Fisica per applicazioni di realtà virtuale

Anno Accademico 2022-23

Prof. Matteo Brogi
Dipartimento di Fisica, stanza B3, nuovo edificio

Lezione 10
Meccanica dei sistemi: moti di rotazione (parte 1)

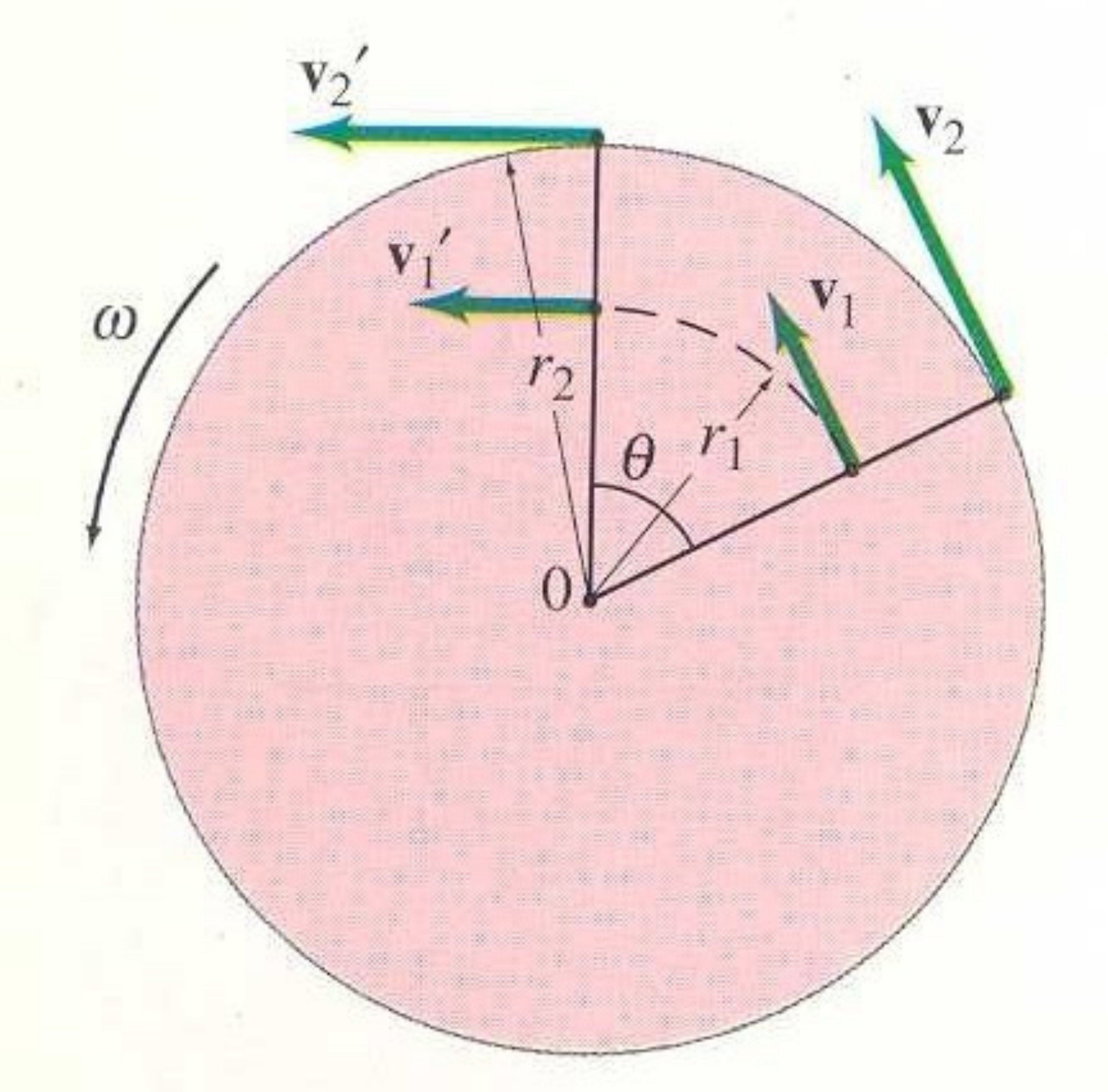
Sommario della lezione

Lezione 9: moto del CM descrive bene i moti di traslazione

Per descrivere le rotazioni di un corpo esteso servono altre leggi

- Moto rotatorio e di rotolamento
- Momento torcente
- Leggi che descrivono le rotazioni
- Momento d'inerzia
- Energia cinetica rotazionale
- Lavoro e potenza del momento torcente
- Momento angolare
- Statica ed equilibrio
- Elasticità e deformazione (cenni)
- Applicazioni architettoniche e al corpo umano

