Fisica per applicazioni di realtà virtuale

Anno Accademico 2022-23

Prof. Matteo Brogi
Dipartimento di Fisica, stanza B3, nuovo edificio

Lezioni 15-16

Onde meccaniche parte 2

Forma matematica di un'onda meccanica

Descrive lo spostamento materiale *u* in funzione dello spazio e del tempo

$$u = u(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

Forma alternativa
+ fase iniziale

$$u = A\cos(kx - \omega t + \phi_0)$$

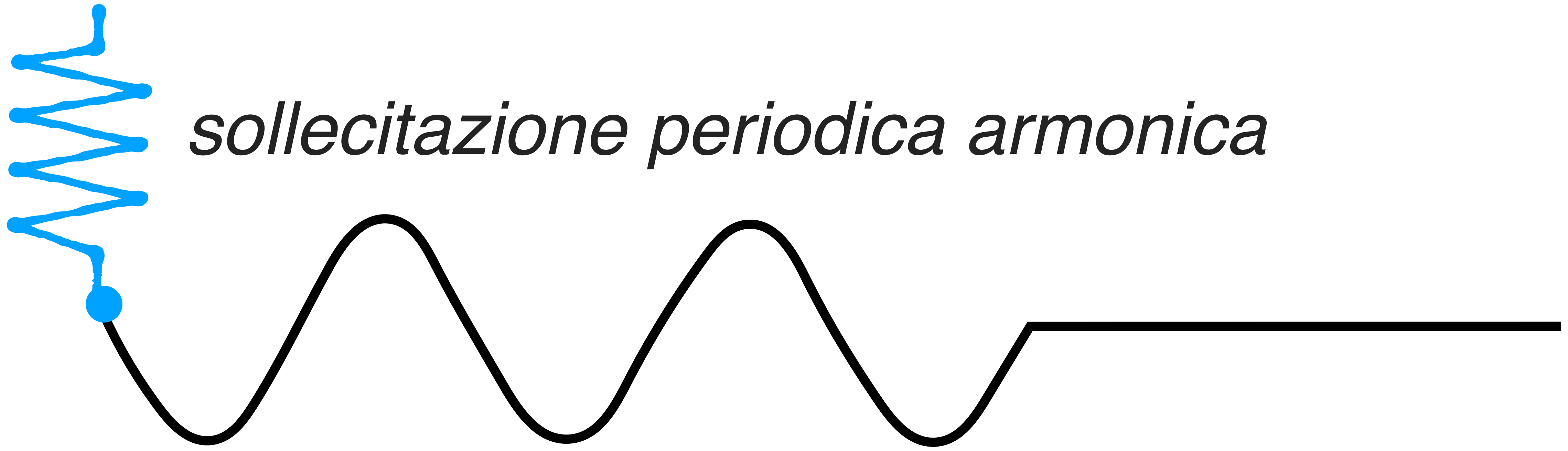
numero d'onda (wavenumber) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ *frequenza angolare*

Attenzione a non confondere il numero d'onda k con il coefficiente elastico della molla (anch'esso k)

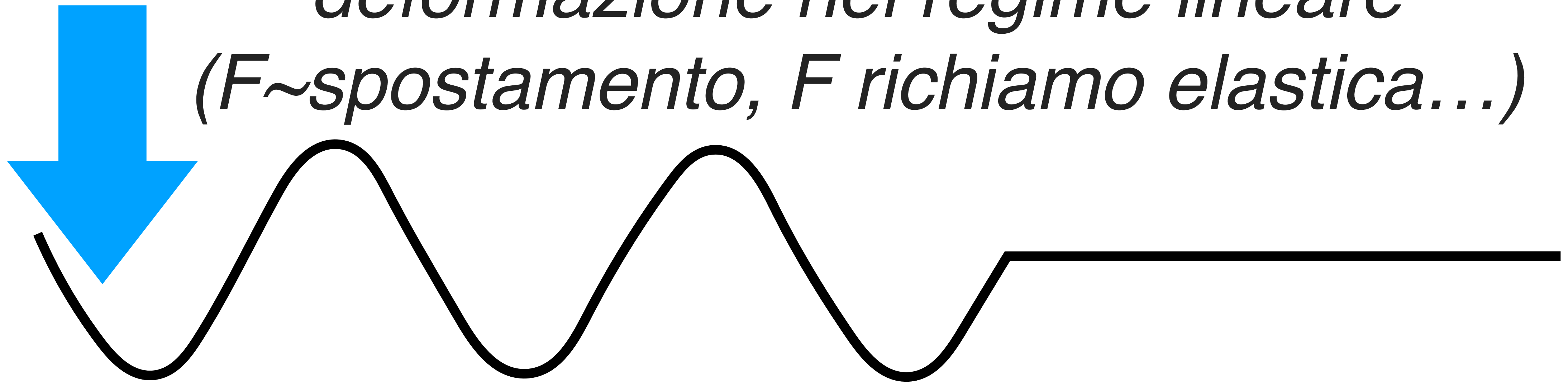
Come si ricava la funzione d'onda in maniera intuitiva?

Partiamo dalla sorgente della perturbazione

sollecitazione periodica armonica

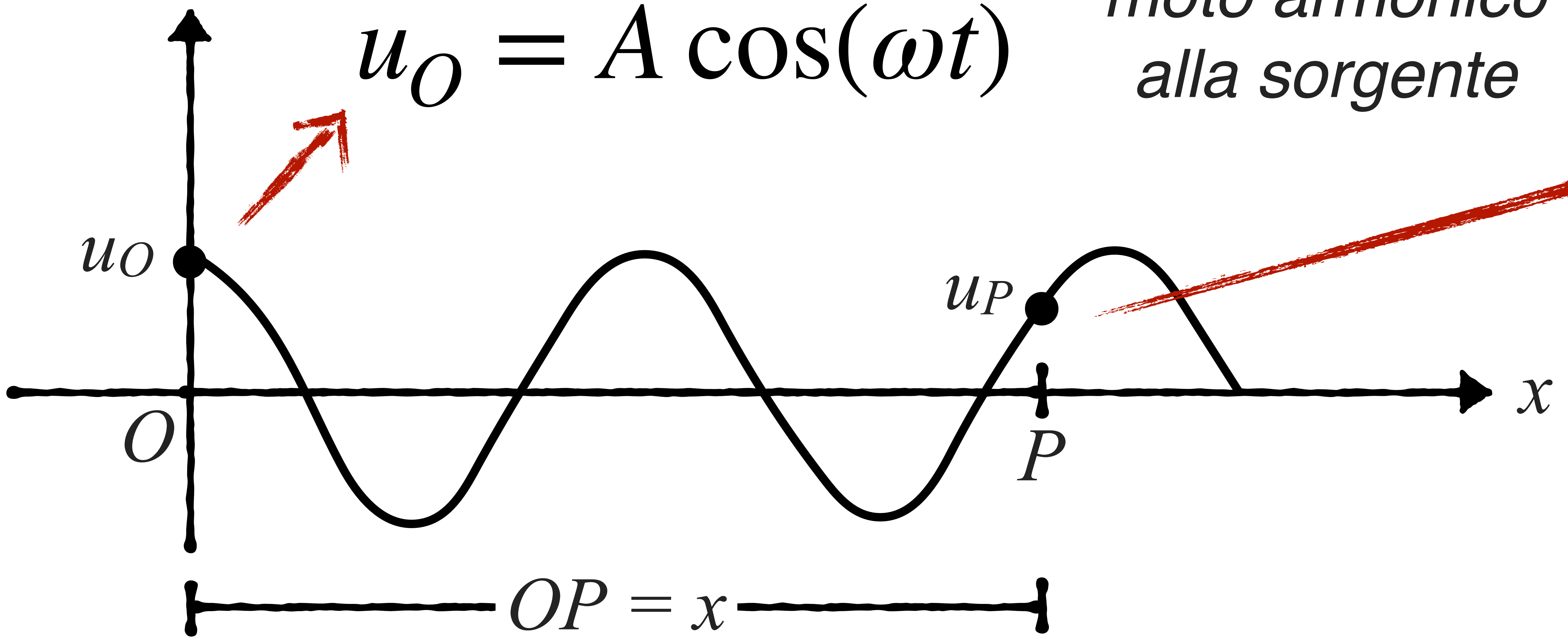


deformazione nel regime lineare (F~spostamento, F richiamo elastica…)



$$u_O = A\cos(\omega t)$$

moto armonico alla sorgente



spostamento al punto P, tempo t: spostamento all'origine, ma a un tempo precedente

$$u_P(t) = u_O(t - t_1)$$
$$= u_O\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Come si ricava la funzione d'onda in maniera intuitiva?

Sostituiamo il moto armonico alla sorgente e svolgiamo i calcoli

$$u_P = u(x,t) = u_O\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\cos\left(\omega t - \omega\frac{x}{v}\right)$$

La forma alla slide 2 può essere ritrovata usando $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, $v = \lambda f$, eccetto un **cambio di segno**

Tuttavia, per le relazioni **trigonometriche:** $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$
$\Rightarrow$ le due versioni sono equivalenti

$$u(x,t) = A\cos(\pm kx - \omega t) \equiv A\cos(kx \pm \omega t)$$

Se le due versioni sono equivalenti, qual è meglio scegliere dal punto di vista concettuale?

Causa-effetto nella propagazione di un'onda

La **sorgente** della perturbazione stabilisce
il periodo (o frequenza) dell'oscillazione

Il **mezzo** trasporta la perturbazione con una certa velocità
dipendente dalle caratteristiche (es. densità) e condizioni (es. tensione)

La **lunghezza** d'onda è concettualmente la conseguenza
di un periodo e una velocità d'onda, ovvero si "aggiusta"

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

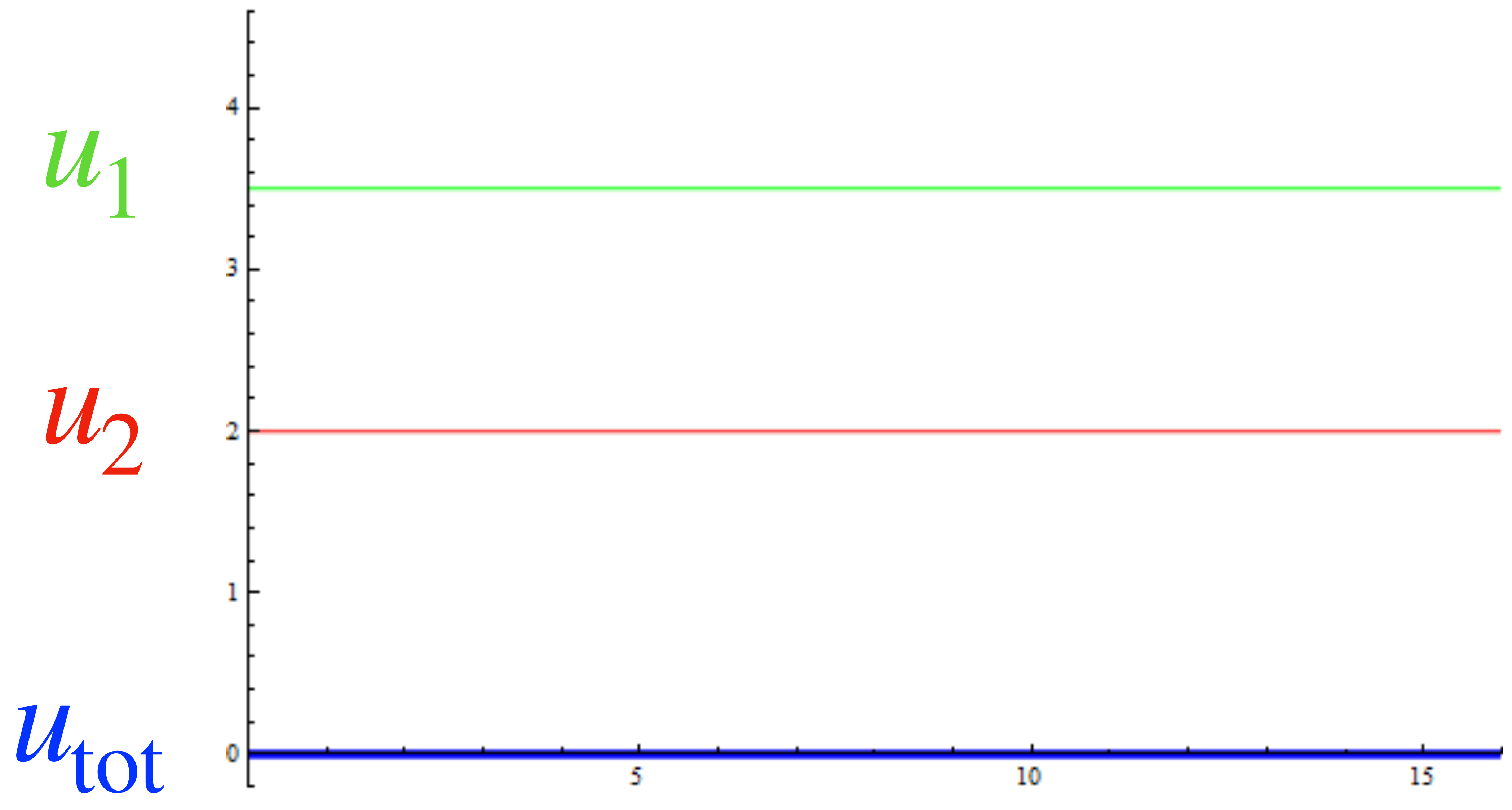
Il termine che "dipende" da λ è quello che concettualmente deve cambiare
ovvero il termine kx nell'argomento del coseno

