Análisis Vectorial «Operador diferencial Nabla»

9 de mayo de 2022

Índice

[1] $\nabla^2=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

1. Ejercicios Gradiente, Divergencia y Rotacional

Calcular la siguientes operaciones vectoriales.

1.1. Gradiente de $f(r) \longmapsto \vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$

$f(r)$ es una función cualquiera que depende solo del modulo de $r = |\vec{r}|$. Hay que tener en cuenta $\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ que el vector de posición es una función que depende de las tres variables espaciales (x, y, z). Se aplica la regla de la cadena para evaluar las derivadas parciales.

$$\vec{\nabla} f(r) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z}\hat{k} =\downarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k} =\rightarrow$$

Se evaluá $\frac{\partial r}{\partial x}$ (las otras variables sera semejantes)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{y}{r}\hat{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{z}{r}\hat{k} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}\right) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

1.2. Gradiente $r^n \longrightarrow \vec{\nabla} r^n = n r^{n-2}\vec{r}$

Un caso particular de $f(r)$ de interés es el caso de $f(r) = r^n$ para cual se tiene que:

$$\vec{\nabla} r^n = n r^{n-2}\vec{r} \longleftarrow \text{Para}\, n \in \mathbb{Z}\, y\, \vec{r} \neq 0$$

(Para $n > 0$ y par , también se cumple para $\vec{r} = 0$)

1.3. Evaluar $\vec{\nabla}\phi$ para $\phi = \ln|\overrightarrow{r}|$ y $\phi = \frac{1}{r}$

El vector de posición esta dado por $\overrightarrow{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ y su modulo por $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, por tanto la función estada por la expresión $\phi = \ln|\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

- $\vec{\nabla}\ln|\overrightarrow{r}|$

$$\vec{\nabla}\ln|\overrightarrow{r}| = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)\hat{k}\right\} =$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\hat{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\hat{j} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\hat{k}\right\} =$$
$$\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^2}$$

- $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$-

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$$
$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\hat{k}\right\} =$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\left(2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\hat{i} + \left(2y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\hat{j} + \left(2z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\hat{k}\right\} =$$
$$\frac{-\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

1.4. Divergencia de $\vec{r} \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$

Se utiliza directamente la definición del operador diferencial nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = \overbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}^{1} \overbrace{\hat{i} \cdot \hat{i}}^{1} + \overbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}^{1} \overbrace{\hat{j} \cdot \hat{j}}^{1} + \overbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}^{1} \overbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}^{1} = \downarrow$$

$$\rightarrow 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3}$$

Observación. los productos escalares del tipo $\hat{i} \cdot \hat{j}$ se anulan por ser ortogonales los vectores unitarios.

1.5. Divergencia de $f(r)\vec{r} \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = 3 + r\frac{df}{dr}$

$f(r)$ es una función cualquiera que depende solo del modulo de $r = |\vec{r}|$. Se aplica la definición del operador diferencial nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial x}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial x}\hat{k}$ sobre el campo vectorial definido por $f(r)\vec{r} = xf(r)\hat{i} + yf(r)\hat{j} + zf(r)\hat{k}$.

$$\vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(xf(r)\hat{i} + yf(r)\hat{j} + zf(r)\hat{k}\right) =$$

Observación. los productos escalares del tipo $\hat{i} \cdot \hat{j}$ se anulan por ser ortogonales los vectores unitarios.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xf(r)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(yf(r)\right) + \frac{\partial}{\partial z}zf(r) = f + x\frac{\partial}{\partial x}f(r) + f + y\frac{\partial}{\partial y}f(r) + f + z\frac{\partial}{\partial z}f(r) = \downarrow$$

Utilizando la regla de la cadena par la derivación.

$$\rightarrow 3f + x\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \downarrow$$

Usando el siguiente (las otras variables sera semejantes).

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\longrightarrow 3f + x\frac{df(r)}{dr}\frac{x}{r} + y\frac{df(r)}{dr}\frac{y}{r} + z\frac{df(r)}{dr}\frac{z}{r} = 3f + \frac{df(r)}{dr}\frac{x^2}{r} + \frac{df(r)}{dr}\frac{y^2}{r} + \frac{df(r)}{dr}\frac{z^2}{r} =$$

$$3f + \frac{df(r)}{dr}\left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r}\right) = 3f + \frac{df(r)}{dr}r$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot f(r)\vec{r} = 3 + r\frac{df}{dr}}$$

1.6. Rotacional de $\vec{r} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$

Se aplica la forma matricial del producto vectorial.

