Fisica per applicazioni di realtà virtuale

Anno Accademico 2022-23

Prof. Matteo Brogi
Dipartimento di Fisica, stanza B3, nuovo edificio

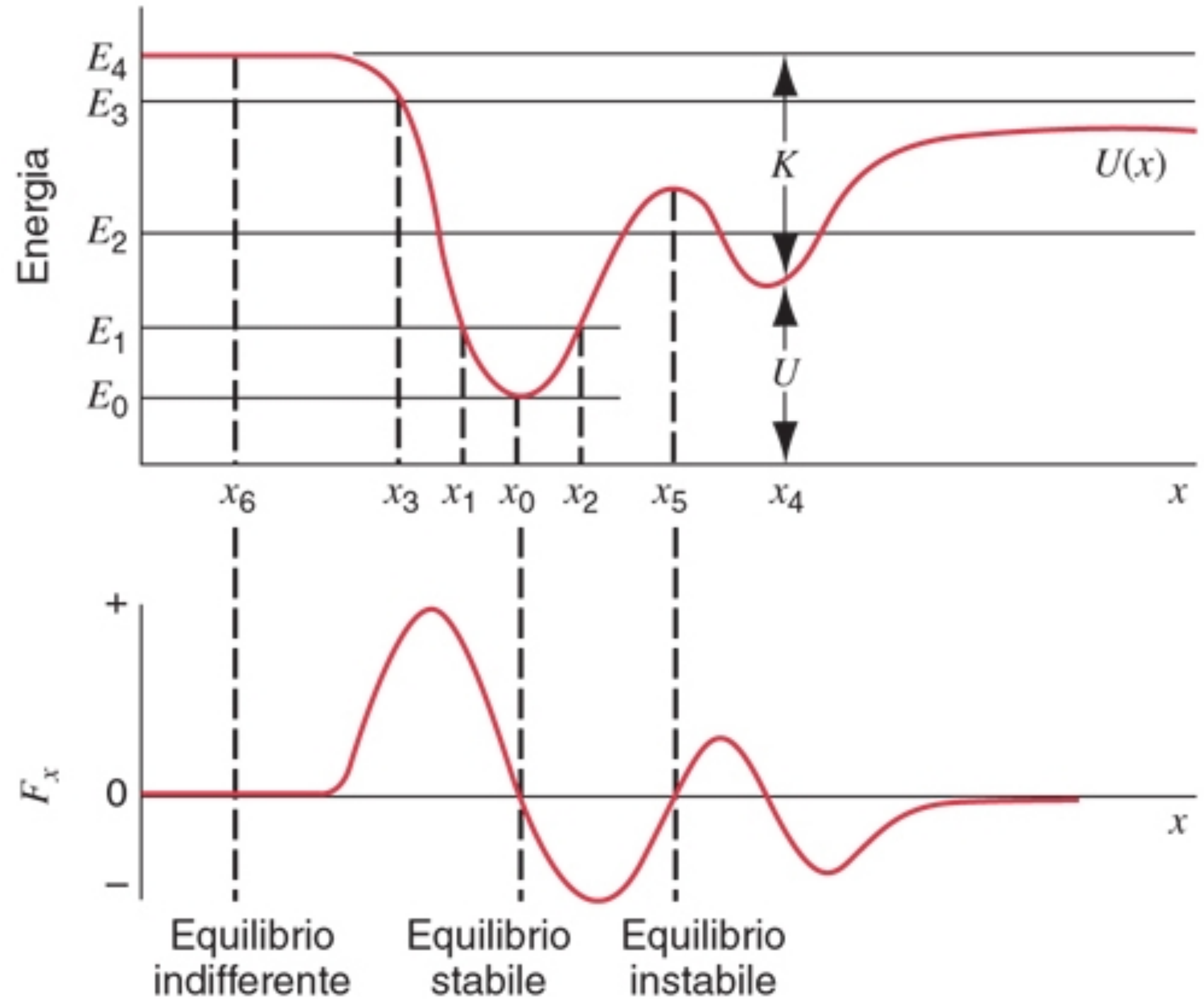
Lezione 8

Oscillatore armonico e pendolo

Il potenziale e le condizioni di equilibrio

In una condizione di equilibrio: $\sum F = 0$

- Equilibrio **stabile:** minimo di U, una perturbazione genera **f. di richiamo**
- Equilibrio **instabile:** massimo di U, una perturbazione genera **f. repulsiva**
- Equilibrio **indifferente:** U costante, una perturbazione **non genera forze**



E_4 è l'energia meccanica totale, tutta U al punto x_6

Al decrescere di U dovrà crescere K (conservazione E meccanica)

La forza è l'inverso della pendenza del potenziale, come sappiamo da $F = -dU/dx$