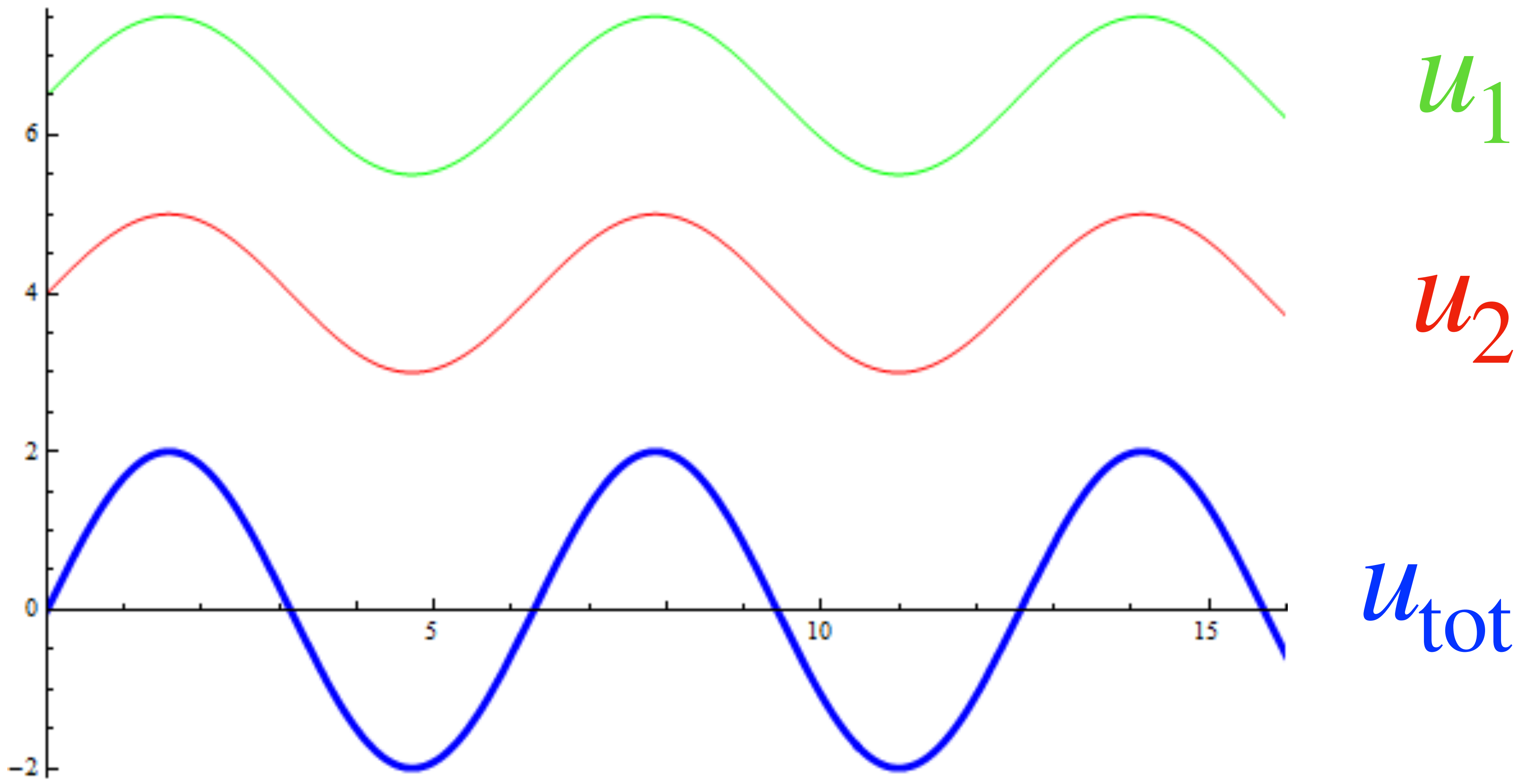
Principio di sovrapposizione

Due o più onde meccaniche possono passare nello stesso punto agendo indipendentemente l'una dall'altra

Lo spostamento totale a un dato istante è dato dalla somma degli spostamenti individuali di ciascun'onda

$$u_{\text{tot}} = u_1 + u_2 + \ldots = A_1 \cos(\pm k_1 x - \omega_1 t) + A_2 \cos(\pm k_2 x - \omega_2 t) + \ldots$$





Il principio di sovrapposizione in azione

I problemi con un'interfaccia richiedono la sovrapposizione di (max.) 3 onde

Onda incidente

Onda trasmessa

Onda riflessa

Interfaccia

per esempio un muro, un punto di raccordo fra due corde, etc.

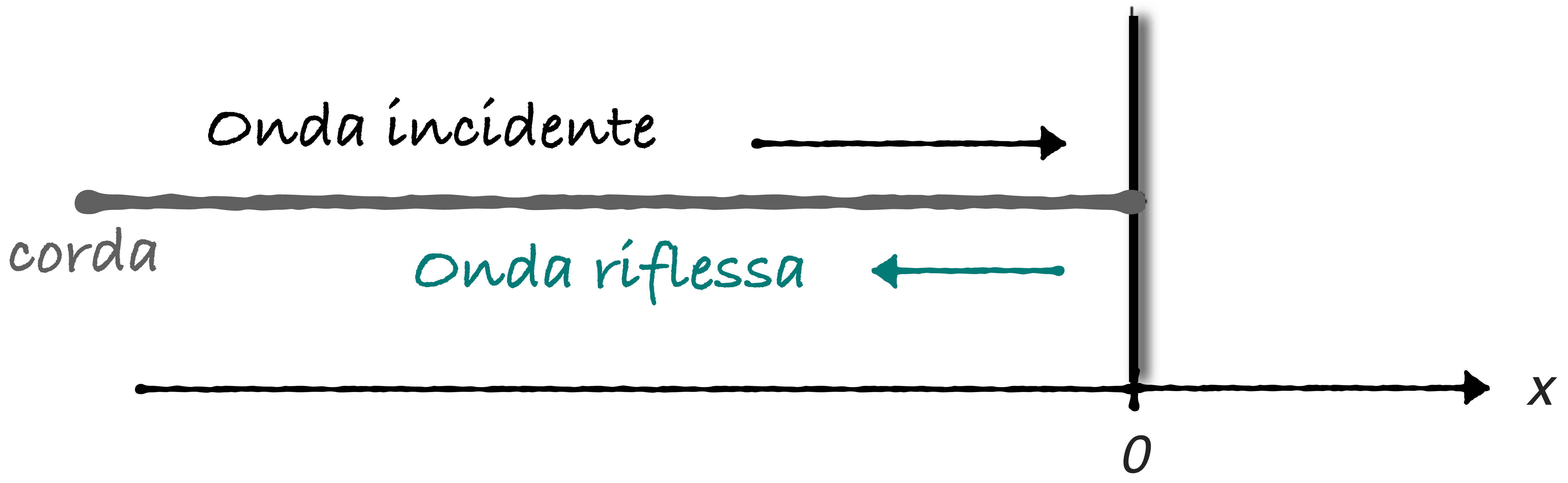
$$u_{\text{tot}} = A_I \cos(k_I x - \omega t) + A_R \cos(-k_I x - \omega t) + A_T \cos(k_T x - \omega t)$$

incidente

riflessa
ampiezza cambia
stessa λ, verso opposto

trasmessa
stesso verso,
ampiezza e λ cambiano

Riflessione di onde meccaniche: corda ad estremità fissa



Non c'è onda trasmessa (muro riflette perfettamente)

Utile risolvere il problema a x = 0: la corda è fissa ⇒ u=0

Proviamo solo un'onda incidente

$$u = A_I \cos(-\omega t) = 0$$

Insufficiente, deve essere vero sempre!

$$A_I \cos(-\omega t) + A_R \cos(-\omega t) = 0$$

$$A_I = -A_R$$

La riflessione con estremo fisso avviene "con sfasamento" (bisogna sfasare il coseno di π per cambiare il segno)