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\hat{k} = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0}$$

Observación 1. todas las derivadas parciales se anulan.

1.7. Rotacional de $\frac{\vec{r}}{r} \longmapsto \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} = 0$

Se hace uso de la formula $\vec{\nabla} \times (a\vec{A}) = (\vec{\nabla}a) \times \vec{A} + a(\vec{\nabla} \times \vec{A}))$ donde a es un escalar y $\vec{A}$ es un campo vectorial, como es el caso del vector de posición, a cada punto del espacio se le asigna un vector $\vec{r}(x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} = (\vec{\nabla}\frac{1}{r}) \times \vec{r} + \frac{1}{r}(\vec{\nabla} \times \vec{r}))$$

El primer termino contiene $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$ y se evaluá haciendo uso de la expresión: $\vec{\nabla}f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r} = \left(-\frac{1}{r^3}\right)\vec{r}$$

Por tanto se tiene que $(\vec{\nabla}\frac{1}{r}) \times \vec{r} = \left(-\frac{1}{r^3}\right)\cancel{\vec{r}\times\vec{r}} = 0$ y el segundo termino se anula usando la deducción de ejercicio (1.2).

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} = \left(-\frac{1}{r^3}\right)\cancel{\vec{r}\times\vec{r}} + \frac{1}{r}(\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{r}}) = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} = 0}$$

1.8. Rotacional de $\vec{r}f(r) \longrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{r}f(r))$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{r}f(r)) = \vec{\nabla} \times \left(xf(r)\vec{i} + yf(r)\vec{j} + xf(r)\vec{k}\right) =$$
$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} =$$
$$\left(\frac{\partial\left(zf(r)\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(yf(r)\right)}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial\left(zf(r)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xf(r)\right)}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial\left(yf(r)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xf(r)\right)}{\partial y}\right)\hat{k} =$$
$$\left(z\frac{\partial f(r)}{\partial y} - y\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(z\frac{\partial f(r)}{\partial x} - x\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(y\frac{\partial f(r)}{\partial x} - x\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Se hace uso de la regla de la cadena.

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{xf'(r)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xf'(r)}{r}$$

De forma análoga para las otras derivadas $\frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{yf'(r)}{r}$ y $\frac{\partial f(r)}{\partial z} = \frac{zf'(r)}{r}$.

El resultado final.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{r}f(r)) = \left(\cancelto{0}{zy\frac{f'(r)}{r} - yz\frac{f'(r)}{r}}\right)\hat{i} - \left(\cancelto{0}{zx\frac{f'(r)}{r} - xz\frac{f'(r)}{r}}\right)\hat{j} + \left(\cancelto{0}{yx\frac{f'(r)}{r} - xy\frac{f'(r)}{r}}\right)\hat{k} = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{r}f(r)) = 0}$$

1.9. Evaluar $\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}=\vec{u}$

$\vec{u}$ es un vector cualquiera definido por la expresión $\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$, y $\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)$ es un escalar que acompaña al vector de posición $\vec{r}$.

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \left(u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\vec{r} = u_x\hat{i}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\vec{r} +$$

$$+u_y\hat{j}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\vec{r} + u_z\hat{k}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\vec{r} = \left(u_x\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{\hat{i}\cdot\hat{i}}^{1} + u_x\frac{\partial}{\partial y}\cancel{\hat{i}\cdot\hat{j}} + u_x\frac{\partial}{\partial z}\cancel{\hat{i}\cdot\hat{k}}\right)\vec{r} +$$

$$\left(u_y\frac{\partial}{\partial x}\cancel{\hat{j}\cdot\hat{i}} + u_y\frac{\partial}{\partial y}\overbrace{\hat{j}\cdot\hat{j}}^{1} + u_y\frac{\partial}{\partial z}\cancel{\hat{j}\cdot\hat{k}}\right)\vec{r} + \left(u_z\frac{\partial}{\partial x}\cancel{\hat{k}\cdot\hat{i}} + u_z\frac{\partial}{\partial y}\cancel{\hat{k}\cdot\hat{j}} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\overbrace{\hat{k}\cdot\hat{k}}^{1}\right)\vec{r} = \downarrow$$

$$\rightarrow \left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{r} = \left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = \downarrow$$

$$\rightarrow u_x\frac{\partial x}{\partial x}\hat{i} + u_y\frac{\partial y}{\partial y}\hat{j} + u_z\frac{\partial z}{\partial z}\hat{k} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$$

