

双対性

JOI春合宿 2018
岩田 陽一 (NII)

自己紹介

- 東大情報科学科→情報理工(2016年3月博士卒)
- 国立情報学研究所 助教
- 離散アルゴリズムの研究をしている

競プロ: ◎wata

Twitter: @wata_orz



3回優勝
(2013,2015,2016)



世界1位 (2010)
世界2位 (2011)



世界3位 (2009)



(最適化問題の)双対性とは？

(強)双対性

- 「○○の最小値 = □□の最大値」という形の定理
効率的に解ける様々な組合せ最適化問題の背後に
隠れている
- 「○○を最小化せよ」という問題を直接解く代わりに、
□□を最大化すれば良い
→解ける問題の範囲が広がる
- ○○と□□の解のペアで値が等しいものを手に入れ
たら、それぞれ最小値・最大値であると確信出来る
→アルゴリズムを考える・正しさの証明に便利

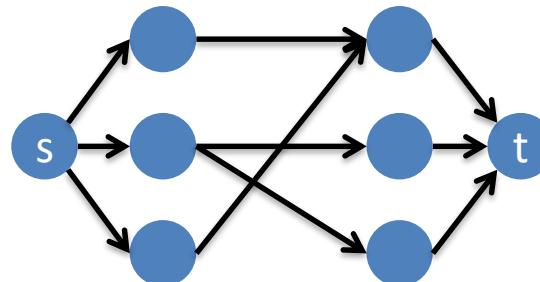
最適化問題

$$\min_{x \in P} f(x)$$

P の範囲で $f(x)$ を最小化せよ

例：最小 $s-t$ カット問題

最小何本の辺を取り除けば $s-t$ パスが無くなるか？



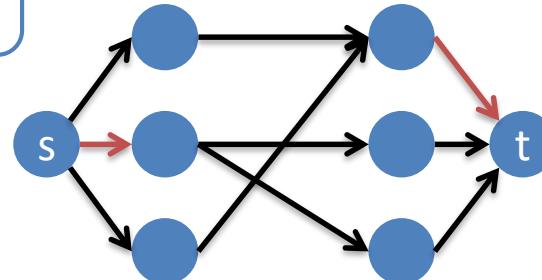
判定問題

$\min_{x \in P} f(x) \leq k?$
 $f(x) \leq k$ となる $x \in P$ があるか

Yes の場合には簡単に検証可能な「証明」が存在
(x を実際に与えれば良い)

⇒ NP (Non-deterministic Polynomial time)と言う

2本は可能？



はい。この2本を取り除けば良いです。

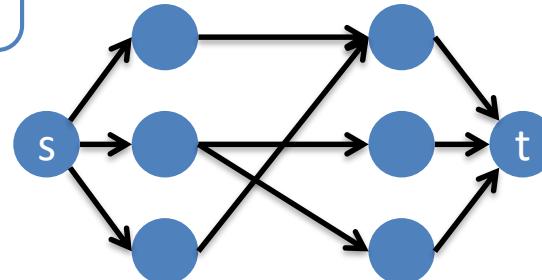


補問題

$\min_{x \in P} f(x) \leq k?$
 $f(x) \leq k$ となる $x \in P$ があるか

No の場合に簡単に検証可能な「証明」は存在?
⇒ 存在するような問題は co-NP と言う

1本は不可能？

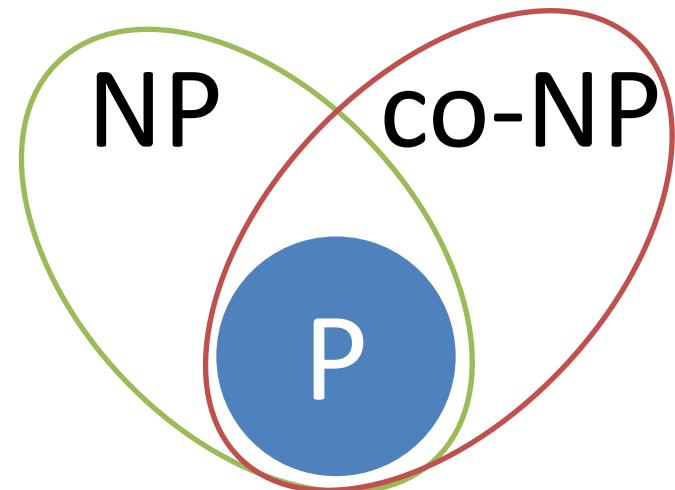


多分出来ないと思う
けど…



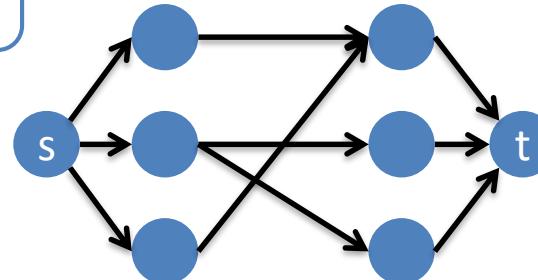
$P \subseteq NP \cap co\text{-}NP$

多項式時間で解ける(P)ならば
アルゴリズムの実行 자체が効率
的に検証可能な証明といえる。



Noを示すもっと簡単な証明はないだろうか？

1本は不可能？



最小値を計算したら
2だったので無理です



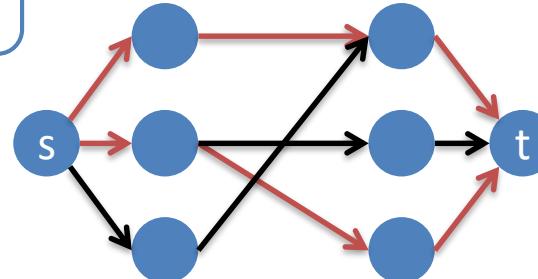
最大流=最小カット

最大 $s-t$ フロー問題

最大何個の辺を共有しない $s-t$ パスを選べるか？

任意の $s-t$ フロー $F = \{P_1, \dots, P_f\}$ と $s-t$ カット C に対し、
 $|F| \leq |C|$ が成り立つ。 $(\because E(P_i) \cap C \neq \emptyset)$
実は、 $\max |F| = \min |C|$ が成り立つ。

1本は不可能？



この2本のパスがあるので無理です。



双対問題

$$\min_{x \in P} f(x)$$

P の範囲で $f(x)$ を最小化せよ

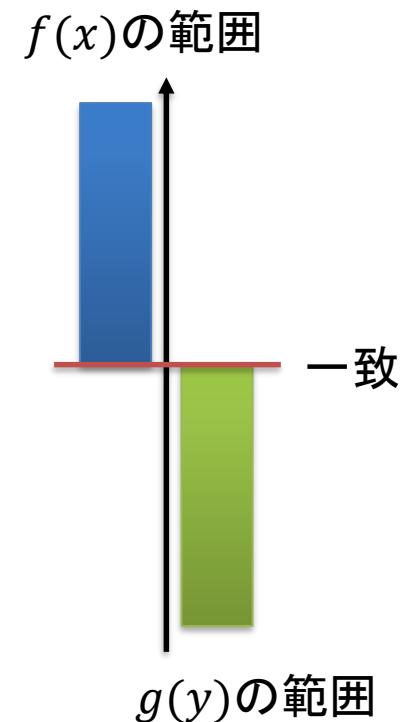


$$\max_{y \in Q} g(y)$$

Q の範囲で $g(y)$ を最大化せよ

$$\min_{x \in P} f(x) = \max_{y \in Q} g(y)$$

となるように Q, g を設計出来れば、 y を与えることで No
が証明可能！



よくあるパターン

(強) 双対定理

$$\min_{x \in P} f(x) = \max_{y \in Q} g(y)$$

1. $f(x) \geq g(y)$ ($\forall x \in P, \forall y \in Q$) が簡単に示せる
 2. アルゴリズムの停止時に $f(x) = g(y)$ となる $x \in P$ と $y \in Q$ が得られることが示せる
- 強双対定理とアルゴリズムの正当性が導かれる

扱う内容

1. 双対LP
2. 最短路・負閉路
3. 最小費用流
4. ラグランジュ双対

- ✓ 最小費用流などのアルゴリズムの解説はしない
- ✓ 双対を考えることでどんな問題が解けるようになるのかの解説がメイン

更に勉強したい人向け参考書

- ネットワークフロー入門(JOI 2014-2015 春合宿)
 - ✓ 保坂和宏、http://hos.ac/slides/20150319_flow.pdf
 - 最大流・最小費用流の入門に
- プログラミングコンテストチャレンジブック
 - ✓ 秋葉拓哉、岩田陽一、北川宜稔
 - 競プロ向け最大流・最小費用流の基礎と応用例
- 離散凸解析と最適化アルゴリズム
 - ✓ 室田一雄、塩浦昭義
 - 最適化アルゴリズムを離散凸という観点から一般化
- Graphs, Networks and Algorithms
 - ✓ D. Jungnickel
 - フローの色々なアルゴリズムが載ってる
- Combinatorial Optimization
 - ✓ A. Schrijver
 - 3部からなる超大作(オススメ)

