2.【研究計画】※適宜概念図を用いるなどして、わかりやすく記入してください。なお、本項目は1頁に収めてください。様式の変更・追加は不可。

(1) 研究の位置づけ

特別研究員として取り組む研究の位置づけについて、当該分野の状況や課題等の背景、並びに本研究計画の着想に至った経緯も含めて記入してください。

研究テーマはSergei Novikovにより始められたclosed 1-formのゼロ点を調べるモース理論の一般化の理論の拡張である

- モース関数の代わりにclosed 1-formのゼロ点を扱うMorse Novikov理論の境界付き多様体への一般化
- 特異点を持つ空間へのMorse Novikov理論を用いた新しいアプローチ
- フレアーホモロジー等無限次元モース理論においてのNovikov理論のアナロジーとなる汎関数の開発

Morse Novikov理論とは

多様体のトポロジーをモース関数を用いて調べるモース理論は古くからトポロジーにおいて最も重要な理論の一つであり，フレアーホモロジー等への一般化などその影響力は現在においても健在である．Novikov **はゼロ点の近傍でモース関数の外微分と同じ形をしているclosed 1-form(以下Morse 1-formと呼ぶ)のゼロ点を調べること**を提唱した．モース関数 f に対し df のゼロ点と f の臨界点は一致するためNovikovの理論はモース理論の一般化になっている．モース理論との一番の違いはgradient flowの挙動である．このflowの複雑さがより深い結果を導き出す．リーマン計量を通じて1-formとベクトル場のカノニカルな同型が存在するので（関数の勾配の一般化）そのベクトル場に対する負の方向のflowをgradient flowと呼ぶ．モース理論の場合flowに沿って関数の値は単調に減少する．Edward Wittenはモース関数の臨界点を生成元とするチェイン複体で，指数の差が1の臨界点を結ぶflowの本数を微分の係数とするホモロジー理論を構築した．closed 1-formの場合flowの挙動は簡単でなく，ホモロジー理論を作ろうにも臨界点を結ぶflowは無限に存在することがある．flowたちを基本群と整数環の群環を完備化したノビコフ環とよばれる形式的無限和に対応させ数え上げることでこの問題を解決し，Novikov環係数のホモロジー理論が作られた．この手法はゲージ理論，シンプレクティック幾何での無限次元の状況下でflowを数え上げる際の下地になっている．さらに3次元多様体上でCircle Valued Morse関数（$f: M \to S^1$ のモース理論で，$[df] \in H^1(M,\mathbb{Z})$ の時に対応）が作るNovikov複体のReidemeister torsionとゲージ理論のサイバーグウィッテン不変量が等価であるという予想がHutchingsにより提出された．flowに関連する別の話題としてLS categoryの一般化がある．それはコホモロジー $\xi \in H^1(M,\mathbb{R})$ にゼロ以上の数 $cat(M,\xi)$ を定義するものである．古典的なLS categoryの有名な結果に閉多様体上の関数は $cat(M)$ 以上の臨界点を持つという結果があるが，Michael FarberはMorseでなく一般のclosed 1-form ω のゼロ点が $cat(M,[\omega])$ 未満ならば任意のflowはhomoclinic cycleを持つという力学系の非常に興味深い結果を証明した．flowに関する話題以外にも，Morse 1-formが調和形式になる計量が存在する条件や葉層構造の理論への応用などこの理論は非常に広範な話題を持つ．申請者はこれらの結果を境界付き多様体への拡張をするつもりである．flowが境界に対しtransversalな場合の拡張の結果はいくつか存在するが，境界に対しtangentな状況の拡張はほぼ存在しない．境界に対しtangentなモース理論はAkaho manabuやKronheimerがモデルを提示しており，それらはラグランジュ交差の理論やモノポールフレアー理論への応用が見込める．この状況下でMorse Novikov理論を展開しさらに深い結果が得られることを期待する．

