

Large N QFT

大阪大学理学部物理学科 4 年

学生番号 04B18052

藤村晴伸

2022 年 2 月 22 日

概要

Large N QFT とは場の数が非常に多い場の理論である。近年、Large N QFT の考え方方が AdS/CFT に通ずるのではないかと考えられている。この卒業論文では必要となる場の理論の基礎を述べた後、Large N model の簡単なモデルを扱い、その性質を味わうことを目的とする。

なお、この卒業論文では $c = \hbar = 1$ の自然単位系を用い、ミンコフスキーメトリクスとして $\eta^{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1)$ を用いることとする。

目次

0	導入	3
1	経路積分	4
1.1	経路積分のアイデア	4
1.2	量子力学と経路積分	5
2	実スカラー場の理論	8
2.1	自由場	8
2.2	Wick の定理	10
2.3	Feynman diagram の導入	12
2.4	ϕ^4 model	13
2.5	ϕ^3 model	16
2.6	実スカラー場における対称因子	18
2.7	生成汎関数と Feynman diagram	24
3	摂動 VS 非摂動	30
3.1	古典力学的解釈	30
3.2	摂動は収束するか？	34
4	Large N approach	37
4.1	Large N vector model($O(N)$)	37
4.2	Large N matrix model($U(N)$)	45
4.3	Large N tensor model ($((O(N) \times O(N) \times O(N)))$)	53
5	今後の展望	59
5.1	Large N ゲージ理論と弦理論のつながり	59
5.2	SYK model	60
A	付録 A 数学的な公式	61
A.1	行列形のガウス積分	61
A.2	wick の定理の元となる公式	62
B	付録 B グリーン関数と真空期待値	66
C	付録 C 鞍点法 (saddle point method) の公式	68

*1 この PDF ではセクションや式番号にハイパーリンクを用いている。黒字だけどクリックできます。

0 導入

Large N QCD は場の数を無限にする極限をとる、と言う考え方に基づく理論であり、近年、Large N QCD と弦理論がホログラフィー原理を通じて対応しているのではないかと考えられている。また、Large N QFT の一種である SYK model は近年、2 次元重力の性質を示す事がわかっている。この様に、Large N QFT の考え方は AdS/CFT に通じているのではないかと考えられる。将来は AdS/CFT 対応の研究をしたい！と思っているため、今回は将来を見据えて、この Large N QFT について勉強することになった。

とはいっても僕みたいな普通の学部生には、場の理論の知識がない…^{*2}。そこで、今回の卒業研究では、実スカラーコードの理論に絞って場の理論を勉強した後、その知識を用いて Large N QFT の簡単なモデルを勉強することになった。今回扱ったモデルは Large N QFT の「トイモデル」のレベルだと思うが、幸運にも Large N QFT の示す面白い性質は味わうことができる。

なお、この卒業論文では「self-consistent」を心がけている。つまり、必要な知識はなるべくこの卒論内で完結するようにしている（つもり）。その甲斐あって少々、いや、かなり長い卒業論文になってしまった。先生方や場の理論の知識をお持ちの方は、セクション 1、セクション 2、付録 A、付録 B、付録 C は飛ばしてもらって大丈夫だと思います。

まずは経路積分の勉強からだ。では行こう。

^{*2} まあそんな弱音を言っていてもしょうがない。一瞬で強くなることはできない。前に進むには小さな一歩一歩を積み上げるしかないのだ。

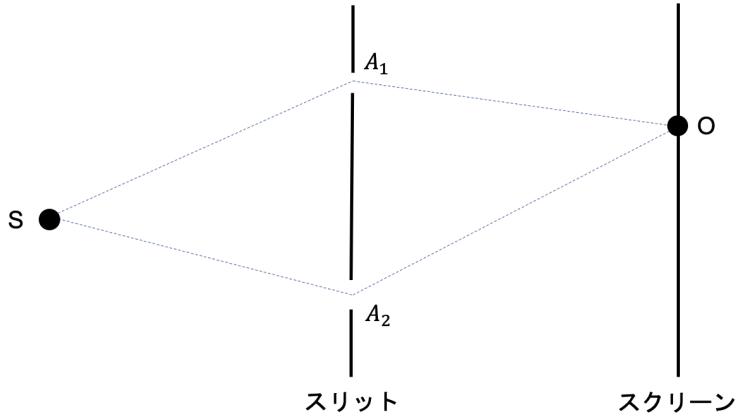


図 1.1 二重スリット実験

1 経路積分

この章では場の理論において非常に有効な手法である経路積分法について述べる。³ 経路積分は、ある変数 x を引数に持つ関数 $\phi(x)$ における積分である。⁴ $\phi(x)$ がありとあらゆる形(経路)を取るので、「経路」積分と呼ばれている(と思う)。

このセクションでは、量子力学を題材にして経路積分の導入を行う。量子力学では座標と運動量は演算子として扱わなければならないが、経路積分を用いると座標と運動量は演算子として扱う必要がなくなる。

1.1 経路積分のアイデア

このセクションでは二重スリット実験についての考察から、経路積分のアイデアが出てくることを述べる。図 1.1 のような二重スリット実験を考える。ソース S から電子などの粒子を発射し、スクリーン上で発射された粒子を検知する。ただし、ソースとスクリーンの間に障壁を用意し、障壁には位置 A_1 、 A_2 に穴が空いている。この時、スクリーン上有る点を O とし、経路 $O \rightarrow A_1 \rightarrow O$ を通った場合の波動関数を $\psi(S \rightarrow A_1 \rightarrow O)$ 、経路 $O \rightarrow A_2 \rightarrow O$ を通った場合の波動関数を $\psi(S \rightarrow A_2 \rightarrow O)$ 置くと、スクリーン上の点 O で粒子が検知される確率振幅 $\psi(S \rightarrow O)$ は以下のようにふたつの経路からの重ね合わせとなる。⁵

$$\psi(S \rightarrow O) = \psi(S \rightarrow A_1 \rightarrow O) + \psi(S \rightarrow A_2 \rightarrow O) \quad (1.1)$$

このことは、障壁の穴がいくつあっても同じことが言えるだろう。すなわち、障壁上の穴の位置を $A_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ とすると、

$$\psi(S \rightarrow O) = \sum_i \psi(S \rightarrow A_i \rightarrow O) \quad (1.2)$$

³ 一応この卒業研究の期間で勉強したことなので自分の理解を整理するためにも、経路積分について書くことにしました。

⁴ $\phi(x)$ は多変数関数でも良い。この変数 x は(物理では) 時空座標に対応し、 $\phi(x)$ は時空座標上で定義された「場」である。

⁵ 今回は重ね合わせの係数(重み)はそれぞれの経路の波動関数の中に入っていると考えてください。

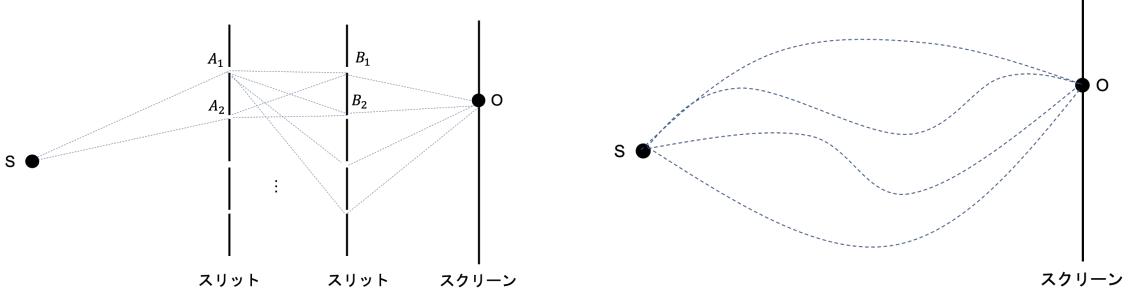


図 1.2 障壁が 2 枚の時

図 1.3 障壁の数、穴の数を無限に増やした時

となる。

次に、図 1.2 のようにソースとスクリーンの間にある障壁をもう一つ増やしてみる。一つ目の障壁にある穴の位置を A_i 、ふたつ目の障壁にある穴の位置を B_j とする ($i, j = 1, 2, 3, \dots$) すると、今度はソース S から観測点 O までの全ての通り方の重ね合わせになるだろう。これを式で表すと、

$$\psi(S \rightarrow O) = \sum_{i,j} \psi(S \rightarrow A_i \rightarrow B_j \rightarrow O) \quad (1.3)$$

となる。

さらに障壁を増やし、穴の数も無限大にしてみると、図 1.3 のようになる。障壁は無限個の穴が空いているのではなくなってしまうだろう。このように、障壁のない空間においても、「仮想的に無限個の穴の空いた障壁」を無限枚考えることにより、ソースからスクリーンに到着するまでの確率振幅は、ありとあらゆる経路の重ね合わせであると考えることができる。このような思考実験は経路積分の考え方を示唆している。

1.2 量子力学と経路積分

前の節では経路積分のアイデアが二重スリット実験から出てくることを見た。では、今度は実際に量子力学で確率振幅を計算し、経路積分をちゃんと導入しよう。

粒子の発射するソースの位置を q_I 、スクリーン上で検知する位置を q_F とする。粒子を発射する時刻を $t = 0$ とし、スクリーン上で検知する時間を $t = T$ とする。 $t = 0$ でソースから粒子を発射するとき、粒子は位置 q_I に局在している状態なので、初期状態は $\langle q_I |$ である。スクリーン上の位置 q_F での粒子の確率振幅は以下の通りである。

$$\langle q_F | \underbrace{e^{-i\hat{H}T}}_{\text{初期状態から時間発展}} | q_I \rangle \quad (1.4)$$

ただし、 \hat{H} はこの系のハミルトニアン演算子である。ここで、 $\delta t = T/N$ として時間 T を N 当分すると、

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \langle q_F | \underbrace{e^{-i\hat{H}\delta t} \cdots e^{-i\hat{H}\delta t}}_{N \text{ 個}} | q_I \rangle \quad (1.5)$$

となる。ここで、(1.5) に完全系の式 $\int dq |q\rangle \langle q| = 1$ を $N - 1$ 個以下のように挿入する。

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q_F | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-2} \rangle \cdots \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \quad (1.6)$$

今十分大きな N を考えおり、 δt は微小なので、 $e^{-i\hat{H}\delta t}$ を近似して以下のように計算する。

$$\begin{aligned}
 \langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_j \rangle &= \langle q_{j+1} | (1 - iH(\hat{q}, \hat{p})\delta t) | q_j \rangle \\
 &= \int dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | (1 - iH(\hat{q}, \hat{p})\delta t) | q_j \rangle \\
 &= \int dp_j (1 - iH(q_j, p_j)\delta t) \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

ここで $\int dq |p\rangle \langle p| = 1$ を用いた。また、 $\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iqp}$ を (1.2) に代入し、 δt が微小であることをもう一度使うと、

$$\langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp_j \exp(i(p_j v_j - H(q_j, p_j)\delta t)) \tag{1.8}$$

となる。ただし、 $v_j := \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}$ と置いた。さらに、ハミルトニアンとして、 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$ の時を考える。 $(V(q)$ はこの系のポテンシャル) p_j の積分はガウス積分なので実行すると、

$$\langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_j \rangle = \sqrt{\frac{-im}{2\pi\delta t}} \exp\left(i\left(\frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 - V(q_j)\right)\delta t\right) \tag{1.9}$$

(1.9) を (1.6) に代入する。ただし、 $q_N = q_F$ 、 $q_0 = q_I$ とする。得られる式は以下の通り。

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \left(\frac{-im}{2\pi\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \exp\left(i \sum_{j=1}^{N-1} L(q_j, \dot{q}_j)\delta t\right) \tag{1.10}$$

ただし、 $L(q_j, \dot{q}_j) = \frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 - V(q_j)$ と置いた。最後に $N \rightarrow \infty$ とする。 $\sum_j \delta t \rightarrow \int dt$ となり、経路積分の記号 $\int Dq := \left(\frac{-im}{2\pi\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \int dq_1 \cdots dq_{N-1}$ を導入すると、(1.9) は

量子力学の経路積分表示

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int Dq \exp\left(i \int dt L(q(t), \dot{q}(t))\right) \tag{1.11}$$

となる。 $L(q(t), \dot{q}(t))$ はこの系のラグランジアンである。 $\int Dq$ は定義した形から、 $q(t)$ に対するありとあらゆる経路をとる(図 (1.4)、図 (1.5) を参照)。

ここで注目したいことは、(1.11) 左辺では演算子形式の形であるが右辺ではもはや位置 q は演算子ではなくなり、経路積分の変数である。つまり、経路積分の形に書けば演算子を用いることなく量子力学を考えることができる。

なお、今 $\hbar = 1$ の単位系を用いているが、 \hbar を復活させると、

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int Dq \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dt L(q(t), \dot{q}(t))\right) \tag{1.12}$$

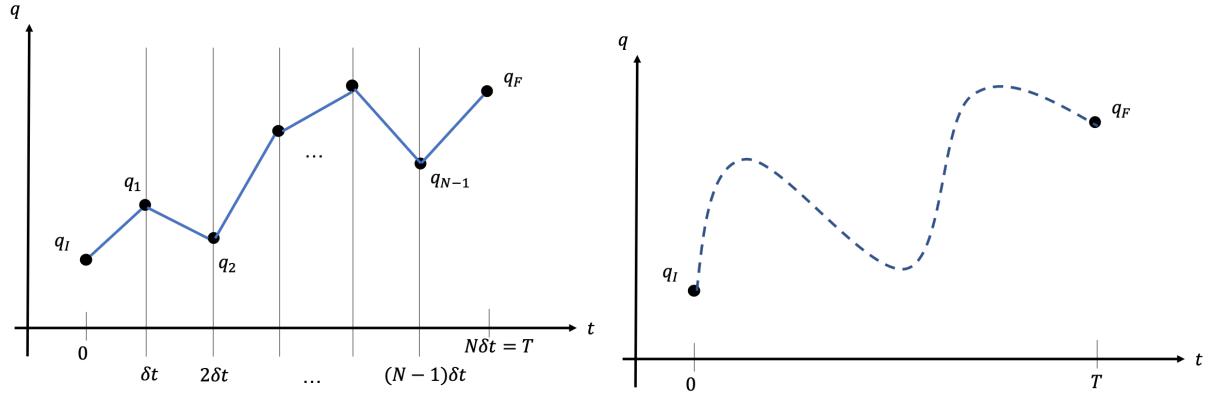


図 1.4 経路積分(離散化)

図 1.5 連続化($N \rightarrow \infty$)

となる。古典極限 $\hbar \rightarrow 0$ で考えると、経路積分でもっとも効いてくる経路は、作用 $S = \int dt L(q(t), \dot{q}(t))$ を停留させる経路である^{*6}。つまり、変分原理 $\delta S = 0$ を満たす経路 (onshell の経路) である^{*7}。offshell の経路 (運動方程式に従わない経路) も積分にはもちろん入るが、それらの項は exponential の肩にあるので位相が互いに相殺し、あまり効かないだろう。

^{*6} これはいわゆる鞍点法 (saddle point approximation) の考え方を用いている。

^{*7} 変分原理を満たす経路とはつまり運動方程式に従う経路のことだ。

2 実スカラー場の理論

このセクションでは、実スカラー場の理論の簡単な導入を行う^{*8}。この卒業論文では場を演算子と考える正準量子化の方法ではなく、セクション1で導入した経路積分の方法を用いて場の理論を記述する^{*9}。このセクションでは自由場の理論から始まり、摂動論において非常に重要であるWickの定理とFeynman diagramについて述べる。摂動論の相互作用としては ϕ^4 modelと ϕ^3 modelを扱う。この二つのモデルを用いて得られる知識は後のセクションで重要なとなる。また、最後の章では実スカラー場における対称因子の考え方について、 ϕ^4 modelを例にとり説明する。

2.1 自由場

相互作用のない、質量 m の相対論的自由粒子は以下の Klein-Gordon 方程式に従う。^{*10}

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \quad (2.1)$$

(2.1) は以下のラグランジアンから得られる。^{*11}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right) \quad (2.2)$$

ただし、 $(\partial\phi)^2 = (\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)^2$ である。(2.2) に対して変分原理を用いれば(2.1)が得られる。

(2.2) のラグランジアンは完全に自由な粒子の場合であるが、そこにソース関数 $J(x)$ を以下のように加える。^{*12}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2 \right) + J(x)\phi \quad (2.3)$$

$J(x)\phi$ の項は真空の状態から「揺さぶり」を与えていた。例えば量子力学で考えると、 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(x)(v(x)$ はポテンシャル)で、ポテンシャルに対して $-J(x)\phi$ の項を加えることに対応している。これはつまり、場 $\phi(x)$ に対し位置 x において”力” $J(x)$ で押しているということである。^{*13}また、場の理論で重要な積分 Z を以下のように定義する。

$$Z(J) = \int D\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)} \quad (2.4)$$

^{*8} 僕はこの卒業研究で初めて場の理論を学び始めたので、一応勉強したことまとめようと思います。

^{*9} とはい付録Bでちょっとだけ正準量子化の議論もする

^{*10} 山口先生の授業「相対論的量子力学」で扱った。

^{*11} 今後、ラグランジアン L もラグランジアン密度 \mathcal{L} もどちらもラグランジアンと呼ぶことにする。 L か \mathcal{L} かは文脈判断でお願いします。

^{*12} $f(x)$ と書けば引数 x は4次元の座標を表すとする。つまり、 $f(x) = f(t, x, y, z)$ だ。

^{*13} 後でこのソース関数 J によってfeynman diagramにおける粒子の沸き出し、吸い込みが起こる事がわかる

$\int D\phi$ はセクション (1) で導入した経路積分である。 $Z(J)$ は分配関数または生成汎関数と呼ばれる^{*14}。自由場の場合は生成汎関数は、

$$Z(J) = \int D\phi e^{i \int d^4x (\frac{1}{2}\phi((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2) + J\phi)} \quad (2.5)$$

である。自由場の場合はこの積分を実際に計算する事ができる。

まず、(2.5) の $(\partial\phi)^2$ を部分積分する。表面項は無限遠で ϕ が 0 になることを仮定して無視すると、

$$Z(J) = \int D\phi e^{i \int d^4x (-\frac{1}{2}(\partial^2 + m^2)\phi + J\phi)} \quad (2.6)$$

ここで、時空座標を格子状に離散化する。4 次元時空座標を時間と空間 3 方向について刻み幅 a で離散化し、^{*15}i 番目の格子点に対する $\phi(ia)$ の値を $q_i = \phi(ia)$ と置く^{*16}($i=1, 2, \dots, N$)。また、 ${}^t\tilde{q} = (q_1, \dots, q_N)$ としてベクトルを定義する。 $J(x)$ についても同様に離散化する。また、 $-(\partial^2 + m^2)$ に対応する行列を A と置く^{*17} すると、(2.6) は以下のように書き換えられる。

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N e^{\frac{i}{2}\vec{q} \cdot A\vec{q} + i\vec{J} \cdot \vec{q}} \quad (2.7)$$

この式は (A.1) を用いると、

$$Z(J) \propto e^{-\frac{i}{2}\vec{J} \cdot A^{-1}\vec{J}} \quad (2.8)$$

最後に、(2.8) を連続に戻す。 $\vec{J} \cdot A^{-1}\vec{J} = \sum_{i,j} J_i A_{ij}^{-1} J_j$ のように \sum が二つある項は連続化すると二重積分 \iint になることに注意すると、

自由場の生成汎関数

$$Z(J) = Z(J=0) \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D(x-y) J(y) \right) \quad (2.9)$$

となる。ただし、行列 A^{-1} の連続化に対応する関数を D と置いた。 $D(x-y)$ は伝搬関数 (propagator) と呼ばれる。比例係数は $Z(J=0)$ に丸め込んだ。なお、伝搬関数は具体的に求める事ができる。伝搬関数 D は

^{*14} 今回はこのようにして Z を導入した。これは後でわかる事だが、 $Z(J)$ は n 点グリーン関数を生成し、ありとあらゆる Feynman diagram を足し合わせたものである事がわかる。そういう意味で、分配関数とも呼ばれる。

^{*15} 今時間と空間 3 方向について同じ刻み幅を設定したが、別に同じである必要はない。

^{*16} 本来なら、時空座標の 4 方向の軸に対して 4 つの数字 i, j, k, l を用いて $(t, x, y, z) = (ia, ja, ka, la)$ というようにして格子点を指定するのが自然だと思うが、今これら 4 つの数字をまとめて i と置いている。

^{*17} 例えれば、一回微分なら、 $(\frac{d}{dx} f(x))_i \rightarrow \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$ である。今回は 2 階微分なので、

$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2\Delta x}$ みたいな項が出るだろう。対称行列になると想像できる。ただ、具体的な行列の形を求める必要はない。想像するだけで十分である。

A^{-1} の連続化であり、 A の連続化が $-(\partial^2 + m^2)$ に対応していることを考えると、 D は $-(\partial^2 + m^2)$ の逆演算子である。つまり、 $A_{ij}A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$ を連続化した式

$$-(\partial^2 + m^2)D = \delta(x - y) \quad (2.10)$$

を満たす。

(2.10) はフーリエ変換で解くことができる。結果は次の通り^{*18}。

$$D(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2} \quad (2.11)$$

*19 (2.11) を見ると、 $D(x - y) = D(y - x)$ が成り立つ事がわかる。

2.2 Wick の定理

この節では摂動論において重要な量である n 点グリーン関数を導入し、Wick の定理について述べる。

2.2.1 n 点グリーン関数

今、自由場のラグランジアンを $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}((\partial\phi)^2 - m^2\phi^2)$ とする。このラグランジアンに相互作用項 $\mathcal{L}_{int}(\lambda)$ を加えたラグランジアンを $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}(\lambda)$ とする。ここで λ は相互作用の結合定数である。^{*20} この時、生成汎関数は、(2.4) より

$$Z(J, \lambda) = \int D\phi e^{i \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi)} \quad (2.12)$$

である。この式の $e^{\int d^4 x J\phi}$ の部分をテイラー展開すると、以下のようになる。

$$Z(J, \lambda) = \int D\phi e^{i \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n J(x_1) \cdots J(x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \quad (2.13)$$

ここで、 n 点グリーン関数 $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ を以下のように定義する。^{*21}

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{Z(J=0, \lambda)} \int D\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{i \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int})} \quad (2.14)$$

^{*18} 初めから $D(x - y)$ と $(x - y)$ の関数と書いているが、(2.10) を解いたら $(x - y)$ の関数になった、と思うのが正しいと思う

^{*19} なお、特異点を避けるため $m^2 \rightarrow m^2 - i\varepsilon$ とする処方もよく使われる。こうすることで分配関数 Z の積分の式に $e^{-m^2\phi}$ の項が出て収束しやすくなるという都合もある。今回の卒論ではこの事実は詳しく使わないので m^2 のままにしている。

