

信息学院本科生 2007—2008 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷 (A 卷)

专业: _____ 年级: _____ 学号: _____ 姓名: _____ 成绩: _____

说明: A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, O 是零矩阵, A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $\langle \alpha, \beta \rangle$ 表示向量 α, β 的内积.

得 分

一、 客观题: 1-3 小题为判断题, 在对的后面括号中填“ $\sqrt{}$ ”, 错的后面括号中填“ \times ”, 4-6 为单选题, 将正确选项前的字母填在括号中. (1-3 每小题 2 分, 4-6 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 A, B 都是 n 阶方阵, 满足 $AB=O$, 且 $|A| \neq 0$, 则 $B=O$. ()
2. 设 T 为 n 维线性空间 V 的线性变换, V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $T\alpha_1, T\alpha_2, \dots, T\alpha_m$ 线性无关. ()
3. 设向量组 1: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 2: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 当 $r < s$ 时, 向量组 2 必线性相关. ()
4. 设 -2 是 3 阶方阵 A 的一个特征值, 则 A^2 必有一个特征值为()
(A) -8 (B) -4 (C) 4 (D) 8
5. 下面说法中不正确的是 ()
(A) 排列经过一次互换改变其奇偶性.
(B) 数量矩阵 kE 和任何同阶方阵可交换.
(C) 若矩阵 A 中存在一个 r 阶子式不为零, 则 A 的秩大于 r .
(D) 某些向量组没有极大线性无关组.
6. 设有齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:
(1) 若 $AX=0$ 的解均是 $BX=0$ 的解, 则 $\text{秩}(A) \geq \text{秩}(B)$.
(2) 若 $\text{秩}(A) \geq \text{秩}(B)$, 则 $AX=0$ 的解均是 $BX=0$ 的解.
(3) 若 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解, 则 $\text{秩}(A) = \text{秩}(B)$.
(4) 若 $\text{秩}(A) = \text{秩}(B)$, 则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

以上命题正确的是: ()

- (A) (1)(2) (B) (1)(3) (C) (2)(4) (D) (3)(4)

得 分

二、 计算题 (第 1 小题 7 分, 第 2 小题 8 分, 共 15 分)

1. 计算 $n(n > 2)$ 阶行列式

$$|D_n| = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

2. 计算矩阵 A, B, C 的行列式, 其中 A, B 为 $n(n > 2)$ 阶方阵.

(依次为 4 分, 2 分, 2 分)

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}.$$

得 分

三、 若 $\prod_{i=1}^n x_i \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 且 $n > 1$,

求 A^{-1} . (8 分)

得 分

四、 有三个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且 α_3 不能被 α_1, α_2 线性表示, 证明 α_1, α_2 线性相关. (8 分)

得 分

五、 已知线性方程组 (共 13 分)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

(1) a, b 为何值时, 方程组有解? (5 分)

(2) 方程组有解时, 求出其导出组的一个基础解系. (5 分)

(3) 方程组有解时, 求出方程组的全部解. (3 分)

得 分

六、 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$, 求正交变换 $x = Qy$, 将该二次型化为标准形, 并写出正交变换 $x = Qy$, 最后给出该二次型的负惯性指数. (15 分)

得 分

七、 E 为 n 阶单位矩阵, P, Q 为 n 阶方阵, $|P - E| \neq 0$. 设

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & E \end{pmatrix}, \text{ 证明: 对任意正整数 } k, \text{ 都有}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} P^k & Q_k \\ O & E \end{pmatrix}, \text{ 其中 } Q_k = (P^k - E)(P - E)^{-1}Q. (10 \text{ 分})$$

得 分

八、 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基底, 且 V 中向量 α_{n+1} 在该组基底下的坐标 (x_1, x_2, \dots, x_n) 中所有 x_i 全不为 0. (共 8 分)

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量必可构成 V 的基底. (4 分)

(2) 求 α_1 在基底 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$ 下的坐标. (4 分)

得 分

九、 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵, 证明: (共 8 分)

(1) 若存在可逆矩阵 U , 使得 $A = U^T U$, 则 A 的主对角线上的元全大于零. (5 分)

(2) 设列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 的 n 个两两正交的单位特征向量, 对应的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$A = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^T + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^T + \dots + \lambda_n \alpha_n \alpha_n^T. (3 \text{ 分})$$