着想の経緯

申請者がよく勉強した数学の分野は微分幾何学，モース理論，調和積分論，特性類であり，その流れで指導教官に勧められ修士でMichael FarberのThe topology of closed 1-formを通読した．そしてこの理論はモース不等式，調和積分論，Reidemeister torsion，LS category等の華々しい幾何学の結果たちを精緻な結果で蘇らせ，さらに無限次元モース理論の土台となる意義深い理論であると確信し研究を決意するに至った．

【研究計画】（続き）※適宜概念図を用いるなどして、わかりやすく記入してください。なお、各事項の字数制限はありませんが、全体で２頁に収めてください。様式の変更・追加は不可。

(2) 研究目的・内容等

① 特別研究員として取り組む研究計画における研究目的、研究方法、研究内容について記入してください。
② どのような計画で、何を、どこまで明らかにしようとするのか、具体的に記入してください。
③ 研究の特色・独創的な点（先行研究等との比較、本研究の完成時に予想されるインパクト、将来の見通し等）にも触れて記入してください。
④ 研究計画が所属研究室としての研究活動の一部と位置づけられる場合は申請者が担当する部分を明らかにしてください。
⑤ 研究計画の期間中に受入研究機関と異なる研究機関（外国の研究機関等を含む。）において研究に従事することも計画している場合は、具体的に記入してください。

研究目的

Morse Novikov 理論を閉多様体以外，境界や特異点をもつ多様体や無限次元モース理論に対して拡張し多様体のより精密な不変量を与えたり，多様体上の新たな解析のテクニックを開発することが研究の目的である．

Morse Novikov 理論の適用範囲

Morse novikov 理論について前項ではこの理論を用いた成果について多く挙げたが，研究内容の前にそもそもの理論の始まりや特性について述べたい．Sergei Novikov が始めたこの理論は多価関数に対してのモース関数の一般化が念頭にあった．複素平面上の多価関数は被覆空間を考えることで一価関数にすることができた．closed 1-form もしかるべき被覆空間へ引き戻せば exact form になることから，exact でない closed 1-form を多価関数を外微分したような対象と捉える．複素関数の多価関数は経路が重要であったように，closed 1-form も経路により．これが前述の flow の複雑さの要因である．

研究内容

まずは Morse Novikov 理論を境界付き多様体に拡張したい．境界について flow が transverse な状況についての拡張は [1],[2] が主だった結果である．この [1]，[2] に相当する結果が flow が tangent な状況下でも得られないか考えたい．

[1] では Morse Novikov 理論をを多様体 M と境界上の flow が出ていく集合 B(conley の exit set にあたる) に対し (M, B) の相対ホモロジーの結果に拡張している．一番重要な事実は境界付き多様体においても Novikov 複体が構成されることである．flow が tangent な場合でも同じように Novikov 複体の構成を行いたい．[3] は flow が tangent なモース理論ラグランジュフレアーホモロジーへの応用が示唆されてろり，

[2] では相対ホモロジーのベッチ数を用いたモース不等式を Witten deformation と呼ばれる手法で証明している．Witten deformation とは，モース関数 f を用いて外微分を $e^{-tf}de^{tf}$ に変形しラプラシアンの解をモース関数の臨界点に局所化しモース関数の臨界点とラプラシアンの解を対応付ける手法である．ホッジ理論よりラプラシアンの解はドラームコホモロジーと対応するため Witten deformation により臨界点とベッチ数の対応，つまりモース不等式を解析的に導くことができる．[4] では特異点を持つ空間への Witten deformation の拡張がされているが，この結果をモース関数でなく Morse 1-form を用いた変形への拡張をしたい．さらに特異点が次元を持つ状況，とりわけ結び目補空間へ Witten deformation を適用できるようにするつもりである．Witten deformation の顕著な応用にラプラシアンの固有値のゼータ関数から定義される analytic torsion と Reidmeister torsion が等しくなるという Cheeger-Muller の定理の別証明がある．結び目空間で Novikov 複体の Reidemeister torsion を考える研究は [5]

