3^{er} Problemario de Calculo Multivariable

Prof. Miguel Abel León Hernández

1. alcular las siguientes integrales iteradas

$$\int\int y^2 e^{xy}\, dA,\ D = \{0 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

$$\int\int x\sqrt{y^2 - x^2}\, dA,\ D = \{0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

$$\int\int x\cos y\, dA,\ D = \left\{y = 0,\ y = x^2, x = 1\right\}$$

2. Al evaluar una integral doble sobre una region D se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue

$$\int\int_D f(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\, dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\, dxdy$$

Bosqueje la region D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integracion

3. Evalue

$$\int\int_D \left(x^2\tan x + y^3 + 4\right) dA$$

donde $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ (Sugerencia:explote el hecho de que D es simétrica con respecto a los ejes)

4. Use simétria para evaluar

$$\int\int_D (2 - 3x + 4y)\, dA$$

donde D es la región acotada por el cuadrado con vértices $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 5)$

5. Calcular $\int\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$, donde Des el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ identificando primero la integral como el volumen de un sólido

6. Use coordena da polares para combinar la suma

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\, dydx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\, dydx$$

en una integral doble. Después evalue la integral

7. Plantear la o las integrales necesarias para calcular $\int\int_R \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dA$. La región R se encuentra limitada por los circulos $x^2+y^2=4$, $(x-2)^2+y^2=4$ y las rectas $y=0$, $x+y=4$ tal como muestra la figura 1

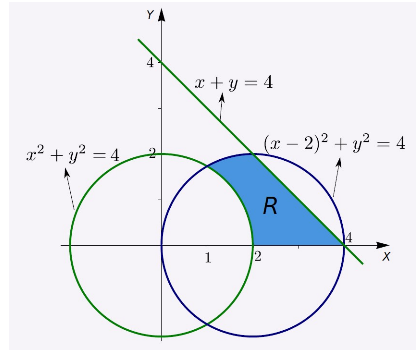

Figura 1: región para el problema 7

8. Utilizando coordenadas polares, plantear la o las integrales que permiten cacular el área de la región R (región sombreada) mostrada en la figura 2

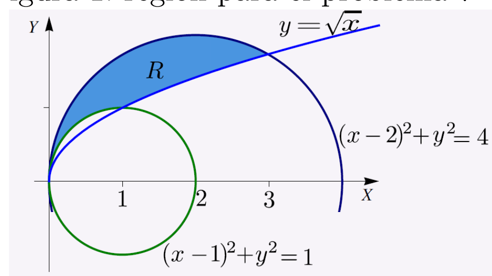

Figura 2: región para el problema 8

9. Calcular el área de las regiones sombreadas

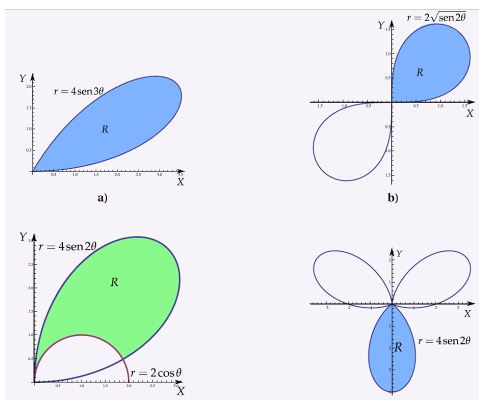

Figura 3: región para el problema 9

10. Calcular $\int\int_R \frac{x-2y}{3x-y}dA$, donde R es el paralelogramo encerrado por las lineas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$ y $3x-y=8$

11. Calcular $\int\int_R (x-3y)\,dA$, donde R es la region triangular con vértices $(0,0)$, $(2,1)$ y $(1,2)$ usando la transformación $x=2u+v$ $y=u+2v$

12. Calcular $\int\int_R (4x+8y)\,dA$, donde R es el paralelogramo con vértices $(-1,3)$, $(1,-3)$ y $(3,-1)$ y $(1,5)$ usando la transformación $x=\frac{1}{4}(u+v)$ $x=\frac{1}{4}(v-3u)$

13. Calcular $\int\int_R y^2dA$, donde R es la region acotada por las lineas $xy=1$ $xy=2$ $xy^2=1$ $xy^2=2$ usando la transformación $u=xy$ $v=xy^2$

14. Calcular $\int\int_R (x+y)\, e^{x^2-y^2} dA$, donde R es la region acotada por las lineas $x-y=0$, $x-y=2$ $x+y=0$ $x+y=3$

