# Fisica per applicazioni di realtà virtuale

Anno Accademico 2022-23

Prof. Matteo Brogi
Dipartimento di Fisica, stanza B3, nuovo edificio

**Lezione 11**

Meccanica dei sistemi: moti di rotazione (parte 2)

# Lezione 10: moti rotatori ed equazioni fondamentali

**Cinematica:** analogia tra spostamento, velocità e accelerazione
nel caso lineare ($s$, $v$, $a$) e angolare ($\theta$, $\omega$, $\alpha$)

**Dinamica:** analogia tra **forza** (causa dell'accelerazione lineare)
e **momento** della forza (causa dell'accelerazione angolare)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F} \qquad \sum \vec{\tau} = I \overrightarrow{\alpha}$$

Il **momento d'inerzia** $I$ sostituisce la massa inerziale $m$ nel caso rotatorio

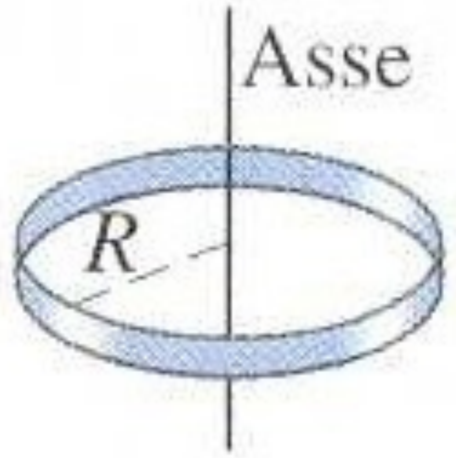
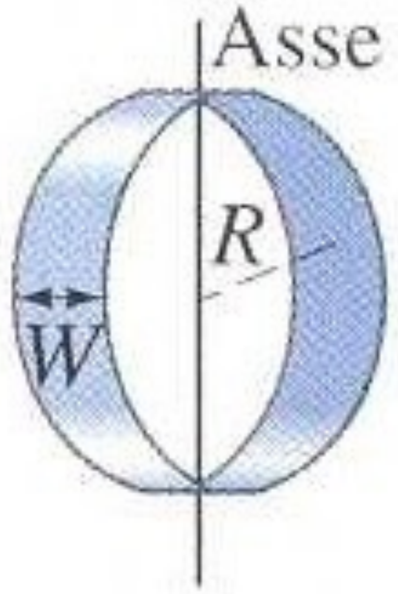
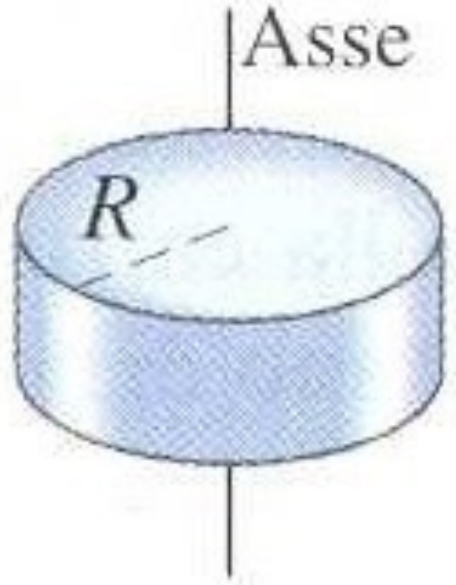
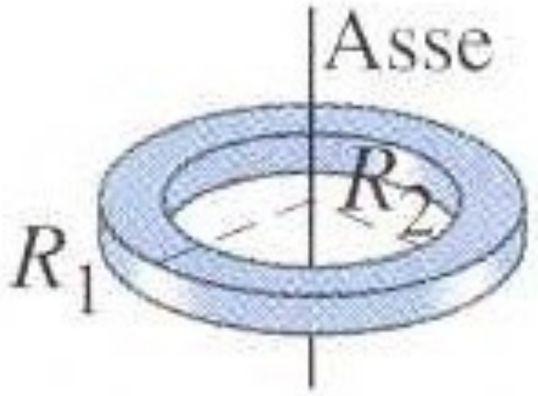
***Caso discreto***

