

特別研究報告

題目

不均一な媒質におけるコモンモードの数値計算手法の開発

指導教員

阿部 真之

報告者

藤田晃司

令和4年2月10日

大阪大学 基礎工学部 電子物理科学科

エレクトロニクスコース

概要

私たちの身の回りには電子機器が存在しており、今後はさらに増加していく。それに伴い電磁ノイズの問題も増加していくものと予想できる。電磁ノイズの中でも対策が困難とされるコモンモードノイズを原理原則に基づいて解析することが求められている。

本研究グループの先行研究においては「電気回路の解析に用いる電信方程式がマクスウェルの積分方程式から導出されていること」、「計算コストが小さい」ことが理由でマクスウェルの積分方程式を用いてコモンモードを定量化している。これによって均一な媒質中のコモンモードノイズを時間領域において定量化できた。しかし積分方程式では媒質によって異なる伝搬速度を考慮できないという課題がある。実際の現象ではノーマルモードとコモンモードが異なる伝搬速度で伝搬している。設計の場では誘電体も含んだ実際の現象に近い条件でシミュレーションする方法が求められているので、不均一な媒質中のコモンモードを解析する必要がある。

そこで本研究ではマクスウェルの微分方程式を用いて誘電体含む不均一な媒質中のコモンモードノイズを解析する数値計算手法の開発を目的とした。マクスウェルの微分方程式に着目し、電磁ポテンシャルをその周辺の値のみで算出することを目指した。その際に極ベクトルと電場の関係を考慮することで誘電体を考慮した。

これによって媒質によって異なる伝搬速度を考慮したコモンモードを定量化することに成功した。

開発した数値計算手法を用いてノーマルモードとコモンモードの一部であるサムモードの信号線間が真空の場合と誘電体の場合で伝搬速度の違いを解析するためシミュレーションを行なった。その結果、ノーマルモードは信号線間の影響を大きく受け、誘電体があることで伝搬速度が遅くなった。一方でサムモードは信号線間の影響をあまり受けず、伝搬速度はほとんど変わらないという結果を得た。さらに3次元回路においても計算できることを示すため同軸線路におけるシミュレーションを行なった。その結果導体の位置によって異なる伝搬速度の電流が流れるという結果を得た。

このように不均一な媒質中の異なる伝搬速度をもつノーマルモードとコモンモードを同時に扱うことができるようになった。

今後は伝送線路に集中定数回路をつなぐ数値計算手法を学習し、本研究で開発した不均一な媒質中のコモンモードノイズの数値計算手法を取り入れることを目指す。様々な形状の電気回路のコモンモードノイズを解析することで電磁ノイズ問題の減少を目指す。

目次

第一章 序論	4
1.1 研究背景とコモンモードノイズの課題	4
1.2 研究目的	7
1.3 本論文の構成	7
第二章 本研究で用いる理論式とその導出	8
2.1 マクスウェル方程式	8
2.2 オームの法則、連続の式、ローレンツゲージ	9
2.3 誘電体中の電磁ポテンシャルの波動方程式の導出	9
2.4 差分法を用いた数値計算手法	11
第三章 マクスウェル方程式を基にした真空・誘電体・導体中の電磁ポテンシャルと電流密度・電荷の数値計算手法	12
3.1 誘電体を含む空間を伝搬する電磁ポテンシャルの数値計算手法	12
3.2 導体を伝搬する電磁ポテンシャル、電流密度、電荷の数値計算手法	21
3.3 HIGDON の吸収境界条件	28
第四章 誘電体を含む空間の 2 本線と 3 本線導体におけるノーマルモードとサムモードとコモンモードの解析	30
4.1 真空及び誘電体中の 2 本線導体におけるノーマルモードとサムモード	30
4.2 真空及び誘電体中の 3 本線導体におけるノーマルモードとコモンモード	40
4.3 誘電体の影響により減衰するサムモード・コモンモードの過渡応答解析	45
4.4 同軸線路におけるコモンモード	50
4.5 本章の結論	56
第五章 今後の展望	57
謝辞	58
参考文献	59

第一章 序論

1.1 研究背景とコモンモードノイズの課題

私たちの身の回りに数え切れないほどの電子機器が存在しており、今後はさらに増加していく。それに伴い電磁ノイズの問題も増加していくものと予想できる。近年では電気自動車や自動運転の研究が盛んに行われており、電磁ノイズの引き起こす被害も人命に関わるものになっていく。

本論文では電磁ノイズの中でも扱いが難しいとされるコモンモード(Common-Mode)ノイズについて研究していく。電気回路には一般的な信号と呼ばれるノーマルモード(Nomal-Mode)とコモンモードが流れている。まずノーマルモードについて図 1.1 を用いて述べる。

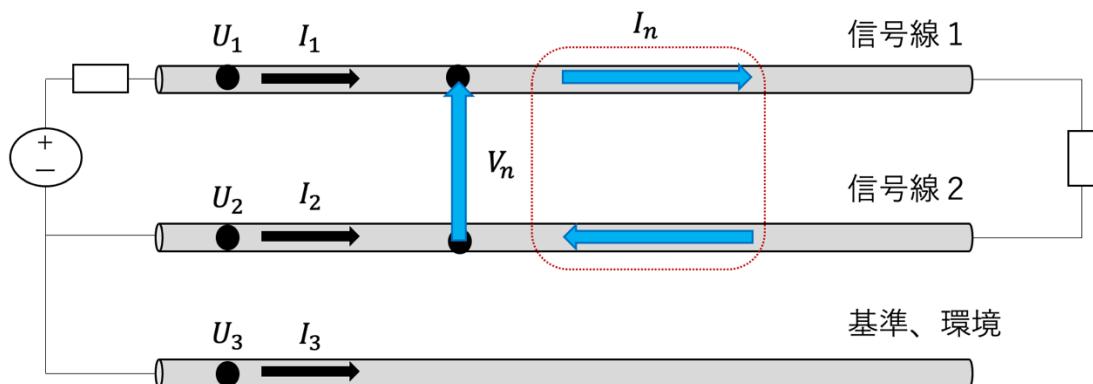


図 1.1: ノーマルモード.

図 1.1 の電気回路は 3 本の信号線で構成されており、信号線 1 と信号線 2 で回路を形成し、基準に接続している。信号線 1 と信号線 2 の電流の差をノーマルモード電流、さらに信号線 2 から見た信号線 1 の電位をノーマルモード電圧と呼ぶ。各スカラーポテンシャル、電流を用いて定式化すると次のようになる[1]。

$$I_n = \frac{1}{2}(I_1 - I_2), \quad (1.1)$$

$$V_n = U_1 - U_2. \quad (1.2)$$

コモンモードについて図 1.2 を用いて述べる。

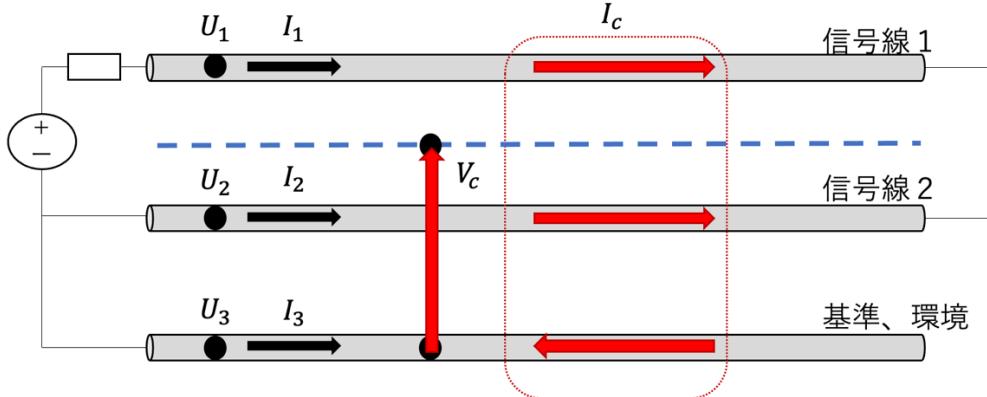


図 1.2: コモンモード・サムモード。

図 1.2 も図 1.1 同様の電気回路をもとにしている。信号線 1 と信号線 2 を同じ向きに流れるモードをサムモード(Sum-Mode)と呼び、サムモード電流とサムモード電圧を以下のように定義する[1]。

$$I_s = I_1 + I_2, \quad (1.3)$$

$$V_s = \frac{1}{2}(U_1 + U_2). \quad (1.4)$$

サムモード電流が基準、環境を通り戻ってくる電流をコモンモード電流と呼ぶ[2]。さらに基準、環境から見た信号線 1 と信号線 2 の和を平均した電位をコモンモード電圧と呼ぶ。

各スカラーポテンシャル、電流を用いて定式化すると次のようになる。

$$I_c = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 - I_3), \quad (1.5)$$

$$V_c = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) - U_3. \quad (1.6)$$

上記でも述べた通りノーマルモードは「差」のモードであるのに対して、コモンモードは「和」のモードである。よって、オシロスコープなどで測定することが非常に難しく、直接の測定が難しいことがコモンモードノイズの扱いが難しい理由の一つである。現在のコモンモード対策はフィルタやチョークコイルなど対症療法的のものが多く、対処部分以外の電磁放射などの対策ができていない[2]。そこで理論と原則に基づいたコモンモードノイズの定量化が必要である。

回路内の物理現象を解析する手法として一般的な電磁界シミュレーションがあるがコモンモードを解析するには適さない理由が 2 つある。1 つ目はコモンモードが「和」のモードであるので直接的なコモンモードの解析が電磁界シミュレーションでは難しいためである。2 つ目は電磁界シミュレーションでは基準導体を理想導体と見なすため、回路と環境の間を伝搬するコモンモードの環境での物理現象を考慮できないためである。そこで環境

も回路と等価に扱うことでのできる電磁ポテンシャルを用いた数値計算手法が必要である[3]。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.8)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.9)$$

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.10)$$

式(1.7)、(1.8)、(1.9)、(1.10)はマクスウェルの積分方程式である。先行研究においてはマクスウェルの積分方程式から導出できるベクトルポテンシャル \mathbf{A} の波動方程式(1.11)、スカラーポテンシャル U の波動方程式(1.12)、連続の式(1.13)、オームの法則(1.14)を用いて3次元のコモンモード時間領域において定量化している[2]。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.11)$$

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d\mathbf{r}' \frac{q\left(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.13)$$

$$-\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \rho \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (1.14)$$

マクスウェルの積分方程式を用いたこの数値計算手法は求めたい領域のみが計算領域となるため計算コストが小さいというメリットがある[4]。しかし、不均一な媒質中の計算ができないというデメリットがある。電磁ポテンシャルは媒質の誘電率と透磁率に依存する。空間の媒質が不均一であると、ある点がある点に及ぼす影響が経路によって変化するので、それに伴い式(1.11)、(1.12)のように遅延時間が変化する。経路によって変化する遅延時間を全て考慮することは現状不可能である。

以上のことよりコモンモードは均一な媒質中では定量化が進んでいるが、不均一な媒質中では定量化できていないという現状がある[5]。

1.2 研究目的

1.1 研究背景で述べた理由で不均一な媒質中のコモンモードの数値計算手法の開発は難しい。マクスウェルの積分形では不均一な媒質による異なる遅延時間を考慮できないことが問題であった。マクスウェルの微分方程式を用いることで計算領域全体ではなく、求めたい点周辺の値のみを用いてその値を算出できる。つまり、周辺の値のみしか用いないので遅延時間を考慮する必要がなくなるということである。本研究ではより現実に近い現象を解析するため、このマクスウェルの微分方程式を用いて不均一な媒質中でのコモンモードの数値計算手法を開発していく。その数値計算手法を用いて異なる伝搬速度をもつノーマルモードとコモンモードを同時に解析していくことで、伝搬速度の違いや減衰する様子を解析する。さらに私たちの身の回りに多く活用されている同軸線路におけるコモンモードも解析していく。

現状、製品開発の場ではノーマルモードで発生する電磁ノイズしか考慮されていないことが多い。本研究で開発したコモンモードの数値計算手法を用いることでコモンモードも考慮した電気回路の設計が可能となる[6]。

1.3 本論文の構成

本論文での構成を以下に述べる。

第一章では本研究に関する背景とコモンモードノイズの課題、本研究の目的について述べる。

第二章では本研究で用いる理論式とその導出方法を述べた。

第三章では誘電体を考慮したコモンモードノイズを定量化するための数値計算手法について述べた。

第四章では第三章で開発した数値計算手法を用いて様々な系におけるコモンモードを解析し、定量化した。特にノーマルモード、サムモード、コモンモードの伝搬速度や減衰する様子を定量化する。

第五章では本研究の結論と本研究をした上で今後の展望について述べた。

第二章 本研究で用いる理論式とその導出

2.1 マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q(\mathbf{r}, t)}{\epsilon}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (2.4)$$

(2.1), (2.2), (2.3), (2.4)はマクスウェル方程式の微分形である[7]。ここで**E**は電場、**B**は磁場、*q*は電荷密度、**J**は電流密度、 ϵ は誘電率、 μ は透磁率である。(2.1)の式はガウスの法則、(2.2)の式は単一の磁荷が存在しないこと、(2.3)の式はファラデーの法則、(2.4)の式はアンペールの法則を表している。本研究においては電気回路を構成する導体内の物理現象を取り扱うために電磁場ではなく、スカラーポテンシャル**B**、ベクトルポテンシャル**A**の関係式を導出していく。よって、電場**E**、磁場**B**とスカラーポテンシャル**B**、ベクトルポテンシャル**A**の関係式を導出していく。まず、ベクトルポテンシャルの定義より式(2.5)とかける。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

さらに(2.3)のファラデーの法則の式に(2.5)の式を代入することで下の式となる。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.7)$$

ここで、任意のスカラーフィeldに対して次の式が成り立つことが知られている。

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0. \quad (2.8)$$

式(2.7)を用いることで下記の式を得ることができる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.9)$$

以上(2.5)、(2.9)が電磁場とベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルの関係式である。

2.2 オームの法則、連続の式、ローレンツゲージ

オームの法則は電流密度 \mathbf{J} と電場 \mathbf{E} を用いて次のように表す[8]。

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.10)$$

ここで σ は電気導電率を表す。式(3.9)を代入することで、

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \left(-\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right), \quad (2.11)$$

と表すことができる。さらに $\sigma = \frac{1}{\rho}$ によって電気伝導度の代わりに抵抗率を用いるとオームの法則は以下のようになる。

$$-\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \rho \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (2.12)$$

また、導体中において電荷と電流密度は以下の連続の式を満たす。

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.13)$$

また、ローレンツゲージは下の式で表す[9]。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.14)$$

2.3 誘電体中の電磁ポテンシャルの波動方程式の導出

誘電体は不導体または絶縁体とも呼ばれ、金属の特徴である自由電子を持たない[10]。誘電体では電子は各原子に属し、電場に対して僅かに変位する程度である。この電荷がわずかに変異する現象を分極と呼ぶ。誘電体は分極しうる分子の集合体ともいえ、分極によりできた電荷を分極電荷と呼ぶ。分極した分子は双極子モーメント $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)(= \mathbf{l}Q)$ を持つ。ここでは \mathbf{l} は双極子モーメントに含む二つの電子の距離ベクトル、 Q は電荷の大きさである。単位体積あたりの双極子モーメント $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ を誘電分極または分極ベクトルという。単位体積あたりの分子の数を n とすれば下の式(2.15)のように表せる。

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = n \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = n \mathbf{l}(\mathbf{r}, t) Q. \quad (2.15)$$

特別な場合を除いて、 \mathbf{P} は電場 \mathbf{E} に比例する。電気感受率 $\chi_e(\mathbf{r})$ によって次式(2.16)で表せる。

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.16)$$

さらに、電束密度 \mathbf{D} を双極子モーメント \mathbf{P} を用いて定義する。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t). \quad (2.17)$$

式(2.17)に式(2.16)を代入することで次の式を得る。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) (1 + \chi_e(\mathbf{r})). \quad (2.18)$$

式(2.18)を用いてまずスカラーポテンシャル U の誘電体を考慮した波動方程式を導出していく。式(2.1)のガウスの法則を変形し、式(2.9)、(2.18)を代入する。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial A(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \chi_e(\mathbf{r}) \left(-\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right). \quad (2.19)$$

式(2.19)を整理することで次の式を得ることができる。

$$(1 + \chi_e(\mathbf{r})) \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) + \nabla^2 U(\mathbf{r}, t) \right) + \nabla \cdot \chi_e(\mathbf{r}) \left(\nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (2.20)$$

ここでローレンツゲージの式(2.14)を用いて式(2.20)の $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ に代入する。

$$(1 + \chi_e(\mathbf{r})) \left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 U(\mathbf{r}, t) \right) + \nabla \cdot \chi_e(\mathbf{r}) \left(\nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (2.21)$$

以上、式(2.21)がスカラーポテンシャル U の波動方程式である。

続いて誘電体を考慮したベクトルポテンシャル \mathbf{A} の波動方程式を導出する式(2.4)アンペールの法則の $\epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ を右辺に移行する。

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.22)$$

次に式(2.5)を変形することで式(2.22)の左辺と同じ形を作る。

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.23)$$

また、式(2.22)の右辺を式(2.18)を用いて整理する。

$$\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) (1 + \chi_e(\mathbf{r})) \right). \quad (2.24)$$

式(2.9)を代入することで式(2.25)となる。

$$\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu \left((1 + \chi_e(\mathbf{r})) \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \right). \quad (2.25)$$

よって

$$\epsilon_0 \mu \left((1 + \chi_e(\mathbf{r})) \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \right) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (2.26)$$

さらにローレンツゲージの式を用いることができる形に直すと、

$$\begin{aligned} \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu (1 + \chi_e(\mathbf{r})) \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu \chi_e(\mathbf{r}) \nabla \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここで式(2.14)を用いると、

$$\epsilon_0 \mu (1 + \chi_e(\mathbf{r})) \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu \chi_e(\mathbf{r}) \nabla \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (2.28)$$

以上、式(2.28)が誘電体を考慮したベクトルポテンシャルの波動方程式である。

2.4 差分法を用いた数値計算手法

第二章で導出した式を元にスカラーポテンシャルやベクトルポテンシャル、コモンモードを導出していく際に微分方程式や偏微分方程式を解いていく必要がある。数値計算を用いてそれらを解く際には差分法を用いて方程式を離散化する作業が必要となってくる[11]。