Riflessione di onde meccaniche: corda ad estremità libera

Risoluzione più complicata: occorre analisi forze

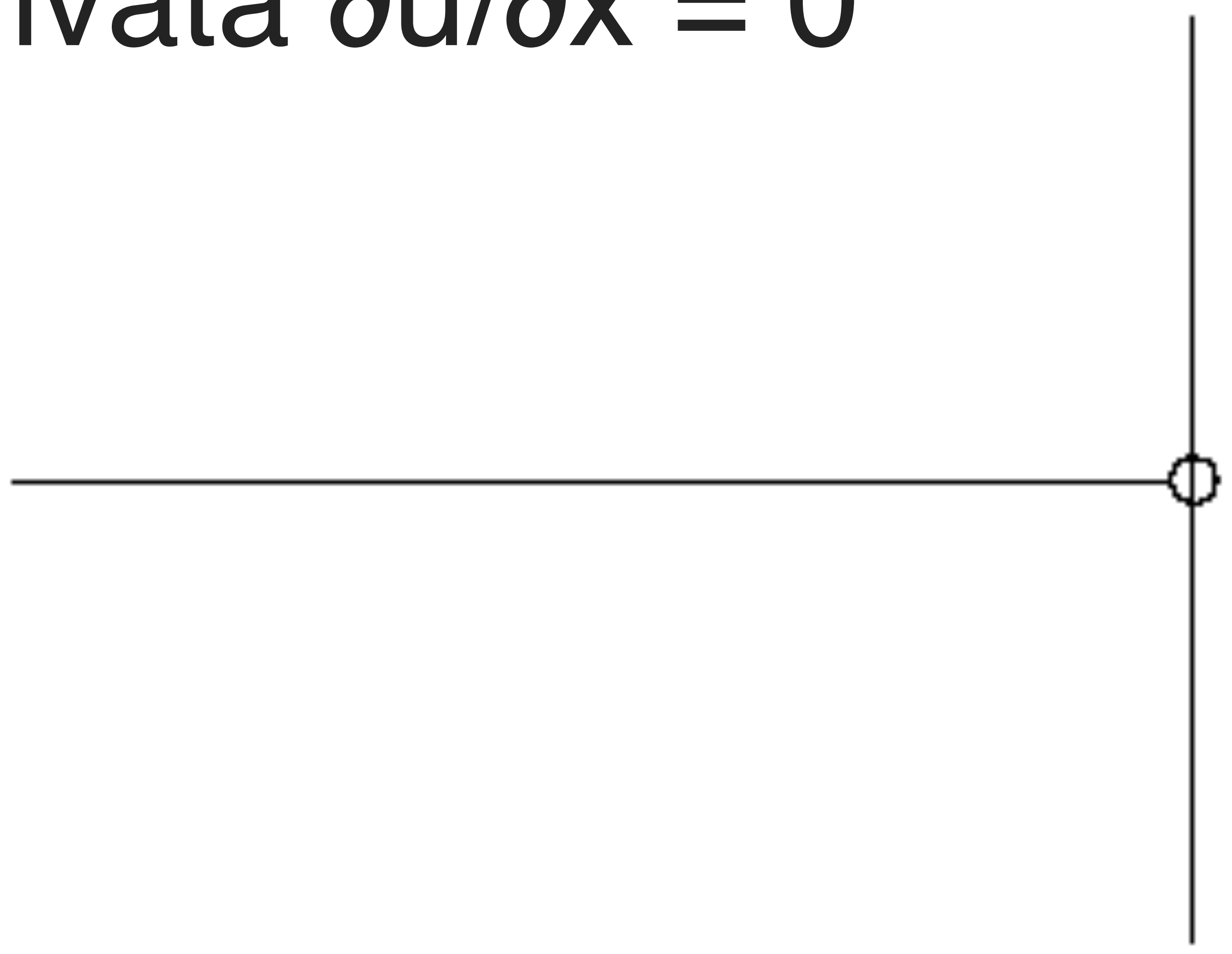
⇒ la tensione della corda può solo essere tangente all'asse orizzontale

⇒ la pendenza della curva u(x, t) = 0, ovvero la derivata ∂u/∂x = 0

$$-A_I k \sin(kx - \omega t) + A_R k \sin(-kx - \omega t)$$

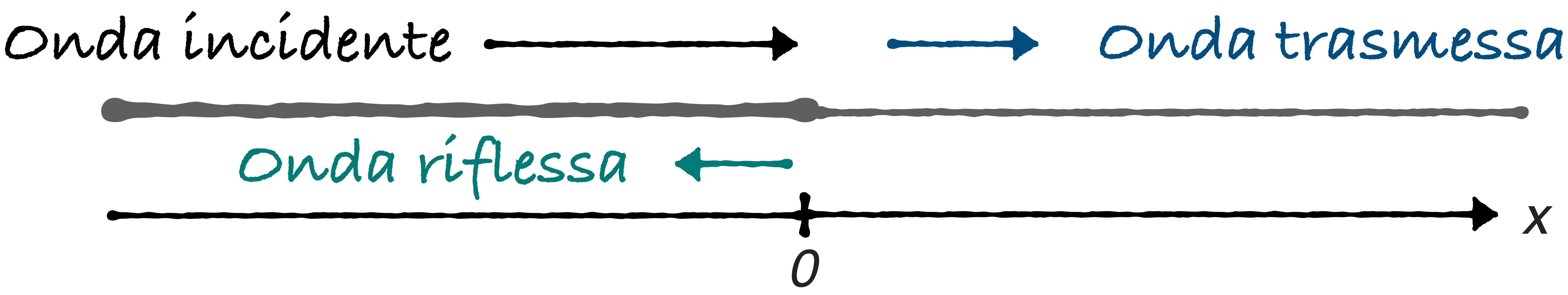
$$-A_I k \sin(-\omega t) + A_R k \sin(-\omega t)$$

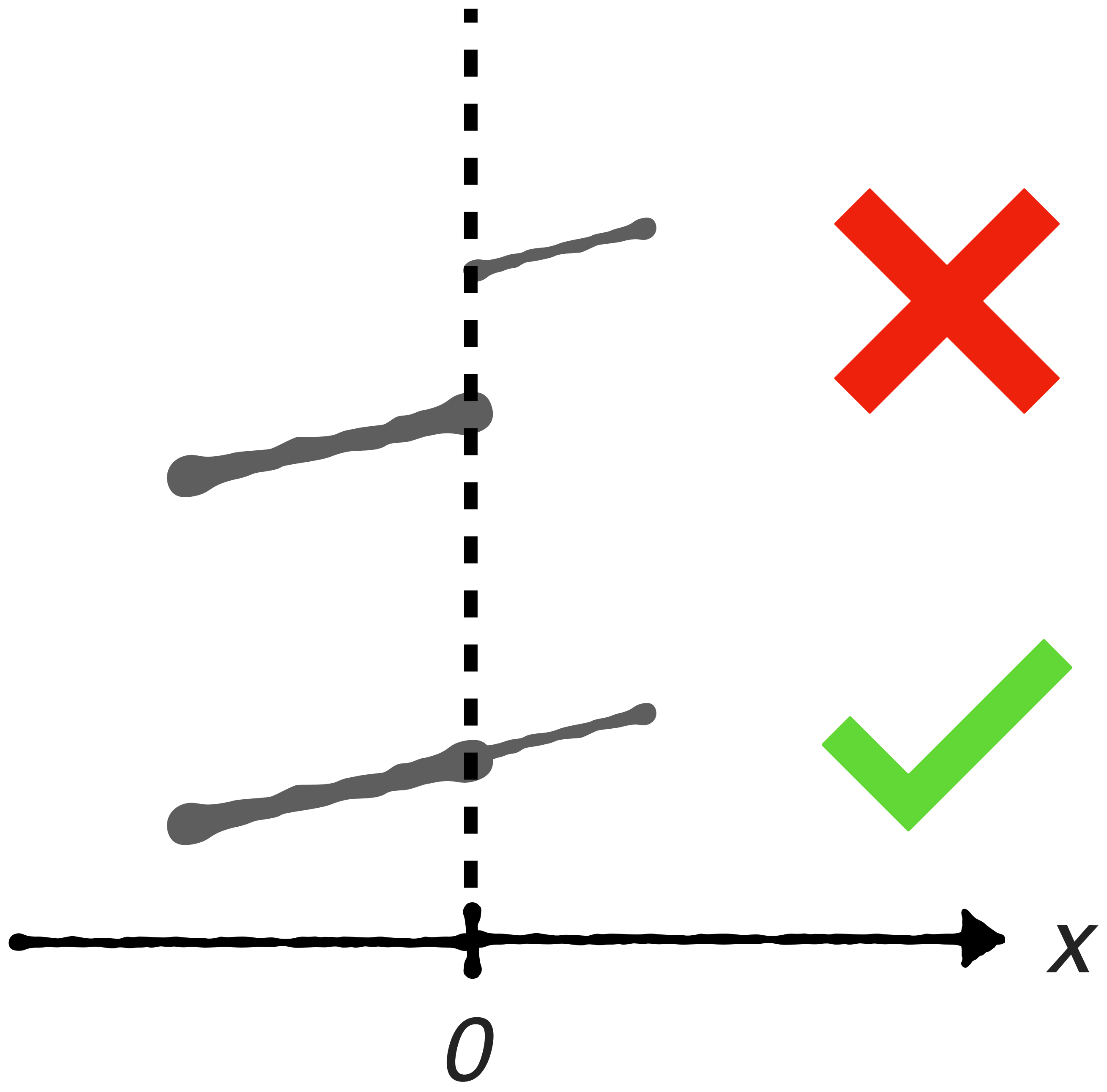
$$A_I = A_R$$



La riflessione con estremo mobile avviene "senza sfasamento"

Onde meccaniche all'interfaccia tra due mezzi





Condizioni al punto di giunzione:

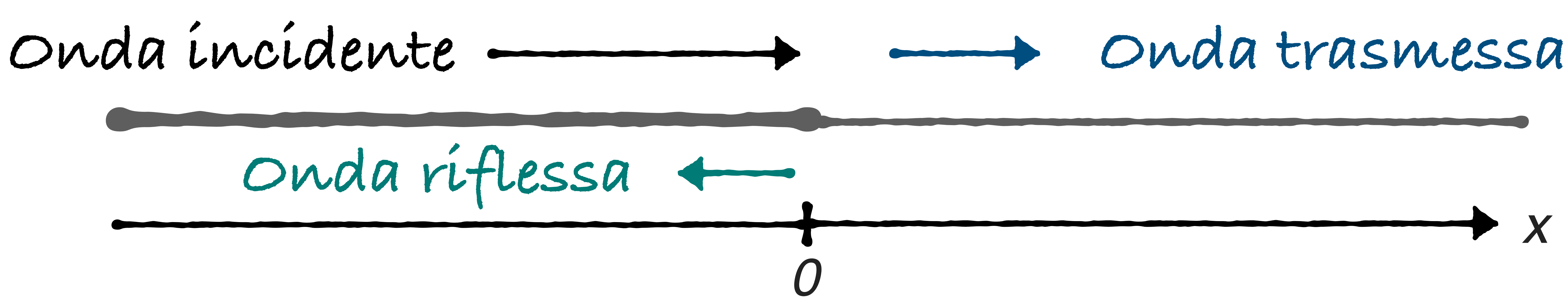
⇒ uI + uR = uT (la corda è integra)

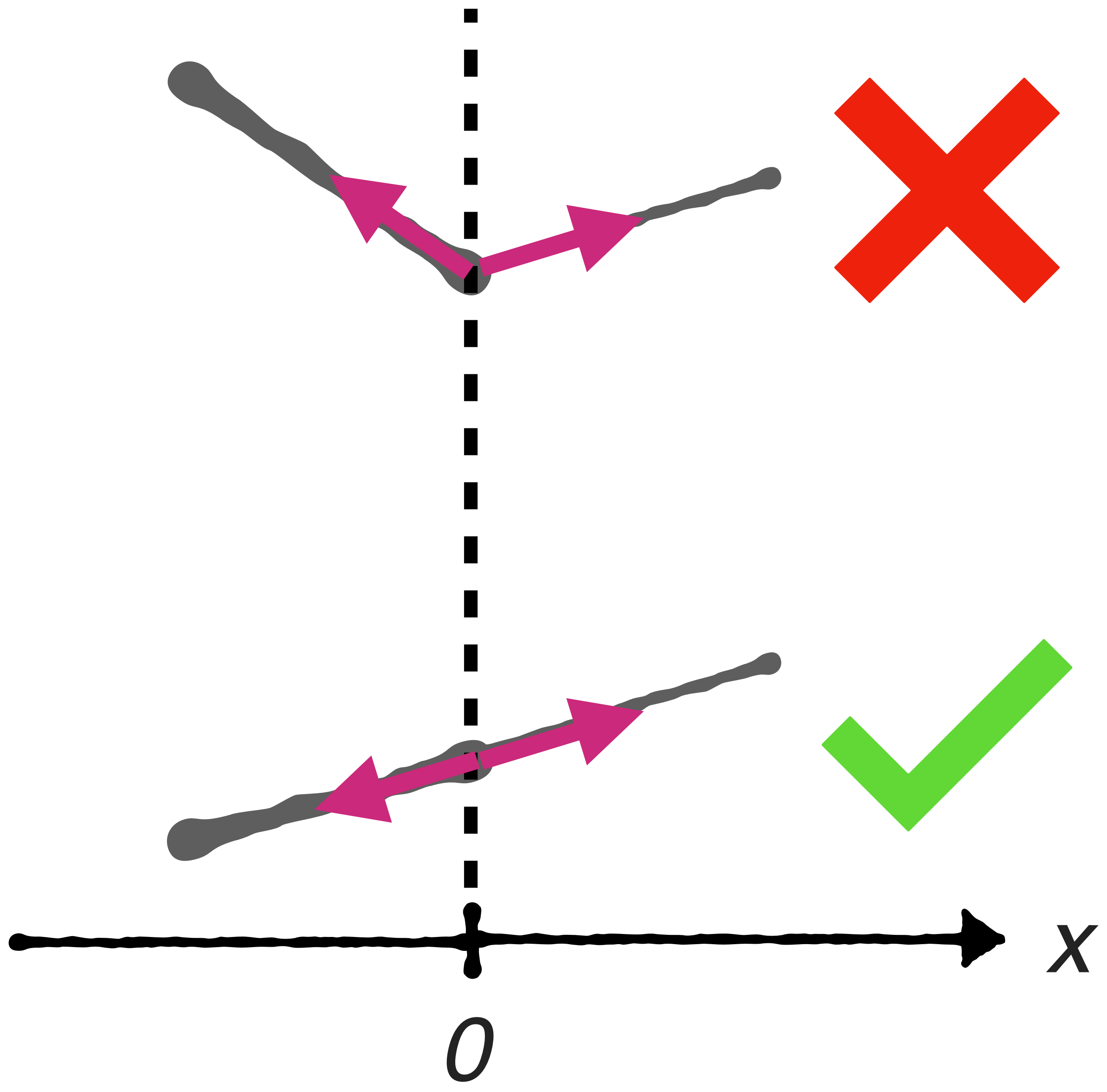
$$A_I \cos(k_I x - \omega t) + A_R \cos(-k_I x - \omega t) = A_T \cos(k_T x - \omega t)$$

