

第四章 线性空间

主要讨论线性空间的一些基本概念与基本定理，能利用这些基本概念与定理解决相关问题.

第一节 线性空间的概念

§4.1.1 线性空间的定义和例子

一. 数域

下面的方程有解吗？

$$x^2 + 1 = 0$$

- 在**自然数、整数、有理数、实数**范围内无解.
- 在**复数**范围内有解: $0 \pm i$

可见, 在不同的讨论范围内, 得到的回答不一样.

常见讨论范围: **有理数的全体, 实数的全体, 复数的全体.**

- 在代数中，常把有共同性质的对象**一起**讨论.
- 关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的**代数性质**.

定义：数域是指这样的数的集合：它**至少包含0和1**两个数，且对数的加、减、乘、除（除数不为零）四则运算是**封闭的**（即所得结果仍在该集合中）.

用 **F (或 P)** 泛指一般的数域。

Q （有理数）， R （实数）， C （复数）

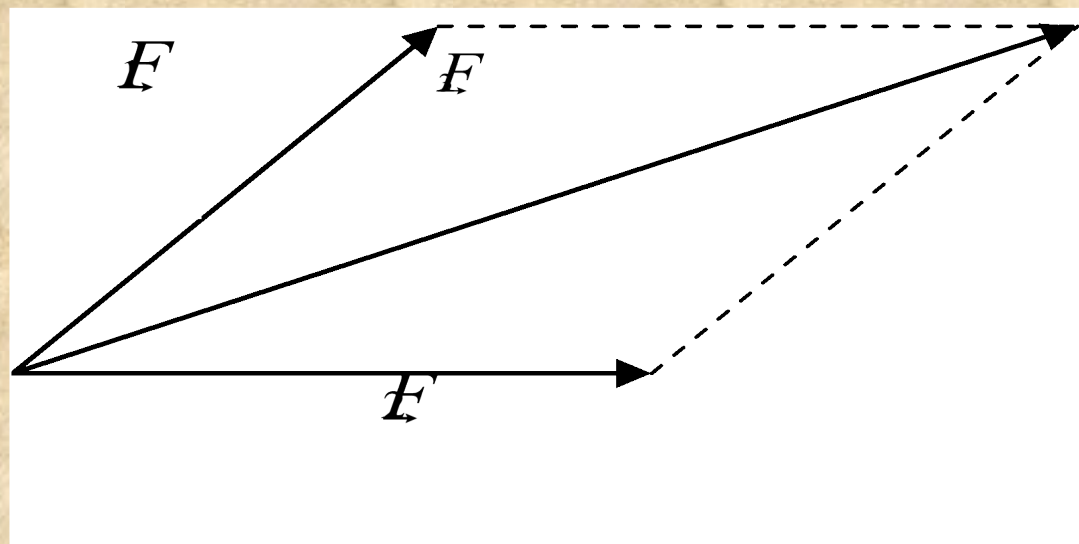
二、线性空间的定义

•几个例子

解析几何中，二（三）维向量及其运算：

向量的基本属性：可以按**平行四边形**规律相加，也可以与实数作数量乘法.

不少几何和力学对象的性质是可以通过向量的这两种运算来描述的.



所有 n 阶实矩阵：也定义了加法和数量乘法

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{ij} \end{pmatrix}$$

n 维向量作为特殊的矩阵，也有类似运算规律.

