Entanglement Rényi entropy and boson-fermion duality in massless Thirring model

藤村晴伸*

共同研究者：西岡辰磨*、嶋守聡一郎*

*大阪大学素粒子論研究室

2023/10/13 @大阪公立大学杉本キャンパス

arXiv:2309.11889

アウトライン

1. イントロダクション
2. 解析方法
3. 解析結果のパラメーター依存性
4. まとめと展望

1. イントロダクション

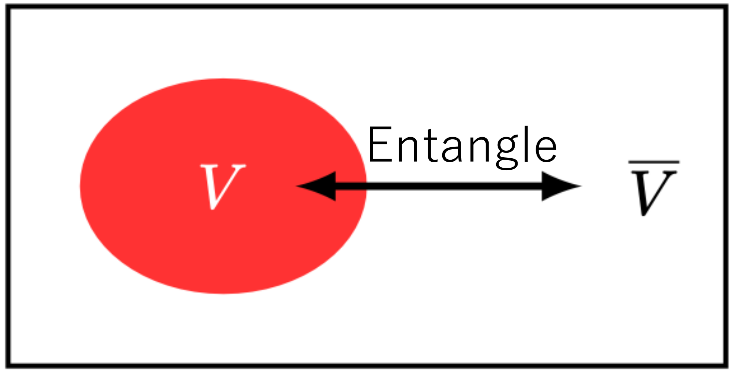
1. 場の量子論におけるエンタングルメント

全体系の状態：$|0\rangle$

密度行列：$\rho_{\text{tot}} = |0\rangle\langle 0|$

空間分割： $V_{\text{tot}} = V \cup \bar{V}$

縮約密度行列： $\rho_V = \text{Tr}_{\bar{V}}[\rho_{\text{tot}}]$



V_{tot}

エンタングルメントエントロピー(EE)：

$$S(V) \equiv -\log \text{Tr}_V[\rho_V \log \rho_V]$$

$$\lim_{n\to 1} S_n(A) = S(A)$$

エンタングルメントRényiエントロピー(ERE)：

$$S_n(V) \equiv \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}_V[\rho_V^n] \quad , n \in \mathbb{Z}_+$$

EE、EREは系を特徴付ける重要な量子情報量

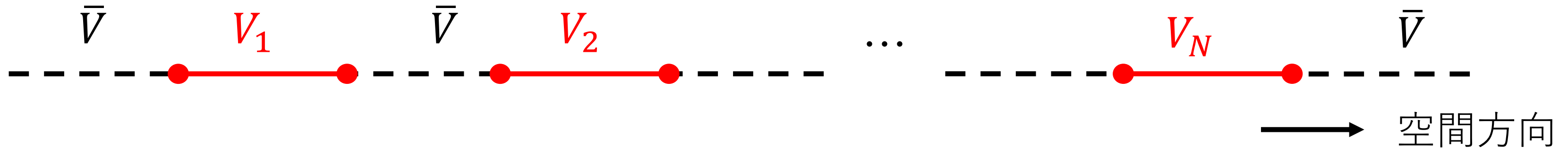
1. 場の量子論におけるエンタングルメント

一般的な解析手法 ➡ Replica法

$$\mathrm{Tr}_V[\rho_V^n] \sim Z_n$$ 分配関数

既存の解析計算：

(1+1)次元、領域Vを分割：$V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$



- ✔ Free massless fermion. n-sheets, N-intervals [Casini, Fosco, Huerta 2005]
- ✔ Free compact boson. 2-sheets, 2-intervals [Calabrase, Cardy, Tonni 2011]
- ✔ CFT, Single interval [Holzhey,Larsen, Wilczek 1994]

➡ 相互作用を含む系での厳密な解析計算はない

1. Boson-fermion双対性

相互作用を含む系でEREを求めるのは難しい

➡ 我々のアイデア：boson-fermion双対性を使う。[Karch, Tong, Turner 2019]

