Cálculo Multivariable

11/03/2024

Lista 3

1.- Sea $\vec{f}(t) = e^{-t}\hat{\imath} - \ln(t^2+1)\hat{\jmath} - \tan t\hat{k}$. Encuentre a) $\vec{f}(t)'$, b) $\vec{f}(t)''$ en $t = 0$, así como su magnitud.

2.- Suponga que una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$ y $z = 8t$, en cualquier momento $t > 0$.

a) Encuentre la velocidad y aceleración de la partícula.

b) Calcule las magnitudes de la velocidad y la aceleración.

3.- Sea $\vec{f}(u) = \sin u\hat{\imath} + \cos u\hat{\jmath} + u\hat{k}$, $\vec{g}(u) = \cos u\hat{\imath} - \sin u\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $\vec{h}(u) = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$. Encuentre $\frac{d}{du}\big(\vec{f}(u) \times (\vec{g}(u) \times \vec{h}(u))\big)$.

4.- Sean $\vec{f}(s), \vec{g}(s)$ funciones vectoriales derivables de s. Mostrar que

a)

$$\frac{d}{ds}\big(\vec{f}(s) \cdot \frac{d\vec{g}(s)}{ds} - \frac{d\vec{f}(s)}{ds} \cdot \vec{g}(s)\big) = \vec{f}(s) \cdot \frac{d^2\vec{g}(s)}{ds^2} - \frac{d^2\vec{f}(s)}{ds^2} \cdot \vec{g}(s)$$

b)

$$\frac{d}{ds}\big(\vec{f}(s) \times \frac{d\vec{g}(s)}{ds} - \frac{d\vec{f}(s)}{ds} \times \vec{g}(s)\big) = \vec{f}(s) \times \frac{d^2\vec{g}(s)}{ds^2} - \frac{d^2\vec{f}(s)}{ds^2} \times \vec{g}(s)$$

5.- Si $\vec{f} = uvw\hat{\imath} + uw^2\hat{\jmath} - v^3\hat{k}$ y $\vec{g} = u^1\hat{\imath} - uvw\hat{\jmath} + u^2w\hat{k}$. Calcular:

a) $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u \partial v}$ en el origen.

b) $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial v^2} \times \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial u^2}$ en el punto $(1,1,0)$.

6.- Hallar la longitud de las curvas representadas por las siguientes funciones vectoriales:

a) $\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \sin t\hat{\jmath} + \sin t\hat{k}$, para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

b) $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \sin 2\pi t\hat{\jmath} + \cos 2\pi t\hat{k}$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$.

7.- Hallar el vector unitario $\vec{T}$ tangente a las curvas representadas por las siguientes funciones vectoriales en los puntos especificados.

a) $\vec{r}(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\hat{k}$, en $t = 1$.

b) $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\hat{\imath} + a(1 - \cos t)\hat{k}$, en cualquier punto t.

8.- Hallar la derivada direccional de $\phi(x,y,z) = z^2y + y^2z + z^2x$ en $(1,1,1)$ en la dirección de C representada por $\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$.

9.- Hallar la divergencia y el rotacional de $\vec{f} = (x-y)\hat{\imath} + (y-z)\hat{\jmath} + (z-x)\hat{k}$ y $\vec{g} = (x^2 + yz)\hat{\imath} + (y^2 + zx)\hat{\jmath} + (z^2 + xy)\hat{k}$.

10.- Si $\phi = 3x^2 - yz$ y $\vec{f} = 3xyz^2\hat{\imath} + 2xy^3\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}$, hallar en $(1,1,1)$,

a) $\vec{f} \cdot \nabla\phi$.

b) $\nabla \times \vec{f}$.

c) $\nabla^2\phi$.

d) $\nabla \cdot (\phi\vec{f})$ y $\nabla \times (\phi\vec{f})$

11. Si $\nabla \times \vec{f} = \vec{0}$, donde $\vec{f} = (xyz)^m(x^n\hat{\imath} + y^n\hat{\jmath} + z^n\hat{k})$, mostrar que $m = 0$ o bien $n = -1$.