Introduzione ai moti di rotazione



Corpo rigido: *ogni elemento ruota con la stessa velocità angolare ω*

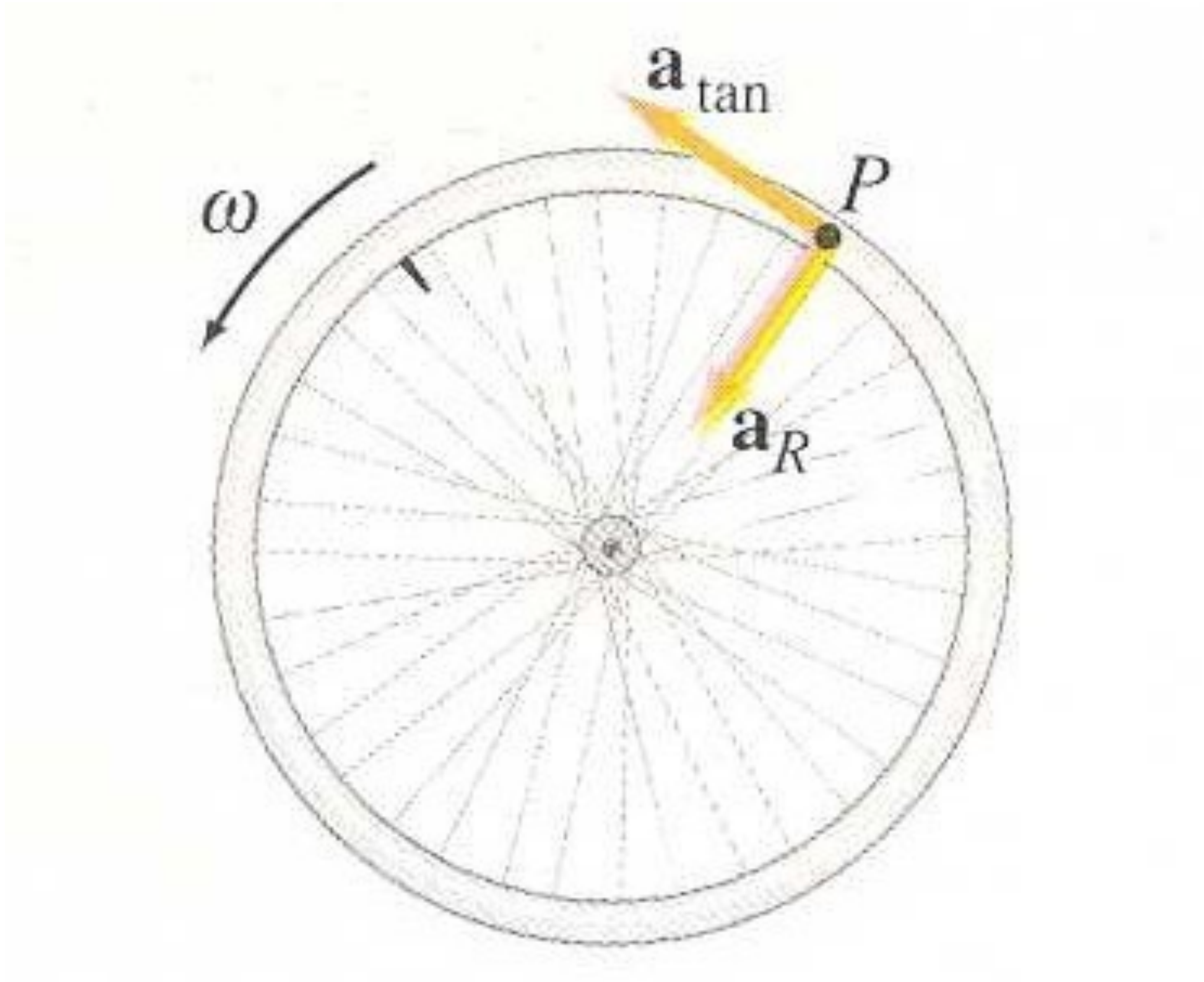
*Esiste inoltre un **asse di rotazione** (perpendicolare al foglio, passante per O)*

*Abbiamo già introdotto la distinzione fra velocità **angolare ω** (costante) velocità **tangenziale v** (= ωr) nel moto circolare uniforme*

*Abbiamo già visto l'**accelerazione** radiale per un moto circolare uniforme*

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Accelerazione totale in un moto circolare vario



Vediamo cosa accade se ω variabile
Il modulo di v cambia ⇒ accelerazione tangenziale

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\ddot{\theta}$$

La derivata temporale si indica anche con un punto sopra la variabile

Accelerazione totale = somma (vettoriale) delle due componenti

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{a}_T = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r + r\ddot{\theta}\,\hat{u}_\theta$$

Versore radiale (verso l'esterno)

Versore angolare (segue l'incremento di θ)

Cinematica del moto traslatorio versus rotatorio

Esiste una corrispondenza 1:1 tra le leggi cinematiche

$$\ddot{\theta} = \alpha$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad v = v_0 + at$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

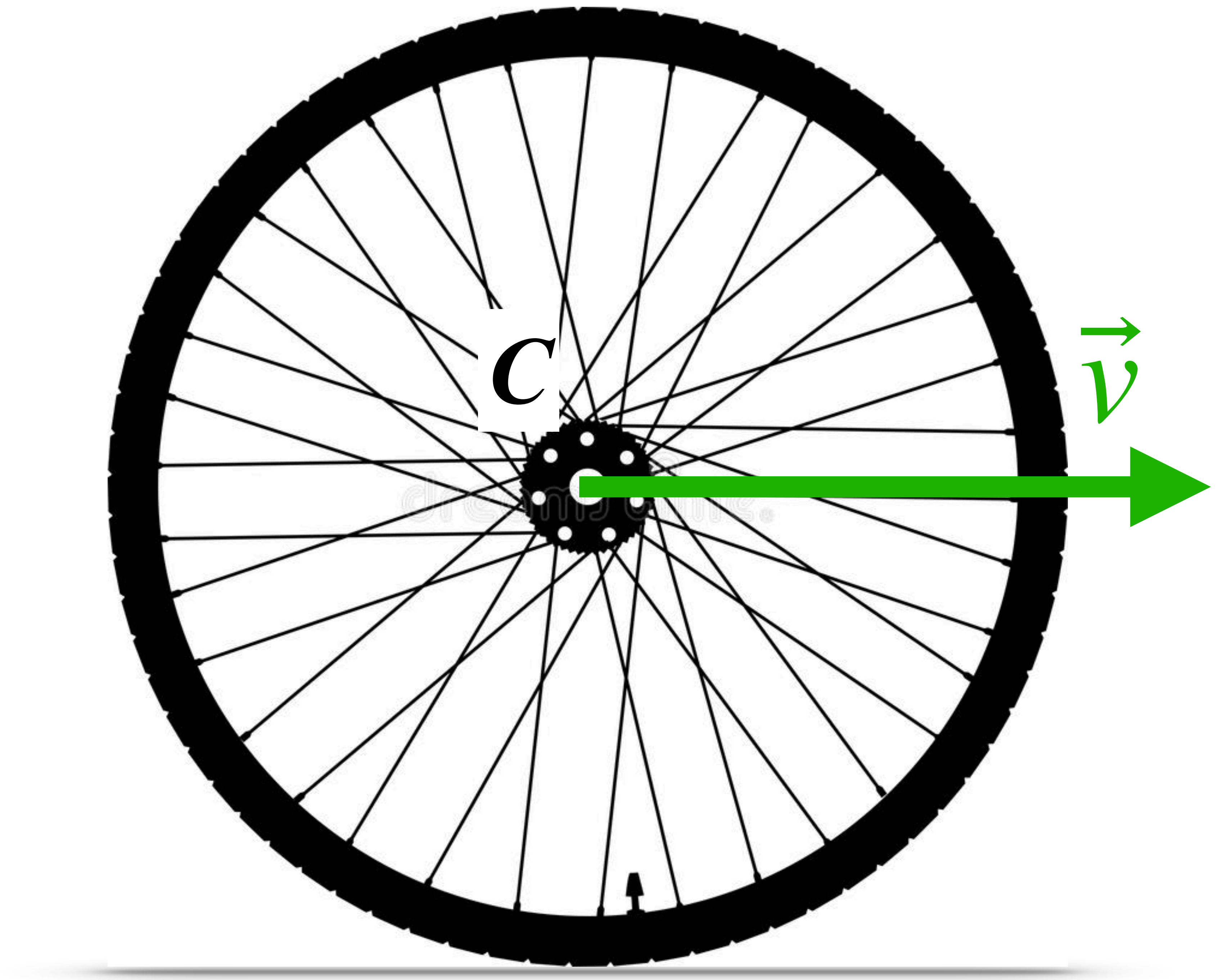
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad v^2 = v_0^2 + 2as$$