定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数的全体构成集合 **$C[a, b]$:**

$$\forall f(x), g(x) \in C[a, b] \quad \text{有} \quad f(x) + g(x) \in C[a, b]$$

$$kf(x) \in C[a, b] \quad (k \in R)$$

综合上面几个例子，可以得到

所考虑的对象虽然完全不同，但是它们都有一个**共同点**，那就是它们都有**加法**和**数量乘法**两种运算。当然，随着对象不同，这两种运算定义也不同。

为了抓住它们的共同点，把它们**统一起来研究**，因而引入线性空间的概念。

线性空间的定义

定义1. 设 V 是一个非空集合， F 是一个数域，在集合 V 中定义元(元素)之间的**加法**运算，使得任意 $\alpha, \beta \in V$ ，都有 $\alpha + \beta \in V$ ；在 F 与 V 的元之间定义一个**数量乘法**运算，使得任意 $k \in F$ 及 $\alpha \in V$ ，都有 $k\alpha \in V$ 。并且加法和数量乘法满足下列运算规律，则称 V 为**数域 F 上的线性空间**。

【按所定义的线性运算构成数域 F 上的线性空间（或者**向量空间**）】简称 V 是 **F 上的线性空间**， V 的元称为**向量**。

设 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $\lambda, \mu \in F$

$$(1) \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$(2) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$(3) \quad \exists \mathbf{0} \in V, \text{ 对 } \forall \alpha \in V, \text{ 都有 } \alpha + \mathbf{0} = \alpha$$

$$(4) \quad \forall \alpha \in V, \exists \beta \in V, \text{ 都有 } \alpha + \beta = \mathbf{0},$$

β 称为 α 的负元, 记做 $-\alpha$ 。

$$(5) \quad 1 \cdot \alpha = \alpha$$

$$(6) \quad \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$

$$(7) \quad (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$$

$$(8) \quad \lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$$

实数域 R 上的线性空间简称为**实空间**, 复数域 C 上的线性空间简称为**复空间**.

说明:

- 凡满足以上八条规律的加法及乘数运算，称为**线性运算**。
- 向量空间中的向量**不一定是**有序数组。
- 要点：给定非空集合 V 和数域 F ，定义两种运算“**+**”和“**.**”，且满足运算规律(1) — (8)。
- 线性空间中的加法“**+**”与数量乘法“**.**”可以与通常的“**+**”和“**.**”不同。
- 要证明某非空集合 V 对于给定的两种运算能构成数域 F 上的线性空间，需**逐条验证**“**+**”和“**.**”的封闭性及运算规律(1) — (8)成立；要否定某非空集合 V 对于给定的两种运算不能构成数域 F 上的线性空间，**只须**说明加法或数乘运算不封闭，或(1) — (8)中有一条不满足即可。
- 给定 V 及 F ，一般可用**多种**不同的方法定义出不同的线性空间。

例1.实数域 R 上的全体 $m \times n$ 矩阵，对于矩阵的加法和数乘运算构成 R 上的线性空间，记作 $R^{m \times n}$ (或 $M_{m \times n}(R)$).

例2.所有次数不超过 n (n 是自然数)的实系数多项式的全体，关于通常多项式的加法以及实数与多项式的乘法构成一个实线性空间，记作 $P_n[x]$.即：

$$P_n[x] = \{ p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \cdots, a_n \in R \}$$

例3 定义在区间 $[a, b]$ 上全体实连续函数，关于通常函数的加法及实数与函数的数量乘法，构成一个实线性空间，记为 $C[a, b]$.

例4. n 元实系数齐次线性方程组的全体解向量（ R^n 的一个子集合），按照 n 维向量的加法及它与实数的乘法两种运算也构成一个实线性空间，称为齐次线性方程组的解空间. 特别，当齐次线性方程组只有零解时，它的解空间只有一个元——零元，只有零元的空间称为零空间.

例5 实(复)数域按本身的加法和乘法构成自身上的一个线性空间.

例6 次数等于 $n(n \geq 1)$ 的实系数多项式的全体, 对于多项式的加法和数量乘法, 能否构成数域 R 上的线性空间?

解: $\because x^n \in V, -x^n + 1 \in V$, 但

$$x^n + (-x^n + 1) = 1 \notin V$$

$\therefore V$ 对加法运算**不封闭**, 从而 V 对于指定的运算不构成 R 上的线性空间.