15. Sea la region del hiperparalelepipedo acotado por las hipersuperficies

$$\begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & +\cdots & +a_{1,n}x_n & =\pm h_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & +\cdots & +a_{2,n}x_n & =\pm h_2 \\ a_{3,1}x_1 & +a_{3,2}x_2 & +a_{3,3}x_3 & +\cdots & +a_{3,n}x_n & =\pm h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +a_{n,3}x_3 & +\cdots & +a_{n,n}x_n & =\pm h_n \end{array}$$

Calcular el volumen del hiperparalelepipedo

16. Determine el área de la superficie S_1 de ecuación $z=x^2+y^2$ que se encuentra limitada por los planos $z=4$, $z=1$ $y=x$ y el plano $y=0$, tal como se muestra en la figura 4

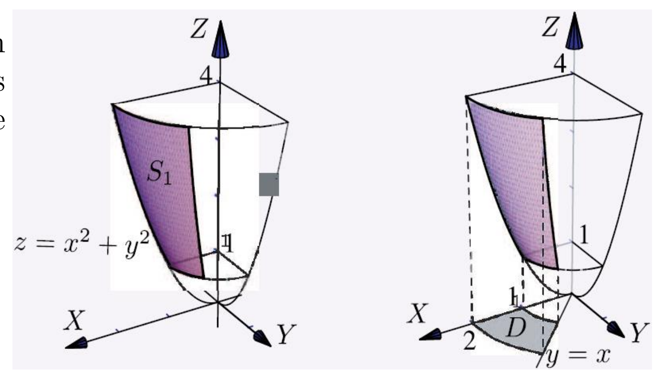

Figura 4: región para el problema 16

17. La superficie S es el trozo del cilindro $z-x^2$ que esta limmitado por los planos $y=0$, $y=x$ y $z=4$ en el primer octante como se muestra en la figura 5

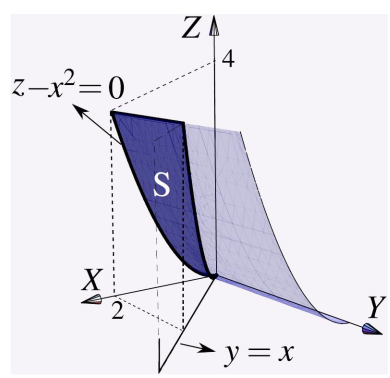

Figura 5: región para el problema 17

18. Calcular la integral de superficie tal como muestra la figura 6

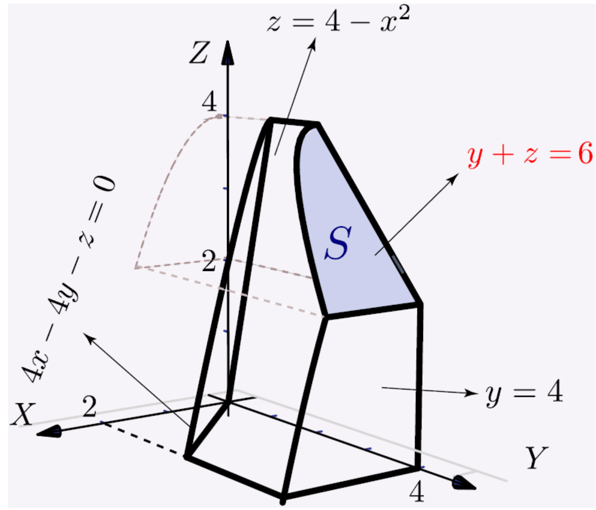

Figura 6: region para el problema 18

19. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dzdydx$$

reescriba esta integral, como una integral iterada en los otros cinco órdenes

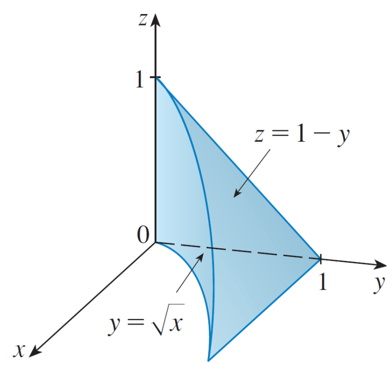

Figura 7: para el problema 19

20. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} dydzdx$$

reescriba esta integral, como una integral iterada en los otros cinco órdenes

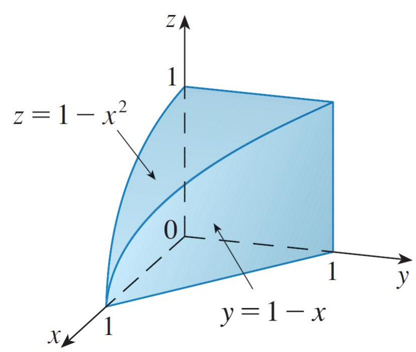

Figura 8: para el problema 20

21. Reescriba la integral

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdydx$$

como la integral iterada en el orden dx dy dz.

