PRIMER LISTA DE PROBLEMAS DE CALCULO MULTIVARIABLE

PROBLEMARIO DE ALGEBRA

VECTORIAL

Prof: MIGUEL ABEL LEON HERNADEZ

1. Si $\overrightarrow{A} = \widehat{\imath} + 2\widehat{\jmath} - 2\widehat{k}$, $\overrightarrow{B} = 4\widehat{\imath} - 2\widehat{\jmath} + 4\widehat{k}$, $\overrightarrow{C} = \widehat{\imath} + 2\widehat{\jmath} - \widehat{k}$, y $\overrightarrow{D} = -2\widehat{\imath} - \widehat{\jmath} + 4\widehat{k}$. Calcular las operaciones

   a) $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}$
   b) $A,\ B$
   c) $A\overrightarrow{D}$
   d) $\left(\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{C}$
   e) $\overrightarrow{C} \bullet \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right)$
   f) $\left(\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{D} - \overrightarrow{C}$
   g) $\left(\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}\right) \bullet \overrightarrow{C} - A$
   h) $\left(\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}\right) \times \overrightarrow{C}$
   i) $\left(\overrightarrow{D} \bullet \overrightarrow{B}\right)\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}\right)$
   j) $\left|3\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}\right|$
   k) $\left(2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) \bullet \left(\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B}\right)$
   l) $\left|2\overrightarrow{A} - 5\overrightarrow{B}\right|$
   m) $\left(3\overrightarrow{D} - 2\overrightarrow{B}\right) \times \left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}\right)$

2. Si dados $\overrightarrow{A} = \widehat{\imath} - 2\widehat{\jmath} - 3\widehat{k}$, $\overrightarrow{B} = 2\widehat{\imath} + \widehat{\jmath} - \widehat{k}$, y $\overrightarrow{C} = \widehat{\imath} + 3\widehat{\jmath} - 2\widehat{k}$, calcular las operaciones

   a) $\left|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right|$
   b) $\left(-2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) \times \left(\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B}\right)$
   c) $\left|\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) \times \left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right)\right|$
   d) $\left|\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right)\right|$
   e) $\overrightarrow{A} \bullet \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right)$
   f) $\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right), \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \bullet \overrightarrow{C}$
   g) $\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right)\left(\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{C}\right)$
   h) $\left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) A$
   i) $\left(\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{C}\right) B$

3. Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$, vectores no coplanares ni paralelos, determinar si $\overrightarrow{r}_1 = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r}_2 = 3\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{r}_3 = 4\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, son linealmente independientes

4. Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, dos vectores en distinta direccion y $\overrightarrow{A} = (x + 4y)\overrightarrow{a} + (2x + y + 1)\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{B} = (y - 2x + 2)\overrightarrow{a} + (2x - 3y - 1)\overrightarrow{b}$. Hallar los valores de x y y, de modo que $3\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{B}$

5. Sean los vectores $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ y $\overrightarrow{a_3}$, vectores linealmente independientes, y $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ y $\overrightarrow{b_3}$, otro conjunto tambien linealmente independiente que esta relacionaco con el anterior por:

$$\begin{array}{rrrr} \overrightarrow{a_1} = & 2\overrightarrow{b_1} & +3\overrightarrow{b_2} & -\overrightarrow{b_3} \\ \overrightarrow{a_2} = & \overrightarrow{b_1} & -2\overrightarrow{b_2} & +2\overrightarrow{b_3} \\ \overrightarrow{a_3} = & -2\overrightarrow{b_1} & +\overrightarrow{b_2} & -2\overrightarrow{b_3} \end{array}$$

   expresar el vector $\overrightarrow{r} = 3\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{b_2} + 2\overrightarrow{b_3}$ en funcion de $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ y $\overrightarrow{a_3}$

6. Para que valores de a, los vectores $\overrightarrow{A} = a\widehat{\imath} - 2\widehat{\jmath} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{B} = 2a\widehat{\imath} + a\widehat{\jmath} + 4\widehat{k}$ son perpendiculares

7. Si $\overrightarrow{A} = x_1\overrightarrow{a} + y_1\overrightarrow{b} + z_1\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{B} = x_2\overrightarrow{a} + y_2\overrightarrow{b} + z_2\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{C} = x_3\overrightarrow{a} + y_3\overrightarrow{b} + z_3\overrightarrow{c}$, demostrar que

$$\overrightarrow{A} \bullet \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \left(\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)\right)$$

8. Verificar la identidad

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \bullet \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}\right) + \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) \bullet \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{D}\right) + \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}\right) \bullet \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{D}\right) = 0$$

9. Si $\overrightarrow{A} = 4\widehat{i} - \widehat{j} + 3\widehat{k}$ y $\overrightarrow{B} = -2\widehat{i} + \widehat{j} - 2\widehat{k}$ hallar el vector unitario perpendicular con $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$

10. Sean ABC y D los vertices de un paralelogramo, demostrar que

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$$

11. Demostrar que la linea que une los puntos extremos de los vectores $\overrightarrow{A} = 2\widehat{i} - \widehat{j} - \widehat{k}, \overrightarrow{B} = \widehat{i} + 3\widehat{j} - \widehat{k}$ es paralela al plano x-y

12. Verificar la identidad

$$\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) + \overrightarrow{B} \times \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}\right) + \overrightarrow{C} \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{0}$$

13. Verificar que

$$\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \left(x\overrightarrow{c} + y\overrightarrow{d}\right)\right) = x\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) + y\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$$

