6 线性空间 与 欧氏空间

线性空间与欧氏空间

- 加法和数乘运算在很多数学、物理和工程领域中都广泛使用。而且，这两种运算通常都遵循统一的代数法则：
- 例如加法的交换律、结合律，数乘的分配率等等.
- 这种运算和相关的定理可以归纳为一套数学系统，即所谓线性空间或向量空间的理论.
- 空间(space）是现代数学最基本的概念之一。(赋范线性空间、巴那赫空间、内积空间、希尔伯特空间…)
- 线性空间是最基础，也是应有最广泛的空间；同时，也是线性代数最基本的概念之一。

§1 线性空间的概念

一、线性空间的定义

- 我们已熟知向量的运算规律

设 α、β、γ 是 n 元向量（例如 n=2），k、l 是数域 P 中任意的数

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ *加法交换律*

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ *加法结合律*

(3) $\alpha+0=\alpha$ *零向量*

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$ *负向量*

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ *数量乘法和加法*

(6) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ *数量乘法和加法*

(7) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$ *数量乘法*

(8) $1\alpha = \alpha$ *数量乘法*

- 向量对数乘和加法两种基本运算是封闭的，例如二维、三维几何空间中的向量.
- 即n元向量运算之后的结果仍是 n 元向量.
- 满足上述8条运算定律的数学对象还有很多，例如： 实数、复数、矩阵，. . .
- 我们这类对象的共同属性抽象出来 — 线性空间

注：自然数与整数不满足.

定义 1：设 V 是一个非空集合，P 为一数域，如果以下三个条件被满足，则称非空集合V 是数域 P 上的一个线性空间.

(I) 在 V 的元素间给出一个法则，称为**加法**，使 V 中任意两个元素 α 与 β，总有**唯一确定**的一个元素 γ 与之对应，称为 α 与 β 的**和**，记作 $\gamma=\alpha+\beta$.

(II) 在 V 的元素间给出一个法则，称为**数量乘法**，使数域 P 中任意一数 k 与V 中任意一个元素 α，在V 中总有**唯一确定**的一个元素 δ 与之对应，称为 k 与 α 的**数量乘积**，记作 $\delta=k\alpha$.

(III) 对于所给定的加法与数量乘法两种运算满足以下 8 种 运算规律(公理)

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+0=\alpha$ (4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ (6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(7) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$ (8) $1\alpha=\alpha$

- 当 P 为实数域 R 时，则称此线性空间为实线性空间.
- 当 P 为复数域 R 时，则称此线性空间为复线性空间.

- 例1 数域 P 上的全部n元向量所组成的集合，按n元向量的加法与数量乘法构成数域P上的一个线性空间，记为P^n，称为n元向量空间。

- 线性空间与n元向量空间有许多本质上相同的性质。

- 因此，常把线性空间也称为向量空间。

说明

1. 凡满足以上八条运算规律的加法及数乘运算，称为线性运算.

2．判别线性空间的方法：一个集合，它如果

- 对于定义的线性运算不封闭(不满足闭包性)；
- 或者，不满足八条运算性质的任一条；

则不能构成线性空间.

数域 P 按照本身的加法与乘法，即构成一个自身上的线性空间

定义的简化理解：

设 V 为 n 维向量的非空集合，
若 V 对于加法及数乘两种运算封闭，
则称集合 V 为**向量空间**（或**线性空间**）.

说明： 集合 V 对于加法及数乘两种运算封闭指

$$\forall \alpha, \beta \in V, \text{有 } \alpha + \beta \in V;$$

$$\forall \alpha \in V, \forall k \in R, \text{有 } k\alpha \in V.$$

注意. $\mathbf{0}$ 必是向量空间 V 的元素，即 $\mathbf{0} \in V$.

例：3 维向量的全体 R^3 是一个向量空间，几何空间

n 维向量的全体 R^n 也是一个向量空间。

例：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集合

$$S=\{x \mid Ax=0\}$$

是一个向量空间。

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解集合

$$S_*=\{x \mid Ax=b\}$$

不是一个向量空间。

例：判别下列集合是否为向量空间.

$$(1)\, V_1 = \{ x = (0, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \cdots, x_n \in R \}$$

$$(2)\, V_2 = \{ x = (1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \cdots, x_n \in R \}$$

解：(1) $\forall \alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}, \beta=(0,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in V_1$

有$\alpha+\beta=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}\in V_1$

$\forall \lambda\in R$, 有$\lambda\alpha=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}}\in V_1$.

