

# 信息学院本科生 06-07 学年第一学期线性代数 课程期末考试试卷 (A 卷)

平时成绩：\_\_\_\_\_ 卷面成绩：\_\_\_\_\_ 总成绩：\_\_\_\_\_ (期末成绩和平时成绩比例：80/20)

专业：\_\_\_\_\_ 年级：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九	卷面成绩
分数										

一、选择填空（仅有一个正确答案）及判断正误（正确打“√”；错误打“×”）（每题 2 分，本题共 16 分）

- 若  $A_{n \times n} x_{n \times 1} = 2x_{n \times 1}$ ，则 2 是  $A_{n \times n}$  的一个特征值. ( )
- 若齐次方程组  $Ax = 0$  中方程的个数少于未知量的个数, 则  $Ax = 0$  一定有非零解. ( )
- 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  都是  $Ax = b$  的解, 则  $\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3 + 6\alpha_4 - 8\alpha_5$  是  $Ax = 0$  的一个解. ( )
- 已知  $V$  是一个向量空间, 则 ( ).  
 (A)  $V$  中一定有零向量; (B)  $V$  中一定有非零向量;  
 (C)  $V$  中一定有线性无关向量; (D)  $V$  中一定有无穷多个向量.
- 若  $A, B$  都是三阶可逆矩阵, 则 ( ).  
 (A)  $A$  与  $B$  可换; (B)  $A$  与  $B$  相似; (C)  $A$  与  $B$  合同; (D)  $A$  与  $B$  等价.
- 以下说法正确的是: ( )  
 (A) 负定矩阵的各阶顺序主子式都小于 0 (B)  $A$  正定, 则  $A^{-1}$  也正定  
 (C) 两个  $n$  阶正定矩阵的乘积仍正定 (D) 一个二次型若既不正定, 也不负定, 则必为常数 0
- 三个  $n$  阶矩阵  $A, B, C$  满足  $ABC = E$ , 以下说法正确的是: ( )  
 (A)  $CAB = E$ ; (B)  $CBA = E$ ; (C) 秩( $A$ )  $\neq n$ ; (D)  $|A| = |B| = |C| = 1$

8. 设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} + a_{31} & a_{12} + a_{32} & a_{13} + a_{33} \end{pmatrix}$   $p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则以

下各式正确的是 ( )

- (A)  $Ap_1p_2 = B$  (B)  $Ap_2p_1 = B$  (C)  $p_1p_2A = B$  (D)  $p_2p_1A = B$

二、计算下列行列式（每题 7 分，共 14 分）

1.  $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$  2.  $D = \begin{vmatrix} 1 & a & & \\ -1 & 1-a & b & \\ & -1 & 1-b & c \\ & & -1 & 1-c \end{vmatrix}$

三、设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $X$  满足  $A^*X = A^{-1} + 2X$ , 其中  $A^*$  是矩阵  $A$  的伴随矩阵, 求矩阵  $X$ .

(本题 10 分)

四、已知  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$  线性无关, 向量  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$ 。

证明：向量组 $\{\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s\}$ 线性无关 (9 分)

五、已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 &- x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= b \end{cases}$$

(1) 常数 $a, b$ 取何值时，方程组有无穷多解、唯一解、无解？

(2) 当方程组有解时，求其解。(本题共 13 分)

六、已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3x_1$  求正交变换 $X = QY$ ，化 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形，并写出正交变换 $X = QY$ 。并判别二次型的正定性（正定、负定、或者二者都不是）(本题共 15 分)

七、设 $R^3$ 的两组基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{本题共 10 分})$$

(1) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 $P$ ;

(2) 已知向量 $\alpha = \alpha_1 + 3\alpha_2$ ，求向量 $\alpha$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标

八、设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}; \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}; \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$ 的秩分别为 $r_1, r_3, r_2$ ,

证明： $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$  (本题 8 分)

九、 $m \times n$ 矩阵 $A$ 的秩为 $r$ ，证明存在一个 $m \times r$ 矩阵 $P$ 和一个 $r \times n$ 矩阵 $Q$ ，使得 $A = PQ$ ，其中 $P$ 和 $Q$ 的秩都等于 $r$ 。(5 分)