第三章 线性方程组

第三节　线性方程组解的结构

预备概念：

解集合：一个线性方程组的全体解向量构成的集合.

§3.3.1齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

矩阵形式 $Ax = 0$

上页 下页

解的性质

（1）若 $x=\xi_1, x=\xi_2$为 $Ax=0$ 的解，则

$$x=\xi_1+\xi_2$$

也是 $Ax=0$ 的解.

证明: $\because A\xi_1=0, A\xi_2=0$

$$\therefore A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$$

故 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是$Ax=0$的解.

（2）若 $x=\xi_1$ 为 $Ax=0$ 的解，k 为实数，则 $x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$ 的解.

证明: $A(k\xi_1)=kA(\xi_1)=k0=0.$ 证毕.

齐次线性方程组若干个解的任意线性组合仍是 $Ax=0$ 的解. 即： 设 $X_1, X_2, \ldots, X_s$ 为解，则

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_j X_j \qquad (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s \text{ 为任意数})$$

也为原方程组的解.

当 $r_A < n$ 时，齐次线性方程组的解集合有无穷个解向量．但此集合一定存在**极大线性无关子组.**

设 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 是其一个极大线性无关子组．则有：

(1) 解集合中任一个向量必可用 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 线性表出.

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 的**任意线性组合**都是$Ax=0$的解.

因此，$X_1, X_2, \cdots, X_s$ 的**一切线性组合**构成线性方程组的解集合.

上页 下页

基础解系的定义

定义 齐次线性方程组解集合的极大线性无关子组称为该齐次线性方程组的一个**基础解系**.

注:

1) 仅当 $r_A < n$ 时，**才有**基础解系。

2) 基础解析不只一个，但每个基础解系所含向量个数相同.

3) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 是一个基础解系， 则通解可可表示为:

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_s X_s$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_s$ **任意**取值)

上页 下页

问题：齐次线性方程组的基础解系含有多少个向量呢？又如何求呢？

对于 $AX=0$，设 $r_A = r < n$，由上一节的讨论知道，它的解依赖于 n-r 个参数. 不失一般性，可设这 n-r 个参数为 $\tilde{x}_{r+1}, \tilde{x}_{r+2}, \cdots, \tilde{x}_n$. 现给它们 n-r 组值：

$$(1,0,\ldots,0),\ (0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,\ldots,0,1)$$

代入方程组可得对应的 n-r 个解向量：

$$\left.\begin{aligned} X_1^0 &= (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1r}, 1, 0, \cdots, 0) \\ X_2^0 &= (c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2r}, 0, 1, \cdots, 0) \\ &\cdots \\ X_{n-r}^0 &= (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \cdots, c_{n-r,r}, 0, 0, \cdots, 1) \end{aligned}\right\}$$

显然它们线性无关.

上页 下页

又对于任何一个解向量 $X^0=(k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1},k_{r+2},\cdots,k_n)$

它由后 *n-r*个参数 $k_{r+1},k_{r+2},\cdots,k_n$ 确定，

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases}$$

即当 $k_{r+1},k_{r+2},\cdots,k_n$ 取定时，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是唯一的.

而线性组合

$$k_{r+1}X_1^0+k_{r+2}X_2^0+\cdots+k_nX_{n-r}^0=(*_1,*_2,\cdots,*_r,k_{r+1},k_{r+2},\cdots,k_n)$$

既是一个解，后 *n-r* 个分量也是 $k_{r+1},k_{r+2},\cdots,k_n$，故有

$$(*_1,*_2,\cdots,*_r)=(k_1,k_2,\cdots,k_r)$$

且 $X^0=k_{r+1}X_1^0+k_{r+2}X_2^0+\cdots+k_nX_{n-r}^0$

上页 下页

因此 $X_1^0, X_2^0, \cdots, X_{n-r}^0$ 是解集合的一个极大线性无关组，从而是一个**基础解系**. 它含有 ***n-r*** 个向量.

定理1 当 $r_A = r < n$ 时，齐次线性方程组的基础解系含有 ***n-r*** 个向量.

同时，上述过程也给出了一个求解基础解系的一个方法.

例1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解 对系数矩阵 A 作初等行变换，变为行最简矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

基础解系应有4－2＝2个线性无关的解向量，同解线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$，

即得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

上页 下页

因而方程组的全部解向量为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 \quad (k_1, k_2\text{任意取值})$$

或者写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例2 证明：$AB=O$ 的充要条件是B的每个列向量都是齐次线性方程组 $AX=O$ 的解.

证 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times s$ 矩阵. 把B按列向量分块为 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)$$

于是 $AB=O$

$$\Longleftrightarrow \quad (A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)=O=(O,O,\cdots,O)$$

$$\Longleftrightarrow \quad A\beta_1=O,\ A\beta_2=O,\cdots,A\beta_s=O$$

$\Longleftrightarrow$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 都是齐次线性方程组 $AX=O$的解.

例3 设A、B都是n阶矩阵，试证: 若 $AB=O$，则

$$r_A + r_B \le n$$

证：当$0<r_A<n$时，设B的列向量为$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$，则由上例知它们都是齐次线性方程组$AX=O$的解.