$$I = \sum_i m_i d_i^2$$

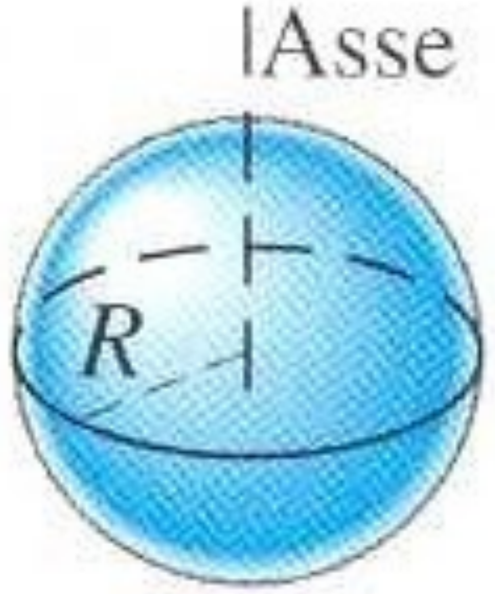
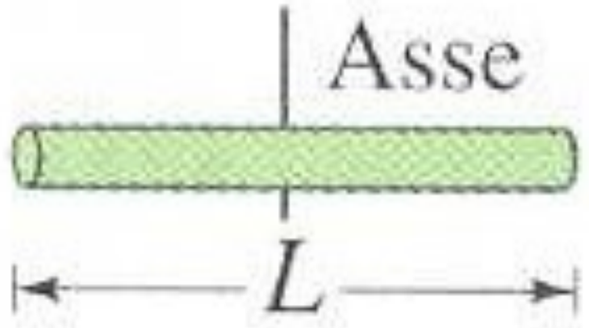
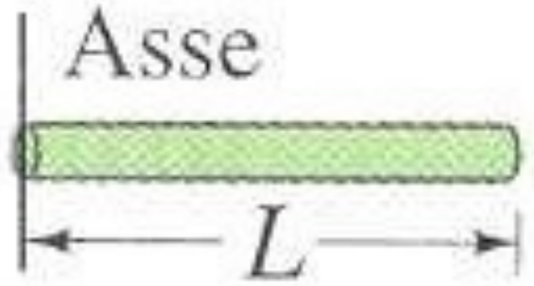
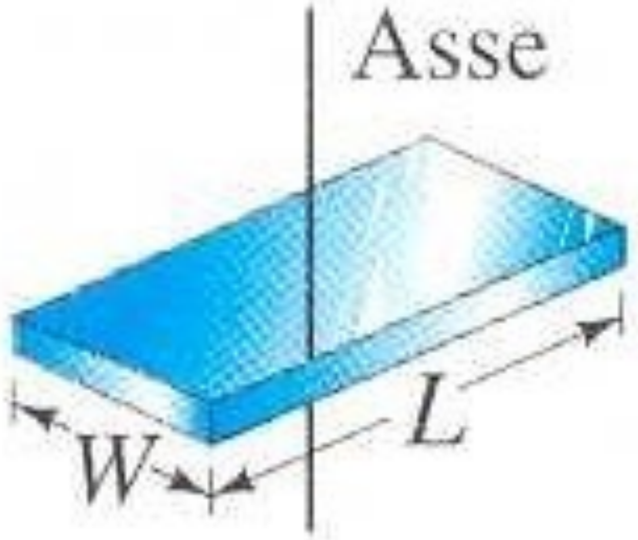
***Caso continuo***

$$I = \int_M d^2\, dm = \int_V \rho d^2 dV$$

# Momento d'inerzia di solidi particolari

| | Oggetto | Posizione dell'asse | | Momento d'inerzia |
|---|---|---|---|---|
| (a) | Sottile anello di raggio $R$ | Passante per il centro |   | $MR^2$ |
| (b) | Sottile anello di raggio $R$ e spessore $W$ | Passante per il diametro centrale |   | $\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}MW^2$ |
| (c) | Cilindro solido di raggio $R$ | Passante per il centro |   | $\frac{1}{2}MR^2$ |
| (d) | Cilindro cavo di raggio interno $R_1$ e raggio esterno $R_2$ | Passante per il centro |   | $\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ |

# Momento d'inerzia di solidi particolari (continua)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (e) | Sfera uniforme di raggio $R$ | Passante per il centro |  | $\frac{2}{5}MR^2$ |
| (f) | Lunga barra uniforme di lunghezza $L$ | Passante per il centro |  | $\frac{1}{12}ML^2$ |
| (g) | Lunga barra uniforme di lunghezza $L$ | Passante per un'estremità |  | $\frac{1}{3}ML^2$ |
| (h) | Sottile lamina rettangolare di lunghezza $L$ e spessore $W$ | Passante per il centro |  | $\frac{1}{12}M(L^2+W^2)$ |

# La carrucola: rotazione di un corpo rigido con massa

**Esercizio 7.04:** Una forza di 15 N viene applicata ad una corda avvolta intorno ad una carrucola di massa 300 kg e raggio 33 cm. La carrucola accelera uniformemente partendo da ferma, e raggiunge una velocità angolare di 30 rad/s in 3 s. Considerando che sul sistema agisce un momento torcente di attrito $\tau_{fr} = 1.1$ N m, determinare il momento d'inerzia della carrucola assumendo che ruoti attorno a un asse passante per il suo centro.

In 7.04, il momento torcente di attrito agisce in verso opposto al momento torcente della forza applicata

**Esercizio 7.05:** Sulla stessa carrucola dell'esercizio 7.04, invece di applicare una forza costante si appende un secchio di peso 15 N con una corda inestensibile. Il sistema è inizialmente fermo. Calcolare:

**a)** L'accelerazione angolare $\alpha$ della carrucola;
**b)** L'accelerazione lineare del secchio;
**c)** La velocità angolare $\omega$ della carrucola e quella lineare v del secchio a t = 3 s.

In 7.05, i moti rotazionale (per la carrucola) e traslazionale (del secchio) vanno risolti separatamente, con conseguenze controintuitive sulla tensione della corda

# Energia cinetica rotazionale

Sistema discreto di punti materiali: sommiamo le K individuali

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2\right] = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

*v = rω*
*con r=distanza dall'asse di rotazione*

*raccolgo i fattori costanti*

*applico la definizione di I*

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

*Forma analoga a quella traslazionale con momento d'inerzia e velocità angolare al posto di massa e velocità lineare*

# Energia cinetica totale

Combinazione della K di traslazione e di rotazione (per es. il CM non è in quiete)

Vediamo solo il caso dove **l'asse di rotazione passa per il CM**
Inoltre l'asse di rotazione ha direzione fissa

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{tr}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_i v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2$$

*velocità del CM*

*momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse passante per CM*

*v. angolare calcolata rispetto all'asse passante per CM*

*In assenza di forze dissipative, la **conservazione dell'energia** continua a valere ma $K_{tot}$ sostituisce $K_{tr}$*

# Piano inclinato con corpi rigidi

**Esercizio 7.06:** Quale sarà la velocità di una sfera piena di massa $M$ e raggio $R$ alla base di un piano inclinato, se parte da ferma e da un'altezza $h$ e rotola senza scivolare e senza attrito?