双对LP

線形計画問題(LP: Linear Programming)

- 目的関数と制約が全て一次式な連続最適化問題
 - ✓ 整数性条件は無し
 - ✓ 多項式時間で解ける

maximize $x_1 + 2x_2$

subject to $x_1 + x_2 \leq 4$

$-2x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\text{Max} = \frac{22}{3}$$
$$x = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3} \right)$$



本当に最大？

解の上界を示す

$$\text{maximize} \quad x_1 + 2x_2$$

$$\text{subject to} \quad x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$(1) + (2) + 2(3): x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2(1): \quad x_1 + 2x_2 \leq 2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$\frac{5}{3}(1) + \frac{1}{3}(2): \quad x_1 + 2x_2 \leq \frac{22}{3}$$

$\frac{22}{3}$ より大は無理



解の上界を示す

$$\text{maximize} \quad x_1 + 2x_2$$

$$\text{subject to} \quad x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

より一般に、(1)を y_1 倍、(2)を y_2 倍、(3)を y_3 倍して足すと、

$$(y_1 - 2y_2 + y_3)x_1 + (y_1 + y_2)x_2 \leq 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

解の上界を示す

$$\text{maximize} \quad x_1 + 2x_2$$

$$\text{subject to} \quad x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

より一般に、(1)を y_1 倍、(2)を y_2 倍、(3)を y_3 倍して足すと、

$$(y_1 - 2y_2 + y_3)x_1 + (y_1 + y_2)x_2 \leq 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

目的関数: $1x_1 + 2x_2$ 2つの \geq が成り立てば、右辺が最大値の上界

双対LP

出来るだけ良い上界を示す問題もLPとなる。

主問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (\times y_1) \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (\times y_2) \\ & x_1 \leq 3 \quad (\times y_3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

双対

双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ \text{subject to} & y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

双対LP

出来るだけ良い上界を示す問題もLPとなる。

主問題

双対

双対問題

双対

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (\times y_1) \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (\times y_2) \\ & x_1 \leq 3 \quad (\times y_3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ \text{subject to} & y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1 \quad (\times x_1) \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \quad (\times x_2) \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

もう一回双対を取ると元に戻る。

強双対性

標準形

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && cx \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

$$= \begin{aligned} & \text{minimize} && by \\ & \text{subject to} && A^T y \geq c \\ & && y \geq 0 \end{aligned}$$

- 双対LPの意味(制約の線形和で出来るだけ良い上界・下界を示す)さえ理解すれば簡単に双対が取れるので標準形を暗記する必要はない。
- 双対LPの作り方から \leq は明らかだが、実は常に等号が成立する(**強双対性**)
 - ✓ もしくは $(\infty, \text{解なし})$ 、 $(\text{解なし}, -\infty)$
 - ✓ ただし、等号が成立する整数解があるとは限らない

他の標準形

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & cx \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

$$= \begin{array}{ll}\text{minimize} & by \\ \text{subject to} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0\end{array}$$

(標準形を暗記するより意味を理解しよう)

→: 等号なので、負の係数をかけて足しても良い

✓ $ax \leq b$ を -1 倍したら $-ax \geq -b$ で不等号が逆に

←: 非負制約がないので、係数は一致させないとダメ

✓ $y \geq 0$ ならば、 $b' \leq b$ から $b'y \leq by$ が言える

LP双対ゲーの解き方

二通りの方針

1. とりあえずLPで書いてみてから双対を取り、知ってる問題じゃないか考える
 - ✓ ダメなLPを書くとうまくいかないので結構試行錯誤が必要
2. 双対問題の形を予め覚えておいて、その形になるよう定式化
 - ✓ 多くの場合こっちの方が簡単

例題: Min-Max (出典: POJ Monthly)

<http://poj.org/problem?id=2595>

n (≤ 50000) 次元の非負実数ベクトル (μ_1, \dots, μ_n) があり、 $\sum_i \mu_i = 1$ を満たしている。2つのベクトル p, q と実数 C が与えられる。 $\sum_i p_i \mu_i = C$ であるとき、 $\sum_i q_i \mu_i$ の取りうる値の最小値・最大値を求めよ。

例題: Min-Max (出典: POJ Monthly)

最小値を求める問題をLPで書くと、

$$\min_{\mu} \sum_i q_i \mu_i$$

$$\sum_i \mu_i = 1$$

$$\sum_i p_i \mu_i = C$$

$$\mu_i \geq 0$$

双対LPを作つてみると、

例題: Min-Max (出典: POJ Monthly)

最小値を求める問題をLPで書くと、

$$\min_{\mu} \sum_i q_i \mu_i$$

$$\sum_i \mu_i = 1 \quad (\times x)$$

$$\sum_i p_i \mu_i = C \quad (\times y)$$

$$\mu_i \geq 0$$

双対LPを作つてみると、

$$\max_{x,y} x + Cy$$

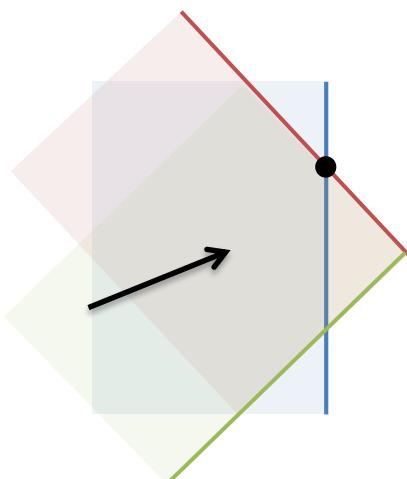
$$x + p_i y \leq q_i \quad (\times \mu_i)$$

例題: Min-Max (出典: POJ Monthly)

$$\max_{x,y} x + Cy$$

$$x + p_i y \leq q_i$$

これは、二次元の多角形内部で、 $(1, C)$ 方向に一番遠い点を求める問題。多角形を $O(n \log n)$ で構築して端点を全て調べれば良い。



実は定数次元のLPは線形時間で解けることが知られている。
(Seidel's LP algorithm など)

まとめ

- 双対LPを構築出来るようになろう
 - ✓ 制約式の線形和で出来るだけ良い上界(下界)を作る、ということだけ覚えておけば自然に作れる
- LPでは強双対性が成り立ち、双対LPを解くことで元のLPも解ける
 - ✓ ただし、整数解で成り立つとは限らないので注意
- LPで書ける問題は、そのままだと解き方が分からなくとも、双対を取ってみると知ってる問題になるかも

最短路・負閉路

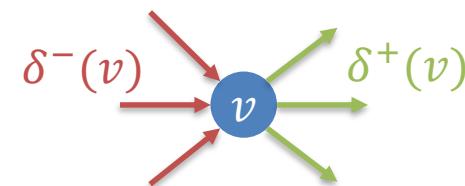
| s - t 最短路問題をLPで書いてみる

辺 e を通る回数を表す変数 f_e

w_e := 辺 e の長さ

$\delta^+(v) := v$ から出る辺集合、 $\delta^-(v) := v$ へ入る辺集合

$f(F) := \sum_{e \in F} f_e$



minimize $\sum_{e \in E} w_e f_e$

subject to $f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = \begin{cases} -1 & (v = s) \\ 1 & (v = t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

$$f_e \geq 0 \ (\forall e \in E)$$

(注意: 負の閉路があると最小値は $-\infty$ になる)

双対LP

$$\text{minimize}_f \quad \sum_{e \in E} w_e f_e$$

$$\text{s.t.} \quad f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = \begin{cases} -1 & (v = s) \\ 1 & (v = t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (\times p_s) \quad (\times p_t) \quad (\times p_v)$$
$$f_e \geq 0$$

|| ただし、整数解で一致するとは
まだ言っていない

$$\text{maximize}_p \quad p_t - p_s$$

$$\text{s.t.} \quad p_v - p_u \leq w_{uv} \quad (\times f_{uv})$$

目的関数・制約ともに「二変数の差」の形
二変数の差が現れたら双対ゲーを疑おう！

距離関数

$$\text{maximize}_p \ p_t - p_s$$

$$\text{s.t.} \quad p_v - p_u \leq w_{uv} \text{ for } \forall uv \in E$$

s から v への最短距離を p_v とすると、

1. $p_t - p_s = s-t$ 最短路の長さ
2. $\forall uv \in E$ に対して、 $p_v \leq p_u + w_{uv}$

が成り立つので、 p は双対LPの最適解である。つまり、

- 最短路アルゴリズムで双対LPが解ける。
- w が整数なら整数解が求まる。

ただし、負閉路がある場合に注意

負閉路検出

負閉路にそって f_e を増やすことで、主問題の解は幾らでも小さくなるので、双対問題は解なしとなる。つまり、

$$p_v - p_u \leq w_{uv} \text{ for } \forall uv \in E$$

を満たす p が存在する \Leftrightarrow 負閉路が存在しない。
そのような p は「ポテンシャル」と呼ばれる。

- ✓ 最適化の場合も、通常の最短路アルゴリズムだと s から到達不能な負閉路を見逃すので注意が必要。
- ✓ Bellman-Fordで $d_s = 0, d_v = D$ (十分大きな値)から開始すれば良い。

