Практическое занятие 12 «Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва»

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач

1) Непрерывность функции в точке

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если

1) она определена в точке x_0;

2) в точке x_0 существует конечный предел функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.

Таким образом, функция ***непрерывна в точке*** x_0, если $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)}$

2) Классификация точек разрыва функции

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва функции***. Если $x = x_0$ – точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней не выполняется, по крайней мере, одно из условий определения непрерывности функции.

Все точки разрыва функции делятся на точки разрыва первого и второго рода.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы $A_1 = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $A_2 = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, при этом:

1) если $A_1 = A_2 \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** 1-***го рода***;

2) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется ***точкой неустранимого разрыва*** 1-***го рода***. Величину $|A_1 - A_2|$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Разрыв возможен:

1) в точках, в которых функция не существует;

2) в точках, в которых меняется аналитическое задание функции (формула).

Примеры решения задач

Пример 1 Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & если \;\; x < -1, \\ x^2 - 2, & если \;\; -1 \le x < 2, \\ 2 - x, & если \;\; 2 \le x < 5, \\ x - 8, & если \;\; x > 5, \\ 2, & если \;\; x = 5. \end{cases}$

Решение. В точках $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ меняется аналитическое задание функции (формула), поэтому в этих точках возможен разрыв функции. Эти точки числовую ось разобьют на 4 интервала (рисунок 1).

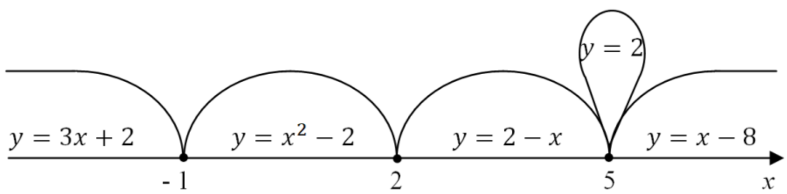

Рисунок 1

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_1 = -1$. Для этого найдем односторонние пределы функции в этой точке.

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} (3x + 2) = -1$;

$\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} f(x^2 - 2) = -1$.

Так как односторонние пределы конечны и равны, то найдем значение функции в точке $x_1 = -1$:

$f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$.

Так как $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = f(-1)$, то в точке $x_1 = -1$ функция *непрерывна*.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_2 = 2$. Для этого найдем односторонние пределы функции в этой точке.

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} f(x^2 - 2) = 2$;

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} f(2 - x) = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2+0} f(x)$.

Вывод: так как односторонние пределы функции в точке $x_2 = 2$ конечные, но не равные ($\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2+0} f(x)$), то точка $x_2 = 2$ является *точкой неустранимого разрыва* 1-*го рода*. Скачок функции в точке $x_2 = 2$ равен $|2 - 0| = 1$.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_3 = 5$. Для этого найдем односторонние пределы функции в этой точке.

$\lim\limits_{x \to 5-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} f(2 - x) = -3$;

$\lim\limits_{x \to 5+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 5+0} f(x - 8) = -3$.

Так как односторонние пределы конечны и равны, то найдем значение функции в точке $x_3 = 5$: $f(5) = 2$.

Вывод: так как $\lim\limits_{x \to 5-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 5+0} f(x) \neq f(5)$, то точка $x_3 = 5$ является *точкой устранимого разрыва* 1-*го рода*.

Схематично изобразим график исследуемой функции (рисунок 2).

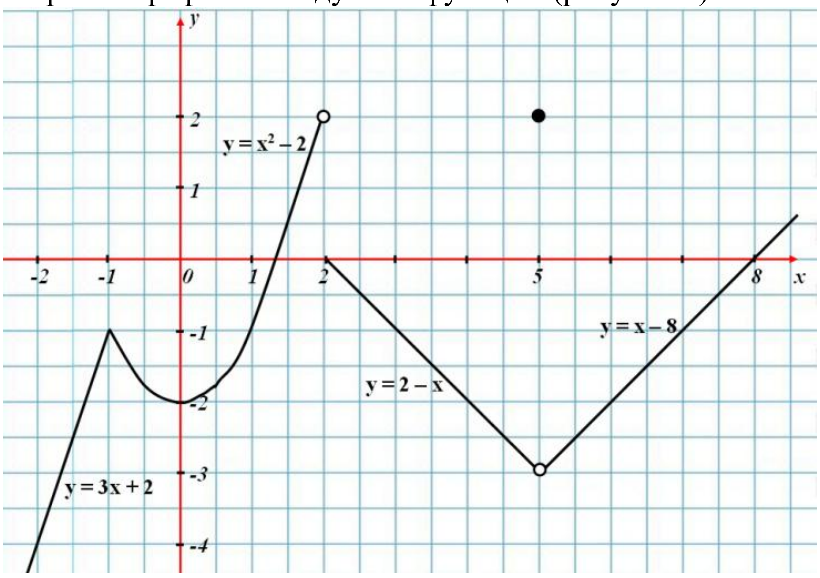

Рисунок 2

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$.