Il potenziale elastico e l'equilibrio stabile

Una forza di "richiamo": riporta la particella verso il minimo del potenziale

Equilibrio

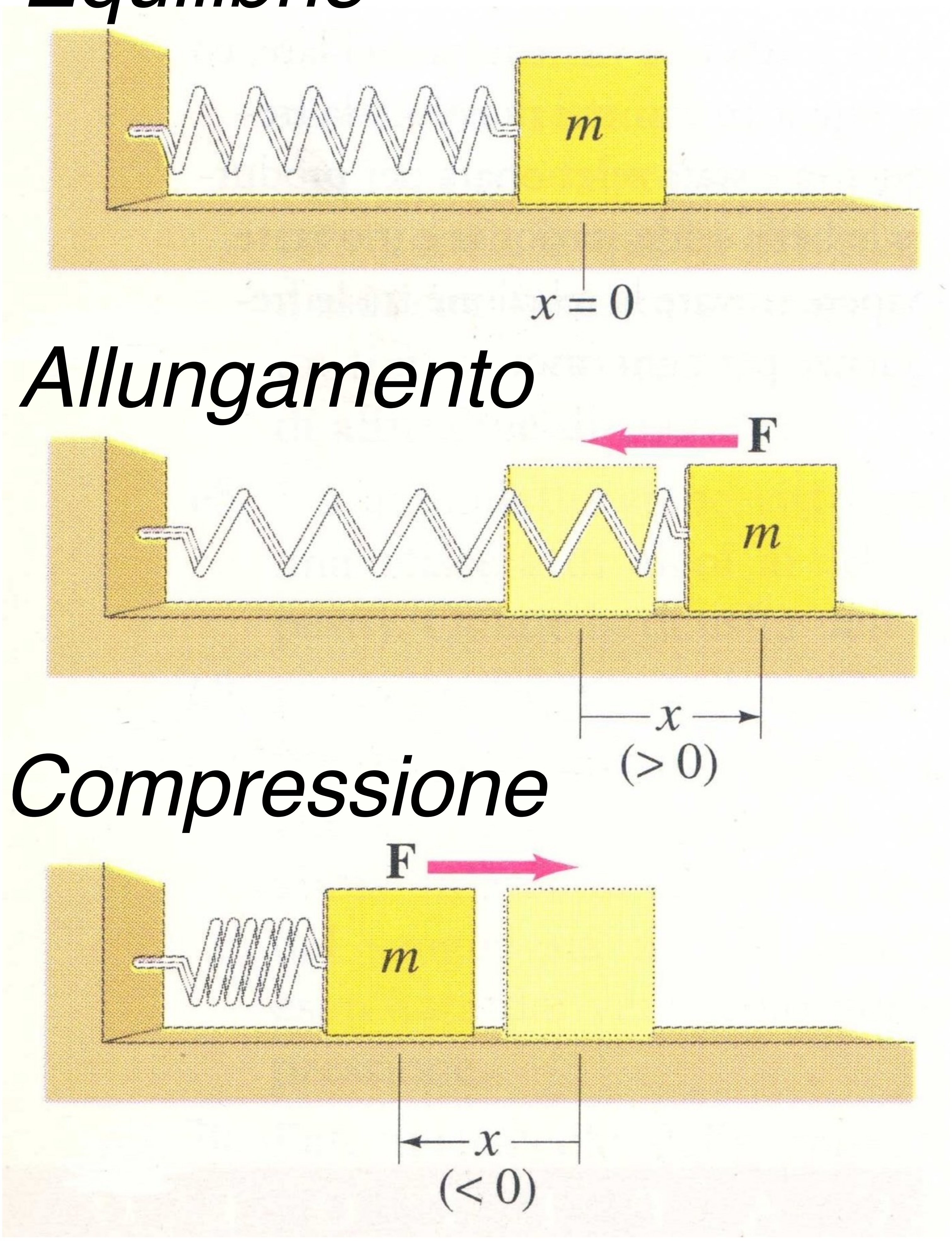
A

Allungamento

B

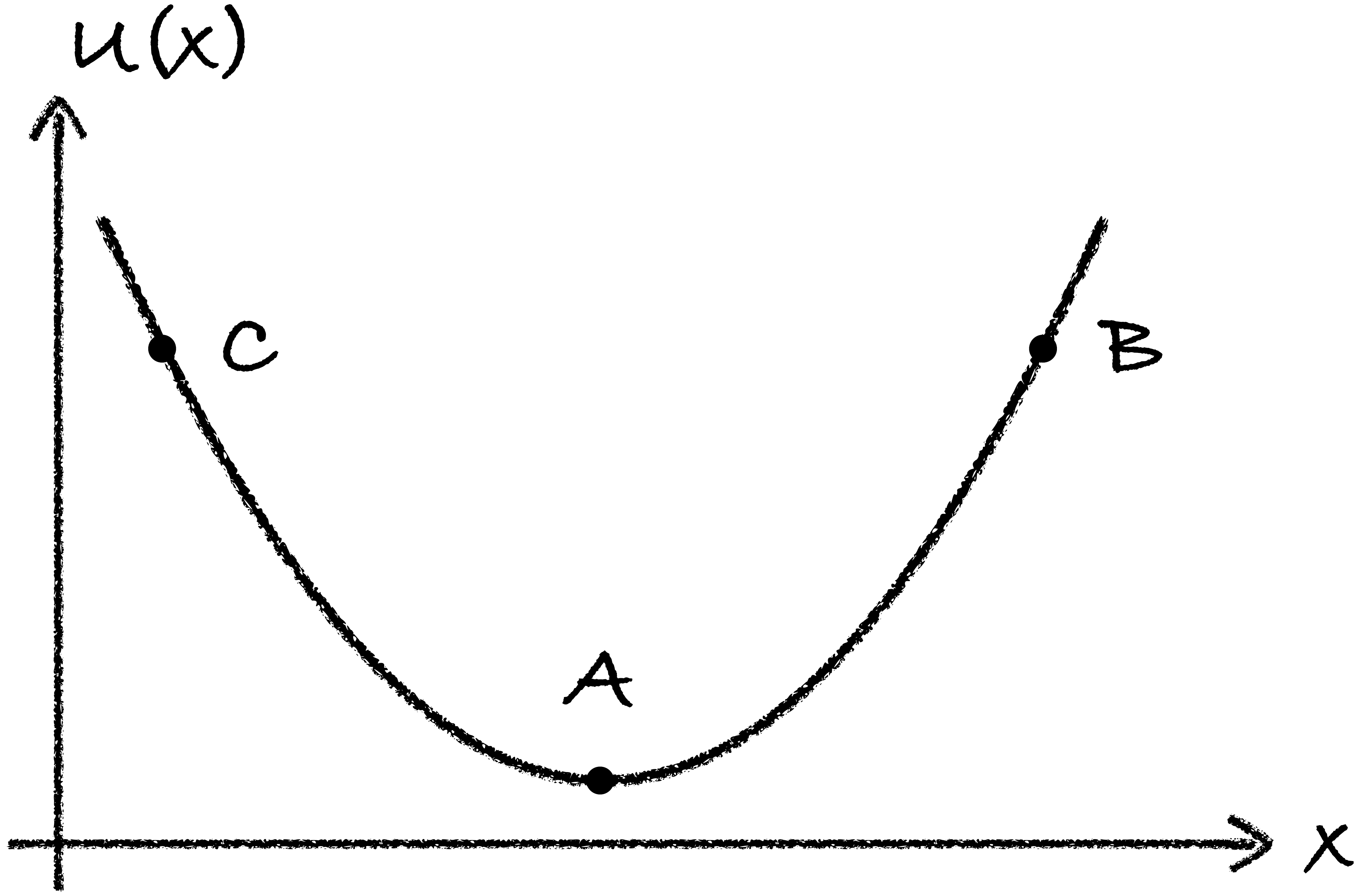
Compressione

C



$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Forma parabolica

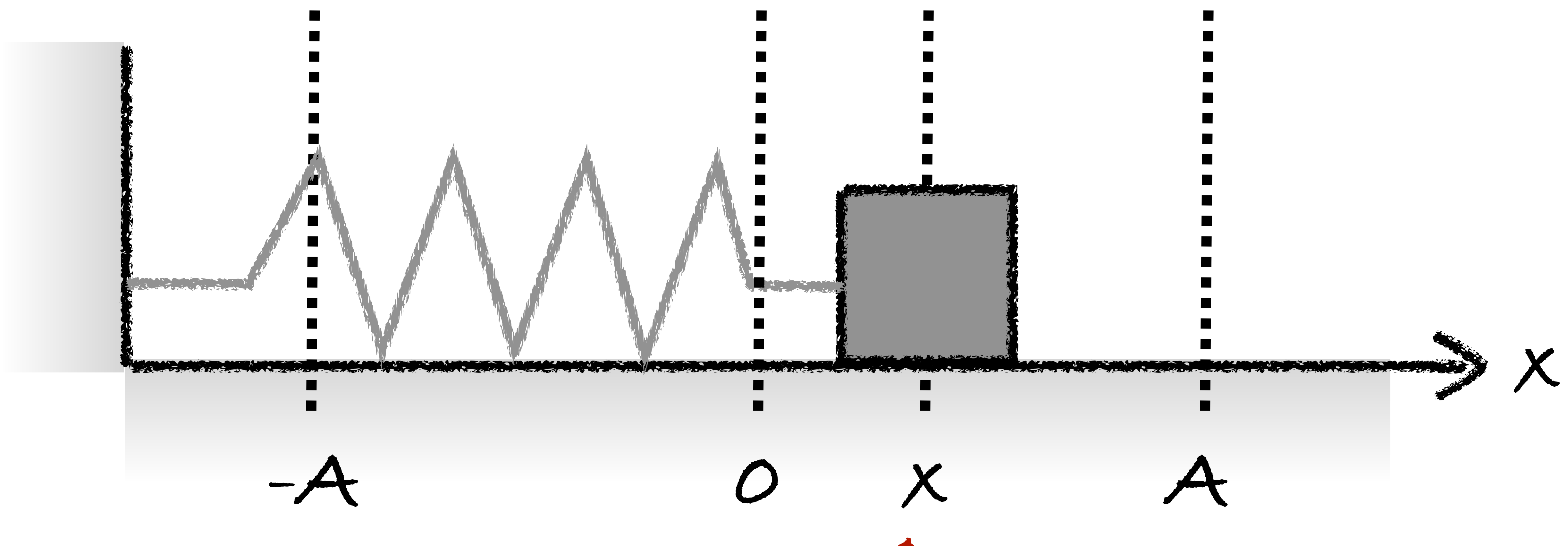


Assenza di attrito + perturbazione ⇒ oscillazione periodica tra B e C

Oscillatore armonico: le basi

Oscillatore armonico

*Sistema dove la legge di Hooke causa un **moto oscillatorio periodico***



ampiezza A
elongazione massima

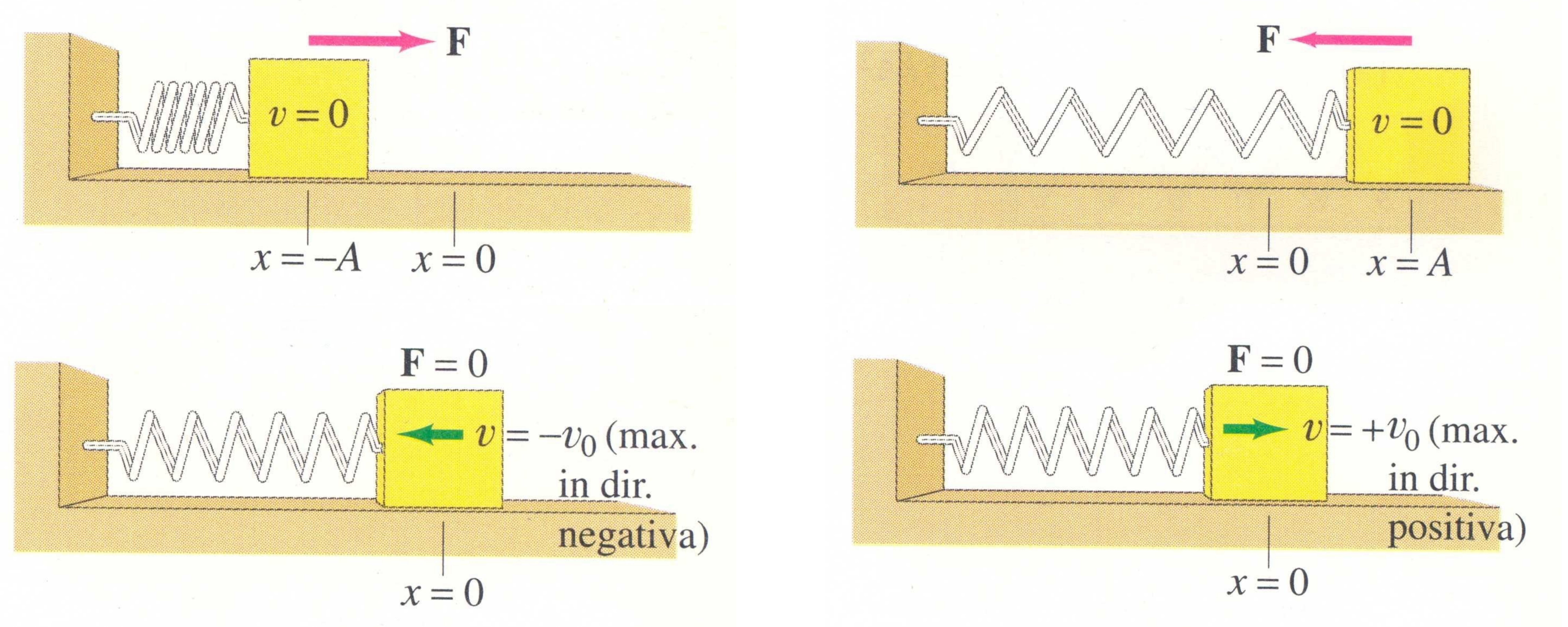
elongazione x