研究手法

モース理論の核となる手法はモース関数の臨界点の指数と同じ次元のセルを用いたセル分割や臨界点を結ぶ grafient flow からチェイン複体を得る手法である．これらは Morse　Novikov 理論においても似たような結果が存在する．これに加え Witten deformation を主体に境界付き多様体，特異点を持つ多様体への拡張を行いたい．

計画

closed 1-form ω のゼロ点が $cat(M, [\omega])$ 未満なら homoclinic cycle が存在するという Farber の結果を flow が境界に tangent な時に境界付き多様体へ拡張することができた．さらに Novikov 複体を構成すること，Witten deformation による解析学的なモース不等式の証明が修士課程の今から取り組みたい課題であ

る．モース関数を使ったチェイン複体の構成はセル分割を与える方法と grafient flow の本数を数える方法がある．この両アプローチから Novikov 複体を作ることを試みたい．[4] で Witten deformation を特異点を持つ空間へ拡張しているが，この手法を勉強し応用したい．特異点が結び目になっているケース

独創性

flow が tangent な境界付き多様体のモース理論の closed 1-form への一般化へ言及している論文やプレプリントを申請者が調べる限り確認することができなかった．そのためこのテーマはまだ誰にもなされていないと考える．さらに Novikov 複体の torsion と Witten deformation の関連についても調べるということは新しいアイデアであると考えられる．境界付き多様体や結び目についての精緻な不変量や力学系の結果，調和積分論の拡張が得られると期待する．さらにこれらの有限次元の理論への深い洞察がインスタントンフレアーホモロジーなどでの新しい汎関数の発見につながると考えられる．

参考文献

[1] LI, TIEQIANG,TAN, Topology of Closed 1-Forms on Manifolds with Boundary

[2] Maxim Braverman and Valentin Silantyev, Kirwan-Novikov inequalities on a manifold with boundary

[3] Akaho manabu, MORSE HOMOLOGY AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

[4] Ursula Ludwig, An Extension of a Theorem by Cheeger and Müller to Spaces with Isolated Conical Singularities,

[5] Hiroshi GODA ,Andrei V. PAJITNOV， Dynamics of gradient flows in the half-transversal Morse theory

３．人権の保護及び法令等の遵守への対応 ※本項目は１頁に収めてください。様式の変更・追加は不可。

本欄には、「２．研究計画」を遂行するにあたって、相手方の同意・協力を必要とする研究、個人情報の取り扱いの配慮を必要とする研究、生命倫理・安全対策に対する取組を必要とする研究など指針・法令等（国際共同研究を行う国・地域の指針・法令等を含む）に基づく手続が必要な研究が含まれている場合、講じる対策と措置を記入してください。

例えば、個人情報を伴うアンケート調査・インタビュー調査、行動調査（個人履歴・映像を含む）、国内外の文化遺産の調査等、提供を受けた試料の使用、侵襲性を伴う研究、ヒト遺伝子解析研究、遺伝子組換え実験、動物実験など、研究機関内外の情報委員会や倫理委員会等における承認手続が必要となる調査・研究・実験などが対象となりますので手続の状況も具体的に記入してください。

なお、該当しない場合には、その旨記入してください。

手続きが必要な研究は行わない予定である．

４．【研究遂行力の自己分析】※各事項の字数制限はありませんが、全体で２頁に収めてください。様式の変更・追加は不可。

本申請書記載の研究計画を含め、当該分野における⑴「研究に関する自身の強み」及び⑵「今後研究者として更なる発展のため必要と考えている要素」のそれぞれについて、これまで携わった研究活動における経験などを踏まえ、具体的に記入してください。

(1) 研究に関する自身の強み

(2) 今後研究者として更なる発展のため必要と考えている要素

申請者登録名　福士謙二

(研究遂行力の自己分析の続き)

５．【目指す研究者像等】 ※各事項の字数制限はありませんが、全体で１頁に収めてください。様式の変更・追加は不可

日本学術振興会特別研究員制度は、我が国の学術研究の将来を担う創造性に富んだ研究者の養成・確保に資することを目的としています。この目的に鑑み、⑴「目指す研究者像」、⑵「目指す研究者像に向けて特別研究員の採用期間中に行う研究活動の位置づけ」を記入してください。