所以，V_1 是向量空间。

(2) 若$\alpha=\left(1,a_2,\cdots,a_n\right)^T\in V_2$,

则 $2\alpha=\left(2,2a_2,\cdots,2a_n\right)^T\notin V_2$.

V_2 不是向量空间。

例：数域 P 上的全部 n元向量所组成的集合，按 n 元向量的加法和数乘运算构成数域 P 上的线性空间，记作 P^n ，称为 n 元向量空间.

- P 取实数域 R ，n=3 ，则 R^3 就是大家熟悉的三维几何空间.

例： 实数域上全体 $m\times n$ 阶矩阵的集合，对矩阵的加法和数乘运算封闭，构成实数域上的线性空间，记作 $R^{m\times n}$.

$$\because A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}, \qquad \lambda A_{m\times n}=D_{m\times n},$$

- 另外，满足八条线性运算性质

$\therefore R^{m\times n}$是一个线性空间.

例：数域 P 上一元多项式的全体(包括零多项式)所组成的集合，按通常的多项式的加法和数与多项式的乘法，构成数域 P 中的线性空间，记作 P [x] .

- 多项式加法和数乘多项式运算满足线性运算规律：

例如次数不大于 n 的一元多项式：

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)$$
$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in P[x]_n$$
$$\lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)$$
$$= (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in P[x]_n$$

- 另外，满足八条线性运算性质，
- 所以，构成数域 P 中的线性空间.

例：定义在区间 $[a, b]$上的全体实连续函数的全体所组成的集合，对函数的加法和数与函数的数量乘法，构成实数域上的线性空间，记为 $C[a, b]$.

- $f(x) + g(x) = h(x)$，新函数 $h(x)$ 也是定义在区间 $[a,b]$上的实连续函数，即是$C[a, b]$的元素
  —— 加法满足封闭性
- $k \cdot f(x) = d(x)$，新函数 $d(x)$ 也是定义在区间 $[a,b]$上的实连续函数，是$C[a, b]$的元素
  —— 乘法满足封闭性
- 另外，满足八条线性运算性质,
- 所以，构成实数域上的线性空间.

注意：

V中的元素不论其本来的性质如何，统称为向量

是一种代数系统

抽象层级更高的一个层级

要领会、并学习在这个层级想问题

判断是否构成线性空间：

对于非一般意义的加法、乘法，除了验证封闭性，8条运算规律要逐一验证。

例，全体正实数$\mathbf{R}^+$，加法与数量乘法定义为：

$$a \oplus b = ab; \qquad k a = a^k$$

线性空间的简单性质

1．在线性空间中，零元素是唯一的.

证明：假设 0_1和 0_2 是线性空间 V 中有两个零元素，

则对于任意$\boldsymbol{\alpha} \in V$ ，满足

$$\alpha + 0_1 = \alpha, \quad \alpha + 0_2 = \alpha.$$

由于 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2 \in \boldsymbol{V},$

所以 $0_2 + 0_1 = 0_2, \quad 0_1 + 0_2 = 0_1.$

$$\Rightarrow \quad 0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

2．在线性空间中，负元素是唯一的

证明：假设α有两个负元素β与γ，那么

$$\alpha+\beta=\mathbf{0},\quad \alpha+\gamma=\mathbf{0}.$$

则有 $$\beta=\beta+\mathbf{0}=\beta+(\alpha+\gamma)$$

$$=(\beta+\alpha)+\gamma$$

$$=\mathbf{0}+\gamma=\gamma.$$

➢ 所以，负元素是唯一的.

向量 α 的负元素记为 $-\alpha$.

3. $\mathbf{0}\alpha=\mathbf{0}$; $(-1)\alpha=-\alpha$; $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

证明 $\because \alpha+0\alpha=1\alpha+0\alpha=(1+0)\alpha=1\alpha=\alpha,$

$\therefore 0\alpha=\mathbf{0}.$

$\because \alpha+(-1)\alpha=1\alpha+(-1)\alpha=[1+(-1)]\alpha=0\alpha=\mathbf{0},$

$\therefore (-1)\alpha=-\alpha.$

4．如果 $\lambda\alpha=\mathbf{0}$ ，则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=\mathbf{0}$ ．

二、子空间的概念（线性空间局部与整体的关系）

- 考虑过原点的平面，平面上所有向量对于加法和数量乘法构成一个线性空间.
- 一方面，这些向量是三维几何空间的一部分；另一方面，它们对于原来的运算构成一个线性空间.