$$A_I \cos(-\omega t) + A_R \cos(-\omega t) = A_T \cos(-\omega t) \qquad x = 0$$

$$A_I + A_R = A_T$$

Onde meccaniche all'interfaccia tra due mezzi





Condizioni al punto di giunzione:

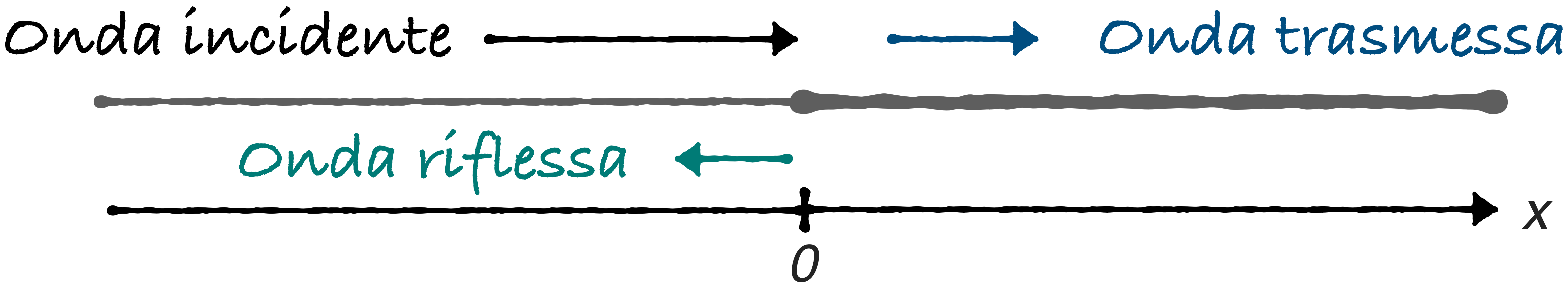
⇒ la pendenza di u(x, t) deve essere la stessa

(tensione ***T*** bilanciata) $\partial u_I/\partial x + \partial u_R/\partial x = \partial u_T/\partial x$

$$-A_I k_I \sin(k_I x - \omega t) + A_R k_I \sin(-k_I x - \omega t) = -A_T k_T \sin(k_T x - \omega t)$$

$$-A_I k_I + A_R k_I = -A_T k_T \qquad A_T = \frac{A_I k_I - A_R k_I}{k_T}$$

Onde meccaniche all'interfaccia tra due mezzi



$$\begin{cases} A_I + A_R = A_T \\ A_T = \dfrac{k_I(A_I - A_R)}{k_T} \end{cases}$$

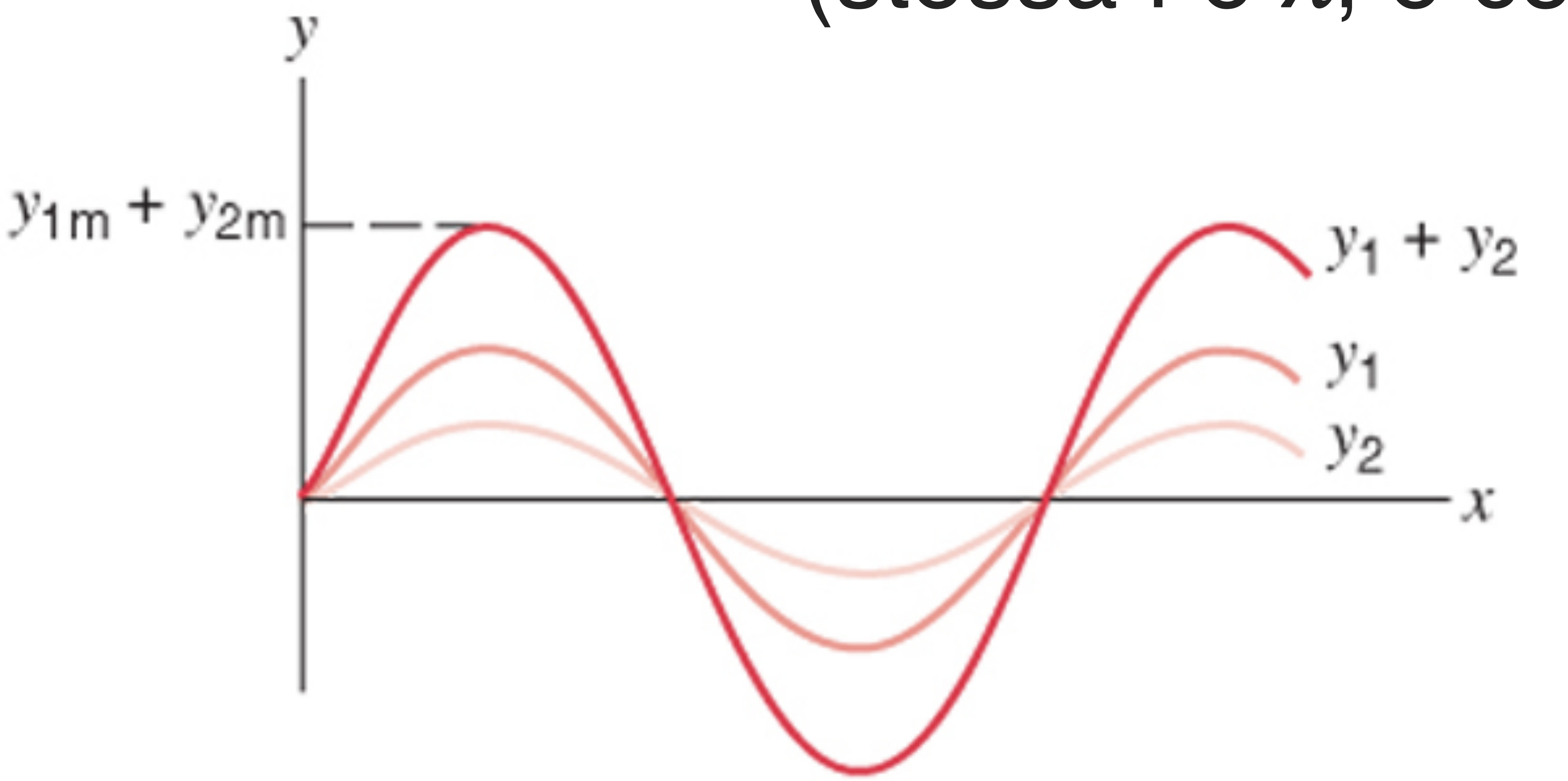
Soluzione:

$$A_T = A_I \frac{2k_I}{k_I + k_T} \qquad A_R = A_I \frac{k_I - k_T}{k_I + k_T}$$

Principio di sovrapposizione e interferenza

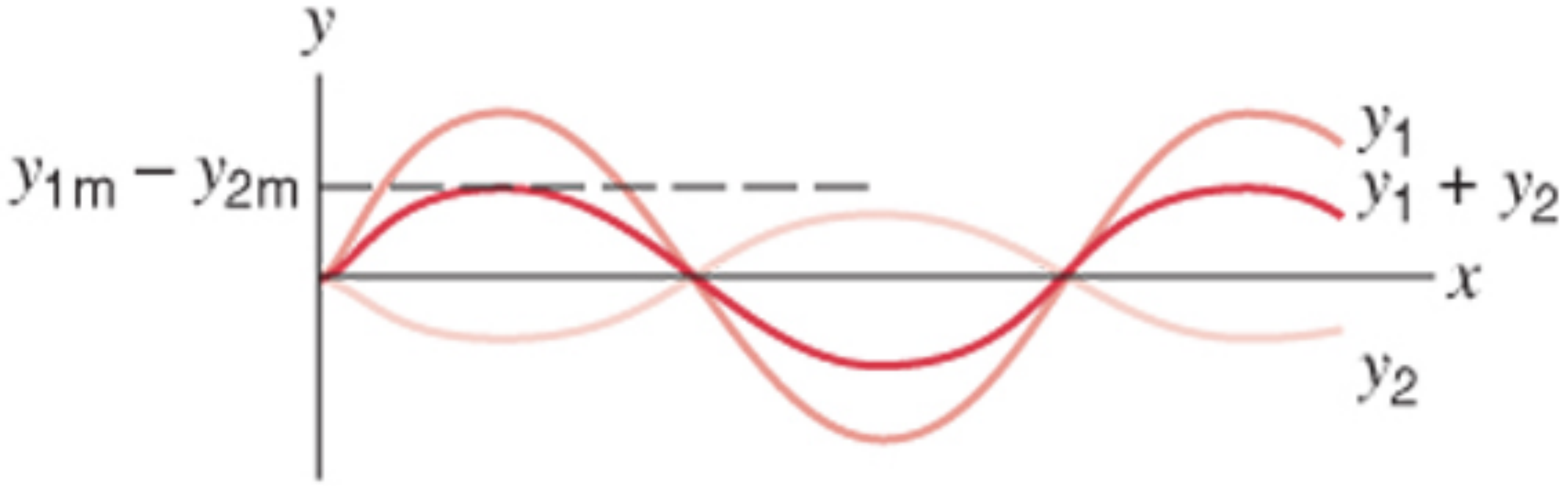
La **sovrapposizione** vale sempre ma genericamente produce rumore (massimi e minimi dell’onda risultante cambiano)

L’**interferenza** è creata dalla sovrapposizione di due onde **coerenti** (stessa f e λ, e costanti nel tempo e nello spazio)