まず、微分の定義は以下の通りである。

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad (2.29)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.30)$$

Δt を極限まで小さくすれば t における微分を導出することができる。しかし、プログラムで数値計算するときは離散的な値を用いるため、以下のように微分を近似する。

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad (2.31)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t) - v(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.32)$$

式(2.31)を前進差分近似、式(2.32)を後進差分近似と呼ぶ。以上より、微分を近似することができた。また、前方、後方だけでなく両側でも近似することができる。

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - v\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}. \quad (2.33)$$

式(3.5)を中心差分近似と呼び、本研究ではこの中心差分近似を用いる。

第三章 マクスウェル方程式を基にした真空・誘電体・導体中の電磁ポテンシャルと電流密度・電荷の数値計算手法

3.1 誘電体を含む空間を伝搬する電磁ポテンシャルの数値計算手法

真空中、または、誘電体中を伝搬する電磁ポテンシャルを求めるには電磁ポテンシャルの波動方程式(2.21)、(2.28)とローレンツゲージの式を用いる必要がある。電磁ポテンシャルを求める方法は二つである。一つ目はベクトルポテンシャル \mathbf{A} の波動方程式(2.28)を用いてベクトルポテンシャル \mathbf{A} を求め、その値を元にローレンツゲージの式(2.14)を用いてスカラーポテンシャル U 求める方法である。二つ目はスカラーポテンシャル U の波動方程式(2.21)を用いてスカラーポテンシャルを求める方法である。前者、後者ともに同じ結果が得られるので本研究においては一つ目の方法を用いる。

ここで本論文においては記述しやすいように以下のような記載法を用いる。

$$A_x{}^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = A\left(k\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta z, m\Delta t\right), \quad (3.1)$$

$$A_y{}^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} = A\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, l\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta z, m\Delta t\right), \quad (3.2)$$

$$A_z{}^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} = A\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta z, m\Delta t\right), \quad (3.3)$$

$$j_x{}^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = j\left(k\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta z, m\Delta t\right), \quad (3.4)$$

$$j_y{}^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} = j\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, l\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta z, m\Delta t\right), \quad (3.5)$$

$$j_z{}^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} = j\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta z, m\Delta t\right), \quad (3.6)$$

$$U{}^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = U\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta z, m\Delta t\right), \quad (3.7)$$

$$k = 0, 1, \dots, N_x, \quad l = 0, 1, \dots, N_y, \quad n = 0, 1, \dots, N_z, \quad m = 0, 1, \dots, N_t. \quad (3.8)$$

ここで N_x 、 N_y 、 N_z はそれぞれの方向に空間を等分した数で、 N_t は時間を等分した数を表す。半整数ずれている要素ではそれぞれ値が1つ少なくなることに注意する必要がある。下の図3.1に \mathbf{A} と U の位置関係を示す。ここで \mathbf{j} の位置は \mathbf{A} と同じであるので省略している。

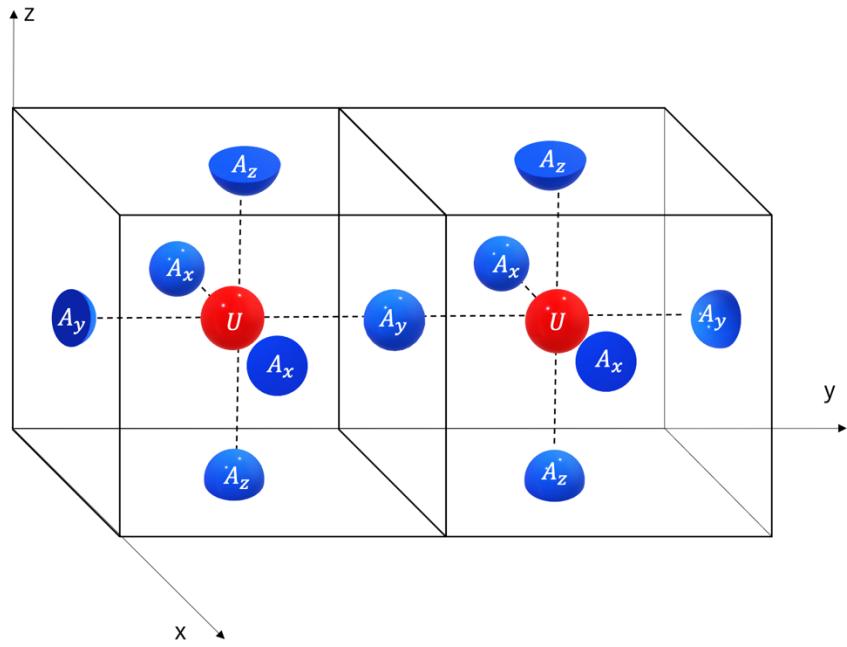


図 3.1: ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル U の位置関係.

離散化する際にベクトルポテンシャル A_x 、電流密度 j_x とスカラーポテンシャル U は x 方向と時間に対して $\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta t}{2}$ ずつずれていることに注意する必要がある。さらに下の図 3.2 を参考してわかる通りベクトルポテンシャル A_x の x 方向の離散点はスカラーポテンシャル U より 1 つ多くなる。 A_x と U の空間と時間に対する位置関係を図 3.2 に示す。縦軸が時間、横軸が x 方向の空間を表す。

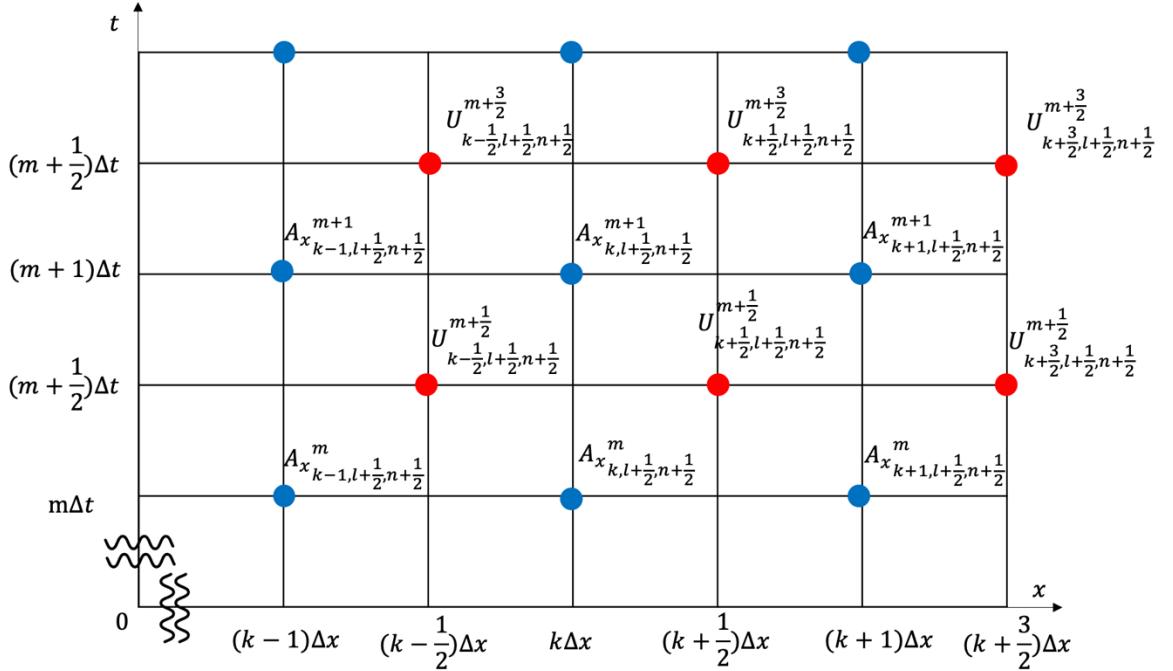


図 3.2: A_x と U の位置関係.

電流 j_x も図 3.2 のベクトルポテンシャル A_x と同じ配位点に位置する。 A_y 、 j_y は y 方向と時間に対して $\frac{\Delta y}{2}$ 、 $\frac{\Delta t}{2}$ ずれ、 A_z 、 j_z は z 方向と時間に対して $\frac{\Delta z}{2}$ 、 $\frac{\Delta t}{2}$ ずれた位置に配位する。

まずベクトルポテンシャル \mathbf{A} の波动方程式(2.28)を中心差分方程式を用いて離散化していく。まず A_x について点 $(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}, t)$ を中心に離散化する。項を一つずつ離散化していくと、

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mu (1 + \chi_e(\mathbf{r})) \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \epsilon_0 \mu \left(1 + \chi_{e,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A_x^{m+\frac{1}{2}}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - A_x^{m-\frac{1}{2}}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right), \\ &= \epsilon_0 \mu \left(1 + \chi_{e,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right) \frac{A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^{m-1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
-\nabla^2 \mathbf{A}_x(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_{x,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m - A_{x,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_{x,k,l+1,n+\frac{1}{2}}^m - A_{x,k,l-1,n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta y} \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+1}^m - A_{x,k,l+\frac{1}{2},n-1}^m}{\Delta z} \right), \\
&= -\frac{A_{x,k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k-1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta x^2} - \frac{A_{x,k,l+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k,l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta y^2} \\
&\quad - \frac{A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k,l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z^2}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 \mu \chi_e(\mathbf{r}) \nabla \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \epsilon_0 \mu \left(1 + \chi_{e,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m - U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta x} \right), \\
&= \epsilon_0 \mu_0 \chi_{e,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \frac{U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} - U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} + U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x \Delta t}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

よって A_x について式(2.28)を離散化すると次の結果となる。

$$\begin{aligned}
&-\frac{A_{x,k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k-1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta x^2} - \frac{A_{x,k,l+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k,l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta y^2} \\
&\quad - \frac{A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k,l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z^2} \\
&\quad + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \chi_{e,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) \frac{A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+1} - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-1}}{\Delta t^2} \\
&\quad + \epsilon_0 \mu_0 \chi_{e,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \frac{U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} - U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} + U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x \Delta t} \\
&= \mu J_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

ここで χ_e はスカラーポテンシャル U と同じ位置に中心が存在するため次のように平均を取る。

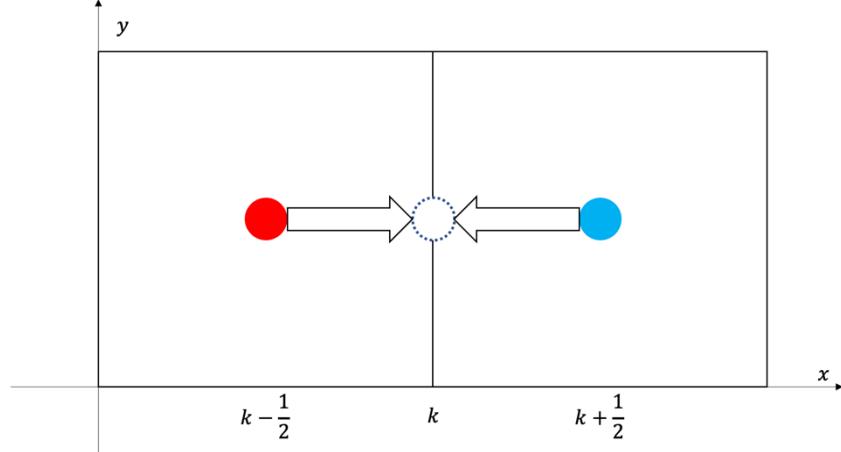


図 3.3: 感受率の平均化.

$$\chi_{e,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2}. \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A_x^m_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k-1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{A_x^m_{k,l+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k,l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \\
& - \frac{A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^{m-1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta t^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + U^{m-\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x \Delta t} \\
& = \mu J_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

A_y は点 $\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta x, l \Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta z, m \Delta t \right)$ 、 A_z は点 $\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right) \Delta y, n \Delta z, m \Delta t \right)$ を中心に離散化することで以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& - \frac{A_y^m_{k+\frac{3}{2},l,n+\frac{1}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^m_{k-\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{A_y^m_{k+\frac{1}{2},l+1,n+\frac{1}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^m_{k+\frac{1}{2},l-1,n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \\
& - \frac{A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{3}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}}{2} \right) \frac{A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta t^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}}{2} \right) \frac{U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta y \Delta t} \\
& = \mu_0 J_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{A_z^m_{k+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2},n} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^m_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta x^2} - \frac{A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2},n} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^m_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n}}{\Delta y^2} \\
& - \frac{A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+1} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-1}}{\Delta z^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}}{2} \right) \frac{A_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta t^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}}{2} \right) \frac{U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} + U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{\Delta z \Delta t} \\
& = \mu_0 J_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

続いて式(2.14)のローレンツゲージの式を点 $\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta z, (m + 1)\Delta t\right)$ を中心に離散化する。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{A_x^{m+1}_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+1,n+\frac{1}{2}} - A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \\ + \frac{A_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+1} - A_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta z}. \quad (3.17)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{U^{m+\frac{3}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}. \quad (3.18)$$

よって式(2.14)は次のように離散化できる。

$$\frac{A_x^{m+1}_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+1,n+\frac{1}{2}} - A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{A_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+1} - A_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta z} \\ + \mu_0 \epsilon_0 \frac{U^{m+\frac{3}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0. \quad (3.19)$$

以上で全ての式を離散化したので、未知数を左辺に移行することで各未知数に対する更新式を得る。

$$A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \\ = \frac{\Delta t^2}{\epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}}{2} \right)} \left(\frac{A_x^m_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k-1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right. \\ \left. + \frac{A_x^m_{k,l+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k,l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} + \frac{A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \right. \\ \left. - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\Delta x \Delta t} \left(\frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}}{2} \right) \left(U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right. \right. \\ \left. \left. + U^{m-\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) + \mu_0 J_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) + 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - A_x^{m-1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
& A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^{m+1} \\
&= \frac{\Delta t^2}{\epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} \left(\frac{A_{y_{k+\frac{3}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^m - 2A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^m + A_{y_{k-\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^m}{\Delta x^2} \right. \\
&+ \frac{A_{y_{k+\frac{1}{2}l+1,n+\frac{1}{2}}}^m - 2A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^m + A_{y_{k+\frac{1}{2}l-1,n+\frac{1}{2}}}^m}{\Delta y^2} + \frac{A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{3}{2}}}^m - 2A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^m + A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n-\frac{1}{2}}}^m}{\Delta z^2} \\
&- \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\Delta y \Delta t} \left(\frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + U_{k+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \right) + \mu_0 J_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^m \Big) + 2A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^m - A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^{m-1}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^{m+1} \\
&= \frac{\Delta t^2}{\epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right)} \left(\frac{A_{z_{k+\frac{3}{2}l+\frac{1}{2}n}}^m - 2A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^m + A_{z_{k-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^m}{\Delta x^2} \right. \\
&+ \frac{A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{3}{2}n}}^m - 2A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^m + A_{z_{k+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n}}^m}{\Delta y^2} + \frac{A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n+1}}^m - 2A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^m + A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n-1}}^m}{\Delta z^2} \\
&- \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\Delta z \Delta t} \left(\frac{\chi_{e_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}} + \chi_{e_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \right) + \mu_0 J_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^m \Big) + 2A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^m - A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^{m-1}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{3}{2}} &= -\frac{\Delta t}{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{A_{x_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}^{m+1} - A_{x_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}^{m+1}}{\Delta x} + \frac{A_{y_{k+\frac{1}{2}l+1,n+\frac{1}{2}}}^{m+1} - A_{y_{k+\frac{1}{2}l,n+\frac{1}{2}}}^{m+1}}{\Delta y} \right. \\
&\left. + \frac{A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n+1}}^{m+1} - A_{z_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n}}^{m+1}}{\Delta z} \right) + U_{k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

誘電体中を伝搬する数値計算手法は以上である。また、 $\chi_e = 0$ の時に真空中の電磁ポテンシャルを求めることができる。また真空中、誘電体には電流は流れないとめ電流密度 \mathbf{j} には電流印加点にのみ値が入る。ここで A_x と U の計算の順序の関係を図 3.3 に示す。

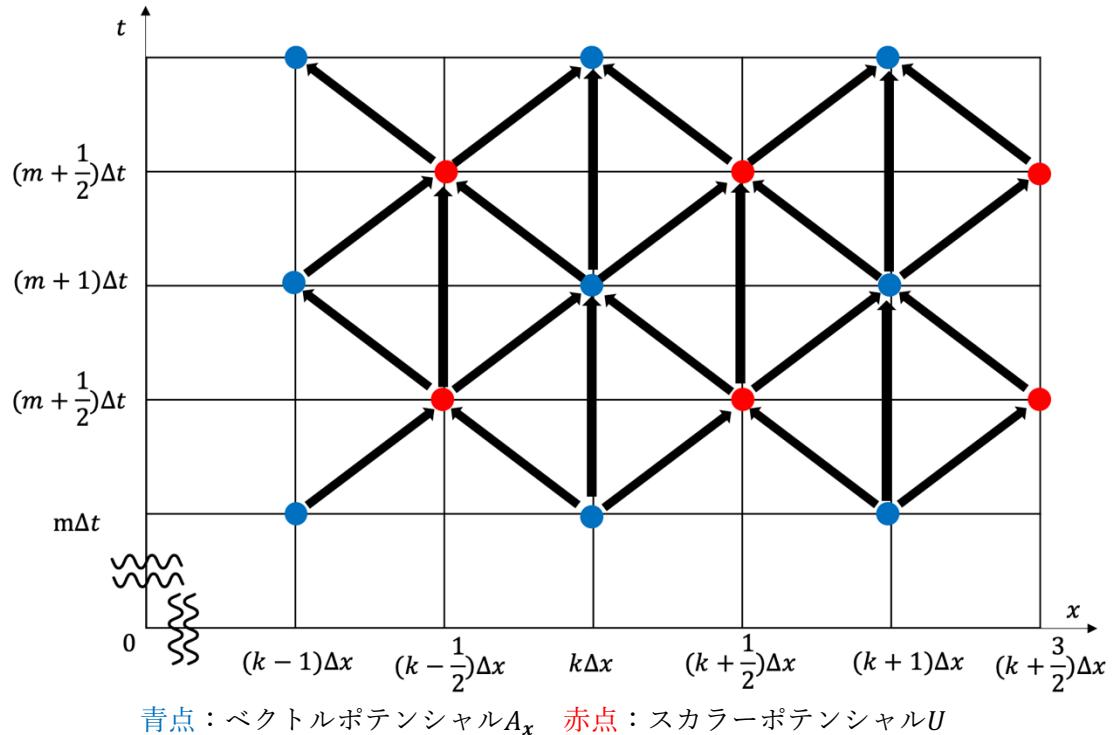


図 3.4: 空間中での数値計算の順序と各値の位置関係.

