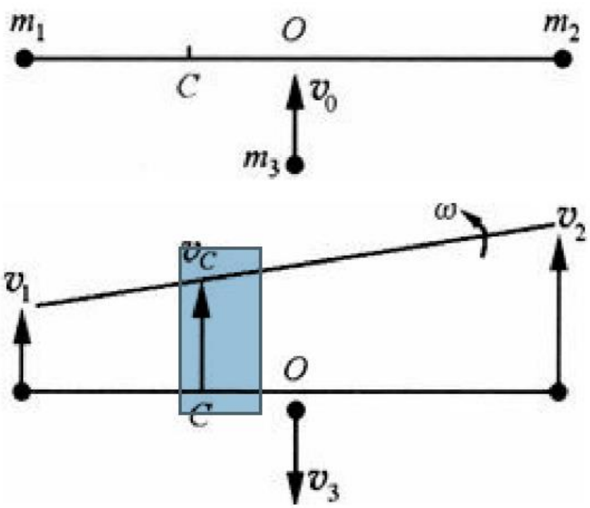
见图7-22，两体m_1，m_2刚性连结，连杆长l，其质量可被忽略，第三者m_3以速度v_0射向连杆中点O，发生弹性碰撞．试求碰后两体质心速度v_C，角速度ω和反弹速度v_3.

动能守恒：$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_C^2+\frac{1}{2}I_C w^2+\frac{1}{2}m_3 v_3{}^2=\frac{1}{2}m_3 v_0^2$

动量守恒：$(\mathrm{m}_1+m_2)v_C-m_3v_3=m_3v_0$

角动量守恒：$I_c w-(m_1+m_2)v_c r_0=0$, O为参考点

$I_c w-m_3v_3r_0=m_3v_0r_0$，C为参考点



斜面上圆筒的滚动

静摩擦力 纯滚动
机械能守恒，静摩擦力做功
转为质心动能

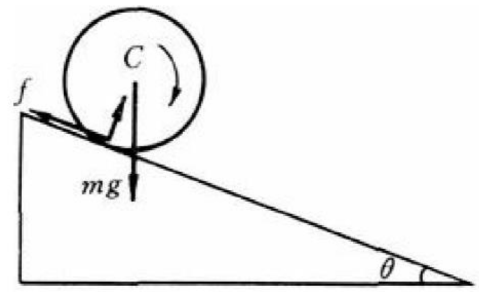


图7-21　斜面上圆筒纯滚

见图7-21，在非光滑斜面上一圆筒或圆柱，从静止开始纯滚而下.试求下落h高度时，物体的质心速度、角速度和静摩擦力.

机械能守恒：$\frac{1}{2}mv_c{}^2+\frac{1}{2}Iw^2=mgh$

$v_c=wR$

$$v_c=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_C}{mR^2}}}$$

考虑静摩擦力，根据质心运动定理和匀加速直线运动关系

$\mathrm{mgsin}\theta-f=ma_C$

$v_c^2=2a_cs, h=s\sin\theta$

得：

$$f=,\sin\theta(g-\frac{v_C^2}{2h})$$

陀螺