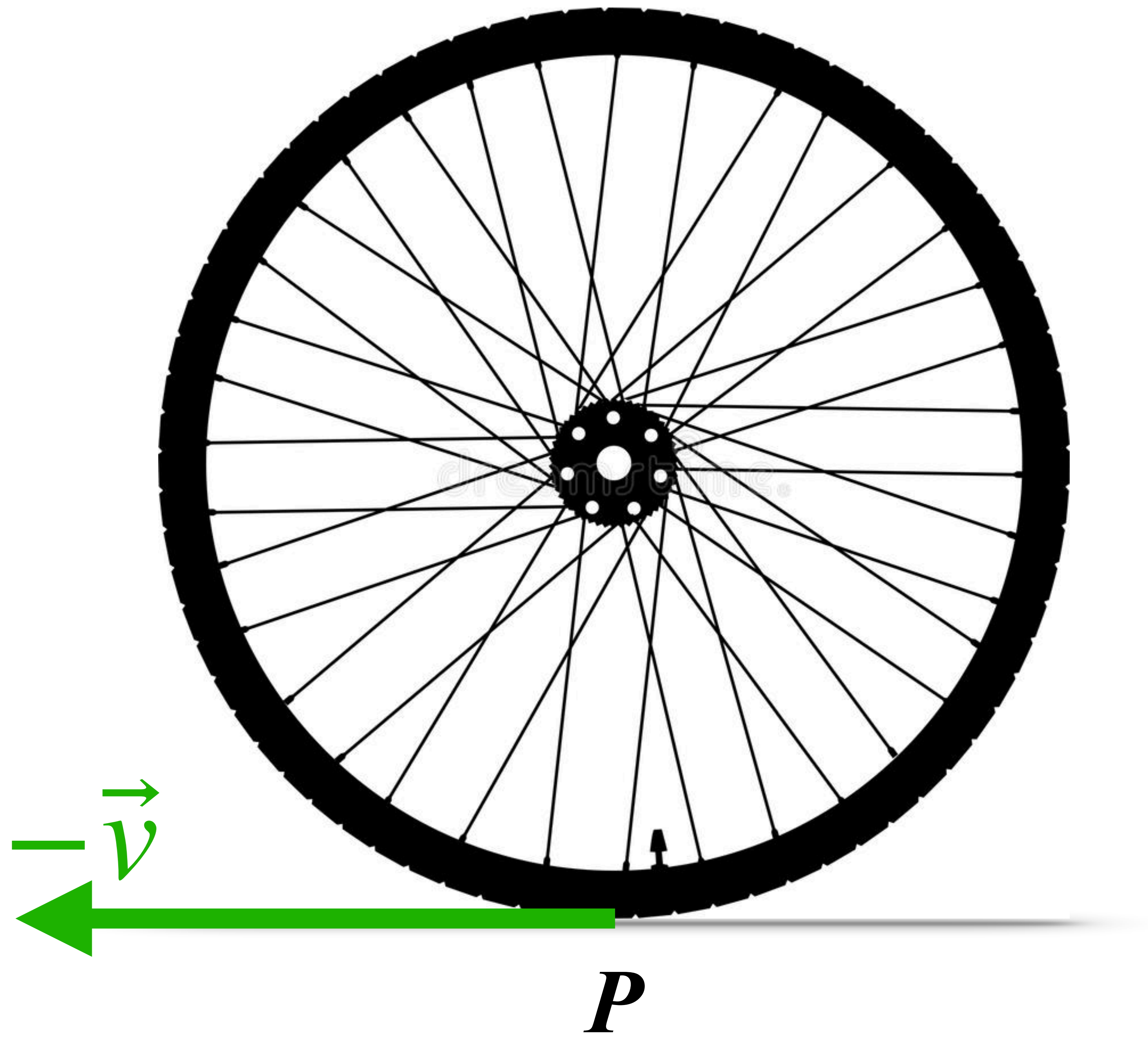
$$\bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2} \qquad \bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

L'angolo θ fa le veci della posizione,
ω della velocità, e α = dω/dt dell'accelerazione (costanti)

Moto di (puro) rotolamento

(senza traslazione / slittamento)