例7 判别下列集合是否为向量空间

$$V_2 = \{x = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R\}.$$

解: V_2 **不是** 向量空间.

因为若 $\alpha = (1, a_2, \dots, a_n)^T \in V_2$, 则 $2\alpha = (2, 2a_2, \dots, 2a_n)^T \notin V_2$.

例8. 问当 $b \neq 0$ 时, 非齐次的线性方程组 $Ax=b$ 的解的全体 $S = \{x \mid Ax = b, x \in C^n\}$ 是否构成线性空间?

证: $\forall x_1, x_2 \in S$, 由于 $b \neq 0$, 因此

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 2b \neq b, \text{ 于是 } x_1 + x_2 \notin S$$

所以 S 不是线性空间.

例9 设 $V=R^+, F=R$,定义 $a \oplus b = ab$, $k \cdot a = a^k, k \in F$,
 $a, b \in V$.证明: V 对于指定的运算构成数域 F 上的线性空间.

证: 由题意, $\forall a, b \in V$, $a \oplus b = ab \in V$, $k \cdot a = a^k \in V$,
故 V 对加法和数乘封闭.

下面验证八条线性运算规律:

对任意 $a, b, c \in R^+, k, l \in R$,

(1) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$;

(2) $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c$
 $= a(bc) = a \oplus (bc) = a \oplus (b \oplus c)$;

(3) 存在零元 $1 \in R^+$, 对任意 $a \in R^+$, 有 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$;

(4) 对任一元素 $a \in R^+$, 存在负元素 $a^{-1} \in R^+$, 有

$$a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1;$$

(5) $1 \cdot a = a^1 = a$;

$$(6) (k+l) \cdot a = a^{k+l} = a^k a^l = a^k \oplus a^l = k \cdot a \oplus l \cdot a .$$

$$(7) k \cdot (a \oplus b) = k \cdot (a b) = (a b)^k = a^k b^k \\ = a^k \oplus b^k = k \cdot a \oplus k \cdot b;$$

$$(8) k \cdot (l \cdot a) = k \cdot a^l = (a^l)^k = a^{k l} = (k l) \cdot a;$$

所以, R^+ 对所定义的运算构成线性空间.

线性空间 V 具有的性质

1. 零元素是唯一的.

证明: 假设 $0_1, 0_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素.

则对任何 $\alpha \in V$ 有, $\alpha + 0_1 = \alpha$, $\alpha + 0_2 = \alpha$,

由于 $0_1, 0_2 \in V$, 则有 $0_2 + 0_1 = 0_2$, $0_1 + 0_2 = 0_1$.

所以 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.

2. 负元素是唯一的.

证明: 设 α 的负元素为 β 与 γ , 则有 $\alpha + \beta = 0$, $\alpha + \gamma = 0$, 所以

$$\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma$$

$$= (\alpha + \beta) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma.$$

因此, 将向量 α 的负元素记为 $-\alpha$.

3. 存在加法的逆运算——减法，而且

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

4. 等式 $0\alpha=0$; $(-1)\alpha=-\alpha$; $\lambda 0=0$ 成立

5. 如果 $\lambda\alpha=0$, 则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=0$.

对于线性空间中的向量组，我们也要讨论它们的**线性组合**、**线性相关**、**线性无关**以及向量组的**极大线性无关子组**与**秩**等概念. 前面有关向量的性质和讨论都可以推广到线性空间来.

例 证明线性空间 $P_n[x]$ 中向量组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 线性无关.

证: 设有 $n+1$ 个实数 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$, 使得

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_n x^n = 0 \quad (1)$$

成立, 即对于 x 的一切值都成立. 但由多项式理论知道, 如果某个 k_t ($t = 0, 1, 2, \dots, n$) 不等于零, 则(1)至多对有限个 x 的值成立. 因此仅当

$$k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

时, (1)式对一切 x 的值都成立. 这就证明了 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 线性无关.