☑ 定义 2：设 W 是数域 P 上线性空间 V 的一个子集，若满足条件：

(1) W 是非空的；

(2) 如果 $\alpha, \beta \in W$，则 $\alpha+\beta \in W$；

(3) 如果 $\alpha \in W$， $\lambda \in P$ 则 $\lambda\alpha \in W$；

那么 W 是 V 的一个子空间.

- 由定义，子空间非空且对加法和数乘封闭，
- 子空间满足8条公理：6条从原线性空间继承；

其余两条(iii)(iv),只要满足封闭性，由线性空间的4条简单性质保证.

(3) $\alpha + 0 = \alpha$ (4) $\alpha + (-\alpha) = 0$

V的的非空子集构成线性空间$\Leftrightarrow$对V上的线性运算封闭

例. $R_{yz}=\{(0,y,z)\mid y,z\in R\}$ 及 $R_z=\{(0,0,z)\mid z\in R\}$ 都是 R^3 的子空间。

$S=\{x\mid A_{m\times n}x=0\}$ 是线性空间 R^n 的子空间，称为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间，或 A 的零空间。

例：几何空间中，过原点的平面上所有向量构成几何空间 R^3 的一个子空间.

例：齐次线性方程组全部解的集合是线性空间 R^n 的一个子空间，称为该齐次线性方程组的解空间.

例： 在线性空间 V 中，由一个零元素组成的子集，是 V 的一个线性子空间，称它为零子空间(null subspace)，记为 $\{0\}$.

- 线性空间 V 也是自身 的一个线性子空间.

✓ $\{0\}$和V 称为线性空间 V 的平凡子空间(trivial subspaces).

✓ V 的其他线性子空间称为 V 的非平凡子空间(或真子空间).

例：对于向量组 $S=\left\{\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ a\text{为任意实数}\right\}$

由于 $2\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a \\ 2 \end{bmatrix}\notin S,$

所以向量组 S 不是 R^2 的子空间.

- 本例也说明了运算封闭性的必要性，
- 本例也对加法运算不封闭性.

例： $R^{2\times3}$的下列子集是否构成子空间?为什么?

$$(1)\ W_1=\left\{\begin{pmatrix}1 & b & 0\\ 0 & c & d\end{pmatrix}\middle|\, b,c,d\in R\right\};$$

$$(2)\ W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\middle|\, a+b+c=0, a,b,c\in R\right\}.$$

解: (1)不构成子空间.

因为对 $A=B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in W_1$

有 $A+B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\notin W_1,$

即 $\mathbf{W_1}$ 对矩阵加法不封闭，不构成子空间.

➢ 显然，W_2 非空，

对任意

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \in W_2$$

有 $$a_1+b_1+c_1=0, \quad a_2+b_2+c_2=0,$$

于是 $$A+B=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}$$

满足 $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=0,$

即 $A+B\in W_2$，对任意$k\in R$有

$$kA=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & 0 & kc_1 \end{pmatrix}$$

且 $$ka_1+kb_1+kc_1=0,$$

即$\boldsymbol{kA}\in \boldsymbol{W_2}$，故$W_2$是$\boldsymbol{R}^{2\times 3}$的子空间.

练习：令 $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1=x_2\right\}$

问 S 是否为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间？

解：由于 $\mathbf{x}=(1,1,0)^T$

所以向量组 S 非空；

- 再验证满足两个闭包性：

若 $\mathbf{x}=(a,a,b)^T,\mathbf{y}=(c,c,d)^T$ 为S中任意向量，

(1) $k\cdot\mathbf{x}=(ka,ka,kb)^T\in S$，

(2) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(a+c,a+c,b+d)^T\in S$，

- 故 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间.

例：设 a，b为两个已知的n维向量，判断集合

$$V=\left\{\lambda a+\mu b \,\middle|\, \lambda,\mu\in R\right\}$$ 是否为向量空间.

解： $\forall x_1=\lambda_1 a+\mu_1 b, x_2=\lambda_2 a+\mu_2 b\in V$

有$x_1+x_2=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\mu_1+\mu_2)b\in V$,

$\forall k\in R$,有$kx_1=(k\lambda_1)a+(k\mu_1)b\in V$.