Onde coerenti e <u>in fase</u>

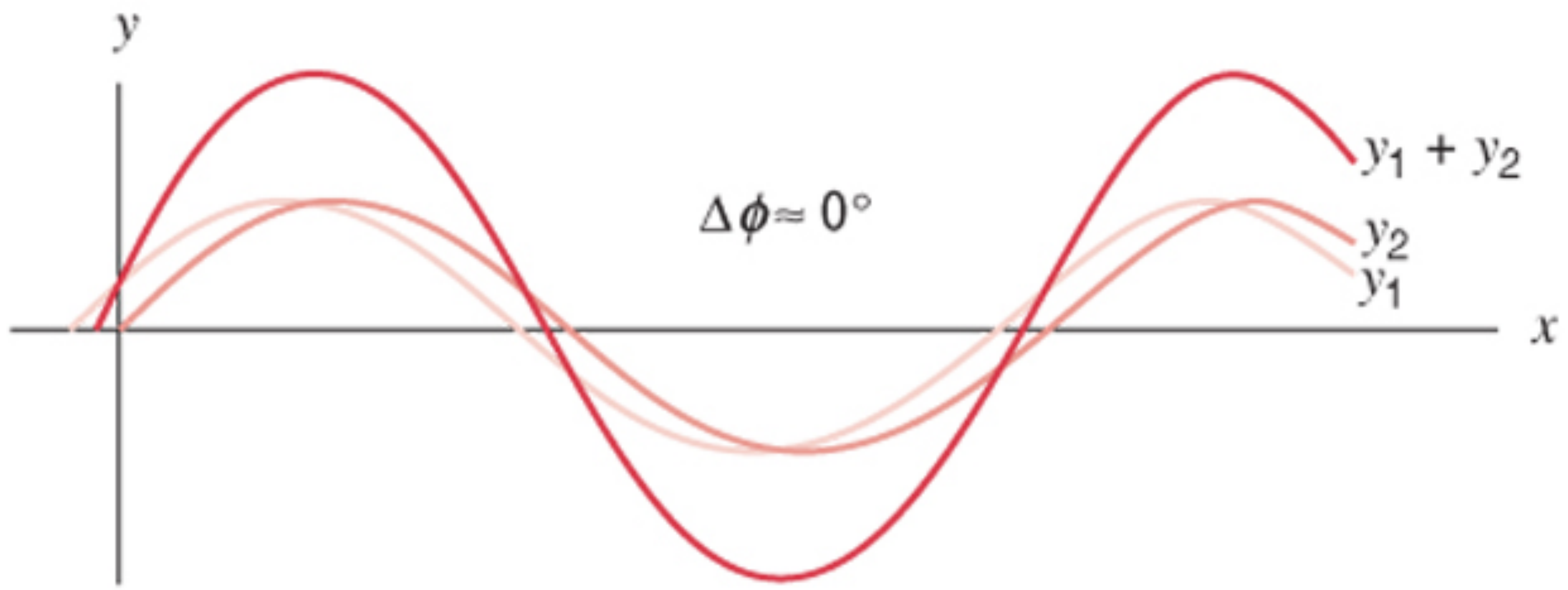
La differenza di fase può generarsi **alla sorgente** oppure per una **differenza di cammino**



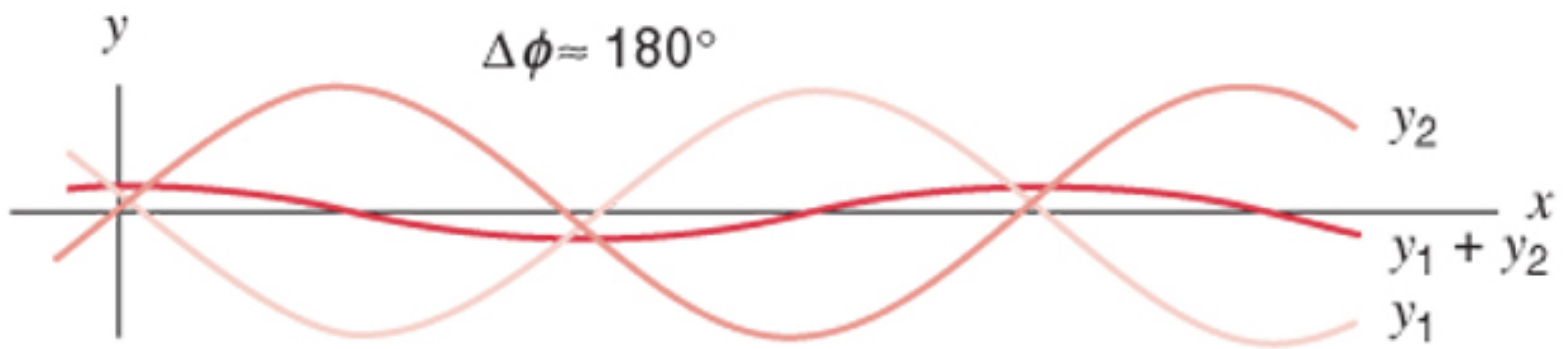
Onde coerenti in <u>opposizione di fase</u>

Tipi di interferenza

A seconda della fase relativa tra le onde che interferiscono le perturbazioni possono "rinforzarsi" oppure "indebolirsi"



Onde coerenti ~ <u>in fase:</u>
i massimi si rinforzano
interferenza costruttiva

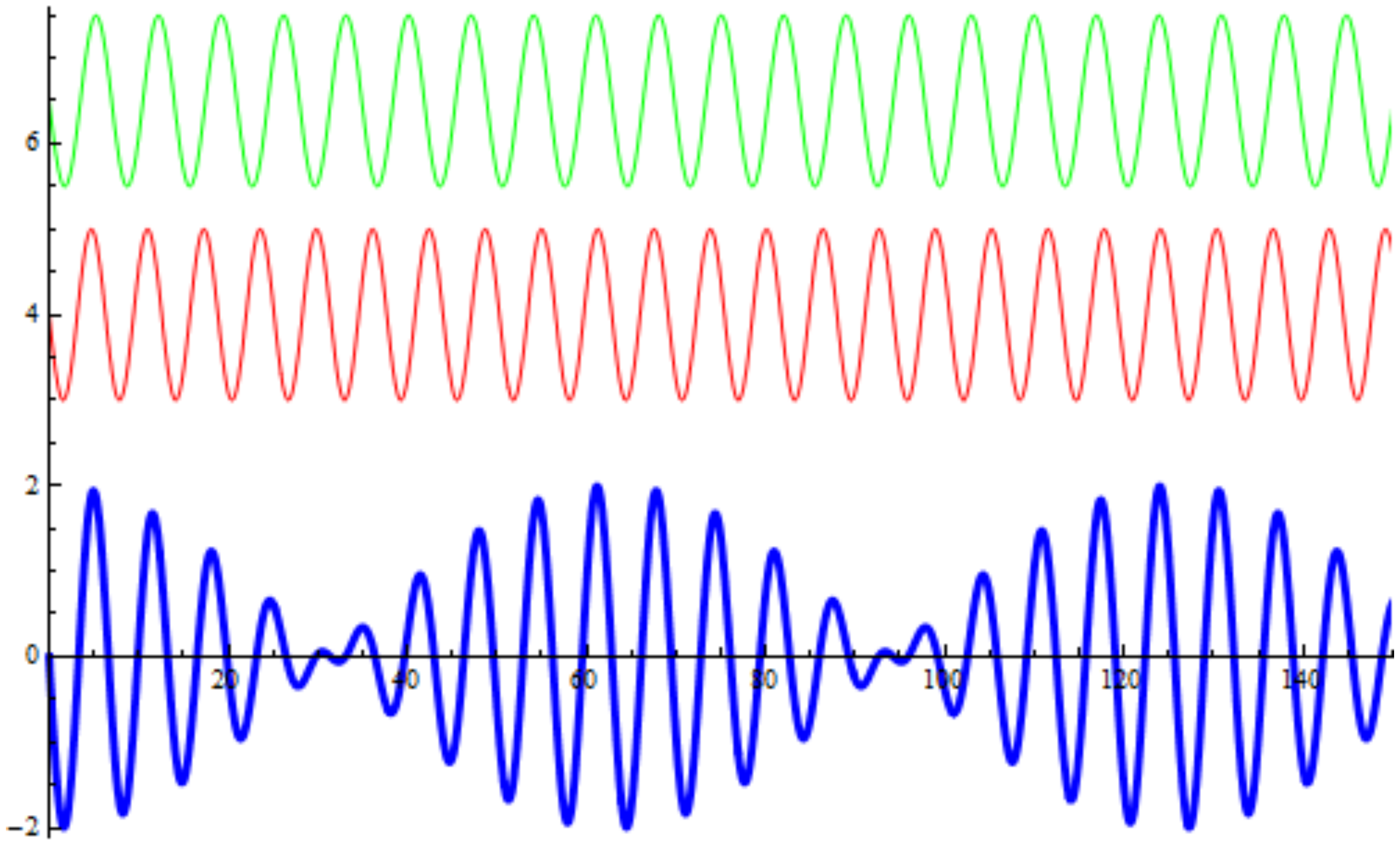


Onde coerenti <u>sfasate</u> di ~ π
i massimi si cancellano
interferenza distruttiva

Es. di applicazioni pratiche: cuffie anti-rumore o design di una sala d'ascolto

Interferenza a frequenze quasi uguali: battimenti

Sovrapposizione di onde a frequenza quasi uguale (f_1=1.0, f_2=0.9)

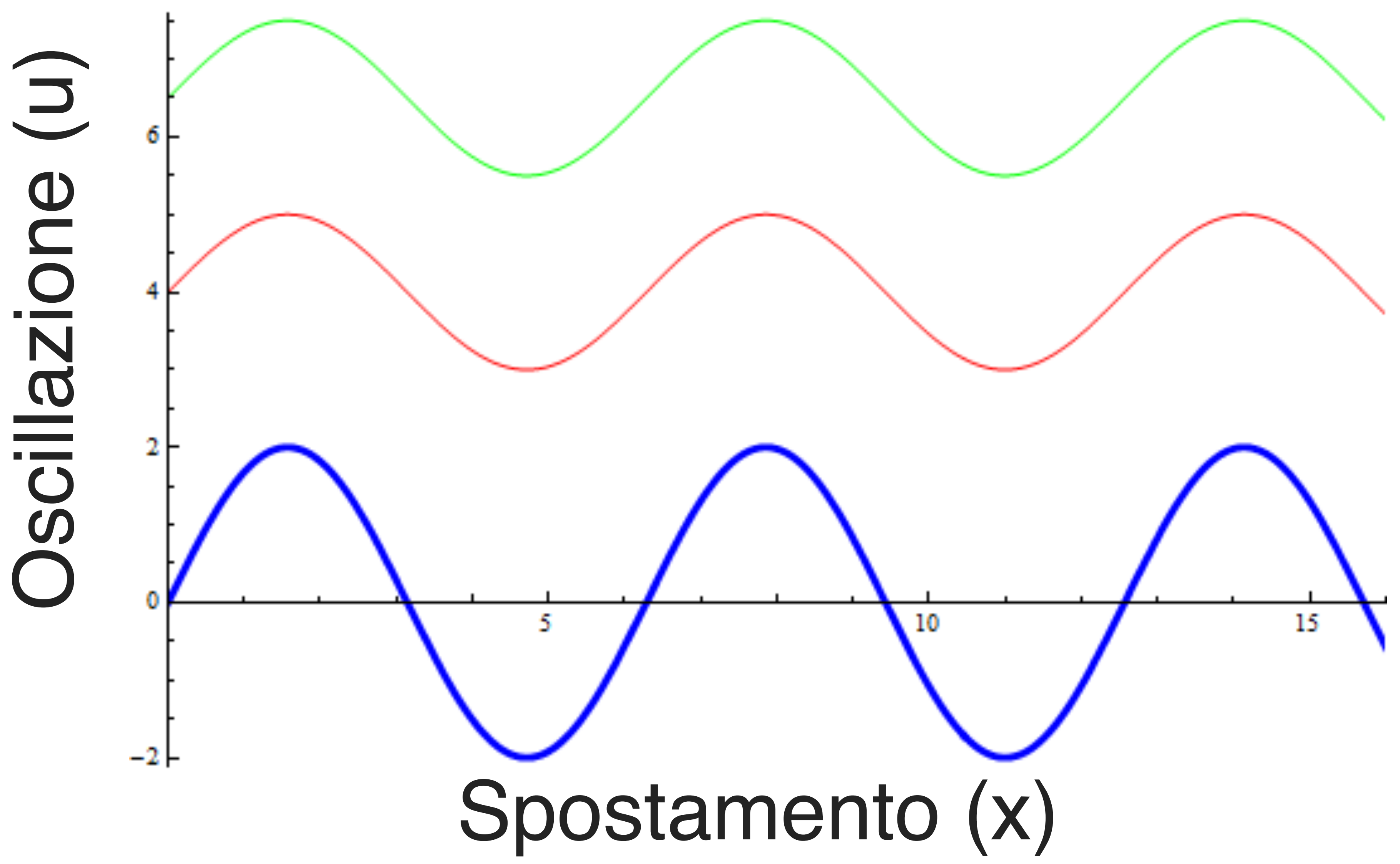


Ne risulta un'onda che ha frequenza intermedia tra f_1 ed f_2
la cui ampiezza è "modulata" da un onda a frequenza molto minore