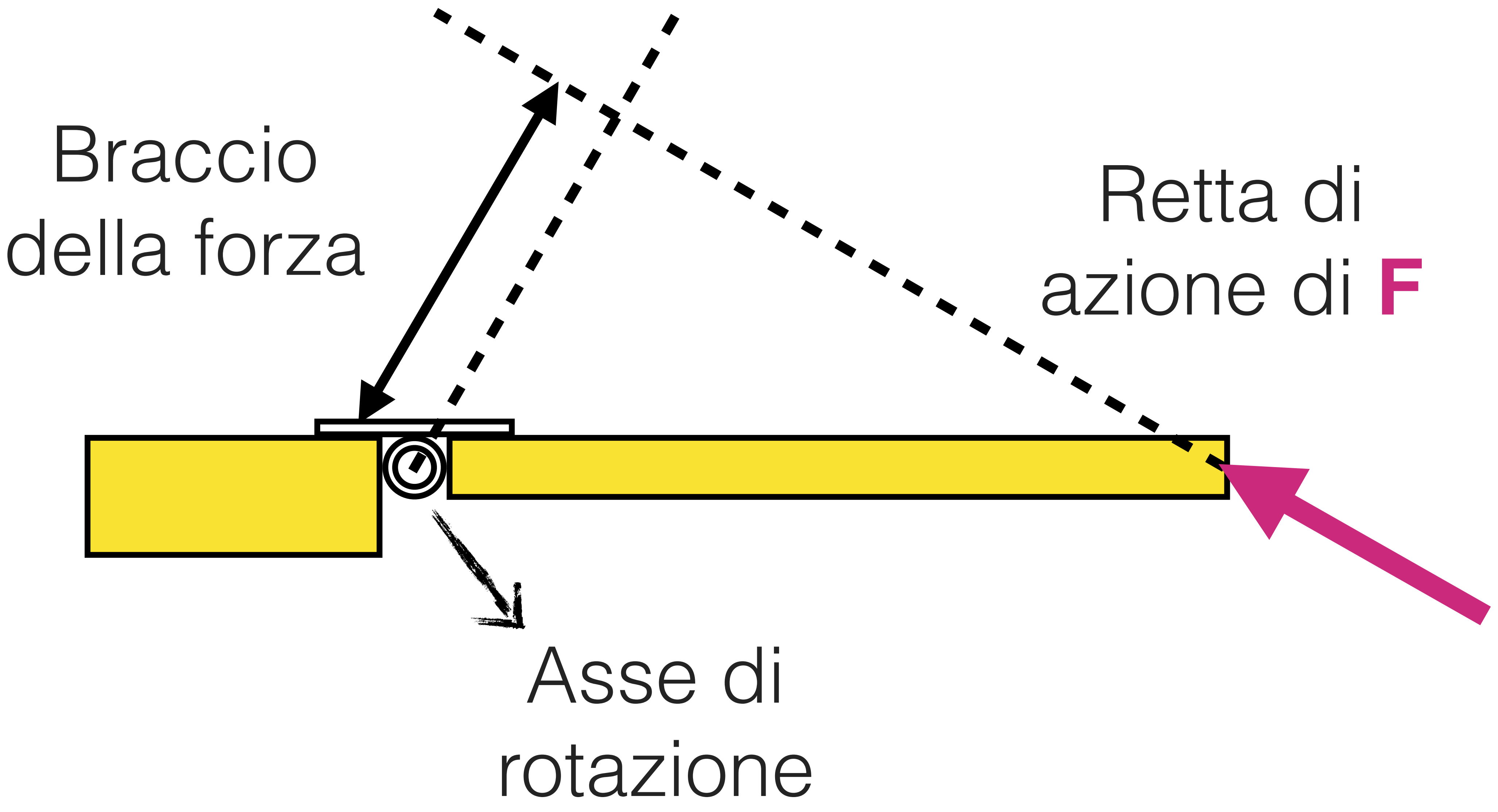


Sistema osservatore esterno
Centro C della ruota in moto
con velocità ***v***

Sistema in moto con la ruota
Punto di contatto P in moto
con velocità ***–v***

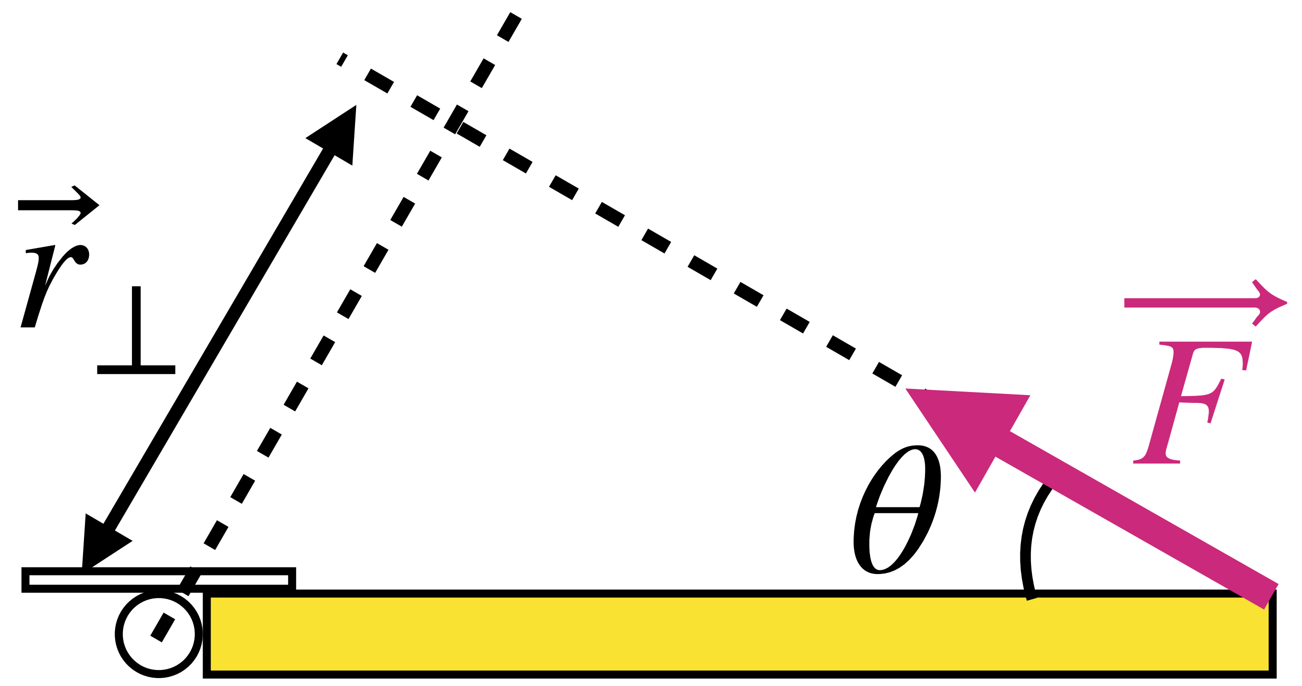
Con la condizione ulteriore v = ωr

Momento torcente (torque)

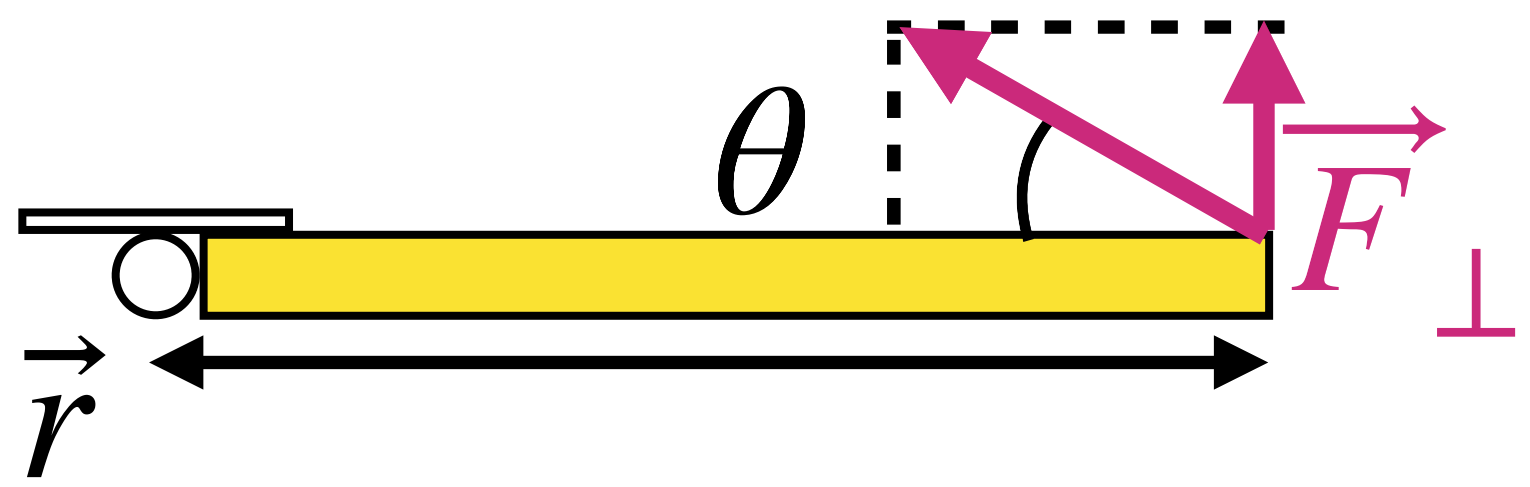


Braccio della forza

Distanza tra l'asse di rotazione e la retta di azione della forza ***F***



$$\tau = r_{\perp} F$$



$$\tau = r F_{\perp}$$

Momento torcente (τ)

Il prodotto vettoriale tra il braccio e la forza (in questo ordine)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\tau = rF \sin\theta$$

Esercizi sul moto di rotolamento

Esercizio 7.01: Una bicicletta rallenta uniformemente da v_0= 8.4 m/s fino a fermarsi, coprendo una distanza di 115 m. Ogni ruota ha un diametro di 68 cm incluso il copertone. Determinare:

a) la velocità angolare della ruota all'istante iniziale;

b) il numero totale di rivoluzioni che ciascuna ruota compie prima di fermarsi;

c) l'accelerazione angolare della ruota;

d) il tempo che impiega a fermarsi.

Esercizio 7.02: Il bicipite esercita una forza verticale di 700 N sull'avambraccio. Si calcoli il momento torcente rispetto all'asse passante per il gomito, assumendo che il muscolo sia attaccato a 5 cm dall'articolazione, nei casi seguenti:

a) l'avambraccio e il braccio sono posti ad angolo retto;

b) l'avambraccio è abbassato di 30° rispetto alla direzione orizzontale.

Esercizio 7.03: Due ruote cilindriche di raggi 30 e 50 cm sono connesse tramite un asse che passa per il loro centro. Calcolare il momento torcente risultante dovuto a due forze di 50 N, una agente verso il basso tangenzialmente alla ruota minore, e l'altra applicata al punto più alto della ruota maggiore, e formante un angolo di 30° rispetto alla direzione orizzontale.

