第四题

设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha$，$\beta$ 是 3 维列向量。证明 $r(A)\leq 2$。

由于 α，β 均是列向量，故 $\alpha\alpha^T$，$\beta\beta^T$ 是 3 阶矩阵，

且有 $r(\alpha\alpha^T)\leq r(\alpha)\leq 1$，$r(\beta\beta^T)\leq r(\beta)\leq 1$，

从而：

$r(\mathrm{A})=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(\alpha\alpha^T)+(\beta\beta^T)\leq 2$

r(A) 与 r(A^*) 的关系

设 A 为 n 阶矩阵，证明 $r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$，其中 $n \geq 2$。

$AA^* = A^*A = |A|E$

当 $r(A) = n$ 时，$|A| \neq 0$，因为 $|A^*| = |A|^{n-1}$，所以 $|A^*| \neq 0$，从而 $r(A^*) = n$。

当 $r(A) = n-1$ 时，由于 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零，

所以存在一个 $M_{ij} \neq 0$，进而 $A_{ij} \neq 0$，

于是 $A^* \neq O$，所以 $r(A^*) \geq 1$，又因为 $|A| = 0$，

所以 $AA^* = |A|E = O$，

根据矩阵秩的性质：

$r(A) + r(A^*) \leq n$，

而 $r(A) = n-1$，于是得 $r(A^*) \leq 1$，所以 $r(A^*) = 1$。

当 $r(A) < n-1$ 时，由于 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为零，所以 $A^* = O$，所以 $r(A^*) = 0$。

r(A) 与 r($A^{\mathrm{T}}A$) 的关系

证明：$r(A)=r(A^TA)$。

只需证明 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 为同解方程组即可。

若 $Ax_0=0$，则 $A^TAx_0=0$。

反之，若 $A^TAx_0=0$，则 $x_0^TA^TAx_0=0 \Rightarrow (Ax_0)^T(Ax_0)=0 \Rightarrow Ax_0=0$。

所以 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 为同解方程组，从而 $r(A)=r(A^TA)$。