解ける問題

$$\text{maximize}_p \ p_t - p_s$$

$$\text{s.t.} \quad p_v - p_u \leq w_{uv} \text{ for } \forall uv \in E$$

- 目的関数が $p_t - p_s$ の形
 - ✓ s から t への最短距離を求める
- 制約が全て $p_v - p_u \leq w_{uv}$ の形
 - ✓ u から v へ長さ w_{uv} の辺を張る
 - ✓ $w_{uv} \leq p_v - p_u$ の形も $p_u - p_v \leq -w_{uv}$ と書けるので v から u へ長さ $-w_{uv}$ の辺を張れば良い

Bellman-Fordの更新式を思い出せばグラフは自然に作れる

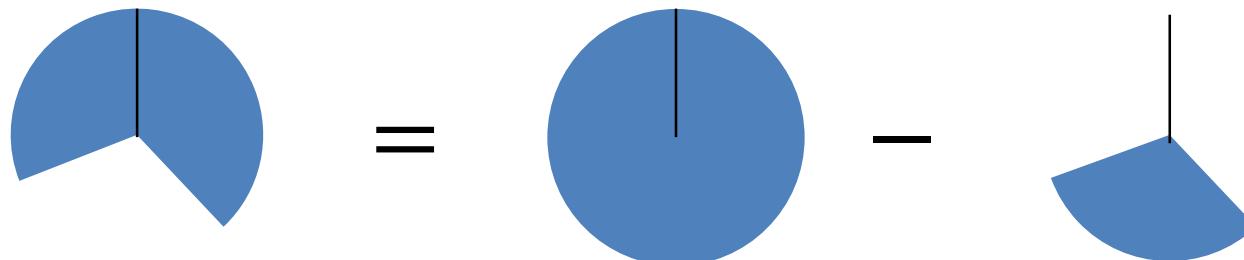
$d_v \leftarrow \min(d_v, d_u + w_{uv})$ だから停止時に $d_v \leq d_u + w_{uv}$ が成立

「二変数の差」を作る頻出テク

1. 絶対値上限制約: $|p_u - p_v| \leq w_{uv}$
 - ✓ $-w_{uv} \leq p_u - p_v \leq w_{uv}$
2. 一変数制約: $p_i \leq w_i$
 - ✓ 新しい変数 p_0 を導入し、全ての変数 p_j を $p_j - p_0$ で置き換えると、 $p_i - p_0 \leq w_i$ となる
 - ✓ 既存の二変数制約 $p_j - p_i \leq w_{ij}$ は変化しない
3. 二部グラフ
 - ✓ $x_i + y_j$ 型のときは、全ての y の符号を反転させることで、 $x_i - y_j$ 型になる
 - ✓ グリッドグラフとかで頻出

「二変数の差」を作る頻出テク

4. 区間の和: $x_i + x_{i+1} + \cdots + x_j \leq w_{ij}$
 - ✓ $p_i - p_0 := x_1 + \cdots + x_i$ とおくと、 $p_j - p_{i-1} \leq w_{ij}$
5. 円形区間和: $x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n + x_1 + \cdots + x_j$
 - ✓ 総和 $S := x_1 + \cdots + x_n$ を全通り試す・二分探索などにより固定し、制約 $x_1 + \cdots + x_n = S$ を追加
 - ✓ $S - (x_{j+1} + \cdots + x_{i-1})$ と通常の区間和になる
(S は変数でなく定数なことに注意)



例題: Asteroids2 (出典: UTPC 2013)

https://utpc2013.contest.atcoder.jp/tasks/utpc2013_08

N 次元ベクトル p, q と $N \times N$ 行列 A, B が与えられるので

$$0 \leq u_i \leq p_i \quad (i \in [N])$$

$$0 \leq v_j \leq q_j \quad (j \in [N])$$

$$A_{ij} \leq u_i + v_j \leq B_{ij} \quad (i, j \in [N])$$

を満たす整数ベクトル u, v が存在するか判定せよ。

	1	2
3	∞	3
	$-\infty$	2
4	1	7
	1	5

→ No

例題: Asteroids2 (出典: UTPC 2013)

新たに変数 s を導入し、 $u_i \rightarrow u_i - s, v_i \rightarrow s - v_i$ と置き直すと、

$$0 \leq u_i - s \leq p_i \quad (i \in [N])$$

$$0 \leq s - v_j \leq q_j \quad (j \in [N])$$

$$A_{ij} \leq u_i - v_j \leq B_{ij} \quad (i, j \in [N])$$

全て差の形になつたので負閉路検出して終了

例題: Cashier Employment (出典: Tehran 2000)

<http://poj.org/problem?id=1275>

24時間営業のスーパーが店員を募集している。 i 時から $i + 8$ 時までの8時間働く(日を跨ぐ可能性あり)ことを希望する応募者が c_i 人居る。 i 時から $i + 1$ 時の間は少なくとも r_i 人の店員が必要である。最小何人の店員を雇えばよいか？

i 時から $i + 8$ 時希望の応募者から x_i 人を雇うとすると、 $\sum_{j=0}^7 x_{(i-j) \bmod 24} \geq r_i$ が満たされる必要がある。

- ✓ 円形区間和

例題: Cashier Employment (出典: Tehran 2000)

雇う人数の最小値を二分探索で求めよう。

$p_i - p_0 := x_0 + \cdots + x_{i-1}$ とすると、 k 人で可能かは以下のLPで判定できる。

$$p_{24} - p_0 = k$$

$$0 \leq p_{i+1} - p_i \leq c_i \quad (i = 0, \dots, 23)$$

$$p_{i+1} - p_{i-7} \geq r_i \quad (i = 7, \dots, 23)$$

$$k - (p_{17+i} - p_{i+1}) \geq r_i \quad (i = 0, \dots, 6)$$

全て差の形になつたので負閉路検出して終了

類題: YamanoteLine (SRM553Hard)

円形区間和の上限・下限制約で総和の取りうる値の総数を求める

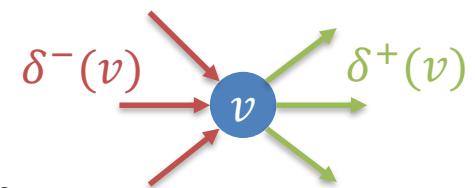
まとめ

- 目的関数・制約が全て「二変数の差」($x - y$) の形
 - ⇒ 最短路・負閉路検出の双対
 - ✓ 辺の向きに迷ったらBellmanFordの更新式を思い出そう
- 「二変数の差」を作る頻出テクを覚えておこう

最小費用流

フロー

各辺 e に容量 $c_e (\geq 0)$ のある有向グラフと供給需要関数 $b: V \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、以下を満たす $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を「許容フロー」という。



$$f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = -b_v$$

$$0 \leq f_e \leq c_e \quad (\forall e \in E)$$

$b_v > 0$ な点では
 b_v 湧き出る



e を通して最大 c_e まで流せる



$b_v = 0$ な点では
入る量=出る量



$b_v < 0$ な点では
 $-b_v$ 消費する



最小費用流問題

最小重みの許容フローを求める問題

- ✓ 最短路($b_s = 1, b_t = -1, b_v = 0$)の自然な拡張

$$\text{minimize}_f \quad \sum_{e \in E} w_e f_e$$

$$\text{subject to} \quad f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = -b_v$$

$$0 \leq f_e \leq c_e \quad (\forall e \in E)$$

多項式時間で解ける

- ✓ アルゴリズムの解説は省略
- ✓ 他の資料で勉強してね

双対LP

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_f && \sum_{e \in E} w_e f_e \\ \text{s.t.} & && f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) = -b_v \ (\times p_v) \\ & && 0 \leq f_e \leq c_e \quad (\times z_e) \end{aligned}$$

||

$$\begin{aligned} & \text{maximize}_{p,z} && -\sum_v b_v p_v - \sum_e c_e z_e \\ \text{s.t.} & && p_v - p_u - z_{uv} \leq w_{uv} \quad (\times f_{uv}) \\ & && z_e \geq 0 \end{aligned}$$

w が整数なら、 p も整数最適解が存在

✓ 最短路反復法で使うポテンシャル p が実は双対最適解

もう少し整理

$$\text{maximize}_{p,z} \quad -\sum_v b_v p_v - \sum_e c_e z_e$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & p_v - p_u - z_{uv} \leq w_{uv} \\ & z_e \geq 0 \end{aligned}$$

↓
-1倍

$$\text{minimize}_{p,z} \quad \sum_v b_v p_v + \sum_e c_e z_e$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & p_v - p_u - z_{uv} \leq w_{uv} \\ & z_e \geq 0 \end{aligned}$$