从而它们的极大无关组(线性无关,含r_B个向量)必可由$AX=O$的某基础解系(含$n-r_A$个向量)线性表出.

则$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 的秩 $r_B \le n - r_A$，于是

$$r_A + r_B \le n .$$

当 $r_A = n$，A为可逆矩阵. 则 $B = A^{-1}O = O$，故 $r_B = 0$，也有 $r_A + r_B \le n$，$r_A=0$时显然也成立.

【注：上面结论对A为$m\times n$, B为$n\times s$矩阵也成立】

例4 证明对任意$m\times n$实矩阵A，$r_{A^TA}=r_A$.

证 设A为$m\times n$矩阵，x为n维列向量.

若x_0满足$Ax_0=0$，则有$A^T(Ax_0)=0$，即$(A^TA)x_0=0$;

若x_0满足$(A^TA)x_0=0$，则$x^T(A^TA)x_0=0$，即

$(Ax_0)^T(Ax_0)=0$，从而推知$Ax_0=0$. 【自己补充原因】

综上可知方程组$Ax=0$与$(A^TA)x=0$同解.

因此 $r_{A^TA}=r_A$.

§3.3.2 非齐次线性方程组解的结构

设非齐次线性方程组为

$$AX=b \tag{1}$$

如果将常数项b换成零向量，则得到的齐次线性方程组

$$AX=O \tag{2}$$

称为 $AX=b$ 的**导出组.**

设X_1, X_2为(1)的两个解，X_3为(1)的导出组(2)的一个解.

则

$$AX_1=b,\ AX_2=b,\ AX_3=O$$

从而

$$A(X_1-X_2)=AX_1-AX_2=b-b=O$$

$$A(X_1+X_3)=AX_1+AX_3=b+O=b$$

上页 下页

即

- 非齐次线性方程组(1)的两个解的差是对应导出组(2)的解；
- 非齐次线性方程组(1)的解与导出组(2)的解的和仍是(1)的解。

当 $r_A = r_B = r < n$ 时，导出组(2)有基础解系：

$$X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$$

设 X_0 为非齐次线性方程组(1)的一个特解.

再设 X 为非齐次线性方程组(1)的任一个解向量.

则 $X^* = X - X_0$ 是导出组的解，故可以用导出组的基础解系线性表出，即存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 使得

$$X^* = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_{n-r} X_{n-r}$$

于是

$$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_{n-r} X_{n-r} \qquad (3)$$

这说明，任何齐次线性方程组(1)的任何一个解都可表成(3)的形式.

而所有具有(3)形式的向量，即当 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 任意取值时，显然都是非齐次线性方程组的(1)解.

定理1 把非齐次线性方程组的一个**特解** X_0 **加到**它的**导出组的每个解向量**上，就得到非齐次线性方程组的全部解向量，并可表示为

$$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_{n-r} X_{n-r}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数.

例4　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$$

解　对增广矩阵B施行初等行变换：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$R(A)=R(B)=2$, 故方程组有解，并且

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \quad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0$, 则 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}$, 即得方程组的一个解

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = \quad 2x_4 \end{cases}$ 中, 取

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方程组的基础解系

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$X=X_0+k_1X_1+k_2X_2\text{（}k_1,k_2\text{任意取值）}$$

或者

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\ (k_1,k_2\in R).$$

上页 下页

例2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系，β为非齐次线性方程组 $AX=b,(b\neq 0)$的一个特解，

证明 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关.

证 由条件知 $A\alpha_i=0,\ (i=1,2,\cdots,r),\ A\beta=b$

设有一组数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使得

$$k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_r(\beta+\alpha_r)=0$$

成立， 即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_r)\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0 \quad (1)$$

上式两端同左乘矩阵A，并将 $A\alpha_i=0,\ (i=1,2,\cdots,r)$

$A\beta=b$ 代入得，

$$0=\mathrm{A}\,0=(k_0+k_1+\cdots+k_r)A\beta=(k_0+k_1+\cdots+k_r)b$$

上页 下页

由于 $b \neq 0$，故应有

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_r = 0 \qquad (2)$$

从而(1)化为 $(k_0 + k_1 + \cdots + k_r)\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

再由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关得

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

代入(2)得 $k_0 = 0$

因此 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_r$ 线性无关.

小结

1．齐次线性方程组基础解系的求法

（1）对系数矩阵A进行初等变换，将其化为最简形

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

（2）得出 $R(A)=r$，同时也可知方程组的一个基础解系含有 $n-r$ 个线性无关的解向量.

由于 $$Ax=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

令 $$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$

故 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

为齐次线性方程组的一个基础解系.

2.齐次线性方程组通解: $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数.

3.非齐次线性方程组通解: $X_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 是任意常数. X_0 是一特解.

4. **线性方程组解的情况**

$AX = \beta$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(B) \le n$

(此时基础解系中含有 $n - R(A)$ 个解向量)

$R(A) = R(B) = n$ $\Leftrightarrow$ $AX = \beta$ 有唯一解

$R(A) = R(B) < n$ $\Leftrightarrow$ $AX = \beta$ 有无穷解

$R(A) \ne R(B)$ $\Leftrightarrow$ $AX = \beta$ 无解