V是一个向量空间。

V称为由向量a, b生成的向量空间。

- **生成元** （子空间自成体系）

➢ 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是数域 P 上线性空间 V 中的一组向量，考虑这组向量所有可能的线性组合所组成的集合

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_l\alpha_l \quad (\lambda_i\in P, i=1,2,\cdots,l)$$

➢ 显然该集合非空，且于V的两种运算封闭.

➢ 因此它也是V的一个子空间，称它为由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 生成/张成的子空间 **(generated/spanned by ...)**，记为：

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=\left\{\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i \middle| \lambda_i\in P\right\}$$

或 $\mathbf{Span}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=\left\{\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i \middle| \lambda_i\in P\right\}$

➢ 向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 称为此子空间的生成元 **(generator)**.

例： 在 R^3 中, 向量组 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

生成的子空间为： $\alpha e_1+\beta e_2=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{bmatrix}$

- 可以验证 Span (e_1 , e_2) 是 R^3 的一个子空间.

  该 子 空 间 几 何 上 表 示 x-y 平 面 内 的 三维空间向量.

- 若 x 是 R^3 中的非零向量，则 Span (x) 几何上表示 ?

  一条过原点的直线.

§ 2 基、维数和坐标

在 R^n 中，线性无关的向量组可能最多由 r 个向量组成，而任意 r+1个向量都是线性相关的.

问题：线性空间的重要特征——在线性空间中，最多能有多少线性无关的向量？

一、基与维数

☑ 定义 3：线性空间 V 中向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$，如果它满足条件：

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关；

(2) 线性空间 V 中任一向量 α 都可经 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表示.

则称此向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一个

基 (basis).

- 线性空间 V 中任一向量都可经基线性表示，即线性空间可由基生成，

- 由前面向量组的讨论，线性空间的基不是唯一的，但是每个基所含向量的个数是唯一的。

☑ 定义 4：如果线性空间 V 的一个基所含向量个数为 n, 则称 V 为 n 维空间.

- n 为线性空间 V 的维数， 记为 dim V = n.

- 当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时，就称V 是无限维的 (infinite-dimensional).

➢ 例如：所有多项式构成的空间是无限维的(why?)

n可任意取

- 如果线性空间 V 没有基, 那么V的维数为0.

- 零空间没有基，dim θ = 0.

- 在$R^{2\times 2}$中,向量组

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$
$$E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

是$R^{2\times 2}$的一个基，故$\dim R^{2\times 2}=4$。

- 在$P[x]_2$中，向量组

$$\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=x,\varepsilon_3=x^2$$

是$P[x]_2$的一个基，故$\dim P[x]_2=3$。

➢这两个基也是标准基.

例：在 R^n 中,向量组 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \cdots, e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$

- 是线性无关的, 且是 R^n 的极大无关组,所以 $e_1, e_2, \cdots, e_n$
- 是 R^n 的一个基，称为常用基/标准基/自然基 (standard basis of R^n)
  - 从而 R^n 的维数是 n ， dim R^n = n
  - R^n 中的任一向量 α都可用标准基线性表示.

$$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T=a_1 e_1+a_2 e_2+\cdots+a_n e_n$$

例: $V = \{(x, y, z)^T \mid x+2y-3z = 0\}$

$= \{\underline{(-2y+3z, y, z)^T} \mid y, z \in \mathbf{R}\}$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} -2y+3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 线性无关}
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 为V的一组基, $\dim V = 2$.

例：求向量组 $\alpha_1=[1,2,2]^T$, $\alpha_2=[1,0,-1]^T$, $\alpha_3=[2,2,1]^T$， $\alpha_4=[2,4,4]^T$，的基和维数.

解：将向量组构成矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&2&4\\2&-1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&-2&-2&0\\0&-3&-3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2]{R_3-\frac{3}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 可见 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_4)=2$,
- (α_1,α_2), (α_1,α_3), $(\alpha_2、\alpha_3)$ 等都是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_4)$ 的基。
- 对于线性方程组 AX=0, 方程组的一个基础解系即为其解空间一个基，所有解都可以用基础解系线性表示，

- 这些非零解向量 构成的线性空间叫做**AX=0** 的 解空间,也叫零空间(**null space**)—这个空间的基就是基础解系.
- 基础解系不是唯一的，方程组解空间的基也不是唯一的.
- 系数矩阵**A**满秩，解空间就是**0**维的.