図 3.3 は簡単のため x 方向のみ記載している。図 3.2 に示すように、任意の点のベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、はその点の Δt 前の値とその点の $\frac{\Delta t}{2}$ 秒前の両側のスカラーポテンシャル U の値を用いて計算できる。スカラーポтенシャル U の値も同様である。

3.2 導体を伝搬する電磁ポテンシャル、電流密度、電荷の数値計算手法

導体中には真空中、誘電体中とは違い電流が流れる。そのため電磁ポテンシャルの他に電流密度 \mathbf{j} が未知数となる。よって導体中の電磁ポテンシャルと電流密度を求める際に必要な式はベクトルポテンシャル \mathbf{A} (2.18)の波動方程式とオームの法則(2.12)とローレンツゲージの式(2.14)である。

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の波動方程式(2.28)をベクトルポテンシャル \mathbf{A} と電流密度 \mathbf{j} を未知数として離散化していく。まず電流密度 \mathbf{j} を未知数とするために時間に対して平均を取る。時間 m の平均を取る際 $m-1$ と $m+1$ の平均をとると解が発散したので、式(3.29)、(3.25)、(3.26)のように平均を取る。

$$J_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} = \frac{J_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + J_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + J_x^{m-1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{3}, \quad (3.24)$$

$$J_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} = \frac{J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + J_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + J_y^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{3}, \quad (3.25)$$

$$J_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} = \frac{J_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + J_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + J_z^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{3}. \quad (3.26)$$

A_x は点 $\left(k\Delta x, \left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta z, m\Delta t\right)$ 、 A_y は点 $\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta x, l\Delta y, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta z, m\Delta t\right)$ 、

A_z は点 $\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta x, l\Delta y, \left(n+\frac{1}{2}\right), (\Delta z + \frac{1}{2}), m\Delta t\right)$ を中心で離散化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & - \frac{A_x^m_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k-1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{A_x^m_{k,l+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k,l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \\ & - \frac{A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \\ & + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - 2A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + A_x^{m-1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta t^2} \\ & + \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + U^{m-\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x \Delta t} \\ & = \mu_0 \frac{J_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + J_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + J_x^{m-1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{3}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{A_y^m_{k+\frac{3}{2},l,n+\frac{1}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^m_{k-\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{A_y^m_{k+\frac{1}{2},l+1,n+\frac{1}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^m_{k+\frac{1}{2},l-1,n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \\
& - \frac{A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{3}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n-\frac{1}{2}}}{\Delta z^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} - 2A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + A_y^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta t^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta y \Delta t} \\
& = \mu_0 \frac{J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + J_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + J_x^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{3}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{A_z^m_{k+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2},n} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^m_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta x^2} - \frac{A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2},n} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^m_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n}}{\Delta y^2} \\
& - \frac{A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+1} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-1}}{\Delta z^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{A_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} - 2A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + A_z^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta t^2} \\
& + \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} + U^{m-\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{\Delta z \Delta t} \\
& = \mu_0 \frac{J_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + J_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + J_z^{m-1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{3}. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

左辺に未知数を移行することで以下の更新式を得る。

$$\begin{aligned}
& A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+1} - \frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} J_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+1} \\
&= \frac{\Delta t^2}{\epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} \left(\frac{A_{x,k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k-1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta x^2} \right. \\
&+ \frac{A_{x,k,l+\frac{3}{2},n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k,l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta y^2} + \frac{A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}}^m - 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + A_{x,k,l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z^2} \\
&- \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\Delta x \Delta t} \left(\frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} - U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\mu_0}{3} \left(J_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m + J_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-1} \right) \left. \right) + 2A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m - A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-1}. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m+1} - \frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} J_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m+1} \\
&= \frac{\Delta t^2}{\epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} \left(\frac{A_{y,k+\frac{3}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m + A_{y,k-\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta x^2} \right. \\
&+ \frac{A_{y,k+\frac{1}{2},l+1,n+\frac{1}{2}}^m - 2A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m + A_{y,k+\frac{1}{2},l-1,n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta y^2} + \frac{A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{3}{2}}^m - 2A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m + A_{y,k+\frac{1}{2},l,n-\frac{1}{2}}^m}{\Delta z^2} \\
&- \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\Delta y \Delta t} \left(\frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + U_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\mu_0}{3} \left(J_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m + J_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m-1} \right) \left. \right) + 2A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m - A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m-1}. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} - \frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right)} J_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} \\
&= \frac{\Delta t^2}{\epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right)} \left(\frac{A_{z,k+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2},n}^m - 2A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m + A_{z,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m}{\Delta x^2} \right. \\
&+ \frac{A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{3}{2},n}^m - 2A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m + A_{z,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n}^m}{\Delta y^2} + \frac{A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+1}^m - 2A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m + A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-1}^m}{\Delta z^2} \\
&- \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\Delta z \Delta t} \left(\frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\mu_0}{3} \left(J_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m + J_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m-1} \right) \left. \right) + 2A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m - A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m-1}. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

次にオームの法則(2.12)について離散化していく。 A_x についての式は点 $\left(k\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta z, \left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$ 、 A_y についての式は点 $\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, l\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta z, \left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$ 、 A_z についての式は点 $\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta z, \left(m + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$ に対して離散化していく。

$$\frac{U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+1} - A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta t} = -\rho \frac{J_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+1} - J_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^m}{2}. \quad (3.33)$$

$$\frac{U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m+1} - A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m}{\Delta t} = -\rho \frac{J_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m+1} - J_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^m}{2}. \quad (3.34)$$

$$\frac{U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - U_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \frac{A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} - A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m}{\Delta t} = -\rho \frac{J_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} - J_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^m}{2}. \quad (3.35)$$

未知数を左辺に移行すると以下のようになる。

$$A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{\rho \Delta t}{2} J_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \\ = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) + A_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \frac{\rho J_x^m_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2}. \quad (3.36)$$

$$A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + \frac{\rho \Delta t}{2} J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} \\ = -\frac{\Delta t}{\Delta y} \left(U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) + A_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} + \frac{\rho J_y^m_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{2}. \quad (3.37)$$

$$A_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + \frac{\rho \Delta t}{2} J_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} \\ = -\frac{\Delta t}{\Delta z} \left(U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - U^{m+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} \right) + A_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n} + \frac{\rho J_z^m_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{2}. \quad (3.38)$$

以上がオームの法則の式の離散化である。

ローレンツゲージの離散化した式は(3.23)を用いるので、以上で導体を伝搬する電磁ポテンシャル、電流密度を求めるために必要な式を全て離散化できた。続いて、ベクトルポテンシャル**A**、スカラーポテンシャルU、電流密度**j**の未知数をそれぞれ求める計算スキームを述べる。まずベクトルポテンシャル**A**と電流密度**j**を求める。ベクトルポテンシャルの波動方程式の更新式(3.30)、(3.31)、(3.32)の右辺をC_x、C_y、C_zとし、オームの法則の更新式(3.36)、(3.37)、(3.38)の右辺をD_x、D_y、D_zとして方向ごとに行列とする。

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho \Delta t}{2} \\ 1 & -\frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \\ J_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ D_x \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho \Delta t}{2} \\ 1 & -\frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} \\ J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y \\ D_y \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho \Delta t}{2} \\ 1 & -\frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} \\ J_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z \\ D_z \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

左辺を未知数だけにするためにそれぞれの式に以下の逆行列をかける。

$$\begin{bmatrix} A_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+1} \\ J_{x,k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\frac{\rho \Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)}} \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} & -\frac{\rho \Delta t}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x \\ D_x \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} A_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m+1} \\ J_{y,k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}^{m+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\frac{\rho \Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)}} \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{2} \right)} & -\frac{\rho \Delta t}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y \\ D_y \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} A_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} \\ J_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}^{m+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\frac{\rho \Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right)}} \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t^2}{3\epsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} + \chi_{e,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}}}{2} \right)} & -\frac{\rho \Delta t}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z \\ D_z \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

以上がベクトルポテンシャル \mathbf{A} と電流密度 \mathbf{j} を求める数値計算手法である。スカラーポテンシャル U については真空中や誘電体中と同じローレンツゲージを離散化したスカラーポテンシャル U の更新式を用いる。さらに電磁ポテンシャルと電流密度 \mathbf{j} が求まることで連続の式(2.13)を用いて電荷 ρ を求めることができる。ここで電荷 q はスカラーポテンシャル U と同じ位置に存在する。まず連続の式を点 $(k + \frac{1}{2})\Delta x, (l + \frac{1}{2})\Delta y, (n + \frac{1}{2})\Delta z, (m + 1)\Delta t$ を中心に離散化する。

$$\begin{aligned}
& \frac{q_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{3}{2}} - q_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{J_x^{m+1}_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - J_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+1,n+\frac{1}{2}} - J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \\
& + \frac{J_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+1} - J_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta z} = 0. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

未知数を左辺に移行する。

$$\begin{aligned}
q_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{3}{2}} &= -\Delta t \left(\frac{J_x^{m+1}_{k+1,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - J_x^{m+1}_{k,l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+1,n+\frac{1}{2}} - J_y^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l,n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{J_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+1} - J_z^{m+1}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n}}{\Delta z} \right) + q_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

以上で電荷の更新式である。

以上が導体を伝搬する電磁ポテンシャル、電流密度、電荷の数値計算手法である。

3.3 Higdon の吸収境界条件

解析領域が完全導体で囲まれているような閉領域の問題を扱う場合には、完全導体上で電界の接線成分を 0 とするだけで良いため、吸収境界条件は必要としない。しかし開放領域の問題を扱う際には解析領域を仮想的な境界を置く必要がある[12]。

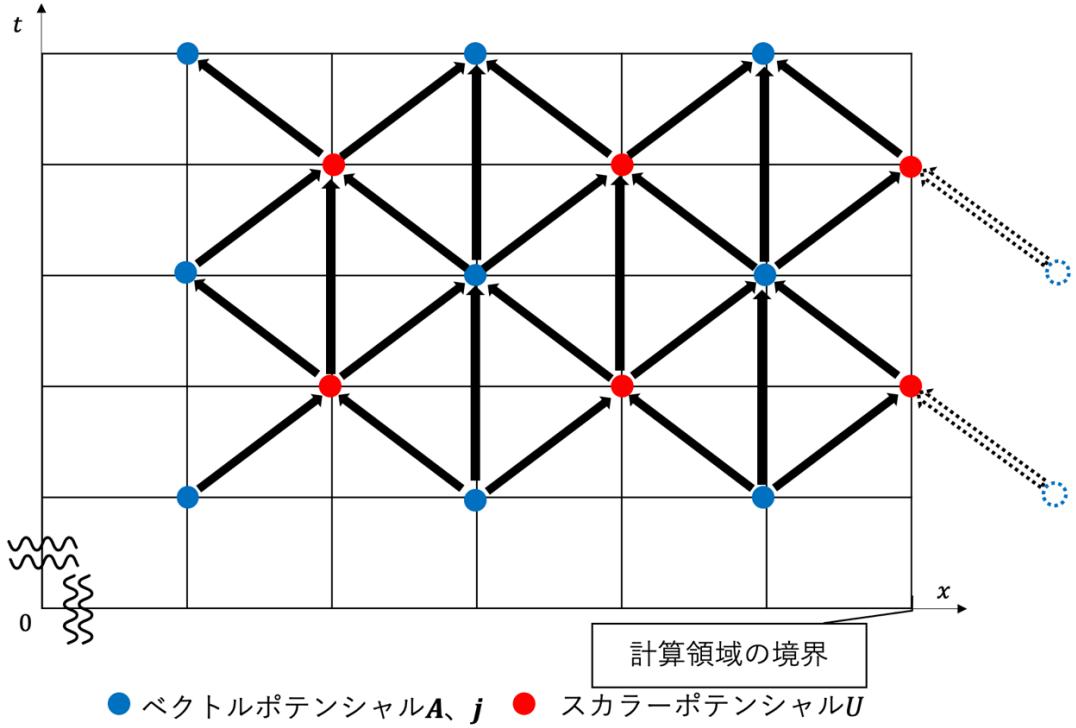


図 3.3: 計算領域による問題.

図 3.3 は波動方程式を計算する際のベクトルポテンシャル、電流とスカラーポテンシャルの関係について縦軸を時間、横軸を空間とした図である。計算領域の境界に位置するスカラーポテンシャルの点は計算領域の外のベクトルポテンシャルの値が必要であるため計算不可能となってしまう。

この仮想的な境界を吸収境界と呼ぶ。完全な吸収境界でないとき吸収境界で反射が生じ、計算結果に誤差を生じる。吸収境界条件としては Mur と Higdon が有名である[13]。Mur は垂直入射する平面波に対して有効な吸収境界条件であるため斜め入射に対しては精度が低くなる。そこで本研究ではより精度が高く、プログラミングが容易な Higdon の吸収境界条件を用いる。導出は煩雑な計算が必要なため本論文には記さないが、式(3.53)に Higdon の吸収境界条件を示す。

$$\begin{aligned} \varphi_{0,l,n}^m &= (b_1 + b_2)(\varphi_{0,l,n}^m - \varphi_{1,l,n}^{m-1}) - b_1 b_2 (\varphi_{2,l,n}^m - 2\varphi_{1,l,n}^{m-1} + \varphi_{2,l,n}^{m-2}) \\ &\quad - (b_1(1-d_2) + b_2(1-d_1))(\varphi_{2,l,n}^{m-1} - \varphi_{1,l,n}^{m-2}) + ((1-d_1) + (1-d_2))\varphi_{1,l,n}^{m-1} \\ &\quad - (1-d_1)(1-d_2)\varphi_{2,l,n}^{m-2}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

d_1, d_2, b_1, b_2 は本来電磁波が入射するときの角度などによって変化する関数であるが、反射する値が小さくなるような一定値にしてしまうことが多い。本研究の中では $d_1, d_2 = 0.005, \alpha_1, \alpha_2 = 1$ という値に設定している[14]。この値は先行研究における経験的な値のため最適値ではない。

最後にここまで数値計算手法を用いて実際にプログラミングするときのフローを図 3.4 に示す。

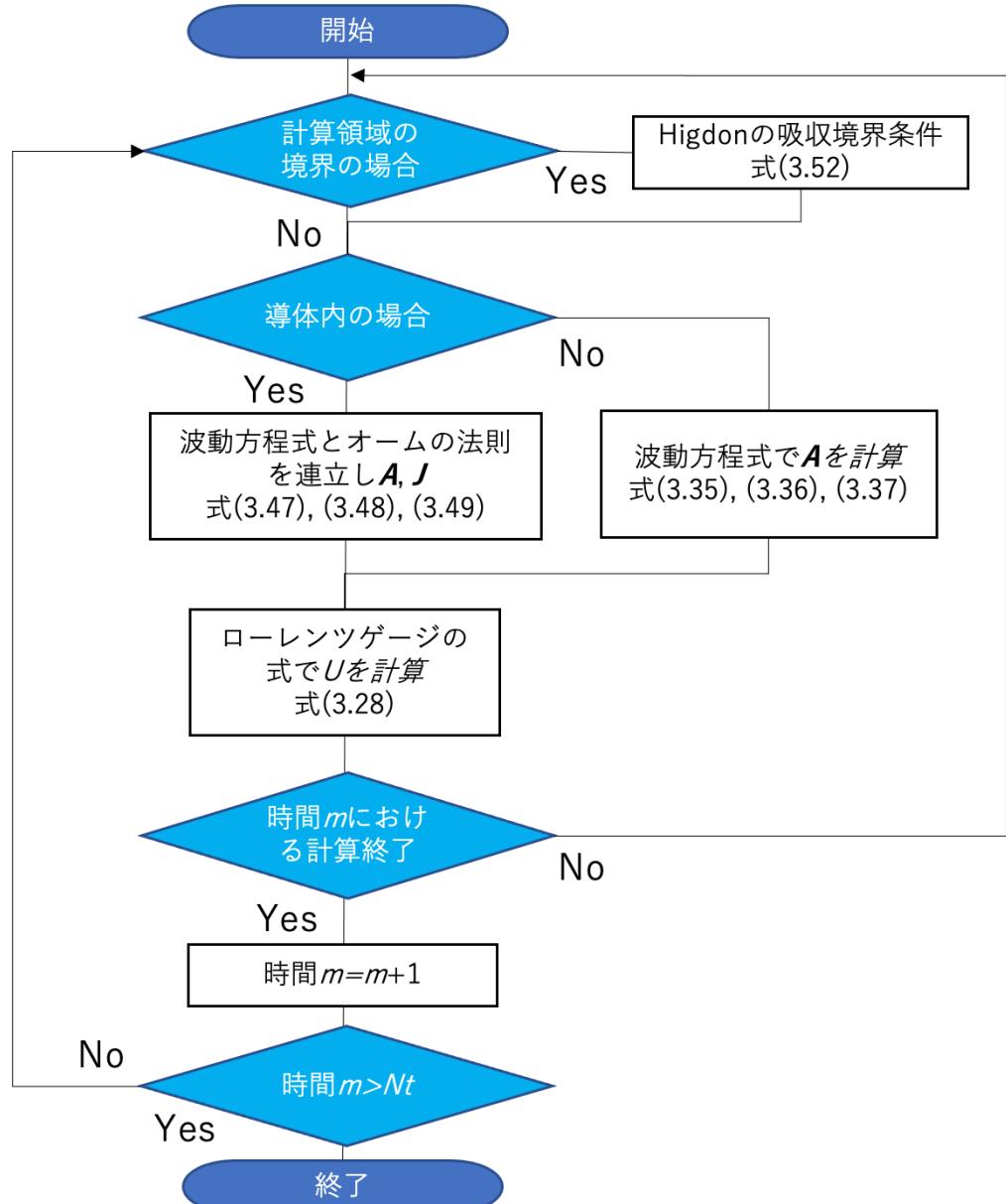


図 3.4: 本研究手法の計算フロー.