Fermionの理論 ：$\mathcal{T}_F$

局所演算子 : $\hat{O}^F$

離散対称性 : $\mathbb{Z}_2^F$

分配関数 : Z^F

fermionization ←

bosonization →

Bosonの理論 ：$\mathcal{T}_B$

局所演算子 : $\hat{O}^B$

離散対称性 : $\mathbb{Z}_2^B$

分配関数 : Z^B

(1+1)次元、genusを持った閉じた多様体の場合のfermionization：

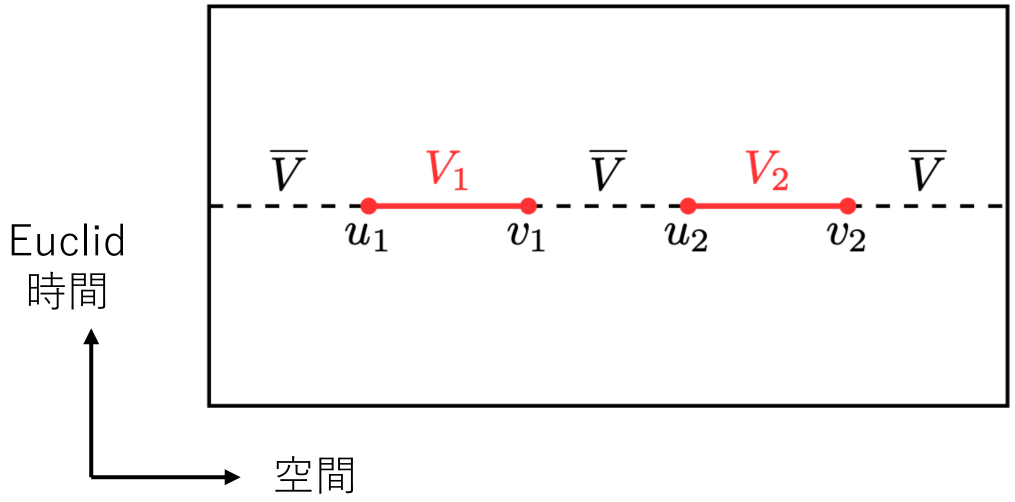
$$\mathcal{T}_F = \frac{\mathcal{T}_B \times \mathrm{TQFT}}{\mathbb{Z}_2^B}$$

← $\mathbb{Z}_2^B$ゲージ化

1. 我々の研究

やったこと：

- Replica法とboson-fermion双対性を組み合わせて、相互作用のあるモデルでRényiエントロピー(ERE)と相互Rényi情報量(MRI)を厳密に解析計算した。
- モデルはMassless Thirring model (1+1次元、フェルミオン、4点相互作用)
- 2-intervals, 2-sheets (下の図)
- 得られた結果のパラメーター依存性を議論した。



$S_2(V)$

$I_2(V_1, V_2)$

2. 解析方法

2. モデル

Massless Thirring model

$$\mathcal{L}_F = i\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi \;+ \frac{\pi}{2}\lambda\,\underbrace{(\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\,\gamma_\mu\psi)}_{\text{相互作用}}$$

ψ：Dirac fermion

λ : Thirring coupling

$\mathbb{Z}_2^F$： $\psi \to -\psi$

fermionization

$$1 + \lambda = \frac{4}{R^2}$$

Free compact boson

$$\mathcal{L}_B = \frac{R^2}{8\pi}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$$

$$\phi \sim \phi + 2\pi$$

ϕ：スカラー場

R : compact boson半径

$\mathbb{Z}_2^B$： $\phi \to \phi + \pi$

そのままでは解析が難しい

自由場なので解析が簡単

fermionizationを用いてmassless Thirring modelを解析

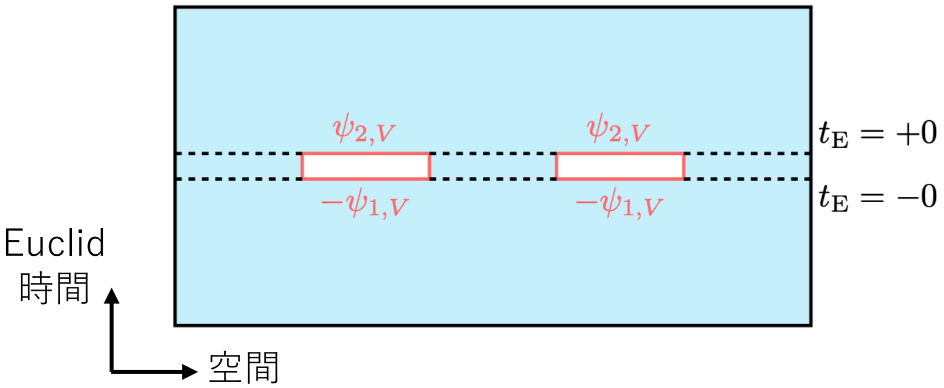
2. Replica法

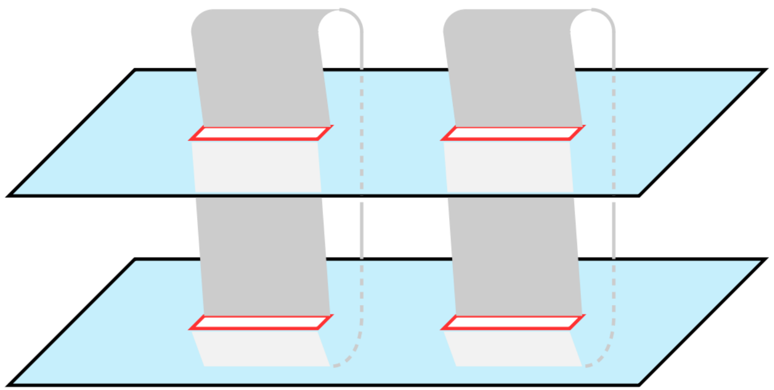
Target：$S_2(V) = -\log \mathrm{Tr}_V[\rho_V^2]$