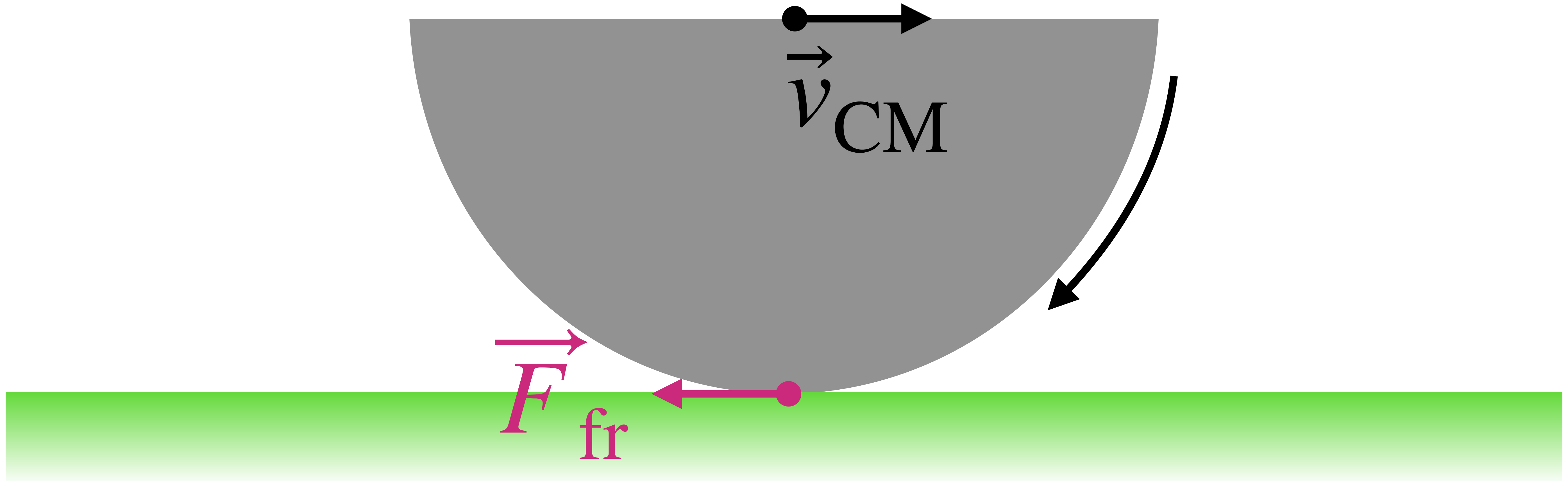
L'esercizio 7.06 così formulato è incorretto:
un moto di puro rotolamento **implica una forza d'attrito**
(prossima slide)

**Esercizio 7.07:** Un anello, un barattolo vuoto, una pila, e una sfera di marmo rotolano senza scivolare lungo un piano inclinato di altezza $H$, partendo da fermi. Inoltre una scatola scivola senza attrito. In quale ordine tali oggetti raggiungono la base del piano inclinato?

