电光 计控学院本科生 2014—2015 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　　成绩:

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha,\beta$的内积。

一 .客观题：1−3 小题为判断题，在对的后面括号中填“ √ ”，错的后面括号中填“×”，4−8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分，共 16 分)。

1. 若 n 阶矩阵 A 可逆，则其伴随矩阵 A^* 满足 $\left(A^*\right)^{-1}=|A|^{-1}A$。 (　　)

2. 若非齐次线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 有解，则它的解集合构成一个线性空间。 (　　)

3. 若 T 是欧氏空间 V 中的一个正交变换，V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则必有 $T\alpha_1,T\alpha_2,T\alpha_3$ 线性相关。 (　　)

4. $\mathbf{R}^n(n>10)$ 中一组非全零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间的维数为 (　　)

（A）0 或 1 或 2 或 3.　　（B）0 或 1 或 2　　（C）1 或 2.　　（D）1 或 2 或 3

5. n 阶方阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量是 A 与对角矩阵相似的 (　　) 条件。

（A）充分　　(B) 必要　　(C) 充分必要　　(D) 既不充分也不必要

6. 设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 (　　)

（A）$A-\lambda E=B-\lambda E$；　　（B）A 与 B 有相同的特征值和特征向量;

（C）A 与 B 都相似于一个对角阵；　　（D）对任意实数 t，$A-tE$ 与 $B-tE$ 相似。

7. 若方阵 $A_{n\times n}$ 不可逆，则 A 的列向量中 (　　)

（A）必有一个向量为零向量；　　(B) 必有二个向量对应分量成比例；

(C) 必有一个向量是其余向量的线性组合；(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合。

8. 设齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为 $X=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，则系数矩阵 A 为 (　　)

（A）$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

二 、行列式计算　（第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

1．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\0 & a_2 & b_2 & 0\\0 & b_3 & a_3 & 0\\b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$.

2. 计算n阶行列式$d_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}+n-1 & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n+n \end{vmatrix}$，其中$n>2$。

三、设n阶方阵A和B满足$AB=A+B$，E为n阶单位矩阵。（本题 10 分）

(1) 证明$A-E$是可逆矩阵； (2) 若$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$B$。

四、对于线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$，$a,b$为何值时，方程组无解、有唯一解和有无穷多组解？并对方程组有无穷多组解的情形，求其通解。（本题 14 分）

五、设R^4中的一个基e_1,e_2,e_3,e_4依次为以下 4 个向量：（本题 10 分）

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{又} \alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

是R^4的另一个基。

1）求由基e_1，e_2，e_3，e_4到基α_1，α_2，α_3，α_4的过渡矩阵；

2）求向量$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^{\mathrm{T}}$在后一组基下的坐标。

六、已知二次型：$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_3x_4$， 用正交变换化$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$为标准形，并求出所用的正交变换； 再求出该二次型的符号差。(本题 14 分)

七、已知$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_5,\alpha_5+\alpha_1$线性无关，

证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关。（本题 9 分）

八、n维欧氏空间V，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$是$V$内的一个向量组，令

$$D=\begin{vmatrix} \langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle \\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle \end{vmatrix},$$

证明：若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，则$D\neq 0$。　（本题 9 分）

九、自然数m,n满足$m>n>0$。A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，且**秩**$(A)=$**秩**$(B)=n$，证明：**秩**$(AB)=n$。　（本题 4 分）