$$\rho_V(\psi_1,\psi_2) = \mathrm{Tr}_{\overline{V}}[\langle\psi_1|0\rangle\langle 0|\psi_2\rangle]$$

$$\mathrm{Tr}_V[\rho_V^2] = \sum_{\psi_1,\psi_2} \rho_V(\psi_1,\psi_2)\,\rho_V(\psi_2,-\psi_1)$$

$$\sim Z^F_{\Sigma_{2,2}}$$



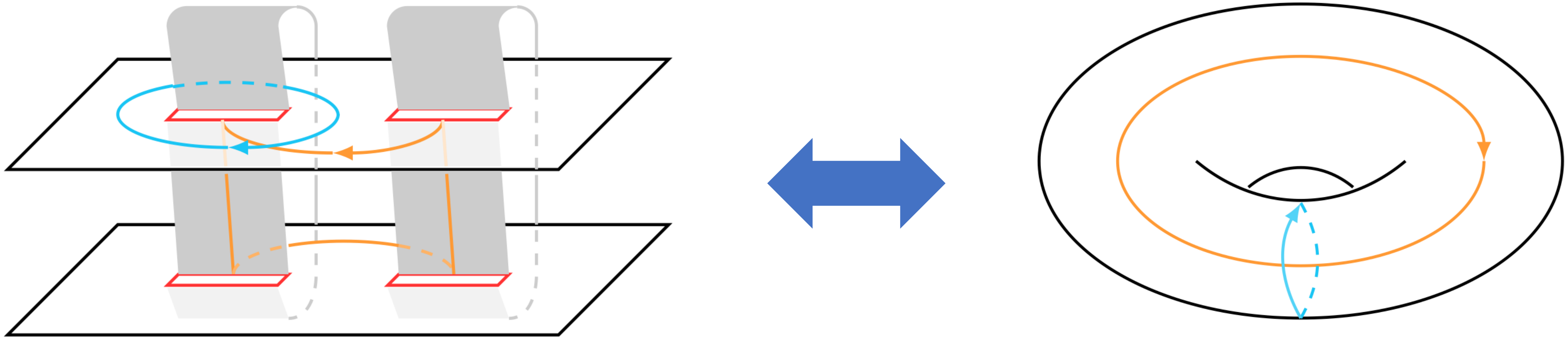


$\Sigma_{2,2}$

$\Sigma_{2,2}$上の分配関数$Z^F_{\Sigma_{2,2}}$を計算すれば良い

2. Conformal map

$\Sigma_{2,2}$は共形変換でトーラスにmapできる[Lumin, Mathur 2001]



$\Sigma_{2,2}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{T}$

cross-ratio：$x = \dfrac{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}$ $\longleftrightarrow$ moduli：τ

$Z^F_{\Sigma_{2,2}} \propto Z^F_{\mathbf{T}}$ ➡ トーラス上の分配関数$Z^F_{\mathbf{T}}$を計算すれば良い

2. 解析結果

$$S_2(V) \xrightarrow{\text{Replica法}} Z^F_{\Sigma_{2,2}} \xrightarrow{\text{共形map}} Z^F_{\mathbf{T}} \xrightarrow{\text{fermionization}} \sum_t Z^B_{\mathbf{T}}[t] \times (\mathrm{TQFT})$$

t： $\mathbb{Z}_2$ゲージ場

最終結果

$$S_2(V,\lambda) = S_2(V,0) - \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{2\vartheta_3^4(\tau)}\sum_{j=2}^{4}\vartheta_j^2(\tau(1+\lambda))\,\vartheta_j^2\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right)\right]$$