§4.1.2 子空间

定义2 设 V 是 F 上的一个线性空间， L 是 V 的一个**非空**子集，如果 L 对于 V 中所定义的**加法和乘数**两种运算也构成 F 上的一个线性空间，则称 L 为 V 的**子空间**。

例1 在线性空间中，由单个的零向量所组成的子集合 $\{0\}$ 是一个线性子空间，它叫做**零子空间**。

例2 线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间。

叫做 V 的**平凡子空间**

其它的线性子空间叫做**非平凡子空间**。

例3 $P_n[x]$ 是线性空间 $P[x]$ 的子空间.

例4 几何空间中, 过原点的平面上所有向量 构成
几何空间 R^3 的一个子空间.



判定子空间除了定义以外，有无更加简单的方法呢？

设 V 是线性空间，则定义的两种运算满足：

✓ (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

✓ (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\exists \theta \in V$ ，对 $\forall \alpha \in V$ ，都有 $\alpha + \theta = \alpha$

(4) $\forall \alpha \in V$ ， $\exists \beta \in V$ ，都有 $\alpha + \beta = \theta$ ，

✓ (5) $1 \cdot \alpha = \alpha$

✓ (6) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$

✓ (7) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$

✓ (8) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$

根据线性空间的定义，为使 L 自身构成一线性空间，主要条件是：要求 L 中的元对原有运算的封闭性，以及规则(3)与(4)成立.

a) $\forall \alpha \in L, k \in F$ 应有 $k\alpha \in L$

b) $\forall \alpha, \beta \in L$ 有 $\alpha + \beta \in L$

c) 0 在 L 中

d) 若 $\alpha \in L$, 则 $-\alpha \in L$

是多余的，它们是条件a)中 k 取值0和-1的特殊情形.



定理：若 L 是线性空间 V 的非空子集且关于 V 的线性运算是封闭的（即若 $\alpha, \beta \in L, k \in F$, 则 $\alpha + \beta \in L, k\alpha \in L$ ），则 L 是 V 的子空间。

例: R^n 中所有满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的向量
 (x_1, x_2, \cdots, x_n) 构成的集合 L , 是否构成 R^n 的线性子空间?
【是】

例: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是数域 F 上线性空间 V 中的一组向量,
考虑这组向量的所有可能的线性组合:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

所组成的集合. 显然这个集合是非空的, 并且对于
 V 的两种运算是封闭的. 因此它是 V 的一个线性
子空间. 称它为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 生成的子空间.

记为 $L = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$

据此，我们很容易证明：线性空间 V 中的两组向量

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ ，则

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

的充要条件是

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价.

小结

- 数域的概念
- 线性空间的定义及其判定
- 线性空间的性质
- 子空间的定义及判定（重点）

思考题

1. $R^{2 \times 3}$ 的下列子集是否构成子空间？为什么？

$$(1) W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in R \right\}$$

$$(2) W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} a + b + c = 0 \\ a, b, c \in R \end{matrix} \right\}$$

解：(1) 不构成子空间。因为对

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1, \text{ 有 } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W_1$$

W_1 对矩阵的加法不封闭。

(2) 构成子空间

$\because \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2, \therefore W_2$ 非空, 对于 $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in W_2$,

$$\text{设 } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{且有 } a_1 + b_1 + c_1 = 0, a_2 + b_2 + c_2 = 0$$

$$\text{于是 } \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{又 } a_1 + b_1 + c_1 = 0, a_2 + b_2 + c_2 = 0$$

$$\therefore a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 0, \mathbf{A} + \mathbf{B} \in W_2$$

另一方面，对于 $\forall k \in R$,

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & 0 & kc_1 \end{pmatrix}$$

$$ka_1 + kb_1 + kc_1 = k(a_1 + b_1 + c_1) = 0$$

故又有 $k\mathbf{A} \in W_2$

即： W_2 对矩阵的加法与数乘是封闭的， W_2 是子空间。