Observación. Solo quedan las derivadas del tipo $\frac{\partial x}{\partial x}$, el resto como $\frac{\partial y}{\partial x}$ se anulan.

Observación 2. No es lo mismo $u_x\hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\hat{i}$ que $\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} \cdot u_x\hat{i}$, en el segundo caso hay que evaluar la derivada de u_x respecto de x y en el primero la derivada se avaluá sobre una «función determinada» y después se hace el producto escalar.

1.10. ¿Es conservativo el campo $\vec{A} = (yz, xz, xy)$

La condición que determina si un campo vectorial es conservativo es, si cumple que rotacional vale caro$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\,(xy)}{\partial y} - \frac{\partial\,(xz)}{\partial z}\right)\vec{i} -$$
$$\left(\frac{\partial\,(xy)}{\partial x} - \frac{\partial\,(yz)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\,(xz)}{\partial x} - \frac{\partial\,(yz)}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

Por tanto $\vec{A}$ es conservativo y se puede encontrar una función escalar que cumple $\vec{\nabla}\Phi = \vec{A}$, por tanto se tiene que cumplir:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy) \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = yz \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy \end{cases}$$

Para determinar Φ se integra sucesivamente las condiciones.

1. $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = yz$

$$\int d\Phi = \int yzdx \longrightarrow \Phi = yzx + g(y, z)$$

$g(y, z)$ es una función cualquiera en las variables (y, z)

2. $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(yzx + g(y,z)\right) = xz \longrightarrow zx + \frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = zx$$
$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = 0 \longrightarrow g(y,z) = g'(z)$$

Por tanto $\Phi = yzx + g(z)$

3. $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(yzx + g'(z)\right) = xy \longrightarrow yx + \frac{\partial}{\partial z}g'(z) = xy$$
$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}g'(z) = 0 \longrightarrow g'(z) = C$$

Por tanto la solución será $\Phi = yzx + C$

1.11. Estudiar campo velocidades de un Gas

El campo de velocidades de un gas esta determinado por el campo vectorial $G(x,y,z) = (1 + y^2e^x + z, -yz^2, yz\sin x)$.

Se plantea determinar si el gas en el punto $(\pi, 0, 2)$ se esta expandiendo o se contrae. Para ello se calcula la divergencia y se evaluá en dicho punto.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(\left(1 + y^2e^x + z\right)\vec{i} + \left(-yz^2\right)\vec{j} + \left(yz\sin x\right)\vec{k}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + y^2e^x + z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-yz^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(yz\sin x\right) = e^xy^2 - z^2 + y\sin(x)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = e^xy^2 - z^2 + y\sin(x)$$

Se evaluá en el punto $(\pi, 0, 2)$ para obtener que la divergencia es negativa, por tanto el gas se comprime en ese punto.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G}=e^x y^2-z^2+y\sin(x)\Big|_{(\pi,0,2)}=-4<0$$

1.12. Siendo $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\nabla^2$ evaluar $\nabla^2 f(r)=\frac{d^2 f(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr}$

El operador ∇^2 se conoce como Laplaciano y se obtiene del producto escalar de dos operadores nabla diferenciales $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$, es decir.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)=$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cancelto{1}{\left(\hat{i}\cdot\hat{i}\right)}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cancelto{1}{\left(\hat{j}\cdot\hat{j}\right)}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cancelto{1}{\left(\hat{k}\cdot\hat{k}\right)}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Por tanto, el operador diferencial que se aplica a la función $f(r)$ es $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ y hay que evaluar la siguiente expresión.

$$\nabla^2 f(r)=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}$$

Se empieza por desarrollar el primer termino $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(r))$ y se hace uso de la regla de la cadena y del siguiente resultado previo.

