2^{do} Problemario de Calculo Multivariable

Prof. Miguel Abel León Hernández

1. Determine el dominio de la siguientes funciones

   a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{(y+1)^2-x-1}}{\ln(x-y)}$
   b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-y} + \sqrt{x-y}$
   c) $f(x,y) = \frac{\ln\left(x^2-3(y+2)\right)}{x+y-1}$
   d) $f(x,y) = \sqrt{y-x}\,\ln(x-y)$
   e) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}}}{x-y}$
   f) $f(x,y) = \frac{\sqrt{(y+1)^2-x-1}}{\ln(x-2y-1)}$

2. Dibuje el mapa de las siguentes superficies de nivel

   a) $f(x,y) = (y-2x)^2$
   b) $f(x,y) = x^3 - y$
   c) $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$
   d) $f(x,y) = \sqrt{y-x}\,\ln(x-y)$
   e) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}}}{x-y}$
   f) $f(x,y) = \frac{\sqrt{(y+1)^2-x-1}}{\ln(x-2y-1)}$

3. Describa las siguentes superficies de nivel

   a) $f(x,y) = x + 3y + 5z$
   b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + z^2$

4. Haga corresponder la función con su gráfica (marcada de I a VI). Ofrezca las razones de su elección

   a) $f(x,y) = |x| + |y|$
   b) $f(x,y) = |xy|$
   c) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$
   d) $f(x,y) = (x^2-y^2)^2$
   e) $f(x,y) = (x-y)^2$
   f) $f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$

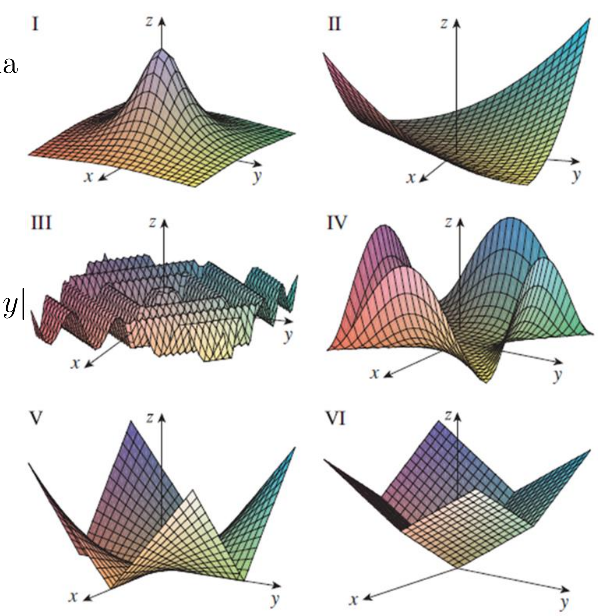

Figura 1: para el problema 4

5. Relaciones las ecuaciones con la gráfica correspondiente I a VI y exponga las razones de su respuesta. Determine que familias de curvas reticulares u es constante y en cuales v es constante

   a) $\overrightarrow{r}(u,v) = u\cos v\widehat{i} - u\sin v\widehat{j} - v\widehat{k}$

   b) $\overrightarrow{r}(u,v) = u\cos v\widehat{i} - u\sin v\widehat{j} - \sin v\widehat{k}$

   c) $\overrightarrow{r}(u,v) = \sin v\widehat{i} - \cos u\sin 2v\widehat{j} - \sin u\sin 2v\widehat{k}$

   d) $$\begin{cases} x = (1-u)(3+\cos v)\cos 4\pi u \\ y = (1-u)(3+\cos v)\sin 4\pi u \\ z = 3u + (1-u)\sin v \end{cases}$$

   e) $$\begin{cases} x = \cos^3 u \cos^3 v \\ y = \sin^3 u \sin^3 v \\ z = 3u + (1-u)\sin^3 v \end{cases}$$