$-A < x < A$

periodo** e **frequenza
(intera oscillazione!)

Grandezze **cinematiche** (velocità, posizione) e **dinamiche** (forza)

Grandezze dell'oscillatore armonico

La **forza** (grandezza dinamica) sempre di richiamo, modulo massimo quando x=±A, nullo quando x=0.



La **velocità** (grandezza cinematica) sempre nulla a x=±A massima in modulo quando x=0

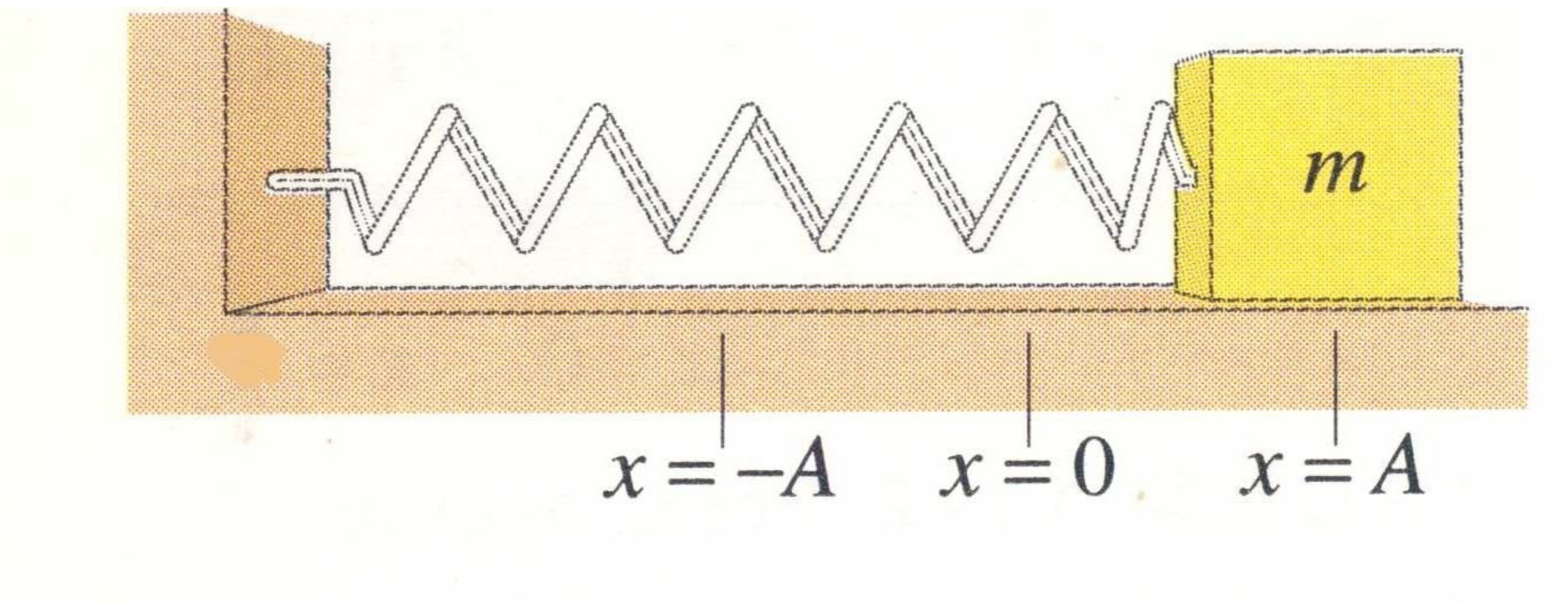
Modulo massimo 2 volte per oscillazione

Energia dell'oscillatore armonico

Forza elastica è conservativa: energia meccanica totale **conservata**

$$E_{\text{tot}} = K + U_{\text{el}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{costante}$$