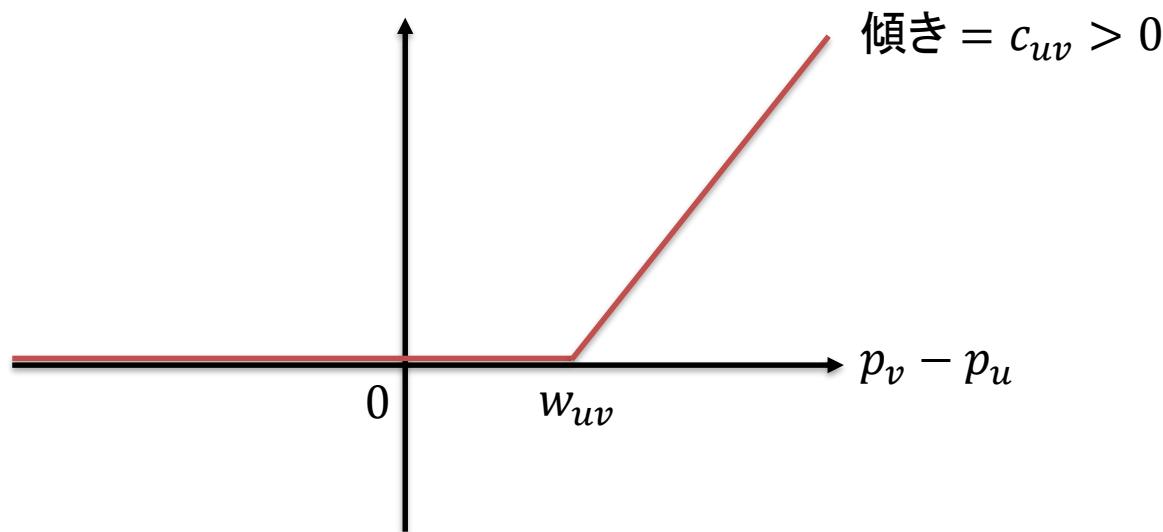
|| z_{uv} の値は p_u, p_v から定まる

$$\text{minimize}_p \quad \sum_v b_v p_v + \sum_{uv} c_{uv} \max(0, p_v - p_u - w_{uv})$$

解ける問題

$$\text{minimize}_p \quad \sum_v b_v p_v + \sum_{uv} c_{uv} \max(0, p_v - p_u - w_{uv})$$

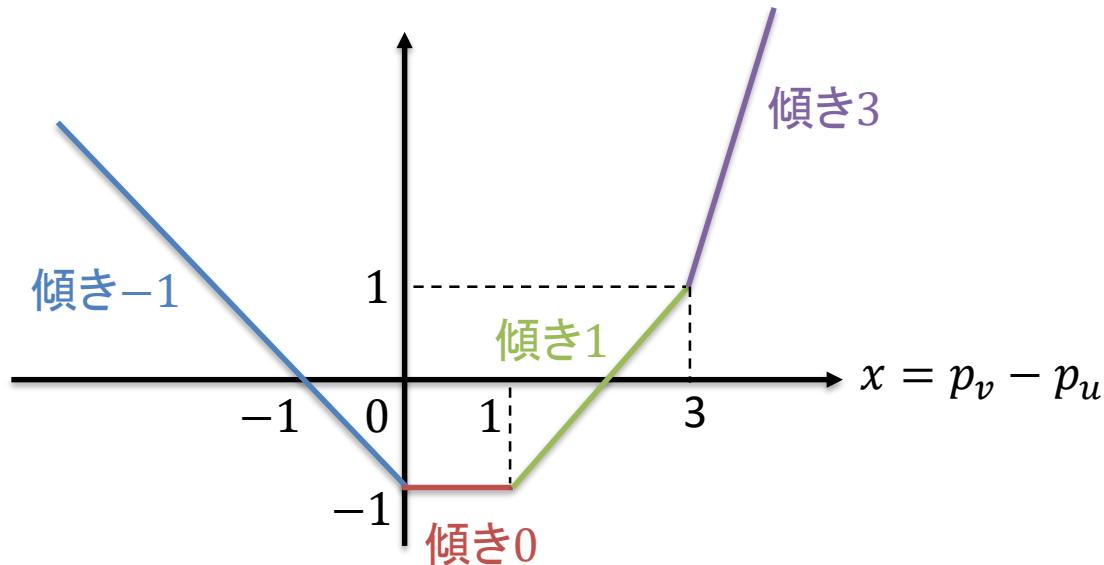
➤ 線形関数と $\max(0, \text{二変数の差} - \text{定数})$ の和



解ける問題

実は任意の下に凸な折れ線が表現可能

- ✓ 傾き負と正に分け、傾きの変化を係数とすれば良い



$$-1 + \max(0, -x) + \max(0, x - 1) + 2 \max(0, x - 3)$$

解ける問題

$$\text{minimize}_p \quad \sum_v b_v p_v + \sum_{uv} c_{uv} \max(0, p_v - p_u - w_{uv})$$

「二変数の差に関する下に凸な折れ線」の和
の最小化は最小費用流で解ける。

- ✓ 折れ線を分解して上の形にしてからグラフを構築すれば良い
- ✓ $\sum_v b_v = 0$ なことを考えると、 $\sum_v b_v p_v$ の部分もこの形
- ✓ 最短路のときの「二変数の差」を作る頻出テクがこっちでも役に立つ
- ✓ 途中で-1倍したので、最小値 = -最小費用流なことに注意

例題: How to Create a Good Game (出典: JAG Summer 2010)

<http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/description.jsp?id=2230>

$N(\leq 100)$ 点 $M(\leq 1000)$ 辺のDAGが与えられる。点0から点 $N - 1$ へのLongest Pathの長さを変えないように、出来るだけ辺の重みを増やしたい。増やす重みの和の最大値を求めよ。

Longest Pathの長さを D 、辺 e の重みを w_e 、増やす量を a_e とすると、

$$\max_{a \geq 0} \sum_e a_e$$

s.t. Longest Pathの長さが D

例題: How to Create a Good Game (出典: JAG Summer 2010)

最短路の双対から、Longest Pathの長さが D 以下
 \Leftrightarrow 以下のを満たす p が存在。

$$\begin{aligned} p_{N-1} - p_0 &\leq D \\ p_v - p_u &\geq w_{uv} + a_{uv} \end{aligned}$$

よって、解きたい問題は

$$\begin{aligned} \max_{a,p} \sum_e a_e \\ p_{N-1} - p_0 &\leq D \\ p_v - p_u &\geq w_{uv} + a_{uv} \\ a_e &\geq 0 \end{aligned}$$

例題: How to Create a Good Game (出典: JAG Summer 2010)

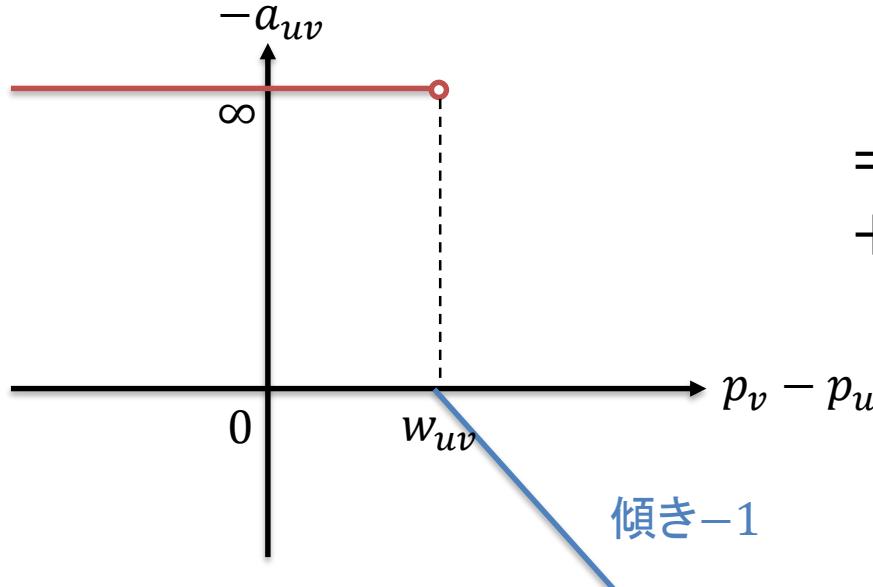
-1倍して

$$\min_{a,p} \sum -a_e$$

$$p_{N-1} - p_0 \leq D$$

$$p_v - p_u \geq w_{uv} + a_{uv}$$

$$a_e \geq 0$$



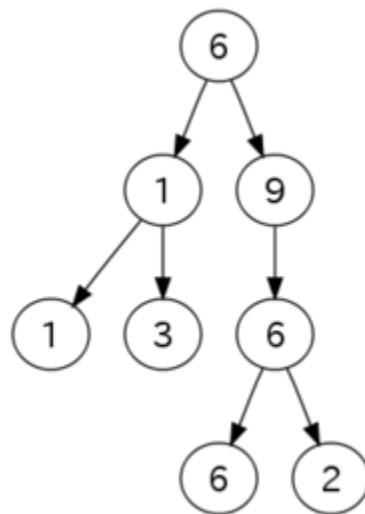
$$= \infty \max(0, p_u - p_v + w_{uv}) \\ + p_u - p_v + w_{uv}$$

