信息学院本科生 2009－2010 学年第一学期
线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：________________年级：______学号：__________姓名：____________成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵, A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$表示方阵 A 的行列式, $\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积.

得 分

一、 客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“√”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)

1. 方阵 A,B 满足 $AB=BA$，则必有 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$。(　　　)
2. 若方阵 A 有 $A^k=0$（$k>0$ 为整数），则必有 $|A|=0$。　(　　　)
3. A,B 为同型矩阵，且秩(A)＝秩(B)，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 是同解方程组。　(　　　)
4. n 阶实对称矩阵 A 正定，则以下结论错误的是(　　　)

   (A) 可以找到一个正交矩阵 F，使 $F^{\mathrm{T}}AF$ 为对角矩阵。

   (B) A 的所有的特征值均为正值。

   (C) A 是不可逆矩阵。

   (D) 对某个 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，必有 $X^TAX>0$。
5. n 维向量 α,β 正交，则内积 $\langle\alpha,\beta\rangle=$(　　　)

   (A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) 0
6. 下列说法不正确的是 (　　　)

   (A) 存在满足 $PQ=0$ 的两个非零 $n(n>1)$ 阶矩阵 P 和 Q。

   (B) $n(n>1)$ 维实线性空间 V 中任何 n 个线性无关的向量都构成 V 的一个基底。

   (C) 设 V 是一个任意的 n 维欧式空间，T 是 V 中一个任意的线性变换，则 V 中的零向量在 T 作用下的象一定也是零向量。

   (D) T 是线性空间 V 中线性变换，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$ 线性无关。

7. 下列说法不正确的是（　　　）

(A) 相似矩阵有完全相同的特征多项式。

(B) 若T是欧式空间V中的一个正交变换，则T在V的任意一个基底下的矩阵为正交矩阵。

(C) 若V是一个n维线性空间，则V中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m (m>n)$的所有线性组合构成$V$的一个子空间。

(D) 二次型X^TAX与二次型Y^TBY等价，二次型Y^TBY与二次型Z^TCZ等价，则矩阵A与C等价。

8. A与B均为n阶方阵，则下列结论中成立的是（　　　）

(A) $|AB|=0$，则$A=0$或$B=0$。

(B) $|AB|=0$，则$|A|=0$或$|B|=0$。

(C) $AB=0$，则$A=0$或$B=0$。

(D) $AB\neq 0$，则$|A|\neq 0$或$|B|\neq 0$。

得 分

二、　三阶方阵A,B满足关系式 $AB+E=A^2+B$，其中$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，求$B$。(10 分)

得 分

三、　计算$n(n>2)$阶行列式（两小题分别 6、8 分，共 14 分）

1. $\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$　　2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ 1 & x & 0 & \ldots & x & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x & x & \ldots & 0 & x \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}$，$x\neq 0$

得 分

四、　参数λ分别取什么值时，方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1 \\ (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda \\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1 \end{cases}$$
无解、有无穷多解、有唯一解？并求方程组有解时的解。(14 分)

得 分

五、 求正交变换 $X = PY$,将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

化为标准形，并写出其标准形。（16 分）

得 分

六、 Q 是一个 n 阶正交矩阵，证明

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$ 是一个 $2n$ 阶正交矩阵。 (7 分)

得 分

七、 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性空间 V 的一个基底，

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 \end{cases}$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 V 的一个基底，并求向量 $\alpha = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$ 在基底 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。 (10 分)

得 分

八、 设在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m > 2)$ 中， $\alpha_1 \neq 0$ ，且每个 $\alpha_i\ (i = 2, 3, \cdots, m)$ 都不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ 线性表示，证明该向量组线性无关。(8 分)

得 分

九、 设实矩阵 $C_{m\times n}$ （其中 $m > n$ ）的秩为 n。矩阵 $A = C^{\mathrm{T}}C$ 。证明：（1） A 是正定矩阵；（2） $|A + E| > 1$ ，其中 E 为 n 阶单位阵。(共 5 分)