^{*20} 摂動論では \mathcal{L}_{int} が非常に小さいと仮定する。今は別に小さいと仮定していない。

^{*21} (付録 B) より、このように定義した n 点グリーン関数は $\langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | 0 \rangle$ を計算していることになる。つまり、正準量子化的文脈においては n 点グリーン関数は n 点間の粒子の生成、消滅を表している。

すると、(2.13) は以下のように n 点グリーン関数で書ける。

$$Z(J, \lambda) = Z(J = 0, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n J(x_1) \cdots J(x_n) G^{(n)}(x_1, \cdots x_n) \quad (2.15)$$

また、wick の定理でよく使う記号 $\langle \cdots \rangle$ を

$$\begin{aligned} \langle \cdots \rangle &:= \frac{\int D\phi(\cdots) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0}}{\int D\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0}} \\ &= \frac{1}{Z(J = 0, \lambda = 0)} \int D\phi(\cdots) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \end{aligned} \quad (2.16)$$

として定義すると、n 点グリーン関数は以下のように表せる。

$$G^{(n)}(x_1, \cdots x_n) = \frac{\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} \rangle}{\langle e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} \rangle} \quad (2.17)$$

2.2.2 Wick の定理

摂動論の具体的な例は次節以降で紹介するが、摂動論を用いれば、以下の量を計算する機会が多くある。

$$\langle \phi(x_i) \phi(x_j) \cdots \rangle = \frac{1}{Z(J = 0, \lambda = 0)} \int D\phi(\phi(x_i) \phi(x_j) \cdots) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \quad (2.18)$$

この計算は経路積分 $\int D\phi$ をセクション (1) で行ったように離散化し、 $\int dq_1 \cdots \int dq_N$ に置き換えると^{*22} セクション (付録 A) の議論に帰着する。(付録 A.9)(A.2)、(付録 A.13) を連続化すると、以下の Wick の定理が成り立つ。

Wick の定理

$$\langle \phi(x_i) \phi(x_j) \rangle = iD(x_i - x_j) \quad (2.19)$$

$$\underbrace{\langle \phi(x_i) \phi(x_j) \cdots \rangle}_{\text{偶数個}} = \sum_{Wick} \langle \phi(x_a) \phi(x_b) \rangle \cdots \langle \phi(x_c) \phi(x_d) \rangle \quad (2.20)$$

$$\underbrace{\langle \phi(x_i) \phi(x_j) \cdots \rangle}_{\text{奇数個}} = 0 \quad (2.21)$$

ただし D は伝搬関数で、 \sum_{Wick} は可能な限り wick 縮約をとってそれらを足し合わせよ、という意味である。

^{*22} 経路積分を離散化して多重積分に置き換える時に比例係数が出るが、これは分母分子で消しあう。

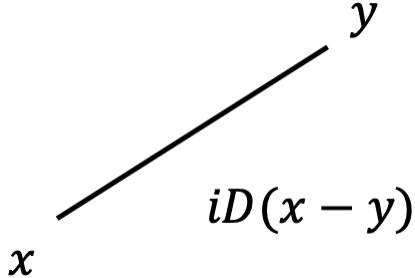


図 2.1 伝搬関数 (propagator) の図示

wick 縮約はどんなものかというと、 $\langle \rangle$ の中の項からペアを作る作業のことである。とはいえることは日本語で説明するより具体的に書いたほうがわかりやすい。

例えば

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_i)\phi(x_j)\phi(x_k)\phi(x_l) \rangle &= \langle \phi(x_i)\phi(x_j)\phi(x_k)\phi(x_l) \rangle + \langle \phi(x_i)\phi(x_j)\phi(x_k)\phi(x_l) \rangle + \langle \phi(x_i)\phi(x_j)\phi(x_k)\phi(x_l) \rangle \\ &= \langle \phi(x_i)\phi(x_j) \rangle \langle \phi(x_k)\phi(x_l) \rangle + \langle \phi(x_i)\phi(x_l) \rangle \langle \phi(x_j)\phi(x_k) \rangle + \langle \phi(x_i)\phi(x_k) \rangle \langle \phi(x_j)\phi(x_l) \rangle \end{aligned}$$

といった具合である。それ以外にも、 $\langle x_i x_j x_k x_l x_m x_n \rangle$ 、 $\langle x_i x_j x_k x_l x_m x_n \rangle$ 、 $\langle x_i x_j x_k x_l x_m x_n \rangle$ などもある。ただし ϕ の引数だけを表記した。

この Wick の定理は次節以降頻繁に用いる。摂動論で大活躍する。

2.3 Feynman diagram の導入

この節では場の理論の摂動論で便利な記法である Feynman diagram を導入する。Feynman diagram の記法を用いることにより、煩雑な積分計算を一つの「図」で表す事ができる。このことにより、計算を視覚的にとらえる事^{*23}ができるし、2.6 節で紹介する対称因子も図的にすぐ見つける事ができるのもそう。

まず、自由場の理論で導いた伝搬関数 $D(x - y)$ を図 2.1 のように表す^{*24}。Feynman diagram においてソース関数 $J(x)$ の数は diagram の端点の数を表す。Feynman diagram は時空座標上に描いていると考えて良いが、横軸を空間方向、縦軸を時間方向としても良いし、逆でも良い。また、Feynman diagram 上の座標を正確に描く必要はなく位置は大体で良い。

また、以下のような計算を相互作用^{*25}として考え、図 2.2 のように表すとする。

$$(-i\lambda) \int d^4\omega (iD(x_1 - \omega))(iD(x_2 - \omega))(iD(x_3 - \omega))(iD(x_4 - \omega)) \quad (2.22)$$

^{*23} 人間は目から得られる情報の方が理解しやすいのだと思う。「グラフ」なんかもそう。数値だけ見てもよくわからないけど、グラフにすると一目瞭然になる場面は多い。3 桁 \times 3 桁の計算は暗算ですることは（僕には）厳しいけど、筆算を使えばできる。

^{*24} $iD(x - y)$ は自由場における $\langle 0 | T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)) | 0 \rangle$ を表している。つまり、自由場における 2 点相関である。

^{*25} 今回は 4 点相互作用を例にとったが、3 点相互作用や 5 点相互作用も考えられる。

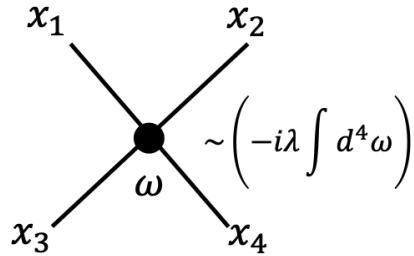


図 2.2 式 (2.22) の図示

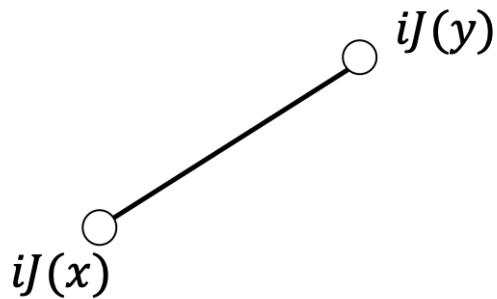


図 2.3 式 (2.23) の図示

また、Feynman diagram の端点の座標も以下のように積分した式を図 2.3 のように表すとする。端点の○が、端点も積分しますよ、ということを意味している。

$$\int d^4x \int d^4y (iJ(x)) D(x-y) (iJ(y)) \quad (2.23)$$

なお、この解釈を用いると、自由場において求めた分配関数 (2.9) は以下の図 2.4 のように、J の幕で展開しても相互作用のない粒子の伝搬しか現れない。J の高次の部分を求めてても、ただ粒子が増えて素通りするだけである。これは相互作用のない自由場であるので妥当な結果である。

2.4 ϕ^4 model

このセクションでは相互作用の具体例として

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{Z(J)}{Z(J=0)} &= \exp\left(\frac{i}{2} \text{ (Diagram)}\right) \\
&= 1 + i \left(\frac{1}{2} \text{ (Diagram)} \right) + \frac{i^2}{2!} \left(\frac{1}{2^2} \text{ (Diagram)} \right) + \dots
\end{aligned}$$

J⁰:k
J²:k
J⁴:k

図 2.4 自由場の $Z(J)$ を図示

となる場合を考える^{*26}。 λ は結合定数であり、相互作用の大きさを表す。この項は Feynman diagram で図 2.2 で表されるような 4 点相互作用を与える。今 $|\lambda|$ は非常に小さい値とする。つまり、このモデルを摂動で考える。このモデルは Feynman diagram を理解する上で教育的である。

まずは真空、つまり $Z(J=0, \lambda)$ を摂動で求めてみる。(2.12) より、

$$\begin{aligned}
Z(J=0, \lambda) &= \int D\phi e^{i \int d^4\omega (\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4)} \\
&= Z(0, 0) \langle e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4\omega \phi(\omega)^4} \rangle
\end{aligned} \tag{2.25}$$

である。今 λ が小さいと考えているので、exponential を展開すれば良い。 λ の 0 次からは当然 $Z(0, 0)$ が出てくる。 λ の 1 次からは、以下のような項が出てくる。

$$\begin{aligned}
\frac{Z(J=0, \lambda)}{Z(0, 0)}|_{\lambda \text{ 1 次}} &= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4\omega \langle \phi(\omega)^4 \rangle \\
&= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4\omega \langle \phi(\omega) \phi(\omega) \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle \\
&= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4\omega \left(\langle \phi(\omega) \overline{\phi(\omega)} \phi(\omega) \overline{\phi(\omega)} \rangle + \langle \phi(\omega) \overline{\phi(\omega)} \overline{\phi(\omega)} \phi(\omega) \rangle + \langle \phi(\omega) \overline{\phi(\omega)} \overline{\phi(\omega)} \overline{\phi(\omega)} \rangle \right) \\
&= -i \frac{3\lambda}{4!} \int d^4\omega \langle \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle \langle \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle
\end{aligned} \tag{2.26}$$

(2.4) は Feynman diagram で表すと図 2.5 のようになる。

同様に、 λ の 2 次も Wick の定理を用いて計算すると、図 2.6 のようなダイアグラムが出てくる事がわかる。それぞれのダイアグラムの係数は真面目に Wick 縮約をとれば計算できる。図 2.5、図 2.6 をみるとわかるよ

^{*26} 4!の係数がなぜかかっているのかは後でわかる。

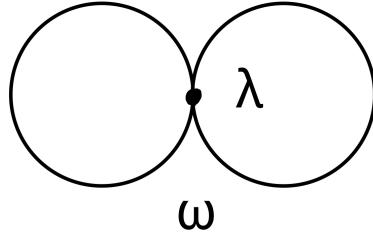


図 2.5 (2.4) の diagram

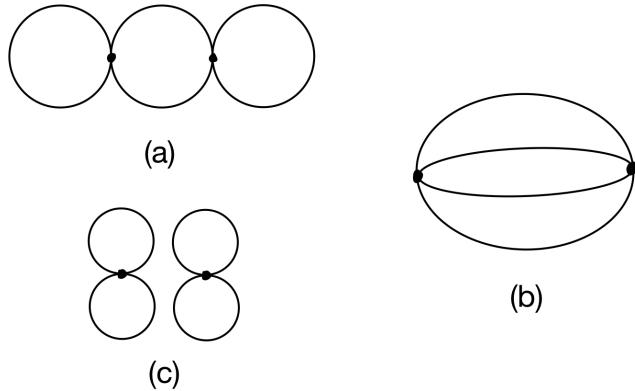


図 2.6 (真空 diagram(λ 2 次))

うに、Feynman diagram の交点 (vertex)(相互作用する点) の数が λ の次数に対応している。また、真空ダイアグラムにはソース項 J が含まれていないため Feynman diagram は端点のない diagram となる。なお、図 2.6 の (a)、(b) のように、ひと繋ぎのダイアグラムを連結ダイアグラムと言い、(c) のような二つのダイアグラムに分離されているものを非連結ダイアグラムと言う。

また、2 点グリーン関数 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ は (2.17) より、以下の量を計算する必要がある。

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4\omega\phi^4(\omega)} \rangle \quad (2.27)$$

(2.27) も真空ダイアグラムの時と同様に $e^{-i\frac{\lambda}{4!}}$ をテイラー展開すると Wick の定理で計算できる。^{*27} 例えれば、(2.27) の $\lambda 0$ 次 (摂動 0 次) からは $\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle$ が出てきて、これは自由場の時の二点間の伝搬である。(2.27) の $\lambda 1$ 次 (摂動 1 次) からは

$$-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4\omega \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(\omega) \rangle \quad (2.28)$$

^{*27} この卒論ではもっぱら Wick の定理で計算を進める方法、つまり wick way と呼ばれる手法を用いている。だが、もう一つ計算の仕方があって、Schwinger way と呼ばれる方法である。こちらの方法は $J(x)$ の汎関数微分を用いるやり方で、計算量こそ大けれど Feynman diagram との対応は直感的にイメージしやすい。実は僕は初めに Schwinger way で Feynman diagram を学んだ。

が出てきてこれは wick の定理で計算する事ができる。同様に、 λ 2 次 (摂動 2 次) からは、

$$\frac{1}{2!} \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4\omega_1 \int d^4\omega_2 \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(\omega_1)\phi^4(\omega_2) \rangle \quad (2.29)$$

の項が出てくる。これも wick の定理で計算できる。

これらの摂動計算をすると、図 2.7 のようなダイアグラムが出てくる事がわかる^{*28}。なお、図 2.7 は摂動 2 次においては全てのダイアグラムを網羅しているわけではない。

(2.7) を見ると、今回加えた相互作用 (2.24) によって 2 点グリーン関数は図 2.7 の (b)(c)(d),.. のような補正を受けている事がわかる。4 点グリーン関数やそれ以上のグリーン関数に対しても同様の計算ができる。具体的には図 2.8 のような項も出てくる事がわかる。なお、今回の ϕ^4 model では (2.21) から奇数のグリーン関数は 0 である事がわかる。

2.5 ϕ^3 model

スカラー場の相互作用のモデルとしてもう一つ重要な例として、 ϕ^3 model を考える。つまり

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{3!}\phi^3 \quad (2.30)$$

となる場合を考える。 g は結合定数であり、相互作用の大きさを表す。この項は Feynman diagram で図 2.9 で表されるような 3 点相互作用を与える。今回も $|g|$ は非常に小さい値とする。つまり、このモデルを摂動で考える。

今回もまずは真空ダイアグラムから考える。今

$$Z(J=0, g) = \int D\phi e^{i \int d^4\omega (\mathcal{L}_0 - \frac{g}{3!}\phi^3)} \quad (2.31)$$

$$= Z(0, 0) \langle e^{-i \frac{g}{3!} \int d^4\omega \phi^3(\omega)} \rangle \quad (2.32)$$

である。今回も、摂動論の考え方を用いて、 $e^{-i \frac{g}{3!} \int d^4\omega \phi^3(\omega)}$ をテイラー展開して計算する。今回の場合、(2.21) より、 $Z(J=0, g)$ の g の奇数次の項は 0 である。摂動の最低次は g の 2 次であり、以下のような項が出てくる。

$$\frac{Z(J=0, g)}{Z(0, 0)}|_{g^2 \text{ 次}} = \frac{1}{2!} \left(-i \frac{g}{3!} \right)^2 \int d^4\omega_1 \int d^4\omega_2 \langle \phi^3(\omega_1)\phi^3(\omega_2) \rangle \quad (2.33)$$

これも wick の定理で計算すると図 2.10 のようなダイアグラムが出る事がわかる。

今回は 1 点グリーン関数 $G^1(x)$ などの奇数のグリーン関数も値をもつ。例えば、 $G^1(x)$ の g_1 次からは以下のようないいえやっぽり Wick 縮約での計算が基本の呼吸な気がする。

^{*28} こういう計算はとにかく実際に手を動かして練習するのが良い。Wick 縮約をとって、逐一ダイアグラムとの対応を確認していくと、そのうち Feynman diagram を描くのが計算としてとても楽なことに気づくだろう。慣れたら diagram だけで計算できるようになると思う。とはいっても Wick 縮約での計算が基本の呼吸な気がする。

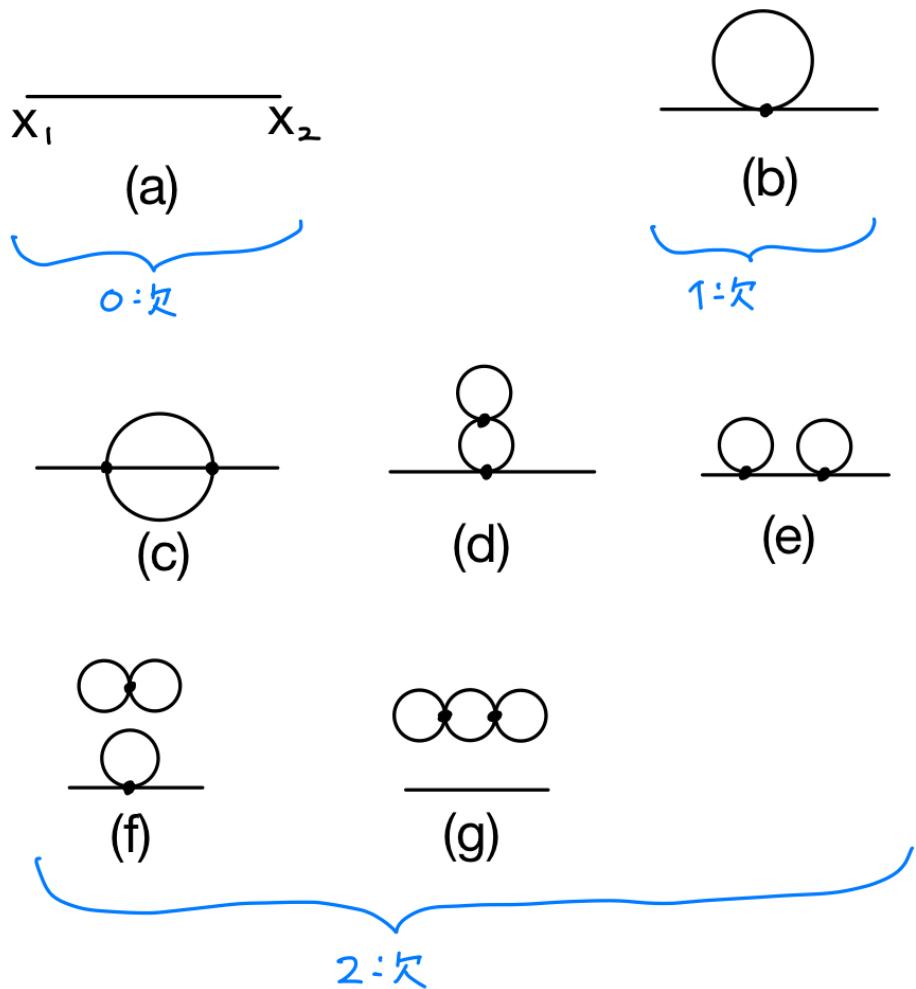


図 2.7 ((2.27) から出てくるダイアグラム

$$-i \frac{g}{3!} \int d^4\omega \langle \phi(x) \phi^3(\omega) \rangle \quad (2.34)$$

これも Wick の定理で計算できる。結果は図 2.11(a) のようなダイアグラムが出てくる。同様に $G^{(2)}(x_1, x_2)$ も摂動で計算するとさまざまなダイアグラムが出てくる。代表的なものは図 2.11(b) がある。

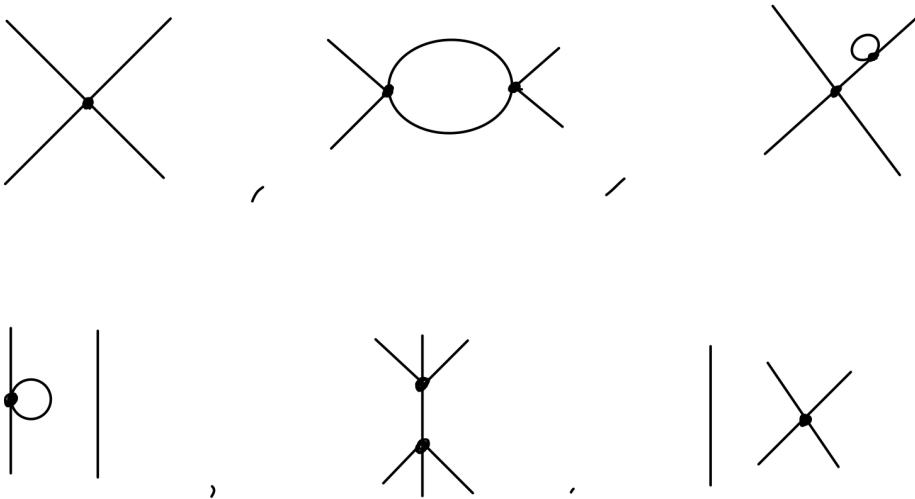


図 2.8 ϕ^4 model の色々なダイアグラム

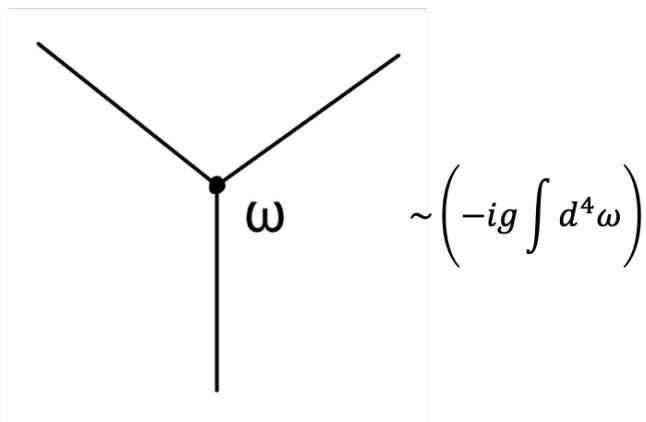


図 2.9 3 点相互作用の diagram

2.6 実スカラー場における対称因子

この節では、実スカラー場における対称因子の考え方について述べる。今まではどのようなダイアグラムが出てくるかに注目してきた、係数を含めた具体的な計算は述べてこなかった。ここからは wick 縮約の仕方の数を勘定することにより、対称因子を導出する。また、対称因子の考え方から、分配関数の *log* には「連結ダイアグラム」のみで表せることを述べる。