Ritorneremo sui battimenti nella parte sull'**acustica**

Onde stazionarie: origine

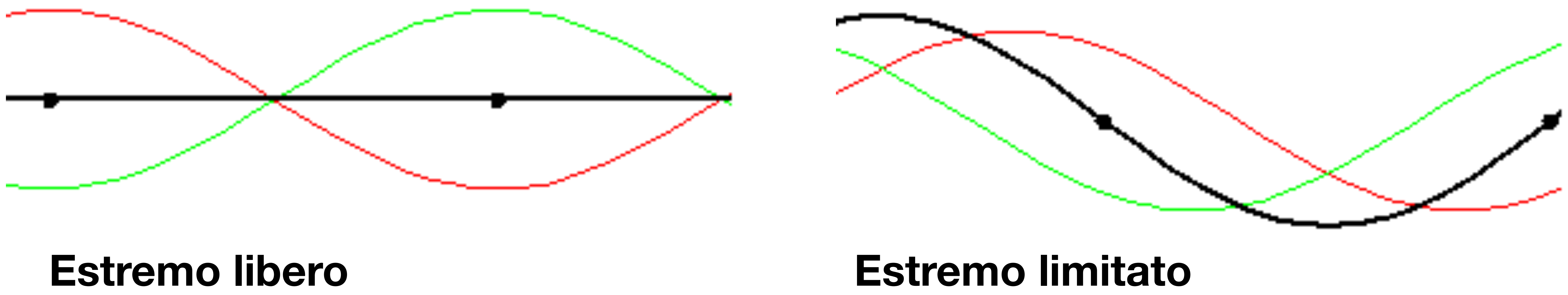
Interferenza tra due onde periodiche (progressiva e regressiva)



Si crea una configurazione stabile dovuta all'interferenza delle due onde

Alcuno punti (**nodi**) hanno sempre ampiezza nulla, altri oscillano tra zero e la somma delle due ampiezze.

Queste onde **stazionarie** si generano per la presenza di un **mezzo limitato**



Le onde devono avere specifiche frequenze (dipendenti dalla dimensione del mezzo)

Onde stazionarie e trasporto nullo di energia

Lezione 14: nelle onde meccaniche ideali **non c'è spostamento di materia**

⚠ *Un'onda stazionaria non è un'onda ma il prodotto dell'interferenza tra onde*

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\beta = -kx - \omega t$$
$$\alpha = kx - \omega t$$
$$\alpha + \beta = -2\omega t$$
$$\alpha - \beta = 2kx$$

$$u_I + u_R = 2A\cos(kx)\ \cos(\omega t)$$

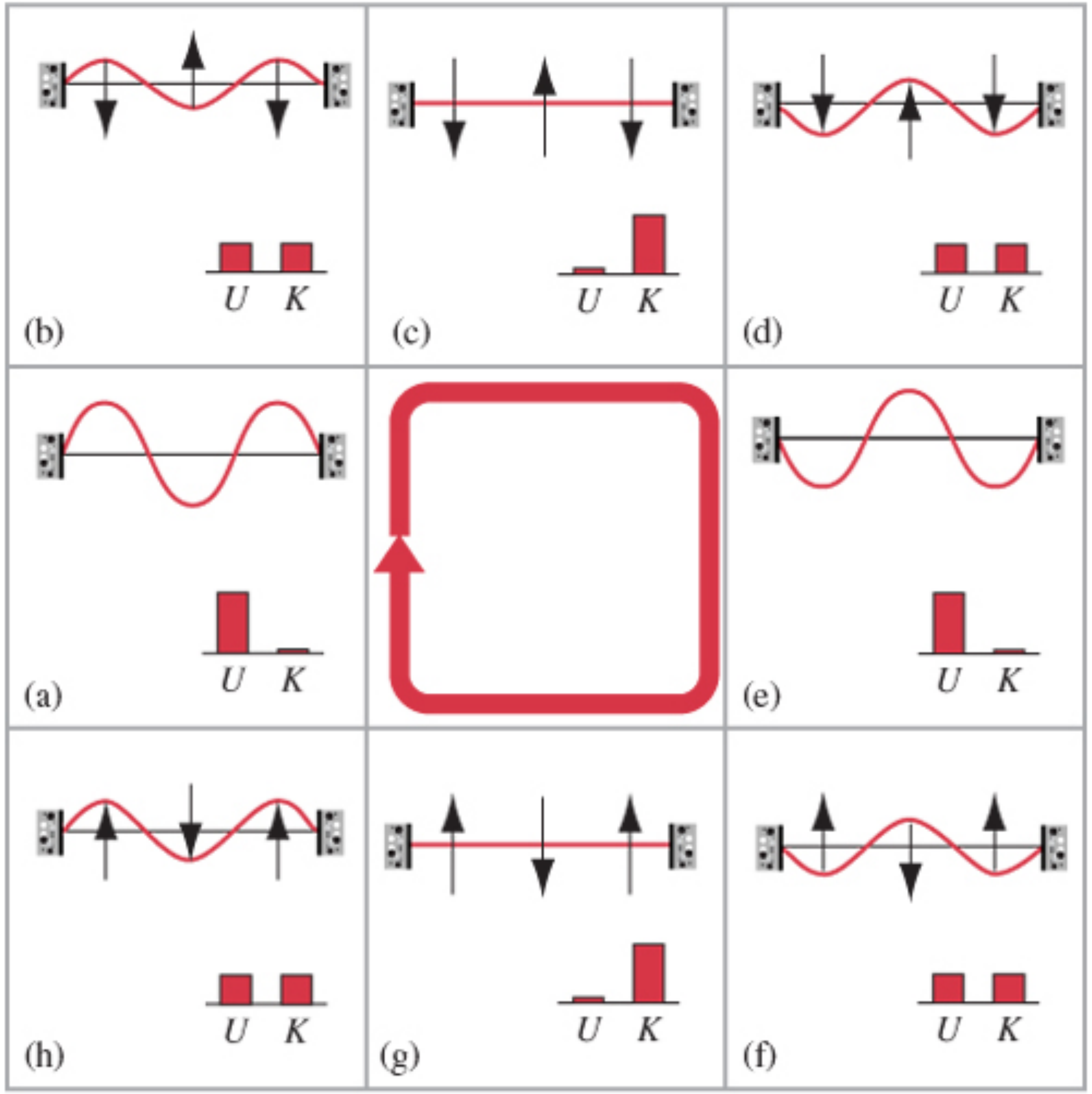
Matematicamente l'evoluzione nello spazio e nel tempo si separano

In onde stazionarie non c'è trasporto né di materia né di energia (ovvero l'onda non si muove)

Onde stazionarie e trasporto nullo di energia

Nel caso ideale (senza attrito o dissipazione)

onde stazionarie consentono di immagazzinare energia nel mezzo



*A oscillazione massima corrisponde **pura energia potenziale** (elastica)*

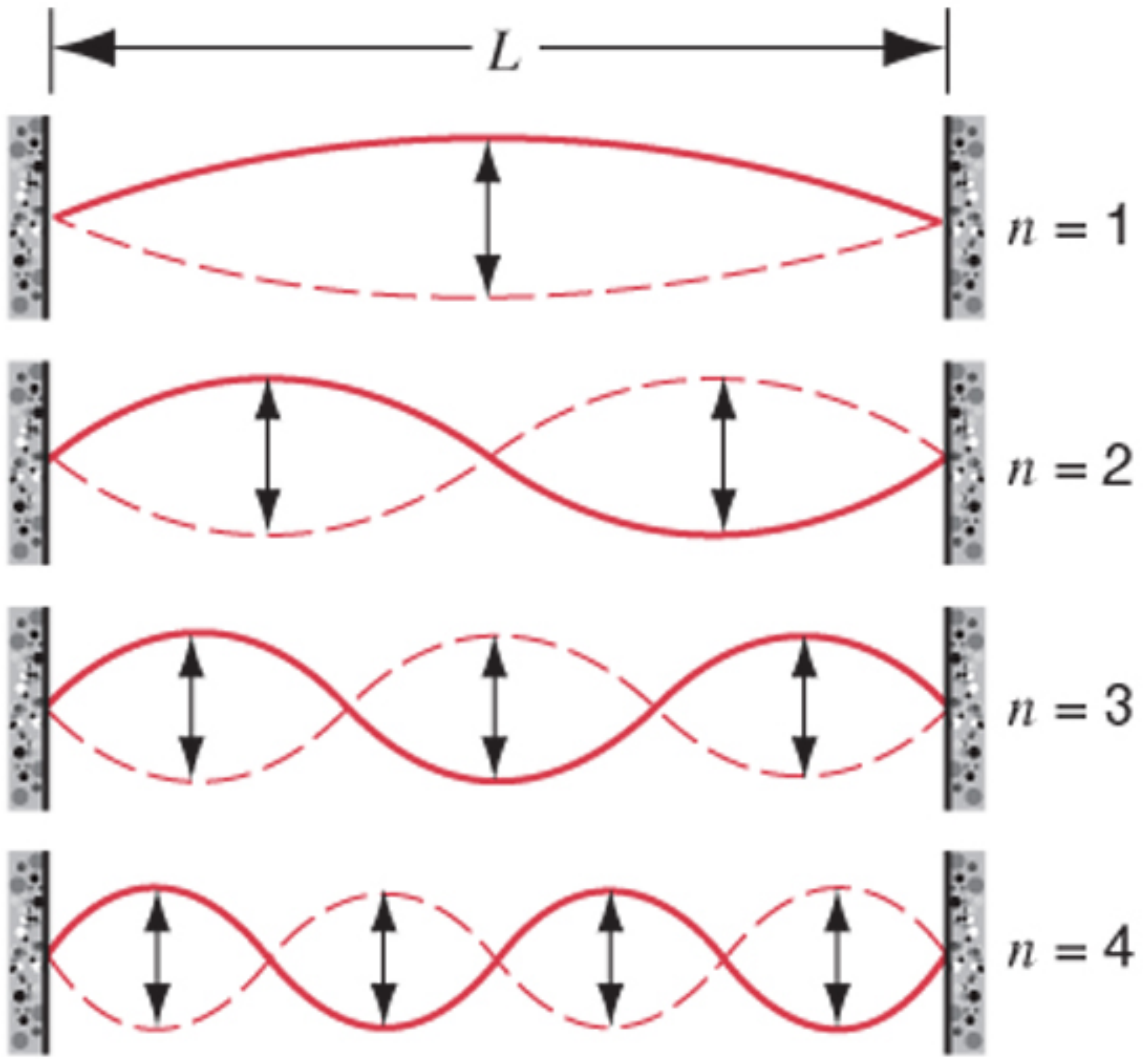
*A oscillazione nulla corrisponde **pura energia cinetica***