22. Dé otras cinco integrales iteradas que sean iguales a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x,y,z)dzdydx$$

23. Consideree la integral

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}} \int_{5x^2}^{36-4x^2-4y^2} 2dzdydx$$

a) Esta integral es igual a una integral triple sobre un sólido región W en $\mathbb{R}^3$. Describa W.

b) Establezca una integral iterada equivalente integrando primero con respecto a z, luego con respecto a x, luego con respecto a y.

c) Establezca una integral iterada equivalente integrando primero con respecto a y, luego con respecto a z, luego con respecto a x.

d) Ahora considere integrar primero con respecto a y, luego x, luego z. Configurar una suma de integrales iteradas que al ser evaluados dan el mismo resultado.

e) Repita la parte (d) para la integración primero con respecto a x, luego z, luego y.

24. Considere el sólido Q limitado por $z = 0$, $y+2z = 2$, $x = 0$ y $y = 1 - x^2$ tal como se muestra en la figura 9. Usando la integración triple, plantear las integrales necesarias para calcular el volumen de Q proyectando en cada uno de los planos XY, YZ y XZ

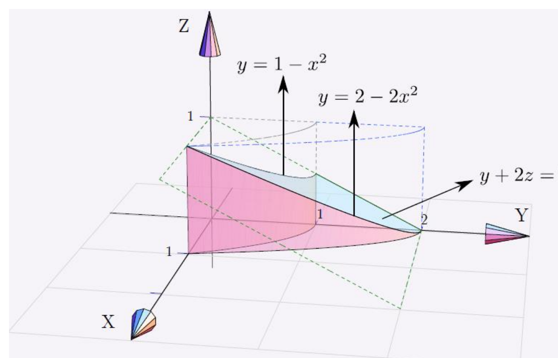

Figura 9: región para los problemas 24

25. Plantear la o las integrales triples necesarias para calcular el volumen del sólido Q si este sólido esta limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + (z-1)^2 = 1$ y los planos $x + y = 4$ $y = 0$ $z = 0$

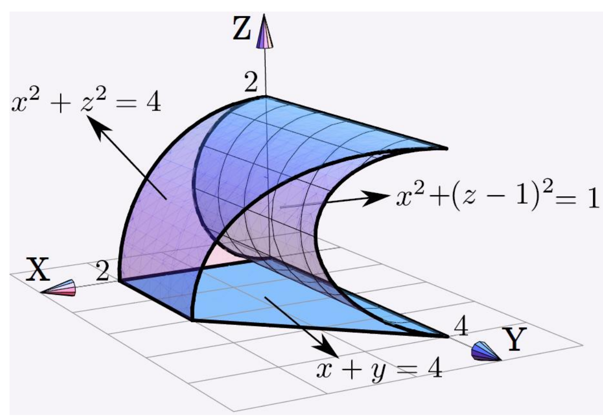

Figura 10: región para el problema 25

26. Encuentre el volumen del sólido dado

   a) Debajo del plano $x+2y-z=0$ y arriba de la region acotada por $y=x$ y $y=x^4$

   b) Debajo de la superficie $f(x,y)=2x+y^2$ y arriba de la region acotada por $x=y^2$ y $y=x^3$

   c) Debajo de la superficie $z=xy$ y arriba de la region acotada por el triángulo con vertices $(1,1)$, $(4,1)$ y $(1,2)$

   d) la super ficie que encierra el paraboloide $z=x^2+3y^2$ y los planos $x=0$, $y=1$ y $z=0$

27. Evalue las siguentes integrales cambiando a coordenadas cilindricas

   a) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydx$

   b) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyzdzdxdy$

28. Evalue las siguentes integrales cambiando a coordenadas esféricas

   a) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,xydzdydx$

   b) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x^2z+y^2z+z^3)\,dzdydx$

   c) $\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$

29. Calclular $\int_{\mathscr{C}} x\sqrt{x^2-y^2}ds$, con C la curva de la ecuación $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$ en $x\geq 0$

