20220425-课堂练习

答案

1. 求$\int_L |x|ds$，其中L为双扭线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

- 引入极坐标，得
- $r^4=r^2(cos^2\theta-sin^2\theta)$
- $r=\sqrt{cos2\theta},\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$
- $ds=\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta=\sqrt{\frac{1}{cos2\theta}}d\theta$
- $x=rcos\theta=\sqrt{cos2\theta}cos\theta$

$$\int_L |x|ds=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left|\sqrt{cos2\theta}cos\theta\right|\sqrt{\frac{1}{cos2\theta}}d\theta+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left|\sqrt{cos2\theta}cos\theta\right|\sqrt{\frac{1}{cos2\theta}}d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}cos\theta\,d\theta=2\sqrt{2}$$

2.求$\int_L (xy+yz+zx)ds$，其中L为球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$和平面$x+y+z=0$的交线

- 交线L为球面上的一个大圆
- $\because xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)$

$$\therefore \int_L (xy+yz+zx)ds=\frac{1}{2}\int_L (x+y+z)^2 ds-\frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=0-\frac{1}{2}a^2\int_L ds=-\pi a^3$$

3.求$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz$，其中$L$为从点$(1,1,1)$到$(2,3,4)$的直线段

- 直线的方向向量为(1,2,3)
- 直线段的参数方程为：$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t\,, t: 0 \to 1 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

$$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int_0^1 \big((1+t) + (1+2t)\cdot 2 + (1+3t)\cdot 3\big)dt$$

$$= \int_0^1 (14t+6)dt = 13$$

4.求$\int_L ydx+zdy+xdz$，其中L为曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2az \\ x+z=a \end{cases}$ $(a>0)$，从z轴正方向看去，L方向为逆时针。（请勿用$Stokes$公式）

- 写出曲线的参数方程：
  - $z=a-x$代入$x^2+y^2+z^2=2az$得到曲线在XOY平面上的投影曲线
  - $2x^2+y^2=a^2$，结合L的方向，引入参数方程，得：
  - $\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{2}}cos\theta \\ y=asin\theta \\ z=a-\frac{a}{\sqrt{2}}cos\theta \end{cases}$ $,\theta:0\to 2\pi$

$$\int_L ydx+zdy+xdz=\int_0^{2\pi}\left(asin\theta\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}sin\theta\right)+\left(a-\frac{a}{\sqrt{2}}cos\theta\right)acos\theta+\frac{a}{\sqrt{2}}cos\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}sin\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^2}{\sqrt{2}}sin^2\theta+a^2cos\theta-\frac{a^2}{\sqrt{2}}cos^2\theta+\frac{a^2}{2}cos\theta sin\theta\right)d\theta=-\sqrt{2}\pi a^2$$

5.$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中$\Sigma$为八面体$|x|+|y|+|z|=1$的表面

- 设Σ_1是平面$x+y+z=1$在第一掛限内的部分，由对称性可知
- $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=8\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)dS$
- 对于Σ_1:
- $z=1-x-y$
- $dS=\sqrt{EG-F^2}dxdy$
- $=\sqrt{(z_x')^2+\left(z_y'\right)^2+1}dxdy$
- $=\sqrt{3}dxdy$
- 令$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1-x\}$

5.$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中$\Sigma$为八面体$|x|+|y|+|z|=1$的表面

- $\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)dS$
- $=\sqrt{3}\iint_D(x^2+y^2+(1-x-y)^2)dxdy$
- $=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1)dy$
- $=\frac{\sqrt{3}}{4}$
- $\therefore\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=2\sqrt{3}$

6. $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中$\Sigma$为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$截下的有限部分$(a>0)$

- 对于圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$
- $dS=\sqrt{EG-F^2}dxdy$
- $=\sqrt{(z_x')^2+\left(z_y'\right)^2+1}dxdy$
- $=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}dxdy$
- $=\sqrt{2}dxdy$
- 令$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2ax\}$

6. $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中$\Sigma$为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$截下的有限部分$(a>0)$

- 引入极坐标，得
- $D=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2acos\theta\right\}$
- $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$
- $=\sqrt{2}\iint_{D}\left(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$
- $=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2acos\theta}(r^2cos\theta sin\theta+r^2sin\theta+r^2cos\theta)rdr$
- $=8\sqrt{2}a^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cos^5\theta d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$

7.$\iint_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$，其中$\Sigma$为立方体$[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$的表面，方向取外侧。