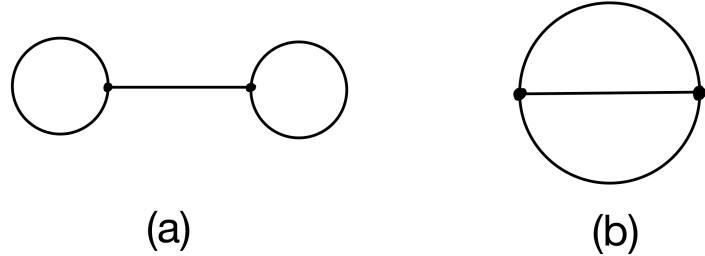


図 2.10 真空 diagram(g_2 次)

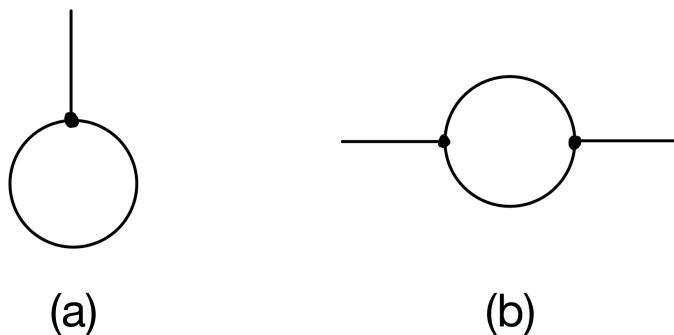


図 2.11

2.6.1 Feynman diagram の重複度

前の節では相互作用として ϕ^4 model や ϕ^3 model を例にとり、Feynman diagram の扱い方を学んだ。wick の定理で計算するとわかるが、1 つの Feynman diagram に対し、何通りかの wick 縮約のやり方が考えられる。ここで 1 つの Feynman diagram に対して、wick 縮約の仕方の数を重複度と名付けよう。重複度は具体例をいくつか考えればイメージが付く。

簡単のため ϕ^3 model を考える^{*29} 例ええば図 2.11(a) のダイアグラムは (2.34) を以下のように wick 縮約をとることで得られる。

$$-i \frac{g}{3!} \int d^4\omega \langle \overline{\phi(x)} \overline{\phi(\omega)} \overline{\phi(\omega)} \overline{\phi(\omega)} \rangle \quad (2.35)$$

しかし、wick 縮約の取り方はこれ以外にも、 $\langle \overline{\phi(x)} \overline{\phi(\omega)} \overline{\phi(\omega)} \phi(\omega) \rangle$ と $\langle \overline{\phi(x)} \phi(\omega) \overline{\phi(\omega)} \overline{\phi(\omega)} \phi(\omega) \rangle$ のような wick 縮約の取り方がある。これらの wick 縮約はどれも同じ Feynman diagram(図 2.11(a)) を与える。つまり、重複度は 3 である。このことを考慮すると、(2.34) は以下のように計算できる。

^{*29} この節で述べることは ϕ^4 model でも同じ事が言える。

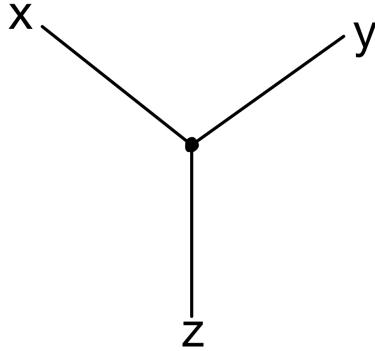


図 2.12

$$\begin{aligned}
 -i \frac{g}{3!} \int d^4\omega \langle \phi(x) \phi(\omega) \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle &= -i \frac{g}{3!} \underbrace{\times 3}_{\text{重複度}} \int d^4\omega \langle \phi(x) \phi(\omega) \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle \\
 &= -i \frac{g}{2} \int d^4\omega \langle \phi(x) \phi(\omega) \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\text{図 2.11(a)})
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

ダイアグラムに係数 $\frac{1}{2}$ がかかった。一方、3 点グリーン関数の 1 次摂動で出てくる以下のような wick 縮約は重複度が $3!$ である。

$$\begin{aligned}
 -i \frac{g}{3!} \underbrace{\times 3!}_{\text{重複度}} \int d^4\omega \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \phi(\omega) \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle &= -ig \int d^4\omega \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \phi(\omega) \phi(\omega) \phi(\omega) \rangle \\
 &= (\text{図 2.12})
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

今度はダイアグラムの係数は 1 である。このようなダイアグラムの係数の違いはなぜ起こるのだろうか？それはダイアグラムによって重複度が違うからである。 $(2.6.1)$ のような wick 縮約の重複度は $3!$ と述べたが、これは $(2.6.1)$ のような wick 縮約をとるときに、初めのペアの作り方は 3 通り、二つ目のペアの作り方が 2 通り、最後のペアはあまりものなので 1 通り、と考え $3!$ 通りと答えるても良いが、以下のように「同じ値である ω をあえて区別してから並び替える」という数え方もあるだろう³⁰。

$$\langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \underbrace{\phi(\omega^{(1)}) \phi(\omega^{(2)}) \phi(\omega^{(3)})}_{\text{並び替え } 3!\text{通り}} \rangle \tag{2.38}$$

³⁰もちろん、wick 縮約の数え方はひとそれぞれで、これ以外にも数え方はあると思います。今回僕が考えたのがこう、と言うだけです。

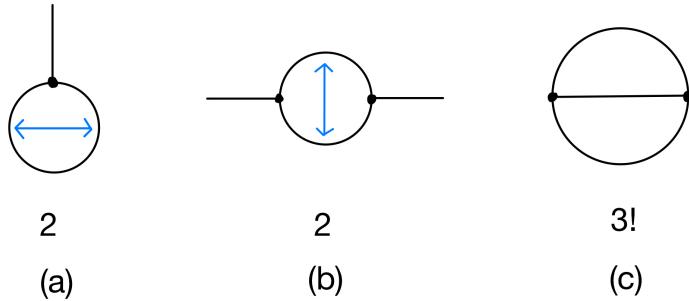


図 2.13 対称因子の図形的解釈

そう考えると、(2.35) の重複度 3 も以下のように数えられる。

$$\langle \phi(x) \underbrace{\phi(\omega^{(1)}) \phi(\omega^{(2)}) \phi(\omega^{(3)})}_{3!/2 \text{ 通り}} \rangle \quad (2.39)$$

最大で $3!$ の並び替えがあるのだが、 $\phi(\omega^{(2)})$ と $\phi(\omega^{(3)})$ の入れ替えに対して wick 縮約が変化しないので、その分 2 で割る必要がある。このように、 $\langle \cdots \phi(\omega) \cdots \phi(\omega) \cdots \rangle$ が一つあると 2 で割る必要がある。この割る数のことを対称因子と呼ぼう。今回の場合、

$$\langle \cdots \phi(\omega) \cdots \phi(\omega) \cdots \rangle : \text{対称因子 } 2 \quad (2.40)$$

である。それ以外にも、

$$\langle \cdots \phi(\omega_1) \phi(\omega_1) \cdots \phi(\omega_2) \phi(\omega_2) \cdots \rangle : \text{対称因子 } 2 \quad (2.41)$$

である。これは 3 つずつある ω_1 と ω_2 をそれぞれ区別したときに $\langle \cdots \phi(\omega_1^{(1)}) \phi(\omega_1^{(2)}) \cdots \phi(\omega_2^{(1)}) \phi(\omega_2^{(2)}) \cdots \rangle$ が、 $\phi(\omega_1^{(1)}) \leftrightarrow \phi(\omega_1^{(2)})$ かつ $\phi(\omega_2^{(1)}) \leftrightarrow \phi(\omega_2^{(2)})$ の入れ替えに対して同じ wick 縮約を与えるからである。その他にも

$$\langle \cdots \phi(\omega_1) \phi(\omega_1) \phi(\omega_1) \cdots \phi(\omega_2) \phi(\omega_2) \phi(\omega_2) \cdots \rangle : \text{対称因子 } 3! \quad (2.42)$$

である事がわかる^{*31}。今回 wick 縮約で考えた対称因子は Feynman diagram で見るとわかりやすい。2.13) のような対応がある事がわかる。 $\phi^4 model$ でも同様に図 2.14 のように対称因子を求められる。

以上の対称因子の考え方を用いれば一般の Feynman diagram に対する重複度が勘定できる。

摂動 n 次の場合、一つの Feynman diagram に対する wick 縮約の仕方は

$$\langle \phi(x) \phi(y) \cdots \underbrace{\phi^3(\omega_1) \cdots \phi^3(\omega_n)}_{\phi^3(\omega) \text{ が } n \text{ 個}} \rangle \rightarrow \underbrace{(3!)^n}_{\text{全ての } \omega \text{ を区別し入れ替え}} \times \underbrace{n!}_{\text{vertex の入れ替え}} \times \underbrace{\frac{1}{S}}_{\text{対称因子 } S} \text{ 通り} \quad (2.43)$$

^{*31} こういうのは実際に並び替えを紙に書き出すと理解しやすい。

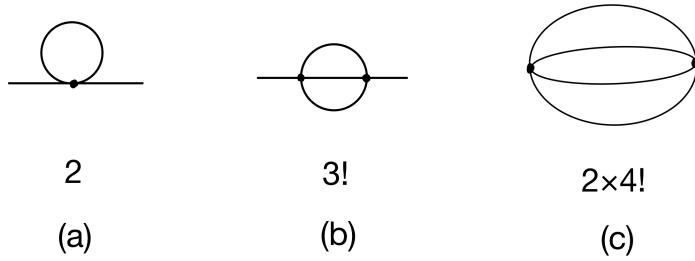


図 2.14 ϕ^4 model における対称因子

である。これより、対称因子 S の摂動 n 次の Feynman diagram の係数は

$$\underbrace{\frac{1}{n!} \left(\frac{1}{3!}\right)^n}_{e^{-i\frac{g}{3!} \int d^4\omega \phi^3}} \times \underbrace{(3!)^n}_{\text{全ての}\omega\text{を区別し入れ替え}} \times \underbrace{n!}_{\text{vertex の入れ替え}} \times \underbrace{\frac{1}{S}}_{\text{対称因子 } S} = \frac{1}{S} \quad (2.44)$$

となる。つまり、Feynman diagram の係数は対称因子しか出てこない。(2.36) にも対称因子が出ていることが確認できる。実際に ϕ^4 model において $Z(J=0, \lambda)$ と $\langle \phi(x_1)\phi(x_2)e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4\omega \phi^4(\omega)} \rangle$ wick の定理で係数まで含めて計算した結果が図 2.15 と図 2.16 である。確かに Feynman diagram 係数にその diagram の対称因子が出ている事がわかる。例えば、図 2.17 の diagram の対称因子は 2^3 だ。

つまり、煩雑な計算をしなくても、初めから Feynman diagram を描いて、係数は対称因子からめれば良い^{*32}。これも、Feynman diagram を用いる利点の一つである。

ところで、図 2.16 の λ の 1 次の項や λ の 2 次の項を見ると、真空ダイアグラムとの積で表されるダイアグラムも出てきている事が分かる(例えば図 2.16 の第 3 項)。実は、グリーン関数にはそのような真空ダイアグラムを含むダイアグラムは出てこない。と言うのも、図 2.16 で計算している量を図 2.15 で割ると、うまくシンクダイアグラムが除かれる事がわかる((2.17) 参照)。このことの証明自体は簡単で、以下のように考えれば良い。^{*33}

$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} \rangle$ から出てくる Feynman diagram を F_i とし、 F_i の対称因子を S_{F_i} とする。 F_i は真空ダイアグラムを含みうる。よって、真空を含まないダイアグラムを f_i 、真空ダイアグラムを B_j とするとき、 $F_i = \sum_j f_i \times B_j$ と書ける。この記法を用いると、

^{*32} 次節で解説するが、これは生成汎関数においても同じ事が言える。とはいって、個人的には wick の定理でコツコツ計算して、対称因子は検算程度に思つていた方がいいと思っている。あんまり対称因子だけで計算を済ませると、実スカラー場以外の応用が効かなくなる。実際、後で説明する large N 理論では対称因子の考え方ではなく、wick の定理の方が便利だったりする。とはいって、実スカラー場において非常に強力な検算方法を得た、といえよう！

^{*33} とはいって、(2.6.1) のような計算よりも、図 2.16 の高次の項まで具体的に計算し、真空ダイアグラムで因数分解する方が実感が湧く。

$$Z(J=0, \lambda) = 1 + \frac{1}{2^3} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^1} + \frac{1}{2^4} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^1} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} + \frac{1}{2^7} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} + O(\lambda^3)$$

図 2.15 ϕ^4 model における $Z(J=0, \lambda)$

$$\begin{aligned} & \left\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left\{ -\frac{i}{4!} \lambda \int d^4 w \phi(w)^4 \right\} \right\rangle \\ &= \underbrace{x_1 x_2}_{\lambda^1} + \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^1} + \frac{1}{2^3} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} \\ &+ \frac{1}{3!} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^1} + \frac{1}{2^2} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} + \frac{1}{2^4} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} + \dots \end{aligned}$$

図 2.16 ϕ^4 model における摂動の計算例

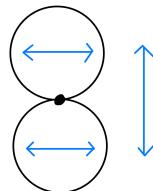


図 2.17 対称因子の図形的勘定

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_{int}} \rangle &= \sum_i \frac{1}{S_{F_i}} F_i \\ &= \sum_i \sum_j \frac{1}{S_{f_i} \times S_{B_j}} f_i \times B_j \\ &= \sum_i \sum_j \frac{1}{S_{f_i} \times S_{B_j}} f_i \times B_j \\ &= \underbrace{\left(\sum_i \frac{1}{S_{f_i}} f_i \right)}_{\text{真空を含まない diagram}} \times \underbrace{\left(\sum_j \frac{1}{S_{B_j}} B_j \right)}_{\text{真空 diagram}} \\ &= (\text{真空を含まない diagram}) \times \langle e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_{int}} \rangle \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$G^{(z)}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^1} + \frac{1}{3!} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} + \frac{1}{2^2} \text{Diagram} + \dots$$

図 2.18 グリーン関数の計算例 (ϕ^4 model)

よって、(2.6.1) の結果を (2.17) に用いると、 n 点グリーン関数には真空ダイアグラムを含まないことがわかった。具体的には、図 (2.18) のようになる。図 2.16 から真空ダイアグラムを含む項が取り除かれていることに注目しよう³⁴。

この節で得られた結果をまとめておく。

- Feynman diagram の係数は対称因子で求められる。
- n 点グリーン関数には真空ダイアグラムが出てこない。

2.7 生成汎関数と Feynman diagram

この節では、(2.6) 節の考え方を用いて、生成汎関数と Feynman diagram の関係について述べる。グリーン関数の時は Feynman diagram の端点の座標は固定していたが、生成汎関数を求める際は端点の座標さえも積分される ((2.15) を見よ)。このことにより、新たな対称因子が加わる。また、生成汎関数の \log は連結ダイアグラムのみで表されることを述べる。

2.7.1 生成汎関数に出てくる Feynman diagram

今回は ϕ^4 model のみを取り議論する。摂動論を用いて 2 点グリーン関数と 4 点グリーン関数を計算し³⁵、その結果を (2.15) に代入する。この結果を Feynman diagram を用いて表すと図 2.19 のようになつた³⁶。端点を \circ で示しているのは、図 2.3 と同様に端点の座標で積分していることを表している。

この結果をよく見てみると、 n 点グリーン関数の時に出てきた対称因子と微妙に違っている事がわかる。これ

³⁴ とはいって、(2.6.1) のような計算をしても実感が湧きにくい。実感を沸かせるには、とにかく手を動かしてグリーン関数を摂動高次まで求めれば良い。図 2.16 では全然足りない。 λ の 2 次の項を全て求めると、ようやく真空ダイアグラムとの積になつてゐるという構造が見えてくる（あくまで僕の場合は）。

これを読んでいる将来の自分へ：ipad の good note に計算ノート残ってるよ。

³⁵ ここは wick の定理でコツコツ計算する。ここで対称因子の考え方で答えを出すと、意味が薄い。なぜなら、今は対称因子が変わることを計算結果として理解したいからだ。

³⁶ この計算は結構重い。

$$\frac{Z(J, \lambda)}{Z(J=0, \lambda)} = 1 + \frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} + \frac{1}{2^2} \text{ (Diagram 2)} + \frac{1}{2^3 \times 3!} \text{ (Diagram 3)} + \frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 4)} + \frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 5)} + \dots$$

$\frac{i^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) J(x_2) G^{(2)}(x_1, x_2)$

$$+ \frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 6)} + \frac{1}{4!} \text{ (Diagram 7)} + \frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 8)} + \frac{1}{2^2 \times 3!} \text{ (Diagram 9)} + \frac{1}{2^4} \text{ (Diagram 10)} + \frac{1}{2^4} \text{ (Diagram 11)} + \dots$$

$\frac{i^4}{4!} \int d^4x_1 \dots d^4x_4 J(x_1) \dots J(x_4) G^{(4)}(x_1, \dots, x_4)$

$$+ O(J^6)$$

図 2.19 摂動での計算結果

は (2.15) の展開係数の影響である。しかし、これは対称因子の考え方で理解する事ができる。例えば、図 2.7 のダイアグラムは端点を固定し、区別している。しかし、生成汎関数には端点の座標は積分されるので、端点の区別はなくなる。これにより、端点に対する対称因子も考慮しなければならない。例えば、2.20 左のダイアグラムは対称因子 2 であり、図 2.20 右のダイアグラムは対称因子 2^2 である。両方とも端点が区別できなくなったために対称因子が 2 倍大きくなった。

また、図 2.19 のように計算した結果を式変形してみよう。図 2.21 のように非連結ダイアグラムを積に分解してまとめると、図 2.22 のような結果となった。図 2.22 の計算結果は $\frac{Z(J, \lambda)}{Z(J=0, \lambda)}$ が exponential の形にかけることを示唆している。実際、図 2.23 のようにおいてテイラー展開すると、出てくる項は見事に図 2.22 に一致する^{*37}。図 2.22 からは図 2.23 への式変形は非連結ダイアグラムを連結ダイアグラムの積に分解したことになっている (exponential で因数分解?のイメージ)。

以上の考察から、わかることは、「 $\frac{Z(J, \lambda)}{Z(J=0, \lambda)}$ の log をとると連結ダイアグラムのみが残る」と言うことである。実際、自由場の時の結果 (2.9) はそうなっている。自由場では相互作用がないので、考えられる連結ダイアグラムは図 2.3 のみだ。

また、同じことが真空ダイアグラムに対しても言える。図 2.15 の $Z(J=0, \lambda)$ を λ の 3 次まで計算すると、図 2.24 のようになる。^{*38} 図 2.24 の結果は対称因子が正しく出ている事がわかる。対称因子の数え方

^{*37} 図 2.22 だと少し分かりにくいかもしれない。もっと摂動の精度を上げて、高次まで計算するとさらに図 2.23 の構造があることが実感できる。

^{*38} 今回も wick の定理で地道に計算する。摂動 3 次となると計算は結構大変。でも焦らず落ち着いて計算すればいいける！。この卒論

図 2.20 左:対称因子 2 右:対称因子 2^2

図 2.21

$$\frac{Z(J, \lambda)}{Z(J=0, \lambda)} = 1 + \left(\begin{array}{l} + \frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} \\ + \frac{1}{2^2} \text{ (Diagram 2)} \\ + \frac{1}{2 \times 3!} \text{ (Diagram 3)} \\ + \frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 4)} \end{array} \right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} \right) \left(\frac{1}{2^2} \text{ (Diagram 2)} \right) + \left(\frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} \right) \left(\frac{1}{2 \times 3!} \text{ (Diagram 3)} \right) \\ + \left(\frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} \right) \left(\frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 4)} \right) + \left(\frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} \right) \left(\frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 4)} \right) \end{array} \right) + \dots$$

 $+ \dots$

図 2.22 図 2.19 を式変形

$$\frac{Z(J, \lambda)}{Z(J=0, \lambda)} = \exp \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ (Diagram 1)} + \frac{1}{2^2} \text{ (Diagram 2)} + \frac{1}{2 \times 3!} \text{ (Diagram 3)} + \frac{1}{2^3} \text{ (Diagram 4)} + \dots \\ + \frac{1}{4!} \text{ (Diagram 5)} + \frac{1}{2^4} \text{ (Diagram 6)} + \dots \end{array} \right)$$

図 2.23

の例を図 2.25 に記す。図 2.24 も図 2.21 と同様に非連結ダイアグラムを積の形にしすると、図 2.26 のように式変形できる。この式をじっと睨むと、図 2.27 のような構造をしている事がわかる^{*39}。これは $Z(J = 0, \lambda)$ が連結ダイアグラムを指数にもつ exponential の形にかけることを示唆している（図 2.28）。よって、真空ダイアグラムに対しては、 $\log(Z(J = 0, \lambda))$ が連結ダイアグラムのみで構成される事がわかった。

^{*}39 を見ている将来の自分へ:この計算も ipad の goodnote にあるよ。

^{*}39 もちろん、さらに摂動の高次を計算すればより分かりやすくなるだろう。

$$\begin{aligned}
 Z(J=0, \lambda) &= \left\langle \exp \left\{ -\frac{i}{4!} \lambda \int d^4 w \phi(w)^4 \right\} \right\rangle \\
 &= 1 + \frac{1}{2^3} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^1} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2^4} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^1} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} + \frac{1}{2^7} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^2} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{3 \times 2^{10}} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^3} + \frac{1}{2^7} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^3} + \frac{1}{3 \times 2^7} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3 \times 2^5} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^3} + \frac{1}{3 \times 2^4} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^3} + \frac{1}{3 \times 2^3} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^3} + \frac{1}{3 \times 2^4} \underbrace{\text{Diagram}}_{\lambda^3} \right) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

図 2.24 図 2.15 を λ^3 次まで計算

この節で得られた結論は、

- ・生成汎関数（分配関数）はありとあらゆる Feynman diagram で構成される。
- ・生成汎関数（分配関数）の log は連結ダイアグラムのみで構成される。

と言う事である。

この事実がわかると、 Z が「分配関数」と呼ばれる理由が明らかになったと思う。分配関数 Z はありとあらゆる Feynman diagram の情報を含んでいる。逆に言えば、分配関数さえ求められれば、ありとあらゆる Feynman diagram を導出する事ができる。

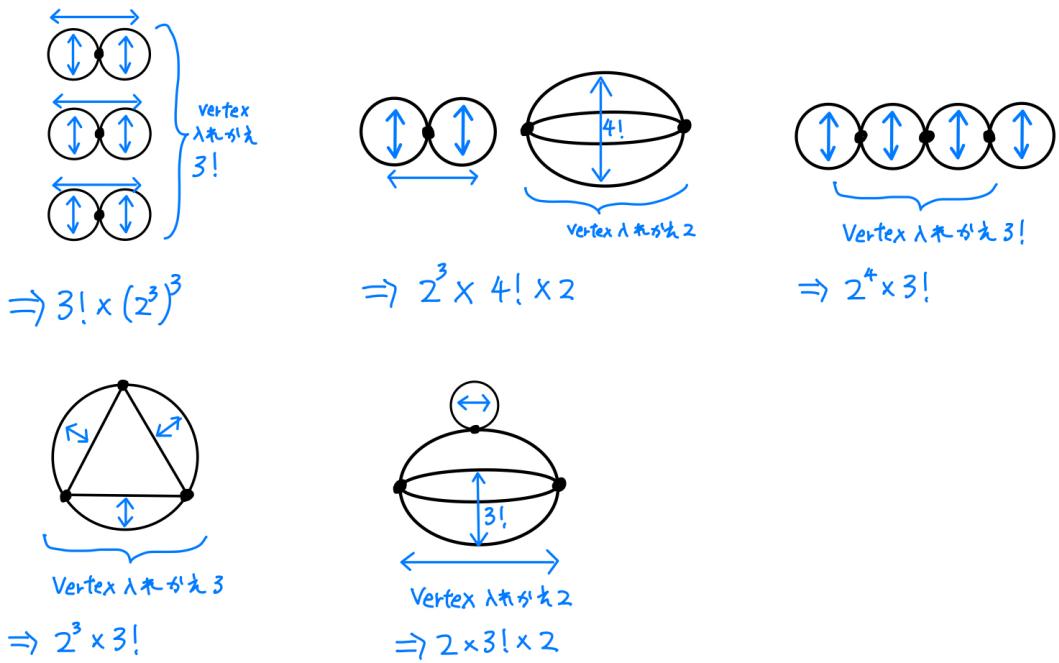


図 2.25 対称因子の勘定の仕方 (例)

$$\begin{aligned}
 Z(J=0, \lambda) = & 1 + \frac{1}{2^3} \text{---} \\
 & + \left(\frac{1}{2^4} \text{---} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \text{---} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2^3} \text{---} \right)^2 \right) \\
 & + \left(\frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2^3} \text{---} \right)^3 + \left(\frac{1}{2^3} \text{---} \right) \left(\frac{1}{2^4} \text{---} \right) + \left(\frac{1}{2^3} \text{---} \right) \left(\frac{1}{2 \cdot 4!} \text{---} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3! \times 2^4} \text{---} + \frac{1}{3! \times 2^3} \text{---} + \frac{1}{3! \times 2 \times 2} \text{---} + \frac{1}{3! \times 2^3} \text{---} \right) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

図 2.26 2.24 を式変形

$$Z(J=0, \lambda) = 1$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2^3} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{2^4} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \right. \\
& + \frac{1}{3! \times 2^4} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{3! \times 2^3} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{3! \times 2 \times 2} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \\
& + \dots \left. \right) \\
& + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2^3} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{2^4} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \dots \right) \\
& + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2^3} \textcircled{1} \textcircled{1} + \dots \right) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

図 2.27 図 2.26) を式変形

$$Z(J=0, \lambda) = \exp \left(\frac{1}{2^3} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{2^4} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \right. \\
+ \frac{1}{3! \times 2^4} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{3! \times 2^3} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} + \frac{1}{3! \times 2 \times 2} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \\
+ \dots \left. \right)$$

図 2.28 図??