# Moto di rotolamento e forza di attrito

Se un oggetto "rotola senza strisciare" implicitamente esiste un attrito

**Puro rotolamento:** il punto di contatto cambia col tempo,
ma a un dato istante rimane in quiete ⇒ attrito **statico**

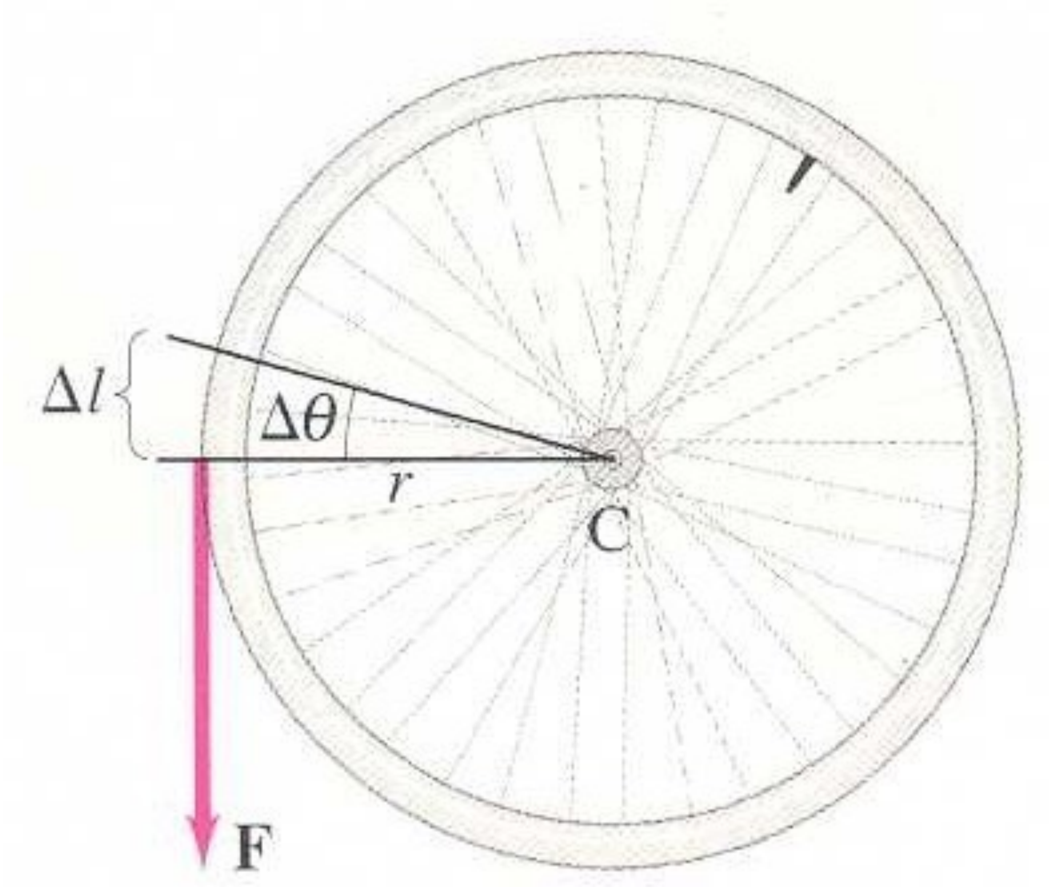



Se non c'e moto, non c'è spostamento:
**nel moto di puro rotolamento il lavoro delle forze di attrito è nullo**
(energia non viene dissipata)

Rotolamento + strisciamento (roto-traslazione)
Attrito **dinamico**, parte dell'energia dissipata in lavoro contro le forze di attrito

# Lavoro e potenza del momento torcente

**Lavoro**: basta esprimere un $\Delta l = r\Delta\theta$, da cui $W = Fr\Delta\theta = \tau\Delta\theta$




$$W = F\Delta l = Fr\Delta\theta = \tau\Delta\theta$$

Nel caso generale bisogna usare il prodotto scalare

$$W = \vec{\tau} \cdot \Delta\vec{\theta}$$

Per la **potenza** basta esprimere il lavoro differenziale $dW = \tau d\theta$

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

$$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

(caso generale)

# II legge di Newton nel caso rotazionale: il momento angolare

La II legge di Newton può essere scritta come

**Traslazioni** $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ **Rotazioni**

Cerchiamo l'analogo della quantità di moto, chiamato **momento angolare *L***

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

*II legge di Newton generalizzata per le rotazioni: il momento d'inerzia può cambiare*

Se I = costante si ottiene nuovamente $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

# Conseguenza: conservazione del momento angolare

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

***II legge di Newton***

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$$

*Se il momento torcente risultante è nullo,*
*il momento angolare totale di un corpo che ruota rimane costante*

*La risultante delle forze $\sum F$ può essere $\neq 0$ a patto che il momento torcente netto sia nullo*

