2004 年，光电子专业 线性代数试题

（满分 50 分，时间 50 分钟，与高数一部分合在一起考试）

【注意：此次课本为《高等数学》，四川大学版】

1. 计算 n(n>2)阶行列式 (8 分)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

2. 在矩阵方程 $XA = B$ 中，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (1) 求 A^{-1}

   (2) 求矩阵 B 的秩

   (3) 求矩阵 X (10 分)

3. 设向量 β 能用向量组 α_1， α_2， $\cdots$ ，α_m 线性表出，且表示法唯一，证明向量组 α_1， α_2， $\cdots$ ，α_m 线性无关。(7 分)

4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

   (1) 化该二次型为标准形并给出所用的总的坐标变换

   (2) 上述二次型是否为正定性二次型？并给出依据。(10 分)

5. 在 R^3 中，线性变换 T 在基底 $\eta_1 = (-1,1,1)$，$\eta_2 = (1,0,-1)$，$\eta_3 = (0,1,1)$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。另一组基底为 $\varepsilon_1 = (1,0,0)$，$\varepsilon_2 = (0,1,0)$，$\varepsilon_3 = (0,0,1)$。

   (1) 给出基底 η_1, η_2, η_3 到基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵

   (2) 求线性变换 T 在基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 B

   (3) 求矩阵 A 的全部特征根和全部特征向量

   (4) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = D$ 为对角形，并给出此对角形矩阵 D (15 分)