下に凸なので分解して最小費用流で終了

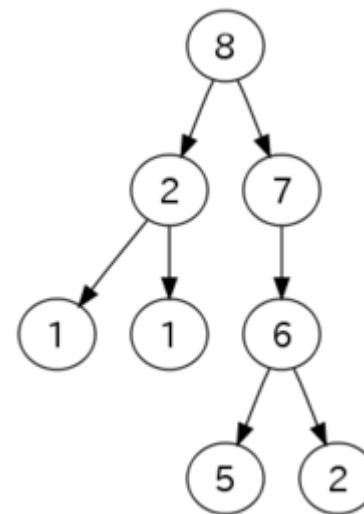
例題: じょうしうツリー (出典: UTPC 2012)

https://utpc2012.contest.atcoder.jp/tasks/utpc2012_12

各頂点 v が値 c_v を持つ $N(\leq 10^5)$ 点の根付き木が与えられる。コストを1払うことで一つの頂点の値を ± 1 変更できる。各点 u とその子供 v について、 $c_u > c_v$ が成り立つように変更する最小コストを求めよ。



コスト8
→



例題: じょうしょうツリー (出典: UTPC 2012)

簡単な変形で、 $c_u > c_v$ ではなく $c_u \geq c_v$ を目指す問題に出来る。

$p_v :=$ 変更後の v の値、とすると

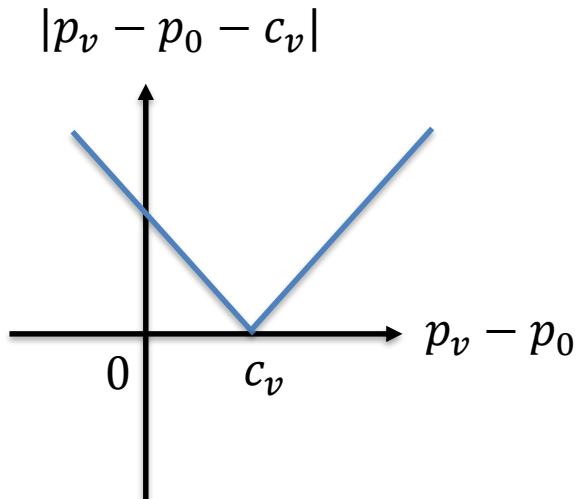
$$\min_p \sum_v |p_v - c_v|$$

$$\text{s.t. } p_u \geq p_v$$

$|p_v - c_v|$ が一変数なので $p_v \rightarrow p_v - p_0$ と置き直すと

$$\min_p \sum_v |p_v - p_0 - c_v|$$

$$\text{s.t. } p_u \geq p_v$$



下に凸なので分解して最小費用流で終了

...と言いたいところだがNが大きいのでTLE

例題: ジョウショウツリー (出典: UTPC 2012)

$$\min_p \sum_v |p_v - p_0 - c_v|$$

$$\text{s.t. } p_u \geq p_v$$

分解すると、

$$\min_p \quad \sum_v \max(0, p_v - p_0 - c_v)$$

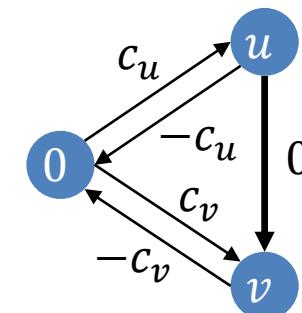
0からvへ容量1重み c_v

$$+ \sum_v \max(0, p_0 - p_v + c_v)$$

vから0へ容量1重み $-c_v$

$$+ \sum_{uv} \infty \max(0, p_v - p_u)$$

uからvへ容量∞重み0



例題: じょうしうツリー (出典: UTPC 2012)

需要供給無しなので、負閉路を詰め込む問題。

グラフの形から全ての負閉路は $0 \rightarrow u \rightarrow (\text{子供}) \rightarrow \dots \rightarrow v \rightarrow 0$ という形をしており、葉から根に向かって以下の貪欲法で解ける。

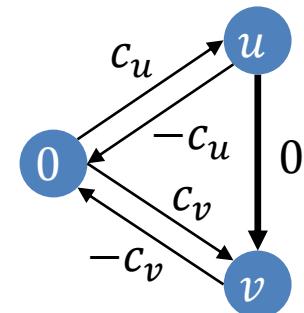
$u \dots v0$ というパスでまだ使えるものの長さをヒープで管理する。

u を以下のようにして処理する

1. 子供のヒープを全てマージ
2. ヒープにパス $u0$ の長さ $-c_u$ を突っ込む
3. $c_u + (\text{ヒープの最小値}) < 0$ ならばヒープからpopして貪欲に使う

データ構造をマージする一般的テクで $O(n \log^2 n)$

マージ可能ヒープを用いると $O(n \log n)$

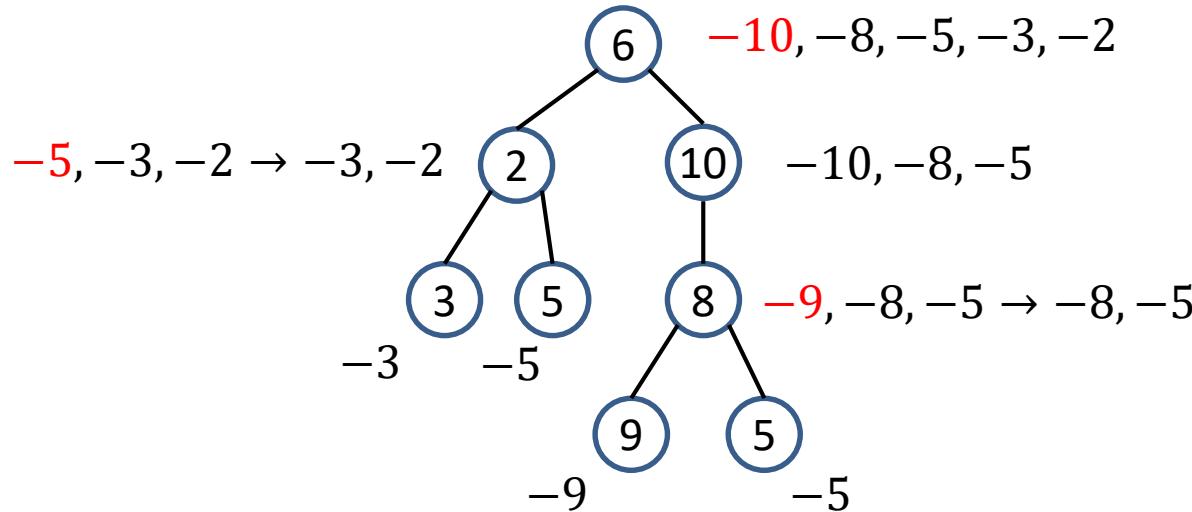


例題: ジョウショウツリー (出典: UTPC 2012)

$u \dots v_0$ というパスでまだ使えるものの長さをヒープで管理する。

u を以下のようにして処理する

1. 子供のヒープを全てマージ
2. ヒープにパス u_0 の長さ $-c_u$ を突っ込む
3. $c_u + (\text{ヒープの最小値}) < 0$ ならばヒープからpopして貪欲に使う



$$\text{答え: } (9 - 8) + (5 - 2) + (10 - 6) = 8$$

例題: じょうしうツリー (出典: UTPC 2012)

貪欲の証明:

$D_u := u$ 以下の頂点集合(u を含む)とすると、 u を処理し終えた段階で $G[\{0\} \cup D_u]$ の最小費用流が求まっていることを示す。

$G[\{0\} \cup D_u \setminus \{u\}]$ の最小費用流は、グラフの形から各子供 v について $G[\{0\} \cup D_v]$ の最小費用流の和と等しい。

u を追加することで生じる新たな閉路は $0u \dots v0$ という形のものだけであり、 $0u$ の容量が 1 であることから、この中で最小のものを 1 つ選べば最小費用流になる。

類題: 花火 (第二回ドワンゴからの挑戦状予選)
Farm Village (JAG Asia 2017)
特殊なグラフの最小費用流

まとめ

- 「二変数の差に関する下に凸な折れ線」の和の最小化
⇒ 最小費用流の双対
- 下に凸な折れ線を分解して下の形にすればよい

$$\text{minimize}_p \quad \sum_v b_v p_v + \sum_{uv} c_{uv} \max(0, p_v - p_u - w_{uv})$$

- ✓ $b_v := \text{供給} - \text{需要}$
- ✓ $u \rightarrow v$ へ重み w_{uv} 、容量 c_{uv} の辺
- ✓ w_{uv} は負になる場合あり

- 特殊なグラフのフローは速く解ける可能性あり

ラグランジュ双対

ラグランジュ緩和

$$\max_{x \in P} f(x) \text{ s.t. } g(x) = 0$$

$g(x) = 0$ の制約がなければ
解けるんだけど…



ラグランジュ緩和

邪魔な制約を「ペナルティ」として目的関数に移動させよう。(この操作をラグランジュ緩和という)

