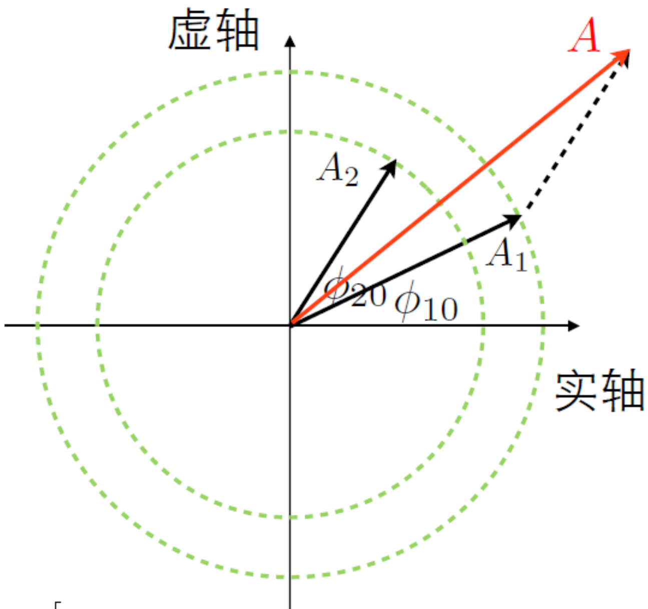
一维同频振动的合成

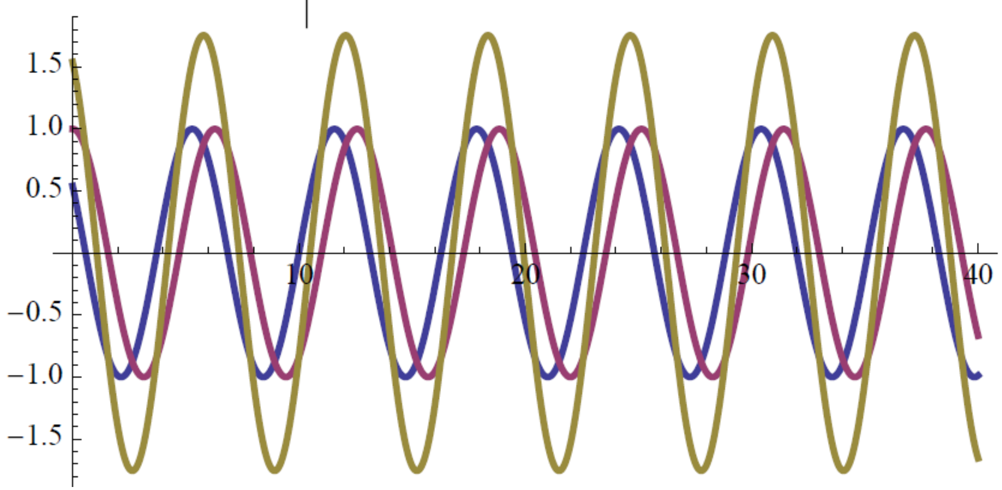


$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10})$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

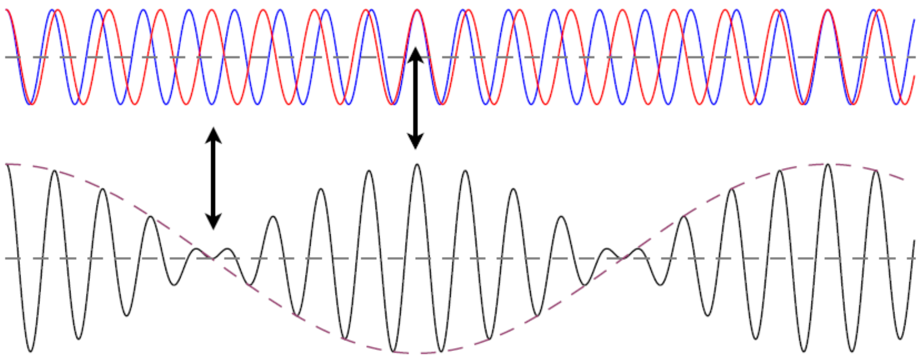
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_{20} - \phi_{10})$$



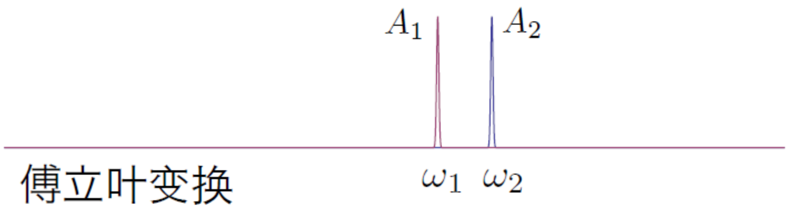
$$\tan\phi_0 = \frac{A_1 \sin\phi_{10} + A_2 \sin\phi_{20}}{A_1 \cos\phi_{10} + A_2 \cos\phi_{20}}$$

一维差频振动的合成-拍

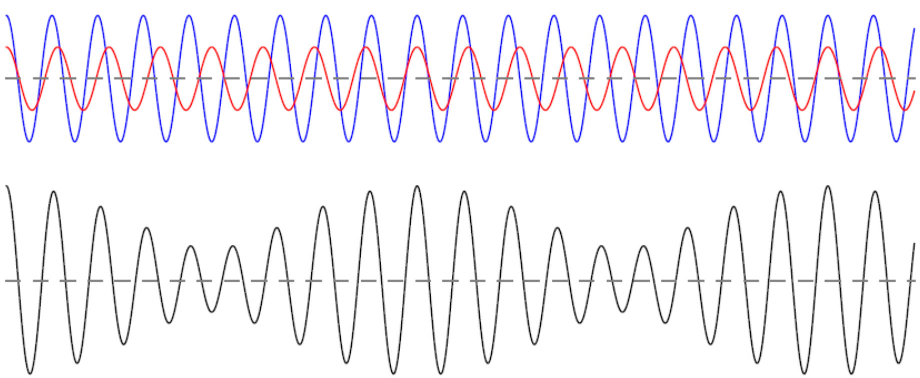
$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_{10}) \quad \text{and} \quad x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_{20}), \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



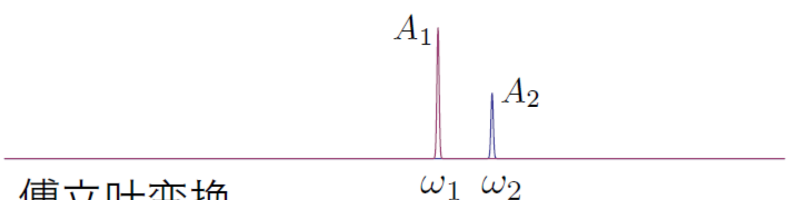
$$A_1 = A_2 \quad \text{and} \quad \phi_{10} = \phi_{20}$$