二、向量的坐标

☑ 定义 5：设向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基，α 是 V 中任意一个向量，则有

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

称数组 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标(coordinates)，记为 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

- 任意一个向量 α 在一个确定的基下的坐标是唯一的.

- 这是因为，若向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$下有两个不同的的坐标

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \quad 和 \ \alpha = x_1'\varepsilon_1 + x_2'\varepsilon_2 + \cdots + x_n'\varepsilon_n$$

- 两式相减得

$$(x_1 - x_1')\varepsilon_1 + (x_2 - x_2')\varepsilon_2 + \cdots + (x_n - x_n')\varepsilon_n = 0$$

- 由于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ 是线性无关的，故必须有

$$x_1 = x_1', x_2 = x_2', \cdots, x_n = x_n'$$

- 因此，坐标是唯一的.

例：在线性空间 R^3 中，设向量 $\alpha=[1,-1,7]^T$ 求 α 在下面两个基下的坐标.

（1） $e_1=[1,0,0]^T$, $e_2=[0,1,0]^T$, $e_3=[0,0,1]^T$;

（2） $\varepsilon_1=[1,0,0]^T$, $\varepsilon_2=[1,1,0]^T$, $\varepsilon_3=[1,1,1]^T$;

解：由于 $$\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(7)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=e_1-1e_2+7e_3$$

$\therefore \alpha$ 在基 e_1,e_2,e_3 下的坐标为 $[1,-1,7]^T$

（2）设 α 在基 $\varepsilon_1=[1,0,0]^T$, $\varepsilon_2=[1,1,0]^T$, $\varepsilon_3=[1,1,1]^T$ 下的坐标为 $[x_1,x_2,x_3]^T$

于是有

$$\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\ x_2+x_3\\ x_3\end{bmatrix}$$

解方程组得 $x_1=2, x_2=-8, x_3=7$

$\therefore \alpha$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $[2,-8,7]^T$

- 在线性空间中，基一般不是唯一的.
- 同一向量在不同的基下，坐标一般亦是不同的.

例：对于向量 $\alpha=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}$

$$\alpha=3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \alpha=1\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$$

- α 在基$\{e_1, e_2, e_3\}$下，坐标为$(3,3,3)^T$.
- （尺）
- α 在基$\{3e_1, 3e_2, 3e_3\}$下，坐标为$(1,1,1)^T$.
- （米）
- 不同的基可视作<u>不同度量单位</u> <u>不同方向</u> 的参考坐标系.

例：对于$R^{2\times 2}$中的矩阵

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

有

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{pmatrix}$$

因此

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1=k_2=k_3=k_3=0,$$

即 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 线性无关.

对于任意二阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in V,$$

有

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

因此 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 为V的一组基.

而矩阵A在这组基下的坐标是

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T.$$

- E_{ij} 也是$R^{2\times 2}$ 的**标准基**.

定理 2：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 是 n 维线性空间 V 中 l 个向量，在 V 中取定一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，如果 α_j 在此基下的坐标为

$$[\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{nj}]^T \quad (j = 1, 2, \cdots, l)$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性相关的充分必要条件是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nl} \end{bmatrix}$$

的秩 $r_A < l$.

回忆：

例4：已知向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1,\beta_2,\beta_3$可以由向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，并且

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K$$

证明：β_1,β_2,β_3线性无关的充要条件是$R(K)=3$

证明： 由已知 $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \varepsilon_i \quad (j = 1, 2, \cdots l)$

- 表示为矩阵形式，有

$$\alpha_j = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots l)$$

- l 个式子合并在一起，有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n][A]$$

- 考察等式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_l x_l = 0$$

- 即有 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}=0 \quad (2.2)$
- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性相关.
- 代入 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n][A]$ 得

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n][A]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}=0$$

- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性相关的充要条件是 $r_A<l$.
- 由于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性无关的，故必有

$$[A]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}=0$$

- 由齐次线性方程组有非零解的充要条件，$r_A<l$.
- 又由于存在不全为零的数 $x_1, x_2, \ldots, x_l$ 使得 (2.2)成立

推论：定理 2 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性无关的充要条件是 $r_A = l$.

例：在 $P[x]_3$ 中，取向量组

$$f_1 = 1 + 2x + x^3; \quad f_2 = 1 + x + x^2$$

$$f_3 = 1 + x^2; \quad f_4 = 1 + 3x + x^3$$

问向量组是否线性相关？

解：在 $P[x]_3$ 中，先取定一个基为 1，x，x^2，x^3，可得

$$[f_1, f_2, f_3, f_4] = [1, x, x^2, x^3]A = [1, x, x^2, x^3]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 计算 A 的秩，得 $r_A=3$，根据定理4.2,可知向量组是线性相关的.