(moto orizzontale: la F_N bilancia la F_{grav} ⇒ U_g=mgh=0 scegliendo h=0)



Scelta conveniente: *x=A*
(massima elongazione)
v=0; K=0

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA^2$$

L'energia meccanica di un O.A. è proporzionale al quadrato dell'ampiezza

Energia dell'oscillatore armonico e velocità

Velocità massima: *x=0 (punto di equilibrio)*

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad v_0^2 = \frac{k}{m}A^2 \qquad v_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

Massima in modulo, verso può essere positivo o negativo

Velocità generica *all'elongazione x*

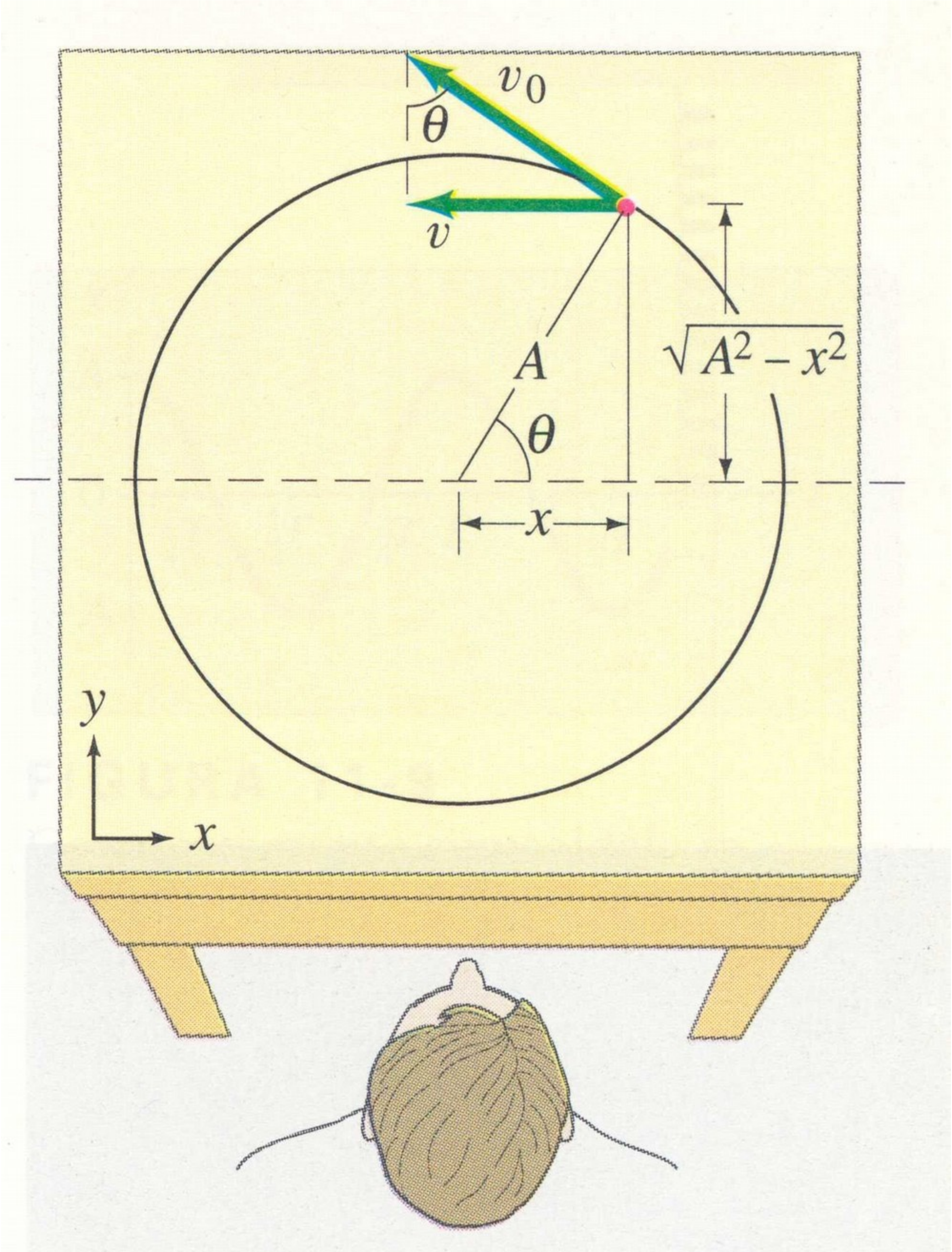
$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) = \frac{k}{m}A^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

$$v = \pm\, v_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

Moto armonico come proiezione del moto circolare

Concetto di base per derivare la legge oraria, velocità e accelerazione



θ: angolo rispetto asse x
A: raggio della traiettoria
***v_0:** velocità orbitale*

$$P = (x, \sqrt{A^2 - x^2})$$

*v: proiezione di **v_0** su asse x* = $v_0$sinθ
sinθ = √(*A*² – *x*²) / *A (cateto / ipotenusa)*

$$v = v_0\sqrt{\frac{A^2 - x^2}{A^2}} = v_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

*La stessa relazione del **moto armonico!***

Periodo del moto armonico

Usiamo l'analogia con la proiezione del moto circolare uniforme

$$T = \frac{2\pi A}{v_0}$$

Conservazione energia meccanica

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \frac{A}{v_0} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Periodo