$S_2(V,0)$： Free項 ➡既存の結果とconsistent

ℓ_1, ℓ_2：インターバルの長さ　　$\vartheta_j(\tau),\ j = 2,3,4$：Jacobi theta 関数

相互Rényi情報量も同様に計算できる。

➡ 相互作用のある場の理論での厳密なRényiエントロピーを得た

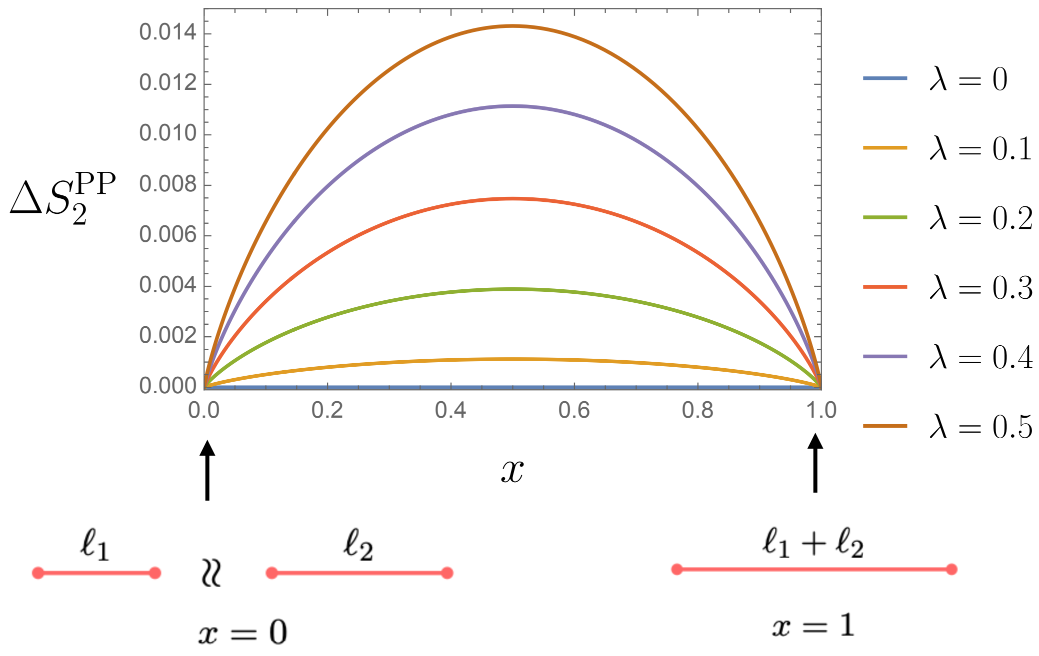
3. 解析結果のパラメーター依存性

3. Rényiエントロピー(ERE)のインターバル依存性

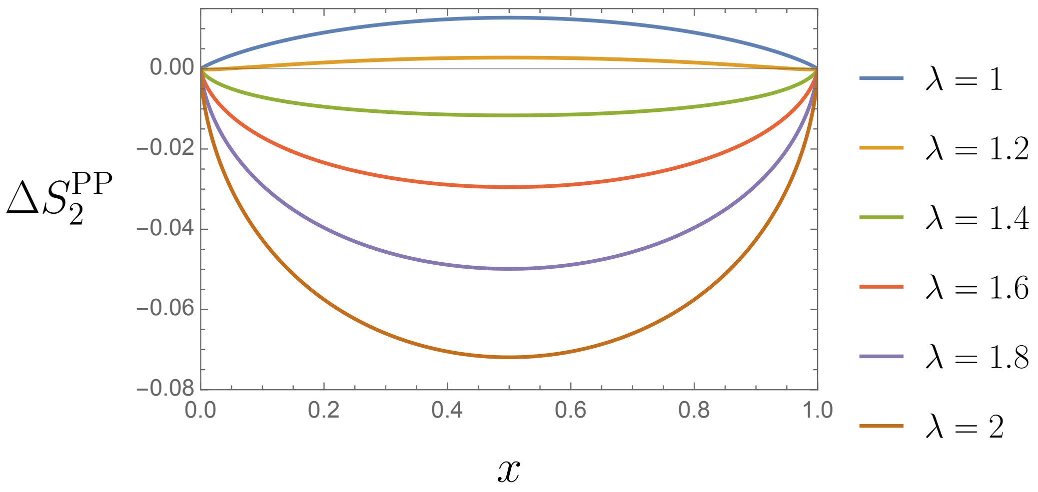
$$\Delta S_2(x) = S_2(V,\lambda) - S_2(V,0)$$