3 摂動 VS 非摂動

この節まで、実スカラー場の理論について述べた。しかし、今までの議論は全て相互作用が小さいという仮定をして「摂動論」で扱ってきた。相互作用が大きい時(つまり、結合定数が大きい時)や、摂動の精度をあげたい時は摂動の高次を計算する必要があり、計算は厄介だろう。非摂動で、場の理論を考えることはできないのだろうか?また、これまで用いてきた摂動論は本当に正しいのだろうか?このセクションでは、これらの疑問に対して議論する^{*40}。

3.1 古典力学的解釈

まずは摂動論に対して考えよう。簡単のため、この節では0+1次元で考える。セクション2で扱った実スカラー場の理論について再び考察してみよう。

セクション2では自由場を基本とし、相互作用は摂動論で扱っていた。自由場のラグランジアンに ϕ^3 や ϕ^4 の相互作用を入れ、それにより2点グリーン関数などが自由場からの補正を受けることを見た。また、その時Feynman diagramの考え方方が非常に便利であった。この節では、摂動論での結果を古典力学的に解釈することを試みる。そうすることで、非摂動の効果を予想する事ができるかもしれない。

まずは自由場の場合を考える。今何の相互作用も入っていない。1点グリーン関数 $G^{(1)}(x)$ はwickの定理から0となることはすぐにわかる。2点グリーン関数 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ は(2.17)(2.19)から、プロパゲーターである。ここで補足にある(付録B)を用いてこれらの事実を式で表すと、

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle|_{\text{自由場}} = 0 \quad (3.1)$$

$$\langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)) | 0 \rangle|_{\text{自由場}} = iD(x_1 - x_2) \sim \frac{1}{m^2} \quad (3.2)$$

となる。ただし、最後の関係式は(2.11)を用いて大体の係数を推測した。(3.1)と(3.2)の結果を古典力学的に解釈しよう。今、自由場より、考えているラグランジアンは(2.2)の0+1次元バージョン、つまり、

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (3.3)$$

である。古典力学的にはラグランジアン L は $L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャル})$ である。今 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ が運動エネルギーなので、この系のポテンシャル $V(\phi)$ に相当する量は

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (3.4)$$

^{*40} このセクションでは「議論すること」に趣を置いてるので、正しい事実を述べたわけではない。あくまで今回の卒業研究で考察した事である。

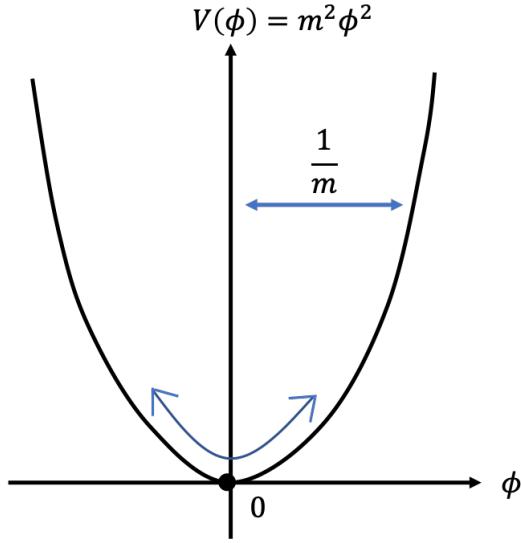


図 3.1 自由場のポテンシャル

である。このポテンシャルは ϕ の関数としてグラフにすると、図 3.1 となる。ポテンシャルのグラフを見ると、(3.1)(3.2) の結果を解釈する事ができる。

今古典力学を考え、点粒子の位置を ϕ とする。このポテンシャルの中に点粒子を置いたとする。この点粒子はポテンシャルの底 ($\phi = 0$) に落ちる方向に力を受ける。運動エネルギーが 0 の時、ポテンシャルの底で永久にとまり続けるだろう。そこに、外力 J で粒子を押してみよう。粒子は力を受け、動き始めるが、原点から離れるにつれ復元力が強くなるので原点に戻ってくる。今ポテンシャルは 2 次関数なのでこの運動は調和振動だ。ポテンシャルの形が偶関数であり、左右対称なので、原点周りで振動していても ϕ の期待値は $\langle \phi \rangle = 0$ だ。一方、二乗期待値 $\langle \phi^2 \rangle$ は 0 ではなく、 $\frac{1}{m^2}$ 程度だ。

自由場に対しても同じ事が言える。今自由場をソース関数で揺らしている。真空状態は $\phi = 0$ であるが、ソース関数でゆらされ、図 (3.1) と同様に原点周りで振動する。真空期待値 $\langle 0 | \phi | 0 \rangle$ はポテンシャルの形から 0 になると予想されるが、これは wick の定理で厳密に計算した式 (3.1) と合致している。(3.2) の結果も古典的解釈から納得できる。

次に ϕ^4 model で考えてみよう。自由場のラグランジアンに $-\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ の相互作用を入れるので、

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}(t)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi(t)^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\phi}(t)^2 - V(\phi)$$

$$\text{where } V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi(t)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (3.6)$$

である。

このポテンシャルの形を λ が大きい時と小さい時でグラフの概形は図 3.2 と図 3.3 のようになる。今回のポ

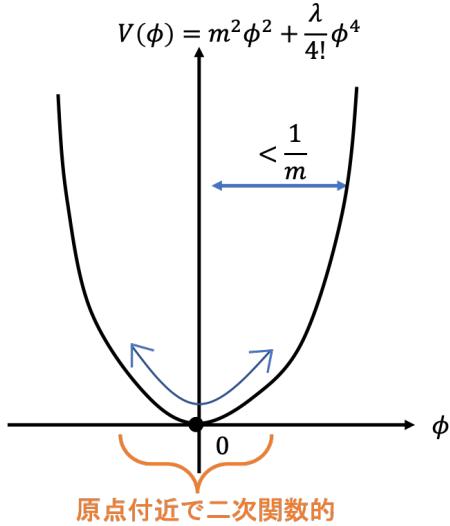


図 3.2 $\phi^4 model$ 、 λ が小さいとき

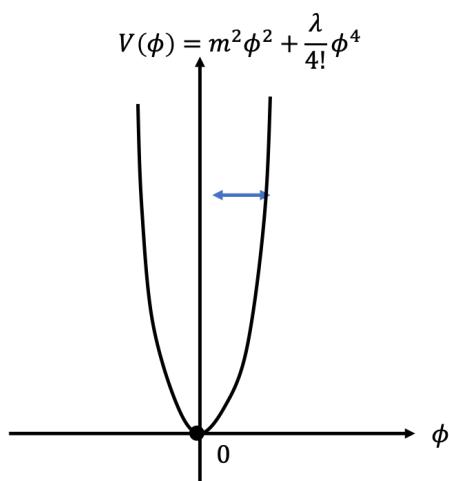


図 3.3 $\phi^4 model$ 、 λ が大きい時

テンシャルも偶関数の形をしており、なおかつポテンシャルに底がある。先ほど述べたように古典力学的に考えると、このポテンシャル中に点粒子を置いた場合、点粒子の位置の期待値は 0 である。実際に $\phi^4 model$ において真空期待値 $\langle 0 | \phi(t) | 0 \rangle$ (つまり、1 点グリーン関数)を求めてみると、

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\phi}(t) | 0 \rangle |_{\phi^4 model} &= \underbrace{\langle \phi(t) \rangle + \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right) \int d\omega \langle \phi(t) \phi(\omega)^4 \rangle}_{\text{奇数個の wick 縮約}=0} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。つまり、厳密に 0 だ。これも、古典力学的に考えた予想と一致している。しかし、 $\langle 0 | T \hat{\phi}(t_1) \hat{\phi}(t_2) | 0 \rangle$ (つまり 2 点グリーン関数)は自由場の時から次のように補正を受ける。

$$\langle 0 | T (\hat{\phi}(t_1) \hat{\phi}(t_2)) | 0 \rangle |_{\phi^4 model} = \langle \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle + \underbrace{\left(-i \frac{\lambda}{4!} \right) \int d\omega \langle \phi(t_1) \phi(t_2) \phi(\omega)^4 \rangle}_{\text{補正項}} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (3.8)$$

λ が小さい時、ポテンシャルは原点付近で二次関数と大きな違いがない。つまり、自由場的な振る舞いを見せる。しかし、 ϕ が 0 から遠ざかるとポテンシャルの 4 次の項が効くようになる。この影響が (3.8) の補正項である。一方、 λ が大き時はポテンシャルは図 3.3 のように鋭くなる。4 次関数的な振る舞いが大きくなり、幅も二次関数よりも狭くなる。これは粒子の伝搬距離が短くなり、自由場からより多くの補正が必要となることを意味していると解釈できる。

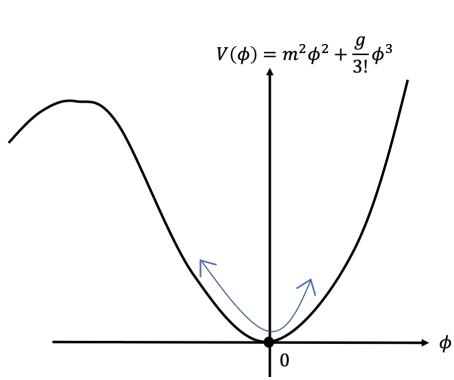


図 3.4 $\phi^3 model$ 、 g が小さいとき

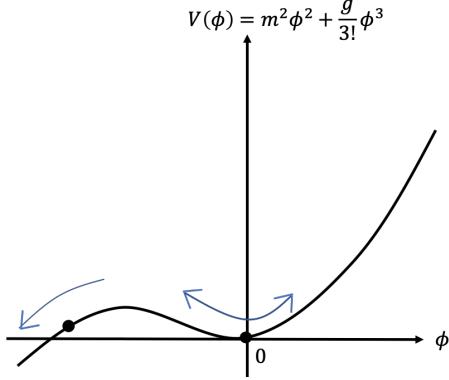


図 3.5 $\phi^3 model$ 、 g が大きい時

では、 $\phi^3 model$ はどうだろうか？ $\phi^3 model$ の時は

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}(t)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi(t)^2 - \frac{g}{3!} \phi^3 \quad (3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\phi}(t)^2 - V(\phi)$$

$$\text{where } V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi(t)^2 + \frac{g}{3!} \phi^3 \quad (3.10)$$

$\phi^3 model$ でも同様に $\langle 0 | \phi(t) | 0 \rangle$ を g が小さいとして計算すると以下のようになる。

$$\langle 0 | \hat{\phi}(t) | 0 \rangle|_{\phi^3 model} = \underbrace{\langle \phi(t) \rangle}_{=0} + \underbrace{\left(-i \frac{g}{3!} \right) \int d\omega \langle \phi(t) \phi^3(\omega) \rangle + \mathcal{O}(g^2)}_{\text{補正項}} \quad (3.11)$$

この結果は g の補正により ϕ の真空期待値が 0 からわずかにずれることを示している。 g が小さい時、ポテンシャルは図 3.4 のようになる。 g が小さい時原点付近だけ見れば二次関数に近い形、つまり自由場の時とよく似た形をしている。今 g が非常に小さい時を考えているので、粒子はポテンシャルの山を乗り越えない。とはいって、 $g\phi^3$ の項の影響で図 3.4 のようにわずかに左側の勾配が緩やかになる。これにより、原点付近でポテンシャルが左右対称でなくなったので、真空期待値は 0 にならない。この効果が (3.11) の補正項に現れている。このように、古典力学的な考え方では場の理論においても結構役立つことが分かった。だが、次の疑問が生じる。 g が大きい時、ポテンシャルは図 3.5 のようになる。計算したらわかることだが、グラフ左側にある上に凸の山の高さは g が大きくなるにつれ小さくなっている。こうすると、原点付近で揺らされている粒子はポテンシャルの山を超えて $-\infty$ に落ちていってしまうだろうか？ 摂動では $\phi^3 model$ は安定であると思える（図 3.4 を見よ）。しかし、非摂動効果を考えると、なんかやばい気がしないだろうか？

また、 g が非常に小さいとしても、図 3.6 のように摂動の基準点をずらした場合も古典力学的に考えると、やはり ϕ は $-\infty$ に落ち込んでいきそうではないか？ このように、スカラー場の理論を古典力学的な観点から考えると非摂動の効果を予想できそうだ。例えば図 3.7 のようなポテンシャルに底がない時はどの点からでも摂動は成り立ちそうにないなあ。次節ではこれらの疑問に答えるため具体的に摂動の収束条件を調べてみる。

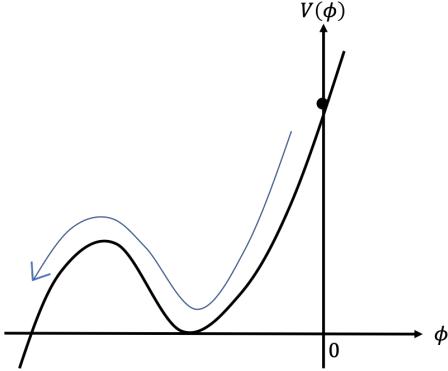


図 3.6

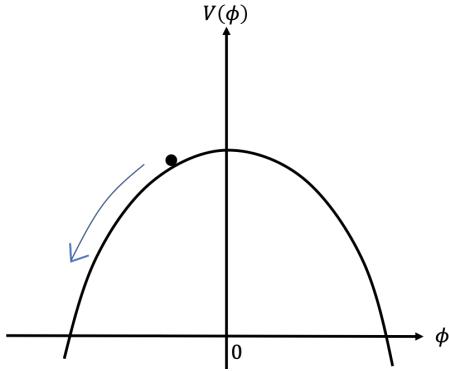


図 3.7

3.2 摂動は収束するか？

この節ではセクション 2 で扱った実スカラー場の $\phi^3 model$ と $\phi^4 model$ について摂動の収束条件を調べる。前の節ではスカラー場の摂動論を古典力学的に解釈し、非摂動の効果を予想した。古典力学的な解釈から、 $\phi^3 model$ が非摂動でおかしな振る舞いをするのではないかという予想ができた。では実際にこのことについて考えてみよう。まずは簡単のため真空の分配関数 $Z(J=0, g)$ について考えてみる。(2.31) より、

$$\begin{aligned} \frac{Z(J=0, g)}{Z(J=0, g=0)} &= \langle e^{-i \frac{g}{3!} \int d^4\omega \phi^3(\omega)} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-i \frac{g}{3!} \right)^n \int d^4\omega_1 \cdots d^4\omega_n \langle \phi^3(\omega_1) \cdots \phi^3(\omega_n) \rangle \end{aligned} \quad (3.12)$$

である。ここで、摂動 n 次の wick 縮約の仕方の数を $C(n)$ とおく。以下のように考えると、 $C(n) = (3n-1)!!$ である事がわかる。なお、この $C(n)$ には連結ダイアグラム、非連結ダイアグラム両方が含まれる。

まずは、一つ目の wick 縮約をとる。一番左端の $\phi(\omega_1)$ とペアになる相手は残り $3n-1$ 個から選ぶ。よって、一つ目の wick 縮約のやり方は $3n-1$ 通り。

$$\langle \phi(\omega_1) \underbrace{\phi(\omega_1) \cdots \cdots}_{3n-1 \text{ 個}} \rangle \quad (3.13)$$

次に二つ目の wick 縮約をとる。今度は二つ目の $\phi(\omega_1)$ と^{*41}ペアになる相手は残り $3n-3$ 個の中から選ぶ。よって、二つ目の wick 縮約のやり方は $3n-3$ 通り。

$$\langle \phi(\omega_1) \phi(\omega_1) \underbrace{\cdots \cdots}_{\text{残り } 3n-3 \text{ 個}} \rangle \quad (3.14)$$

これを繰り返すと、摂動 n 次の wick 縮約の取り方 $C(n)$ は

$$C(n) = (3n-1)!! \quad (3.15)$$

^{*41} もし、(3.13) で左から一つ目の $\phi(\omega_1)$ と左から二つ目の $\phi(\omega_1)$ でペアを作った場合、左から 3 つ目の $\phi(\omega_1)$ から他の項と wick 縮約をとる。

である^{*42}。

(3.15) を用いて (3.12) をざっくり計算すると、

$$\frac{Z(J=0, g)}{Z(J=0, g=0)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{ig}{3!} \right)^n C(n) \times (\text{積分計算}) \quad (3.16)$$

$$\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-1)!!}{n!} \left(-\frac{ig}{3!} \right)^n \quad (3.17)$$

となる^{*43}。ここで、 $a_n = \frac{(3n-1)!!}{n!} \left(-\frac{ig}{3!} \right)^n$ と置く。(3.17) の収束条件、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ であるので、これを用いて結合定数 g に対する条件を出すと、

$$|g| < 3! \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1) \times (3n-1)!!}{(3n+2)!!} \right) \quad (3.18)$$

となる^{*44}。(3.18) の右辺を調べるため、

$$F(n) = \frac{(n+1) \times (3n-1)!!}{(3n+2)!!} \quad (3.19)$$

と置いて、 $F(n)$ をグラフにしたものが図 3.8 である。このグラフを見ると、 $n \rightarrow \infty$ で $F(n) \rightarrow 0$ であることが読み取れる。(3.17) の収束条件が $g = 0$ 、つまり相互作用なしの場合になってしまった。摂動の高次を考えれば考えるほど、摂動は収束しなくなるのだ。 $\phi^3 model$ は非摂動で破綻している

なお、グリーン関数に出てくる量 $\langle \phi(x) e^{-i \frac{g}{3!} \int d^4 \omega \phi^3(\omega)} \rangle$ や $\langle \phi(x_1) \phi(x_2) e^{-i \frac{g}{3!} \int d^4 \omega \phi^3(\omega)} \rangle$ もこれと同様の議論をすれば、非摂動で収束しないことが示せる。

同様の議論を $\phi^4 model$ についても考えてみる。今回の場合、 $C(n) = (4n-1)$ である。 $\phi^3 model$ の時と同様に結合定数 λ に対する条件を求める

$$|\lambda| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4!(n+1)}{(4n+3)(4n+1)} \rightarrow 0 \quad (3.20)$$

となった。 $\phi^4 model$ も非摂動で破綻するようだ。

この節の結論は、

- スカラー場の $\phi^3 model$ 、 $\phi^4 model$ は摂動の収束が悪い。
- 非摂動では破綻する

という事である。

これは結構大きな問題で、実スカラー場の理論は非摂動で破綻しており、摂動という手法でしか扱えないのだ。しかもその摂動論も摂動の高次は Feynman diagram の数が膨大になりすぎるし^{*45} 現実的には低次の摂

^{*42} $n!!$ は n の二重階乗で、 $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ である。例えば $5!! = 5 \times 3 \times 1$ 、 $4!! = 4 \times 2$ である。

^{*43} Feynman diagram の積分計算は、かなり適当に処理している。0+0 次元の場の理論を考えて Feynman diagram の値を全て 1 にしている、と捉えて良い。

