信息学院本科生 2010－2011 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：________________ 年级：______ 学号：__________ 姓名：____________ 成绩:

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$表示方阵 A 的行列式, $\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积.

一.客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √ ”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)

1. n 阶实对称矩阵的特征根必为实数. (　　)

2. 若矩阵 A,B 具有相同的秩,则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 是同解方程组. (　　)

3. 非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq 0)$ 的全部解构成线性空间 R^n 的一个子空间. (　　)

4. 在下列构成 6 阶行列式展开式的各项中，取“+”的有 (　　)

   A. $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　　B. $a_{11}a_{26}a_{32}a_{24}a_{53}a_{65}$

   C. $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$　　D. $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{25}a_{66}$

5. 设α,β是相互正交的 n 维实向量，则下列式中错误的是 (　　)

   A. $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　　B. $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$

   C. $|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$　　D. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

6. 设$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T$是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，则矩阵 A 可能是： (　　)

   A.$\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\2&3&-5\end{pmatrix}$　　B.$\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&1\end{pmatrix}$　　C.$\begin{pmatrix}1&1&-2\end{pmatrix}$　　D.以上都不对

7. 设 n 阶方阵 A 与 B 等价，则必有： (　　)

   A. $|A|=|B|$　　B. $|A|\neq|B|$

   C. 若$|A|\neq 0$，则有$|B|\neq 0$　　D. $|A|=-|B|$

8. 设 A 为 n 阶方阵，$AB=0$，且矩阵 $B\neq 0$，则必有： (　　)

   A．A 的列向量组线性无关　　B．$A=0$

   C．A 的列向量组线性相关　　D．A 的行向量组线性无关

二、行列式计算（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分）

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n（$n>2$）阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & n & n & n & n \\ n & n & n & n & n & n \end{vmatrix}$

三、 设矩阵 X 满足 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

求矩阵 X. (本题 8 分)

四、 线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$，问：（本题 13 分）

（1）当 λ 取何值时，方程组无解，有解？

（2）当方程组有无穷多组解时，求方程组的通解。

五、 已知线性空间 R^3 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

试求：(1) 基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$；

(2) 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同坐标的全体向量.

（本题 12 分）

六、 求一个正交变换 $X=PY$, 将下列二次型化成标准型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

并说明该二次型的类型（正定、负定、半正定、半负定、不定）.
（本题 15 分）

七、 A 为 n 阶($n>2$)可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为实常数。记分块矩阵 $P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. (本题 9 分)

(1) 计算并化简 PQ，

(2) 证明 Q 可逆的充要条件是 $\alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.

八、 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_L$ 和向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_S$ 的秩分别为 p 和 q. 试证明：若向量组 A 可由 B 线性表示，则 $p\le q$.
(本题 8 分)

九、 设 α,β 是 3 维列向量，矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.（本题 5 分）

证明：(1) A 的秩 $R(\mathrm{A})\le 2$;

(2) 若 α,β 线性相关，则 $R(A)<2$.