**Primer Examen Parcial del curso Cálculo Multivariable.**
**Prof. Darwin Gutiérrez**

Instrucciones: Resuelva correctamente los siguientes ejercicios justificando todos sus procedimientos y realizando los gráficos necesarios en cada ejercicio, tiene exactamente 1.5 hrs cada ejercicio vale **10/7 puntos.**

Nombre:

1. Sean $\overrightarrow{a} = (4, 5, -2)$, $\overrightarrow{b} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\mathbf{j} \hat{+} 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\overrightarrow{c} = (-3, 1, -2)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Calcular:

    *a)* $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$

    *b)* $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a}$

    *c)* $Proy_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{b}) \times Proy_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a})$

2. Considere una pecera que tiene vértices en el origen, $\overrightarrow{u} = \hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{v} = 10\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{w} = 20\hat{\mathbf{k}}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Dibuje dicha pecera y calcule su área, su volumen y el angulo entre sus aristas que salen del origen.

3. Demuestre que los vectores $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ y $(\overrightarrow{3v} \times \overrightarrow{4u})$ son siempre paralelos y los vectores $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ y $\overrightarrow{5v}$ son siempre perpendiculares para cualquier par de vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$.

4. Considere la recta $L_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-2}{5}$ encuentre una recta $L_2$ que se intersecte a esta en un solo punto y estas sean perpendiculares entre si.

5. Considere el plano $P_1$ que contiene a los vectores $(1, 3, -2), (2, 4, 5), (2, 2, -5)$.Y sea $P_2$ el plano que pasa por el $(3, 2, -1)$ y paralelo al plano $2x - y + z = 3$. Hallar $P_1 \cap P_2$

6. Considere la recta $L$ que pasa por el punto $(5, 1, 5)$ y perpendicular al plano $yz$, y considere el plano con intersección en los ejes dadas por $2\hat{\mathbf{i}}, 3\hat{\mathbf{j}}, 4\hat{\mathbf{k}}$ P. Hallar $P \cap L$.

7. Encuentre le ecuacion del plano que es tangente a la esfera centrada en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y que toca en un solo punto al plano $xy$

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

### PRIMER EXAMEN PARCIAL DE CÁLCULO MULTIVARIABLE

Profesor: LEVARIO MEDINA SERGIO | V1 | Fecha : 23/10/23
Nombre del alumno: | 2AV2 | N.L:

**Instrucciones:**

- Resuelva los siguientes ejercicios. En cada problema, detalle su razonamiento y desarrolle la solución de manera clara y precisa. No amontone sus procedimientos, ni encime cuentas.
- Coloque su nombre en cada una de las hojas a entregar. Así mismo, enumere cada hoja de la forma $i/n$, donde $i = 1, 2, ..., n$ y $n$ es el número total de hojas a entregar. Además, de las hojas que entregue, de dejar espacios en blanco, tachelos con pluma.

**P.1.** Asuma que los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son vectores conocidos. Sea $\overrightarrow{C}$ un vector desconocido tal que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = u$, con $u$ una cantidad conocida y $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{B}$. Encuentre a $\overrightarrow{C}$ es términos de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $u$, la magnitud de $\overrightarrow{A}$ $(A)$ y alguna operación entre ellos.

**P.2.** Hallar una ecuación del plano que contiene a la recta $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 2) + t\,(3, 2, 4)$ y es perpendicular al pano $2x + y - 3z + 4 = 0$

**P.3.** Realice lo que se le pide:

**(a)** Halle la proyección de $\overrightarrow{u} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ sobre $\hat{v} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$.

**(b)** Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3, 1, -2)$ que interseca y es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = -2 + t$ y $z = -1 + t$.

**(c)** ¿Qué restricción se debe tener sobre $b$ para que el vector $(2, b, 0)$ sea ortogonal a los vectores $(-3, 2, 1)$ y $(0, 0, 1)$.

**P.4.** Probar la siguiente identidad:

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \times \overrightarrow{C} = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{A}$$

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

### SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE CÁLCULO MULTIVARIABLE

| | | |
|---|---|---|
| Profesor: LEVARIO MEDINA SERGIO | V1 | Fecha : 14/12/23 |
| Nombre del alumno: | 2AV2 | N.L: |

**Instrucciones:**

- Resuelva 4 y solo 4 de los siguientes ejercicios. En cada problema, detalle su razonamiento y desarrolle la solución de manera clara y precisa. No amontone sus procedimientos, ni encime cuentas.
- Coloque su nombre en cada una de las hojas a entregar. Así mismo, enumere cada hoja de la forma $i/n$, donde $i = 1, 2, ..., n$ y $n$ es el número total de hojas a entregar. Además, de las hojas que entregue, de dejar espacios en blanco, tachelos con pluma.