^{*44} (3.16) から (3.17) の変形で次元を持った量まで省いている。(3.18) でも、次元を持った量は省略している。

^{*45} 摂動 n 次の Feynman diagram の数は大体 $n!$ ぐらいある。

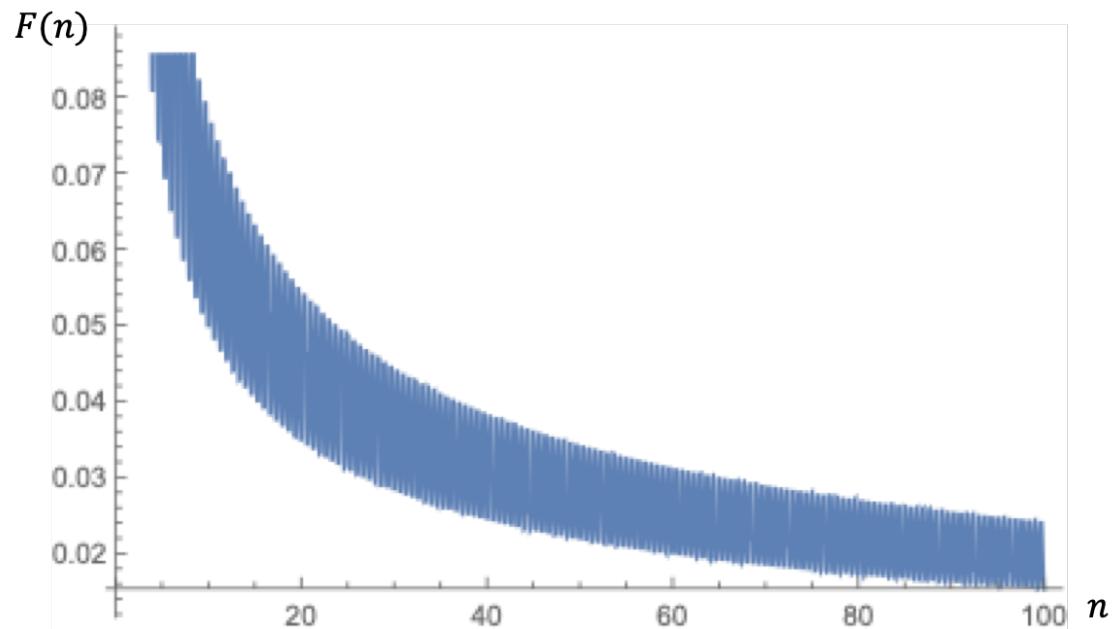


図 3.8

動でしか扱えない^{*46}。

^{*46} 僕の場合、摂動 4 次ぐらいでギブアップしたくなります。手計算だと。

4 Large N approach

このセクションではこの卒業研究のメインテーマである Large N 理論の考え方を述べる。Large N 理論とは場の数が非常に多い理論のことである。例えば $O(N)$ の対称性を持つ理論の $N \rightarrow \infty$ の極限も Large N 理論である。スカラー場の理論では摂動が収束しないなどの問題点があった。しかし、Large N 理論はこれらの問題を解決する可能性を秘めている。あえて場の数を増やすことにより摂動の収束が良くなるのだ。それ以外にも、トポロジーとの関係など、面白い性質が現れる。

便宜上、場の添字のことをカラーと呼ぶことにしよう。場がカラーを持つことで、Feynman diagram はカラーの流れが現れる。このセクションでは Large N 理論の例をいくつか紹介し、それぞれのモデルの性質を述べる。

なお、このセクションでは、 $d = 0 + 0$ 次元の理論を考える。この理由は今、Feynman diagram の積分計算よりも、場の数 N が大きいことによる効果を調べたいからである^{*47}。

4.1 Large N vector model($O(N)$)

このセクションでは $O(N)$ 対称性^{*48}を持つ理論を考えよう。 $\phi^i (i = 1, 2, \dots, N)$ を $O(N)$ の変換をする場とする^{*49}。すなわち、

$$\phi^i \mapsto \phi'^i = O^{ij} \phi^j \quad (4.1)$$

where O : orthogonal matrix

である。 O は直行行列なので、 O の転置行列を ${}^t O$ と置くと、以下の式が成立。

$$O {}^t O = {}^t O O = 1 \quad (4.2)$$

ここで $\vec{\phi}$ を

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^N \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

と置く。 $O(N)$ 対称性を持つラグランジアンとして以下のものを考える。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\vec{\phi})^2 - \frac{g}{4!} ((\vec{\phi})^2)^2 \quad (4.4)$$

ここで g は 4 点相互作用の結合定数である。今、場 ϕ^i は添字が一つであるという意味でベクトルの形をしているので、このような model を vector model と呼んでいるわけである。(4.4) はAINシュタインの規約を用いて成分で表すと、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi^i \phi^i - \frac{g}{4!} \phi^i \phi^i \phi^j \phi^j \quad (4.5)$$

^{*47} とはいえるこのセクションで述べる摂動論的な性質は一般的な次元でも同じ事が言える。

^{*48} この卒論では群論の知識を全く必要としない。

^{*49} 今 $0+0$ 次元なので正確に言うと ϕ^i は「場」ではなく「変数」だ。とはいえる、「場の理論」と言うくらいなのだから、場と呼んだ方がみんなには親近感があるのかもしれない。まあここでは「場」と呼ばせてください。

i ————— j

$$\langle \phi^i \phi^j \rangle = \delta^{ij}$$

図 4.1 Vector model の propagator

である^{*50}。このモデルの生成汎関数を $Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)$ とすると、

$$Z^{Vector}(\vec{J}, g) = \left(\prod_{i=1}^N \int \frac{d\phi^i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \phi^j \phi^j - \frac{g}{4!} \phi^j \phi^j \phi^k \phi^k + J^j \phi^j \right) \quad (4.6)$$

である。今 $Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g = 0) = 1$ となるように規格化していくことに注意しよう。この時プロパゲーター $\langle \phi^i \phi^j \rangle$ を計算すると、

$$\langle \phi^i \phi^j \rangle = \left(\prod_{i=k}^N \int \frac{d\phi^k}{\sqrt{2\pi}} \right) \phi^i \phi^j \exp \left(-\frac{1}{2} \phi^l \phi^l \right) = \delta^{ij} \quad (4.7)$$

となる。この式は相互作用のない自由な伝搬で、カラーに変化がないことを表している。つまり、図 4.1 のように $i \rightarrow j$ の伝搬を考えた時、 $i = j$ となる。

次に、4点相互作用においてカラーがどのように変化するかを調べてみよう。とりあえず4点グリーン関数の摂動1次を求めているのが手っ取り早い。4点相互作用は例えば以下のようなwick縮約をしてみる。

$$\langle \phi^i \phi^j \phi^k \phi^l \phi^{a'} \phi^{a''} \phi^{b'} \phi^{b''} \rangle = \delta^{ij} \delta^{kl} \quad (4.8)$$

等式はwickの定理と(4.7)を用いて従う。(4.8)は $i = j$ 、 $k = l$ でなければ0であることを示しているので図4.2のようなカラーの流れがある事がわかる^{*51}。また、次のようなwick縮約をとってみよう。

$$\langle \phi^i \phi^j \phi^k \phi^l \phi^{a'} \phi^{a''} \phi^{b'} \phi^{b''} \rangle = \delta^{il} \delta^{jk} \quad (4.9)$$

これは $i = l$ 、 $j = k$ でなければ0であることを示しているので図4.3のようなカラーの流れがある。このように、wick縮約の取り方次第で色々なカラーの流れがあるが、カラーそのものは相互作用をしても保存している事がわかる。

^{*50} 今0+0次元の場の理論を考えているので(4.6)のexponentialの肩には積分が含まれない。

^{*51} 今矢印の向きに意味はない。カラーの流れてる感を出したくて矢印を書いただけである。

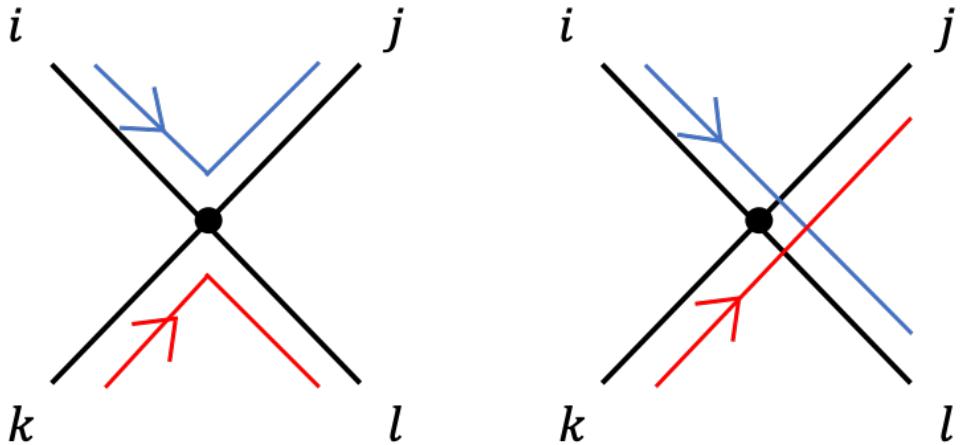


図 4.2 Vector model におけるカラーの流れ(例 1) 図 4.3 Vector model におけるカラーの流れ(例 2)

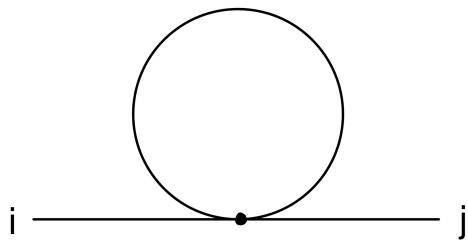


図 4.4 snail diagram

また、2点グリーン関数を摂動1次までwickの定理で計算すると以下のようないくつも結果になった。

$$G^{(2)ij} = \langle \phi^i \phi^j \rangle + \left(-\frac{g}{4!} \right) \langle \phi^i \phi^j \phi^{a'} \phi^{a'} \phi^{b'} \phi^{b'} \rangle + \mathcal{O}(g^2) \quad (4.10)$$

$$= \delta^{ij} - \underbrace{\frac{gN}{6} \delta^{ij}}_{\text{図 (4.5)}} - \underbrace{\frac{g}{3} \delta^{ij}}_{\text{図 (4.6)}} + \mathcal{O}(g^2) \quad (4.11)$$

(4.11) の補正項はスカラー場では図 4.4 のような Feynman diagram であるが、今回カラーの流れが2通りあるため、項が二つに分かれた。(4.11) の第2項は図 4.5 に対応し、第3項は図 4.6 のようなカラーの流れ対応している。この対応は実際に wick 縮約の計算過程からわかる。図 4.5 の場合、ループを流れるカラー k は $1, 2, \dots, N$ の値を取るので、図 4.5 の確率振幅は gN のオーダーである。一方、図 4.6 のようなカラーの流れは g のオーダーである。今 N は非常に大きな値を考えているので、図 4.6 のダイアグラムは図 4.5 のダイアグラムと比べて無視できる。図 4.4 のような Feynman diagram は確率振幅にして gN のオーダーを持つ事がわかった。図 4.4 のような Feynman diagram のことを snail diagram と呼ぶことにする。図 4.7 のように、図 4.4 の構造を組み合わせた diagram を snail diagram である。

ここで、単純に $N \rightarrow \infty$ の極限をとると摂動の補正項が発散するので、摂動が破綻してしまう。この問題

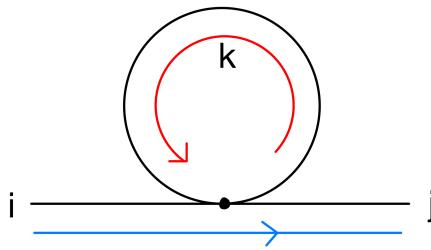


図 4.5 snail diagram のカラーの流れ

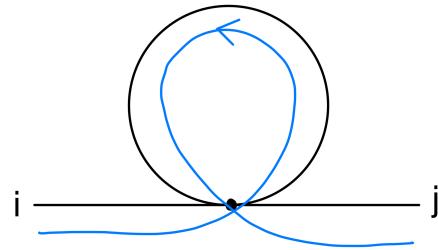


図 4.6 snail diagram のカラーの流れ

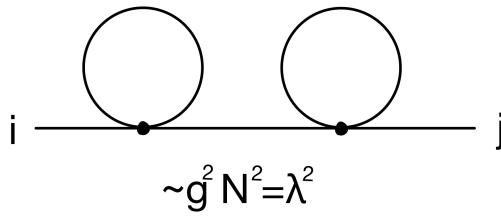


図 4.7 snail diagram の例

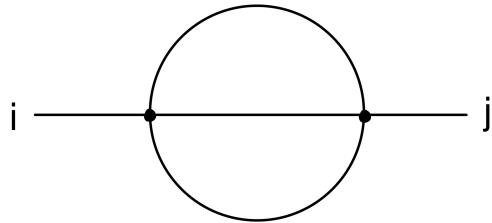


図 4.8 melon diagram

を防ぐため、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとり方を以下のように定める。

— Vector model 't Hooft limit —

$$\lambda := gN \text{ を一定にして } N \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

この極限をとることにより、図 4.6 のようなダイアグラムは $1/N$ で減衰し、効かなくなる。

また、図 4.8 のようなダイアグラムも、snail diagram に比べて無視できる。なぜならダイアグラムの計算結果が $1/N$ かそれ以下のオーダーになり $N \rightarrow \infty$ で消えるからである。図 4.8 のようなダイアグラムを melon diagram と名付けよう。melon diagram のカラーの流れを模式的に表すと、図 4.9 のようなものがある。

このことは真空のダイアグラムに対しても同じことが言える。真空の場合は効いてくるのは図 4.10 のようなダイアグラムである。このようなダイアグラムを bubble diagram と呼ぶことにする。

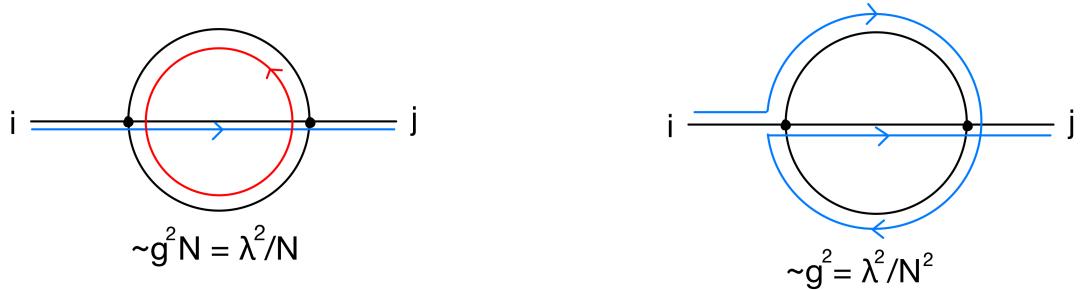


図 4.9 melon diagram の確率振幅

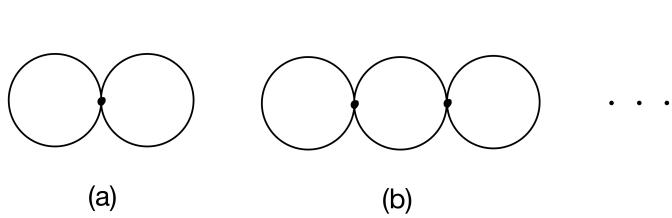


図 4.10 bubble diagram

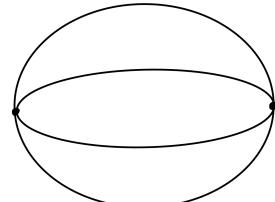


図 4.11 melon diagram

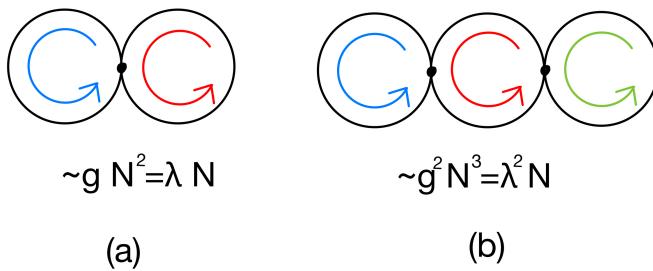


図 4.12 bubble diagram

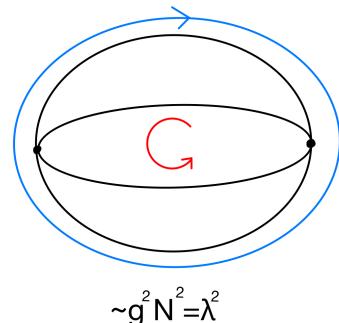


図 4.13 melon diagram

実際に摂動論を用いて $Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)$ を求めると以下のような結果になった。ここで、セクション (2.7) で得られた結果を用いた^{*52}。

$$\frac{\log Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)}{N} = \underbrace{-\frac{N+2}{24}g}_{\text{図 4.10(a)}} + \underbrace{\frac{N+2}{144}g^2}_{\text{図 4.11}} + \underbrace{\frac{(N+2)^2}{144}g^2}_{\text{図 4.10(b)}} + \mathcal{O}(g^3) \quad (4.13)$$

$$= \underbrace{f_0(\lambda)}_{\substack{\text{bubble diagram}}} + \underbrace{\frac{f_1(\lambda)}{N}}_{\substack{\text{N} \rightarrow \infty \text{ で消える}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (4.14)$$

ここで、(4.13) の第 1 項は図 4.10(a) のダイアグラムの計算結果から来ており、第 2 項は図 4.11 のダイアグ

^{*52} この計算は wick 縮約で直に計算した方が良い。対称因子でやるとミスりそう。

ラム、第3項は図4.10(b)のダイアグラムの計算結果から来ている。(4.14)は(4.13)を λ を用いて書き直し、 N のオーダーで分類してまとめた。具体的には、

$$f_0(\lambda) = -\frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda^2}{144} + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (4.15)$$

である。(4.14)で $N \rightarrow \infty$ の極限をとると、残るのは $f_0(\lambda)$ のみである。 $f_0(\lambda)$ にはsnail diagramの中でも、図(4.12)のようにカラーが流れているダイアグラムのみである。図(4.13)のようなmelon diagramは N 因子が足りず決して $f_0(\lambda)$ に入ることができない。

この節の内容をまとめると、

— Vector model 結論 —

(4.12)のLarge N極限ではsnail diagram(真空の場合はbubble diagram)のみが残り、それ以外は削ぎ落とされる。

セクション2で扱ったような実スカラー場の ϕ^4 model, ϕ^3 modelの場合では摂動高次で膨大な数のFeynman diagramが出てきて收拾がつかなかった。しかし、Vector modelの様にLarge N極限をとることにより、真空の場合図4.10の様に単純なお団子状のダイアグラム(bubble diagram)しか残らなくなつた。これにより、摂動の収束性が改善し、このモデルは非摂動で解く事ができる。具体的には分配関数が完全に求められると言う事である^{*53}。

4.1.1 Large N vector model を非摂動で解いてみよう

この節ではLarge N vector modelを実際に非摂動で解いてみよう。簡単のため、まずは真空の分配関数 $Z(\vec{J}=0, g)$ を求める。(4.6)より、

$$Z^{Vector}(\vec{J}=0, g) = \left(\prod_{i=1}^N \int \frac{d\phi^i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \phi^j \phi^j - \frac{g}{4!} \phi^j \phi^j \phi^k \phi^k \right) \quad (4.16)$$

である。これを補助変数 σ を用いて以下のように書き直す。

$$Z^{Vector}(\vec{J}=0, g) = \left(\prod_{i=1}^N \int \frac{d\phi^i}{\sqrt{2\pi}} \right) \sqrt{\frac{6}{\pi g}} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp \left(-\frac{6N}{\lambda} \sigma^2 - \frac{\phi^k \phi^k (1+2i\sigma)}{2} \right) \quad (4.17)$$

となる。(4.17)が(4.16)に等しいことは(4.17)を σ について積分すればすぐわかる。(4.17)をみると、exponentialの方には ϕ の2次までしかないことに注意しよう。これで ϕ に関する積分が可能となる。(4.17)の ϕ 積分と σ 積分の順序を交換して、先に $\prod_{i=1}^N \int d\phi^i$ を実行すると、

$$Z^{Vector}(\vec{J}=0, g) = \sqrt{\frac{6}{\pi g}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-N \left(\frac{6}{\lambda} \sigma^2 + \frac{1}{2} \log(1+2i\sigma) \right) \right) \quad (4.18)$$

^{*53} 実スカラー場の ϕ^4 modelに足を一つ生やすだけで、こんな性質が見えるのはズゴイと思う、

となる。ここで、(4.18) の形を見ると、鞍点法の公式（付録 C.1）が適用できることがわかる。すなわち、 $S(\sigma)$ を

$$S(\sigma) = \frac{6}{\lambda} \sigma^2 + \frac{1}{2} \log(1 + 2i\sigma) \quad (4.19)$$

と置くと、(4.18) の積分に最も効いてくるのは $S(\sigma)$ が最小となる σ である。 $\frac{dS}{d\sigma} = 0$ を解くと、得られる解 σ_0 は

$$\sigma_0 = \frac{i}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda} \right) \quad (4.20)$$

である。ただし、 $\frac{dS}{d\sigma} = 0$ は 2 次方程式なので解は二つある。今回は解として、- 符号の方

$$\sigma_0 = \frac{i}{4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda} \right) \quad (4.21)$$

の方を採用する^{*54}。（4.21）の値を用いて、(4.18) を公式（付録 C.1）で評価すると以下の式が得られる。

$$\frac{\log Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)}{N} = \frac{3}{8\lambda} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda} \right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad (4.22)$$

なんと $Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)$ が「非摂動」で求められた。分配関数が非摂動で求められたということは摂動のいくら高次までも全てを網羅したことである。セクション 4.1 で議論した $f_0(\lambda)$ は非摂動で、

$$f_0(\lambda) = \frac{3}{8\lambda} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda} \right) \right) \quad (4.23)$$

と求められた。この式を λ のべきでテイラー展開すると、

$$f_0(\lambda) = -\frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda^2}{144} - \frac{5\lambda^3}{2592} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (4.24)$$

となる。（4.24）と（4.15）は整合している。つまり、（4.23）は全ての連結 snail diagram の情報を持っていることになる。

今簡単のため真空の分配関数 $Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)$ を求めたが、一応原理的にはソースを含んだ分配関数 $Z^{Vector}(\vec{J}, g)$ も求めることができる。やり方は真空の時とほとんど同じである。

$$Z^{Vector}(\vec{J}, g) = \left(\prod_{i=1}^N \int \frac{d\phi^i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \phi^j \phi^j - \frac{g}{4!} \phi^j \phi^j \phi^k \phi^k + J^j \phi^j \right) \quad (4.25)$$

これに（4.17）と同様に補助変数 σ を導入すると

$$Z^{Vector}(\vec{J}, g) = \left(\prod_{i=1}^N \int \frac{d\phi^i}{\sqrt{2\pi}} \right) \sqrt{\frac{6}{\pi g}} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp \left(-\frac{6N}{\lambda} \sigma^2 - \frac{\phi^k \phi^k (1 + 2i\sigma)}{2} - \frac{J^2}{2(1 + 2i\sigma)} \right) \quad (4.26)$$