   f) $$\begin{cases} x = (1-|u|)\cos v \\ y = (1-|u|)\sin v \\ z = u \end{cases}$$

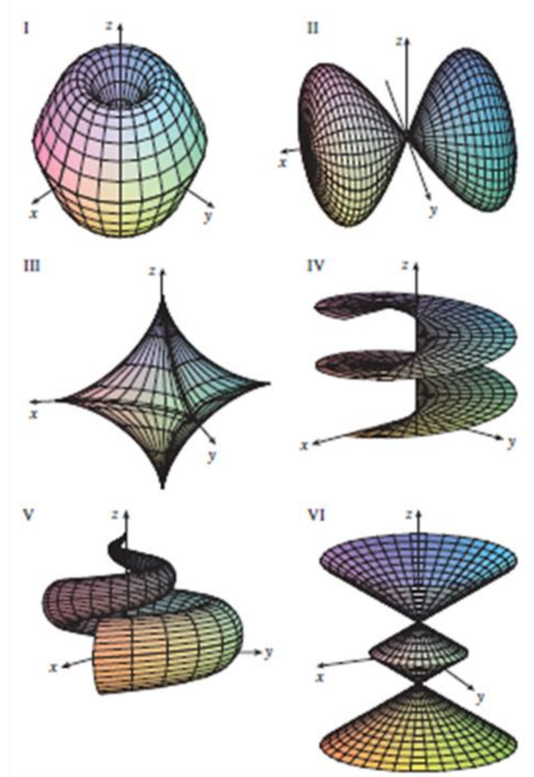

Figura 2: para el problema 5

6. Use computadora para graficar las siguientes funciones

   a) $f(x,y) = e^{-x^2} + e^{-2}y^2$
   b) $f(x,y) = (1-3x^2+y^2)\,e^{1-x^2-y^2}$

7. Use computadora para graficar las siguientes funciones en los intervalos espesificados

   a) $\overrightarrow{r}(u,v) = (u^2+1, v^3+1, u+v) \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, \quad -1 \leqslant v \leqslant 1$
   b) $\overrightarrow{r}(u,v) = (u+v, u^2, v^2) \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, \quad -1 \leqslant v \leqslant 1$
   c) $\overrightarrow{r}(u,v) = (u^2\cos(v), u\sin(v), u^5) \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

8. Conociendo la grafica de $f(x,y)$. Describa la modificacion bajo las siguientes operaciones

   a) $g(x,y) = f(x,y) + 2$
   b) $g(x,y) = -f(x,y)$
   c) $g(x,y) = f(x-2,y)$
   d) $g(x,y) = f(x+3,y-4)$
   e) $g(x,y) = 2 - f(x,y)$

9. Evalue los siguientes límites

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2\right)+y^2)}{x^2y^2}$
   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^3}{x^2+y^4}$
   d) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2+y^2-2x-2y}{x^2+y^2-2x+2y+2}$
   e) $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}{x+2y}$
   f) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$

10. Calclular

    a) $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{f(t)} \bullet \left(\frac{d\overrightarrow{f(t)}}{dt} \times \frac{d^2\overrightarrow{f(t)}}{dt^2}\right)\right)$
    b) $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{f}\,(t) \bullet \left(t\overrightarrow{f}\,(t)\right)\right)$
    c) $\frac{d}{dt}\left(t^3\overrightarrow{f}\,(t^2)\right)$

    el siguiente par de ejercicios son para aplicacion o computadora

11. Primer ejercicio

    Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de las ecuaciones vectoriales dadas en el punto especificado. Ilustre meiante gráficas tanto la curva como la recta tangente en la misma pantalla

    a) $\overrightarrow{r_1} = t\widehat{i} + e^{-t}\widehat{j} + (2t-t^2)\,\widehat{k}$ en $(0,1,0)$
    b) $\overrightarrow{r_2} = 2\cos t\widehat{i} + 2\sin t\widehat{j} + 4\cos 2t\widehat{k}$ en $(\sqrt{3},1,2)$
    c) $\overrightarrow{r_3} = t\cos t\widehat{i} + t\widehat{j} + t\sin t\widehat{k}$ en $(-\pi,\pi,0)$

12. Segundo ejercicio

    a) Encuentre el punto de intersección de las rectas tengentes a la curva $\overrightarrow{r} = \sin(\pi t)\,\widehat{i} + 2\sin(\pi t)\,\widehat{j} + \cos(\pi t)\,\widehat{k}$, en los puntos donde $t=0$ y $t=\frac{1}{2}$
    b) ilustre mediante gráficas la curva y ambas tangentes

13. Las curvas $\overrightarrow{r_1} = t\widehat{i} + t^2\widehat{j} + t^3\widehat{k}$ y $\overrightarrow{r_2} = \sin t\widehat{i} + \sin 2t\widehat{j} + t\widehat{k}$, se cortan en el origen. Determine el ángulo de corte aproximado al grado más cercano

14. ¿En que punto se intersecan las curvas $\overrightarrow{r_1}(t) = t\widehat{i} + (1-t)\,\widehat{j} + (3+t^2)\,\widehat{k}$ y $\overrightarrow{r_2}(s) = (3-s)\,\widehat{i} + (s-2)\,\widehat{j} + (s^2)\,\widehat{k}$?. Encuentre el ángulo de intersección, ajuste al grado mas próximo