傅立叶变换

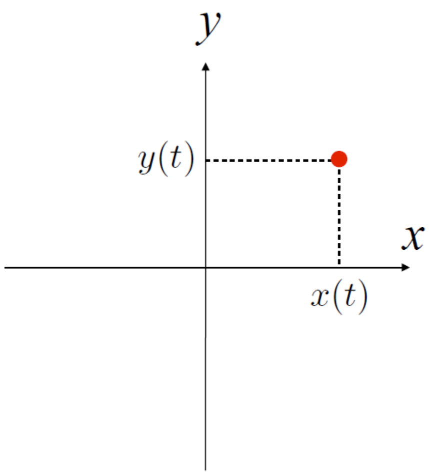


$$A_1 \neq A_2 \quad \text{and} \quad \phi_{10} = \phi_{20}$$



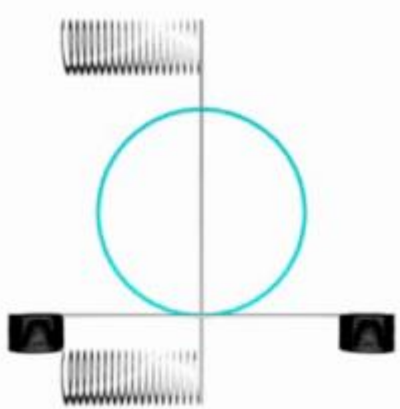
傅立叶变换

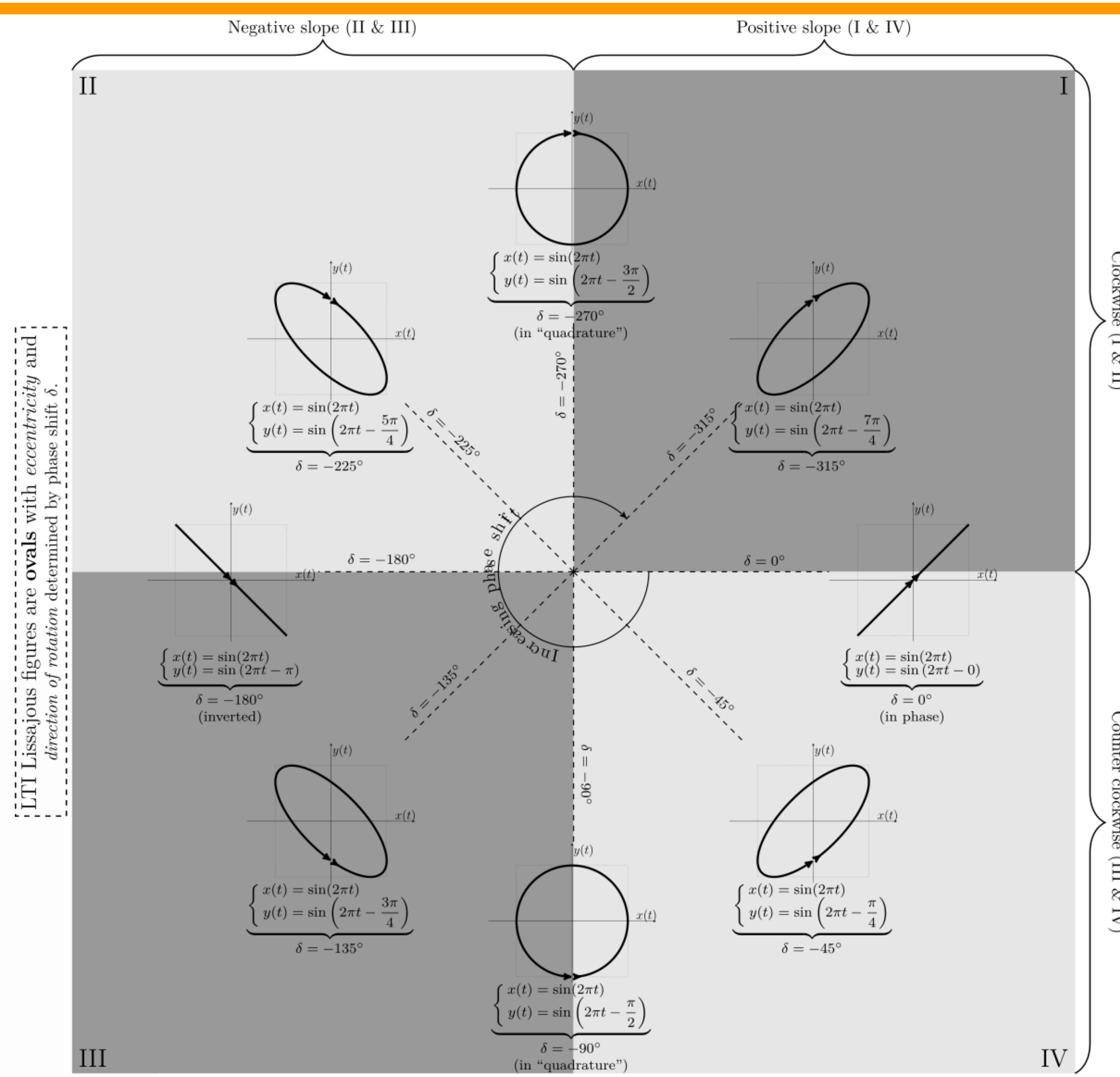
二维同频振动的合成



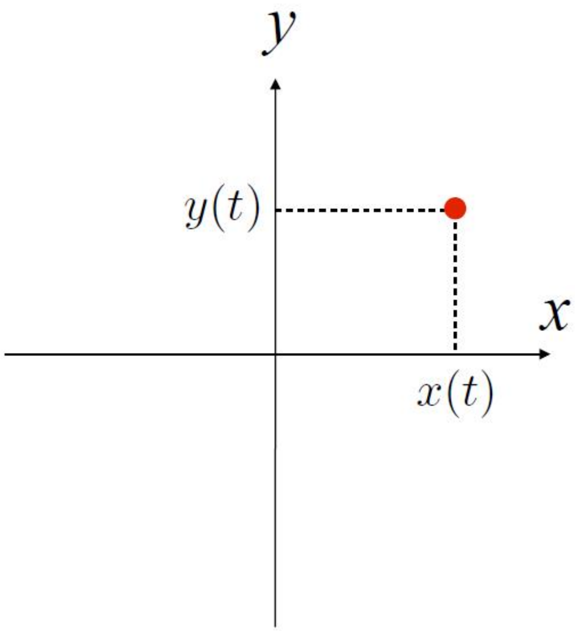
$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$y(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\delta = \phi_2 - \phi_1$$



