信息学院本科生 2011——2012 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　姓名：　　　　　成绩：

说明：A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，
A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示向量 α,β 的内积。

得 分

一 .客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √ ”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 若矩阵 A 与 B 相似，则 A 等价于 B.　　　　(　　　)

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，且秩 $R(A)=m$，则齐次方程组 $AX=O$ 只有零解.　　　　(　　　)

3. 在欧氏空间中只有零向量的模长为 0.　　　　(　　　)

4. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = n$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$ 等于　　　　(　　　)

（A） $m+n$　　　(B) $-(m+n)$　　　(C) $m-n$　　　(D) $n-m$

5. 设 A 为 n 阶方阵，C 是 n 阶正交矩阵，且 $B=C^TAC$，则下列结论不成立的是(　　　)

（A）A 与 B 相似　　　　（B）A 与 B 等价

（C）A 与 B 有相同的特征值　　　　（D）A 与 B 有相同的特征向量

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ 其中 $a>b>0$ 且 $a^2+b^2=1$，则 A 为　　　　(　　　)

（A）初等矩阵　　　(B) 正交矩阵　　　(C) 正定矩阵　　　(D) 负定矩阵

7. 对于 n 阶矩阵 A，以下哪个条件不能得出“A 与对角形矩阵相似”的结论　　　　(　　　)

（A）A 有 n 个互异的特征值　　　　（B）A 有 n 个线性无关的特征向量

（C）A 是实对称矩阵　　　　（D）A 的秩为 1

8. n 阶矩阵 A,B,C 满足 $ABC=E$, E 为 n 阶单位矩阵，则 B 的逆矩阵等于　　　　(　　　)

（A） $A^{-1}C^{-1}$　　　(B) $C^{-1}A^{-1}$　　　(C) CA　　　(D) AC

得 分

二 、行列式计算（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分）

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$.

2. 计算 n（$n>2$）阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$.

得 分

三、求矩阵 X，使下式成立：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ （本题 8 分）

得 分

四、λ为何值时，方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + (\lambda+3)x_2 + (\lambda+2)x_3 = 6 \end{cases}$$ 有惟一解，无解或有无穷多解？

并在有无穷多解时求出方程组的通解.　　（本题 13 分）

得 分

五、已知三维向量空间 R^3 的一个基：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$；　　（本题 12 分）

设$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$，$\beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$，$\beta_3 = \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3$.

1）证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 R^3 的一个基；

2）求由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵；

3）若向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1, -2, 0)$，求 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

得 分

六、求一个正交变换 $X=PY$, 将下列二次型化成标准型　　（本题 15 分）

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2$ ；

并求出该二次型的秩，同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定).

得 分

七、设 A，B，C，D 均为 n 阶方阵，A 是可逆矩阵，且有 $AB= BA$，证明：

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = |AD - BC|$$.

（本题 10 分）

得 分

八、设 X^* 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一个解，$X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 是它导出组的基础解系，证明：$X^*, X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$ 线性无关。　　（本题 8 分）

得 分

九、已知存在 n 阶非零实矩阵 C，使得矩阵 $A = C^TC$，证明 $|A + E| > 1$

其中 E 为 n 阶单位矩阵。　　（本题 4 分）