ERE

Small λ



Large λ



Single interval, CFT [Holzhey et al 1994]

$$S_n = \frac{c}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{v-u}{\epsilon}\right)$$

c : central charge,
ϵ : UV cutoff

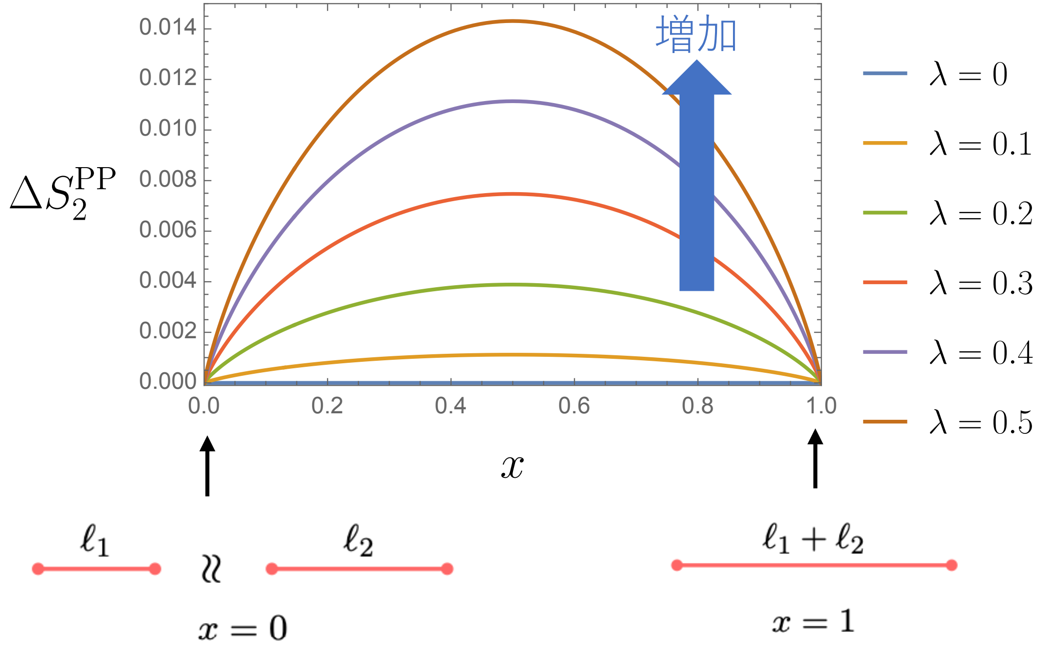
⇒ 既存の結果とconsistentな振る舞い

3. Rényiエントロピー(ERE)のインターバル依存性

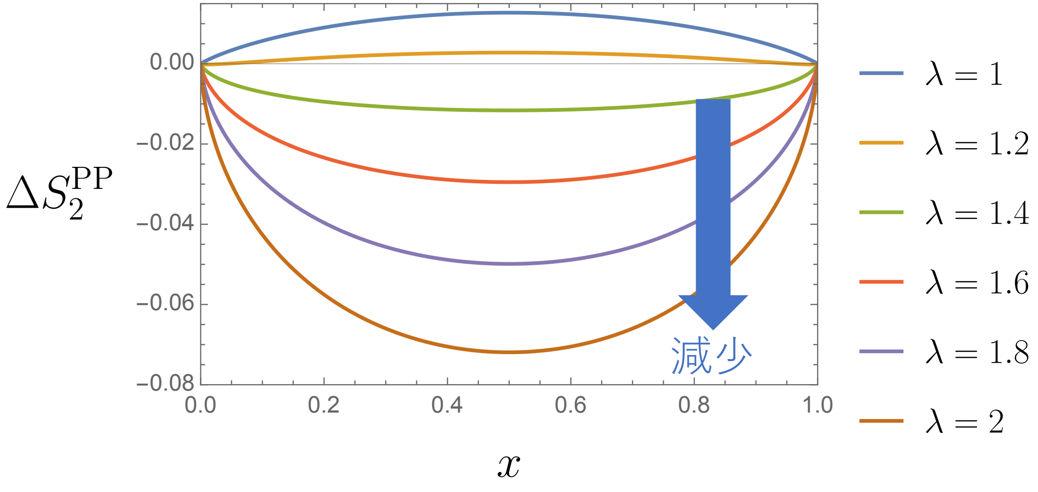
$$\Delta S_2(x) = S_2(V,\lambda) - S_2(V,0)$$

ERE

Small λ



Large λ



Single interval, CFT [Holzhey et al 1994]