15. Las superficies siguientes,marcadas con a, b y c son gráficas de la función f y sus derivadas parciales f_x y f_y indique cada superficie y explique la razón de su elección

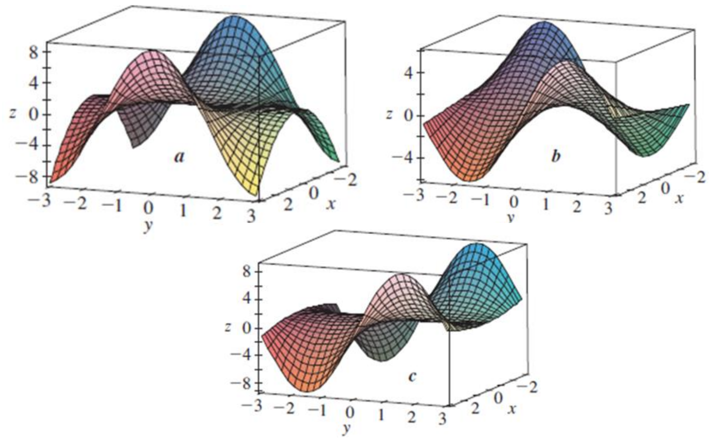

Figura 3: para el problema 15

16. Calcular los términos de primer y segundo orden del polinomio de Taylor alrededor de los puntos indicados para las siguientes funciones

    a) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^2}$, $\overrightarrow{a} = (0,0)$
    b) $f(x,y) = e^{2x+y}$, $\overrightarrow{a} = (0,0)$
    c) $f(x,y) = e^{2x}\cos(3y)$, $\overrightarrow{a} = (0,\pi)$
    d) $f(x,y,z) = e^x\cos y + e^y \sin z$, $\overrightarrow{a} = (0,0,\pi)$

17. Calcular los términos de primer y segundo orden del polinomio de Taylor alrededor de $\overrightarrow{0}$ para las siguiente funcion

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = e^{x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n}$$

18. Se tiene una superficie dada por $\overrightarrow{F} = (3u-v^2)\,\widehat{i} + 2uv\widehat{j} + (2u+5v)\,\widehat{k}$. Calcular el vector normal a $\overrightarrow{F}$ en el punto $(2,2,7)$

19. Si $\overrightarrow{F} = uvw\widehat{i} + uw^2\widehat{j} - v^3\widehat{k}$, calcular $\frac{\partial^2\overrightarrow{F}}{\partial u \partial v}$

20. Calcular el rotacional y la divergencia del campo vectorial dado

    a) $\overrightarrow{F} = (xz)\,\widehat{i} + (yz)\,\widehat{j} + (xy)\,\widehat{k}$
    b) $\overrightarrow{F} = (10yz)\,\widehat{i} + (2x^2z)\,\widehat{j} + (6x^3)\,\widehat{k}$
    c) $\overrightarrow{F} = (4xy)\,\widehat{i} + (2x^2+2yz)\,\widehat{j} + (3z^2+y^2)\,\widehat{k}$
    d) $\overrightarrow{F} = (x-y)^3\,\widehat{i} + (e^{-yz})\,\widehat{j} + (yze^{-2y})\,\widehat{k}$
    e) $\overrightarrow{F} = (5y^3)\,\widehat{i} + \left(\frac{x^3y^2}{2} - xy\right)\widehat{j} - (x^3yz - xz)\,\widehat{k}$
    f) $\overrightarrow{F} = (xye^x)\,\widehat{i} - \left(\frac{x^3yz}{e^{-z}}\right)\widehat{j} + (xy^2e^y)\,\widehat{k}$

21. Hallar el valor de las constantes a, b y c de forma que la derivada de la función $\phi = axy^2 + byz + cx^2z^2$, en el punto $(1,2,-1)$ tenga un máximo de un modulo 64 en dirección del eje z.