(1) 目指す研究者像 ※目指す研究者像に向けて身に付けるべき資質も含め記入してください。

申請者は「幾何の発展に貢献し続ける研究者」を目指す．自分が魅入られた数学，特に微分幾何学で最先端の研究を行いたい．それだけでなく常に全力で好奇心を保ち研究生活を駆け抜けたい．申請者はそのような研究者になるために以下の能力を兼ね備えた研究者になりたいと考える．

1. 深掘りする思考力

数学の最大の魅力は理論が抽象化されているが故の適応範囲の広さであると申請者は考える．数学が適応範囲が広い学問であるということは古くから科学の発展に数学が寄与してきたことが示している．抽象化されたインパクトの大きい理論を構築するためには現象の本質を抽出する能力が必要であり，透徹した理論に多く触れることで本質を見通す感覚を養われると申請者は考えている．

2. 問題を解決する能力

本質を抽出する能力が問題の解決の糸口をみつけたりあらたな理論を構築するアイデアを見つけてくれるならば，そのアイデアを遂行する能力も必要である．自身が数学に造詣が深いことや計算力を身に着けることももちろん重要だが，とりわけ他人と協力し問題を解決する能力が求められると申請者は考える．他者とのコミュニケーション能力，プレゼン能力を高め自身が興味深いと感じるアイデアを生き生きと伝えられるようになりたい．

3. 挑み続ける粘り強さ

長い期間全力で数学の研究を続けるためには．数学の技能に加え粘り強さが重要である．数学を好きで居続ける，情熱を燃やし続けることが大切である．チャレンジングな課題を見つけ続け，さまざまな分野の新しい知識に触れそして感動をする経験を多くするべきである．そのため数学の微分幾何学以外はもちろんその他の分野の学習も欠かさず，アンテナを張っておくことが大切と申請者は考えている．

(2) 上記の「目指す研究者像」に向けて、特別研究員の採用期間中に行う研究活動の位置づけ

本研究活動は上の３つの能力を向上してくれると申請者は考えている．以下に理由を述べる．

1. 80 年代に Novikov により生まれた本研究テーマはシンプルな拡張にもかかわらず広域な分野との繋がりがあり，また最先端の理論であるフレアーホモロジーの土台になっている．シンプルで応用が広いこの理論はモース理論の本質に深く迫る理論であり，無限次元のモース理論へのお手本を与えてくれる，数学のその他の分野に対しても見本になるような一般化の例に申請者は思えた．そのような理論に触れることが申請者が求める能力の１つ目を向上させるであろう．

2. 問題を解決する能力を高めるため，研究集会等に参加し個人の数学の技能を磨くことに加え本研究活動の間に得られた結果を積極的に発信していきたいと考えている．学会での発表や国内外の研究者との議論をたくさんこなし数学のアイデアを共有する経験を重ねたい．研究集会を重ね数学の楽しみを共有できる友人を増やすことができれば望外の喜びである．

3. 研究期間中にゲージ理論やシンプレクティック幾何学をはじめとした幅広いセミナーに参加することにより広い知識を獲得し刺激を得たい．またこの研究を通して数学以外の知見を得られる可能性がある．近年パーシステントホモロジーとよばれるトポロジーを用いたデータ解析の手法が工学で活発に研究されている．プロットされたデータの点集合を半径を持たせた円にかえその半径を動かした時の図形のトポロジーの変化からデータの複雑さを図る手法である．この手法はモース理論と深い関係があり，また最近 Morse Novikov 理論との関係も指摘されており，それは本研究テーマの適用範囲がとても広いことを表している．そのため Morse Novikov 理論は数学，物理学やそれ以外の分野との関係が存在し，好奇心を強く満たしてくれるような魅力的な理論である．この研究が幅広い見識を与えてくれ好奇心を刺激してくれることは確実である．