$$f = 1/T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frequenza

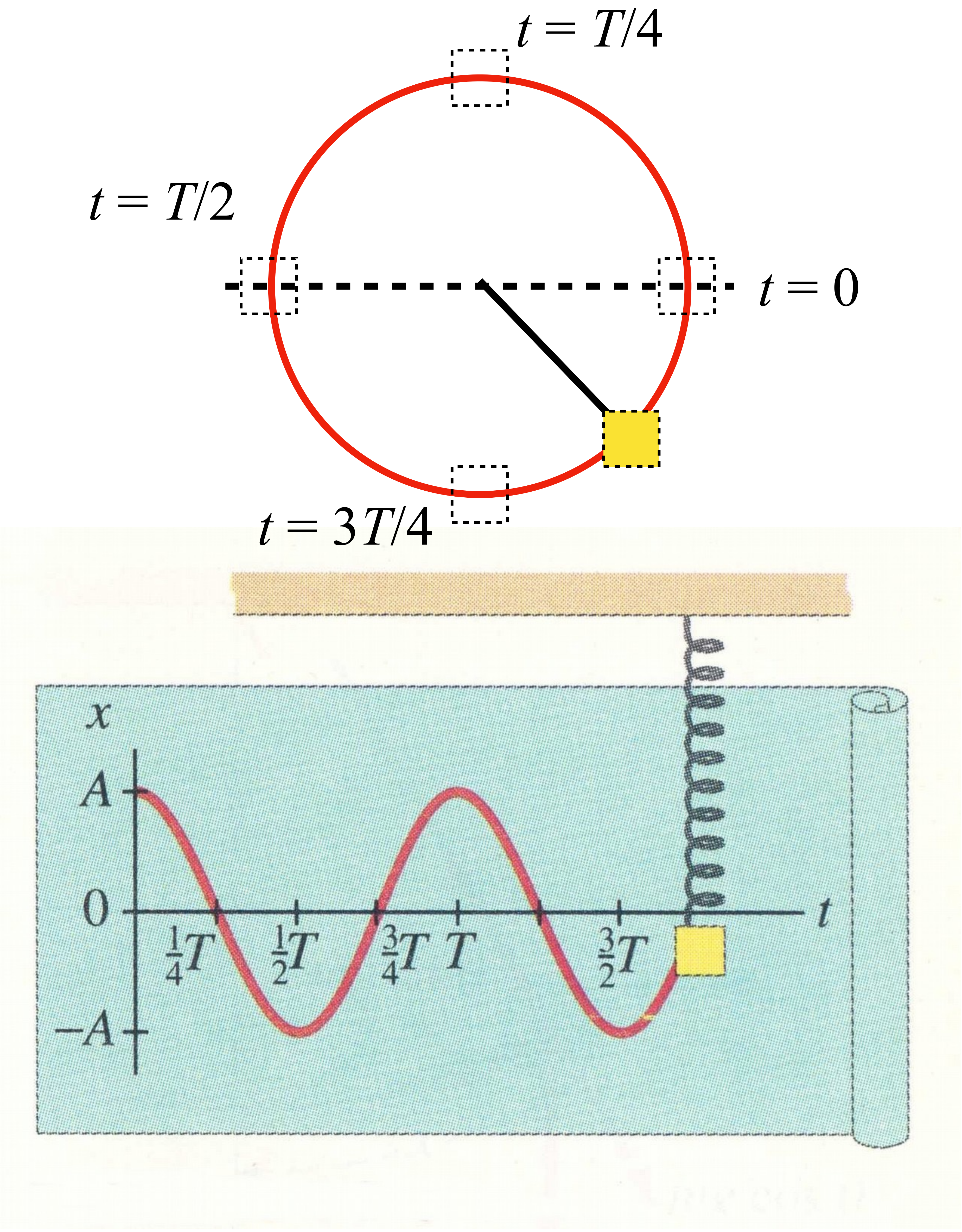
$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pulsazione

Il periodo di un oscillatore armonico non dipende dall'ampiezza

La legge oraria del moto armonico

Usiamo l'analogia con la proiezione del moto circolare uniforme



$$x(t) = x_0 \cos[\theta(t)] = A \cos \theta$$

$$\theta = 2\pi \frac{t}{T} = \omega t$$

Legge oraria del moto armonico:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \qquad \theta(t=0) = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \qquad \theta(t=0) = \phi$$

(forma per angolo iniziale generico)

Velocità e accelerazione del moto armonico

Derivate prime e seconde di funzioni trigonometriche: scambio seno-coseno

$$x(t) = A\cos(\omega t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$ ***posizione***

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\,\omega A\sin(\omega t) = -\,v_0\sin(\omega t)$$ ***velocità***

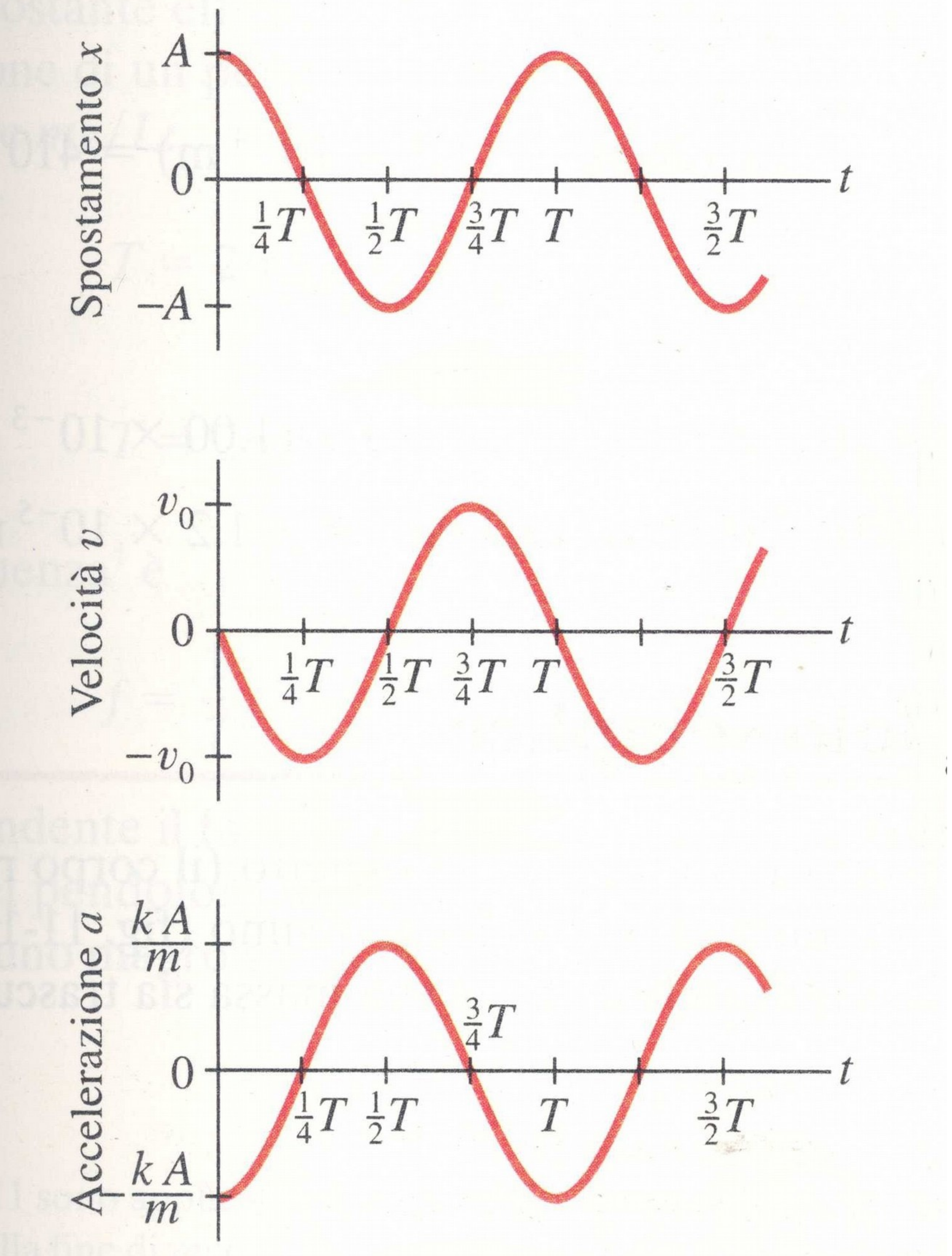
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\,\omega^2 A\cos(\omega t) = -\,\omega^2 x(t)$$ ***accelerazione***