22. Siendo $\overrightarrow{A} = 3xyz^2\widehat{i} + 2xy^2\widehat{j} - x^3yz\widehat{k}$ y $\phi = 3x^2 - yz$, hallar

   a) $\nabla \bullet \overrightarrow{A}$
   b) $\overrightarrow{A} \bullet \nabla\phi$
   c) $\nabla \bullet \left(\phi\overrightarrow{A}\right)$
   d) $\nabla \bullet (\nabla\phi)$

   en el punto $(1, -1, 1)$

23. Para que valor de a el campo $\overrightarrow{A} = (axy - z^3)\,\widehat{i} + (a-2)\,x^2\widehat{j} + (1-a)\,xz^2\widehat{k}$, se cumple $\nabla \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$

24. Si $\phi = (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{a}) \bullet \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{b}\right)$, calcular $\nabla\phi$

25. Siendo $\nabla U = 2r^4\overrightarrow{r}$, calcular U

26. Calcular

   a) $\nabla^2 (\ln r)$
   b) $\nabla^2 (r^n)$
   c) $\nabla \left(3r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{\sqrt[3]{r}}\right)$
   d) Calcular $\nabla \times ((\overrightarrow{r} \bullet \overrightarrow{r})\,\overrightarrow{a})$
   e) Calcular $\nabla \bullet ((\overrightarrow{r} \bullet \overrightarrow{r})\,\overrightarrow{a})$
   f) Calcular $\nabla \bullet (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r})$
   g) Calcular $\nabla (r^n\overrightarrow{r})$
   h) Calcular $\nabla^2 \left[\nabla \bullet \left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}\right)\right]$
   i) $\nabla [\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{r} f(r)]$
   j) $\nabla \bullet [(\overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{r})\,\overrightarrow{a}]$
   k) $\nabla \times [(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{r}) \times \overrightarrow{r}]$
   l) $\nabla \left(\frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{r}}{r^3}\right) + \nabla \times \left(\frac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{r}}{r^3}\right)$
   m) $\nabla \left(\overrightarrow{a} \bullet \nabla \left[\frac{1}{r}\right]\right) + \nabla \times \left(\overrightarrow{a} \times \nabla \left[\frac{1}{r}\right]\right)$

27. Para que valores de m y n $\overrightarrow{F} = (xyz)^m \left(x^n\widehat{i} + y^n\widehat{j} + z^n\widehat{k}\right)$ se tiene $\nabla \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

28. Verificar la identidad $\nabla \bullet \left[\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{r}\right] = \overrightarrow{r} \bullet \left(\nabla \times \overrightarrow{F}\right)$

29. Sea $\phi = 2xz^4 - x^2y$ hallar $\nabla\phi$, $|\nabla\phi|$ en el punto $(2, -2, -1)$

30. Encuentre el vector unitario normal a la superficie $xz^2 + x^2y = z - 1$, en el punto $(1, -3, 2)$

31. encuentre el plano tangente a la superficie en el punto que se especifica

   a) $z = 4x^2 - y^2 + 2y, \quad (-1, 2, 4)$
   b) $z = \sqrt{xu}, \quad (1, 1, 1)$
   c) $z = e^{x^2 - y^2}, \quad (1, -1, 1)$

32. Hallar el ángulo agudo entre las superficies $xy^2z = 3x + z^2$ y $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ en el punto $(1, -2, 1)$

33. Demuestre que la ecuacion del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) que pertenece a ella se puede escribir como

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

34. Demuestre que la ecuacion del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ en el punto (x_0,y_0,z_0) que pertenece a ella se puede escribir como

$$\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=\frac{z_0+z}{c}=1$$

35. Sea $f=e^{x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n}$, calcular $(Df)|_{\vec{x}=\vec{0}}$

36. Si $u=e^{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n}$ donde $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=1$, demostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=u$$

37. Encuentre le ecuacion del hiperplano tangene a la hiperesfera $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=1$ en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\in\subset\mathbb{R}^n$

38. Encuentre le ecuacion del hiperplano tangene a la hiperelipsoide $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+\cdots+nx_n^2=1$ en el punto $(-1,-1,-1,\ldots,-1)\in\subset\mathbb{R}^n$

39. Encuentre los puntos criticos de las sigueientes funciones

    a) $z=3x-x^3-3xy^2$
    b) $z=6xy^2-2x^3+3y^4$
    c) $z=2x^3+y^3-3x^2-12x-3y$
    d) $z=3x^2+12x+4y^3-6y^2+5$
    e) $z=3x^4+4x^3+6y^4-16y^3+12y^2$
    f) $z=(x^2-y^2)\,e^{-x^2-y^2}$
    g) $z=x^2+xy+y^2+\frac{a^3}{x}+\frac{a^2}{y}$
    h) $f=xy^2z^3\,(a-x-2y-3z)\,,\quad a>0$
    i) $f=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b},\quad 0<x,0<y,0<z,0<a,0<b$

40. ¿Para cuales valores de k esta generalizado mediante el criterio del hessiano que la funcion $f=x^2+kxy+y^2$ tendrá

    a) en $(0,0)$ es un punto silla?
    b) en $(0,0)$ es un mínimo local?