第四章 誘電体を含む空間の 2 本線と 3 本線導体におけるノーマルモードとサムモードとコモンモードの解析

4.1 真空及び誘電体中の 2 本線導体におけるノーマルモードとサムモード

パソコンを用いて数値計算を実行する際には自身で計算領域、空間と時間のメッシュの切り方を決める必要がある。本研究においては下記のような計算領域、メッシュの切り方を用いる。10cm × 10cm × 10cmの空間を図 4.1 の 1 mm × 1 mm × 1 mm メッシュで切る。

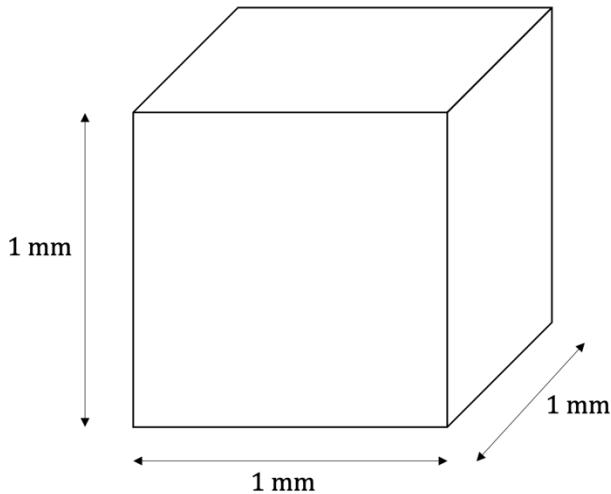


図 4.1: メッシュの切り方.

つまり $\Delta x = 10^{-3}$ m, $\Delta y = 10^{-3}$ m, $\Delta z = 10^{-3}$ mとなる。さらに時間においては Δt が次の Courant の安定条件を満たす必要がある[15]。

$$c \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}}. \quad (4.1)$$

$c = 299792458$ m/s であり、光速の値を用いる。この条件を僅かでも超えると数値計算は不安定となる。この等号でもこの条件を満たすので本研究では等号の際の値を用いる。

$$\Delta t = \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} = 1.92583320200319 \times 10^{-12}. \quad (4.2)$$

以上の前提条件を用いて、真空及び誘電体中の2本線導体におけるノーマルモードとサムモードを解析していく。まず次のモデルにおけるノーマルモードとサムモードを解析していく。ここで誘電体の感受率 $\chi_e = 4$ とする。

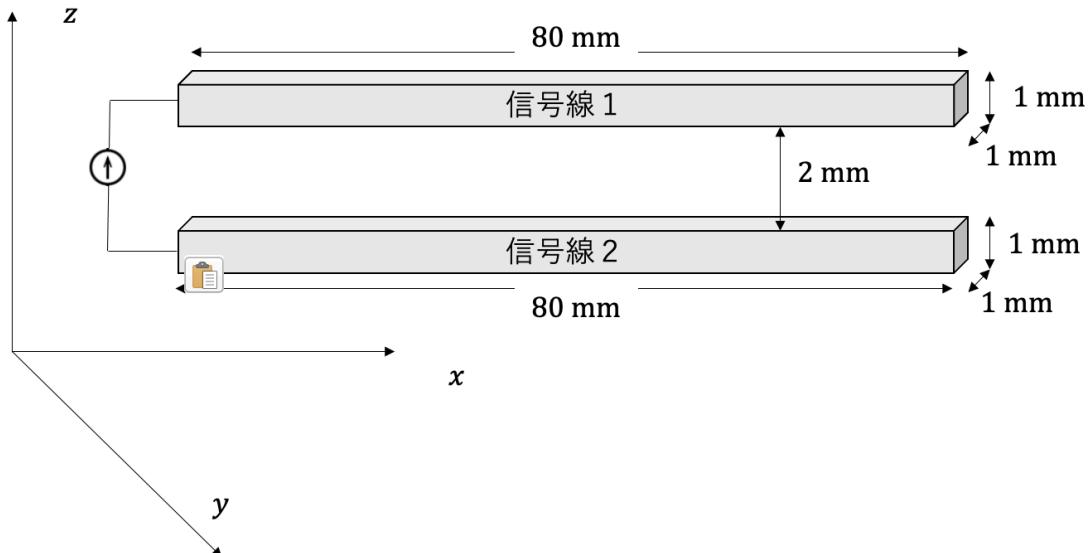


図 4.2: 真空中の2本線導体のモデル。

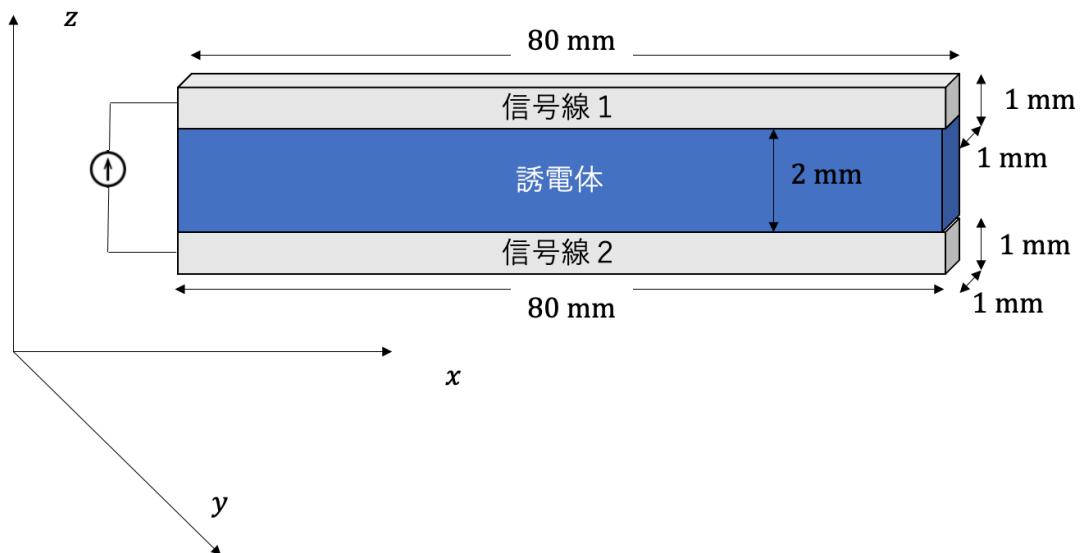


図 4.3: 誘電体中の2本線導体のモデル。

今回のモデルにおいては電流に連続性を持たせるために送端を短絡し、終端を開放している。電流は2本の導体を繋ぐ導体の中心から電流密度 1 A/m^2 の Gaussian パルスを j_z に入れる[16]。式は式(4.1)を用い、パラメーターは式(4.2)を用いる[16]。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (4.1)$$

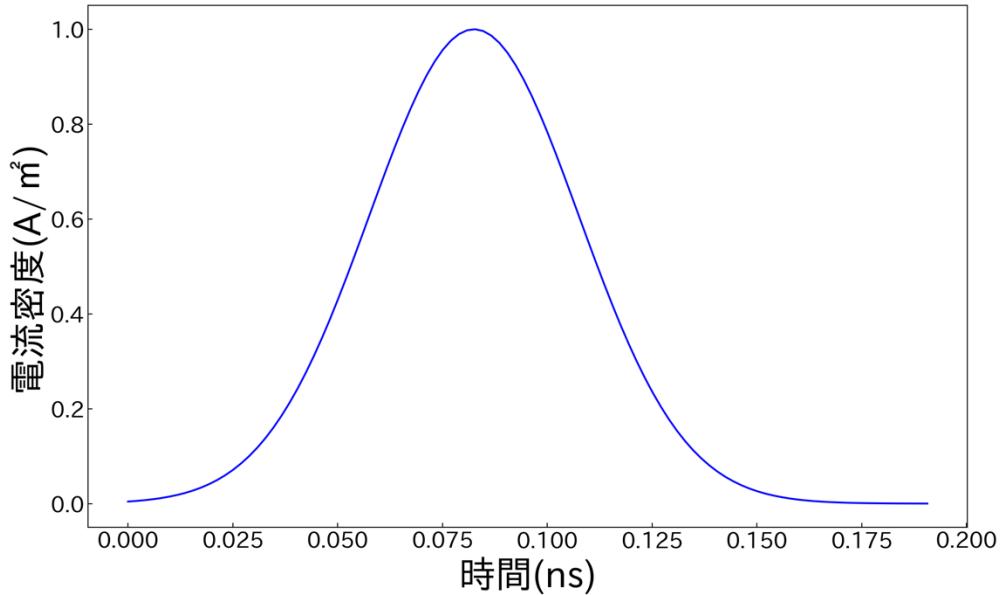
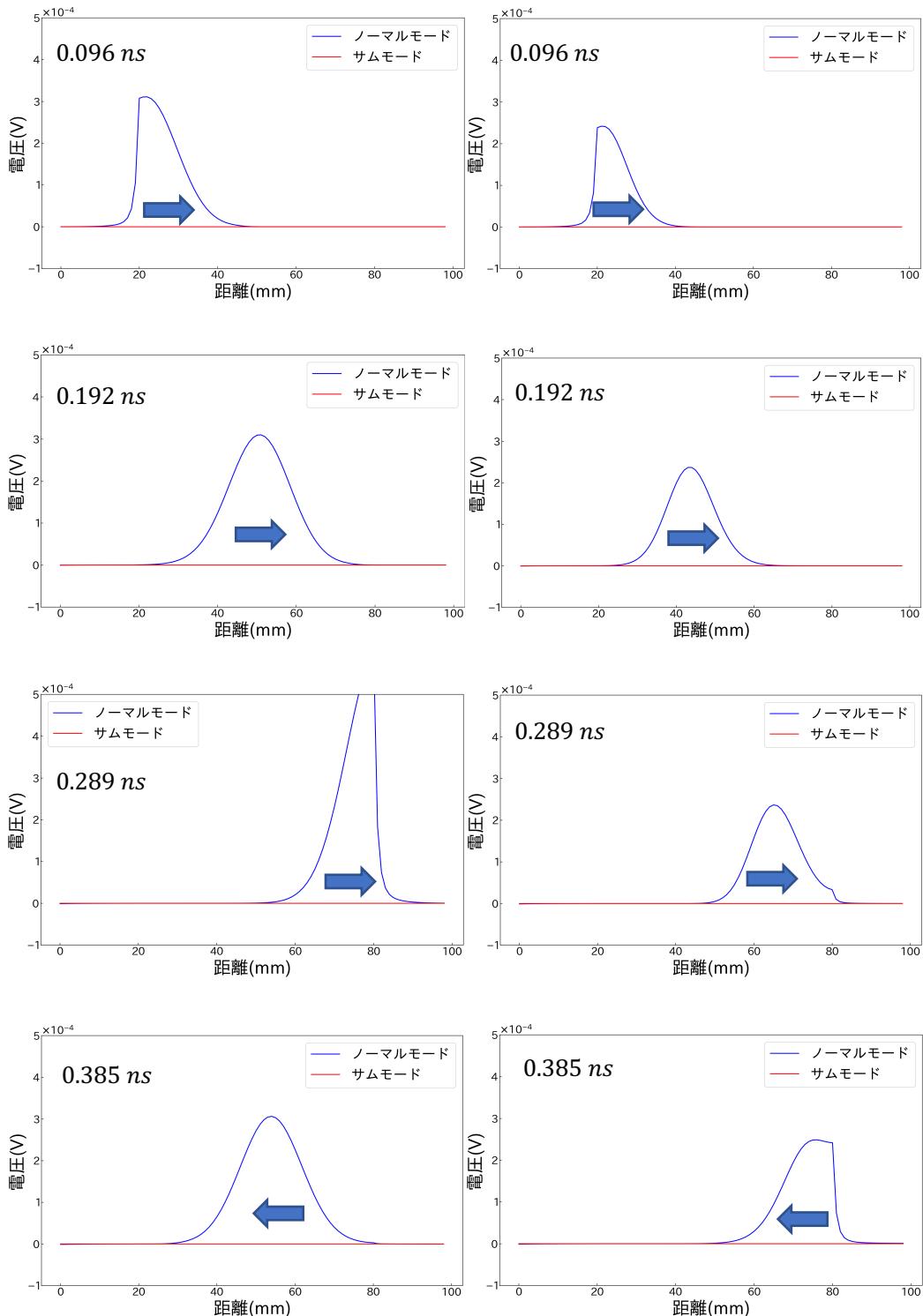


図 4.4: 印加電流($\mu = 8.25 \times 10^{-11}$, $\sigma = 2.5 \times 10^{-11}$).

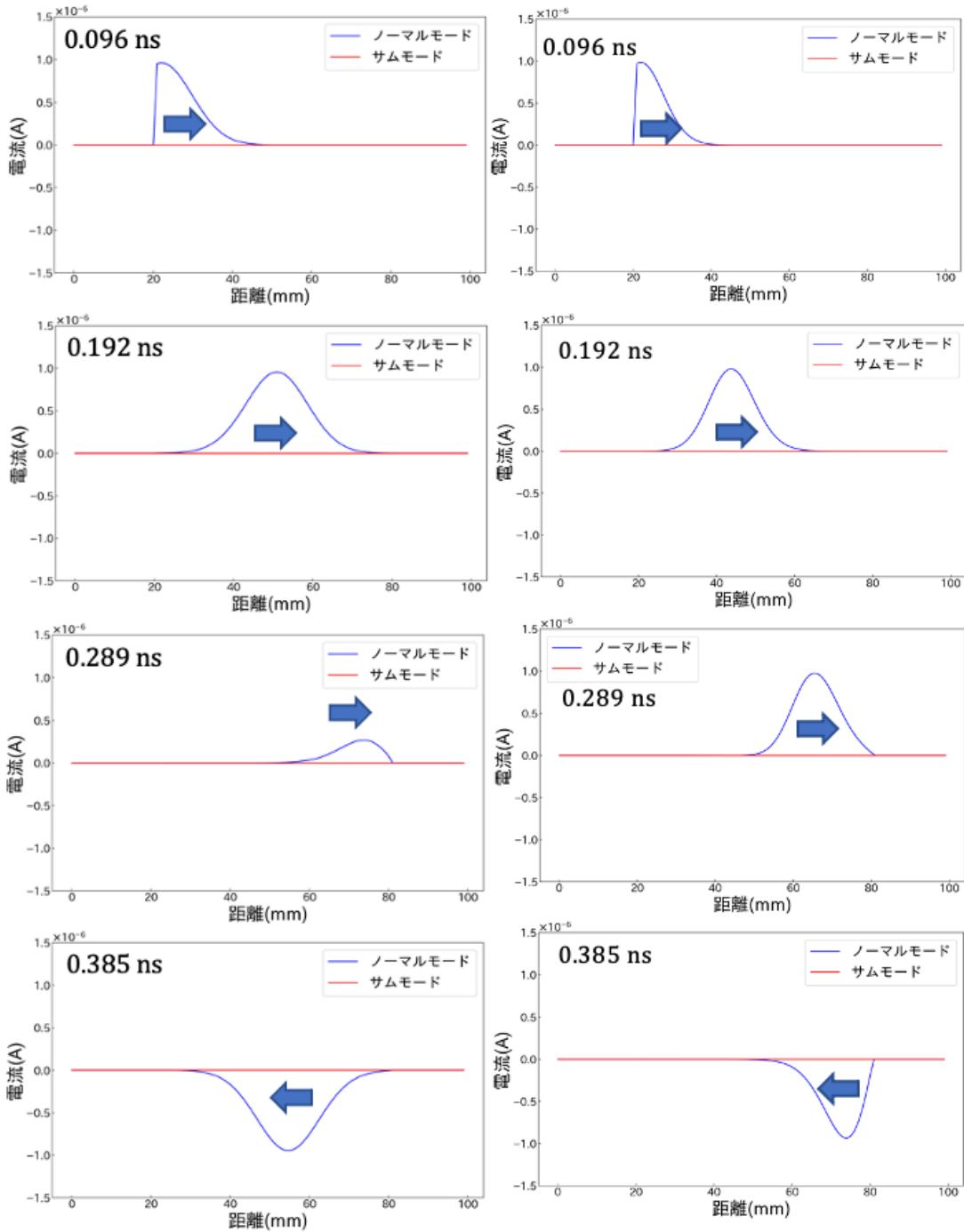
以上の条件でシミュレーションしたノーマルモード電圧とサムモード電圧の結果を示す。



(a)図 4.2 の真空中のモデル

(b)図 4.3 の誘電体($\chi_e = 4$)を含むモデル

図 4.5:ノーマルモード電圧とサムモード電圧の時間変化の様子。



(a)図 4.2 の真空中のモデル

(b)図 4.3 の誘電体($\chi_e = 4$)を含むモデル

図 4.6: ノーマルモード電流とサムモード電流の時間変化の様子。

下記の表に真空中と誘電体中のシミュレーションにおけるノーマルモードの伝搬速度と実際の光速を示す。伝搬速度は電流の最大値が送端から終端に到達する時間を用いて計算した。

表 4.1: ノーマルモードの伝搬速度の比較.