**P.1.** Esboce la grafica correspondiente a las funciones. Para tal efecto, emplee curvas de nivel e intersección con los ejes:

**(a)** $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; con $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

**(b)** $cz = \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}$; con $a > 0$ y $b > 0$.

**P.2.** Realice lo que se le pide:

**(a)** Calcule el siguiente limite, si es que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

**(b)** Verifique, mediante la definición de limite que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

**(c)** Se puede hacer continua a la función

$$\frac{sen\,(x+y)}{x+y}$$

definiendo la de manera adecuada en $(0,0)$?.De ser afirmativa su respuesta, especifique como redefiniría a la función.

**P.3.** Halle lo que se le pide:

**(a)** La ecuación del plano tangente a $z = x^2 + 2y^3$ en $(1,1,3)$.

**(b)** Dado que $g(x,y) = \left(x^2+1, y^2\right)$ y $f(u,v) = \left(u+v, u, v^2\right)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en $(1,1)$ usando la regla de la cadena.

**(c)** Muestre que la siguiente relación:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1$$

Idea: Considere a la función $F(x,y,z) = 0$ que define a $x = f(y,z)$, $y = g(x,z)$ y $z = h(x,y)$.

**P.4.** Hallar una normal unitaria a la superficie $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ en $(0,0,2)$.

**P.5.** Sea $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ y $r = \|\overrightarrow{r}\|$. Probar que:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

**P.6.** Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**(a)** Si $(x,y) \neq (0,0)$, calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

**(b)** Mostrar que $(\partial f/\partial x)(0,0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0,0)$.

**(c)** Mostrar que $\left(\partial^2 f/\partial x \partial y\right)(0,0) = 1$, $\left(\partial^2 f/\partial y \partial x\right)(0,0) = -1$.

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

### TERCER EXAMEN PARCIAL DE CÁLCULO MULTIVARIABLE

| | | |
|---|---|---|
| Profesor: LEVARIO MEDINA SERGIO | V1 | Fecha : 11/01/24 |
| Nombre del alumno: | 2AV2 | N.L: |

**Instrucciones:**

- Resuelva cuatro y solo cuatro de los siguientes ejercicios. En cada problema, detalle su razonamiento y desarrolle la solución de manera clara y precisa. No amontone sus procedimientos, ni encime cuentas.
- Coloque su nombre en cada una de las hojas a entregar. Así mismo, enumere cada hoja de la forma $i/n$, donde $i = 1, 2, ..., n$ y $n$ es el número total de hojas a entregar. Además, de las hojas que entregue, de dejar espacios en blanco, tachelos con pluma.

**P.1.** Encuentre los extremos relativos y/o absolutos de la siguientes funciones, según sea el caso:

**(a)** $f(x, y) = sen(x) + sen(y)$

**(b)** $f(x, y) = 4x - 6y$ sobre la región cerrada $R$ definida por: $\frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1$.

**P.2.** Si $\overrightarrow{a}$ es un vector constante y $\overrightarrow{r} = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$. Verifique las siguientes identidades:

**(a)** $\nabla \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 0$

**(b)** $\nabla \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 2\overrightarrow{a}$

**P.3** Usar integrales dobles para determinar el área de una elipse con semiejes de longitud $a$ y $b$.

**P.4.** Evalúe la integral:

$$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dzdydx$$

**P.5.** Sea $D$ la región $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$. Evaluar

$$\int_D (x + y)\, dxdy$$

haciendo el cambio de variable $x = u + v$, $y = u - v$. Verificar la respuesta obtenida evaluando directamente la integral, usando una integral iterada. Adicionalmente, esboce las regiones de integración.

**P.6.** Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**Segundo Examen Parcial del curso Análisis Vectorial.**
**Profr. Darwin Gutiérrez**
Instrucciones: Resuelva correctamente los siguientes ejercicios justificando todos sus procedimientos, cada ejercicio vale 1.5 **puntos.**
Nombre:
Grupo:

1. Considere la curva $\overrightarrow{\gamma}(t) = (cos(t), sen(t), t)$
   - Haga un bosquejo de la imagen de la curva
   - Encuentre un plano que no intersecte a la curva
   - Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto $\overrightarrow{\gamma}(\pi/4)$, y grafiquela.
2. Sean $\overrightarrow{f}(t)$ y $\overrightarrow{g}(t)$ 2 curvas, demuestre que:
$$(\overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g})' = \overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g}' + \overrightarrow{f}' \times \overrightarrow{g}.$$
   Apliqué el resultado para calcular $[(t, \frac{1}{t}, t^2) \times (t-3, \frac{1}{t-5}, (t-1)^2)]'$
3. Sean $f(x,y) = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$ y $g(x,y) = ln(y - x - 2)$ Dibujar el dominio de cada una y encuentre 3 curvas de nivel de cada una y graficarlas.
4. Encuentre la linealización de las siguientes funciones en los puntos dados:
   - $z = 4x^2y - 2x^3y - 2xy$ en $(2,2)$ y aproxime en $(2.001, 2.001)$
   - $w = sen(xyz)$ en $(1, 2, \pi)$ y aproxime en $(1.001, 2.001, 3, 1416)$

   Además encuentre la derivada direccional en los puntos dados en la dirección $(1,1)$ y $(1,1,1)$ respectivamente.
5. Sea $\phi(x,y) = \frac{5xy}{2x^2+2y^2}$
   - Calcular el límite cuando $(x,y) \rightarrowtail (0,0)$
   - Calcular la magnitud de su gradiente
   - Calcular $\partial_{xy}\phi$
6. Considere la superficie $xy + z = 8$. Determinar todos los puntos sobre ella que sean mas cercanos al origen.
7. Se va a construir una caja rectangular cerrada de tal modo que su volumen sea de $6m^3$. El costo del material para la parte superior y el fondo son de $10pesos$ por $m^2$ y $20pesos$ por $m^2$ respectivamente. El costo de los lados es de $5pesos$ por $m^2$ Determine la función de costo $c(x,y)$ donde $x, y$ son la longitud y ancho de la caja respectivamente. Calcule las dimensiones de la caja que producirían un costo mínimo.
8. En negocios un indice de utilidad $U$ es una función que depende de la venta de las unidades de 2 artículos diferentes digamos $x, y$ respectivamente (dependientes entre si). Si $U(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ encuentre sus extremos sujetos a la relación lineal, cuando vendemos 18 unidades del primer producto no vendemos nada del segundo producto y cuando vendemos 3 unidades del segundo producto no vendemos nada del primero.

**Tercer Examen Parcial del curso de Cálculo Multivariable.**
**Prof. Darwin Gutiérrez**
Instrucciones: Resuelva correctamente los siguientes ejercicios justificando todos sus procedimientos y realizando los gráficos necesarios en cada ejercicio, los primeros 5 ejercicios valen **2 puntos** y los últimos **1.5 puntos** .
Nombre:

1. Sean $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$,$\overrightarrow{G}(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$ y $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$ calcular:
   - $\nabla \cdot (\phi\overrightarrow{F} + \phi\overrightarrow{G})$
   - $\nabla \times (\nabla \cdot \phi + \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G})$
2. Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $y = 9 - x^2$ y $y = x^2$. Además calcule $\int\int_R (x+y)dA$ donde $R$ es la región anterior.
3. Calcule el volumen de una sección del cilindro $C = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \geq 10 - y^2\}$ que se encuentra en el primer octante y que se corta por el palno $x = 5$. Calcular también $\int\int\int_V zdV$ con $V$ el volumen que encierra la sección del cilindro anterior.
4. Calcular $\int_r \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ para:
   - $\overrightarrow{F} = (2x^2, -y)$ y la curva $r$ es el segmento de linea recta que une al $(-3,-2)$ al $(3,2)$
   - $C = (y, -z, -x)$ y la curva $r$ es el segmento de linea recta que une al $(-3,-2,-1)$ al $(3,2,1)$
5. Calcular $\oint_r \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ para:
   - $\overrightarrow{F} = (-y, 2x)$ y la curva $r$ cerrada es el perímetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$
   - $\overrightarrow{F} = (y^2, -x)$ y la curva $r$ es el triangulo con vértices el origen el $3\hat{\imath}$ y $2\hat{\jmath}$.
6. Calcular la integral de superficie $\iint_S f(x,y,z)dS$, cuya función de densidad es $f(x,y,z) = xy - z$
   - $S$ es la superficie parametrizada por $\overrightarrow{r}(u,v) = (u-v, u+v, 1)$ definida en el rectángulo $[-2,4] \times [-3,2]$
7. Calcular $\oint_r \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ donde $r$ es el contorno de una disco que vive en el plano $x + y + z = 6$ de radio 10 centrado en $(2,2,2)$ y $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (-3y, 2x, 5z)$.