Ruolo del momento torcente nella dinamica del sistema

Moto traslatorio

La forza è la causa dell'accelerazione (lineare) e quindi la causa di un cambiamento nel moto traslazionale dell'oggetto

Bilanciando le forze si evita un'accelerazione lineare (cioè un cambiamento del moto di traslazione)

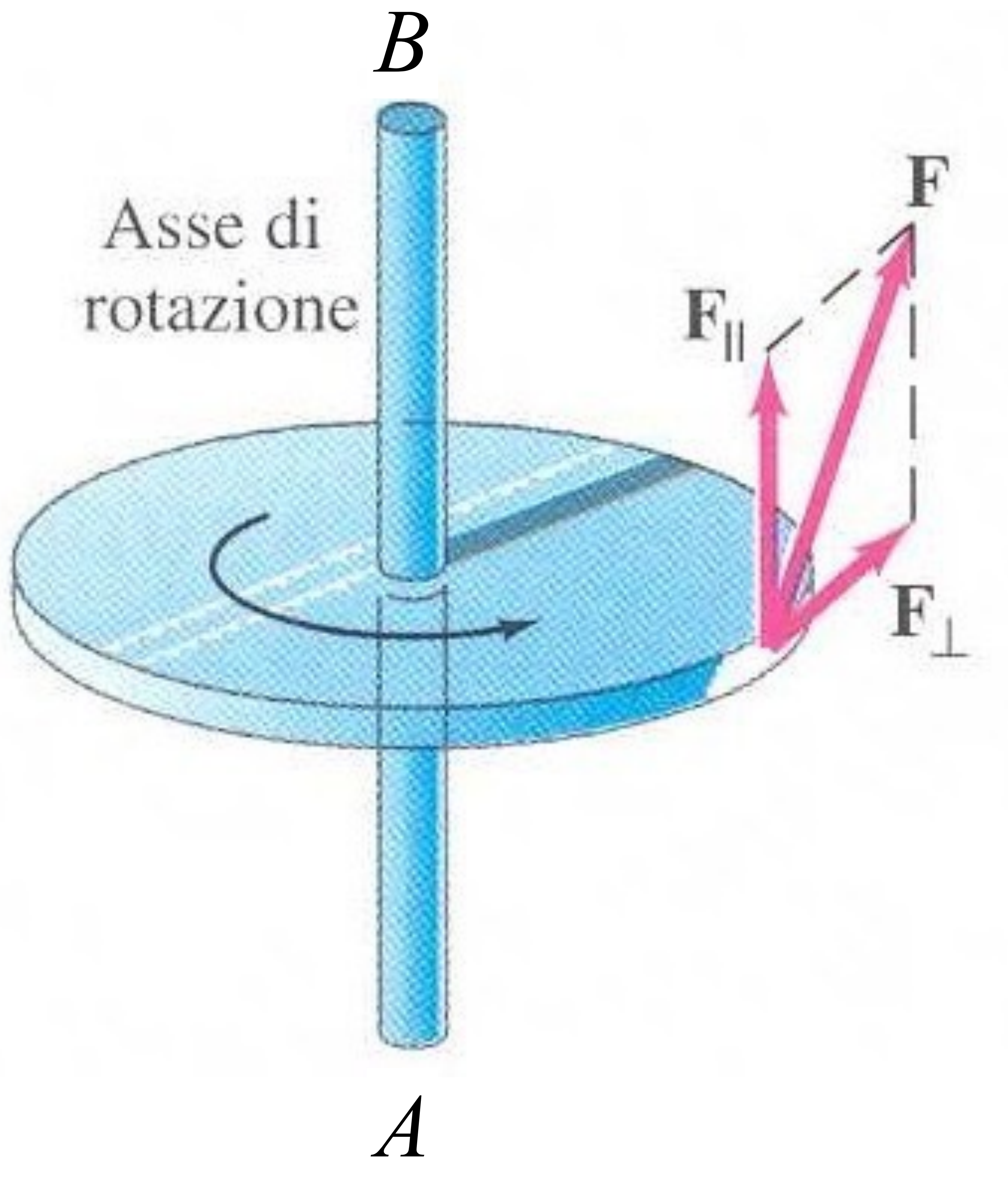
Moto rotatorio

Il momento della forza è la causa dell'accelerazione angolare e quindi la causa di un cambiamento nel moto rotazionale

Per evitare un cambio della rotazione occorre "bilanciare" i momenti delle forze

Momento torcente e reazioni vincolari

I vincoli possono impedire sia **traslazioni** che **rotazioni**



Esempio in figura: *gli estremi A e B sono "bloccati" da vincoli (non disegnati in questo caso)*