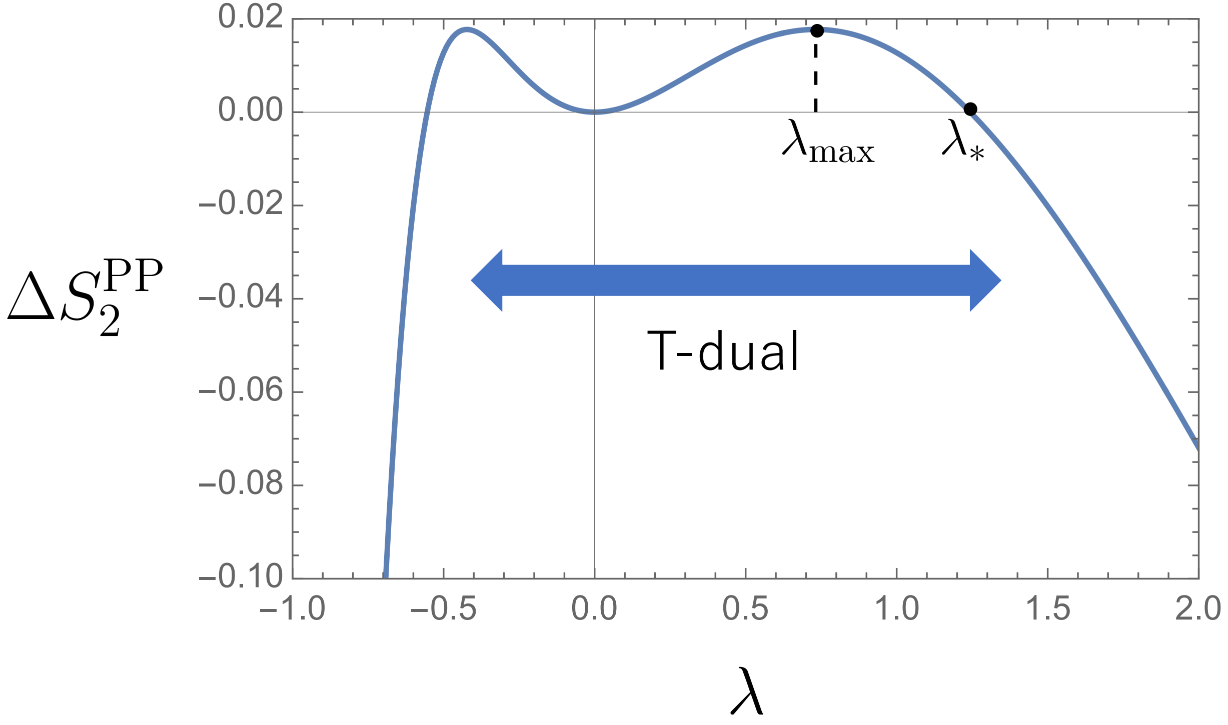
$$S_n = \frac{c}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{v-u}{\epsilon}\right)$$

c : central charge,
ϵ : UV cutoff

既存の結果とconsistentな振る舞い

3. Rényiエントロピー(ERE)の結合定数依存性

ERE at $x = \frac{1}{2}$



Compact bosonのT-duality：

$$R \to \frac{2}{R}$$

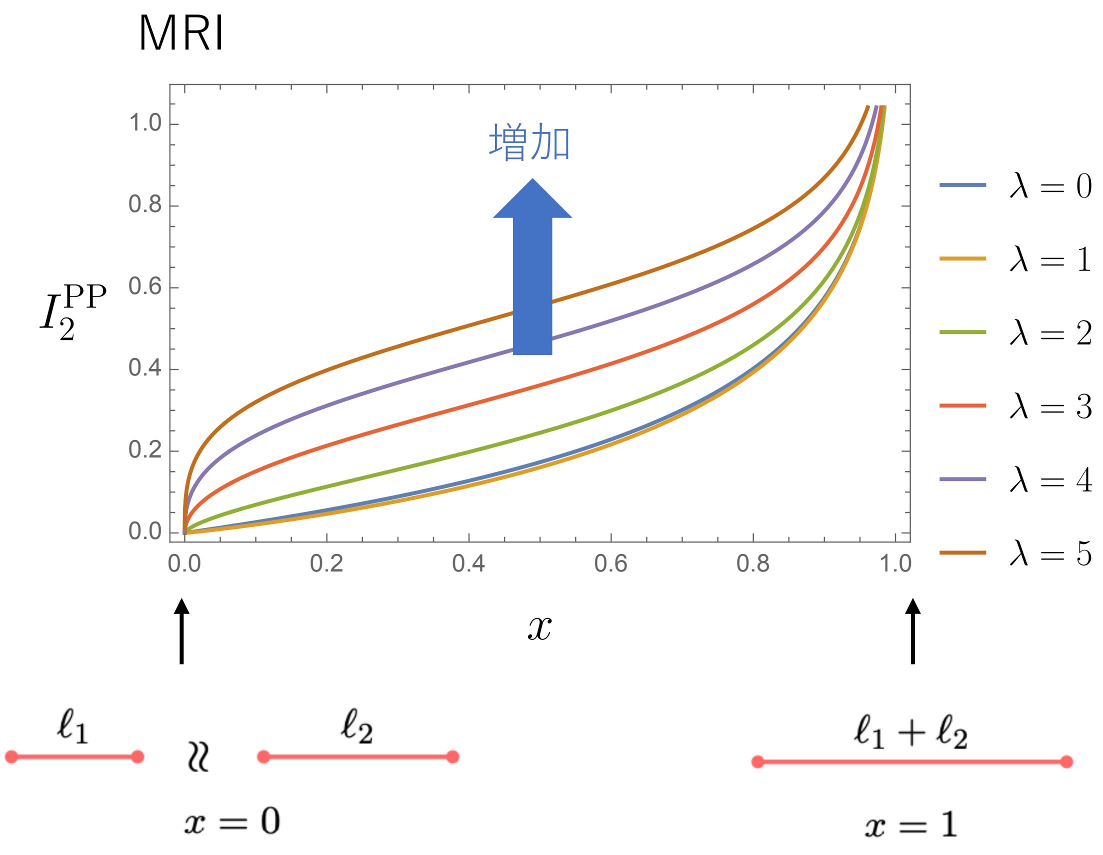
$$\lambda \to \lambda_{\mathrm{dual}} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