真空のシミュレーションにおけるノーマルモードの伝搬速度	誘電体のシミュレーションにおけるノーマルモードの伝搬速度	実際の光速
$2.91 \times 10^8 \text{ m/s}$	$2.26 \times 10^8 \text{ m/s}$	$3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$

真空中のノーマルモードの伝搬速度は光速の速さとほとんど同じ結果となった。信号線 1 と信号線 2 の間が真空であるモデルと誘電体であるモデルではノーマルモードの伝搬速度が大きく違うことがわかる。これは伝搬速度が誘電率と透磁率に依存するという事実と一致する [17]。さらに半値全幅も誘電体がある場合の方が小さくなることがわかる。これは伝搬速度と波長が比例していることが関係している。サムモードは回路の非対称性によって信号の位相がずれることで発生する。よってサムモードは回路の形状が対称的なためサムモードは流れない。

サムモードを観察するために信号線 2 の幅を変化させる。

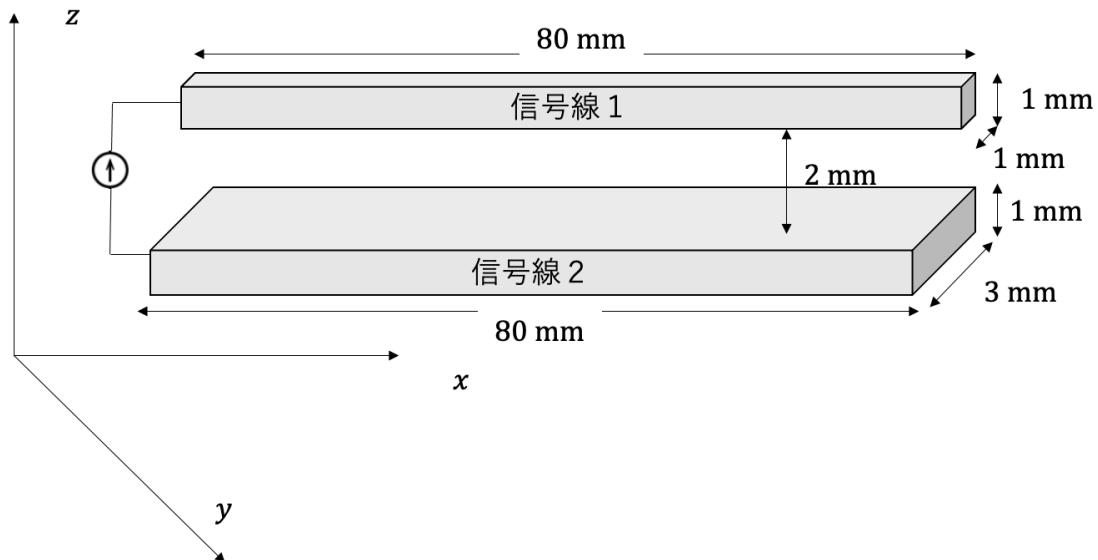


図 4.7: 真空中の二本線導体モデル (信号線 2 の幅が $a \text{ mm}$) .

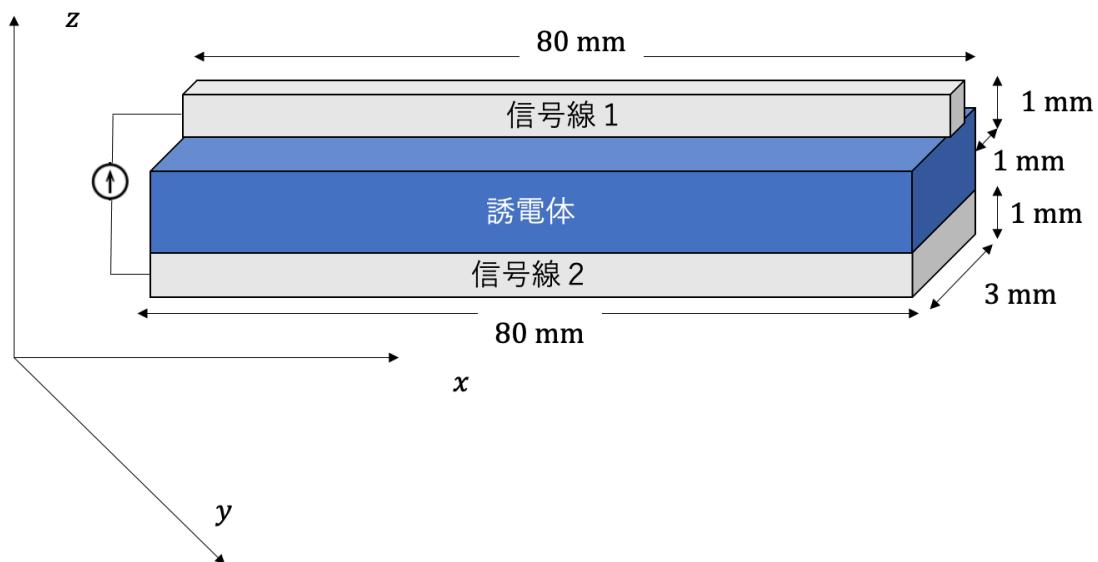


図 4.8:誘電体中の二本線導体モデル（信号線 2 の幅が a mm）.

今回は $a = 3$ mm としてサムモード電圧とサムモード電流を観察していく。幅を変化させることで回路が非対称となるので、サムモードが伝搬する。

まずは $a = 3$ mm でシミュレーションしたものを示す。

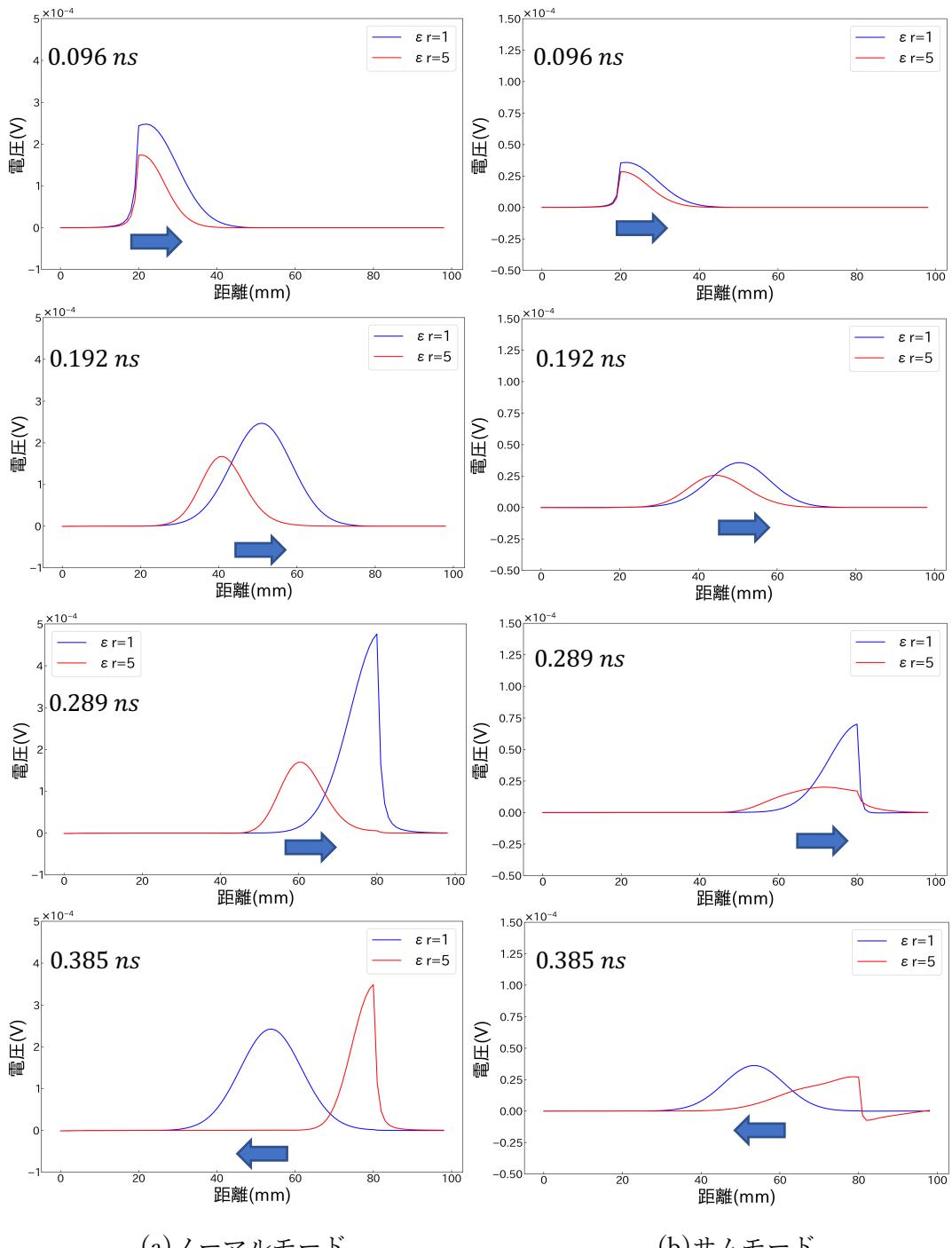


図 4.9: 信号線 2 の幅が 3 mm のノーマルモード電圧とサムモード電圧の時間変化の様子.

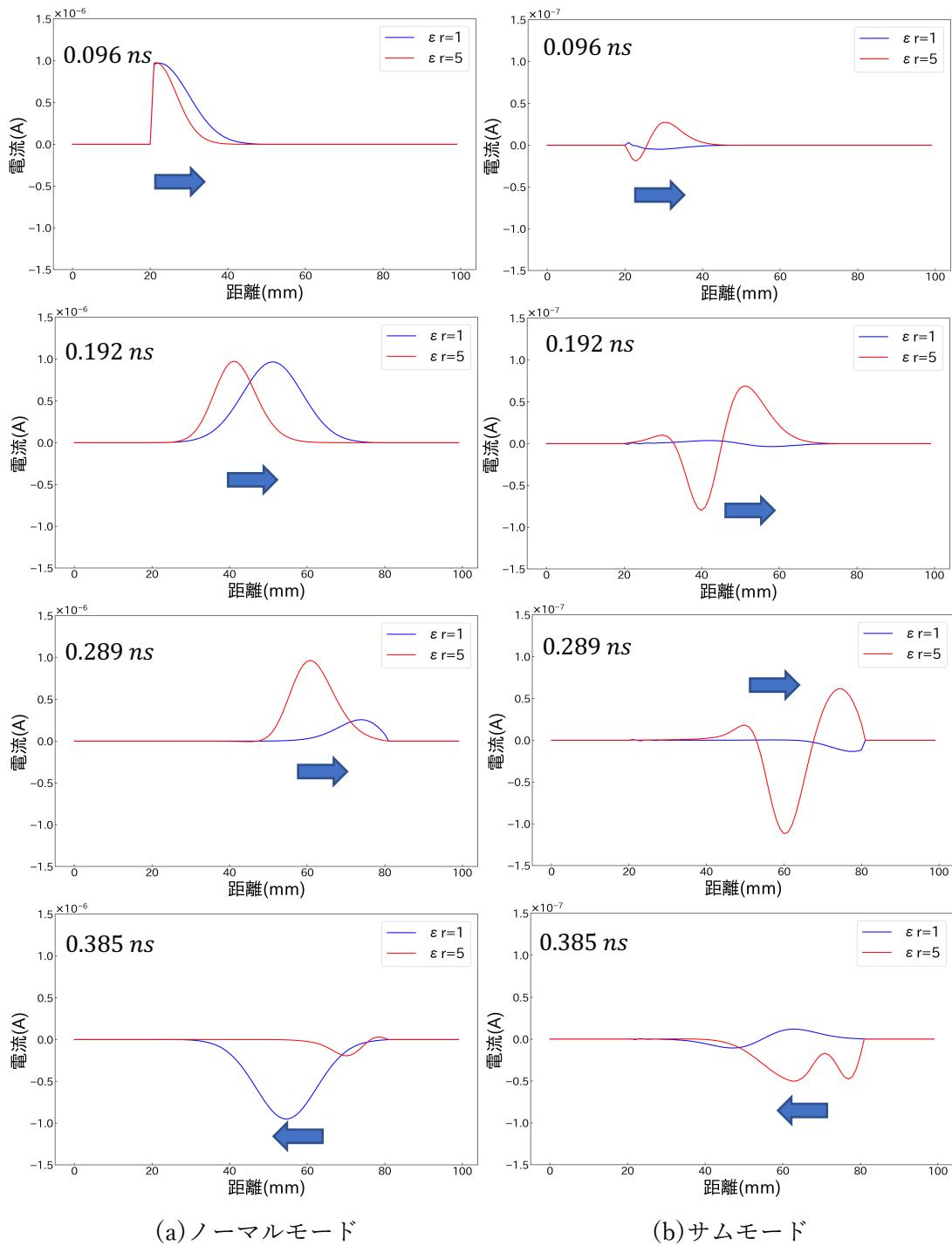


図 4.10: 信号線 2 の幅が 3 mm のノーマルモード電流とサムモード電流の時間変化。

$a = 3 \text{ mm}$ の場合は回路が非対称となっているので、サムモードが発生している。これは先ほど述べたように回路の非対称性によって信号の位相がずれたことで発生する。下記の表に真空及び誘電体でシミュレーションを行なったときの伝搬速度を示す。

表 4.2: ノーマルモード・サムモードの伝搬速度の比較.

	真空	誘電体
ノーマルモード	2.91×10^8 m/s	2.04×10^8 m/s
サムモード	2.91×10^8 m/s	2.49×10^8 m/s

真空の場合ではノーマルモードとサムモードの伝搬速度が同じであるのに対して、誘電体を入れた場合はノーマルモードとサムモード共に伝搬速度が遅くなっている。特にノーマルモードの伝搬速度が遅くなっている。これは、ノーマルモードでは信号線 1 と信号線 2 で信号線間の電場が打ち消しあっているのに対して、サムモードは信号線 1 と信号線 2 の電場が強め合っているからだと考えられる。二本線導体の時、サムモードは信号線間の媒質の影響をあまり受けず、ノーマルモードは信号線間の影響を大きく受けるため伝搬速度が遅くなる。

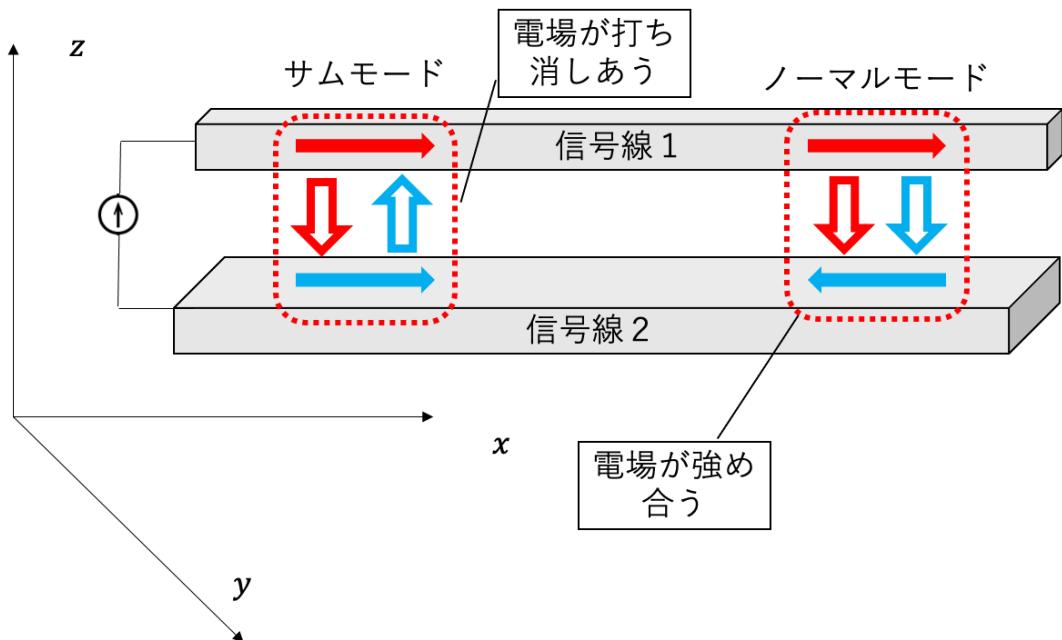


図 4.11: 二本線導体における信号線間の電場の関係.

4.2 真空及び誘電体中の3本線導体におけるノーマルモードとコモンモード

次に真空及び誘電体中の3本線導体におけるノーマルモードとコモンモードを解析する。信号線1と信号線2を一つの回路とし、信号線3を基準導体（環境）とする。ここで誘電体の感受率 $\chi_e = 4$ とする。

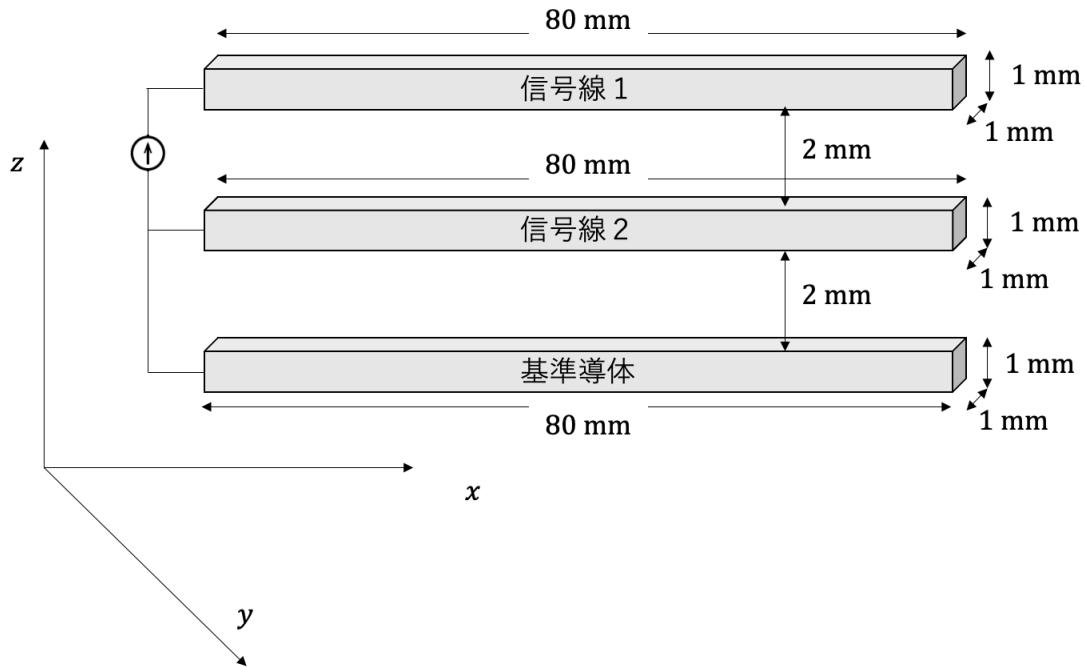


図 4.12: 真空中の3本線導体モデル.