41. Sea $f=2(x_1-1)^2-3(x_2-2)^2+\cdots+(-1)^{n+1}(n+1)(x_n-n)^2$, muestre que tiene un punto crítico en $(1,2,3,\ldots,n)\in\mathbb{R}^n$

42. Problema de Huygens. Entre los números positivos a y b hay que introducir n números $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$de tal modo que la fracción

$$u=\frac{x_1x_2x_3\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}$$

sea máxima

43. Calcular la matriz Hessiana alrededor de $\vec{0}$ para las siguiente funcion

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=e^{x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n}$$

44. Encuentre los puntos criticos de las sigueientes funciones bajo las condiciones dadas

    a) $f = x^2 - y^2, \quad xy = 1$
    b) $f = x^2 y, \quad x^2 + 2y^2 = 6$
    c) $f = e^{xy}, \quad x^3 + y^3 = 16$
    d) $f = xyz, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
    e) $f = x^2 + y^3 + 1, \quad x^2 - y^2 = -1$
    f) $f = 9 - x^2 - y^2, \quad x + y = 3$
    g) $f = x^m + y^m, (m > 1) \quad x + y = 2$
    h) $f = xy, \quad x^2 + y^2 = 2a^2$
    i) $f = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (0 < c < b < a)$

45. Encuentre el valor mínimo de $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ sujeto a la condición $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 1$ asumiendo que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant 0$

46. Encuentre el valor mínimo de $f = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n)^2$ sujeto a la condición $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ asuma que no todos los valores de a_i son cero

47. Sea R_{uv} el cuadrado $0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1$ grafique los siguientes mapeos hacia R_{xy}

    a) $\begin{cases} x = 5u - u^2 + v^2 \\ y = 5v + 10uv \end{cases}$
    b) $\begin{cases} x = u + u^2 \\ y = e^v \end{cases}$
    c) $\begin{cases} x = u + u^2 \\ y = e^v \end{cases}$
    d) $\begin{cases} x = ue^v \\ y = e^v \end{cases}$
    e) $\begin{cases} x = u + u^2 \\ y = e^v \end{cases}$
    f) $\begin{cases} x = u + u^2 \\ y = e^v \end{cases}$

48. Encuentre la matriz jacobiana de las siguientes transformaciones

    a) $\begin{cases} y_1 = u_1^2 + u_2^2 - 3u_1 + u_3 \\ y_2 = u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 - 3u_3 \end{cases}$
    b) $\begin{cases} y_1 = u_1 e^{u_2} \\ y_2 = u_1 e^{-u_2} \\ y_3 = u_1^2 \end{cases}$
    c) $\begin{cases} y_1 = x_1x_2 - \frac{x_2}{x_2} \\ y_2 = x_1 + e^{-x_2} - x_3 \\ y_3 = x_1^2 - \frac{x_2}{x_3} \end{cases}$
    d) $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1^3 - e^{x_2x_3} \end{cases}$
    e) $\begin{cases} x = u + u^2 \\ y = e^v \end{cases}$
    f) $\begin{cases} x = u + u^2 \\ y = e^v \end{cases}$

49. Calcular la matriz $D(fog)$ de dos maneras

a) haciendo primero la sustitucion y despues calcular la matriz jacobiana

b) Usando el teorema de la regla de la cadena para composicion de trsansformaciones

a) $f = x^2 - 3y^2, \quad \overrightarrow{g} = (st, s + t^2)$

b) $\overrightarrow{f} = \left(xy - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} + y^3\right), \quad \overrightarrow{g} = \left(\frac{s}{t}, s^2 t\right)$

c) $\overrightarrow{f} = x^2 y + y^2 z, xyz, e^z, \quad \overrightarrow{g} = (t - 2, 3t + 7, t^3)$

d) $\overrightarrow{f} = \left(x^2 - y, \frac{y}{x}, e^y\right), \quad \overrightarrow{g} = (s + 2t + 3u, stu)$

e) $\overrightarrow{f} = (x + y + z, x^3 - e^{yz}), \quad \overrightarrow{g} = (st, tu, su)$

50. Para la siguiente par de transformaciones calcular la matriz $D(fog)$ evaluada en $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$

$$\begin{cases} y_1 = u_1^2 + \cdots + u_n^2 - u_1^2 \\ y_2 = u_1^2 + \cdots + u_n^2 - u_2^2 \\ \vdots \\ y_1 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - u_n^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_1 x_2 \\ u_2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 \\ \vdots \\ u_n = x_1^2 + n x_1 x_2 \end{cases}$$