^{*54} ここで、+ 符号の方を選択すると、摂動の結果を再現できない。よって、プラス符号の解は物理的でないと判断した。

となる。ただし、 $J^i = J(i = 1, 2, \dots, N)$ とおいた。今回も鞍点法を用いたいので、

$$\tilde{S}(\sigma, J) = \frac{6}{\lambda}\sigma^2 + \frac{1}{2}\log(1 + 2i\sigma) - \frac{J^2}{2(1 + 2i\sigma)} \quad (4.27)$$

とおいて、 $\tilde{S}(\sigma, J)$ の σ に対する鞍点を求めれば良い。すなわち、

$$\frac{d\tilde{S}(\sigma, J)}{d\sigma} = \frac{12}{\lambda}\sigma + \frac{i}{1 + 2i\sigma} + \frac{iJ^2}{(1 + 2i\sigma)^2} = 0 \quad (4.28)$$

(4.28) は σ に対する 3 次方程式なので解が存在する。(4.28) の解を $\sigma(J)$ と置くと、鞍点法を用いて、

$$\log Z^{Vector}(\vec{J}, g) = -N\tilde{S}(\sigma(J)) \quad (4.29)$$

とかける。問題はこれで終了していく、原理的にはこれで解けているはずだ。

とはいえ、非摂動のグリーン関数などは興味があるので少し調べてみる。(4.28) の解 $\sigma(J)$ を真空の時の解 $\sigma(J=0) = \sigma_0$ を用いて

$$\sigma(J) = \sigma_0 + x(J) \quad (4.30)$$

と置く。 σ_0 は (4.21) であり、 $S'(\sigma_0)$ を満たす。

今 J が微小であるとする。 J が微小ならば、 $x(J)$ も微小である。(4.30) を (4.28) に代入し、 $x(J)$ の 1 次までで近似すると、 $x(J) \propto J^2$ がわかる。このことを用いて (4.29) を評価していこう。

(4.27)、(4.19) より、

$$\tilde{S}(\sigma(J), J) = S(\sigma(J)) - \frac{J^2}{2(1 + 2i\sigma)} \quad (4.31)$$

である。(4.29) より、

$$\begin{aligned} \log Z^{Vector}(\vec{J}, g) &= -N\tilde{S}(\sigma_0 + x(J)) \\ &= -N \left(\tilde{S}(\sigma_0) + \underbrace{\tilde{S}'(\sigma_0)}_{=\mathcal{O}(J^2)} \underbrace{x(J)}_{=\mathcal{O}(J^2)} + \mathcal{O}(J^6) \right) \\ &= -N \underbrace{\tilde{S}(\sigma_0)}_{(4.31) \text{ を代入する}} + \mathcal{O}(J^4) \\ &= \underbrace{-NS(\sigma_0)}_{=\log Z^{Vector}(\vec{J}=0, g)} - \frac{NJ^2}{2(1 + 2i\sigma_0)} + \mathcal{O}(J^4) \\ &= \log Z^{Vector}(\vec{J}=0, g) - \frac{\vec{J}^2}{2(1 + 2i\sigma_0)} + \mathcal{O}(J^4) \end{aligned} \quad (4.32)$$

最後の式変形には $\vec{J}^2 = J^i J^i = N J^2$ を用いた。(4.32) に (4.21) を代入すると以下の式が得られる。

$$\log \left(\frac{Z^{Vector}(\vec{J}, g)}{Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)} \right) = \frac{\vec{J}^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda}} + \mathcal{O}(J^4) \quad (4.33)$$

これが非摂動での解であるので、端点が二つのすべての連結ダイアグラムの情報をもつ。(4.33) から 2 点グリーン関数を求める。

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial J^i \partial J^j} \left(\frac{Z^{Vector}(\vec{J}, g)}{Z^{Vector}(\vec{J} = 0, g)} \right) |_{\vec{J}=0} \\ &= \frac{2\delta^{ij}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}\lambda}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

2 点グリーン関数が非摂動で得られた。この解は λ が小さいとしてテイラー展開すると、摂動で求めた (4.11) の結果を再現することがわかる。ただし、今 $N \rightarrow \infty$ の極限の元解いているので、melon diagram などは消えていることに注意しよう。

同様の議論を J の精度を上げて行えば、4 点グリーン関数、6 点グリーン関数も原理的には非摂動で求められるだろう。

4.2 Large N matrix model($U(N)$)

この節では場が行列の場合、つまり、二つの添字を持つ場合を考える。ここでは $U(N)$ の理論を考えて、場 Φ_j^i は以下の様な変換をするとする⁵⁵。

$$\Phi_j'^i = (U^\dagger)_k^i \Phi_l^k U_j^l \quad (4.35)$$

行列で表すと、

$$\Phi' = U^\dagger \phi U \quad (4.36)$$

である。ここで U は $N \times N$ のユニタリー行列、つまり、

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (4.37)$$

を満たす。この $U(N)$ 対称性を持つラグランジアンとして以下の様なものを考える。今回も簡単のため 0+0 次元を考えよう。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} (\Phi^2) - \frac{g}{3!} \text{tr} (\Phi^3) \quad (4.38)$$

⁵⁵ $O(N) \times O(N)$ のモデルつまり、場は ϕ^{ij} のモデルも考えられる。こちらのモデルも勉強したのだが、正直今回紹介する $U(N)$ のモデルと考え方がほとんど変わらない。 $U(N)$ の Matrixmodel には Large N QCD に繋がるのでこちらの方のみを紹介することにした。

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \rangle = \delta_l^i \delta_j^k$$

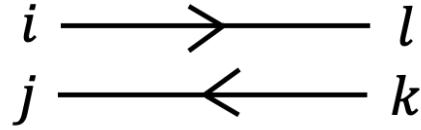


図 4.14 プロパゲーターの二重線表記

今、相互作用項は

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{3!} \text{tr} (\Phi^3) \quad (4.39)$$

である。なお、 $U(N)$ 対称性を持った相互作用項は他にも考えられる。それについては後ほど考察するとしよう。

真空の生成汎関数は以下の通り。

$$Z^{Matrix}(J=0, g) = \left(\prod_{i,j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dRe\Phi_j^i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dIm\Phi_j^i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \text{tr} \Phi^2 - \frac{g}{3!} \text{tr} (\Phi^3) \right) \quad (4.40)$$

4.2.1 Feynman diagram の二重線記法

(4.38) のラグランジアンから、プロパゲーターを計算すると以下の様になる。

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \rangle = \delta_l^i \delta_j^k \quad (4.41)$$

この式は (4.38) の自由場のラグランジアンに対応する部分が $-\frac{1}{2} \text{tr}(\Phi^2) = -\frac{1}{2} \Phi_j^i \Phi_i^j$ から従う。

ここで、(4.41) のプロパゲーターをよく見て欲しい。vector model の時は場は一つのカラーをもち、プロパゲーターを計算すると、自由伝搬でそのカラーは変わらなかった ((4.1) 参照)。しかし、今回は場 Φ はカラーを二つ持っている。よって、今回はプロパゲーターを二重線で表すこととしよう ('t Hooft notation)。ただし、(4.41) を見ると、カラーの流れは、上付添字と下付添字、の間で起こっている。以上のこと踏まえて、プロパゲーター (4.41) を図 4.14 の様に表す。図 4.14 の二重線表記は、矢印の根本側が上付添字、矢印の先端側が下付添字となるようにカラーの流れを表している。

この二重線表記を用いると、(4.39) の 3 点相互作用のカラーの流れを図で表す事ができる。(4.39) を成分表示すると、

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{3!} \Phi_j^i \Phi_k^j \Phi_i^k \quad (4.42)$$

となる。(4.42) を見ると、 $\Phi_j^i \Phi_k^j$ はカラー j を共有している。 $\Phi_k^j \Phi_i^k$ はカラー k を共有している。 $\Phi_i^k \Phi_j^i$ はカラー i を共有している。このことにより、図 4.15 のように相互作用のカラーの流れを表す事ができる。上付

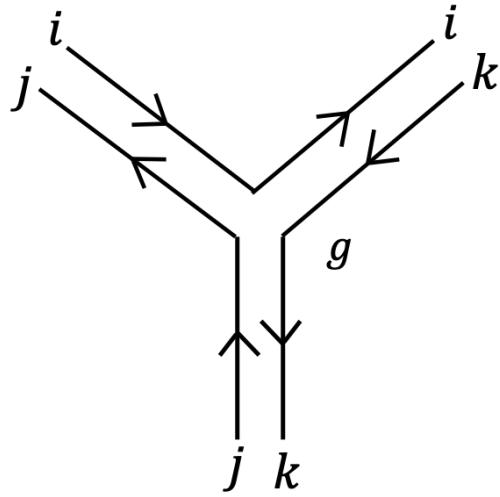


図 4.15 (4.39) の 3 点相互作用

添字と下付添字をペアにして縮約しているので、矢印の方向は保存する。

とはいって、図 4.14 や、図 4.15 の二重線表記はなかなか実感が湧かず、受け入れられない人もいると思う。そんな時は、たくさんの Feynman diagram の計算をして、Feynman diagram と式を照らし合わせる。そうすればいつの間にか、この二重線表記が便利であることに気が付く。二重線で描くことが当たり前だと思える様になる。そうなれば、きっと受け入れられた、と言う事なのだろう⁵⁶。

図 4.14 や図 4.15 の二重線記法は Large N 理論と相性が良い。なぜなら、この様にカラーの流れを明示することで、Feynman diagram のカラーのループによる N 因子を目で見つける事ができるからだ。そのことをこれから具体例を用いて見てみよう。

このモデルで 2 点グリーン関数の摂動 2 次の項は、数係数を無視して、

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \Phi_{b'_1}^{a'_1} \Phi_{c'_1}^{b'_1} \Phi_{a'_1}^{c'_1} \Phi_{b'_2}^{a'_2} \Phi_{c'_2}^{b'_2} \Phi_{a'_2}^{c'_2} \rangle \quad (4.43)$$

である。これは wick の定理で計算すれば良いのだが、例えば以下のように wick 縮約をとった場合を考える。プライム'付きの添字は相互作用におけるカラーを表し、添字の添字 1,2 は相互作用の場所を表している。

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \Phi_{b'_1}^{a'_1} \Phi_{c'_1}^{b'_1} \Phi_{a'_1}^{c'_1} \Phi_{b'_2}^{a'_2} \Phi_{c'_2}^{b'_2} \Phi_{a'_2}^{c'_2} \rangle = \langle \Phi_j^i \Phi_{b'_1}^{a'_1} \rangle \langle \Phi_l^k \Phi_{b'_2}^{a'_2} \rangle \langle \Phi_{c'_1}^{b'_1} \Phi_{a'_2}^{c'_2} \rangle \langle \Phi_{a'_1}^{c'_1} \Phi_{c'_2}^{b'_2} \rangle \quad (4.44)$$

$$= \left(\delta_{b'_1}^i \delta_j^{a'_1} \right) \left(\delta_{b'_2}^k \delta_l^{a'_2} \right) \left(\delta_{a'_2}^{b'_1} \delta_{c'_1}^{c'_2} \right) \left(\delta_{c'_2}^{c'_1} \delta_{a'_1}^{b'_2} \right) \quad (4.45)$$

$$= \delta_{a'_2}^i \delta_j^{b'_2} \delta_{b'_2}^k \delta_l^{a'_2} \delta_{c'_2}^{c'_1} \quad (4.46)$$

$$= \delta_l^i \delta_j^k N \quad (4.47)$$

⁵⁶ 実スカラー場の Feynman diagram に慣れてきたばかりの当時の僕は、この二重線がどう便利なのか分からなかった。でも、卒論を書いている今なら、当たり前に思える様になっている。

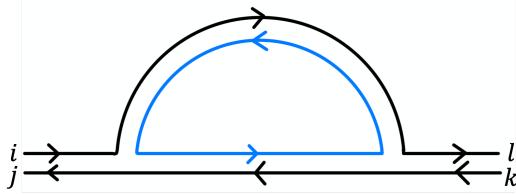


図 4.16 カラーのループ(例)

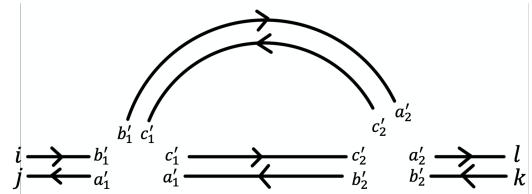


図 4.17 4.44) の時点での図示

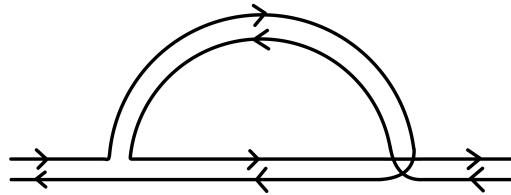


図 4.18 $g^2 N^0$

計算すると最後に N の因子が出てきた。これは先程の二重戻記法を用いると一目瞭然である。今回のカラーの流れを図示すると、図 4.17 の様になる。このことは (4.44) の段階で一度図 4.17 の様にカラーの流れを図示するとわかりやすい。具体的な計算過程から、 c'_2 のカラーの流れ (c'_1 のカラーの流れと言って良い) から N 因子がでているが、これは図 4.16 でいう青色のカラーの流れに対応している。この青色のループ中のカラーは 1 から N の値を取れる。よってこの重複度として N 因子が出てくるのだ⁵⁷。

この様に、Feynman diagram を二重線で表すと、カラーのループを見つけやすくなり、 N 因子の勘定ができる。ここで得られた結果をまとめると、

- Feynman diagram を二重線で表すと、カラーの流れが追える。
- カラーのループ一つにつき、 N 因子がかかる。

なお、wick 縮約の取り方によっては図の様なカラーの流れも出てくる。ただし、この様なカラーの流れの場合、カラーのループによる N 因子がかからないので Large N 極限で無視できる。

4.2.2 Large N limit と planar diagram

matrix model においては、以下の様に Large N 極限をとる⁵⁸。

⁵⁷ こう言うのはいくつかの例をこなさないとなかなか慣れないものだと思う。

⁵⁸ 今回も摂動が破綻しない様に入を固定して極限をとっている。

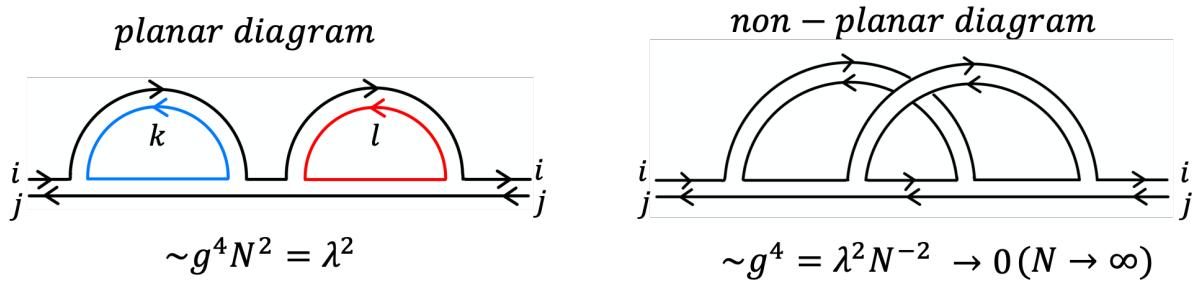


図 4.19

matrix model 't Hooft limit

$$\lambda := g^2 N \text{ を一定にして } N \rightarrow \infty \quad (4.48)$$

(4.48) の極限のもとで図 4.19 の二つのダイアグラムを比較してみよう。

図 4.19 の二つのダイアグラムはどちらも 2 点グリーン関数の摂動 4 次のダイアグラムである。図 4.19 の左のダイアグラムはカラーのループが二つあり、 N^2 因子が出ている。このダイアグラムのカラーの流れは平面状で交差することなく書き表せることから、planar diagram と呼ばれている。一方、図 4.19 左の様なカラーの流れも存在する^{*59}。この様なカラーの流れの場合、カラーのループがないため、 N の因子がかからない。このダイアグラムは立体的なカラーの流れをしていて、planar diagram ではない。(4.48) の極限の元、図 4.19 左のダイアグラムの確率振幅は一定の値であるが、図 4.19 右のダイアグラムの確率振幅は 0 になって無視できる。

この節で得られた結果をまとめると、

Large N 極限では、”planar diagram”のみが残る

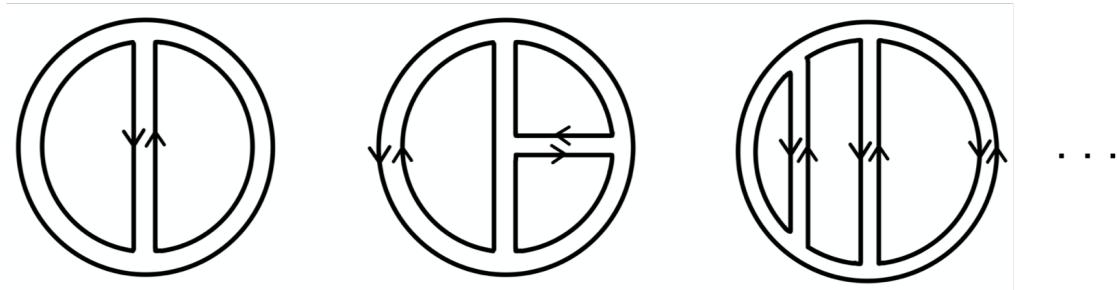
4.2.3 Feynman diagram とトポロジー

今回は真空ダイアグラムについて考え、先程の planar diagram と non-planar diagram についてもう少し考えてみよう。真空ダイアグラムの場合、planar diagram は図 4.20 の様なダイアグラムである。真空の planar diagram の確率振幅を λ で表すと、必ず N^2 に比例する事がわかる。一方、図 4.21 の様なダイアグラムの確率振幅を λ で表すと、 N^0 に比例する。実は、二重線で表した Feynman diagram はトポロジーと関係している。2 重線で表した Feynman diagram を貼り付けることのできる物体のオイラー数を χ とすると、確率振幅は $\lambda^\# N^\chi$ になる^{*60}。例えば、図 4.21 で表される様な planar diagram は球面の様なオイラー数 $\chi = 2$ の物体^{*61}の表面にカラーの流れを交差する事なく貼り付ける事ができる(図 4.23 参照)。この様な Feynman diagram は確率振幅が N^2 に比例する。図 4.21 の様なダイアグラムは $\chi = 2$ の球面の様な物体に貼り付ける

^{*59} wick の定理で 2 点グリーン関数を計算すればこれを確かめる事ができる。

^{*60} ちなみに、僕はこのことは数学的に証明したわけではなく、いくら例をやっても例外が出なかったので信じることにしている。

^{*61} 穴が n 個ある物体のオイラー数 χ は $\chi = 2 - 2n$ である。

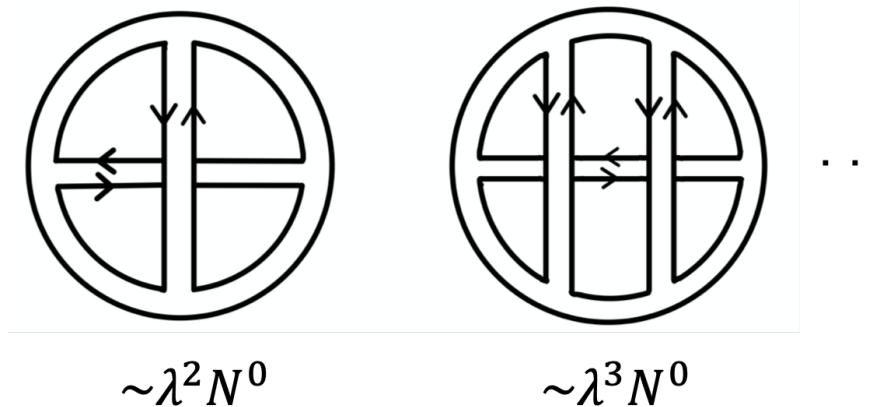


$$\sim \lambda N^2$$

$$\sim \lambda^2 N^2$$

$$\sim \lambda^2 N^2$$

図 4.20 planar diagram ($\chi = 2$)



$$\sim \lambda^2 N^0$$

$$\sim \lambda^3 N^0$$

図 4.21 non-planar diagram ($\chi = 0$)

ことはできないが、 $\chi = 0$ のドーナツ状の物体の表面には貼り付ける事ができる（図 4.24 参照）。この様なダイアグラムの確率振幅は $\lambda^{\#} N^0$ の形になる。卒業論文では具体的な形は書かないが、 $\chi = -2$ の物体に貼り付ける事ができる様な複雑なダイアグラムも存在し、そのようなダイアグラムの確率振幅は $\lambda^{\#} N^{-2}$ の形になる。もっと複雑なダイアグラムも存在するだろう^{*62}。

この様に、matrix model の Feynman diagram とトポロジーは関係している^{*63}。Large N 極限で残るのは $\chi = 2$ である planar diagram だけと言うわけだ。この節の結果をまとめると、

— Feynman diagram とトポロジーの関係 —

二重線で表した Feynman diagram をある図形に貼り付けるとする。カラーの流れが交差する事なく貼り付けられる物体のオイラー数の最大値を χ とすると、確率振幅は $\lambda^{\#} N^{\chi}$ の形になる。