例：验证向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

是$\boldsymbol{R}^3$的一个基，并求向量 $\alpha=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ 在该基下的坐标。

解：首先讨论向量组的线性相关性，因为

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是$\boldsymbol{R}^3$的一个基。其次求坐标

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha)=\begin{bmatrix}1&2&0&2\\1&1&0&1\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r}\begin{bmatrix}1&2&0&2\\0&-1&0&-1\\0&3&1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+3r}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[(-1)r]{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

所以有 $\alpha = 0\cdot\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$，故向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为(0，1，−1).

三、过渡矩阵与坐标变换公式

问题：在 n 维线性空间 V 中，任意 n个线性无关的向量都可以作为 V 的一组基.

- 我们也接触过几个标准基：
  - R^n 的标准基是 $(e_1, e_2, \dots, e_n)$
  - $R^{2\times 2}$ 的标准基是 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$ $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
  - $P[x]_n$的标准基是 $(1, x^2, \dots, x^n)$

- 尽管标准基形式简单，但是很多实际问题中标准基并不是**最适用**的.

可以类比直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系、切平面—法向量坐标系、特征值问题等等.

- 对不同的基，同一个向量的坐标是不同的.

那么，同一向量在不同基下的坐标有什么关系呢？

- 换句话说，随着基的改变，向量的坐标如何改变呢？

- 不同的基可视作不同的参考坐标系，
- 所以，这实际上是不同参考坐标系下的坐标转化问题.

例如：在 R^2 中，我们希望用新的基取代标准基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（1）给定一个向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$，求它在基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标;

（2）给定一个向量 $\mathbf{c}$ 在 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标 (c_1, c_2)，即 $\mathbf{c} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$，求它在标准基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 下的坐标。

(2)较为简单：
$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot M$$

- 由此得到

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = c_1(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) + c_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$
$$= (3c_1 + c_2)\mathbf{e}_1 + (2c_1 + c_2)\mathbf{e}_2$$

- $\mathbf{c}$ 在标准基下的坐标 $(x_1, x_2)^T$ 为 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = M\,\mathbf{c}$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=M\ \mathbf{c}$$

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

➢ 显然，对于(1)— 给定 $\mathbf{x}=(x_1, x_2)^{T}$，求它在基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标是(2)的逆过程：

$$\mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=M^{-1}\cdot\mathbf{x}$$

例如： 给定向量 $\mathbf{x}=(7, 4)^{T}$，求它在基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 下的坐标

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

所以， $\mathbf{x} = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$.

☑ 定义 6：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 是 n 维线性空间 V 中的两个基，且有：

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 = m_{11}\varepsilon_1 + m_{21}\varepsilon_2 + \cdots + m_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon'_2 = m_{12}\varepsilon_1 + m_{22}\varepsilon_2 + \cdots + m_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \varepsilon'_n = m_{1n}\varepsilon_1 + m_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + m_{nn}\varepsilon_n \end{cases} \qquad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

借助矩阵表示为 $\boxed{[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M}$

则称矩阵 **M** 为由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 的过渡矩阵(**transition matrix**).

- 基变换公式

$$\boxed{[\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M}$$

基变换公式

➢ 过渡矩阵是基与基之间的一个可逆线性变换．

☑ 定理 3：设 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 和 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 中的两个基，且有：

$$[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] M$$

则 (1) 过渡矩阵 M 是可逆的；

(2) 若 $\alpha \in V$，且在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 下的坐标分别为 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ 和 $[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]^T$，则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

证明：（1）由定理 2 推论知过渡矩阵 M 是可逆的：因 M 是一个基在另一个基下的坐标矩阵.

（2）由于向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$，即有.

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

同理

$$\alpha = [\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n]\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

代入左式得

又已知 $[\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]M$

$$\alpha = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n] M \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

由于向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标是唯一的故有 (2.5) 式成立.