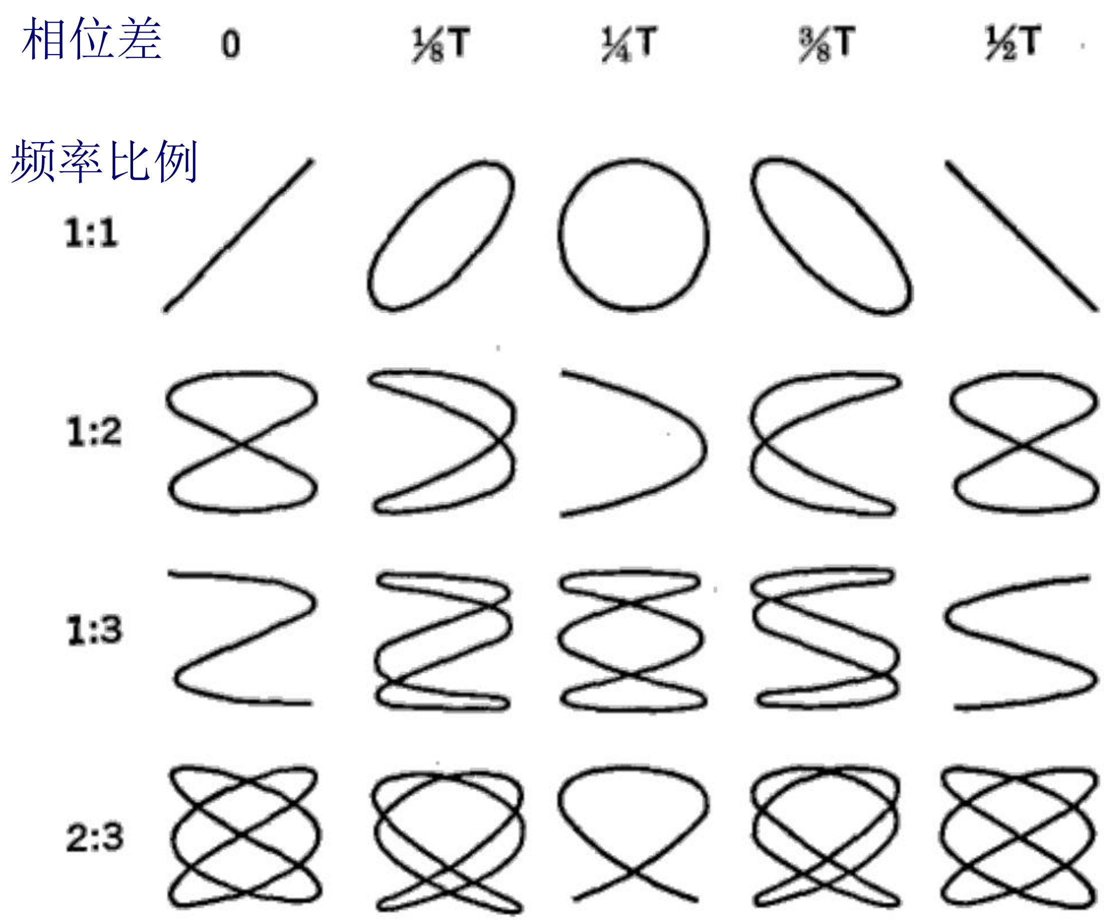


二维差频振动的合成



$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\delta = \phi_2 - \phi_1$$



波的传播

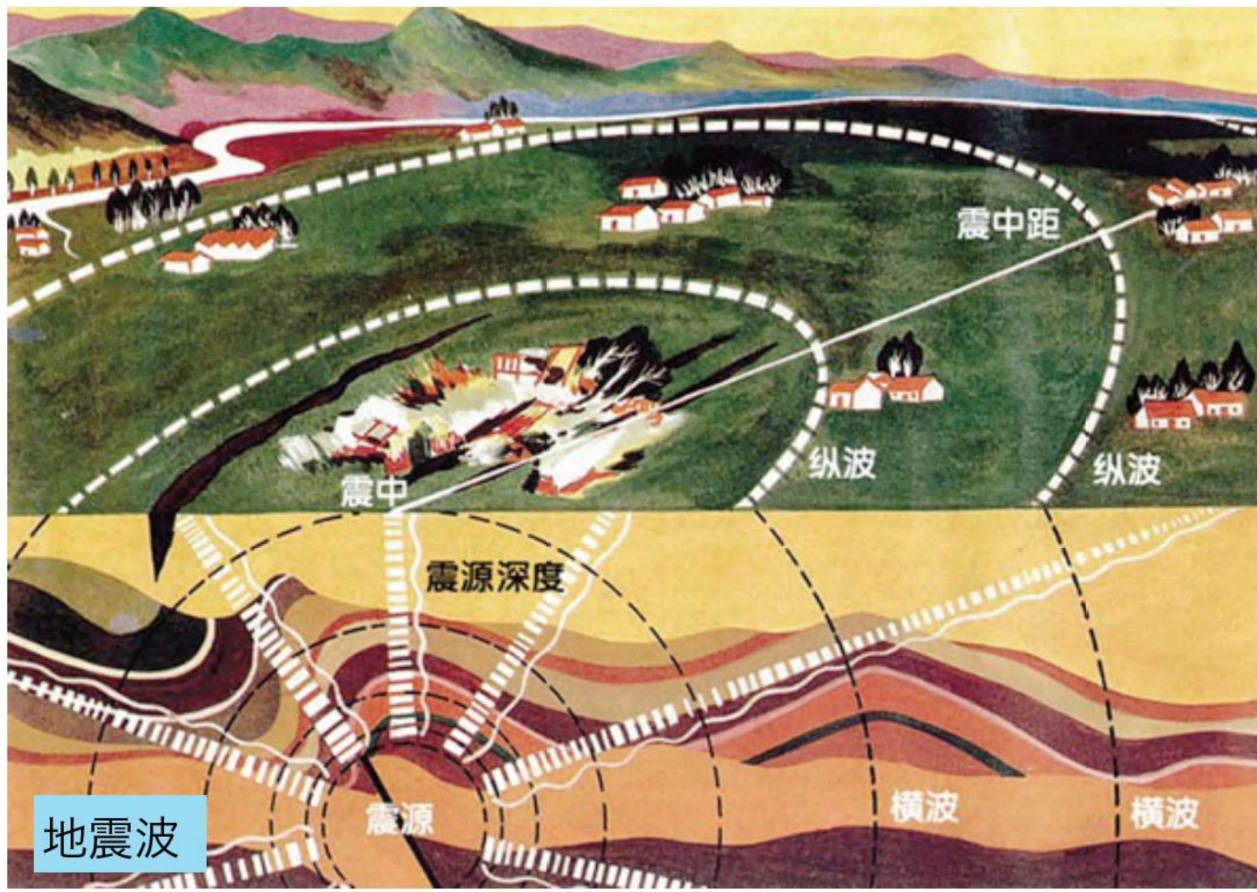
机械波：波在媒介（空气、水、地壳）中传播，

在波传播过程中媒介中的物质作某种振动。

电磁波：可以在真空中传播。