*L'energia **totale** (conservata) è*

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{4} m A_n^2 \omega_n^2$$

Forma delle onde stazionarie con estremi fissi

Solo onde di una data frequenza (collegata alla lunghezza *L*) possono produrre onde stazionarie



Riflessione a estremo fisso

L'ampiezza agli estremi è nulla, ovvero gli estremi sono due nodi

1ª armonica (fondamentale)

Onda stazionaria ha $\lambda = 2L$

n-esima armonica (superiore)

Onda stazionaria ha $\lambda = 2L / n$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad f_n = \frac{nv}{2L} \qquad (n = 1,2,3...)$$

Onde meccaniche: esercizi

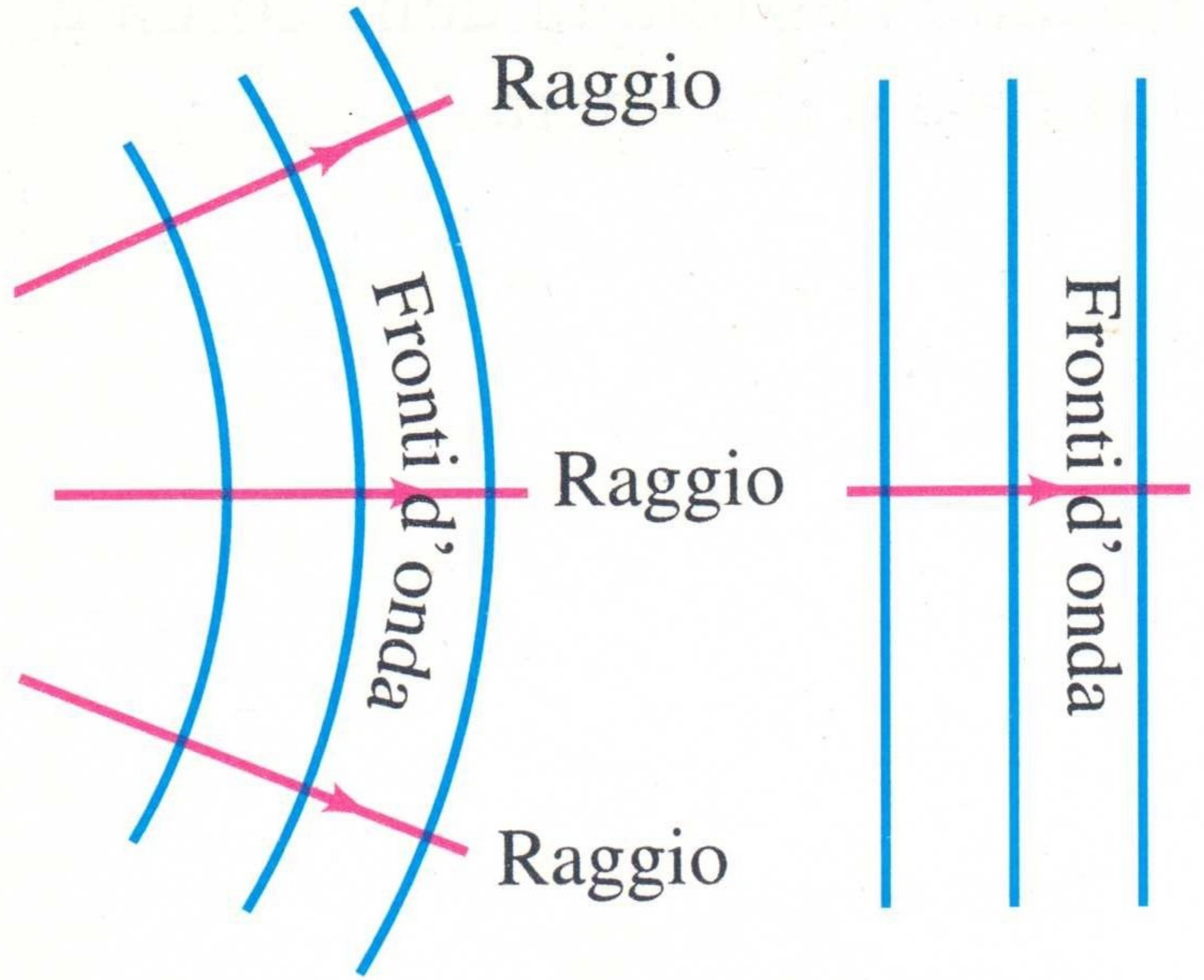
Esercizio 9.04: Un'onda a frequenza 440 Hz incide su una corda a due sezioni, la cui densità lineare passa da $\mu_1 = 0.5$ kg m^{-1} a $\mu_2 = 0.75$ kg m^{-1} con una giunzione ideale. Se l'ampiezza dell'onda incidente è $A_I = 10$ cm e la tensione della corda 150 N, determinare l'ampiezza delle onde riflessa e trasmessa.

Esercizio 9.05: Una corda di chitarra viene premuta a 1/3 della sua lunghezza totale, e sollecitata con un plettro a metà della lunghezza totale. Determinare quale armonica viene messa in vibrazione dalla sollecitazione.

Esercizio 9.06: Una corda ha densità lineare pari a 7.2 g/m ed è sottoposta a una tensione di 150 N tra due supporti che distano 90 cm. La corda oscilla alla terza armonica. Calcolare la velocità, lunghezza d'onda, e frequenza delle onde la cui sovrapposizione causa quest'onda stazionaria. Come cambiano queste quantità se la tensione quadruplica?

Grandezze topologiche delle onde

Onda sferica **Onda piana**



Fronte d'onda

insieme dei punti che hanno la stessa fase

Raggio

linea perpendicolare al fronte d'onda e parallela alla direzione di propagazione

Fronte d'onda: *informazione su frequenza e velocità dell'onda*

Raggio: *informazione sulla direzione e trasporto energetico*

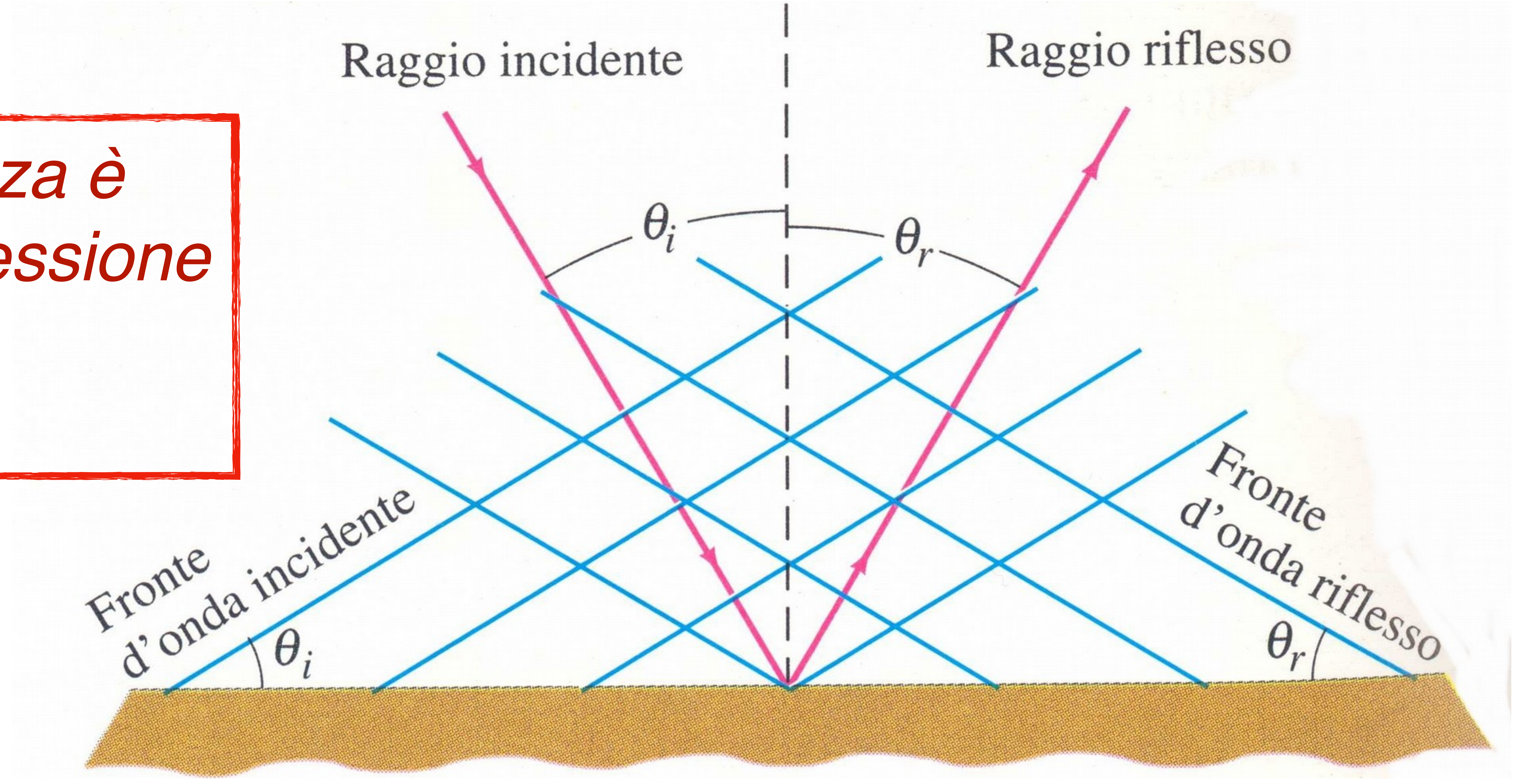
A raggi molto grandi ogni onda è bene approssimata con un'onda piana (curvatura non apprezzabile)

Riflessione delle onde piane

Onde piane: sorgente molto lontana dalla superficie riflettente

L'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione

$$\theta_i = \theta_r$$



Angolo d'incidenza (del **raggio** rispetto alla normale) = angolo di riflessione

Angolo d'incidenza (del **fronte** rispetto alla superficie) = angolo di riflessione

Vale punto per punto: se la superficie non è piana basta definire la normale (utile in computer grafica)