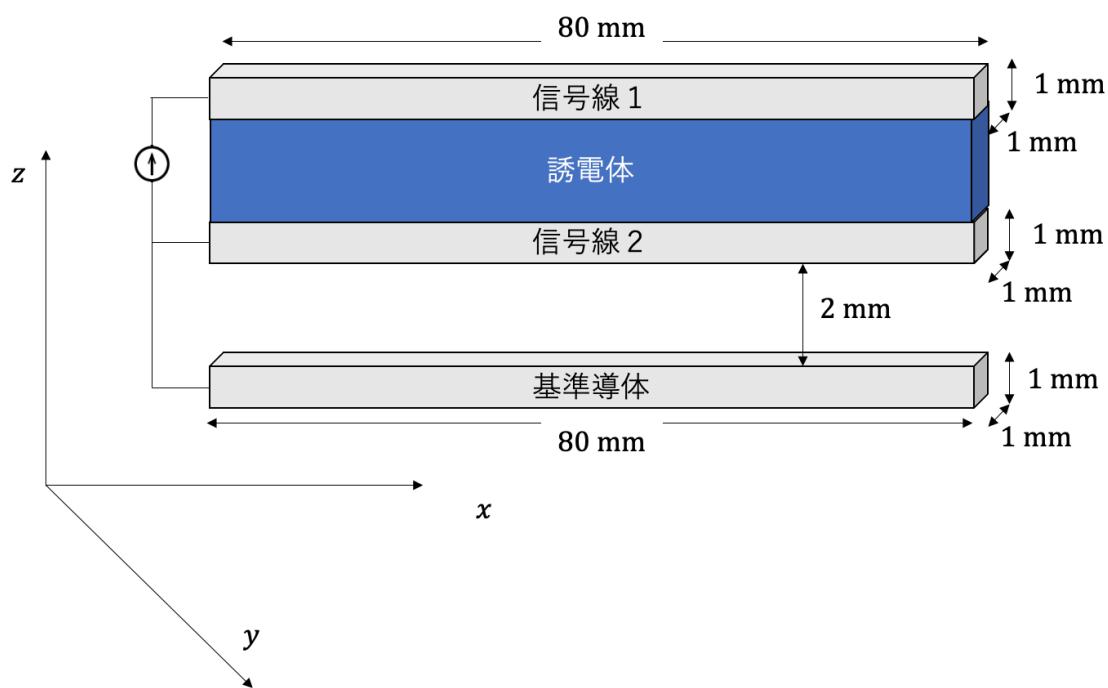


図 4.13: 誘電体中の 3 本線導体モデル.

図 4.4 の印加電流を信号線 1 と信号線 2 の間から入れる。以上の条件でシミュレーションしたノーマルモード電圧・電流とコモンモード電圧・電流の結果を以下に示す。

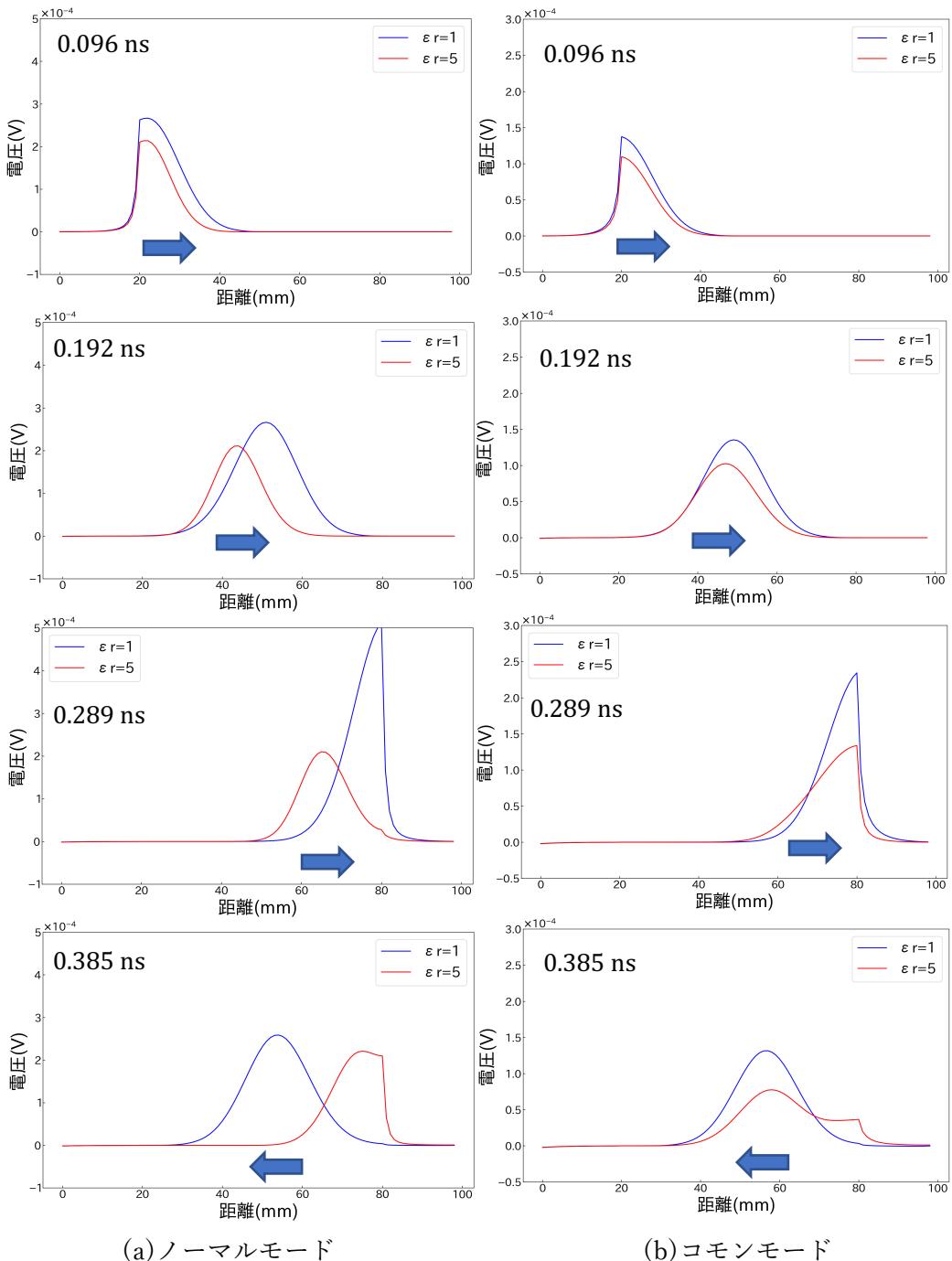


図 4.14: 3 本線導体におけるノーマルモード電圧とコモンモード電圧の時間変化.

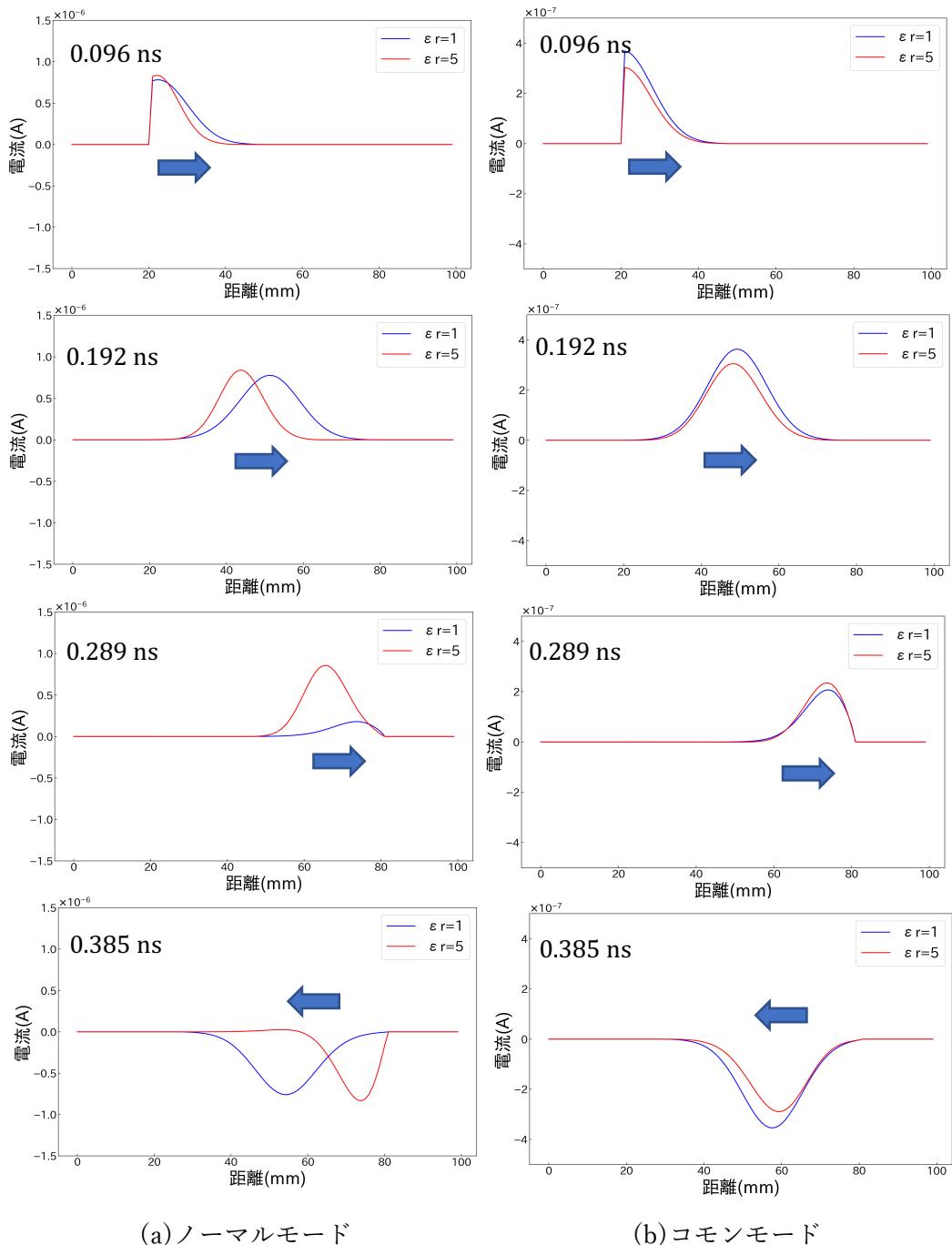


図 4.15: 3 本線導体におけるノーマルモード電圧とコモンモード電圧の時間変化。

ここで真空の場合と誘電体の場合のシミュレーション結果のノーマルモードとコモンモードの伝搬速度を比較する。

表 4.3: ノーマルモード・コモンモードの伝搬速度の比較.

	真空	誘電体
ノーマルモード	2.90×10^8 m/s	2.26×10^8 m/s
コモンモード	2.92×10^8 m/s	2.81×10^8 m/s

誘電体を入れた場合ノーマルモードもコモンモードも伝搬速度が遅くなっていることがわかる。特にノーマルモードの伝搬速度が遅くなっている。これは、ノーマルモードでは信号線 1 と信号線 2 で信号線間の電場が強めあっているのに対し、コモンモードは信号線 1 と信号線 2 の電場が打ち消し合っているからだと考えられる。つまり、3 本線導体においてノーマルモードの伝搬速度は信号線 1 と信号線 2 の間の媒質に強く影響を受け、コモンモードは信号線 2 と信号線 3 の間の媒質に強く影響を受けると考察できる。

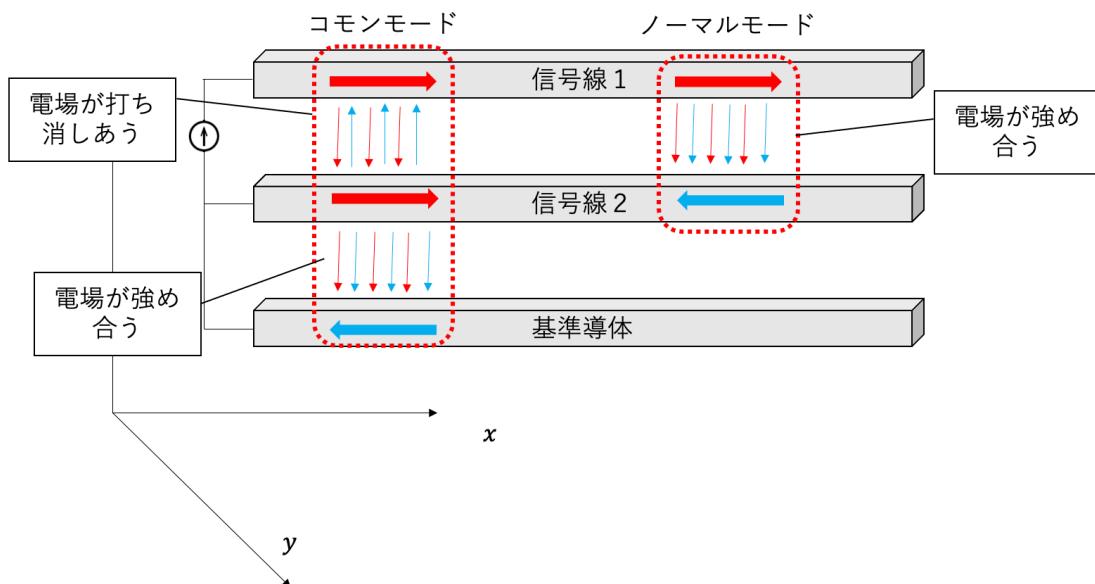


図 4.16: 3 本線導体の信号線間における電場の関係.

4.3 誘電体の影響により減衰するサムモード・コモンモードの過渡応答解析

サムモードは時間と共に空間への電磁放射によって減衰しながら伝搬する[18]。その様子を2本線導体と3本線導体において解析する。

まず信号線間が真空の場合のノーマルモードとサムモードの電力の振幅を比較する。

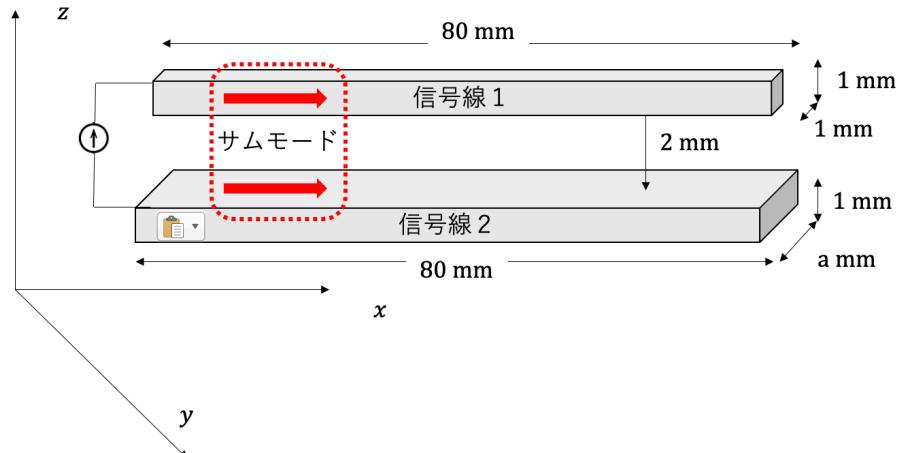


図 4.17: 2 本線導体（信号線 2 の幅が3 mm）.

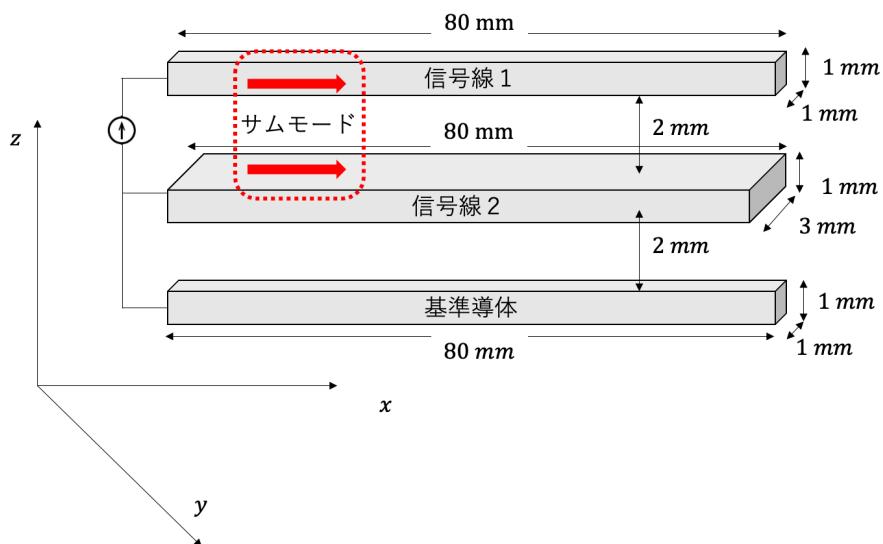


図 4.18: 3 本線導体（信号線 2 の幅が3 mm）.

上記のモデルで終端に到達するまでの時間0.385 nsにおけるノーマルモードの電力の振幅を2本線導体、3本線導体それぞれ図4.19、図4.20に示す。

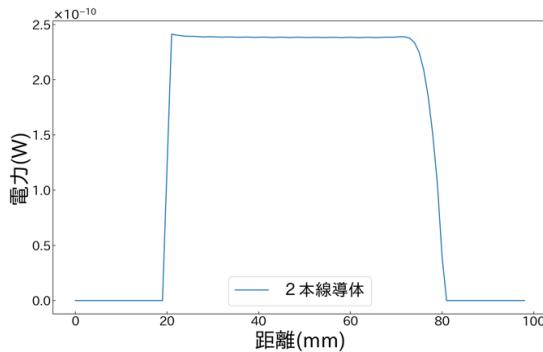


図 4.19: 2 本線導体におけるノーマルモード電力の減衰の様子.

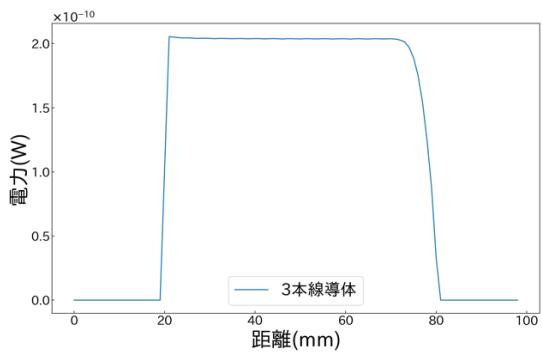


図 4.20: 3 本線導体におけるノーマルモード電力の減衰の様子.