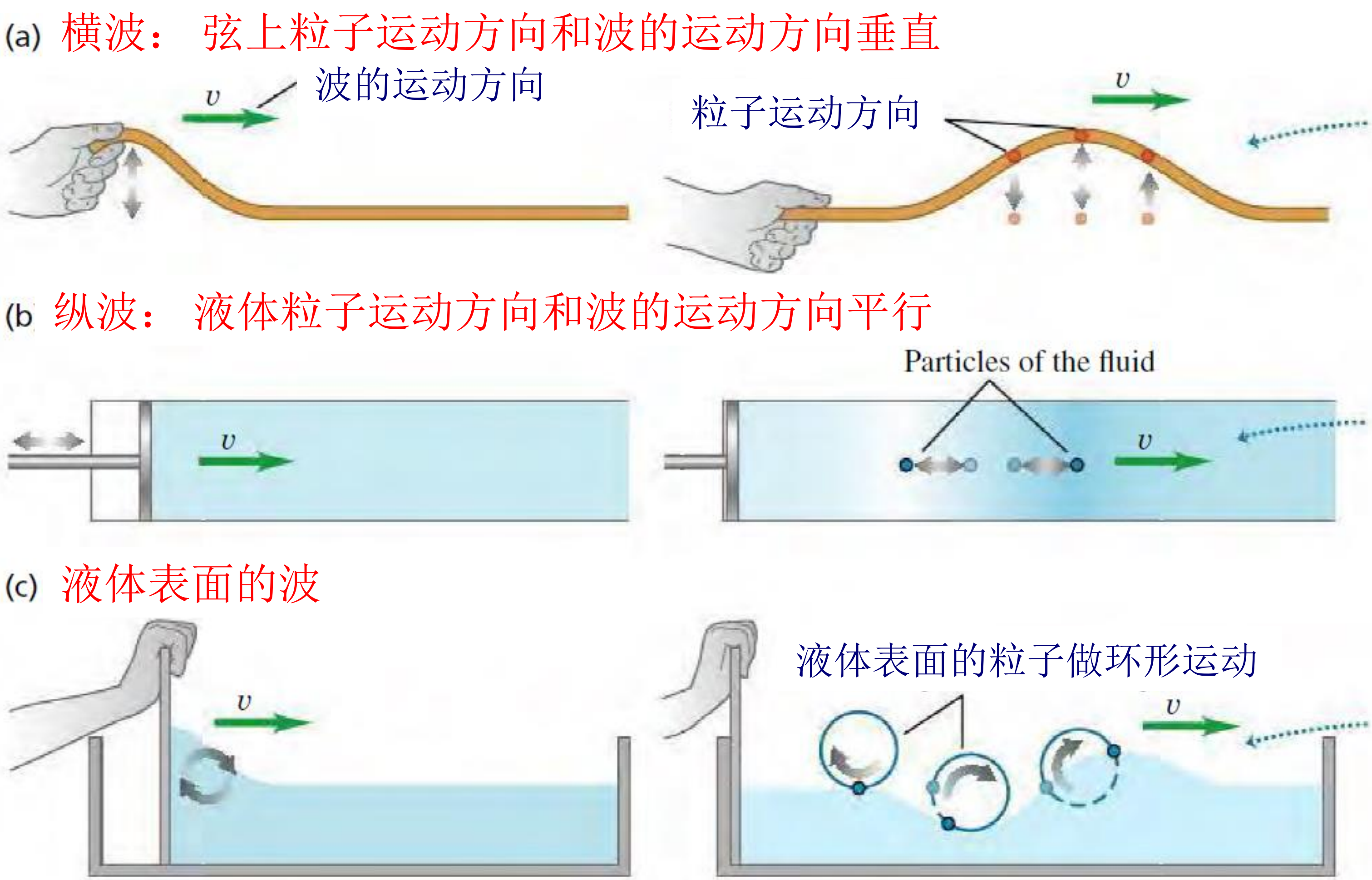
声波

水波

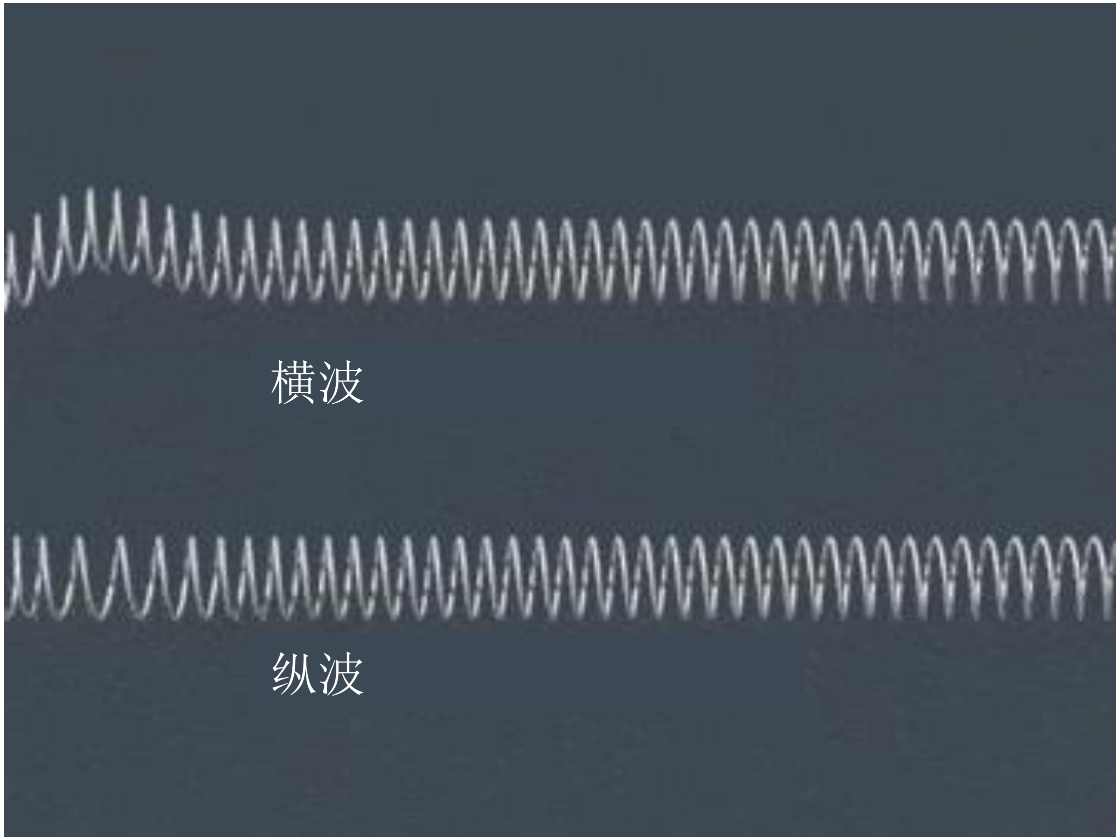


地震波

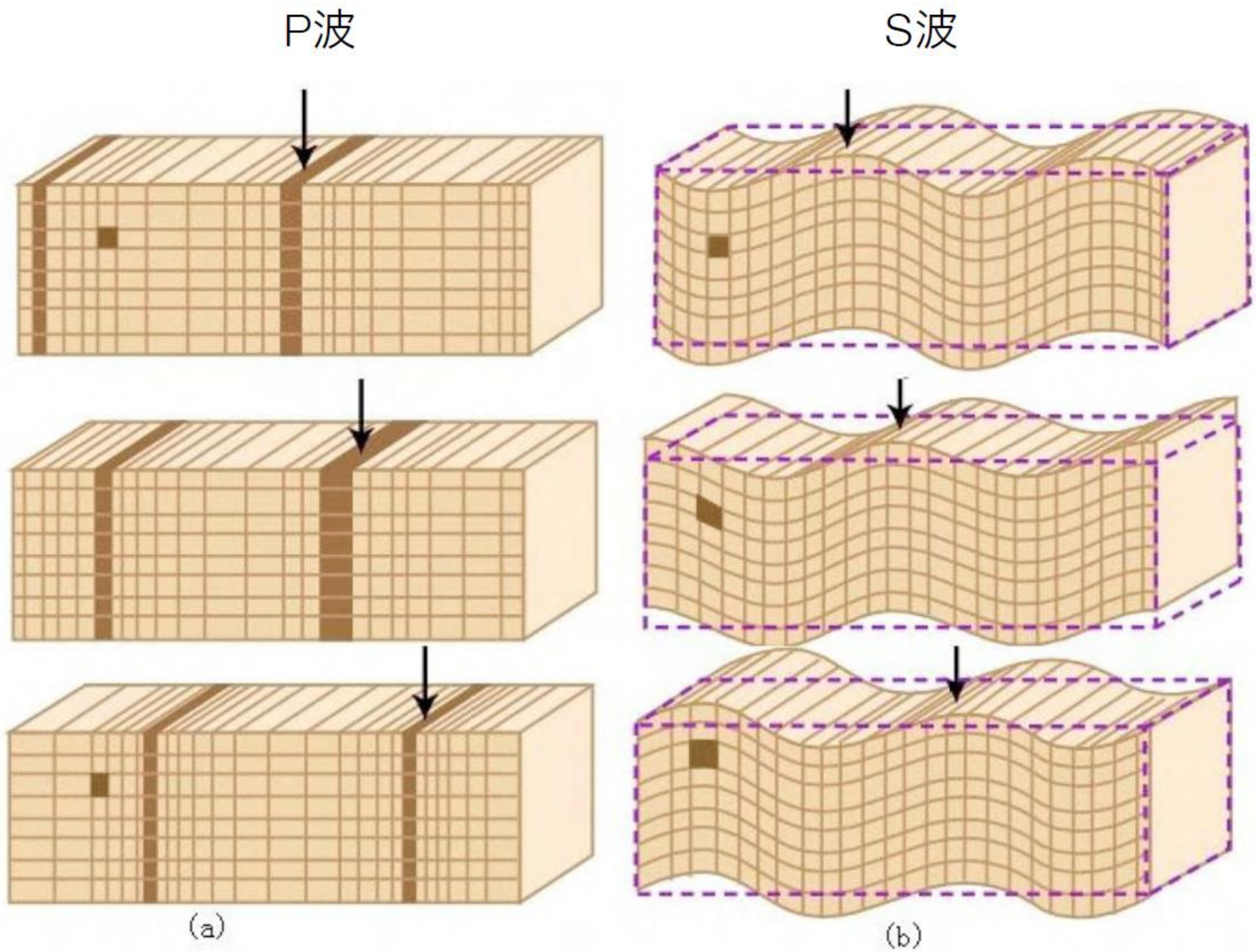
波的类型


(a) 横波： 弦上粒子运动方向和波的运动方向垂直
v
波的运动方向
粒子运动方向
v
(b 纵波： 液体粒子运动方向和波的运动方向平行
v
Particles of the fluid
v
(c) 液体表面的波
v
液体表面的粒子做环形运动
v