14. Sean los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$, vectoresque satisfacen la relacion $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ y ademas $a = 1$, $b = 4$ y $c = 2$, Calcular la cantidad $\mu = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}$

15. Sean los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, tales que $a = b = 1$. Calcular $\left(3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}\right) \bullet \left(2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}\right)$, si $\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| = 3$

16. Dado $a = 3$,y $b = 2$ con un angulo entre vectores de 120°. Hallar las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ asi como el angulo entre ellos

17. Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ vectores donde $|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right|$. Encontrar el ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ si se sabe que $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{q} = 5\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ son ortogonales entre si

18. En un trapecio rectangular $ABCD$ las diagonales son mutuamente perpendiculares y la razón entre las longitudes de las bases es $|BC| / |AD| = \lambda$. Hallar la razon entre sus diagonales

19. En el triangulo ABC, estan trazadas las medianas AD, BE, CF. Calcular

$$\mu = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CF}$$

20. Demostrar que para cualquier ubicacion de puntos A, B, C, D en el plano o en el espacio

$$\mu = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0$$

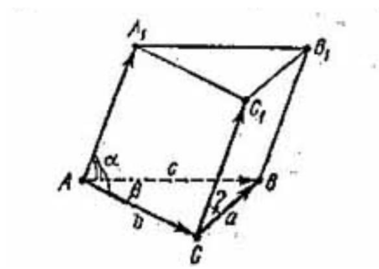
21. En un Triángulo ABC la mediana CM, es perpendicular a la bisectriz AL, tal que $|CM| / |AL| = n$. Hallar el ángulo $\widehat{A}$

22. Sean ABC los vértices de un triángulo arbitrario, E y F son los puntos medios de las caras AC y AB respectivamente, una linea CP es dibujada paralela con AB y cruza BE en P. Demostrar que

$$Area\,(FEP) = Area\,(FCE) = \frac{1}{2} Area\,(ABC)$$

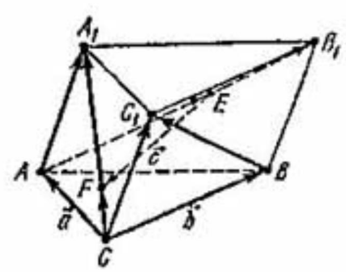
23. En un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$, se tiene que$|AB| = c$, $|BC| = a$,$|CA| = b$, $\widehat{BAA_1} = \alpha$, $\widehat{CAA_1} = \beta$. Hallar $\widehat{BCC_1}$

Figura 1: para el problema 23



24. En als diagonales $[AB_1]$ y $[CA_1]$ de las caras laterales de un prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ se situan, respectivamente, puntos E y F de modo que $(EF) \parallel (BC_1)$. Hallar la razón $\frac{|EF|}{|BC_1|}$

Figura 2: paara el problema 24

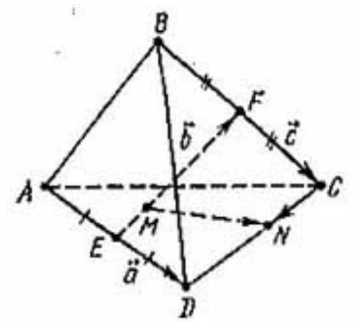


25. Los puntos E y F son los puntos medios de las aristas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ de una piramide $ABCD$. Demostrar que las igualdades $|BD| = |AC|$ y $|AB| = |CD|$ se cumplen simultaneamente si, y solo si, el segmento $\overline{EF}$ es perpendicular tanto a $\overline{BC}$ como a $\overline{AD}$

26. En un tetraedro regular $ABCD$, los puntos medios M y E son los puntos medios de las aristas $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, N es el punto de interseccion de las medianas de la cara BCD . Hallar el angulo entre los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{DE}$.

27. Los puntos E y F son respectivamente los puntos medios de las aristas AB y BC de un tetraedro regular $ABCD$. Los puntos M y N se situan en CD y EF respectivamente, de tal modo que $\alpha = \widehat{MNC} = \frac{\pi}{4}$, y $\beta = \widehat{MNE} = \frac{\pi}{3}$ ¿en que razones se dividen los segmentos EF y CD por los puntos M y N ?

Figura 3: para el problema 27



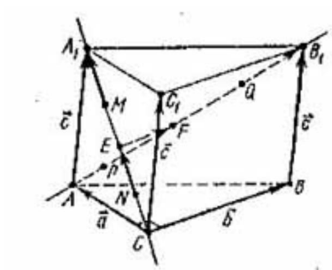
28. La longitud de una arista de un tetraedro regular $ABCD$ es igual a $2d$ .Hallar el radio de la esfera que pasa por los vertices A, D, el punto medio F de la arista BC y el centro K de la cara ADC

29. La base del prisma trangular recto $ABCA_1B_1C_1$ es un triangulo isoceles ABC donde $|AC| = |BC| = n$ y $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$. Los vertices M y N de un tetraedro regular $MNPQ$ estan situados en la recta CA_1 y los vertices P y Q en la recta AB_1 . Hallar

    a) El volumen del prisma

    b) El volumen del teraedro

Figura 4: para el problema 29



30. En una pirámide triangular regular $SABC$ la longitud de la arista de la base ABC es igual a a, y el ángulo α entre la apotema y la cara lateral es igual a 45°. Hallar la longitud h de la altuta de la pirámide.

Figura 5: para el problema 30