任意の λ (ラグランジュ乗数という) に対して次の不等式が成り立つ。

$$\max_{x \in P} f(x) \text{ s.t. } g(x) = 0$$

|| $\because g(x) = 0$ なら $\lambda g(x) = 0$

$$\max_{x \in P} f(x) - \lambda g(x) \text{ s.t. } g(x) = 0$$

これなら
解ける！

| \wedge \because 制約が減った

$$\max_{x \in P} f(x) - \lambda g(x)$$



ラグランジュ双対

出来るだけ良い上界を求める問題を考えよう。

(この問題を**ラグランジュ双対**という)

$$\max_{x \in P} f(x) \text{ s.t. } g(x) = 0$$

|Λ

$$\min_{\lambda} \max_{x \in P} f(x) - \lambda g(x)$$

$L(\lambda) := \max_{x \in P} f(x) - \lambda g(x)$ とすると、 $L(\lambda)$ は下に凸となるので、(三分探索などで)最小化出来る。

$$\begin{aligned} L(\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2) &= f(x^*) - (\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2)g(x^*) \\ &= \alpha(f(x^*) - \lambda_1 g(x^*)) + (1 - \alpha)(f(x^*) - \lambda_2 g(x^*)) \\ &\leq \alpha L(\lambda_1) + (1 - \alpha)L(\lambda_2) \end{aligned}$$

強双対性

$$\max_{x \in P} f(x) \text{ s.t. } g(x) = 0$$

|| ?

$$\min_{\lambda} \max_{x \in P} f(x) - \lambda g(x)$$

一般には成り立たない
が、LPでは成り立つ

$f(x) - \lambda g(x)$ を最大化する x の集合を $X(\lambda)$ と定義する。もし、 $x \in X(\lambda)$ であって、 $g(x) = 0$ となるものが存在すれば、等号が成立する。 λ を小さくすれば $g(x)$ は大きくなり、大きくすれば $g(x)$ は小さくなるので、二分探索すればちょうど 0 になるものが見つかり元の問題が解けるのでは？

- ✓ 等号が成立しても全ての $x \in X(\lambda)$ で $g(x) = 0$ となるとは限らないので、実際に x を構築する方法は少し考えないといけない
- ✓ 最適値を求めるだけなら二分探索して終了

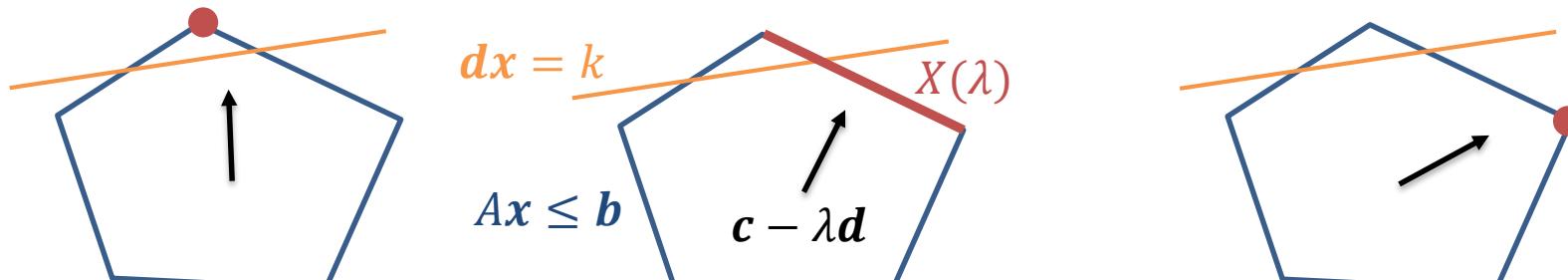
強双対性(LPの場合)

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \quad \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} = k \end{aligned}$$

$$= \min_{\lambda} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} - \lambda(\boldsymbol{d}\boldsymbol{x} - k) \\ \text{s.t. } A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ の多面体中で、 $(\boldsymbol{c} - \lambda\boldsymbol{d})$ 方向に一番遠い点を求める問題。

λ を動かすと、 $X(\lambda)$ の範囲も連続的に動くので、ちょうど $\boldsymbol{d}\boldsymbol{x} = k$ となる点が存在する。



整数解に限定したら飛び越すかも

■ $g(x) \leq 0$ の場合

$$\max_{x \in P} f(x) \text{ s.t. } g(x) \leq 0$$

| \wedge $\because g(x) \leq 0, \lambda \geq 0$ なら $-\lambda g(x) \geq 0$

$$\min_{\lambda \geq 0} \max_{x \in P} f(x) - \lambda g(x)$$

LPの場合は等号成立

複数個邪魔な場合

$$\max_{x \in P} f(x) \text{ s.t. } g_i(x) = 0 \ (i \in [n])$$

| \wedge

$$\min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \max_{x \in P} f(x) - \sum_i \lambda_i g_i(x)$$

LPの場合は等号成立

双対LPとの関係

全部の制約をラグランジュ緩和すれば双対LPになる。

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}\mathbf{x} \text{ s.t. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

||

$$\min_{\mathbf{y} \geq 0} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}\mathbf{x} - \mathbf{y}^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \text{ s.t. } \mathbf{x} \geq 0$$

||

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{b}\mathbf{y} \text{ s.t. } A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$$

x_i の係数は $c_i - A_{*i}\mathbf{y}$ ($A_{*i} := A$ の*i*列ベクトル)

もし、ある*i*で $c_i - A_{*i}\mathbf{y} > 0$ なら、 $\max_x \dots = \infty$

逆に、全ての*i*で $c_i - A_{*i}\mathbf{y} \leq 0$ なら、 $\max_x \dots = \mathbf{b}\mathbf{y}$

双対LPとの関係

LPのラグランジュ双対は「双対LPを作る途中段階」だと思うと、双対変数とラグランジュ乗数が同じものであることがわかる。

- ✓ $ax \leq b$ に対応する双対変数が最適双対解で取る値と $ax \leq b$ を消すラグランジュ双対の最適解でラグランジュ乗数が取る値は同じ
- ✓ 特に、双対LPが整数解を持つLPに対してラグランジュ双対を作れば、ラグランジュ乗数の最適値も整数になる

ラグランジュゲーの解き方

タイプ1: 解ける問題 + 邪魔な制約

⇒ ラグランジュ緩和で制約を消し、二分探索などで双対問題を解く

タイプ2: $\min \max \sim$ という形の最適化問題(ゲームとか)

⇒ ラグランジュ双対問題だとみなして元の $\max \sim$ の形に戻して解く

- ✓ 等号が成り立つことを確認しよう(特に整数解が必要な場合)

例題: Min-Max (出典: POJ Monthly) の別解

<http://poj.org/problem?id=2595>

n (≤ 50000) 次元の非負実数ベクトル (μ_1, \dots, μ_n) があり、 $\sum_i \mu_i = 1$ を満たしている。2つのベクトル p, q と実数 C が与えられる。 $\sum_i p_i \mu_i = C$ であるとき、 $\sum_i q_i \mu_i$ の取りうる値の最小値・最大値を求めよ。

$$\begin{aligned} & \min_{\mu} \sum_i q_i \mu_i \\ & \sum_i \mu_i = 1 \\ & \sum_i p_i \mu_i = C \\ & \mu_i \geq 0 \end{aligned}$$

←この制約がなければ非常に簡単
(一番小さい q_i に対して $\mu_i = 1$ とすればよい)

例題: Min-Max (出典: POJ Monthly) の別解

ラグランジュ双対を取ると、

$$\max_{\lambda} \min_{\mu} \sum_i q_i \mu_i + \lambda (\sum_i p_i \mu_i - C)$$

$$\begin{aligned}\sum_i \mu_i &= 1 \\ \mu_i &\geq 0\end{aligned}$$

- $(q_i + \lambda p_i)$ が一番小さい i に対して、 $\mu_i = 1$ とすれば内側の最小化可能。
- $p_i - C$ の符号で二分探索すれば外側の最大化が出来る。

双対LPで幾何の問題にするより、かなり簡単！

例題: Skyland (出典: JAG Spring 2012)

<http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/description.jsp?id=2396>

n (≤ 100) 個の浮遊島がある。各島の高度は0以上の任意の実数値に設定できる。 i 番目の島を高度 h_i にするにはコストが $d_i h_i$ かかる。島 i と島 j の高度差が x あるとコストが $c_{ij}x$ かかる。高度の合計を H 以上にする最小コストを求めよ。(本来はそのような h を求める問題)

$$\begin{aligned} \min_h & \sum_i d_i h_i + \sum_{ij} c_{ij} |h_i - h_j| \\ & \sum_i h_i \geq H \\ & h_i \geq 0 \end{aligned}$$

←この制約がなければ
双対最小費用流の形

例題: Skyland (出典: JAG Spring 2012)

ラグランジュ双対を取ると、

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_h \sum_i d_i h_i + \sum_{ij} c_{ij} |h_i - h_j| - \lambda (\sum_i h_i - H)$$
$$h_i \geq 0$$