ノーマルモードの電力は 2 本線導体、3 本線導体ともにあまり減衰していない。終端の部分で減衰しているように見えるのは反射した電力と打ち消しあっているからである。

またサムモードについて終端に到達するまでの時間 0.347 ns においてプロットした結果を図 4.21、図 4.22 に示す。

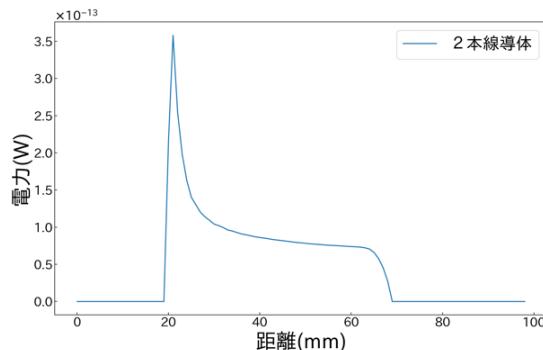


図 4.21: 2 本線導体におけるサムモード電力の減衰の様子.

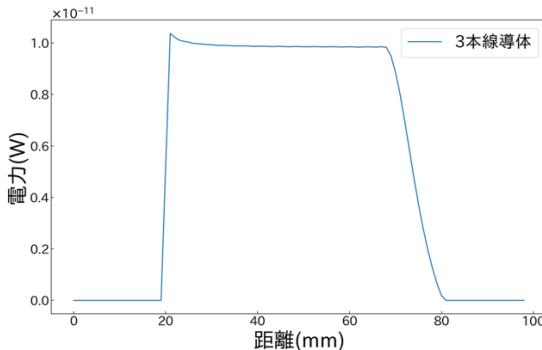


図 4.22: 3 本線導体におけるサムモード電力の減衰の様子.

終端で減衰しているように見えるのは反射波と進行波が打ち消しあっているからである。2 本線導体におけるサムモードの電力は急速に減衰している。一方で 3 本線導体におけるサムモードの電力はほとんど減衰していない。今回のシミュレーションでは抵抗などを接続していないので電力の消費はない。よって、電力が減衰しているということは外部に電磁放射しているということとなる。2 本線導体においてはサムモードが外部に放射しやすく、3 本線導体においては外部に電磁放射しにくい構造となっている。2 本線導体と 3 本線導体それぞれの電磁放射の様子を図 4.23、図 4.24 に示す。

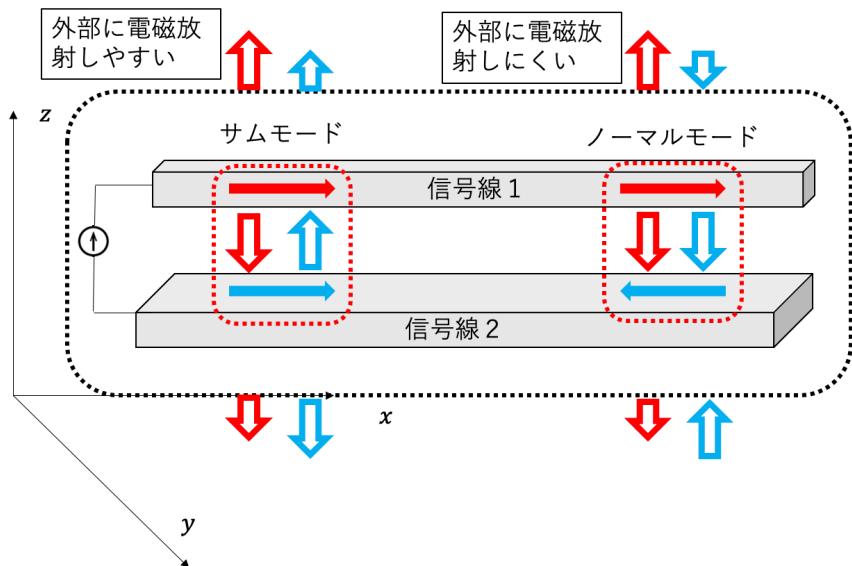


図 4.23: 2 本線導体における電磁放射の様子.

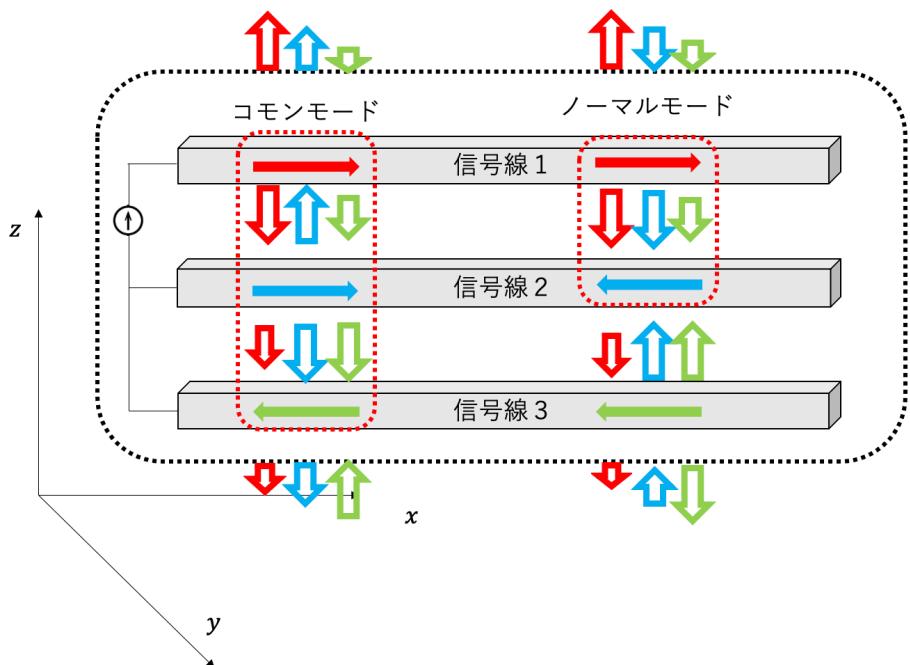


図 4.24: 3 本線導体における電磁放射の様子.

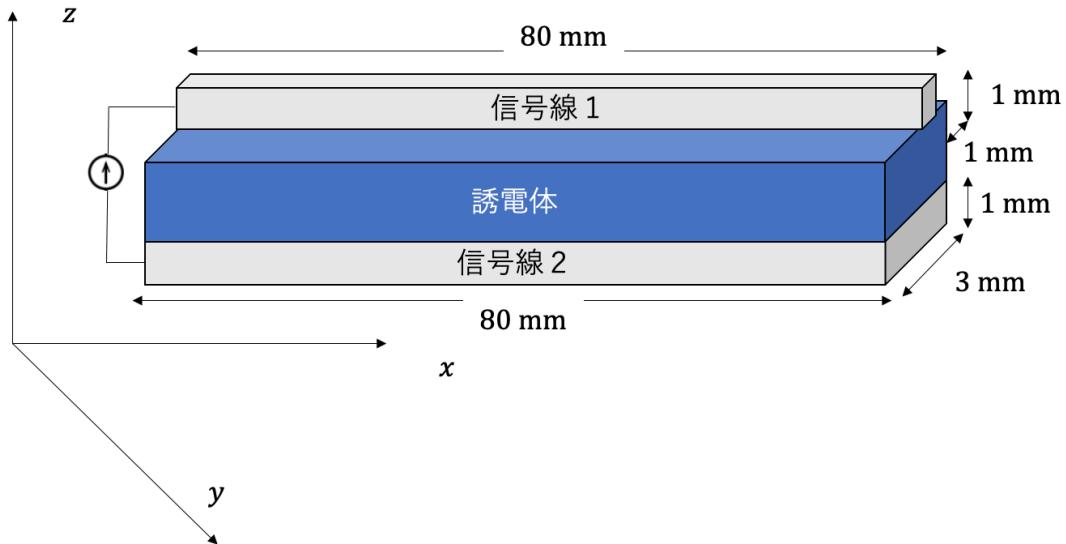


図 4.25: 誘電体を含む 2 本線導体（信号線 2 の幅が 3 mm）.

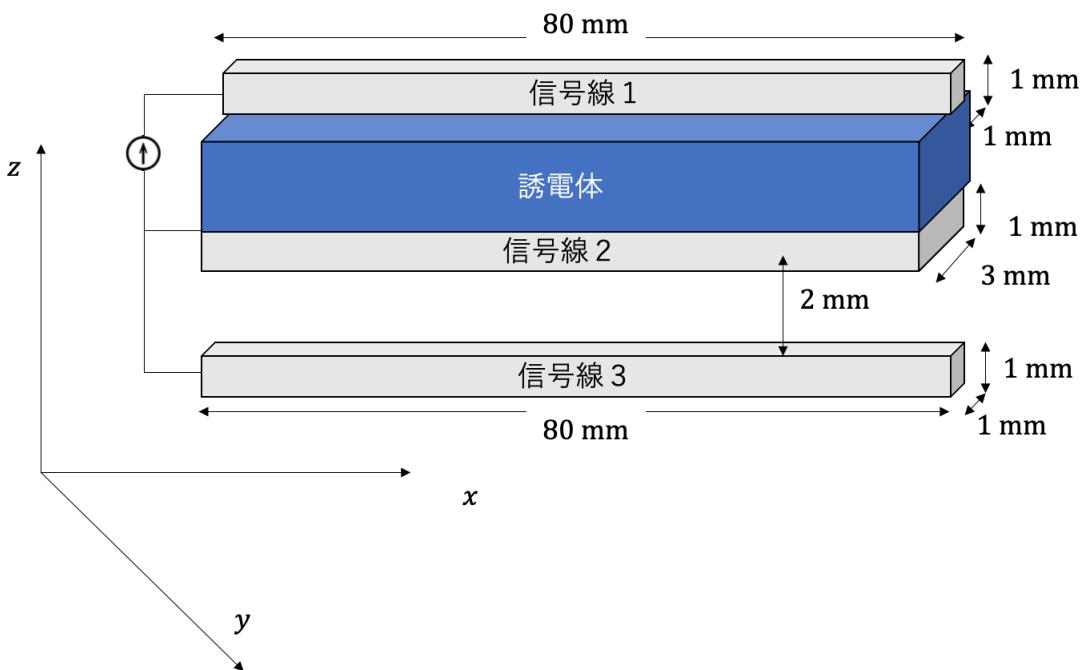


図 4.26: 誘電体を含む 3 本線導体（信号線 2 の幅が 3 mm）.

図 4.25、図 4.26 の回路においてシミュレーションした終端に到達するまでの時間 0.385 ns におけるノーマルモードの電力の減衰の様子を図 4.27、図 4.28 に示す。

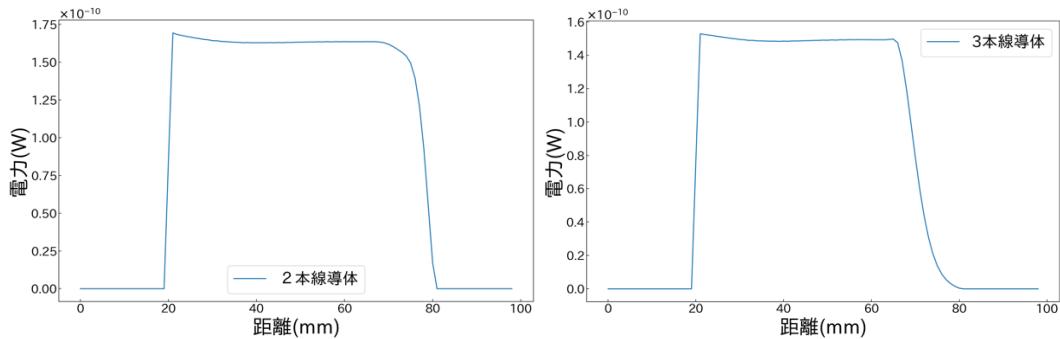


図 4.27: 2 本線導体におけるノーマルモード電力の減衰の様子.
図 4.28: 3 本線導体におけるノーマルモード電力の減衰の様子.

終端で減衰しているように見えるのは反射波と進行波が打ち消しあっているからである。ノーマルモードの電力は 2 本線導体と 3 本線導体ともにあまり減衰していないように見える。

またサムモード電力の減衰の様子を終端に到達するまでの時間 0.385 nsにおいて図 4.29、図 4.30 に示す。

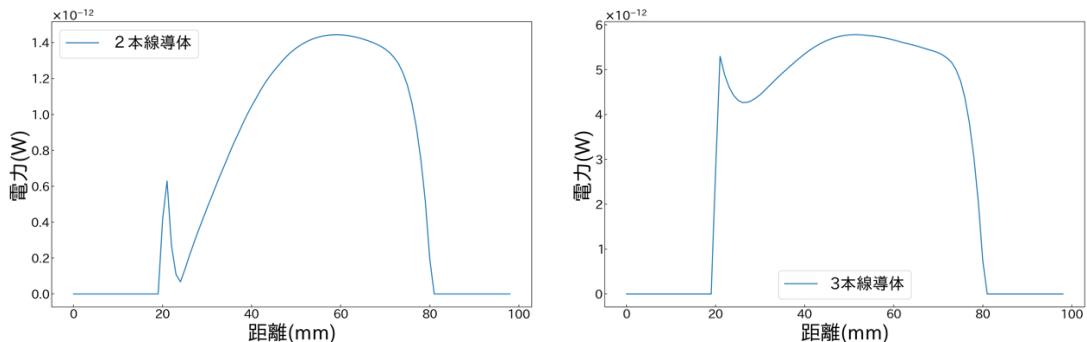


図 4.29: 2 本線導体におけるサムモードの電力の減衰の様子.
図 4.30: 3 本線導体におけるサムモードの電力の減衰の様子.

2 本線導体と 3 本線導体ともに送端だけでなく、伝搬中にもサムモードが増加している。これは誘電体によって送端と終端だけでなく、伝搬中にもノーマルモードがサムモードに変換されていると仮説を立てた。そこでノーマルモードの電力を拡大したものを図 4.29、図 4.30 に示す。

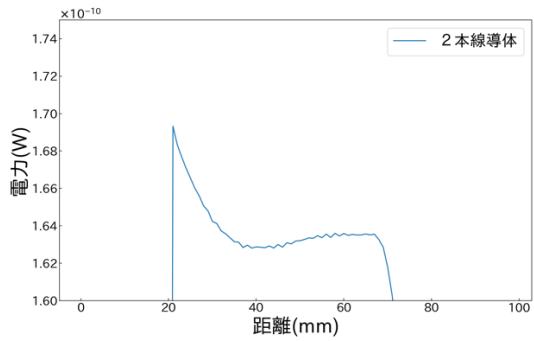


図 4.29: 2 本線導体におけるノーマルモードの電力の減衰の様子の拡大図。

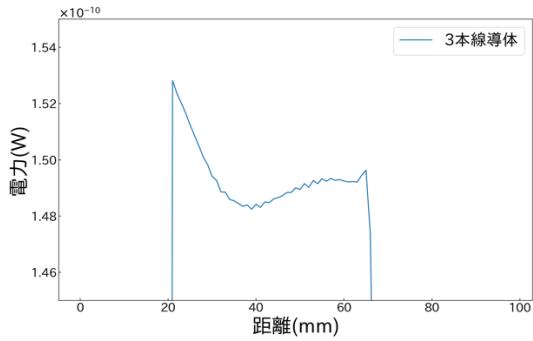


図 4.30: 3 本線導体におけるノーマルモードの電力の減衰の様子の拡大図。

2 本線導体と 3 本線導体ともに 40 mm 程度まで減衰していることがわかる。ノーマルモード電力の一部が時間とともにサムモードに変換されていると考察した。原因は誘電体によってサムモードが異なる伝搬速度で伝搬していることにあると考える。

4.4 同軸線路におけるコモンモード

続いて以下のような同軸線路のモデルにおけるノーマルモードとコモンモードを解析する。

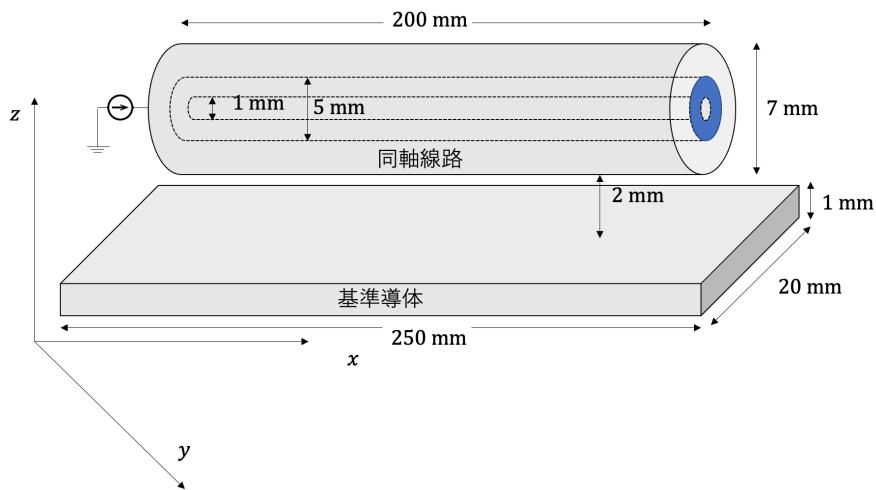


図 4.31: 同軸線路モデル。

内部導体の直径を 1 mm、絶縁体の直径を 5 mm、外部導体の直径を 7 mm とする。yz 方向の断面で切ると次のようになっている。

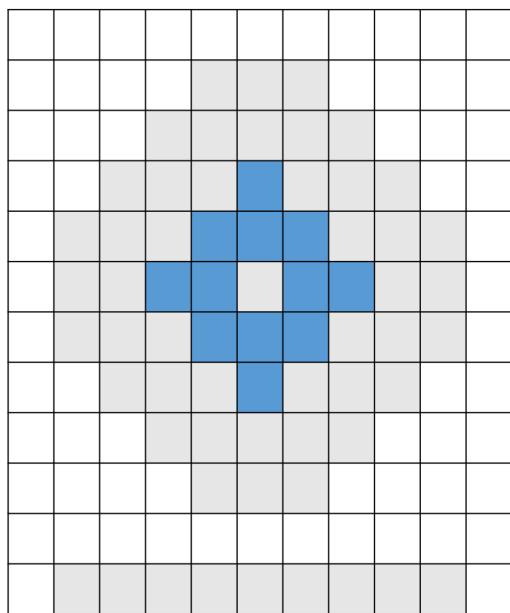


図 4.32: 同軸線路と基準導体の断面.