Si verifica come da conservazione dell'energia che

$$v_0^2 = \omega^2 A^2 = \frac{k}{m}A^2$$

(usando definizione di pulsazione)

Velocità e accelerazione del moto armonico



Le variabili cinematiche e dinamiche derivate dalla legge oraria verificano la discussione iniziale basata sulla conservazione dell'energia meccanica

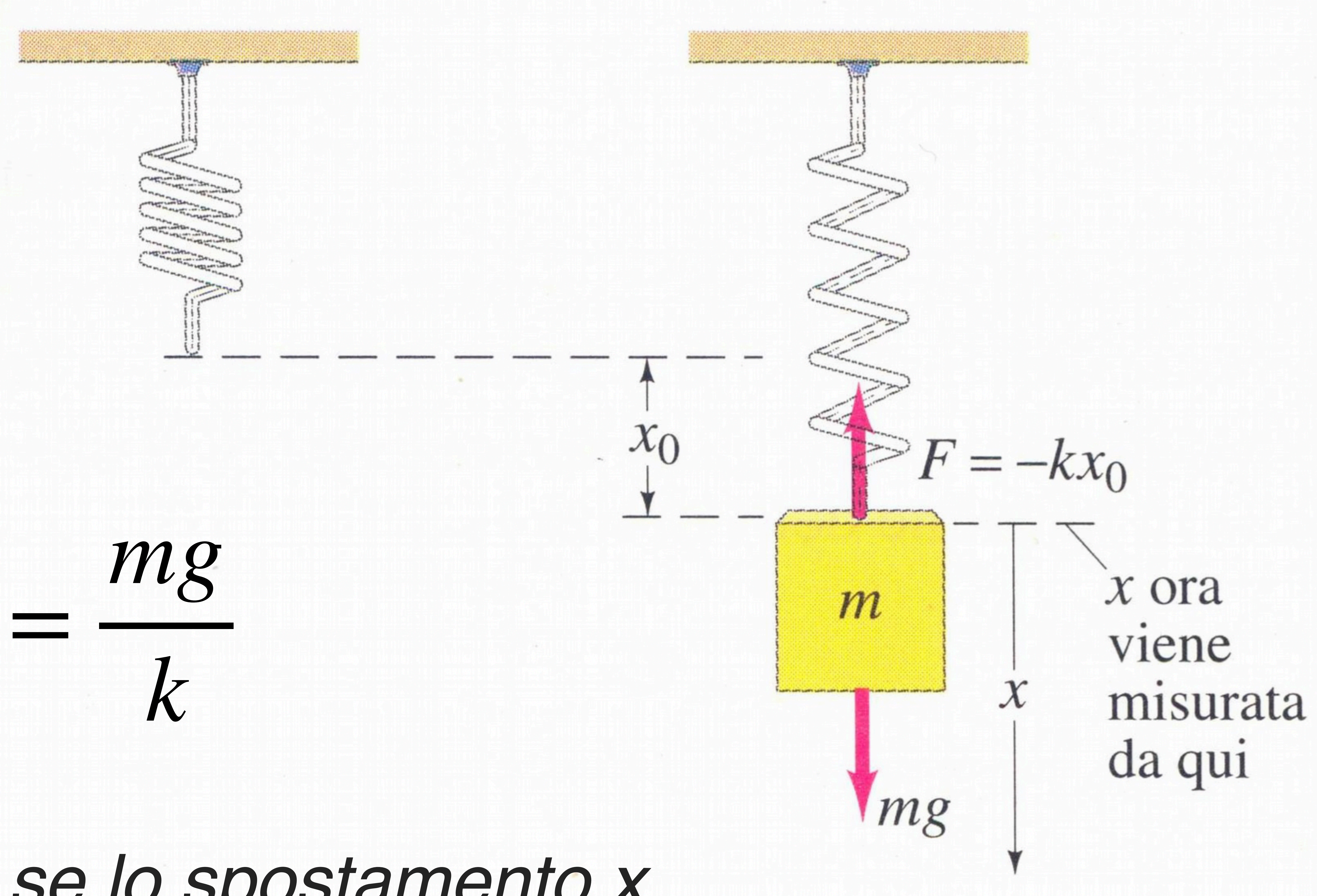
velocità *sfasata di 90º rispetto a x,a massima nel punto di equilibrio*

accelerazione *in fase con spostamento, ma opposta come la forza elastica*

Moto armonico forzato

Appendiamo la molla in verticale e introduciamo la forza di gravità

Nuova posizione di equilibrio x_0



Applico II legge Newton + equilibrio

$$\sum F = mg - kx_0 = 0 \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$$

***Stesso moto armonico** precedente se lo spostamento x viene misurato da x_0 invece che da $x=0$*

*Tutte le grandezze caratteristiche (T, f, ω, k) restano **invariate***

Oscillatore armonico: esercizi

Esercizio 5.01: Una molla si allunga di 0.15 m quando viene appesa una massa di 0.3 kg. La molla viene successivamente allungata di altri 0.1 m dalla posizione di equilibrio, e quindi rilasciata. Determinare:

a) la costante elastica della molla;
b) l'ampiezza dell'oscillazione;
c) la velocità massima v_0;
d) il modulo di $\boldsymbol{v}$ quando la massa si trova 5 cm dall'equilibrio;
e) il modulo massimo dell'accelerazione.

Esercizio 5.02: Il cono di un altoparlante vibra di moto armonico a una frequenza di 262 Hz (Do centrale). L'ampiezza al centro del cono è $A=1.5\times10^{-4}$ m, e all'istante iniziale si ha $x = A$.

a) Qual è l'equazione che descrive il moto del centro del cono?
b) Che valore hanno la velocità e l'accelerazione massime?
c) Qual è la posizione del cono all'istante $t = 1.00$ ms?

Moto armonico smorzato (cenni)

Utile per applicazioni "realistiche" del moto armonico, per es. **con attrito**

Introduco un termine di **smorzamento:**
forza proporzionale alla velocità

$$\vec{F}_{\mathrm{fr}} = -b\,\vec{v}$$

$$\sum F = -kx - b\frac{dx}{dt} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