Решение. Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно, $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} < 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = -1$, а $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 1$.

Вывод: так как односторонние пределы функции в точке $x=3$ конечные, но не равные ($\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$), то точка $x=3$ является ***точкой неустранимого разрыва*** 1-***го рода***. Скачок функции в этой точке равен $|-1-1|=2$.

Пример 3 Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{3}{x+4}$.

Решение. В точке $x=-4$ функция не существует, поэтому в этой точке функция имеет разрыв. Определим характер разрыва. Для этого найдем односторонние пределы в этой точке.

$$\lim_{x\to -4-0}\frac{3}{x+4} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ x\to -4-\alpha}}\frac{3}{(-4-\alpha)+4} = \lim_{\alpha\to -0}\frac{3}{-\alpha} = -\infty.$$

Вывод: так как один из односторонних пределов равен бесконечности, то точка $x=-4$ - *точка разрыва второго рода* функции.

Пример 4 Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=10^{\frac{2}{x-1}}$.

Решение. В точке $x=1$ функция не существует, поэтому в этой точке функция имеет разрыв. Определим характер разрыва. Для этого найдем односторонние пределы в этой точке.

$\lim\limits_{x\to 1-0} 10^{\frac{2}{x-1}} = \lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ x\to 1-\alpha}} 10^{\frac{2}{(1-\alpha)-1}} = \lim\limits_{\alpha\to -0} 10^{\frac{2}{-\alpha}} = 10^{-\infty} = 0$ (так как показательная функция, основание которой больше 1, стремиться к 0 при $x\to -\infty$ (рисунок 3)).

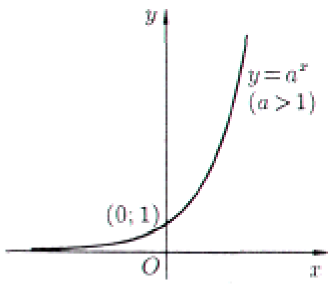

Рисунок 3

Так как левосторонний предел конечный, то найдем правосторонний предел:

$\lim\limits_{x\to 1+0} 10^{\frac{2}{x-1}} = \lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ x\to 1+\alpha}} 10^{\frac{2}{(1+\alpha)-1}} = \lim\limits_{\alpha\to 0} 10^{\frac{2}{\alpha}} = 10^{\infty} = \infty$ (так как показательная функция, основание которой больше 1, стремиться к $+\infty$ при $x\to -\infty$ (рисунок 3)).

Вывод: так как один из односторонних пределов равен бесконечности, то точка $x=1$ - *точка разрыва второго рода* функции.

Задачи для самостоятельного решения:

Вычислить пределы:

Исследовать на непрерывность функции:

1) № 317 $y=\dfrac{x^2}{x-2}$;

2) № 325 $y=arctg\,\dfrac{1}{x}$;

3) № 329 $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$;

4) $y=5^{\frac{3}{x+1}}$;

5) $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x<1 \\ 2x+1, & \text{если } 1\le x<2, \\ x+3, & \text{если } 2\le x<3, \\ 2x, & \text{если } x>3, \\ 7, & \text{если } x=3. \end{cases}$

6) $y=\begin{cases} 5x+1, & \text{если } x<0 \\ 2x^2+1, & \text{если } 0<x<2, \\ 3x-2, & \text{если } x\ge 2. \end{cases}$

7) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5-x}}$;

8) $y=\dfrac{7}{x+4}$.

Домашнее задание:

1. Повторить теоретический материал по теме «Предел функции».
2. Решить задачи [Демидович] № 327: $y = e^{\frac{1}{x+1}}$.
3. Исследовать на непрерывность функции:

1) $y = \dfrac{5}{x+7}$; 2) $y = 2^{\frac{5}{4-x}}$; 3) $y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x < -2, \\ x^2 - 4, & \text{если } -2 \le x < 1, \\ 4 - 2x, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$