横波与纵波



地震波中的P波和S波



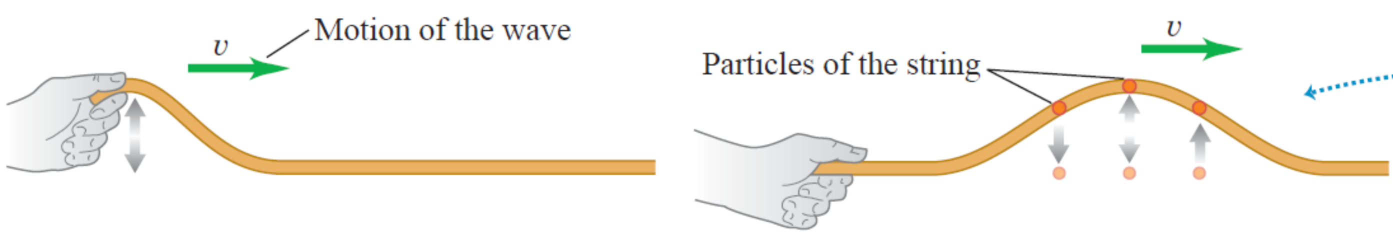
P波传播比S波快

墨西哥人浪

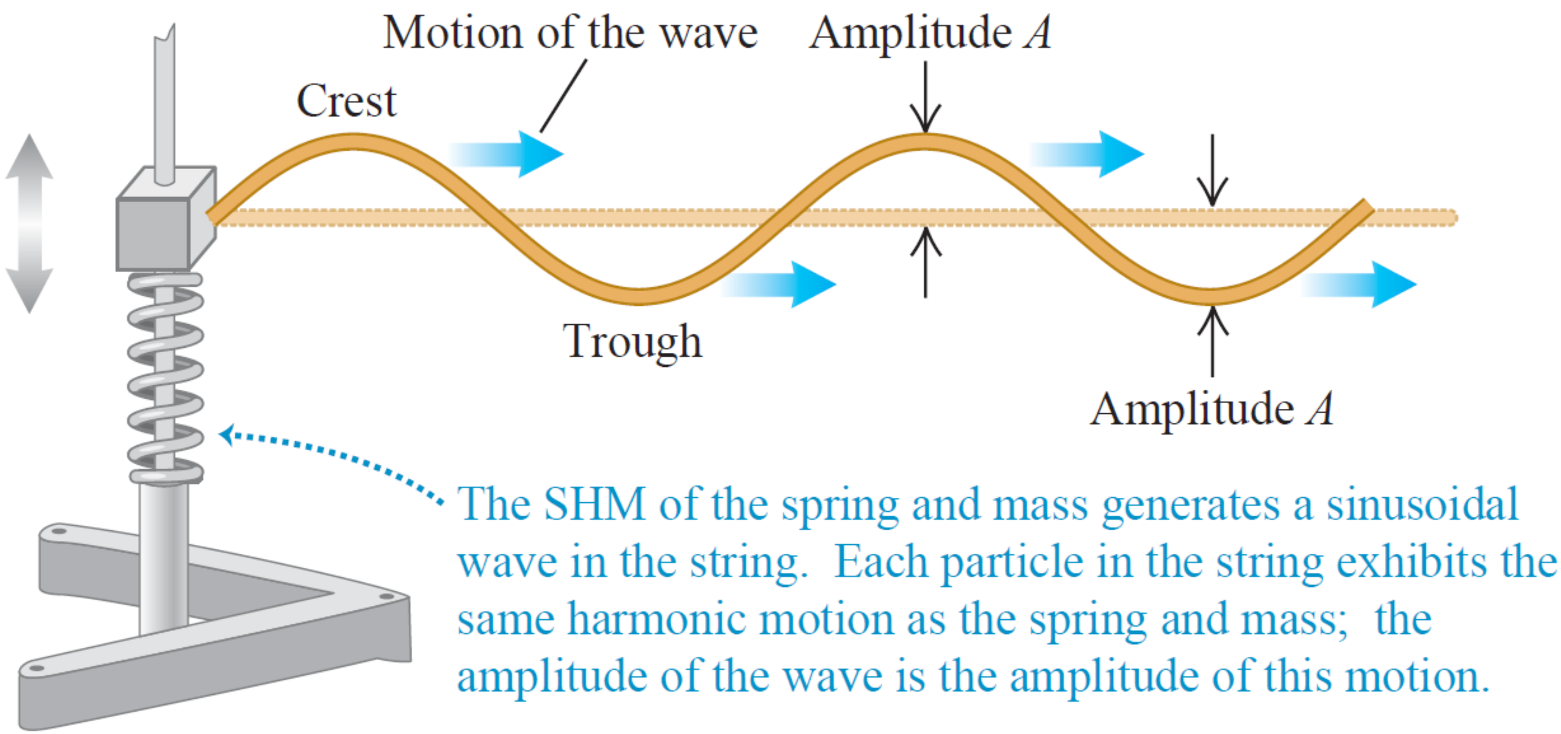
机械波：
传播的是
能量而不是
物质

波：不同
质点间的
关联

脉冲波和周期性的波



脉冲波



周期波

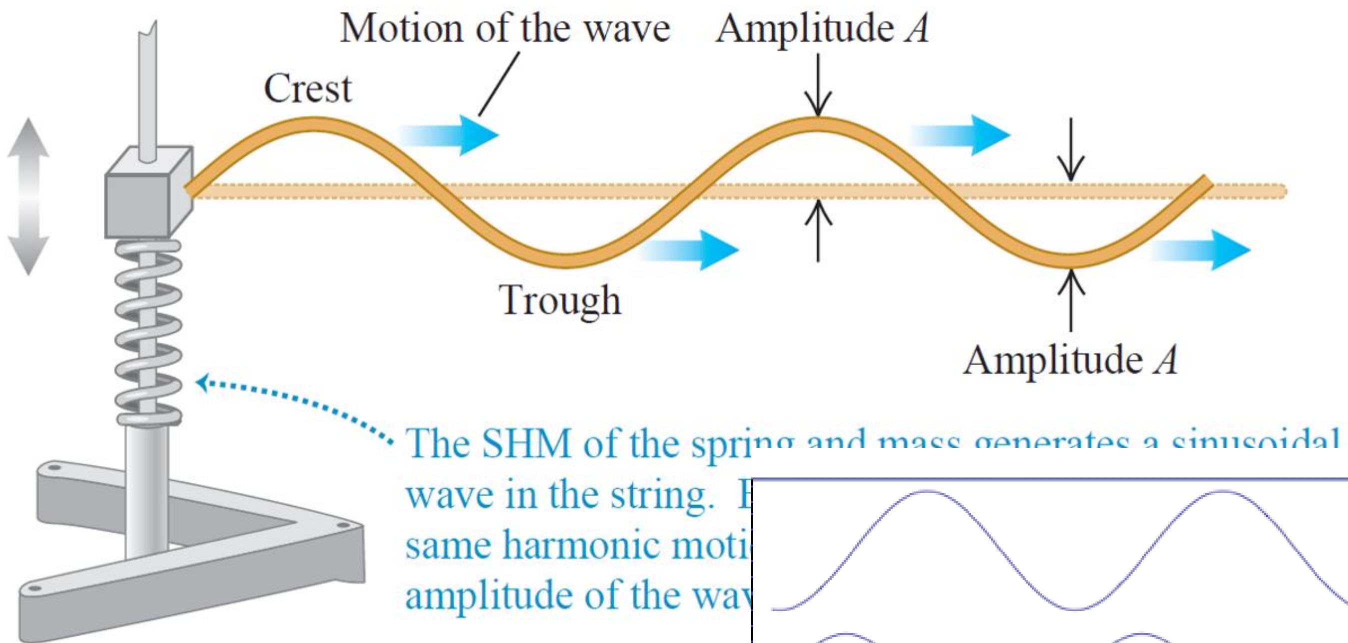
波的三种速度

粒子速度：　粒子围绕平衡位置做简谐振荡的速度

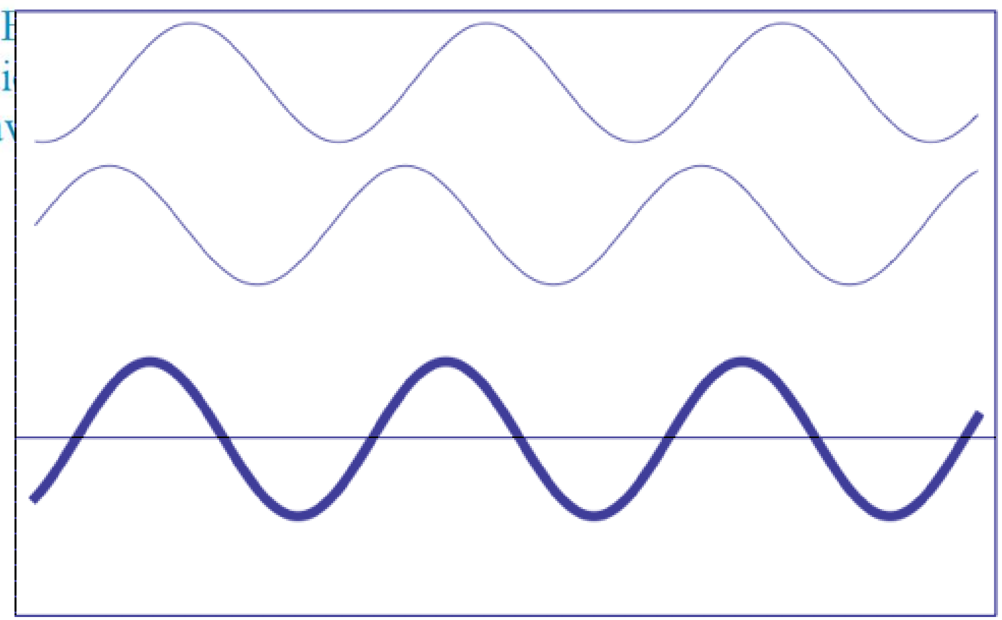
波速（相速度）：　等位相的平面（如波峰或波谷)在介质中传播的速度

群速度：一组不同波长、频率或速度的波叠加形成一组波传播。这样的波在介质中会发生色散。

周期性的横波



周期波



周期性的波：

波速$v = \dfrac{\lambda}{T}$

因为$f = 1/\mathrm{T}$

所以$v = \lambda f$

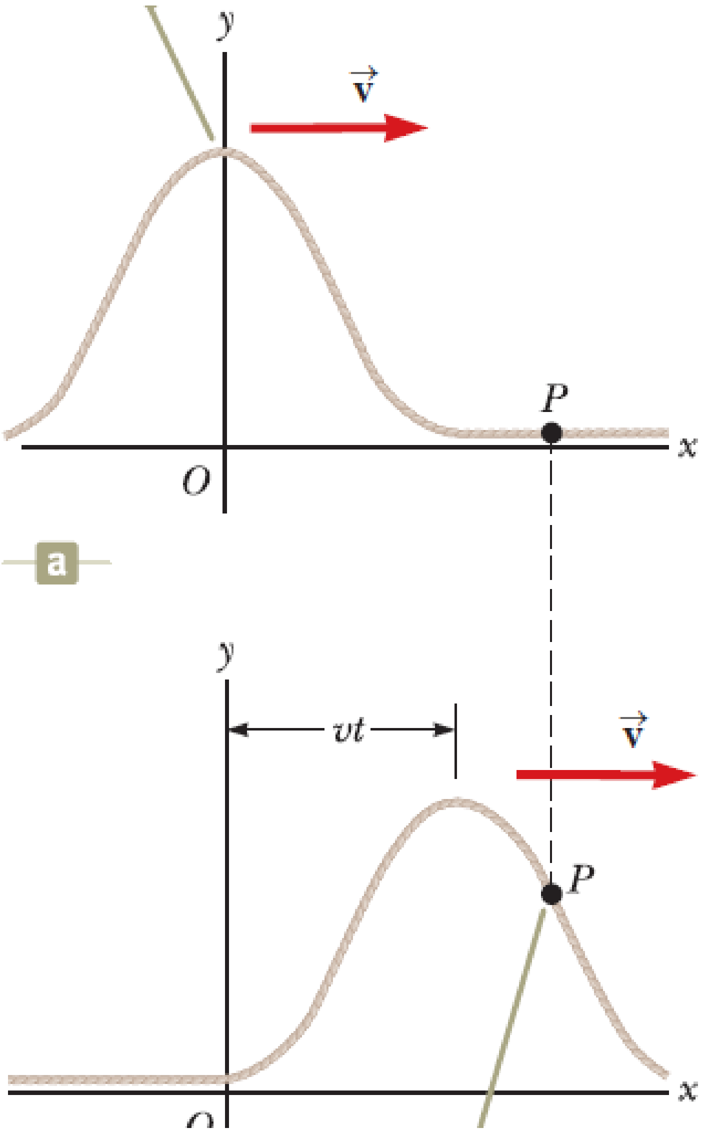
λ：波长

T：周期

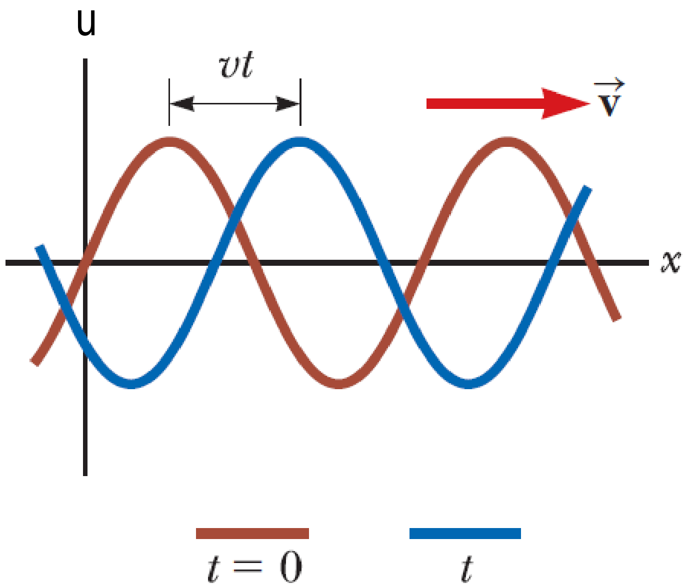
f：频率

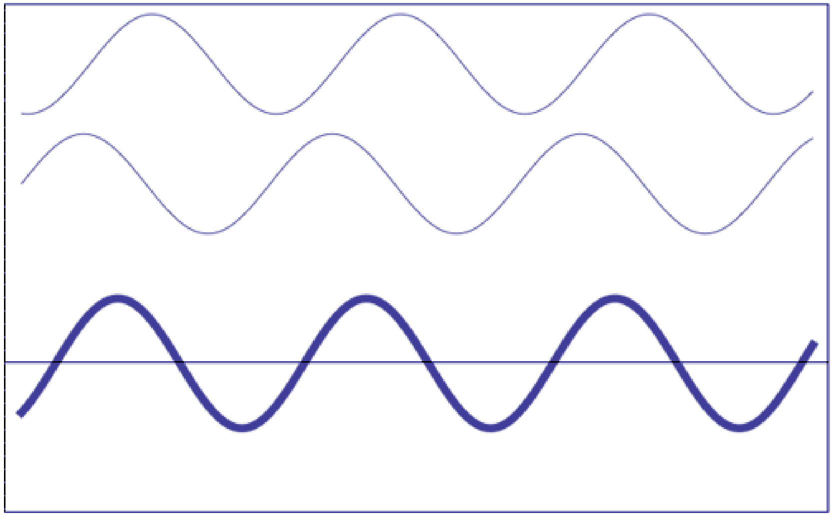
脉冲波

脉冲波的波速v
经过t时刻，波形传播的距离为vt



周期性的横波





周期性的波：

波速$v = \frac{\lambda}{T}$

因为$f = 1/T$

所以$v = \lambda f$

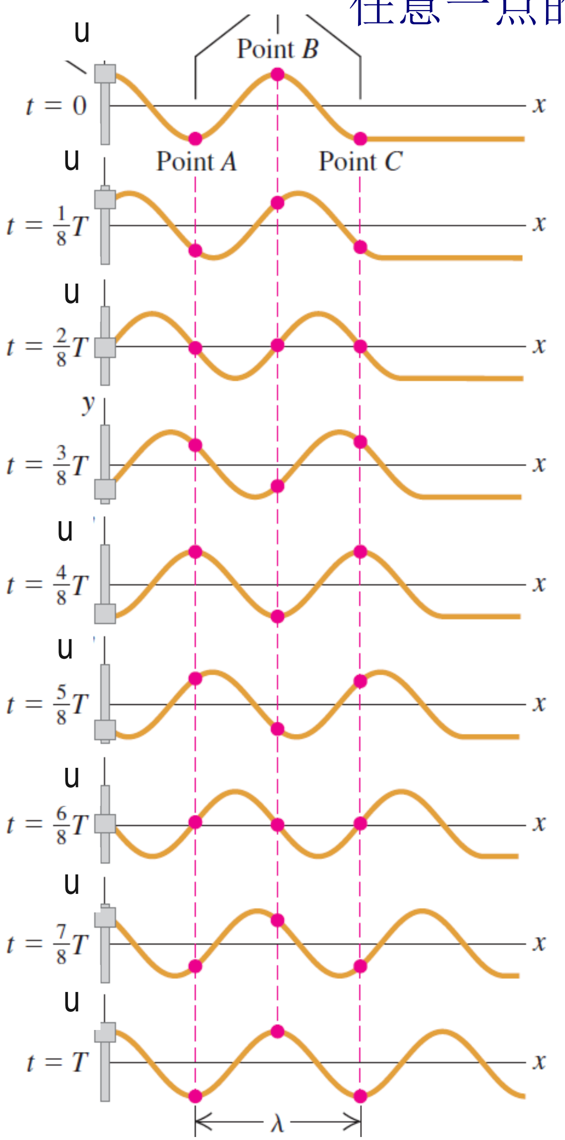
λ : 波长

T : 周期

f : 频率

正弦波的波动方程

任意一点的振动：



$$u(x,t) = A\cos(kx - wt)$$

X处的点在t时刻的振动的位置

$x = 0$点的振动