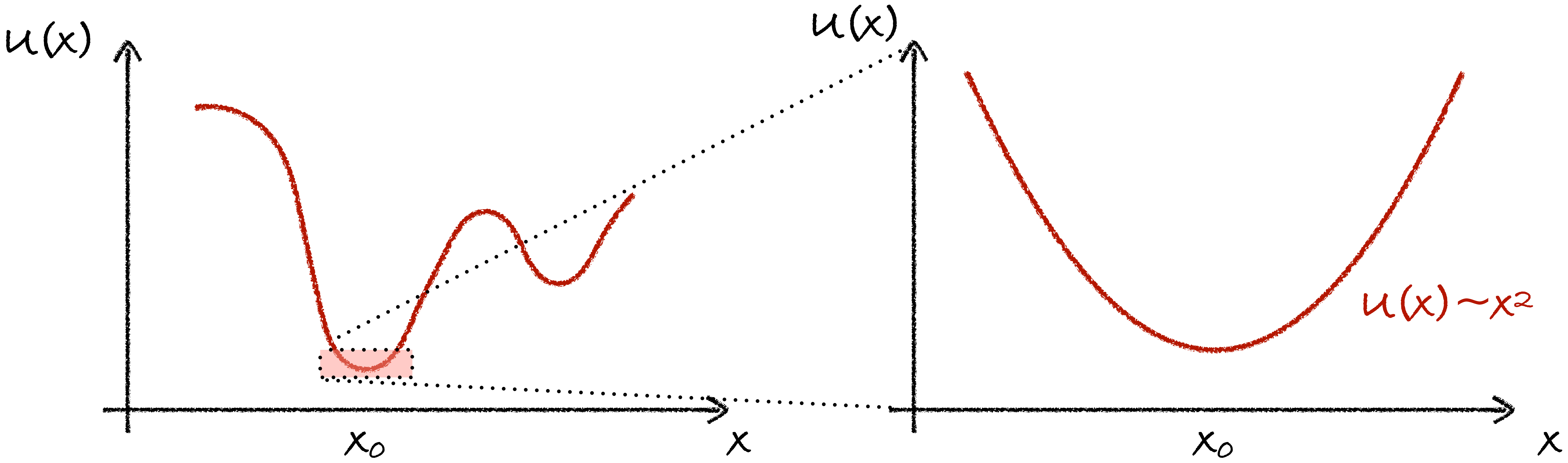
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Detta un'equazione **differenziale**
(contiene incognita e sue derivate)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,\mathrm{e}^{-t(b/2m)}$$

termine **esponenziale aggiuntivo**
(smorza le oscillazioni)

L'importanza dell'oscillatore armonico in Fisica

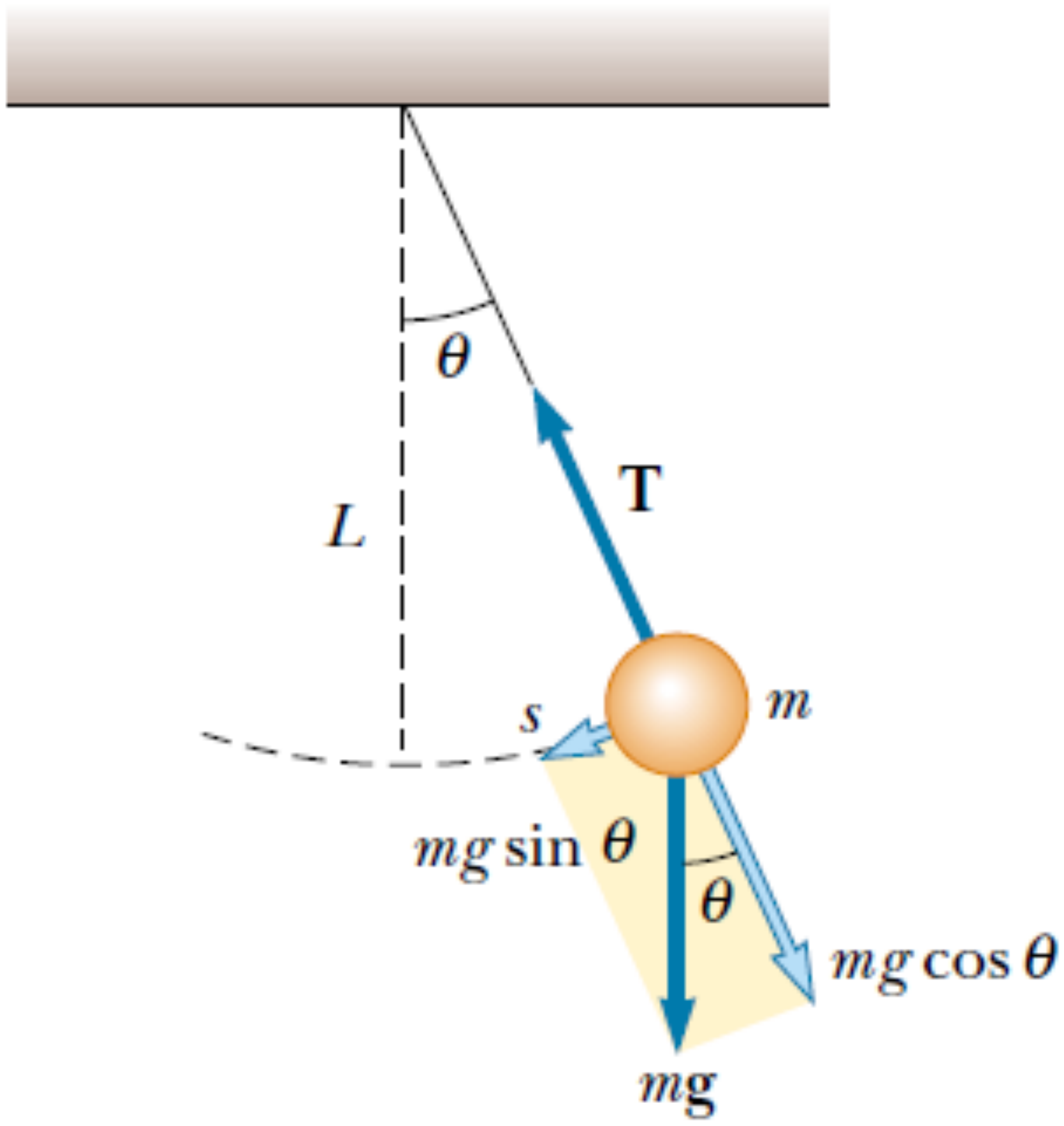


Qualsiasi potenziale anche complesso può essere *approssimato* da una parabola nei pressi del minimo
(cfr. per es. serie di Taylor)

L'oscillatore armonico descrive bene il comportamento di sistemi anche complessi vicino all'equilibrio
(per es. atomi di idrogeno, ma anche perturbazioni in un videogioco!)

Il pendolo semplice

Un moto armonico sotto l'effetto della gravità
Semplice = corda inestensibile e senza massa + punto materiale appeso