シミュレーションした結果のノーマルモード電流を図 4.33、コモンモード電流を図 4.34 に示す。

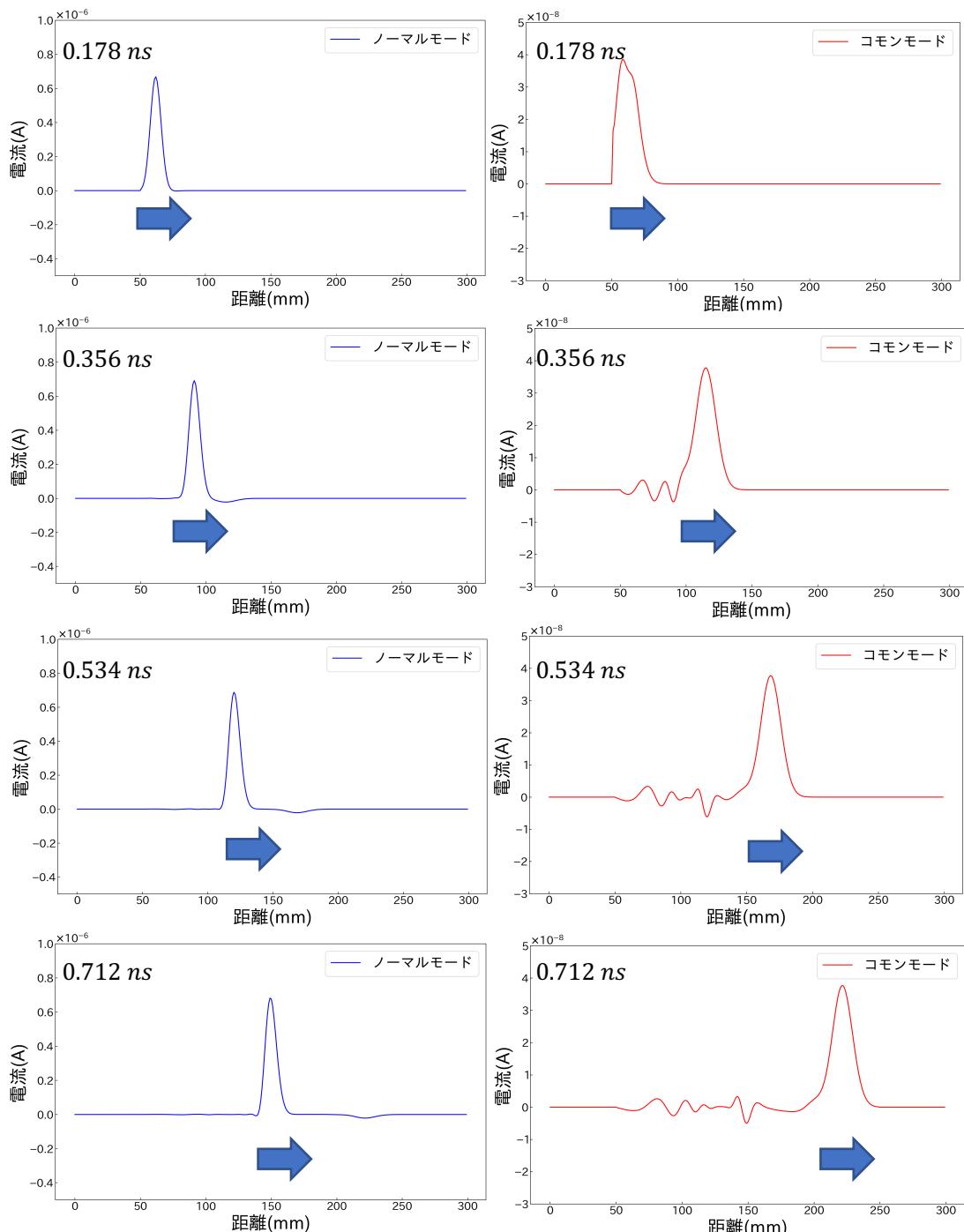


図 4.33: ノーマルモード電流($\chi_e=4$).

図 4.34: コモンモード電流 $\chi_e=4$.

まず図 4.33 のノーマルモードについて伝搬速度の速い電流と遅い電流があることがわかる。さらにコモンモードについては送端で少し振動しているのは電流印加点の非対称性によるものである。またコモンモード電流に関しては遅いものと早いものがいることがわか

る。伝搬速度が違う原因について導体の位置によって誘電体の影響の大小が異なると考察した。導体の位置ごとの電流を図 4.36 と図 4.37 に示す。

			外	外	外			
		外		内		外		
	外		内		内		外	
外		内				内		外
外	内						内	外
外		内				内		外
	外		内		内		外	
		外		内		外		
			外	外	外			

図 4.35: 電流を解析する外側導体の位置.

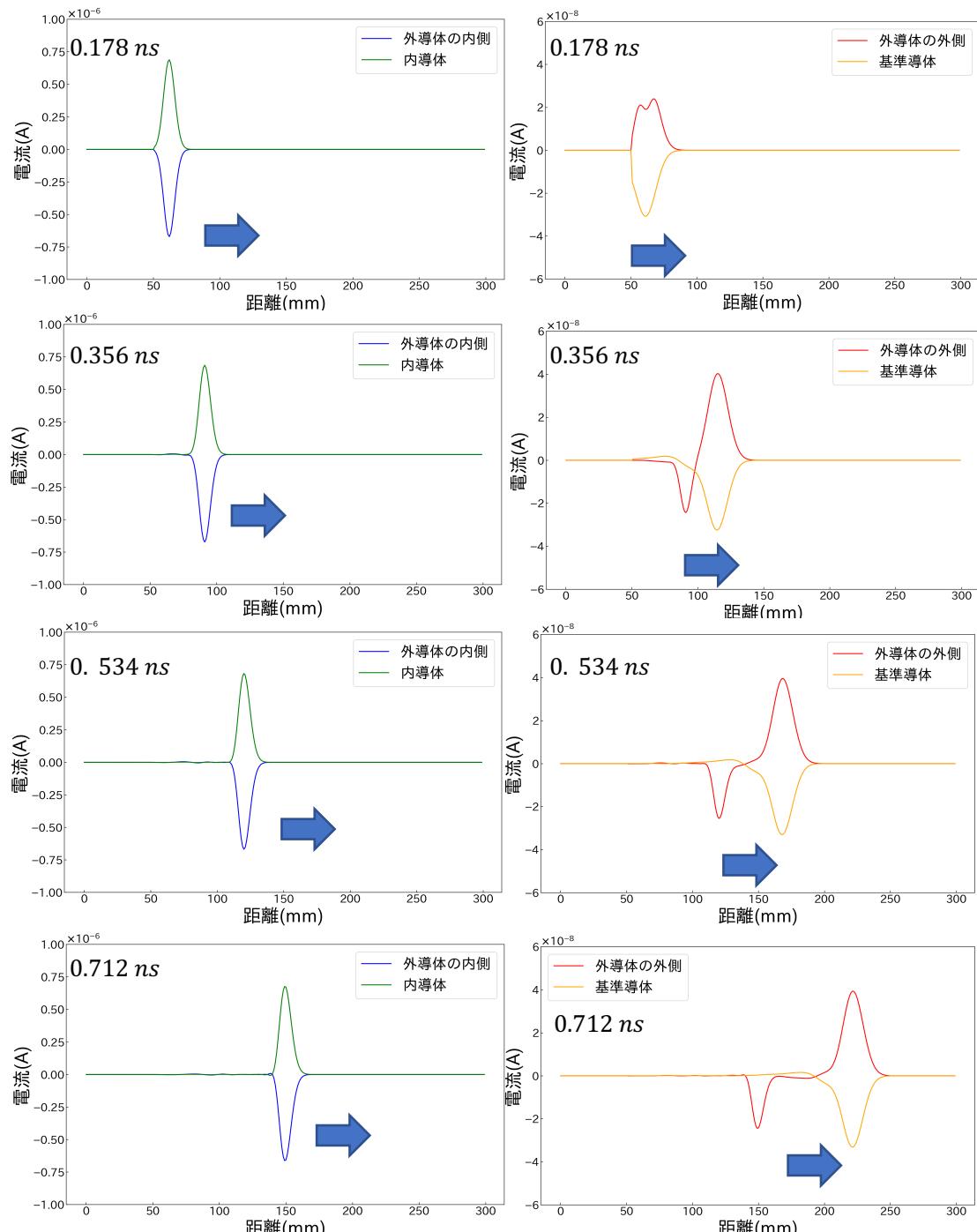


図 4.36: 外導体の内側と内導体の電流

($\chi_e=4$)

図 4.37: 外導体の外側と基準導体の電流

($\chi_e=4$)

図 4.38 より外導体の内側と内導体には大きさ逆向きの伝搬速度の遅い電流が流れていることがわかる。これは誘電体に接していることで強く影響を受けていると考察する。次に図 4.39 より外導体の内側には伝搬速度の速い電流が大きさ逆向きで流れていることがわかる。これは誘電体に接していないことで影響が小さいためと考える。しかし、外導体の内側に

は伝搬速度の遅い電流も混ざっている。これは内導体の伝搬速度の遅い電流が外導体の外側にも一部流れるためである。

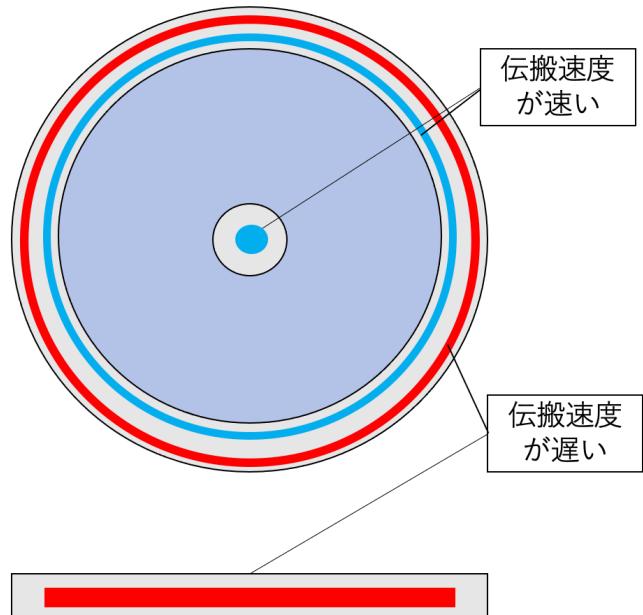


図 4.38: 同軸線路の導体の位置による電流の伝搬速度の違い.

以上の結果から内導体と外導体の内側が運動しノーマルモードを形成し、外導体の外側と基準導体において電流が運動しコモンモードを形成していることがわかる。

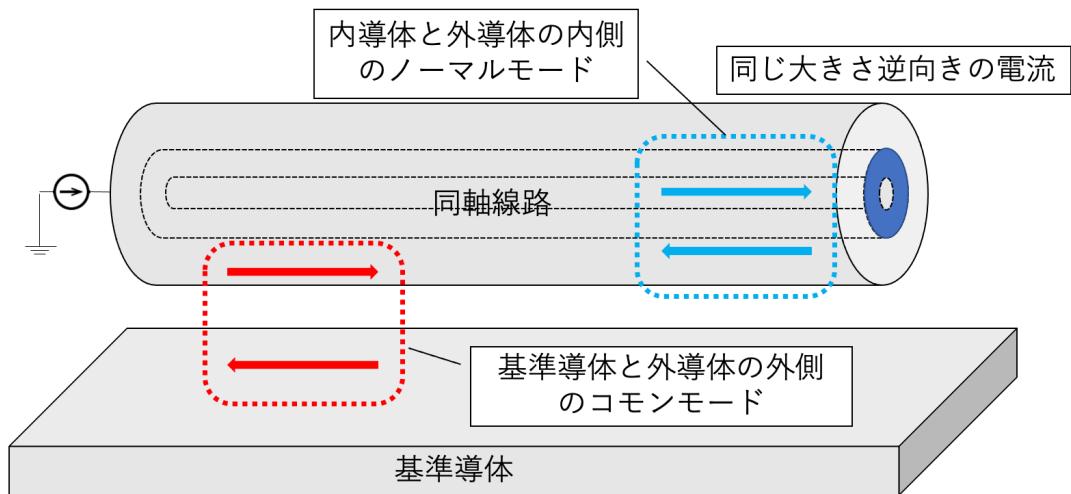


図 4.45: 同軸線路の位置ごとの電流の運動性.

4.5 本章の結論

本研究の結論としてマクスウェルの微分方程式から導出した数値計算手法により不均一な媒質中のノーマルモード、サムモード、コモンモードを解析することが可能となった。

さらに2本線導体と3本線導体においてノーマルモード、サムモード、コモンモードを誘電体の有無によって比較した結果、ノーマルモードは誘電体があることで伝搬速度が遅くなり、サムモード、コモンモードは誘電体による伝搬速度の違いは大きくは見られないことがわかった。理由はノーマルモードは信号線間で電場が強めあうが、サムモード、コモンモードは信号間で電場を弱めあうことが原因であると考える。これによってノーマルモードは誘電体の影響を受けやすくなっている。

次に信号線間が真空な2本線導体と3本線導体においてノーマルモードとサムモードの減衰する様子を電力を用いて解析した。その結果、ノーマルモードの電力はほとんど減衰しないが、2本線導体のサムモードの電力が大きく減衰することがわかった。理由は、信号線1と信号線2を伝搬するサムモードが外部に電磁放射していることにあると考察した。一方で3本線導体のサムモードの電力はあまり減衰しなかった。これは信号線1と信号線2を流れるサムモードと逆向きに信号線3を伝搬するモードが存在するため外部への電磁放射を打ち消しあうためであると考察した。

次に信号線間が誘電体である2本線導体と3本線導体においてノーマルモードとサムモードの減衰する様子を電力を用いて解析した。その結果、誘電体があることで送端と受端だけでなく伝搬中にもサムモードに変換されることがわかった。

最後に様々な形状の回路を計算できることを示すため、同軸線路のコモンモードを解析した。その結果、異なる伝搬速度を持つノーマルモード、コモンモードを観察できた。これは外導体において誘電体に面した部分と面していない部分で誘電体からの影響の大きさが変化しているためであると考察した。さらに基準導体と同軸線路の内導体、外導体の内側、外側の電流の関係を明らかにした。結果として、同軸線路の内導体と外導体の内側でノーマルモードが伝搬し、同軸線路の外導体の外側と基準導体でコモンモードが伝搬していることがわかった。

以上の結果より、本研究で開発した数値計算手法により異なる伝搬速度を持つノーマルモードとコモンモードを同時に解析することが可能となった。

第五章 今後の展望

本研究では不均一な媒質中での数値計算手法を開発することで導体を伝搬するコモンモードを定量化した。しかし、抵抗などの集中定数回路を繋いだ電気回路についての解析ができていない。今後は導体に集中定数回路を繋ぐ手法を学び、本研究で開発した数値計算手法に取り入れていきたい。同軸線路のコモンモードの定量化についてもさらに精度の高いシミュレーションを行えるよう改良したい。そうすることで実際の製品などに使われる電気回路などさらに幅広い条件においてコモンモードを解析できると考える。

謝辞

大阪大学基礎工学研究科付属極限化学センター阿部真之教授には本研究をさせていただく機会を頂いたことに心より感謝申し上げます。

大阪大学大学院基礎工学研究科附属極限科学センター山下隼人助教授には進捗報告会などにおいて的確な御助言を承りましたこと心より感謝申し上げます

大阪大学基礎工学研究科付属極限化学センター神野 崇馬助教授には本研究を遂行するにあたり適切なご教示、ご指導承りましたこと、心より感謝申し上げます。

最後に一年間という短い期間でしたが、満足のいく研究ができる環境を作っていただいた阿部研究室の皆様に心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Hiroshi Toki and Masayuki Abe. Multiconductor Transmission-Line Theory That Includes an Antenna Process with a Lumped-Parameter Circuit. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.85.
- [2] Masahito Shoyama. Common-mode noise reduction in the Watkins-Johnson converter. *2007 7th International Conference on Power Electronics*. 2007.
- [3] Shuji Kitora. A Time-Domain Numerical Method for Multi-Conductor Coaxial Lines Using the Exact Retarded Potential Integral Equations. *IEEE Access*, Vol. 9, 2021.
- [4] Shuji Kitora, Souma Jinno, Hiroshi Toki and Masayuki Abe. A Time-Domain Numerical Method for Multi-Conductor Coaxial Lines Using the Exact Retarded Potential Integral Equations. *IEEE Access*, Vol. 9, 2021.
- [5] D.E. Bockelman, W.R. Eisenstadt. Combined differential and common-mode scattering parameters: theory and simulation. Published in: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. Vol. 43, Issue: 7, Jul 1995.
- [6] Oliver Magdun, Andreas Binder, Yves Gemeinder. Representation of iron core and dielectric losses for calculation of common mode stator ground currents in inverter-fed AC machines. *2010 12th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment*. 2010.
- [7] R. Hiptmair. Multigrid Method for Maxwell's Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 36, Issue. 1, pp. 204–225.
- [8] J. Ponte. OHM'S LAW IS THE GENERAL LAW OF EXACT SCIENCES. *Ponte Academic Journal* Jul 2016, Vol. 72, Issue 7, 2016.
- [9] Tesfahun, A. Local well-posedness of Yang–Mills equations in Lorenz gauge below the energy norm. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 22, 849–875 2015.
- [10] EH Grant, BSJ Halstead. Dielectric parameters relevant to microwave dielectric heating. *Chemical society reviews*, 1998.
- [11] W. Sui, D.A. Christensen, C.H. Durney. Extending the two-dimensional FDTD method to hybrid electromagnetic systems with active and passive lumped elements. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. Vol. 40, Issue. 4, Apr 1992.
- [12] Toru Uno(1998), Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetic Field and Antennas.
- [13] G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equation," *IEEE Trans. Electromagnetic Compat., EMC-23*, 4, pp. 377-382, 1981.

- [14] R L. Higdon, "Absorbing Boundary Conditions for Difference Approximations to the Multi-Dimensional Wave Equation ,," Mathematics of computation, 47, 176, pp.437-459, 1986.
- [15] D. M. Sullivan. Exceeding the Courant condition with the FDTD method. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 6, Issue. 8, Aug. 1996.
- [16] F. Russo. A method for estimation and filtering of Gaussian noise in images. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 52, Issue. 4, Aug. 2003.
- [17] L. W. Davis. Theory of electromagnetic beams. Phys. Rev. A 19, 1177, 1979.
- [18] D. Kenneth McLain. The electromagnetic radiation from a finite antenna. American Journal of Physics 43, 33, 1975.