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \qquad (2.5)}$$

坐标变换公式

例：在线性空间 R^3 中，取定两个基：

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}3\\7\\1\end{bmatrix},\quad \eta_1=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix},\eta_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-6\end{bmatrix},$$

（1） 求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵;

(2) 设向量 α 在基 η_1,η_2,η_3 下的坐标为 $[0,-1,1]^T$，

求 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标。

解：由定义6，若过渡矩阵为M，则 $[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]M$

➢ 记 $A=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$，$B=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，A、B皆为已知矩阵，且 A 可逆，问题归结为解矩阵方程

$$B=AM \Rightarrow M=A^{-1}B$$

➢ 可通过矩阵的初等行变换求解：

$$[A,B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&5&1\\2&3&7&1&2&1\\1&3&1&4&1&-6\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&2&3&3&5&1\\0&-1&1&-5&-8&-1\\0&1&-2&1&-4&-7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots}\begin{bmatrix}1&0&0&-27&-71&-41\\0&1&0&9&20&9\\0&0&1&4&12&8\end{bmatrix}$$

➢ 所以, 由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为

$$\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}$$

(2) 设向量α在基η_1, η_2, η_3下的坐标为$[0,-1,1]^T$，求α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的坐标。

- 由坐标变换公式(2.5)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

总结：如何求过渡矩阵？(适用R^n空间)

$$\boxed{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P}$$

令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

$$AP=B,\quad P=A^{-1}B$$

$$\boxed{P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}$$

$$(A\,|\,B)\xrightarrow{\text{一系列行变换}}(E\,|\,A^{-1}B)=(E\,|\,P)$$

这是求过渡矩阵的简单方法

例：设 $P[x]_3$ 的两个基分别为

(1) $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=x, \varepsilon_3=x^2, \varepsilon_4=x^3$;

(2) $f_1=1+x+x^3,\ f_2=x+x^2,$

$f_3=1+x-2x^2,\ f_4=2+x+x^2+x^3$.

求由基（1）到基（2）的过渡矩阵;

解：按过渡矩阵定义有 $[f_1, f_2, f_3, f_4]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4]M$

由已知条件即得

$$[1+x+x^3, x+x^2, 1+x-2x^2, 2+x+x^2+x^3]=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1&0&1&2\\1&1&1&1\\0&1&-2&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

➢ 所以，过渡矩阵为

四、线性子空间的维数与基

- 基/维数/坐标等概念也可以应用到线性子空间.

例：线性空间 R^n 的子空间 $N(A) = \{ X \in \mathbf{R}^n \mid AX = 0 \}$ 的基，由齐次线性方程组解的理论，易知其为 $AX = 0$ 的基础解系，$\dim N(A) = n - r_A$.

- 线性子空间的基 <=> 极大无关组.
- 线性子空间的基不唯一.
- 线性子空间的任意两组基等价.
- 线性子空间的维数 <=> 向量组的秩.

定理 4：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 是线性空间 V 中的两个向量组。

(1) $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) = L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$ 的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 等价;

(2) $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 的秩.

证明：（1）必要性：因为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

所以有 $\alpha_i \in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\quad (i=1,2,\cdots l)$

- 因而每一个α_i 都可以用向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示;

- 同样 $\beta_j \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l) \quad (j = 1, 2, \cdots s)$
- 因而每一个 β_j 都可以用向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 线性表示;
- 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 与$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 等价;

充分性：由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 等价,

- 所以, 凡是可用向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 表示的向量，也一定可以用向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示。
- 因为 L($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$) 中的向量都是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 的线性组合，所以它们必定能用$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示, 因此必有：

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l) \subseteq L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$$

- 同理亦有： $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)$
- 综合起来即得： $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)$

(2) L($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$) 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 的秩.

- **设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 的一个极大线性无关组是 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}$**

- **那么 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}$ 与原向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ 是等价的， 由 (1) 的结论**

$$L(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir})=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l) \quad (2.6)$$

➢ 显然 $\alpha_{i\,1}, \alpha_{i\,2}, \dots, \alpha_{i\,r}$ 是生成子空间 L($\alpha_{i\,1}, \alpha_{i\,2}, \dots, \alpha_{i\,r}$) 的一个基, 且 dim ($\alpha_{i\,1}, \alpha_{i\,2}, \dots, \alpha_{i\,r}$) = r

$$L(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l) \quad (2.6)$$

➢ 由 (2.6) 知$\alpha_{i\,1}, \alpha_{i\,2}, \dots, \alpha_{i\,r}$ 也是L($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$) 的一个基，且 dim L($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$) = r

➢ 因而 L($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$) 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 的秩. 证毕.