# CÁLCULO MULTIVARIABLE

**PRIMER PARCIAL:**

1. Determinar:

a) Dado el vector $\boldsymbol{v} =< -1,3 >$ y su punto inicial $\boldsymbol{p}(4,2)$ hallar el punto final **de $\boldsymbol{v}$.** Presente gráficamente el vector.

b) Encontrar la **magnitud** de $\boldsymbol{v} =< 4,3 >$

c) Hallar el **vector unitario en la dirección** de, $\boldsymbol{u} =< 3,1,2 >$ y verificar que tiene longitud **uno**.

d) Si los puntos $\boldsymbol{p}(1,-2,3)$; $\boldsymbol{Q}(2,1,0)$; $\boldsymbol{R}(4,7,-6)$ son coliniales.

2. Encontrar el volumen del paralelepípedo cuyos vértices dados **A**(0,0,0); **B**(3,0,0); **C**(0,5,1); **D**(3,5,1); **E**(2,0,5); **F**(5,0,5); **G**(2,5,6); **H**(5,5,6).

3. Hallar el conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que, pasa por $\boldsymbol{p}(2,3,4)$ y es perpendicular a $3x + 2y - z = 6$

4. Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas:

$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z \ ; \ \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

5. Hallar el ángulo formado entre $x + y + z = 1$ y

$$x - 2y + 3z = 1$$

6. Identificar la gráfica correspondiente, de:

| **ECUACIÓN** | | **ECUACIÓN** | |
|---|---|---|---|
| **1)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ | | **4)** $y^2 = 4x^2 + 9z^2$ | |
| **2)** $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$ | | **5)** $4x^2 - 4y + z^2 = 0$ | |
| **3)** $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$ | | **6)** $4x^2 - y^2 + 4z = 0$ | |

7. De la ecuación $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0}$,

**a)** Convertir a coordenadas cilíndricas

**b)** Convertir a coordenadas esféricas.

**c)** Trazar en el plano tridimensional la superficie.

**d)** Obtener la ecuación vectorial de la intersección con $\boldsymbol{y + z = 2}$**; tomando como parámetro** $\boldsymbol{z = t}$

8. Determinar para $\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

**A)** Bosquejo en el plano tridimensional de las superficies para ambas.

**B)** Obtener la ecuación vectorial de la intersección, tomando como parámetro $\boldsymbol{x = r\ cos\theta}$

9. Determinar los intervalos de continuidad de:

$$\boldsymbol{r(t)} =< e^{-t}, t^2, tg(t) >$$

# CÁLCULO MULTIVARIABLE

**SEGUNDO PARCIAL**

- Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $\boldsymbol{x} = 1 + 2\sqrt{t}; \boldsymbol{y} = t^3 - t; \boldsymbol{z} = t^3 + t$. En el punto $\boldsymbol{p}(3,0,2)$ y la pendiente de la recta.
- Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy + z^2 = 4$ en (1,1,1).
- Determinar los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$. Justificando mediante la prueba de las segundas derivadas parciales, la existencia de un extremo.
- Emplee el método de multiplicadores de Lagrange para determinar, Máximos y/o mínimos de
  $\boldsymbol{f(x,y,z) = x + y + z}$ sujeto a $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2}$ &
  $\boldsymbol{x + z = 1}$
- Emplee el método de multiplicadores de Lagrange para determinar, Máximos y/o mínimos de

$\mathbf{g}(\boldsymbol{x,y,z}) = \boldsymbol{x + 2y + 3z}$; con ligaduras: $\boldsymbol{x - y + z = 1}$ ;

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$

- Obtener mediante una doble integral, el área de la superficie encerrada entre $y = 4x^2 - 21y - 122$ **&** $y = 7x - 2$.

# CÁLCULO MULTIVARIABLE

**TERCER PARCIAL**

- Obtener mediante una doble integral, el área de la superficie encerrada entre $x = 2y^2 - 4y + 4$ **&** $x = -5y^3 + 7y^2 + 56y + 4$.
- Plantear, mediante una integral, la superficie lateral. Generada por $y = 4x - x^2$, en $1 \leq x \leq 4$. Entorno al eje "y". A) con variable de integración "x"; B) con variable de integración "y".
- Plantear, mediante una integral, la superficie lateral. Generada por $4px = y^2$, en $0 \leq x \leq h$. Entorno al eje "x". A) con variable de integración "x"; B) con variable de integración "y".
- Dadas: $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ & $x^2 + y^2 = b^2$ , con $0 < b < a$.

a) Plante la superficie de la esfera, sobre el plano $z = 0$ , en la región del plano "xy", dentro del cilindro.

b) Calcular el área mediante la representación polar, en integral doble.