^{*62} $\chi = -2$ までは具体例で確認した。

^{*63} なぜ、このような対応があるのかは分からぬ。背景に何か数学的な要因があるのだろうか。

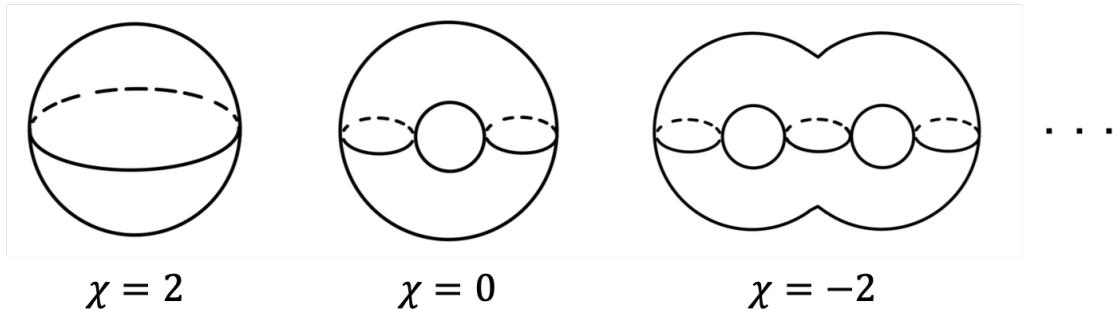


図 4.22 オイラー数と図形

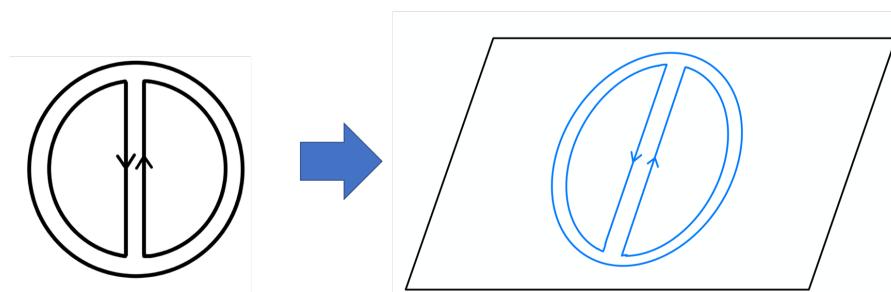


図 4.23 右の平面は非常に大きな球面と考える。

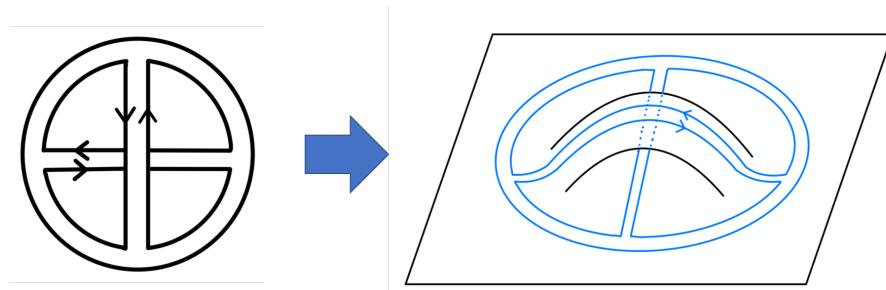


図 4.24 穴が一つある物体には貼り付けられる。

matrix model の帰結

Large N 極限では、planar diagram のみが残り、それ以外は考えなくても良い。

このことは結構面白くて、トポロジーとの関係は弦理論との対応まで関係すると言われている（セクション 5 参照）。wick の定理で 2 点関数などをいろいろ計算してみるとわかるのだが、planar diagram は少数派である。planar diagram しか効かないことにより、このモデルでは実スカラー場の摂動に比べて、摂動の収束性が良くなっている。

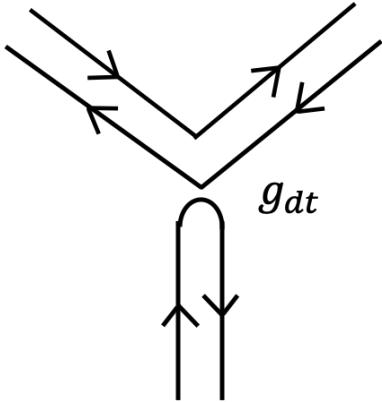
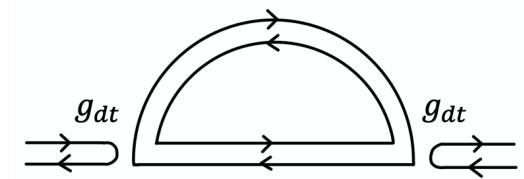


図 4.25 (4.49) の 3 点相互作用



$$\lambda_{dt} = (g_{dt})^2 N^2$$

$$\rightarrow g_{dt} = \frac{\sqrt{\lambda_{dt}}}{N} \ll g = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{N}}$$

図 4.26 Large N limit の仕方

4.2.4 他の相互作用について

Matrix model では (4.42) の 3 点相互作用を考えてきた。とはいって、 $U(N)$ 対称性を持つ相互作用は他にも考えられる。ただし、結論としては (4.42) 以外の 3 点相互作用は Large N 極限で無視できる。そのことについて少し述べよう。

例えば、以下の相互作用も $U(N)$ 対称性がある。

$$\mathcal{L}_{int}^{dt} = -\frac{g_{dt}}{3!} \text{tr}(\Phi^2) \times \text{tr}(\Phi) \quad (4.49)$$

この 3 点相互作用は二重線の Feynman diagram で言うと図 4.25 の様なカラーの流れがある。この様なカラーの流れの元、図 4.26 の様な摂動 2 次のダイアグラムを有限にしようと思えば、

$$\lambda_{dt} := g_{dt}^2 N^2 \quad (4.50)$$

と定義して λ_{dt} を一定にする必要がある。しかし、こうして極限を取った結合定数 g_{dt} は (4.48) の g に比べ無視できる。すなわち、

$$g_{dt} = \frac{\sqrt{\lambda_{dt}}}{N} \ll g = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{N}} \quad (4.51)$$

と言うことである。結局、(4.49) の相互作用は無視する事ができる。

また、 $U(N)$ 対称性を持つ相互作用として、もう一つ考えられる。

$$\mathcal{L}_{int}^{tt} = -\frac{g_{tt}}{3!} \text{tr}(\Phi) \times \text{tr}(\Phi) \times \text{tr}(\Phi) \quad (4.52)$$

この相互作用を二重線で表すと図 4.27 の様になる。このカラーの流れにより、図 4.28 の様な摂動 2 次のダイアグラムを有限にしようと思えば、

$$\lambda_{tt} := g_{tt}^2 N^2 \quad (4.53)$$

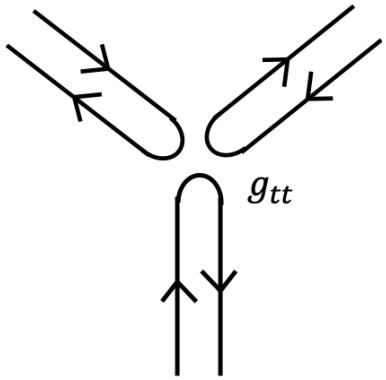


図 4.27 (4.49) の 3 点相互作用

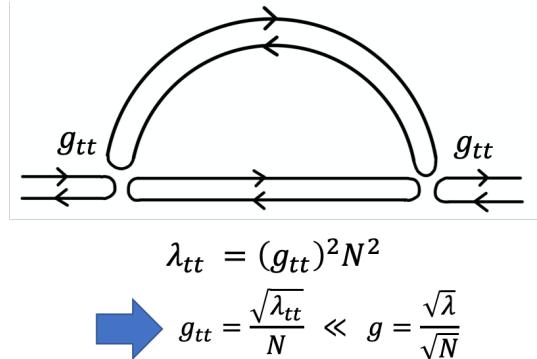


図 4.28 Large N limit の仕方

と定義して λ_{tt} を一定にする必要がある。しかし、こうして極限を取った結合定数 g_{dt} は (4.48) の g に比べ無視できる。すなわち、

$$g_{tt} = \frac{\sqrt{\lambda_{tt}}}{N} \ll g = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{N}} \quad (4.54)$$

と言うことである。結局、(4.53) の相互作用も無視する事ができる。

4.2.5 matrix model は“非摂動”で解けるか？

今回の matrix model では Large N 極限では planar diagram しか残らないことを見た。これにより摂動の収束性がよくなり、 $d=0+0$ のこの matrix model は非摂動で解く事ができるとされている。ただ、実際に分配関数を求める、となると、行列の特異値や、Vandermonde determinant などを用いる必要があり、レベルの高い数学が必要である。この卒業研究の期間には理解できなかったため、この卒業論文でも述べる事はできない。申し訳ありませんでした。

なお、一般次元では matrix model は非摂動で解けないとされている。でも、この先研究が進んで非摂動で解く方法が見つかるかもしれない。この辺りはまだ謎が残っている。

4.3 Large N tensor model ($(O(N) \times O(N) \times O(N))$)

Large N 理論の最後の例としてこの節では tensor model を紹介する。これは $O(N) \times O(N) \times O(N)$ の理論で、場 ϕ は $O(N)$ の添字を 3 つ持つ。つまり、以下の様な変換をするとする。

$$\phi^{ijk} \rightarrow \phi'^{ijk} = O_1^{il} O_2^{jm} O_3^{kn} \phi^{ijk} \quad (4.55)$$

where $O_1, O_2, O_3 : N \times N$ orthogonal matrix

$$\langle \phi^{ijk} \phi^{i'j'k'} \rangle = \delta^{ii'} \delta^{jj'} \delta^{kk'}$$



図 4.29 プロパゲーターの三重線記法

今回も簡単のため $d=0+0$ を仮定し、 $O(N)^3$ の対称性を持つ以下のラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi^{ijk}\phi^{ijk} - \frac{g}{4!}\phi^{i_1j_1k_1}\phi^{i_1j_2k_2}\phi^{i_2j_1k_2}\phi^{i_2j_2k_1} \quad (4.56)$$

繰り返しに出てくる添字については 1 から N まで和を取っている。今回は 4 点相互作用を

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4!}\phi^{i_1j_1k_1}\phi^{i_1j_2k_2}\phi^{i_2j_1k_2}\phi^{i_2j_2k_1} \quad (4.57)$$

として入れている。これ以外にも $O(N)^3$ の対称性を持つ 4 点相互作用は考えられるが、それについては後で議論するとしよう。今回も簡単のためソース項 J は 0 にすると、分配関数は以下の通り。

$$Z^{Tensor}(J=0, g) = \left(\prod_{ijk} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi^{ijk}}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2}\phi^{ijk}\phi^{ijk} - \frac{g}{4!}\phi^{i_1j_1k_1}\phi^{i_1j_2k_2}\phi^{i_2j_1k_2}\phi^{i_2j_2k_1} \right) \quad (4.58)$$

4.3.1 Feynman diagram の三重線記法

(4.56) からプロパゲーターを計算すると、以下の結果となる。

$$\langle \phi^{ijk} \phi^{i'j'k'} \rangle = \delta^{ii'} \delta^{jj'} \delta^{kk'} \quad (4.59)$$

今回、場 ϕ は 3 つの添字を持っている。つまり、3 つのカラーを持っている。そこで、このモデルではプロパゲーター (4.59) を図 4.29 の様に三重線で表すこととしよう。

この三重線記法を用いると、(4.57) の 4 点相互作用は図 4.30 の様に表す事ができる。例えば相互作用 $\phi^{i_1j_1k_1}\phi^{i_1j_2k_2}\phi^{i_2j_1k_2}\phi^{i_2j_2k_1}$ の i_1 のカラーは一つ目の ϕ と二つ目の ϕ の間で共通しているが、これを図 4.30 の赤線で表している。他のカラーについても同様に色で区別してカラーの流れを表している。 $\phi^{i_1j_1k_1}\phi^{i_1j_2k_2}\phi^{i_2j_1k_2}\phi^{i_2j_2k_1}$ と言う数式をみると、添字が多くてごちゃごちゃしているが、図 4.30 をみると一目瞭然である^{*64}。この様に、Feynman diagram を三重線で表すことで、カラーを追う事ができる。martix

^{*64} Feynman diagram という記法は本当に画期的な発明だなあとつくづく思う。まさに天才的な発想...

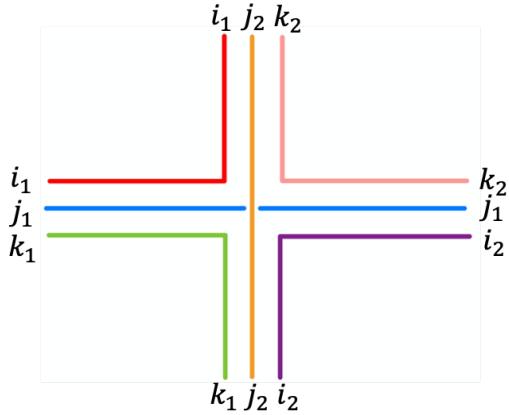


図 4.30 (4.57) の 4 点相互作用

model の二重線記法と同様に、三重線記法においてもカラーのループを数えることで、 N 因子の勘定ができる。このことを実感するには、さまざまなダイアグラムを実際に計算してみるのが良い。とはいっても matrix model の二重線記法に慣れた人なら三重線記法もすぐ慣れると思う。

4.3.2 Large N limit と melonic diagram

Tensor modelにおいては以下のように Large N 極限をとる^{*65}。

tensor model Large N limit

$$\lambda^2 := g^2 N^3 \text{ を一定にして } N \rightarrow \infty \quad (4.60)$$

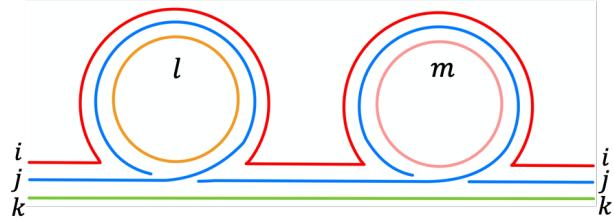
この極限の元、図 4.31 のような二つのダイアグラムを比較してみよう。今回は三重線で表しているが、この二つのダイアグラムは vector model の時に比較した snail diagram と melon diagram である。今回の場合、図 4.31 の左の snail diagram にはカラーのループが 2 つ（オレンジとピンク）あり、 N^2 の因子がかかる。確率振幅を λ で表すと、 $\frac{\lambda^2}{N}$ になり、Large N 極限で 0 となってしまう。一方、図 4.31 の右の melon diagram にはカラーのループが 3 つ（オレンジ、ピンク、紫）あり、 N^3 の因子がかかる。確率振幅を λ で表すと、 λ^2 になり、これは Large N 極限でも一定値だ。

今回も、主に真空ダイアグラムに対して確率振幅を計算してみた。図 4.32 の様な真空の melon diagram の確率振幅は λ を用いて表すと、 N^3 に比例するが、それ以外のダイアグラムの確率振幅は高々 $N^{5/2}$ である（図 4.33 参照）。これにより、tensor model では melon diagram が支配的である。

tensor model で得られた結果をまとめると、

^{*65} 今回も摂動が破綻しないように極限をとっている。

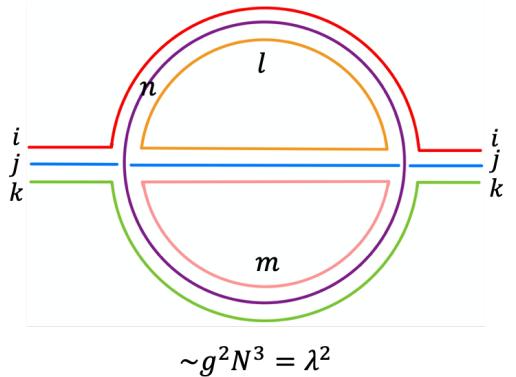
snail diagram



$$\sim g^2 N^2 = \frac{\lambda^2}{N}$$

$$\rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

melon diagram



$$\sim g^2 N^3 = \lambda^2$$

図 4.31 tensor model snail VS melon

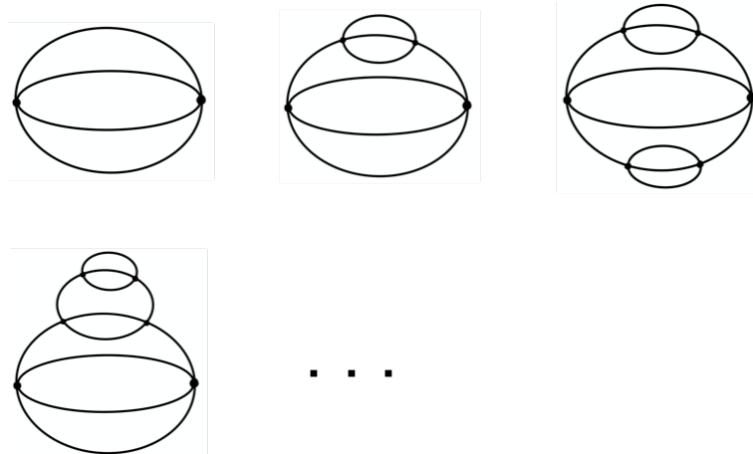


図 4.32 melon diagram $\lambda^\# N^3$

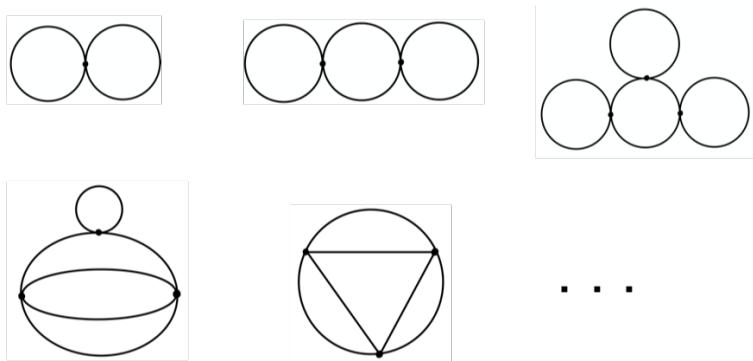


図 4.33 それ以外の diagram 高々 $\lambda^\# N^{5/2}$

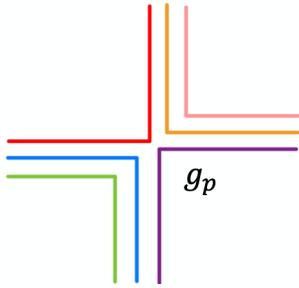


図 4.34 (4.61) の 4 点相互作用

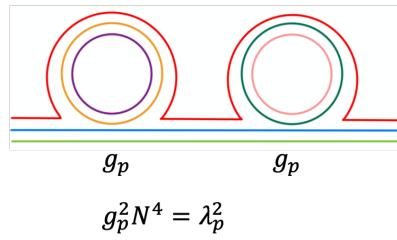


図 4.35 Large N limit

tensor model の帰結

melon diagram のみが残り、それ以外は削ぎ落とされる。

4.3.3 他の相互作用について

今回は 4 点相互作用として (4.57) を仮定してが、実は $O(N)^3$ の対称性を持つ 4 点相互作用は他にも考えられる。しかし、結論から言うと、(4.57) 以外の 4 点相互作用は Large N 極限で無視できる。例えば、以下のような 4 点相互作用も $O(N)^3$ の対称性を持つ。

$$\mathcal{L}_{int}^p = -\frac{g_p}{4!} \phi^{i_1 j_1 k_1} \phi^{i_2 j_1 k_1} \phi^{i_2 j_2 k_2} \phi^{i_1 j_2 k_2} \quad (4.61)$$

この相互作用は三重線でカラーの流れを表すと、図 4.34 の様になる。この相互作用で摂動を破綻しない様に Large N 極限をとるやり方は、

$$\lambda_p := g_p N^2 \quad (4.62)$$

と λ_p を定義して、この λ_p を固定して $N \rightarrow \infty$ と極限を取る必要がある (図 4.35 の snail diagram 参照)。

しかし、以下の様に、 $N \rightarrow \infty$ の極限では、結合定数 g_p は (4.57) の結合定数 g に比べ無視できる。

$$g_p = \frac{\lambda_p}{N^2} \ll g = \frac{\lambda}{N^{3/2}} \quad (4.63)$$

他にも以下の様な 4 点相互作用も $O(N)^3$ の対称性を持つ。

$$\mathcal{L}_{int}^{ds} = -\frac{g_p}{4!} (\phi^{i_1 j_1 k_1} \phi^{i_1 j_1 k_1})^2 \quad (4.64)$$

この相互作用は三重線でカラーの流れを表すと、図 4.36 の様になる。この相互作用で摂動を破綻しない様に

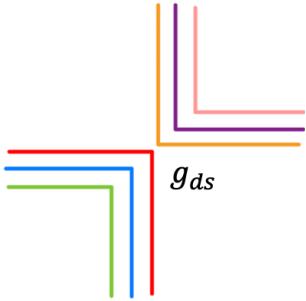
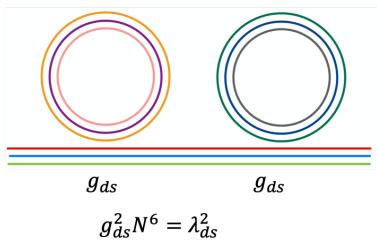


図 4.36 4.64 の点相互作用



$$g_{ds}^2 N^6 = \lambda_{ds}^2$$

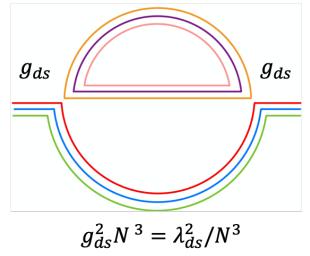


図 4.37 Large N limit

Large N 極限をとるやり方は、

$$\lambda_{ds} := g_{ds} N^3 \quad (4.65)$$

と λ_{ds} を定義して、この λ_{ds} を固定して $N \rightarrow \infty$ と極限を取る必要がある (図 4.37 の snail diagram 参照)。

しかし、以下の様に、 $N \rightarrow \infty$ の極限では、結合定数 g_{ds} は (4.57) の結合定数 g に比べ無視できる。

$$g_{ds} = \frac{\lambda_{ds}}{N^3} \ll g = \frac{\lambda}{N^{3/2}} \quad (4.66)$$

面白いことに、(4.61) や (4.64) の相互作用では、melon diagram よりも snail diagram の方が勝つ (図 4.35、図 4.37 参照)。しかし、結合定数が圧倒的に小さいため、この様な相互作用は無視できたというわけだ。

4.3.4 tensor model は“非摂動”で解けるか？

最後に tensor model の非摂動的側面について述べておく。前の節で述べた通り、tensor model で考えるべきダイアグラムは melon diagram のみで良い。この著しい性質により、*tensor model* は非摂動で解く事ができる。しかし、具体的な解については、この卒業研究の期間で勉強する事ができなかった。よって、この卒業論文でも、非摂動の解法については割愛させていただきます。申し訳ありません。

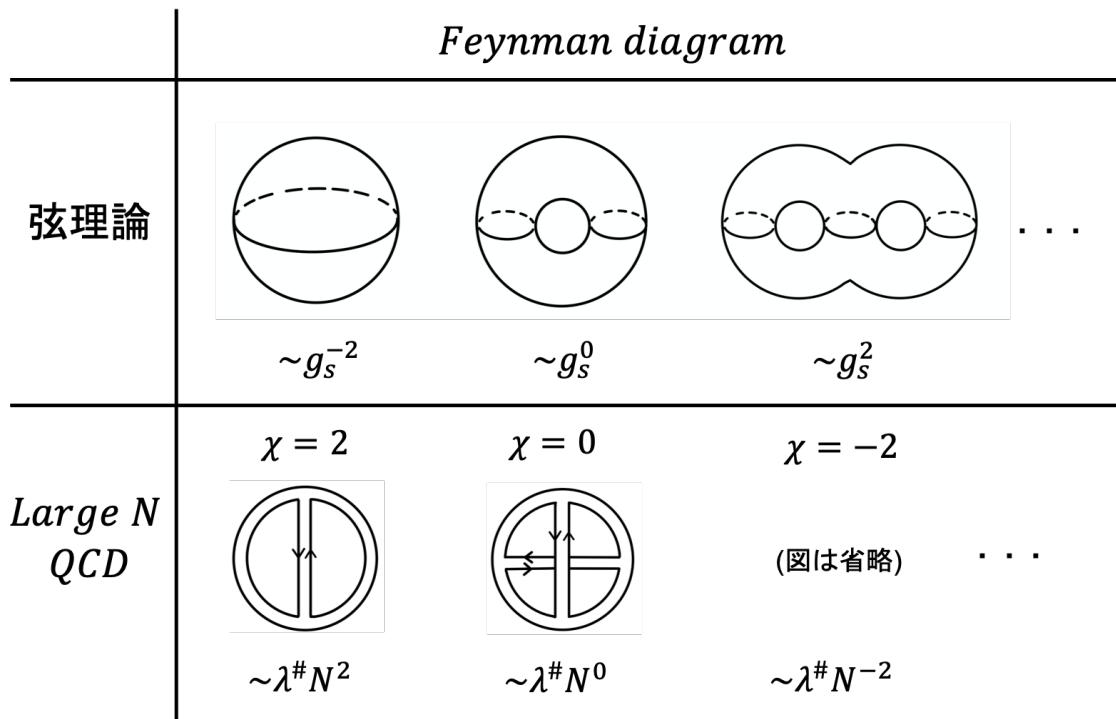


図 5.1 弦理論と Large N QCD との対応

5 今後の展望

このセクションでは今後の展望を述べる。今回扱った Large N 理論はまだ面白い性質があると期待されている。今回は勉強できなかったが、今後勉強していきたいこと、大学院で研究したいことを紹介する。