⇒ L'asse di rotazione non può traslare

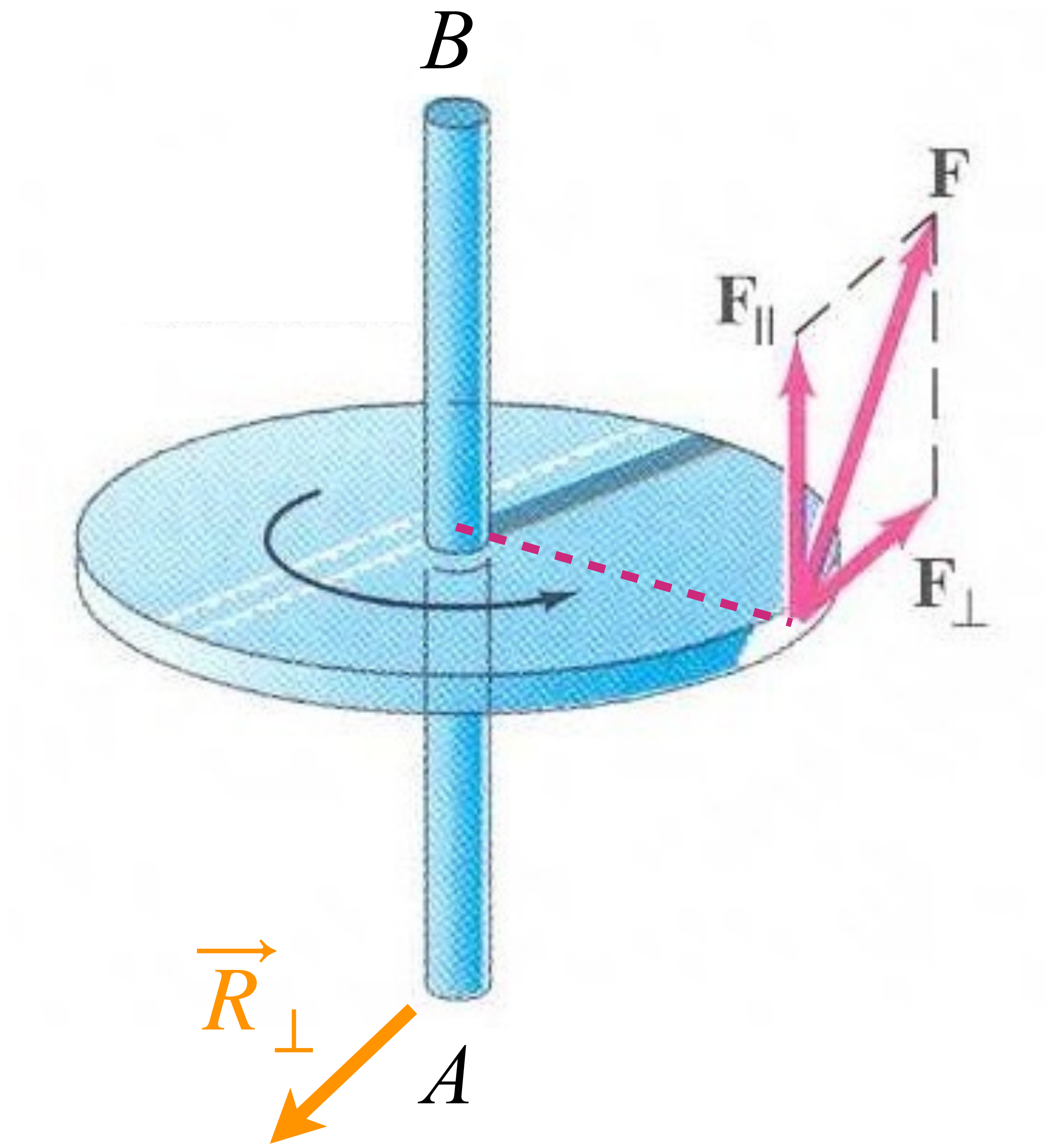
⇒ L'asse di rotazione non può inclinarsi

L'unico moto consentito è una rotazione del volano attorno all'asse
⇒ momento della componente $F_{\perp}$

Bilanciamo tutte le componenti $F_{\perp}$, $F_{\parallel}$ e i loro momenti

Momento torcente e reazioni vincolari

Bilanciamo tutte le componenti delle forze e i loro momenti



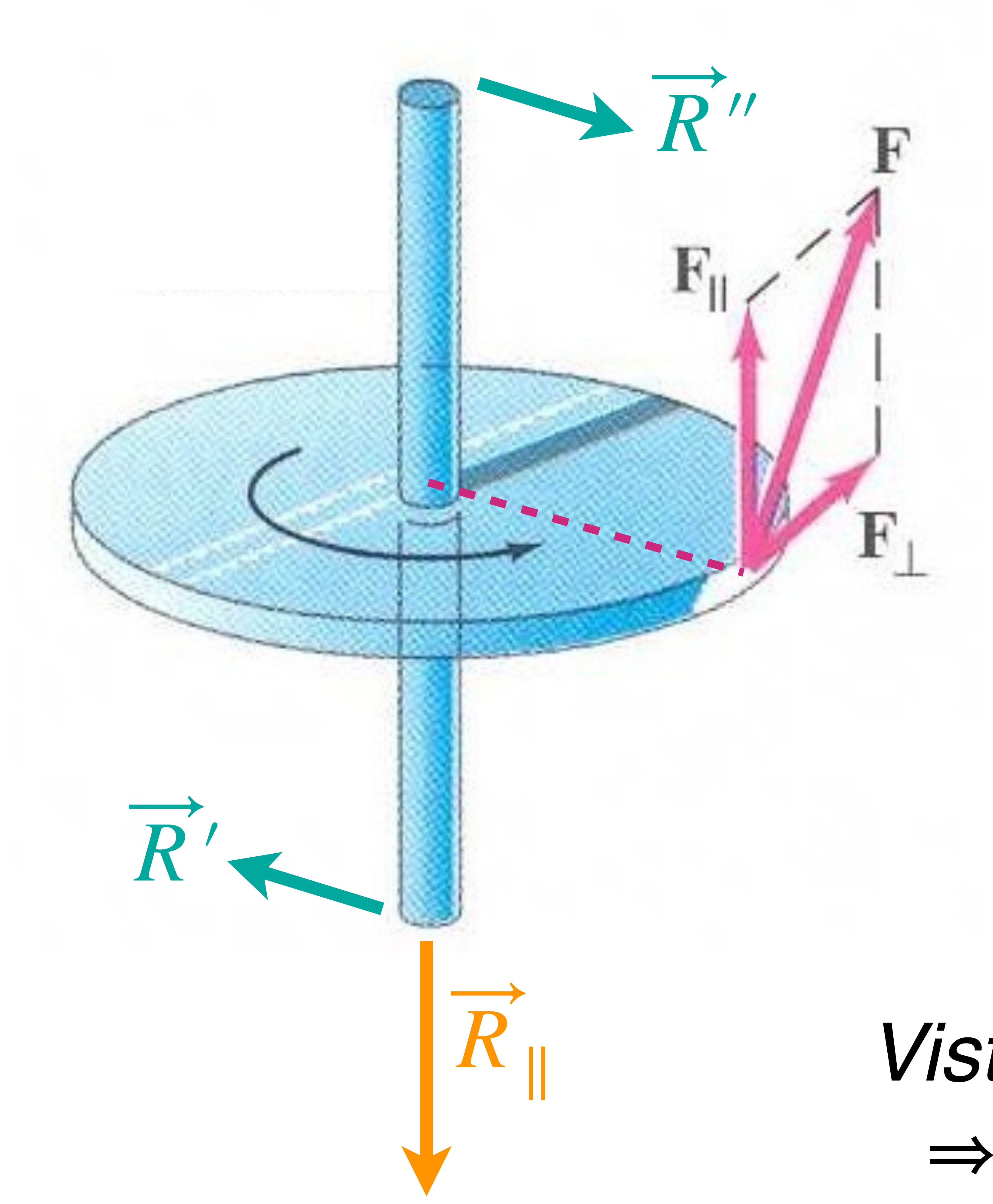
Componente $F_{\perp}$

*Il vincolo **$R_{\perp}$** annulla la forza perpendicolare all'asse (che non può traslare in orizzontale)*

