Matemática Discreta

Cláudia Linhares Sales

May 29, 2017

Princípio da Indução, Sequências e Recorrências

Definição 1 (Princípio da Indução)**.** *Seja A um conjunto que satisfaz às duas condições seguintes:*

1. $0 \in A$;
2. *Se* $n \in A$, *então* $n + 1 \in A$

então, $A = \mathbb{N}$.

A condição (1) acima é chamada de **base da indução**, enquanto que a (2) é chamada de **passo da indução**. Observe que (2) é da forma $P \to Q$ e P, ou seja "$n \in A$"", é a denominada **hipótese de indução**.

Observe que A é um conjunto indutivo, segundo a definição de tais conjuntos dada anteriormente.

Em geral, usa-se o Princípio da Indução da seguinte forma:

1. Define-se um predicado para o qual se deseja provar que $P(n)$ é verdade, para todo $n \in \mathbb{N}$;
2. Define-se o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$;
3. Prova-se que as condições (1) e (2) do Princípio da Indução são válidas para A;
4. Conclui-se que uma vez que A, contendo os valores n para os quais $P(n)$ é verdade é igual a $\mathbb{N}$, então $P(n)$ é verdade para todo n.

Exemplo 2. *Prove que para todo* $n > 0$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo 3. *Prove que para todo número natural* n, $n^3 - n$ *é divisível por* 3.

Exemplo 4. *Prove que para todo número natural* n, $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Exemplo 5. *Prove que a soma dos* n *primeiros inteiros positivos ímpares é* n^2.

Exemplo 6. *Prove que para todo número natural* $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Exemplo 7. *Prove que para todo conjunto* A *com* $|A| = k$, $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$

Exemplo 8. *Prove que apenas com selos de 3 centavos e 5 centavos é possível enviar correspondências de qualquer valor a partir de 8 centavos.*

Exemplo 9. *Prove que qualquer tabuleiro de xadrez de dimensões 2^n por 2^n, onde falta exatamente um quadrado, pode ser inteiramente coberto por L-triminós.*

Passaremos a tratar agora de equações recursivas, cujas soluções requerem frequentemente o uso do princípio da indução.

Definição 10 (Sequência)**.** *Uma sequência é uma função de um subconjunto do conjuntos dos inteiros (usualmente $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^+$ para um conjunto S. Usa-se a notação a_n para denotar a imagem do inteiro n. Diz-que a_n é um termo da sequencia e denota-se a sequência por $\{a_n\}$.*

Exemplo 11. *Considere a sequência $\{a_n\}$ onde $a_n = \frac{1}{n}$. Quais são os seus elementos?*

Definição 12. *Uma progressão aritmética é uma sequência da forma*

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + nd, \ldots$$

onde o termo inicial a e a diferença comum d são números reais. Observe que o termo $a_0 = a$ e o termo $a_n = a + nd$ para $n \geq 1$.

Exemplo 13. *A sequência $\{s_n\}$, com $s_n = -1 + 4n$ e $\{t_n\}$, com $t_n = 7 - 3n$ são progressões aritméticas com termos inicial e diferença comum igual a -1 e 4; 7 e -3, respectivamente, se começa-se com $n = 0$.*

A lista dos termos $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ começa com $-1, 3, 7, 11, \ldots$ e a lista dos termos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ começa com $7, 4, 1, -2, \ldots$.

Definição 14. *Uma progressão geométrica é uma sequência da forma*

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$$

onde o termo inicial a e a razão r são números reais. Observe que o termo $a_1 = a$ e o termo $a_n = ar^n$.

Exemplo 15. *As sequencias $\{b_n\}$ com $b_n = (-1)^n$, $\{c_n\}$, com $c_n = 2.5^n$ e $\{d_n\}$ com $d_n = 6.\frac{1}{3}^n$ são progressões geométricas com termo inicial e razão 1 e -1, 2 e 5 e 6 e $\frac{1}{3}$, respectivamente, se começa-se com $n = 0$.*

Logo, a lista dos termos $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ começa com $1, -1, 1, -1, \ldots$; A lista dos termos $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ começa com $2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$; e a listas dos termos $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots$ começa com $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$.