$u(x=0，t)=A\cos\omega t$

A: 振幅，ω: 角频率

t=T（周期）时，cosωt振动完成一个周期，

$$\omega T = 2\pi$$

$$周期T = \frac{2\pi}{w}$$

$$频率f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$$

正弦波的波动方程

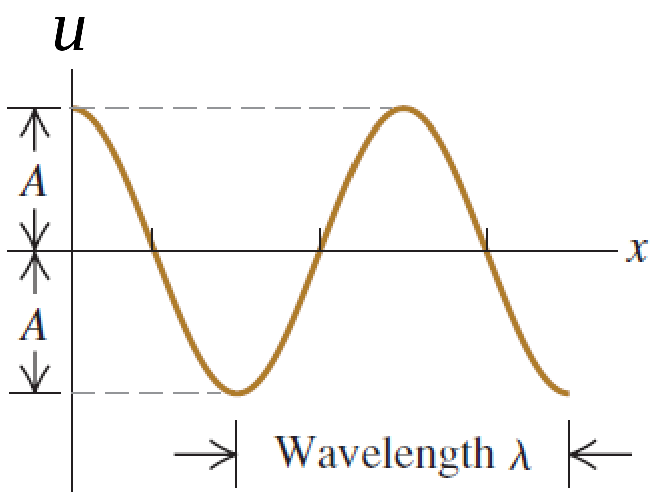
任意一点的振动：

$$u(x,t) = A\cos(kx - wt)$$

取$t = 0$

$u(x,$ $t=0) = A\cos kx$

A: 振幅

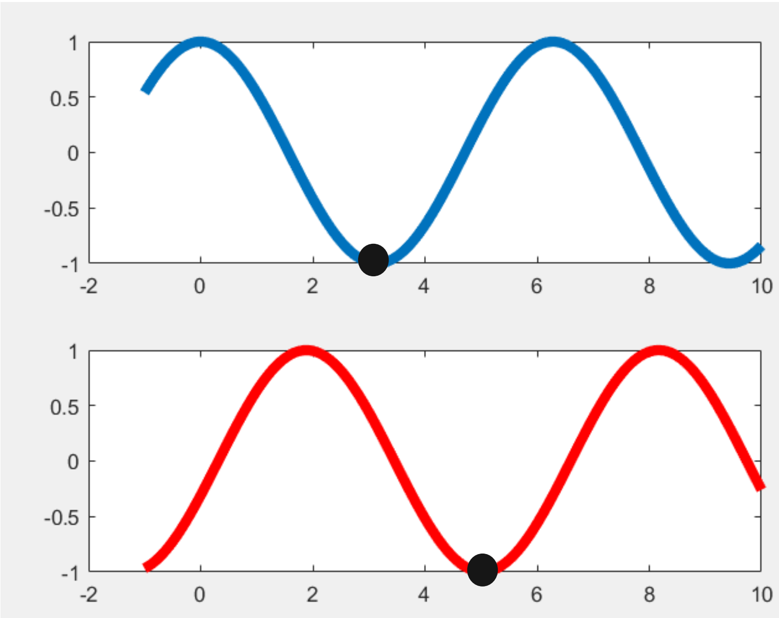


X长度满足一个周期重复时，

$$kx = k\lambda = 2\pi$$

$$波数k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

正弦波的波动方程



相位 (phase)

$$u(x,t) = A\cos(kx \pm wt)$$

±为波往x或者-x方向传播

波的传播，如最低点往前传播，该点相位保持不变。因

kx−wt=常数, 两边求导，kdx−wdt=0

如最低点kx−wt=π，最低点传播Δx， 需时间Δt

波速v=$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{k}$$

dx/dt为波速v（相速度）

$$\boxed{v = \frac{w}{k}}$$

正弦波中粒子的速度和加速度（动力学方程）

$u(x,t)=A\cos(kx-wt)$(运动学方程）

对时间求导数，粒子速度

$$v_u(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=wA\sin(kx-wt)$$

粒子的加速度