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Longleftrightarrow\frac{\partial(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(r))=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(f(r))\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overbrace{\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}}^{regla\,cadena}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{x}{r}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)\frac{x}{r}+\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\overbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}}^{regla\,cadena}\frac{x}{r}+\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=$$
$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r}+\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)$$

Usando el siguiente resultado

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Longleftrightarrow\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}$$
$$=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y^2+z^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y^2+z^2}{r^3}$$

Se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(r))=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\frac{x}{r}\frac{x}{r}+\frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{y^2+z^2}{r^3}\right)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(r))=\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{y^2+z^2}{r^3}\right)$$

Haciendo este mismo desarrollo para los otros términos, obtiene lo siguiente.

$$\nabla^2 f(r) = \left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{y^2+z^2}{r^3}\right)\right) +$$
$$\left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{x^2+z^2}{r^3}\right)\right) + \left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{y^2+x^2}{r^3}\right)\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right) + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{y^2+z^2}{r^3} + \frac{x^2+z^2}{r^3} + \frac{x^2+z^2}{r^3}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}\left(\cancelto{1}{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}}\right) + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{2y^2+2z^2+2x^2}{r^3}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{2y^2+2z^2+2x^2}{r^3}\right) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + 2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^3}\right) =$$
$$\boxed{\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}}$$

1.13. Integración por partes del Gradiente

Se trata de probar la siguiente formula $\int \vec{A}(\vec{r})\cdot\nabla f(\vec{r})d^3r = -\int f(\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})d^3r$, donde $\vec{A}(\vec{r})$ o f o ambos se hacen cero en el infinito, así que las partes integradas se anulan. Esta condición se cumple si, por ejemplo, $\vec{A}(\vec{r})$ es el potencial vectorial electromagnético y f es una función de onda de estado límite $\psi(\vec{r})$.

Escribiendo el producto interior en coordenadas cartesianas, integrando cada integral unidimensional por partes, y desechando los términos integrados, se obtiene.

$$\begin{aligned}
&\int \vec{A}(\vec{r})\cdot\nabla f(\vec{r})d^3r = \iint \left[A_x f|_{x=-\infty}^{\infty} - \int f\frac{\partial A_x}{\partial x}dx\right]dydz + \cdots \\
&= -\iiint f\frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz - \iiint f\frac{\partial A_y}{\partial y}dydxdz - \iiint f\frac{\partial A_z}{\partial z}dzdxdy \\
&= -\int f(\vec{r})\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})d^3r
\end{aligned}$$

Si $\vec{A} = e^{ikz}$ê describe un fotón saliente en la dirección del vector unitario de polarización constante ê y $f = \psi(\vec{r})$ es una función de onda de estado límite que decae exponencialmente, entonces

$$\int e^{ikz}\hat{\mathbf{e}}\cdot\nabla\psi(\vec{r})d^3r = -e_z\int\psi(\vec{r})\frac{de^{ikz}}{dz}d^3r = -ike_z\int\psi(\vec{r})e^{ikz}d^3r,$$

porque sólo contribuye la componente z del gradiente.

1.14. Integración por partes de la Divergencia

Se trata de probar la siguiente formula $\int f(\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})d^3r = -\int\vec{A}(\vec{r})\cdot\nabla f d^3r$\$, donde $\vec{A}(\vec{r})$ o f o ambos se hacen cero en el infinito.

Para demostrarlo, se procede por integración por partes, después de escribir el producto escalar en coordenadas cartesianas. Como los términos integrados se evalúan en el infinito, donde desaparecen, se obtiene.

$$\begin{aligned}\int f(\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})d^3r &= \int f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial A_y}{\partial y}dydxdz + \frac{\partial A_z}{\partial z}dzdxdy\right)\\ &= -\int\left(A_x\frac{\partial f}{\partial x}dxdydz + A_y\frac{\partial f}{\partial y}dydxdz + A_z\frac{\partial f}{\partial z}dzdxdy\right)\\ &= -\int\vec{A}(\vec{r})\cdot\nabla f d^3r\end{aligned}$$