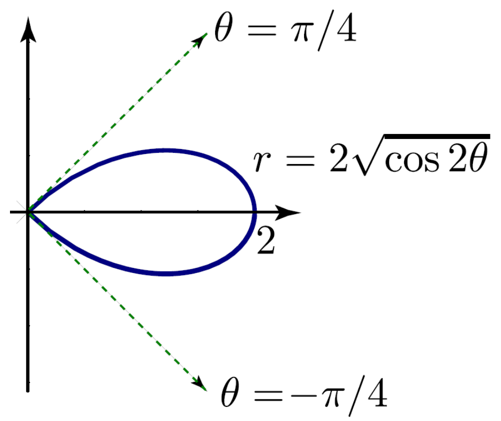

Figura 11: trayectoria para el problema 29

30. Calclular $\int_{\mathscr{C}} xdy-ydx$, donde $C=C_1\cup C_2$

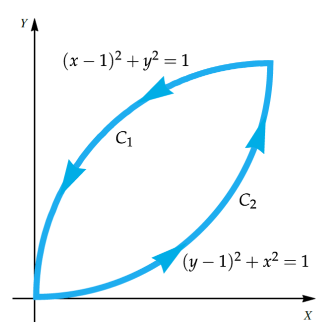

Figura 12: trayectoria para el problema 30

31. Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$, donde C se da por la figura 13 donde $\overrightarrow{F} = y\widehat{i} + x^2\widehat{j}$

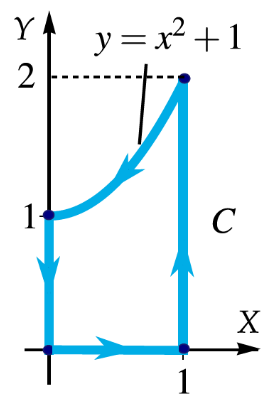

Figura 13: trayectoria para el problema 31

32. Sea $\overrightarrow{F} = 2yz\widehat{i} - 4x\widehat{j} - 3z^2\widehat{k}$ y sea C la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = 4 - x^2$ con el plano $y + z = 6$, tal como muestra la figura 14 .Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$

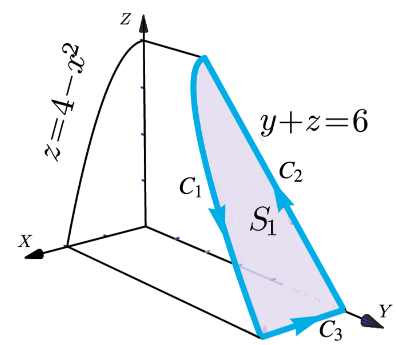

Figura 14: trayectoria para el problema 32

33. Sea $\overrightarrow{F} = (x^2 - y)\,\widehat{i} - (yz - x)\,\widehat{j} - (x + 2y)\,\widehat{k}$ y sea C la curva que se obtiene al intersecar la superficie $x^2 + z^2 = 1$ con el plano $y = 2x$, tal como muestra la figura 15 .Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$

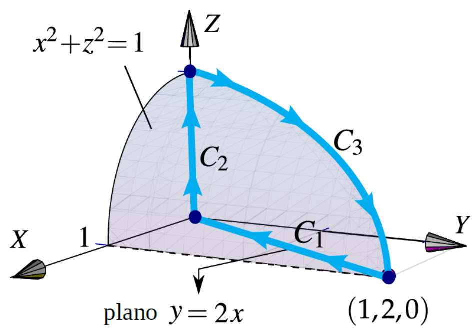

Figura 15: trayectoria para el problema 33

34. Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$, donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ que se obtiene de la figura 16 y donde $\overrightarrow{F} = zx^2\widehat{i} - yx^2\widehat{j} + 3xz\widehat{k}$

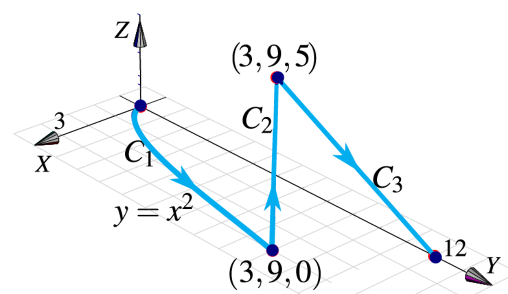

Figura 16: trayectoria para el problema 34

35. Calcular $\int_{\mathscr{C}} xds$ sobre la trayectoria del ejercicio anterior

36. Sea $\overrightarrow{F} = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$, donde S es la superficie limitada por $z = x^2 + y^2$, $z =$, $z = 3$ $y = x$ y $x = 0$ como muestra la figura 17. Calclular $\int_S \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{S}$, donde $\overrightarrow{S}$ es el vector de superficie exterior