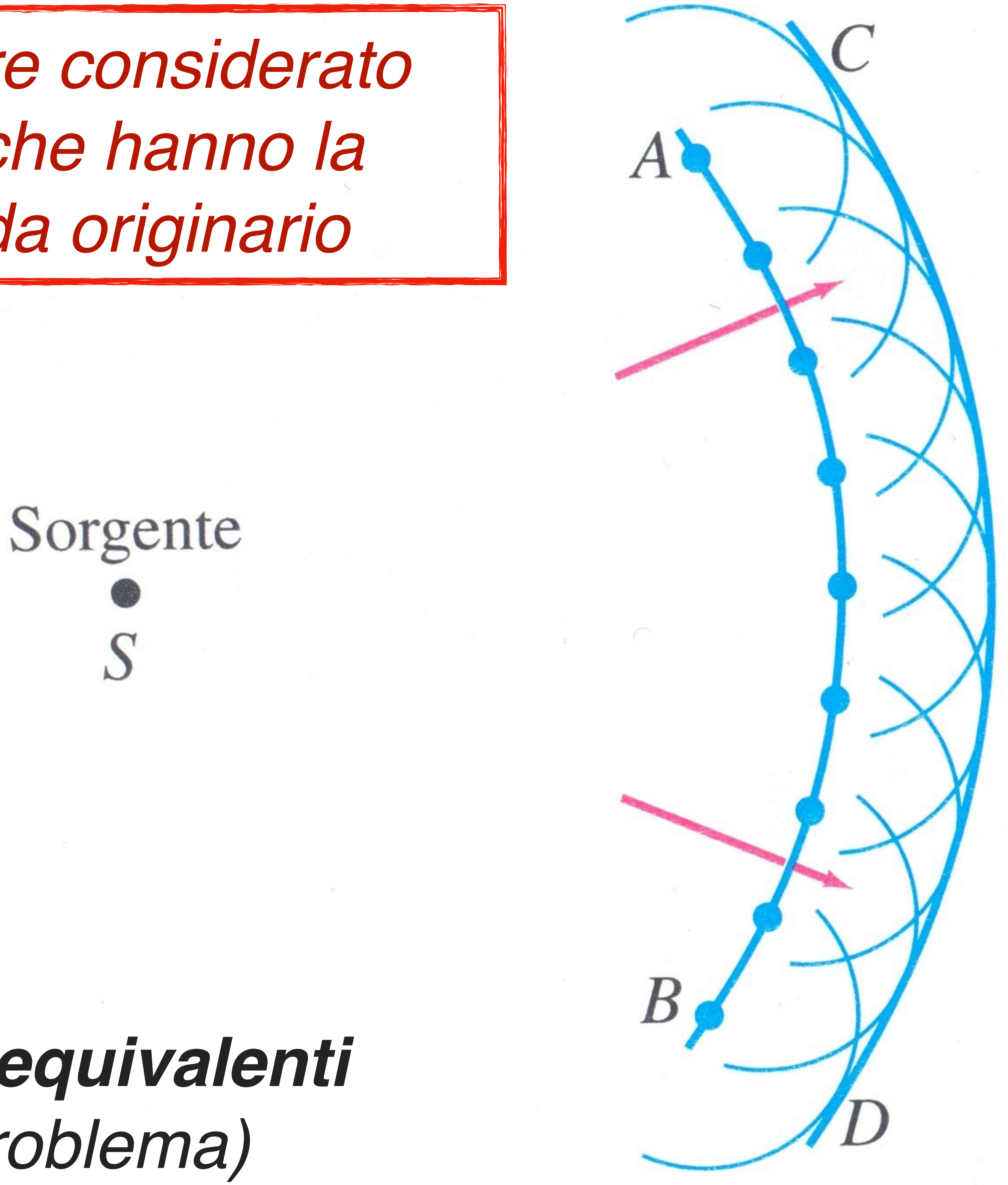
Principio di Huygens

Introdotto per onde meccaniche ma alla base di tutte le onde

Ciascun punto di un fronte d'onda può essere considerato sorgente di onde secondarie emisferiche, che hanno la stessa direzione e velocità del fronte d'onda originario

Descrizione geometrica: *il nuovo fronte d'onda è definito dalla tangente alle onde secondarie (CD)*

Descrizione fisica: *ciascun punto di AB appartiene a un insieme di onde coerenti e in fase che generano interferenza costruttiva alla posizione del nuovo fronte CD*

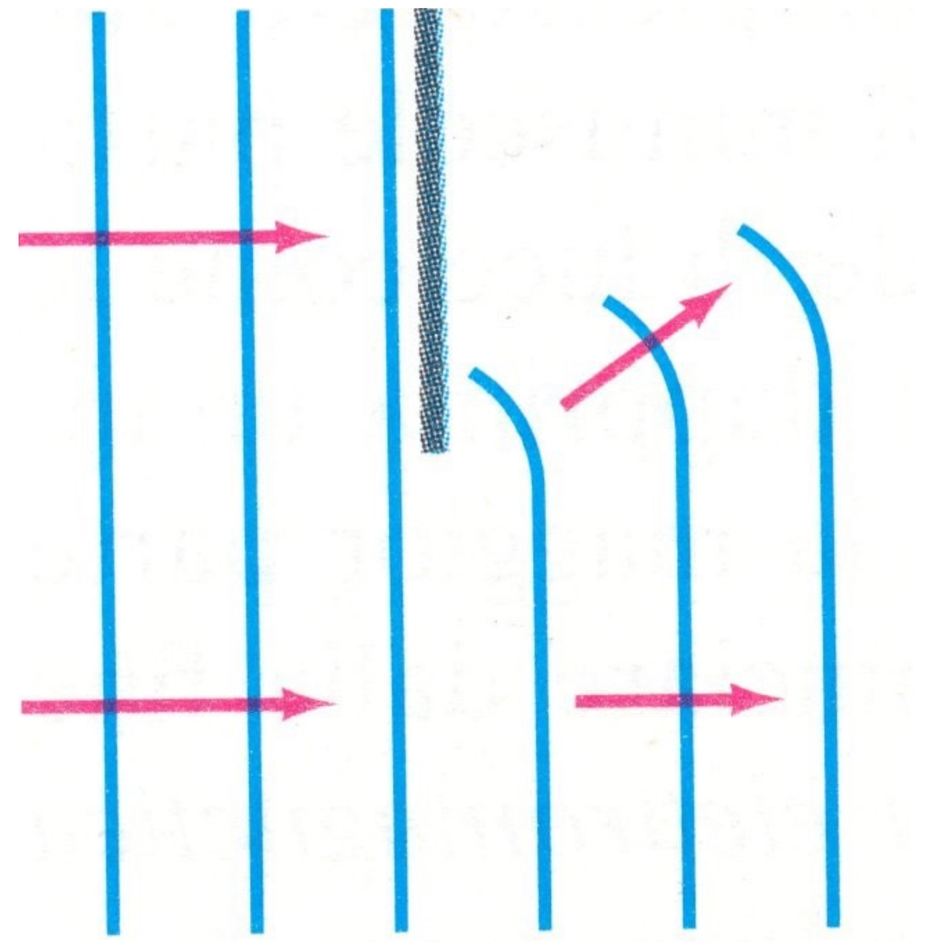


Le descrizioni geometrica / fisica sono equivalenti
(quindi intercambiabili a seconda del problema)

Diffrazione delle onde

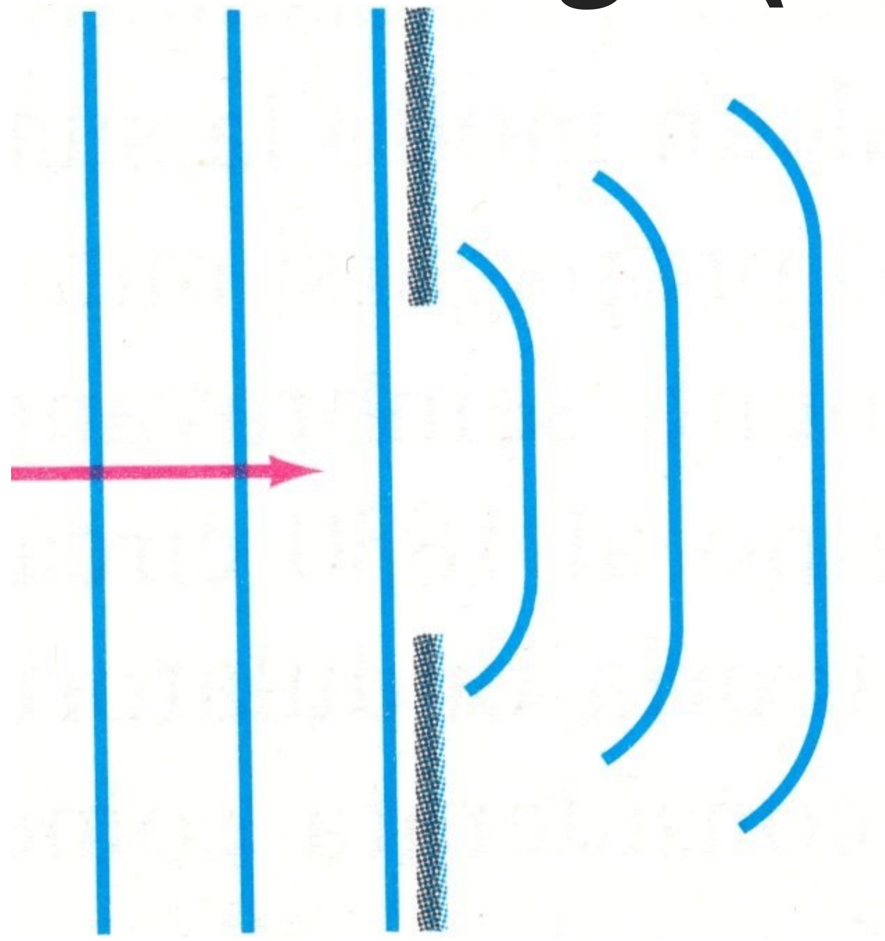
Conseguenza del principio di Huygens: fronte d’onda in presenza di un ostacolo

Ostacolo



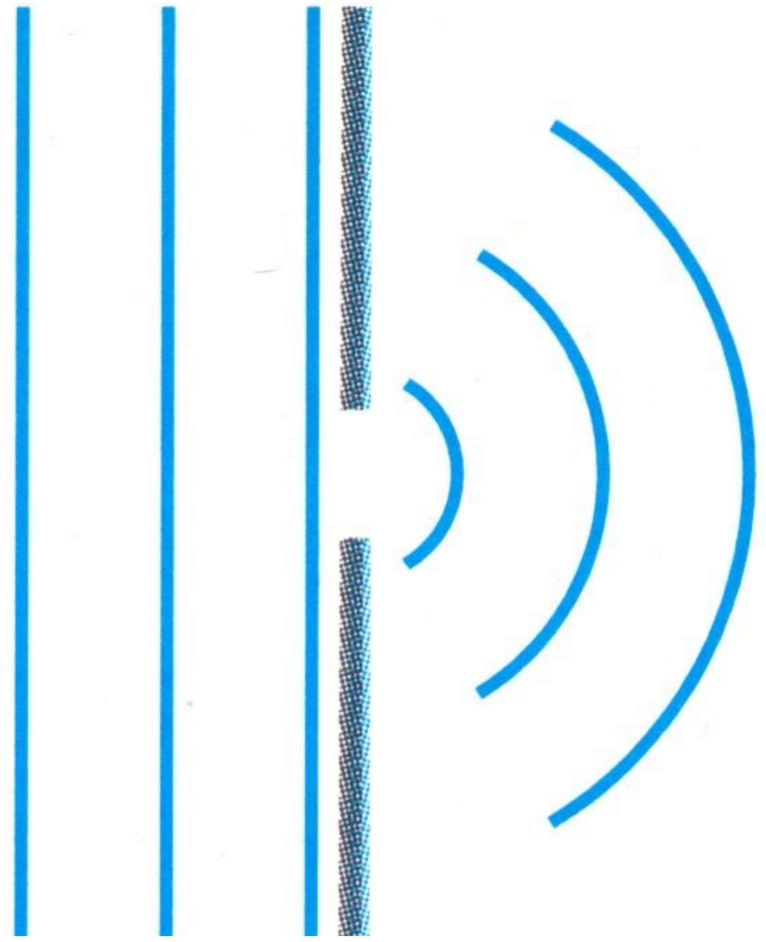
Fronte d’onda non ostruito è piano; l’ultimo punto del fronte crea un piccolo “effetto al bordo”

fenditura larga ($>\lambda$)



Effetti al bordo da entrambi i lati, tanto più importanti quanto stretta è la fenditura

fenditura stretta ($\sim\lambda$)



Un unico punto del fronte incidente riesce a passare: onda piana si trasforma in sferica

Principio di **Huygens** (diffrazione) e principio di **Malus** (energia trasportata solo lungo il raggio dell’onda) usati nella **costruzione dei porti**