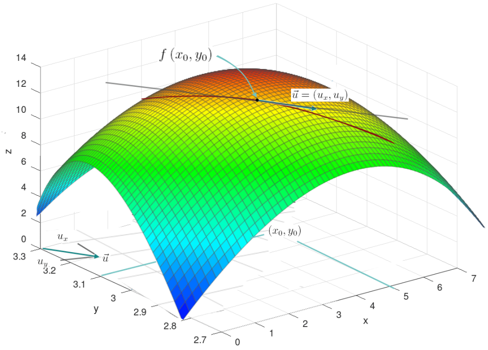
2. Notas

2.1. Derivada Direccional

La «**derivada direccional**» sobre un vector unitario definido a través de su componentes $\vec{u} = (u_x, u_y)$, esta definida como el siguiente limite:

$$D_{\vec{u}}f\left(x_0, y_0\right) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(x_0+\lambda u_x, y_0+\lambda u_y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\lambda}$$

En el caso $\mathbb{R}^2$ un vector unitario puede darse, en función de sus «componentes polares» $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$, para algún angulo $\theta \epsilon \, [0, 2\pi]$. En función del **valor que tome θ se estará eligiendo una dirección** en $\mathbb{R}^2$.



La derivada direccional en el punto (x_0, y_0) se pude expresar como sigue.

$$D_{\vec{u}} f\left(x_0, y_0\right) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left(x_0 + \lambda\cos\theta, y_0 + \lambda\sin\theta\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\lambda}$$

- Ejemplo

  Dada la función determinada por la siguiente ecuación, evaluar la derivada direccional en la dirección marcada por $\theta = \frac{\pi}{4}$ y en el punto $(0, 0)$.

$$f\left(x, y\right) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{\frac{\pi}{4}} f\left(0, 0\right) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left(0 + \lambda\cos\frac{\pi}{4}, y_0 + \lambda\sin\frac{\pi}{4}\right) - f\left(0, 0\right)}{\lambda} \longmapsto D_{\frac{\pi}{4}} f\left(0, 0\right) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{(0+\lambda\cos\frac{\pi}{4})^3 + (0+\lambda\sin\frac{\pi}{4})^3}{(0+\lambda\cos\frac{\pi}{4})^2 + (0+\lambda\sin\frac{\pi}{4})^2} - 0}{\lambda} =$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda^3\left(\cos^3\frac{\pi}{4} + \lambda\sin^3\frac{\pi}{4}\right)}{\lambda^2} - 0}{\lambda} = \cos^3\frac{\pi}{4} + \lambda\sin^3\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.2. Operador Nabla - Derivada Direccional

La derivada direccional de una función $f\left(x, y\right)$ en el punto (x_0, y_0), según la dirección de un vector unitario, $\vec{u} = (u_x, u_y)$, esta dada por la expresión $D_{\vec{u}} f\left(x_0, y_0\right)$ y definida por el siguiente límite.

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}}f\left(x_0,y_0\right) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x_0+u_x\lambda,y_0+u_y\lambda)-f(x_0,y_0)}{\lambda}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+u_x\lambda,y_0+u_y\lambda)-f(x_0,y_0+u_y\lambda)+f(x_0,y_0+u_y\lambda)-f(x_0,y_0)}{\lambda}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+u_x\lambda,y_0+u_y\lambda)-f(x_0,y_0+u_y\lambda)}{\lambda}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+u_y\lambda)-f(x_0,y_0)}{\lambda}
\end{aligned}
$$

El primero de límites puede calcularse mediante el cambio $\lambda' = u_x\lambda$ lo cual lleva, por ser diferenciable la función (existen las derivadas parciales), a la siguiente expresión.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda'\to 0}\frac{f(x_0+\lambda',y_0+u_y\lambda'/u_x)-f(x_0,y_0+u_y\lambda'/u_x)}{\lambda'/u_x}=\\
&=(u_x)\cdot\lim_{\lambda'\to 0}\frac{f(x_0+\lambda',y_0+u_y\lambda'/u_x)-f(x_0,y_0+u_y\lambda'/u_x)}{\lambda'}=\cdots
\end{aligned}
$$