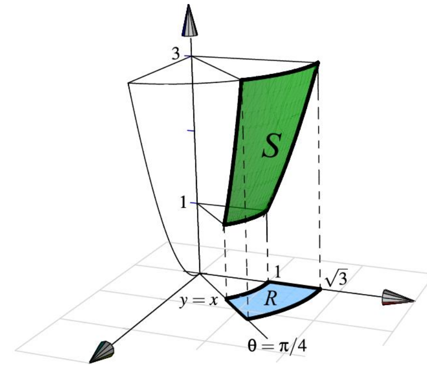

Figura 17: trayectoria para el problema 36

37. Sea $\overrightarrow{F} = xy\widehat{i} + x\widehat{j} + (z+1)\widehat{k}$, donde S es la superficie limitada por $z = 4 - y^2$, $z =$, $z = 3$ $x = 4$, $z = 0$ y $x = y$ como muestra la figura 18. Calclular $\int_S \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{S}$, donde $\overrightarrow{S}$ es el vector de superficie exterior

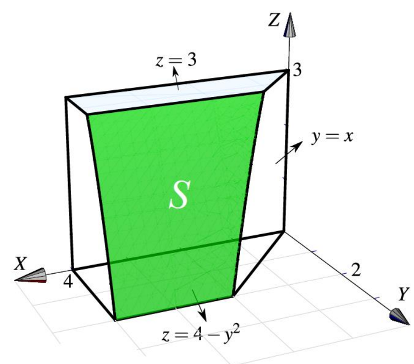

Figura 18: trayectoria para el problema 37

38. Sea $\overrightarrow{F} = (x + \sin y)\widehat{i} + (\ln(xz) - y)\widehat{j} + (2z + \arctan(xy)\widehat{k}$, donde S es la superficie limitada por la región que muestra la figura 19. Calclular $\int_S \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{S}$, donde $\overrightarrow{S}$ es el vector de superficie exterior

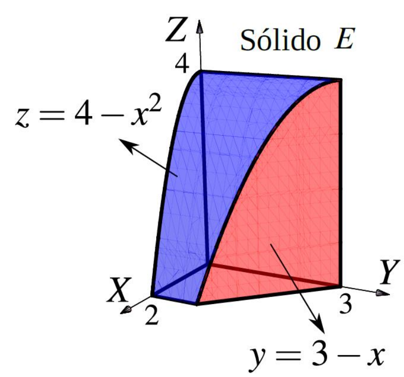

Figura 19: trayectoria para el problema 38

39. Sea $\overrightarrow{F} = (x^3 \sin z)\widehat{i} + (x^2 y + \cos z)\widehat{j} + \tan(x^2 + y^2)\widehat{k}$, donde S es la superficie limitada por $y + z = 5$, $z = 4 - x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 0$ como muestra la figura 20. Calclular $\int_S \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{S}$, donde S es la superficie que encierra a la región Q

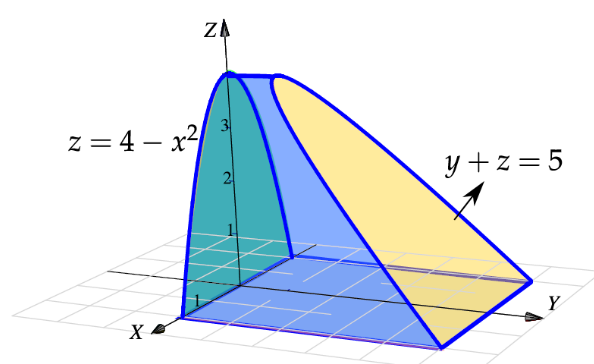

Figura 20: trayectoria para el problema 39

40. Sea C que se obtiene de la figura 21 y donde $\overrightarrow{F} = (x+y)\,\widehat{i} - (x^2+y^2)\,\widehat{j}$

   a) Calcular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ usando el teorema de Green