- 立方体的表面Σ可分成6个部分：
- $\Sigma_1: z=-h, (x,y)\in[-h,h]\times[-h,h], d\vec{S}=(0,0,-1)dxdy$
- $\Sigma_2: z=h, (x,y)\in[-h,h]\times[-h,h], d\vec{S}=(0,0,1)dxdy$
- $\Sigma_3: x=-h, (y,z)\in[-h,h]\times[-h,h], d\vec{S}=(-1,0,0)dxdy$
- $\Sigma_4: x=h, (y,z)\in[-h,h]\times[-h,h], d\vec{S}=(1,0,0)dxdy$
- $\Sigma_5: y=-h, (z,x)\in[-h,h]\times[-h,h], d\vec{S}=(0,-1,0)dxdy$
- $\Sigma_6: y=h, (z,x)\in[-h,h]\times[-h,h], d\vec{S}=(0,1,0)dxdy$

7.$\iint_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$，其中$\Sigma$为立方体$[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$的表面，方向取外侧。

- $\iint_{\Sigma_1}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$
- $=\iint_{[-h,h]\times[-h,h]}(h-x)dxdy$ (由对称性，可得)
- $=h\iint_{[-h,h]\times[-h,h]}dxdy=4h^3$
- 同理可得，在其他5个表面上的第二类曲面积分都为$4h^3$
- $\therefore \iint_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy=24h^3$

8.$\iint_\Sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧

- 将第二类曲面积分$\iint_\Sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$分成三个第二类曲面积分的和：
- $\iint_\Sigma x^3dydz, \iint_\Sigma y^3dzdx, \iint_\Sigma z^3dxdy$
- 首先计算$\iint_\Sigma z^3dxdy$
- 将Σ分成两个有向曲面：
  - $\Sigma_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,定向为上侧
  - $\Sigma_2: z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,定向为下侧
  - 令$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$
- $\therefore \iint_\Sigma z^3dxdy = \iint_{\Sigma_1} z^3dxdy + \iint_{\Sigma_2} z^3dxdy$

8.$\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧

- $=\iint_D(R^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy+\iint_D-(R^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(-1)dxdy$
- $=2\iint_D(R^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$
- $=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}rdr$
- $=\frac{4}{5}\pi R^5$
- 由对称性，得
- $\iint_\Sigma x^3dydz=\iint_\Sigma y^3dzdx=\frac{4}{5}\pi R^5$
- $\therefore\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\frac{12}{5}\pi R^5$

9. $\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R,z=-R(R>0)$所围的立体的表面，方向取外侧

- 将Σ分成三个部分：
- $\Sigma_1: z=-R, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，方向取下侧
- $\Sigma_2: z=R, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，方向取上侧
- $\Sigma_3: x^2+y^2=R^2, -R\le z\le R$，方向取外侧
- 则
- $\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=-\iint_D\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}dxdy$
- $\iint_{\Sigma_2}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint_D\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}dxdy$
- $\therefore \iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{\Sigma_2}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$

9. $\oiint_\Sigma \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R,z=-R(R>0)$所围的立体的表面，方向取外侧

- 对于$\iint_{\Sigma_3} \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，引入参数方程：
- $\vec{r}(\theta,z)=(Rcos\theta,Rsin\theta,z),0\le\theta\le 2\pi,-R\le z\le R$
- $\vec{r}_\theta'\times\vec{r}_z'=(-Rsin\theta,Rcos\theta,0)\times(0,0,1)=(Rcos\theta,Rsin\theta,0)$
- $\therefore \iint_{\Sigma_3} \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint_D \frac{(Rcos\theta,0,z^2)\cdot(Rcos\theta,Rsin\theta,0)}{R^2+z^2}d\theta dz$
- $=\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^{R} \frac{R^2cos^2\theta}{R^2+z^2}dz$
- $=\frac{\pi^2 R}{2}$
- $\therefore \oiint_\Sigma \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\pi^2 R}{2}$

10. 设f为一元连续函数，求$\oiint_\Sigma \big(x+(y-z)f(xyz)\big)dydz+\big(y+(z-x)f(xyz)\big)dzdx+\big(z+(x-y)f(xyz)\big)dxdy$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧

- Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧，可得
- $d\vec{S}=\frac{(x,y,z)}{R}dS$
- $\oiint_\Sigma \big(x+(y-z)f(xyz)\big)dydz+\big(y+(z-x)f(xyz)\big)dzdx+\big(z+(x-y)f(xyz)\big)dxdy$
- $=\iint_\Sigma \frac{\big(x+(y-z)f(xyz)\big)x+\big(y+(z-x)f(xyz)\big)y+\big(z+(x-y)f(xyz)\big)z}{R}dS$
- $=\iint_\Sigma \frac{x^2+y^2+z^2}{R}dS$
- $=R\iint_\Sigma dS=4\pi R^3$