El límite se corresponde con la derivada parcial respecto de la variable x evaluada en su correspondiente coordenada del punto (x_0, y_0). (Por otra pare hay que considerar que el termino $u_y\lambda'/u_x$ se anula cuando lambda tiende a cero $\lambda' \to 0$).

$$
\cdots=(u_x)\cdot\lim_{\lambda'\to 0}\frac{f(x_0+\lambda',y_0)-f(x_0,y_0)}{\lambda'}=u_x\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}
$$

Con un procedimiento semejante para el otro límite se llega a esta otra expresión.

$$
D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=u_x\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+u_y\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}
$$

Se puede definir el «gradiente de la función» en el punto (x_0, y_0) como el **vector de componentes, que se corresponden con las derivadas parciales evaluadas** en dicho punto.

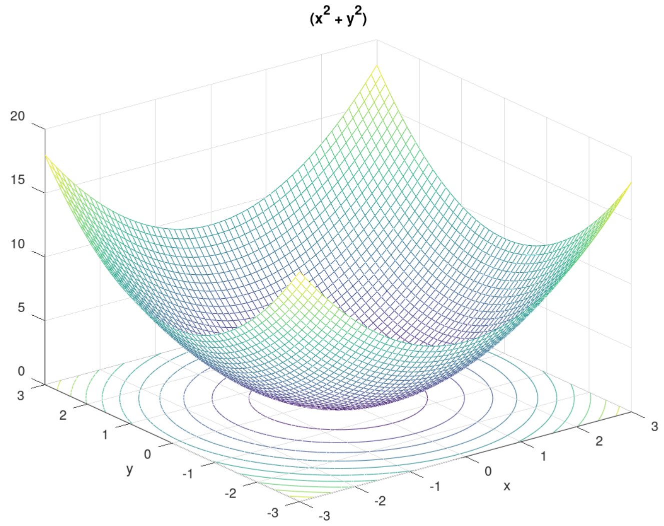
$$
\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}
$$

Usando el producto escalar se puede poner la derivada direccional como sigue.

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \bullet (u_x, u_y)}$$

2.3. Curvas de nivel y Gradiente

Ejemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$, evaluar las derivadas direccionales de la función en el punto (x_0, y_0) =$(3, 1)$ en las direcciones marcadas por los vectores $(1, 1)$ y $(1, 0)$ y comprobar cual es mayor.



Solución

Se evalúan ambas derivadas direccionales.

- Para la dirección marcada por $(1, 1)$

$$D_{(\vec{1,1})}f(3, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(3,1)} \cdot (1, 1) = \quad (2x, 2y)_{(3,1)} \bullet (1, 1)$$
$$= (2 \cdot 3, 2 \cdot 1) \bullet (1, 1) = (6, 2) \bullet (1, 1) = 6 + 2 = 8$$

- Para la dirección marcada por $(1,0)$

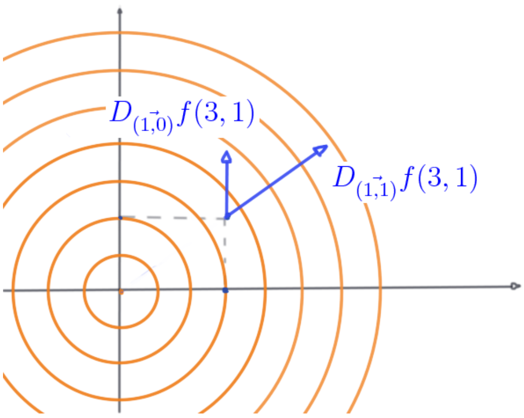
$$D_{\vec{(1,0)}} f(3,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(3,1)} \cdot (1,0) = \quad (2x, 2y)_{(3,1)} \bullet (1,0)$$
$$= (2 \cdot 3, 2 \cdot 1) \bullet (1,1) = (6,2) \bullet (1,0) = 6$$

Para este caso particular se tiene:

$$D_{\vec{(1,0)}} f(3,1) < D_{\vec{(1,1)}} f(3,1)$$

Se puede comprobar que esta condición se cumple para cualquier otra dirección, distinta a la indicada por el vector $(1,1)$. El vector gradiente $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ en el punto $(3,1)$, indica la dirección en la cual la función en dicho punto, presenta el máximo cambio posible.