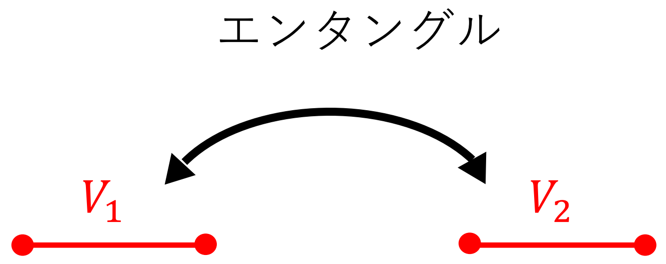
$\lambda > 0$と$\lambda < 0$は互いに対応している

結合定数λが十分大きいとEREは減少する

3. 相互Rényi情報量(MRI)のインターバル依存性

$$\text{MRI}：I_n(V_1, V_2) = S_n(V_1) + S_n(V_2) - S_n(V_1 \cup V_2)$$





- $x \sim 0, \quad x \sim 1$：reasonableな振る舞い
- 相互作用が大きくなるとMRIが増加
- $I_2(V_1, V_2) > 0$

（参考）

$$I(V_1, V_2) = S(V_1) + S(V_2) - S(V_1 \cup V_2)$$
$$> 0$$

4. まとめと展望

4. まとめと展望

まとめ

- 我々はReplica法とboson-fermion双対性を用いて相互作用のある系でのRényiエントロピー(ERE)と相互Rényi情報量(MRI)を厳密に計算した。
- 計算結果は既存の結果とconsistentであった。
- 相互作用が十分大きい場合、EREは減少し、MRIは増加することを示した。

展望

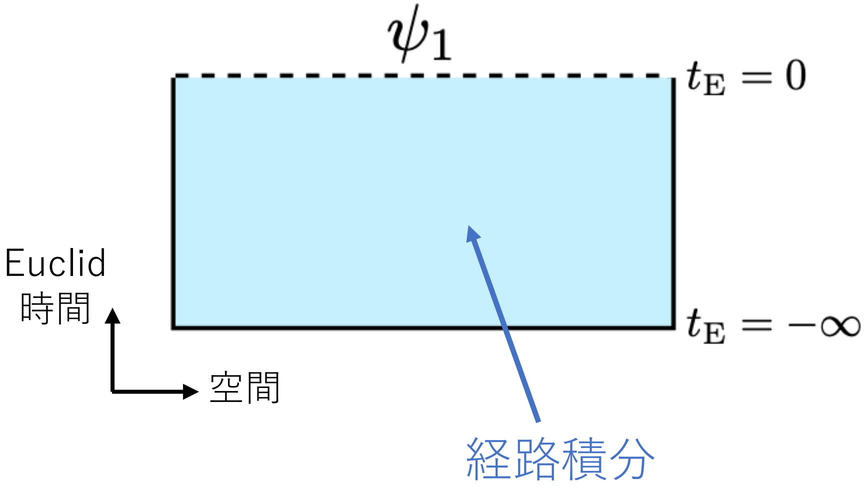
- 3-intervals、3-sheets以上のEREとMRI
- Massive Thirring model
- 他の量子情報量 ➡ 現在研究中

Thank you.