# Conseguenza: conservazione del momento angolare

*I grande*
*ω piccolo*

*I piccolo*
*ω grande*


*I grande*
*ω piccolo*
*(controllo)*

***Caso 1:*** *sistema isolato (risultante nulla) quindi $\tau$=0, L=costante*

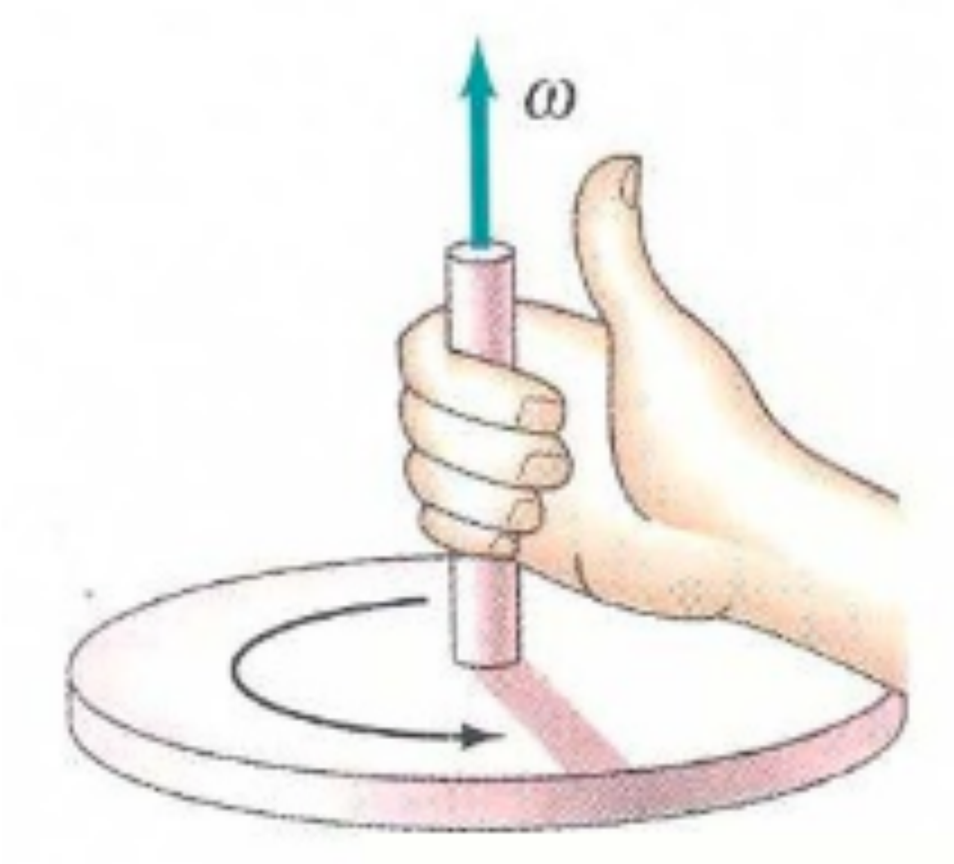
***Nota***: *Krot = $I\omega^2/2$*

aumenta alla chiusura delle braccia (lavoro eseguito)