$$a_u(x,t)=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-w^2A\cos(kx-wt)=-w^2u(x,t)$$

也可以对x求偏导数。一阶导数$\partial u(x,t)/\partial x$为弦在x点和时间t时刻的斜率，二阶导数$\partial u^2(x,t)/\partial x^2$为曲率半径：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=-k^2A\cos(kx-wt)=-k^2u(x,t)$$

两式相除

$$\frac{\partial^2 u(x,t)/\partial t^2}{\partial^2 u(x,t)/\partial x^2}=\frac{w^2}{k^2}=v^2$$

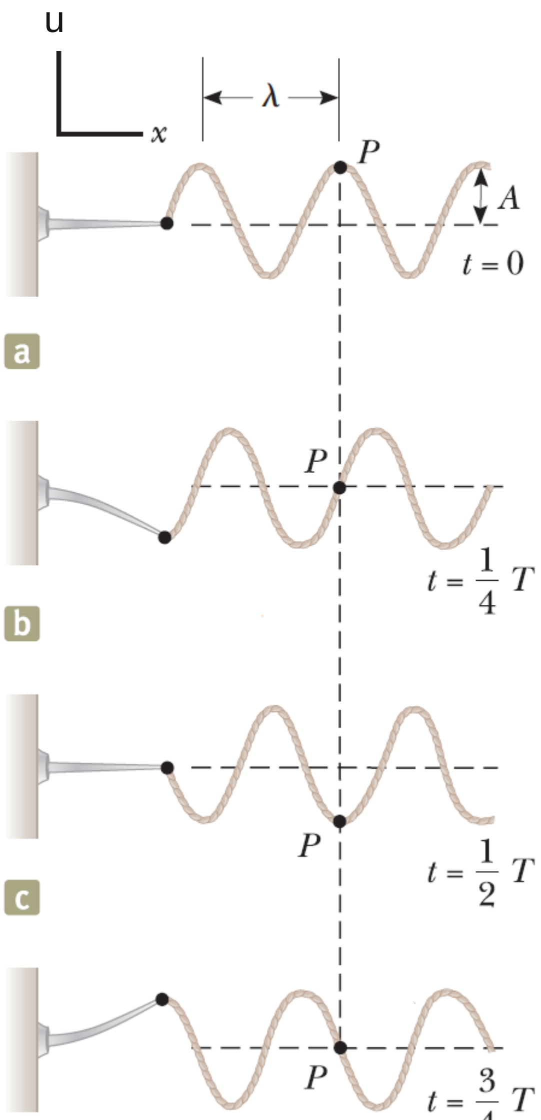
波动方程，物理学中最重要方程。除正弦波外，弦上任意波均满足该方程。

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

波动方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



$$u(x,t) = A\cos(kx \pm wt)$$

运动学方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

动力学方程

$$\boxed{v = \frac{w}{k}}$$

但是波速是由什么决定的？

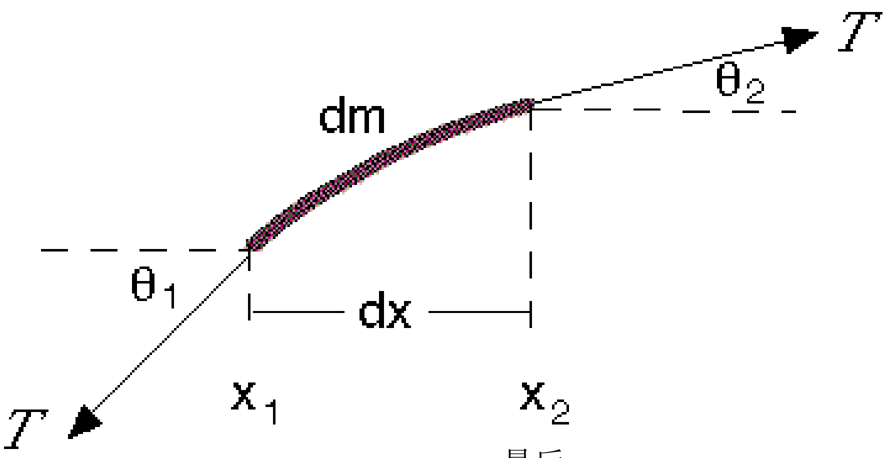
弦横波的速度

竖直方向牛顿定律

$$F_u = ma_u$$

竖直方向的力

$$F_u = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$



最后：

利用小角近似$\sin\theta \cong \tan\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x}$，得

$$F_u = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1$$

而$a_u = \dfrac{\partial v_u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$， 因此$F_u = T\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - T\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \mu dx\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ μ为线密度

重新排列：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{T}{\mu}\dfrac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1}{dx}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

波动方程

弦横波的速度

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ 波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$ 波动方程

鸟栖息在电线上，波的传播速度由左式决定。

由此可见波速（相速度）：

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

机械波的速度：

$$v = \sqrt{\frac{\text{系统回到平衡位置的回复力}}{\text{回到平衡位置的惯性阻力}}}$$