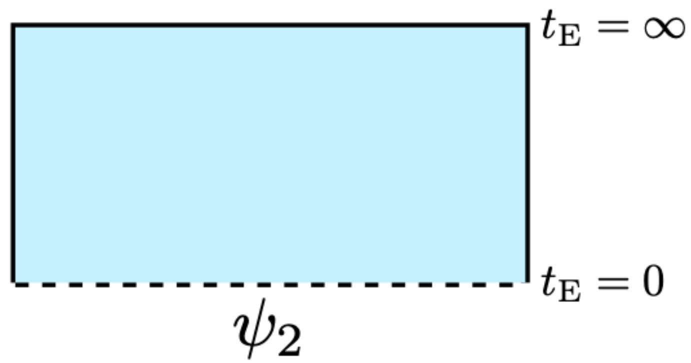
Appendix : Replica法の詳細

Euclidean経路積分を考える。

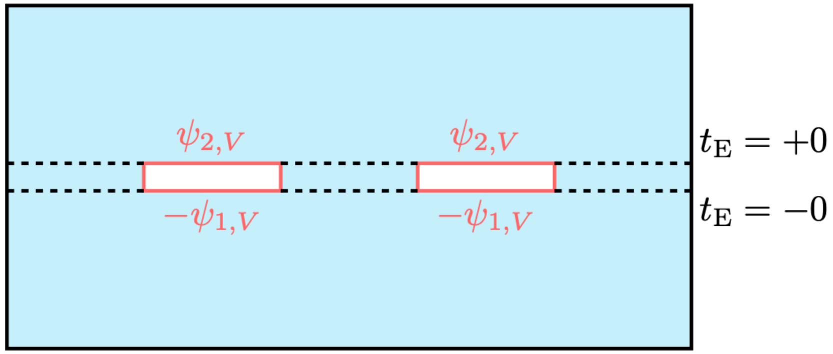
$$\langle\psi_1|0\rangle =$$



$$\langle 0|\psi_2\rangle =$$



$$\rho_V(\psi_1,\psi_2) = \mathrm{Tr}_{\overline{V}}[\langle\psi_1|0\rangle\langle 0|\psi_2\rangle] =$$



Appendix : Fermionizationの辞書

$$\boxed{Z_X^F[\rho]} = \frac{1}{2^g} \sum_{t \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)} \boxed{Z_X^B[t]} \exp\left(i\pi\left[Arf[t \cdot \rho] + Arf[\rho]\right]\right)$$

fermion

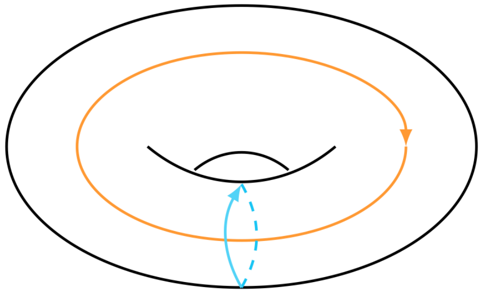
boson

トポロジカル項

X：扱っている時空　　ρ：スピン構造

g： Xのgenusの数　　t： $\mathbb{Z}_2$ゲージ場

今回の場合：$g = 1$



$$\boxed{Z_{\mathbf{T}}^F} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(Z_{\mathbf{T}}^B[00] + Z_{\mathbf{T}}^B[01] + Z_{\mathbf{T}}^B[10] - Z_{\mathbf{T}}^B[11]\right)}_{\text{自由場}}$$

相互作用あり

➡解析しやすい

Compact boson

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
S^1[R] \arrow[r, "\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}", "\text{Orbifold}"'] \arrow[d, "\text{Fermionize by } \mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}"] & \dfrac{S^1[R]}{\mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}}} = S^1\left[\dfrac{R}{2}\right] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{T-duality}"] \arrow[d, "\text{Fermionize by } \mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}'}"] & S^1\left[\dfrac{4}{R}\right] \arrow[d, "\text{Fermionize by } \mathbb{Z}_2^{\mathcal{B}''}"'] \\
\mathcal{F}[\lambda] \arrow[r, leftrightarrow, "Arf[\rho]"] \arrow[rr, leftrightarrow, bend right, "Arf[\rho]"'] & \mathcal{F}'[\lambda] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{等価}"] & \mathcal{F}[\tilde{\lambda}]
\end{tikzcd}$$

Thirring model

dual coupling : $\tilde{\lambda} = -\dfrac{\lambda}{1 + \lambda/\pi}$

Appendix：相互Rényi情報量(MRI)の結合定数依存性

MRI：$I_n(V_1, V_2) = S_n(V_1) + S_n(V_2) - S_n(V_1 \cup V_2)$