***Caso 2:*** *sistema non isolato ma braccio nullo quindi $\tau$=0, L=costante*

***Nota:*** *la rotazione è generata al momento dello stacco*

# Significato vettoriale delle grandezze rotazionali

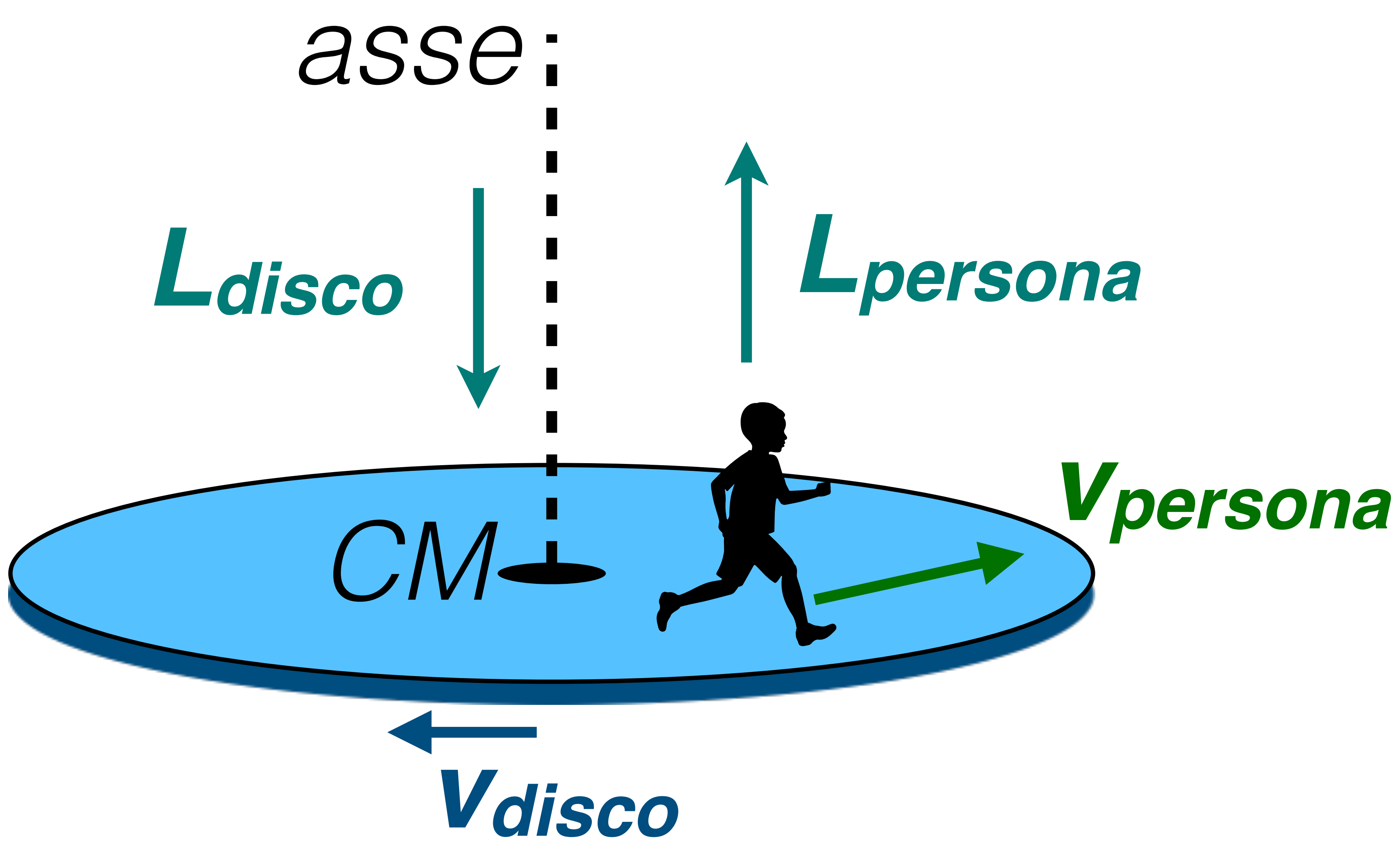



**Velocità angolare (vettoriale)**

*Segue la regola della mano destra (cfr. lez. 10)*

***Momento angolare*** *ha la stessa direzione e verso di* $\omega$

*Per modificare L (anche solo in direzione) occorre un momento torcente*




**Conservazione mom. angolare**

*Se una persona inizia a correre su un disco rotante, causa un moto della piattaforma in senso opposto*

# Conservazione del momento angolare: esercizi

**Esercizio 7.08:** Una massa di 1 kg, attaccata alle estremità di una corda, ruota lungo una circonferenza sulla superficie di un tavolo privo di attrito. L'altro estremo della corda passa attraverso un buco del tavolo. Inizialmente la massa ruota con velocità 2.4 m/s su una circonferenza di raggio 0.8 m; successivamente la corda viene tirata e il raggio ridotto a 0.48 m. Calcolare la nuova velocità della massa e il lavoro compiuto dalle forze applicate.

Nel calcolare il lavoro abbiamo espresso l'energia cinetica solo con la parte traslazionale, quando invece

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{tr}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_i v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}}^2$$

Il termine rotazionale e nullo: se il corpo è puntiforme $I_{\text{CM}}=0$; se il corpo è esteso ma non c'è attrito il moto è di puro strisciamento quindi $\omega_{\text{CM}} = 0$