   b) Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ sin usar el teorema

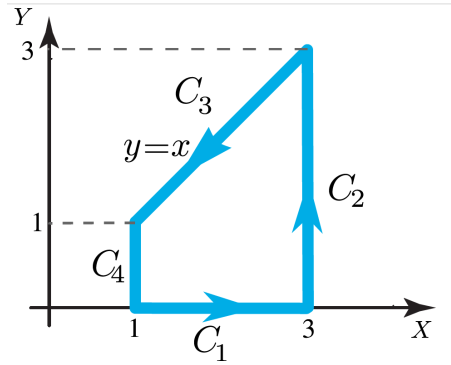

Figura 21: trayectoria para el problema 40

41. Calcular $\oint_{\mathscr{C}} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ mediante la definicion de integral del linea y por el teorema de Green sobre las trayectorias que definen las curvas

   a) $x^2+y^2=1$

   b) $(x-2)^2+y^2=1$

42. Sea $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ que se obtiene de la figura 22 y donde $\overrightarrow{F} = -y^2\widehat{i} + z\widehat{j} + x\widehat{k}$ y de donde $S = S_1 \cup S_2$ que delimita el borde de la superficie S

   a) Calcular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ usando la definicion de integral de linea

   b) Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ usando el teorema de Stokes

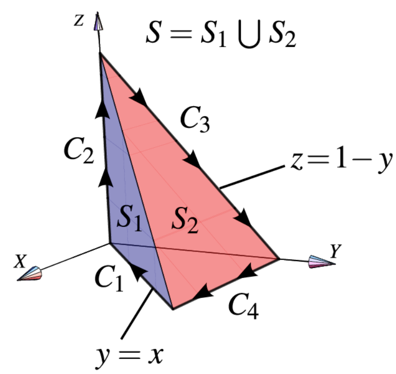

Figura 22: trayectoria para el problema 42

43. Verifique el teorema de Stokes $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ con $\overrightarrow{F} = (y^2-z^2)\widehat{i} + (z^2-x^2)\widehat{j} + (x^2-y^2)\widehat{k}$ donde $\mathscr{C}$ se define como la seccion del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ que intesecta con $x+y+z = \frac{3}{2}a$ en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

44. Sea $\overrightarrow{F} = 3y\widehat{i} - xz\widehat{j} + yz\widehat{k}$ donde S es la frontera del sólido Q que se obtiene de la figura 23 y de donde S es la superficie que delimita el borde de la región Q

   a) Calcular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ usando la definicion de integral de superficie

   b) Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ usando el teorema de la divergencia

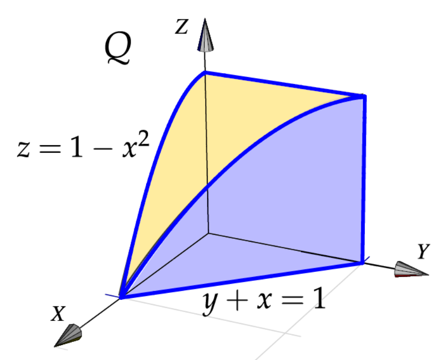

Figura 23: trayectoria para el problema 44

45. Sea $\overrightarrow{F} = (z^2+2)\widehat{k}$ donde S es la frontera del sólido Q que se obtiene de la figura 24 y de donde S es la superficie que delimita el borde de la región Q

   a) Calcular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ usando la definicion de integral de superficie

   b) Calclular $\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ usando el teorema de la divergencia

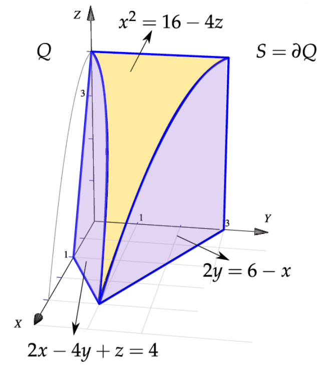

Figura 24: trayectoria para el problema 45

46. Aplique el terorema de la divergencia al campo dado por $\overrightarrow{F} = (xy\sin z)\widehat{i} - \cos(xz)\widehat{j} + y\cosh z\widehat{k}$ y S se limita por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

47. Demostrar

$$\int_S \widehat{r} \times d\overrightarrow{S} = -\oint_{\mathscr{C}} r\, d\overrightarrow{r}$$

48. Demostrar

$$\int_S d\overrightarrow{S} \times \overrightarrow{r} = \frac{1}{2}\oint_{\mathscr{C}} r^2 d\overrightarrow{r}$$

49. Demostrar

$$5\int_V r^4 \overrightarrow{r}\, dV = \oint_S r^5 d\overrightarrow{S}$$

50. Demostrar

$$\oint_S \overrightarrow{F} \times d\overrightarrow{S} = -\int_V \nabla \times \overrightarrow{F} dV$$