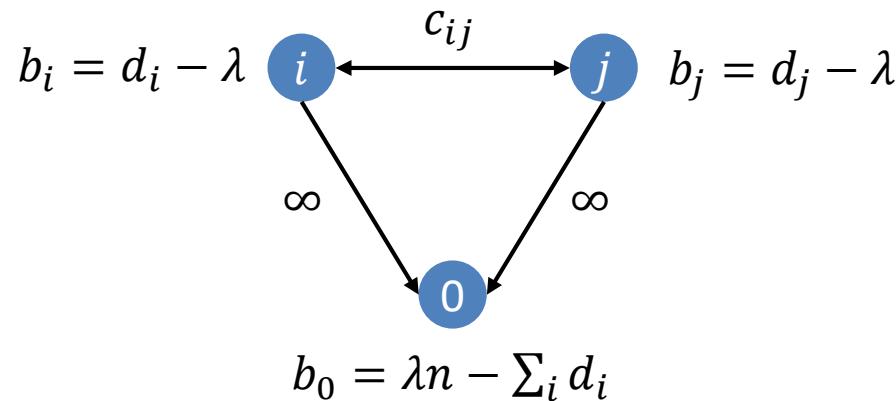
- 双対最小費用流で内側の最小化が可能
 - ✓ よく眺めると全ての重みが0なので、供給需要を満たすフローがあるか判定問題→最大流
- 許容フローがあるかどうかで二分探索すれば外側の最大化が可能
- 解の構築はこの方針だともう少し考察が必要

解の構築方法(プロ向け補足)

解の構築がしたい場合は？

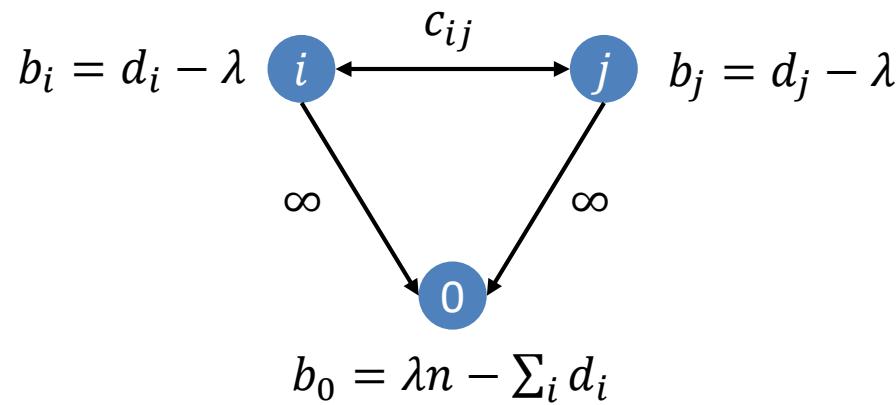
重み0の最小費用流の双対なので、単純には $h = 0$ が解として求まってしまい、 $\sum_i h_i = H$ とならないので、別の最適解を構築する必要がある。

$h_i \rightarrow h_i - h_0$ と置き換えてグラフを作つてみると、



解の構築方法(プロ向け補足)

最適な λ における許容フロー f を固定する。相補性定理から、 h が最適解 $\Leftrightarrow f$ の残余グラフにおける全ての容量正の辺 uv で $h_v \leq h_u$ 。もし0から全ての点が到達可能なら、 λ を ϵ 増やしても許容フローが存在するので矛盾。到達出来ない点集合 S に対して $v \in S$ で $h_v = H/|S|$ すれば良い。(このような最適解が存在することに先に気づけば二分探索 + 最小カットで直接解ける)



例題: Longest Shortest Path (出典: JAG Asia 2015)

<http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/description.jsp?id=2736>

$N(\leq 200)$ 点 $M(\leq 2000)$ 辺の重み付き有向グラフが与えられる。各辺 e について、コスト $x \cdot c_e$ (非負実数) 支払うことで重みを w_e から $w_e + x$ に増加させることが出来る。予算 P の範囲内で $s-t$ 最短路の長さを最大化せよ。

$$\max_x (\text{重み } w + x \text{ での } s-t \text{ 距離})$$

$$\sum_e c_e x_e \leq P$$

$$x_e \geq 0$$

例題: Longest Shortest Path (出典: JAG Asia 2015)

ラグランジュ双対を取ると、

$$\min_{\lambda \geq 0} \max_x (w + x \text{での } s-t \text{ 距離}) - \lambda (\sum_e c_e x_e - P)$$
$$x_e \geq 0$$

|| $s-t$ 最短路の双対

$$\min_{\lambda \geq 0} \max_{x,p} p_t - p_s - \lambda (\sum_e c_e x_e - P)$$
$$p_v - p_u \leq w_{uv} + x_{uv}$$
$$x_e \geq 0$$

- 双対最小費用流で内側の最大化が可能
- $\sum_e c_e x_e - P$ の符号で二分探索すれば外側の最小化が可能

例題: Longest Shortest Path (出典: JAG Asia 2015)

入力が小さいのでこのままでも解けるが、もう少し高速化が可能。 $\lambda \rightarrow 1/F$ と置き換えると、

$$\begin{aligned} & \min_{F>0} \max_{x,p} (F p_t - F p_s - \sum_e c_e x_e + P) / F \\ & \quad p_v - p_u \leq w_{uv} + x_{uv} \\ & \quad x_e \geq 0 \end{aligned}$$

これは(流量 F の最小費用流 + P)/ F を最小化する問題
⇒ F を1ずつ増やしていくことで解ける

例題: きたまさの逆襲 (出典: UTPC 2012)

https://utpc2012.contest.atcoder.jp/tasks/utpc2012_10

重み付き二部グラフ $G = (U, V)$ がある。秋葉さんは大きさ $|V|$ のマッチングで出来るだけ重みの小さいものが欲しい。きたまささんは重みを操作することで秋葉さんの妨害をしたい。 U の分割 $U = U_1 \cup \dots \cup U_d$ があり、コスト b_i を支払うことで U_i に接続する全ての辺の重みを 1 増えせる(複数回増やしても良い)。(秋葉さんのマッチングの重み) - (きたまささんのコスト) を最大化せよ。

$$\max_{\lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0} \min_f \sum_i \sum_{u \in U_i} \sum_v (w_{uv} + \lambda_i) f_{uv} - \sum_i b_i \lambda_i$$

f : 大きさ $|V|$ のマッチング

例題: きたまさの逆襲 (出典: UTPC 2012)

ラグランジュ双対をとった形だと思うと、

$$\max_{\lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0} \min_f \sum_e w_e f_e + \sum_i (\sum_{u \in U_i} \sum_v f_{uv} - b_i) \lambda_i$$

f : 大きさ $|V|$ のマッチング

||

$$\min_f \sum_e w_e f_e$$

f : 大きさ $|V|$ のマッチング

$$\sum_{u \in U_i} \sum_v f_{uv} \leq b_i$$

例題: きたまさの逆襲 (出典: UTPC 2012)

