信息学院本科生 2008－2009 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　　成绩：

说明：A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$ 表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示向量 α,β 的内积.

得 分

一、　客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)

1. 若对于矩阵 A, B, C 有 BA=BC 且 |B|<O，则必有 A＝C。　(　　　)
2. 任何方阵总可以经过一系列初等列变换化成对角形矩阵。　(　　　)
3. 设 A 为 n 阶矩阵，若 $|\lambda E-A|\neq 0$，则 λ 不是 A 的特征根。　(　　　)
4. 设 A 为正交矩阵，且 $|A|=-1$，则 $A^*=$ ____________

   (A) A^T　　(B) $-A^T$　　(C) A　　(D) $-A$

5. 设 A, B 均为 n 阶正交矩阵，$C=AB$，则必有________

   (A) $A+B=0$　　(B) C 为正交矩阵

   (C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　(D) $|A|+|B|=0$

6. 设 n 阶方阵 A 与 B 合同，则必有________

   (A) $|A|=|B|$　　(B) $|A|\neq|B|$

   (C) 若 $|A|\neq 0$，则有 $|B|\neq 0$　　(D) $|A|=-|B|$

7. n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件是：________

   (A) A 是可逆矩阵

   (B) A 的所有的特征值均为正值

   (C) 可以找到一个正交矩阵 F，使 F^TAF 为对角矩阵

   (D) 对某个 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$ 有 $X^TAX>0$

8. 零为方阵 A 的特征值是 A 不可逆的________

   (A) 充分条件　　(B) 必要条件

   (C) 充要条件　　(D) 非充分、非必要条件

得 分

二、 计算题 (第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}$

2. 计算 $n\,(n>2)$ 阶行列式 D，其中 $x_i \neq 0, i=1,2,\ldots,n$；

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2+x_2 & \cdots & n-1 & n \\ 1+x_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

得 分

三、 矩阵 A,B 满足 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

求 A。 (10 分)

得 分

四、 证明:若 n 维向量 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2$ 不能由 α_1 线性表示，α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。(8 分)

得 分

五、 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

有解，无解，有无穷多解？并求有无穷多解时的方程组的通解。（共 14 分）

得 分

六、 已知实二次型 $f=2x_1^2+2x_2x_3$，

（1）写出二次型的矩阵表达式;

（2）用正交变换把二次型化为标准形，并写出相应的正交矩阵。 (共 14 分)

得 分

七、 设 R^3 的两个基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$；

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P；

（2）已知向量 $\alpha=\alpha_1+3\alpha_2$，求向量 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标。(10 分)

得 分

八、 设 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵，证明 A 合同于 B。(8 分)

得 分

九、 已知三阶矩阵 A 和三阶列向量 X，且向量组 $\{X,AX,A^2X\}$ 线性无关，$A^3X=3AX-2A^2X$。设矩阵 $P=(X,AX,A^2X)$，且 $AP=PB$，求矩阵 B。(共 5 分)