*Il vincolo **$R_{\perp}$** non annulla il momento della componente **$F_{\perp}$** perché il vincolo è applicato all'asse (quindi con braccio nullo)*

Momento torcente e reazioni vincolari

Bilanciamo tutte le componenti delle forze e i loro momenti



Componente $F_{||}$

*Il vincolo **$R_{||}$** annulla la forza parallela all'asse (che non può traslare in verticale)*

$R_{||}$ *non annulla il momento della componente **$F_{||}$** Questo è un problema perché l'asse del volano non può oscillare!*

*Visto che **$F_{||}$ è gia bilanciata**, una sola **R** non basta ⇒ una **coppia** di forze **R'** e **R"** uguali e contrarie*

(modulo nullo ma momento torcente ≠ 0)

La II legge di Newton per i moti rotatori

Usiamo l'analogia tra **forza** (causa dell'accelerazione lineare) e **momento** della forza (causa dell'accelerazione angolare)

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Accelerazione angolare

Risultante dei momenti torcenti

Momento d'inerzia (prossima slide)

L'accelerazione angolare è direttamente proporzionale alla risultante dei momenti torcenti applicati

*In questo caso **ω** e **α** sono vettori (regola della mano destra: pugno stringe nella direzione della rotazione, pollice identifica verso di **ω**)*

Il momento d'inerzia

La resistenza di un corpo al cambiamento del suo moto rotazionale
(cfr. con massa inerziale nel caso delle traslazioni)

Caso discreto

$$I = \sum_i m_i d_i^2$$

Massa del punto i

Distanza del punto i dall'asse di rotazione

Caso continuo

$$I = \int_M d^2\, dm = \int_V \rho d^2 dV$$

Elemento di massa

densità

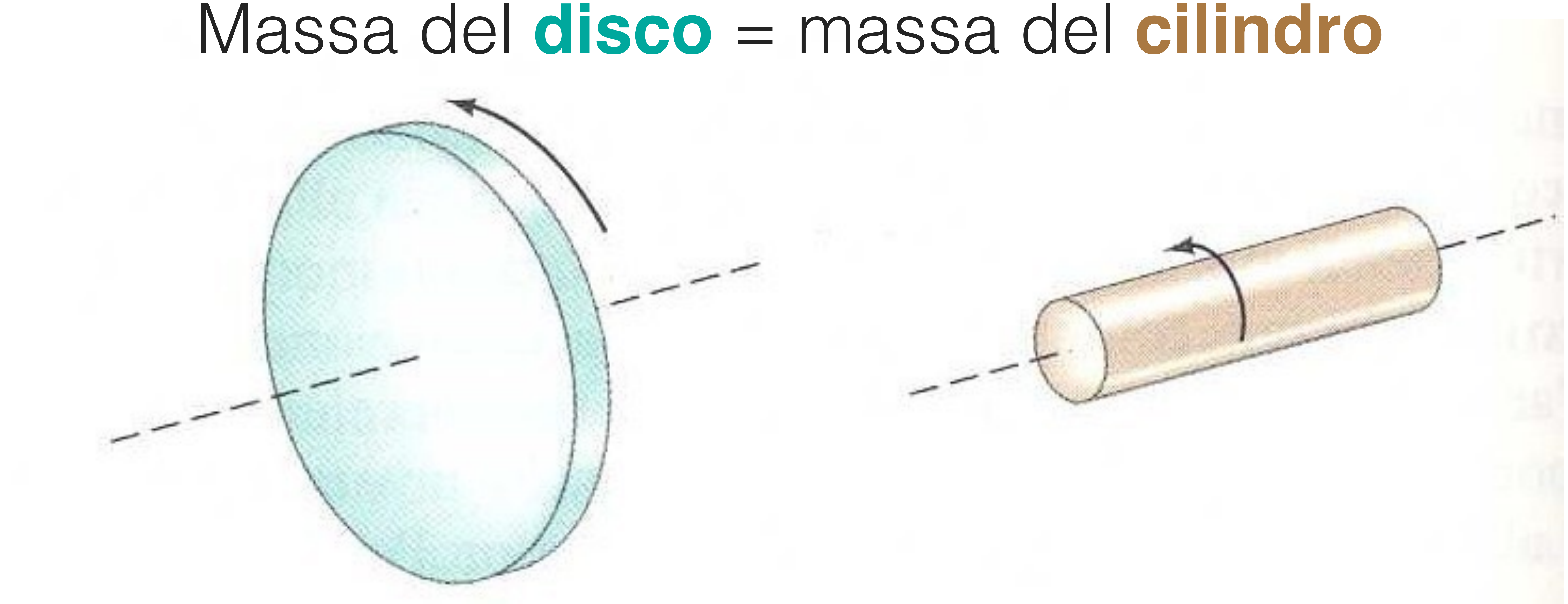
Elemento di volume

Il momento d'inerzia dipende (in un caso generale) dall'asse di rotazione scelto

Il momento d'inerzia: riflessioni iniziali

Nel moto traslatorio, ugual massa significa uguale accelerazione lineare

Massa del **disco** = massa del **cilindro**



Il momento d'inerzia *I* dipende fortemente dalla distanza dall'asse

Pur avendo = massa, il disco ha momento d'inerzia maggiore

Nel moto rotatorio, l'accelerazione angolare dipende dalla **distribuzione** della massa rispetto all'asse di rotazione