Componente **normale** alla traiettoria *s*

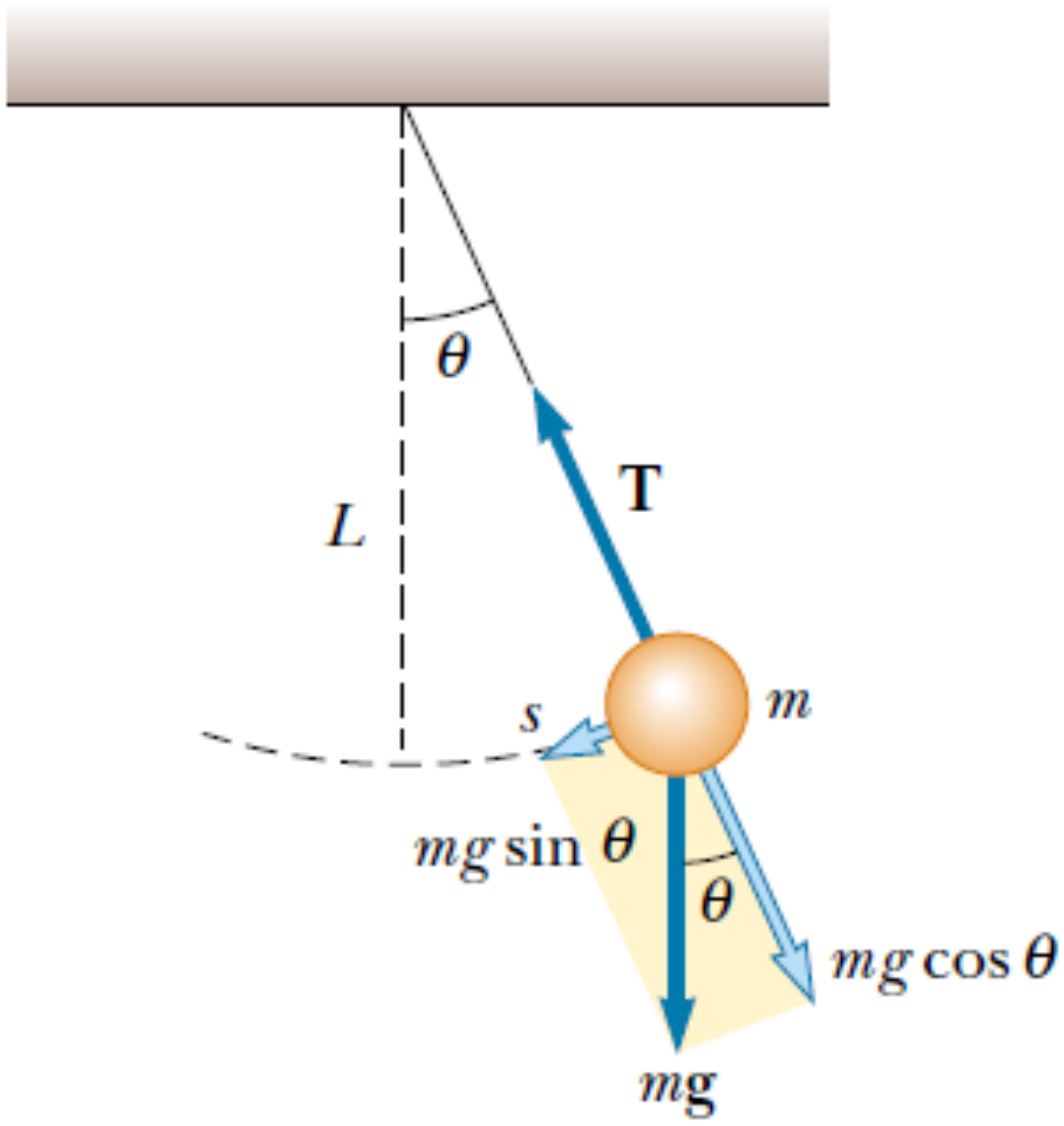
$$\sum F_n = T - mg\cos\theta = 0$$

Componente **tangenziale** alla traiettoria *s*

$$\sum F_t = -\,mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

(segno discorde: forza si oppone all'oscillazione del pendolo)

Il pendolo semplice



Esprimiamo la **traiettoria** $s = L\theta$

$$\Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Componente **tangenziale** alla traiettoria s

$$-mg\sin\theta \approx -mg\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

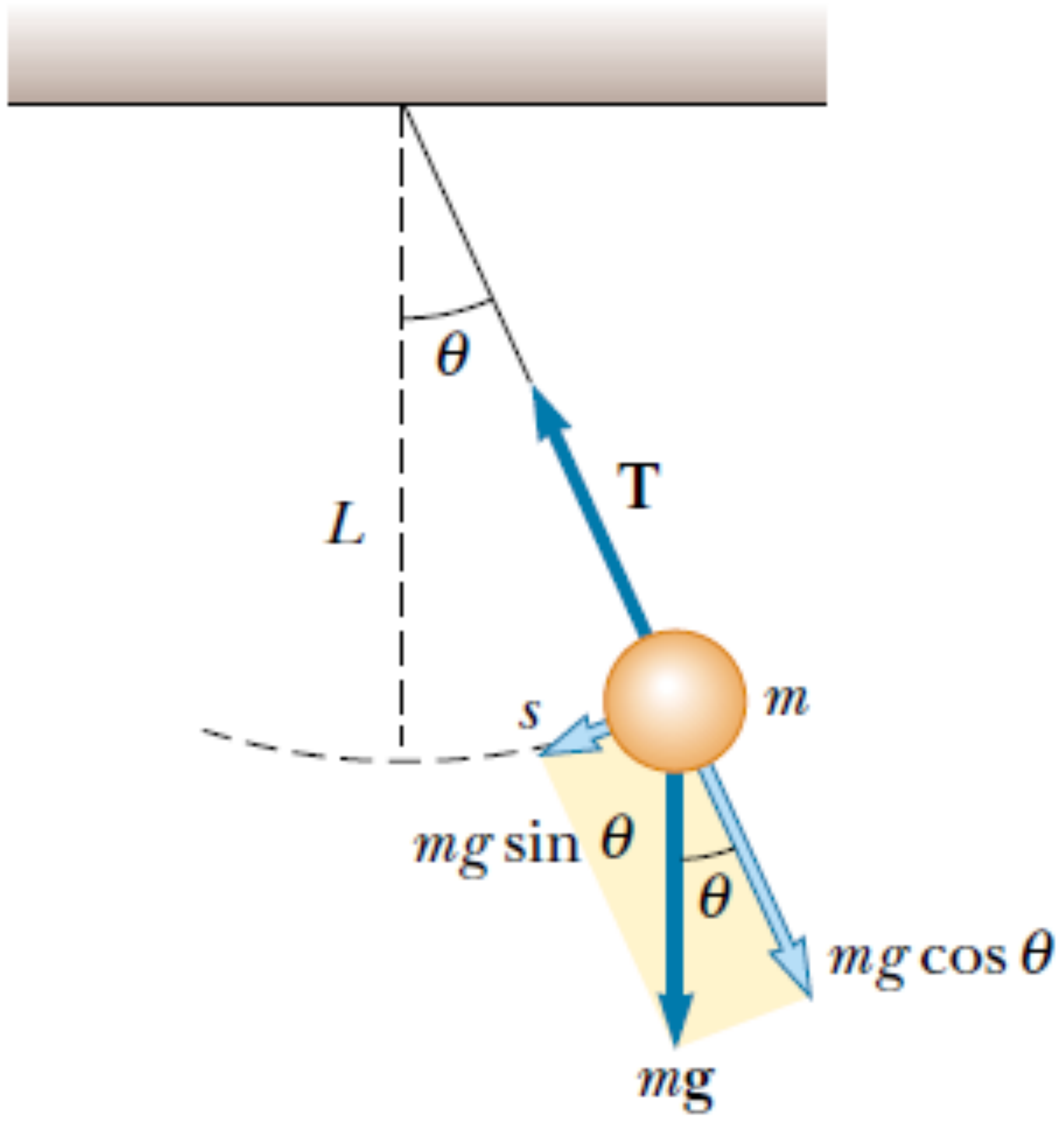
($\sin\theta \sim \theta$ *per piccoli angoli:* $\theta \leq 10°$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

analogo a

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Il pendolo semplice



Riconosciamo l'equazione di un moto armonico dove θ sostituisce x

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

T dipende solo da *g* ed *L* (non dalla massa)

T non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione finché θ ≤ 10º

Per piccole oscillazioni (vicino all'equilibrio) il pendolo si comporta come una molla dove (mg/L) sostituisce k (stesse unità!)