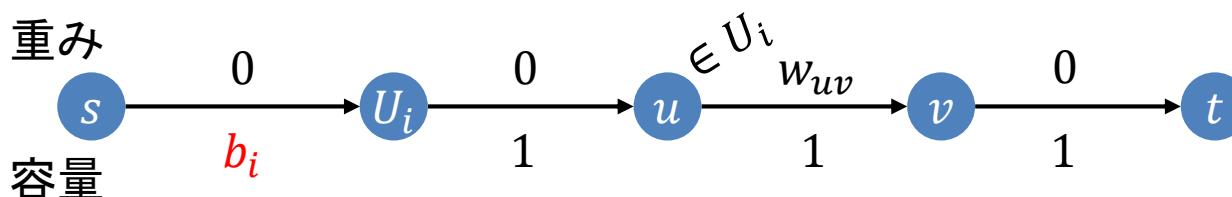
$$\min_f \sum_e w_e f_e$$

f : 大きさ $|V|$ のマッチング

$$\sum_{u \in U_i} \sum_v f_{uv} \leq b_i$$

U_i から出る流量
の和が b_i 以下

これは(双対でなく普通の)最小費用流

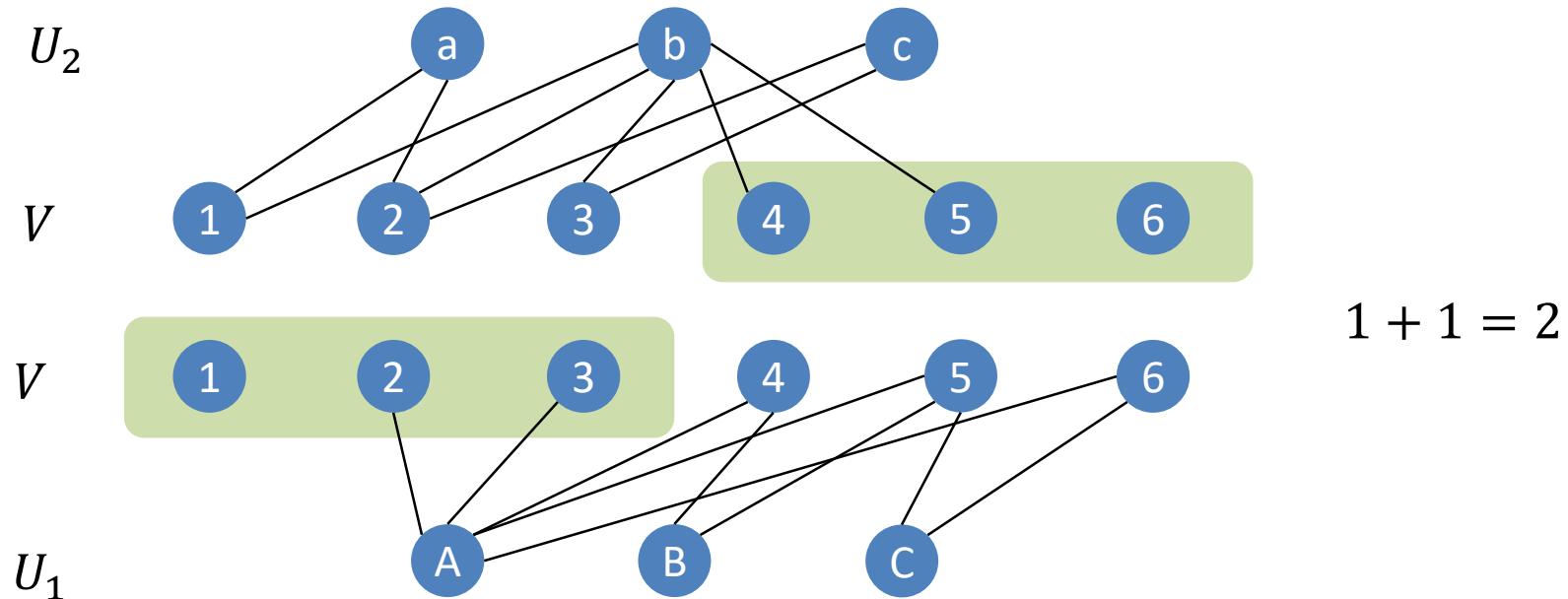


この容量制約の双対変数が λ_i
よって整数解が存在

例題: Homework (ICPC Asia 2017)

<http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/description.jsp?id=1385>

(意訳) 2つの二部グラフ $G_1 = (U_1 \cup V, E_1)$ と $G_2 = (U_2 \cup V, E_2)$ が与えられる。 $V = V_1 \cup V_2$ と分割し、 (U_1, V_1) と (U_2, V_2) の最大マッチングの和を最小化せよ。



例題: Homework (ICPC Asia 2017)

$f_e := e$ をマッチングに含めるか

$\lambda_v := v$ を V_1 に含めるか

と定義し、 $\min \max \sim$ の形で書くと

$\lambda_v = 0$ なら uv を使っても意味なし

$$\min_{\lambda \in \{0,1\}^V} \max_f \sum_{uv \in E_1} \lambda_v f_{uv} + \sum_{uv \in E_2} (1 - \lambda_v) f_{uv}$$

$f: G_1, G_2$ のマッチング

例題: Homework (ICPC Asia 2017)

$$\min_{\lambda \in \{0,1\}^V} \max_f \sum_{e \in E_2} f_e + \sum_v \lambda_v \left(\sum_{u \in U_1} f_{uv} - \sum_{u \in U_2} f_{uv} \right)$$

$f: G_1, G_2$ のマッチング

|V $\lambda \in \{0,1\}^V$ となる最適解があれば等号成立

$$\max_f \sum_{e \in E_2} f_e$$

$f: G_1, G_2$ のマッチング

$$\sum_{u \in U_1} f_{uv} - \sum_{u \in U_2} f_{uv} = 0 \quad (\forall v \in V)$$

例題: Homework (ICPC Asia 2017)

$$\max_f \sum_{e \in E_2} f_e$$

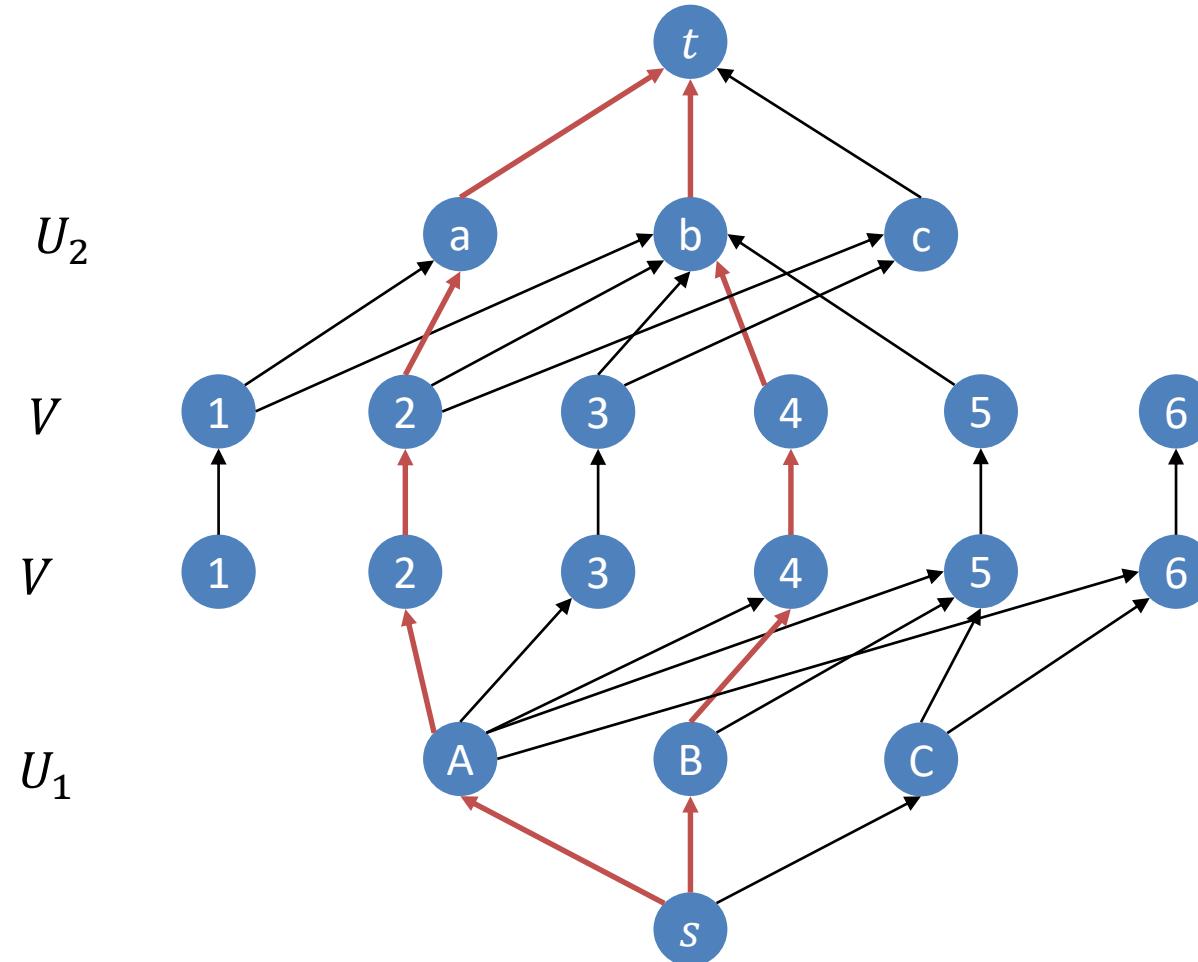
$f: G_1, G_2$ のマッチング

$$\sum_{u \in U_1} f_{uv} - \sum_{u \in U_2} f_{uv} = 0 \quad (\forall v \in V)$$

G_1 で v を使うなら G_2 でも v を使うような最大マッチングを求める、最大流の基礎的な応用問題 (Dining@POJ 3281と同じ問題)

- ✓ 最大流の双対解=最小カットは0,1の値を取るので等号成立
- ✓ 他にも色々な方法で同じ解法に至れる(マトロイド交差の双対など)

例題: Homework (ICPC Asia 2017)



まとめ

解ける問題 + 邪魔な制約

⇒ ラグランジュ双対をとって $g(x)$ の符号で
二分探索しよう

$$\max_{x \in P} f(x) \text{ s.t. } g(x) = 0$$

|
Λ LPでは等号成立

$$\min_{\lambda} \max_{x \in P} f(x) - \lambda g(x)$$

出来るだけ良い
上界を得たい

$\min \max \sim$ 最適化

⇒ ラグランジュ双対とみなして元に戻してみよう

- ✓ 双対LPが最適整数解を持つなら、ラグランジュ乗数も最適整数解を持つ

全体のまとめ

- LP双対
 - ✓ 制約式の線形和で出来るだけ良い上界(下界)を作る
- 最短路・負閉路
 - ✓ 目的関数・制約が「二変数の差」
- 最小費用流
 - ✓ 「二変数の差に関する下に凸な折れ線」の和の最小化
 - ✓ $\text{minimize}_p \quad \sum_v b_v p_v + \sum_{uv} c_{uv} \max(0, p_v - p_u - w_{uv})$
- ラグランジュ双対
 - ✓ LP双対の途中段階とみなせる
 - ✓ 邪魔な制約の除去
 - ✓ $\min \max \sim$ 型最適化