信息学院本科生 2012——2013 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　年级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　成绩：

说明：$A^T$ 表示矩阵 $A$ 的转置矩阵，$A^*$ 表示矩阵 $A$ 的伴随矩阵，$E$ 是单位矩阵，$O$ 是零矩阵，$A^{-1}$ 表示可逆矩阵 $A$ 的逆矩阵，$|A|$ 表示方阵 $A$ 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示向量 $\alpha,\beta$ 的内积。

草　稿　区

| 得 分 |
| --- |
| |

一 .客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √ ”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 若两个 $n$ 维非零列向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 正交，则它们线性无关。　（　　）

2. $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2-3A-2E=O$，其中 $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，则 $A$ 不可逆。　（　　）

3. 若 $T$ 为线性空间 $V$ 中的正交变换，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$（$m>1$）为 $V$ 中一个正交向量组，则 $T\alpha_1,T\alpha_2\cdots,T\alpha_m$ 一定是一个正交向量组。　（　　）

4. 下列行列式的值可能不为 0 的是　（　　）

（A）行列式 $D$ 中有两列对应元素之和都为 0　（B）行列式 $D$ 中某行元素全为 0

（C）行列式 $D$ 中有两行含有相同的公因子　（D）行列式 $D$ 中有一行与另一行元素对应成比例

5. 如果一个非齐次方程组有解，则有惟一解的充要条件是它的导出组　（　　）

（A）有解　（B）无解　（C）只有零解　（D）有非零解

6. 设 $n$ 阶矩阵 $A$，$B$ 和 $C$，则下列说法正确的是　（　　）

（A）$AB=AC$，则 $B=C$　（B）$AB=O$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

（C）$(AB)^T=A^TB^T$　（D）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

7. 设 $\lambda=\frac{1}{2}$ 是可逆矩阵 $A$ 的一个特征值，则矩阵 $\left(3A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于　（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　（B）$\frac{3}{4}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{4}$

8. 设 $A$，$B$ 为 $n$ 阶方阵，$A^*$，$B^*$ 分别为 $A$，$B$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵

$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，则 $C$ 的伴随矩阵 $C^*$ 等于　（　　）

（A）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

| 得 分 |
| --- |
| |

二 、行列式计算 （第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **8** 分，共 **14** 分）

草 稿 区

**1**．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

**2.** 计算 $n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$ $a_i \neq 0 \quad i = 1,2\cdots n$.

| 得 分 |
| --- |
| |

三、求矩阵 $X$，使下式成立：（本题 8 分）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

四、对于线性方程组：（本题 **13** 分）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

，$\lambda$为何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多解？

并在方程组有无穷多解时，试用其导出组的基础解系表示全部解。

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

五、已知三维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基： （本题 12 分）

I： $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(0,1,0)^T$, $\alpha_3=(0,0,1)^T$；

II： $\beta_1=(3,-5,4)^T$, $\beta_2=(2,-1,2)^T$, $\beta_3=(-2,5,-3)^T$；

1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩阵；

2）求在两组基下有相同坐标的向量。

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ （本题 15 分）

用正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并求出其正交变换矩阵 $P$;

同时说明该二次型的类型(正定、负定、半正定、半负定、不定)。

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

七、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，且 $\boldsymbol{AA^T=E}$ ，$|\boldsymbol{A}|=-1$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$ （本题 9 分）

（其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵）。

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

八、设 $X^*$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta(\beta\neq O)$ 的一个解，$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是它导出组的基础解系，证明：$X^*,X^*-X_1,X^*-X_2,\cdots,X^*-X_{n-r}$ 线性无关。（本题 9 分）

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

九、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 的实矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\lambda E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵,

证明：当 $\boldsymbol{\lambda}>\mathbf{0}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。（本题 4 分）

草 稿 区