5.1 Large N ゲージ理論と弦理論のつながり

今回扱った Large N matrix model の応用として、Large N QCD が挙げられる。Large N QCD は $SU(N)$ のゲージ理論で、量子色力学のカラー自由度が非常に多い理論と言える。ラグランジアンは以下の様な Yang-Mills Lagrangian である。

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (5.1)$$

ここで、 $F^{\mu\nu}$ と $F_{\mu\nu}$ は「場の強さ」であり、共変微分の交換子から定義できる。ここでは詳しい議論をしても仕方ないので、ざっくりと述べるが、この共変微分はゲージ変換性を持たせるためゲージ場 A_μ を導入する必要がある。このゲージ場 A_μ が $N \times N$ 行列であり、今回扱った matrix model と同様の構造をしている。実際、(5.1) から出てくる Feynman diagram を二重線で表すと、matrix model と同様のトポロジーとの関係がそのまま成り立つ。

この Large N QCD が弦理論と対応しているのではないかと考えられている。弦理論では 1 次元的な「ひも」を最小単位として考えるので、ひもの運動は世界「面」で表される。閉じた紐の場合、世界面は図 5.1 の様な立体的な物体である。弦理論では閉じた弦の生成・消滅につき結合定数 g_s を割り当てる。弦理論の Feynman diagram(世界面) の確率振幅は図 5.1 の様に、世界面のトポロジーと関係している。これは matrix model で得られたトポロジーとの関係に似ている。図 5.1 の様に、弦理論と Large N QCD を比較すると、構造が似ている。両者の比較により、

$$g_s^{-1} \sim N \quad (5.2)$$

と言う関係があると思われる。つまり、QCD の $N \rightarrow \infty$ の極限と、弱結合の弦理論が対応しているのではないか？と言うことを示唆している。こうした対応関係には興味があるし、ホログラフィー原理にも関係がありそうだ。今後はこういったトピックについても勉強していきたいと思う。

5.2 SYK model

今回扱った Large N tensor model の応用としては Sachdev-Ye-Kitaev model(SYK model) と呼ばれるモデルがある。これは Large N 理論の一種で、fermion のモデルとなっている。ラグランジアンは以下の通り。

$$\mathcal{L} = \phi_i \partial_\tau \phi_i + \frac{1}{q!} J_{i_1 i_2 \dots i_q} \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_q} \quad (5.3)$$

分配関数は以下の通り。

$$Z = \int D J_{ijkl} \exp \left(-\frac{J_{ijkl}^2 N^{q-1}}{2(q-1)! J^2} \right) D \phi_i \exp \left(- \int d\tau \mathcal{L} \right) \quad (5.4)$$

今回は q 点相互作用を仮定していて ($q = 4, 5, 6, \dots$) 結合定数 J_{ijkl} は分配関数ではガウス型のウェイトを持って足しあげられている。

実はこの SYK model も今回扱った tensor model と同様に、melon diagram が支配的なモデルとなっていて、SYK model は非摂動で解く事がでいるとされている。そして、近年この SYK model が二次元重力 (AdS_2) の性質を示す事が示唆されている。これも AdS/CFT 対応の一つと考えられる。

この様に、Large N 理論は AdS/CFT にも関係があると期待できる。大学院では AdS/CFT に関連したトピックについて研究をしたいと考えているので、この辺りは今度勉強していきたいと考えている。

付録 A 数学的な公式

このセクションでは今回用いる数学の公式をまとめておく。

A.1 行列形のガウス積分

\vec{x} 、 \vec{J} を N 成分のベクトルとし、 A を $(N \times N)$ の実対称行列とする^{*66}。この時、以下の公式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N e^{\frac{i}{2}\vec{x} \cdot A\vec{x} + i\vec{J} \cdot \vec{x}} = \left(\frac{(2\pi i)^N}{\det(A)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{2}\vec{J} \cdot A^{-1}\vec{J}} \quad (\text{付録 A.1})$$

(証明)

今 A は実対称行列なので、直行行列 O を用いて対角化できる。すなわち、 O の転置を ${}^t O$ と表すと ${}^t O = O^{-1}$ が成り立ち、さらに以下のように A を対角化できる。

$${}^t O A O = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (\text{付録 A.2})$$

(付録 A.2) より、

$$\det A = \det(O\Lambda{}^t O) = \det(\Lambda) = \lambda_1 \dots \lambda_N \quad (\text{付録 A.3})$$

さらに、 $\vec{y} = O^{-1}\vec{x}$ と置く。 $\left| \frac{\partial(x_1 \dots x_N)}{\partial(y_1 \dots y_N)} \right| = |\det(O)| = 1$ を用いて^{*67}(A.1) 左辺を変数変換すると以下の通り。

$$\begin{aligned} ((A.1) \text{ 左辺}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_N \exp \left(\frac{i}{2} {}^t \tilde{x} A \vec{x} + i {}^t \tilde{J} \vec{x} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_N \exp \left(\frac{i}{2} {}^t \tilde{y} {}^t O A O \vec{y} + i {}^t \tilde{J} O \vec{y} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_N \exp \left(\frac{i}{2} {}^t \tilde{y} \Lambda \vec{y} + i {}^t ({}^t O \tilde{J}) \vec{y} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_N \exp \left(\frac{i}{2} (\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_N y_N^2) + i ({}^t O \tilde{J})_1 y_1 + \dots + i ({}^t O \tilde{J})_N y_N \right) \\ &= \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dy_i \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda_i y_i^2 + i ({}^t O \tilde{J})_i y_i \right) \end{aligned} \quad (\text{付録 A.4})$$

あと y_i について平方完成し、ガウス積分を実行すると、以下の結果になる。

^{*66} もし A が対称行列でなくても、(A.1) 左辺のように二次形式の形では A を対称行列に組み直すことができる。

^{*67} 今 O は直行行列なので $O^t O = 1$ 、つまり $1 = \det(O^t O) = (\det(O))^2$ なので $\det(O) = \pm 1$ だ

$$((A.1) \text{ 左辺}) = \sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\Lambda_1 \dots \lambda_N}} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{i}{2\lambda_i} \left({}^t O \vec{J} \right)_i \right) \quad (\text{付録 A.5})$$

ここで (付録 A.3) を代入し、exponential の肩の部分を行行列で書き直すと、

$$\begin{aligned} ((A.1) \text{ 左辺}) &= \left(\frac{(2\pi i)^N}{\det A} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{i}{2} {}^t O \tilde{J} \Lambda^{-1} ({}^t O \vec{J}) \right) \\ &= \left(\frac{(2\pi i)^N}{\det A} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{i}{2} {}^t \tilde{J} \underbrace{O \Lambda^{-1} {}^t O}_{A^{-1}} \tilde{J} \right) \\ &= \left(\frac{(2\pi i)^N}{\det A} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{i}{2} \tilde{J} A^{-1} \tilde{J} \right) \\ &= (A.1) \text{ の右辺} \end{aligned} \quad (\text{付録 A.6})$$

よって (A.1) は示された。^{*68}

A.2 wick の定理の元となる公式

(A.1) の左辺を $Z(\vec{J})$ として定義する。^{*69}

$$Z(\vec{J}) := \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N e^{\frac{i}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x} + i \vec{J} \cdot \vec{x}} \quad (\text{付録 A.7})$$

また、記号 $\langle \dots \rangle I$ 以下のように定義する。

$$\langle f(\{x_i\}) \rangle := \frac{1}{Z(\vec{J}=0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N f(\{x_i\}) e^{\frac{i}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x}} \quad (\text{付録 A.8})$$

ただし $f(\{x_i\})$ は x_1, \dots, x_N の関数である。

この時、以下の式が成立。

n が奇数の時 —

$$\underbrace{\langle x_{i_1} \dots x_{i_n} \rangle}_{\text{奇数個}} = 0 \quad (\text{付録 A.9})$$

(証明)

^{*68} 最後の式変形では、 $A^{-1} = (O \Lambda {}^t O)^{-1} = ({}^t O)^{-1} \Lambda^{-1} O^{-1} = O \Lambda^{-1} {}^t O$ を用いた。

^{*69} これは自由スカラー場の生成汎関数の離散化バージョンと思うことが出来る。

まずは $n = 1$ の場合に証明する。(付録 A.9) には \vec{J} は入っていないが、あえて入れると、

$$\begin{aligned}\langle x_i \rangle &= \frac{1}{Z(\vec{J} = 0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N x_i e^{\frac{i}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x}} \\ &= \frac{1}{Z(\vec{J} = 0)} \left(\frac{\partial}{\partial(iJ_i)} Z(\vec{J}) \right)_{\vec{J}=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial(iJ_i)} e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} \right)_{\vec{J}=0}\end{aligned}\tag{付録 A.10}$$

となる。ただし途中で (付録 A.11) を用いた。ここで、計算したらすぐわかる式

$$\frac{\partial}{\partial J_i} e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} = -i \sum_{k=1}^N A_{ik}^{-1} J_k e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}}\tag{付録 A.11}$$

を用いると、(A.2) が 0 となることがわかる。

$n = 3, 5, 7, \dots$ の場合でも同様に 0 となることが示せる^{*70}。すなわち、

$$\begin{aligned}\underbrace{\langle x_{i_1} \dots x_{i_n} \rangle}_{\text{奇数個}} &= \frac{1}{Z(\vec{J} = 0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N x_{i_1} \dots x_{i_n} e^{\frac{i}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x}} \\ &= \left(\frac{1}{i^n} \underbrace{\frac{\partial^n}{\partial J_{i_1} \dots \partial J_{i_n}}}_{\text{奇数階微分}} e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} \right)_{\vec{J}=0} \\ &= \left((J \text{ の多項式}) e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} \right)_{\vec{J}=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

また、 n が 2 以上の偶数の時は以下の公式が成り立つ。

———— n=2 の時 ————

$$\langle x_i x_j \rangle = i A_{ij}^{-1}\tag{付録 A.12}$$

———— n が 2 以上の偶数の時 ————

$$\underbrace{\langle x_{i_1} \dots x_{i_n} \rangle}_{\text{偶数個}} = \sum_{Wick} \langle x_a x_b \rangle \dots \langle x_c x_d \rangle\tag{付録 A.13}$$

ただし \sum_{Wick} は可能な限り wick 縮約をとってそれらを足し合わせよ、という意味である。wick 縮約はどん

^{*70}(付録 A.11) をもう 2 回微分しても J が exponential の係数として残ることが重要だ。

なものかというと、 $\langle \rangle$ の中の項からペアを作る作業のことである。とはいえることは口で説明するより具体的に書いたほうがわかりやすい。

例えば、 $n = 4$ の時、

$$\begin{aligned}\langle x_i x_j x_k x_l \rangle &= \langle \overbrace{x_i x_j}^{\square} \overbrace{x_k x_l}^{\square} \rangle + \langle \overbrace{x_i x_j}^{\square} \overbrace{x_k x_l}^{\square} \rangle + \langle \overbrace{x_i x_j}^{\square} \overbrace{x_k x_l}^{\square} \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle \langle x_k x_l \rangle + \langle x_i x_l \rangle \langle x_j x_k \rangle + \langle x_i x_k \rangle \langle x_j x_l \rangle\end{aligned}\quad (\text{付録 A.14})$$

である。 $n = 6$ の時は、 $\langle \overbrace{x_i x_j}^{\square} \overbrace{x_k x_l}^{\square} \overbrace{x_m x_n}^{\square} \rangle$ 、 $\langle \overbrace{x_i x_j}^{\square} \overbrace{x_k x_l}^{\square} \overbrace{x_m x_n}^{\square} \rangle$ 、 $\langle \overbrace{x_i x_j}^{\square} \overbrace{x_k x_l}^{\square} \overbrace{x_m x_n}^{\square} \rangle$ といったふうに Wick 縮約をとる。

(A.2) の証明

この証明も、 \vec{J} を導入すると便利である。

$$\begin{aligned}\langle x_i x_j \rangle &= \frac{1}{Z(\vec{J}=0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N x_i x_j e^{\frac{i}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x}} \\ &= \frac{1}{Z(\vec{J}=0)} \left(\frac{1}{i^2} \frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} Z(\vec{J}) \right)_{\vec{J}=0} \\ &= \left(\frac{1}{i^2} \frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} \right)_{\vec{J}=0}\end{aligned}\quad (\text{付録 A.15})$$

ここで (付録 A.11) をもう一度微分すると得られる式

$$\frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} = \left(-i A_{ij}^{-1} + (-i A_{ik}^{-1})(-i A_{jl}^{-1}) J_k J_l \right) e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} \quad (\text{付録 A.16})$$

*71を (A.2) に代入すると、(A.2) が得られる。

((付録 A.13) の証明もどき) 例えば、 $n = 4$ の時、(付録 A.16) をさらに 2 回微分して得られる式を用いると、

$$\begin{aligned}\langle x_i x_j x_k x_l \rangle &= \frac{1}{Z(\vec{J}=0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N x_i x_j x_k x_l e^{\frac{i}{2} \vec{x} \cdot A \vec{x}} \\ &= \frac{1}{Z(\vec{J}=0)} \left(\frac{1}{i^4} \frac{\partial^4}{\partial J_i \partial J_j \partial J_k \partial J_l} Z(\vec{J}) \right)_{\vec{J}=0} \\ &= \left(\frac{1}{i^4} \frac{\partial^4}{\partial J_i \partial J_j \partial J_k \partial J_l} e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} \right)_{\vec{J}=0} \\ &= \frac{1}{i^4} \left(\left((-i A_{ij}^{-1})(-i A_{kl}^{-1}) + (-i A_{il}^{-1})(-i A_{jk}^{-1}) + (-i A_{ik}^{-1})(-i A_{jl}^{-1}) + O(J) \right) e^{-\frac{i}{2} \vec{J} \cdot A^{-1} \vec{J}} \right)_{\vec{J}=0} \\ &= (i A_{ij}^{-1})(i A_{kl}^{-1}) + (i A_{il}^{-1})(i A_{jk}^{-1}) + (i A_{ik}^{-1})(i A_{jl}^{-1}) \\ &= ((A.2) \text{ 左辺})\end{aligned}\quad (\text{付録 A.17})$$

さらに n が大きい時も、全く同様に計算して (A.2) を示すことができる。計算方法はシンプルで、(付録 A.11)

*71 繰り返しに出てくる添字については和を取るインシュタインルールを用いている。

を必要なだけ微分すれば良い。⁷²

⁷² とはいえる、 n が大きくなるにつれ計算量は膨大に増加する。僕は $n=6$ まで示しましたが大変でした。帰納法とかで示す方法があるのかなあ。

付録 B グリーン関数と真空期待値

$\hat{\phi}_H(x)$ をハイゼンベルグ描像の場の演算子とする。つまり、 $\hat{\phi}_H(x)$ は時間に依存する。T を時間順序積を以下のように定義する。

$$T(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n)) := \hat{\phi}_H(x_{i_1}) \cdots \hat{\phi}_H(x_{i_n}) \quad (\text{付録 B.1})$$

ただし $i_1 > i_2 > \cdots > i_n$ である。

この T を用いて、以下の公式が成り立つ。

$$\langle 0 | T(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n)) | 0 \rangle = \frac{\int D\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp(i \int d^4y \mathcal{L})}{\int D\phi \exp(i \int d^4y \mathcal{L})} \quad (\text{付録 B.2})$$

ただし $|0\rangle$ は真空状態、 \mathcal{L} はラグランジアンである。

また、この式から n 点グリーン関数は以下のように真空期待値として表せる。

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n)) | 0 \rangle \quad (\text{付録 B.3})$$

((付録 B) の証明)

$|\phi\rangle_S$ をシュレーディンガー描像における、場 ϕ の固有状態とする。ハイゼンベルグ描像の状態 $|\phi, t\rangle_H$ とすると両者の関係は、

$$|\phi, t\rangle_H = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) |\phi\rangle_S \quad (\text{付録 B.4})$$

である。また、シュレーディンガー描像における、場の演算子を、 $\hat{\phi}_S(x)$ とし、ハイゼンベルグ描像における、場の演算子を、 $\hat{\phi}_H(x)$ とする。両者の関係は以下の通り。

$$\hat{\phi}_H(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \hat{\phi}_S(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \quad (\text{付録 B.5})$$

セクション 1 で行った様に、時間を離散化すると、以下の式が成り立つことがわかる。

$${}_H \langle \phi_F, t_F | T(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n)) | \phi_I, t_I \rangle_H = \int D\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}\right) \quad (\text{付録 B.6})$$

ただし、始状態を $|\phi_I, t_I\rangle_H$ 、終状態を $|\phi_F, t_F\rangle_H$ としている。(付録 B.6) から自明に以下の式も成り立つ。

$${}_H \left\langle \phi_F, t_F \middle| T \left(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \right) \middle| \phi_I, t_I \right\rangle_H = \int D\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L} \right) \quad (\text{付録 B.7})$$

ここで、エネルギー固有値 E_l の固有状態を $|l\rangle_S$ と置く。ただし、エネルギー固有値の低い順に $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

とする。最低エネルギー固有値を $E_0 = 0$ とすると、真空状態は $|0\rangle = |0\rangle_S = |0\rangle_H$ とかける。

完全系の式 $\sum_l |l\rangle_S \langle l| = 1$ を用いると、

$${}_H \left\langle \phi_F, t_F \middle| T \left(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \right) \middle| \phi_I, t_I \right\rangle_H \quad (\text{付録 B.8})$$

$$= \sum_{l, l'} \exp((iE_l t_I - iE_{l'} t_F)/\hbar) {}_S \langle l | \phi_I \rangle_S {}_S \langle \phi_F | l' \rangle_S {}_S \langle l' | T \left(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \right) | l \rangle_S \quad (\text{付録 B.9})$$

ここで、 $t_I \rightarrow -\infty, t_F \rightarrow \infty$ の極限を考えると (付録 B.9) は $E_{l'} = E_l = 0$ (真空) しか効かず、それ以外は相殺するだろう。よって、

$${}_H \left\langle \phi_F, t_F \middle| T \left(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \right) \middle| \phi_I, t_I \right\rangle_H = \langle | \phi_I \rangle_S {}_S \langle \phi_F | 0 \rangle \langle 0 | T \left(\hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) \right) | 0 \rangle \quad (\text{付録 B.10})$$

同様に、

$${}_H \langle \phi_F, t_F | \phi_I, t_I \rangle_H = \langle 0 | \phi_I \rangle_S {}_S \langle \phi_F | 0 \rangle \quad (\text{付録 B.11})$$

が成り立つ。ただし、 $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ と規格化している。

(付録 B.6)、(付録 B.7)、(付録 B.10)、(付録 B.11) より、(付録 B) が従う。

付録 C 鞍点法 (saddle point method) の公式

鞍点法を用いると、以下の式が示せる。

$$\int_a^b dt e^{-NS(t)} = e^{-NS(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{N \frac{d^2 S}{dt^2}(t_0)}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad (\text{付録 C.1})$$

ただし、 $a < t_0 < b$ で $S(t_0)$ は $S(t)$ の極小値

(証明)

これは学部レベルの公式なので、証明は割愛する。(付録 C.1) の左辺の $S(t)$ を極小値付近でテイラー展開したら示せるし、 $\mathcal{O}(1/N)$ の補正項も含めて示せる。将来この卒論を読んでいる自分は何も見ずに証明できると信じている。

謝辞

最後に、この度お世話になった方々に感謝の意を述べようと思います。4ヶ月間の短い卒業研究の期間でしたが、本当に多くの人にお世話になりました。大野木さんと田中さんには毎週のゼミでの的確なアドバイスをしていただきました^{*73}。先生方のいつも学生の背中を押してくださる姿勢は、精神的な支えにもなりました。ありがとうございました。

また、普段からご指導いただいている飯塚先生にも大変感謝しております。卒業研究もそうですし、それ以外も普段からご指導をありがとうございます。これからもがんばります。

先生方以外にも素論の大学院生の先輩、一緒に奮闘した同期のB4のみんなに感謝申し上げます。

今回で「卒業研究」としてはおしまいになりますが、研究活動としてはまだ始まりに過ぎません。いや、始まってもないのかもしれない。大学院で研究ができるよう、これからも精進して参ります。それでは筆を置くことにします。ありがとうございました。

参考文献

- [1] 「Quantum Field Theory in a Nutshell Second Edition」 A.Zee 著
- [2] 「ジー先生の場の量子論 基礎編」 原田恒司・筒井泉 訳 ← [1] の和訳本
- [3] 「AdS/CFT Duality User Guide」 Makoto Natuume arXiv:1409.3575v4 [hep-th] 31 Aug 2016
- [4] 「場の量子論 不変性と自由場を中心にして」 坂本真人 著
- [5] 「場の量子論（II） ファインマン・グラフとくりこみを中心にして」 坂本真人 著
- [6] 「TASI Lecture on Large N Tensor Models」 Igor R. Klebanov, Fedor Popov, Grigory Tarnopolsky arXiv:1808.09434v2 [hep-th] 5 Sep 2018
- [7] 「数理物理3マニュアル」 山口哲 著 ←山口先生の授業の講義ノート
- [8] 「現代的な視点からの場の量子論 発展編」 V.P ナイア著 ← 19.3 節 1/N 展開の部分
- [9] 「LATEX 2 ε 美文書作成入門 改定第8版」 奥村晴彦・黒木裕介 著 ← LATEX 使うのが初めてだったので、この本を見て書きました。

^{*73} 先生方の知識量がすごすぎです… ほんとなんでも知ってはる…