- Determinar mediante una integral triple, el volumen en el "primer octante"; cortado $x^2 + z^2 = 16$, por los planos: $x = 0$ $x = 2, y = 0$ & $y = 3$. Sobre el plano "xy".

- Asuma que los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son vectores conocidos. Sea $\overrightarrow{C}$ un vector desconocido tal que $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=u$, con $u$ una cantidad conocida y $\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{C}=\overrightarrow{B}$. Encuentre a $\overrightarrow{C}$ es términos de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $u$, la magnitud de $\overrightarrow{A}$ $(A)$ y alguna operación entre ellos.
- Hallar una ecuación del plano que contiene a la recta $\overrightarrow{v}=(-1,1,2)+t\,(3,2,4)$ y es perpendicular al pano $2x+y-3z+4=0$
- Realice lo que se le pide:
  **(a)** Halle la proyección de $\overrightarrow{u}=-\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$ sobre $\hat{v}=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-3\hat{k}$.
  **(b)** Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3,1,-2)$ que interseca y es perpendicular a la recta $x=-1+t$, $y=-2+t$ y $z=-1+t$.
  **(c)** ¿Qué restricción se debe tener sobre $b$ para que el vector $(2,b,0)$ sea ortogonal a los vectores $(-3,2,1)$ y $(0,0,1)$.
- Probar la siguiente identidad:
$$\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)\times\overrightarrow{C}=\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}\right)-\left(\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}\right)\overrightarrow{A}$$
- Esboce la grafica correspondiente a las funciones. Para tal efecto, emplee curvas de nivel e intersección con los ejes:
  **(a)** $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; con $a>0$, $b>0$ y $c>0$.
  **(b)** $cz=\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}$; con $a>0$ y $b>0$.
- Realice lo que se le pide:
  **(a)** Calcule el siguiente limite, si es que:
$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim}\frac{x-y}{x^2+y^2}$$
  **(b)** Verifique, mediante la definición de limite que:
$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim}\frac{10xy^2}{x^2+y^2}=0$$
  **(c)** Se puede hacer continua a la función
$$\frac{sen\,(x+y)}{x+y}$$
  definiendo la de manera adecuada en $(0,0)$?. De ser afirmativa su respuesta, especifique como redefiniría a la función.
- Halle lo que se le pide:
  **(a)** La ecuación del plano tangente a $z=x^2+2y^3$ en $(1,1,3)$.
  **(b)** Dado que $g\,(x,y)=\left(x^2+1,y^2\right)$ y $f\,(u,v)=\left(u+v,u,v^2\right)$, calcular la derivada de $f\circ g$ en $(1,1)$ usando la regla de la cadena.
  **(c)** Muestre que la siguiente relación:
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)=-1$$
  Idea: Considere a la función $F\,(x,y,z)=0$ que define a $x=f\,(y,z)$, $y=g\,(x,z)$ y $z=h\,(x,y)$.
- Hallar una normal unitaria a la superficie $x^3y^3+y-z+2=0$ en $(0,0,2)$.
- Sea $\overrightarrow{r}=(x,y,z)$ y $r=\|\overrightarrow{r}\|$. Probar que:
$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$
- Sea
$$f\,(x,y)=\begin{cases}\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
  **(a)** Si $(x,y)\neq(0,0)$, calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
  **(b)** Mostrar que $(\partial f/\partial x)\,(0,0)=0=(\partial f/\partial y)\,(0,0)$.
  **(c)** Mostrar que $\left(\partial^2 f/\partial x\partial y\right)(0,0)=1$, $\left(\partial^2 f/\partial y\partial x\right)(0,0)=-1$.
- Encuentre los extremos relativos y/o absolutos de la siguientes funciones, según sea el caso:
  **(a)** $f\,(x,y)=sen\,(x)+sen\,(y)$
  **(b)** $f\,(x,y)=4x-6y$ sobre la región cerrada $R$ definida por: $\frac{1}{4}x^2+y^2\leq 1$.

- Si $\overrightarrow{a}$ es un vector constante y $\overrightarrow{r} = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$. Verifique las siguientes identidades:

  **(a)** $\nabla \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 0$

  **(b)** $\nabla \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}) = 2\overrightarrow{a}$

- Usar integrales dobles para determinar el área de una elipse con semiejes de longitud $a$ y $b$.

- Evalúe la integral:

$$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx$$

- Sea $D$ la región $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$. Evaluar

$$\int_D (x+y)\, dx dy$$

  haciendo el cambio de variable $x = u + v$, $y = u - v$. Verificar la respuesta obtenida evaluando directamente la integral, usando una integral iterada. Adicionalmente, esboce las regiones de integración.

- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.