Umas das sequências mais conhecidas na matemática é a **Sequência de Fibonacci**. com termos iniciais $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, a sequência define o termo a_n como a soma dos dois termos imediatamente anteriores, para $n \geq 3$.

Mais especificamente, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$, com termos iniciais $a_1 = a_2 = 1$.

Não é possível descrever corretamente a Sequência de Fibonacci sem o uso da relação de recorrência (ou de uma equação de recorrência), cuja definição segue.

Definição 16 (Relação de Recorrência)**.** *Uma relação de recorrência para uma sequência* $\{a_n\}$ *é uma equação que expressa* a_n *usando termos prévios da sequência, a saber* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$*, para todos os inteiros* $n \geq n_0$*, onde* n_0 *é um inteiro não negativo. Uma sequência é chamada de solução para uma equação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência (dizemos que a relação de recorrência define a sequência recursivamente).*

No jargão da computação, ao se definir uma relação (ou equação) de recorrência, define-se:

1. A base ou fundo da recursão, que são os valores iniciais da sequência não definidos em termos dos termos anteriores;

2. A equação de recorrência, definida em termos de termos anteriores.

Exemplo 17. *No caso da Sequência de Fibonacci, temos que:*

$$a_n = \begin{cases} 1, & se\, n = 1\, ou\, n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & caso\, contrario \end{cases} \tag{1}$$

Exemplo 18. *Seja* $\{a_n\}$ *a sequência que satisfaz a relação de recorrência:*

$$a_n = \begin{cases} 2, & se\, n = 0 \\ a_{n-1} + 3, & caso\, contrario \end{cases} \tag{2}$$

Quem são os primeiros 5 números dessa sequência? Quantas passos são necessários para calcular a_5*?*

Exemplo 19.

Seja $\{a_n\}$ uma sequência que satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = \begin{cases} 3, & se\, n = 0 \\ 5, & se\, n = 1 \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & caso\, contrario \end{cases} \tag{3}$$

Quem são a_2 e a_3? Quantos passos são necessários para calcular a_4 ?

Observe que o ideal seria, dada uma relação de recorrência de uma sequência, saber o valor de a_n em um único passo. Para tanto, seria preciso redefinir a_n sem se reportar a elementos anteriores da sequencia. Chamamos esse processo de solução de uma relação ou equação de recorrência.

Exemplo 20. *A sequência de fatorial de n,* $n!$ *admite a seguinte relação de recorrência:*

$$a_n = \begin{cases} 1, & se\, n = 1 \\ n.a_{n-1}, & caso\, contrario \end{cases} \tag{4}$$

Logo, $a_n = n! = n.(n_1).(n_2)...(1)$ *e para calcular* a_n *não precisamos da relação de recorrência.*

Exemplo 21. *Será que* $a_n = 3n$ *é a solução para a equação de recorrência* $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$*, para* $n = 2, 3, 4, \ldots$*? Suponha que* $a_n = 3n$*. Substituindo na equação de recorrência teríamos* $a_n = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n$*. Logo, a resposta é positiva.*

Exemplo 22. *Será que* $a_n = 2^n$ *é a solução para a equação de recorrência* $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$*, para* $n = 2, 3, 4, \ldots$*? Note que* $a_0 = 1$*,* $a_1 = 2$ *e* $a_2 = 4$*. Porém, pela equação de recorrência* $a_2 = 2a_1 - a_0 = 2.2 - 1 = 3 \neq 4$*. Logo, a resposta é negativa.*

Exemplo 23. *Será que* $a_n = 5$ *é a solução para a equação de recorrência* $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$*, para* $n = 2, 3, 4, \ldots$*? Substituindo na equação de recorrência, temos que* $a_n = 2.5 - 5 = 5$*. Logo, a resposta é positiva.*

Vamos ver dois métodos para resolver equações de recorrência: o método do palpite e o método da substituição.