Las curvas de nivel marcan la dirección de máxima variación para la derivada direccional. La dirección ortogonal a dichas curvas, indica la dirección para cual la función presenta el máximo cambio posible.

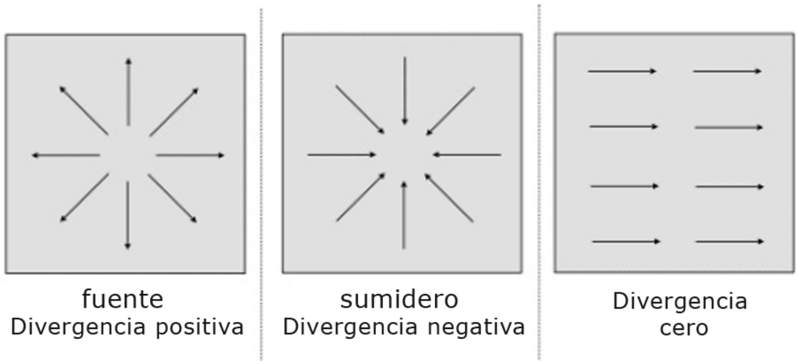


2.4. Aplicaciones del operador diferencial nabla

Se denomina **operador nabla** a un vector definido por $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$[2] en el cual sus componentes son las correspondientes derivadas parciales.

Este operador puede aplicarse a campos escalares (Φ) o a campos vectoriales $\vec{F}$, generando diferentes operaciones :

[2]Nabla es una palabra griega que significa arpa fenicia.



- Gradiente: $\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

  - El vector $\vec{\nabla}\phi$ indica la **dirección de máximo crecimiento** del campo escalar (Φ)
  - $\vec{\nabla}\phi$ es perpendicular a las líneas o superficies equipotencial del campo escalar (Φ)
  - Si una función determinada $f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) se cumple que la derivada direccional en $\vec{v}$ esta dado por

$$D_v f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

- Divergencia: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

  - Si la divergencia es cero, $\vec{\nabla}\vec{F} = 0$ el campo vectorial es incomprensible.
  - Si la divergencia es mayor que cero, $\vec{\nabla}\vec{F} > 0$, entonces los puntos donde esto ocurre son fuentes del campo vectorial o **el campo esta en expansió**n.
  - Si la divergencia es mayor que cero, $\vec{\nabla}\vec{F} < 0$, entonces los puntos donde esto ocurre son sumideros del campo vectorial o **el campo esta comprimiéndose.**

- Rotacional: $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

  - Si $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, el campo $\vec{F}$ es conservativo o irrotacional, y entonces **existe una función escalar** Φ, tal que $\vec{\nabla}\Phi = \vec{F}$.

- Laplaciano:$\nabla^2\phi \equiv \Delta\phi$

  Es la divergencia del gradiente

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)\right] \longrightarrow$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

2.5. Álgebra del operador diferencial ∇

Se trata de un operador diferencial, el resultado de su aplicación sigue reglas similares a la derivada de un producto. Sin embargo, dependiendo del carácter de los campos sobre los que actúa, el resultado tiene diferentes resultados.

Las expresiones mas comunes son:

2.5.1. $\vec{\nabla}(\phi + \psi) = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\psi$

2.5.2. $\vec{\nabla}(\phi\psi) = (\vec{\nabla}\phi)\psi + \phi(\vec{\nabla}\psi)$

2.5.3. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$

2.5.4. $\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$

2.5.5. $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{A} + \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}))$

2.5.6. $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{A} + \phi(\vec{\nabla} \times \vec{A}))$

2.5.7. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$

2.5.8. $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$

2.5.9. $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$

2.5.10. $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \nabla^2\phi$ [3]

2.5.11. $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = 0$

2.5.12. $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$

2.5.13. $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$

*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cancelto{1}{\left(\hat{i} \cdot \hat{i}\right)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cancelto{1}{\left(\hat{j} \cdot \hat{j}\right)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cancelto{1}{\left(\hat{k} \cdot \hat{k}\right)}$$

$$\cancelto{0}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)} + \cancelto{0}{\left(\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)} + \cancelto{0}{\left(\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}\right)} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

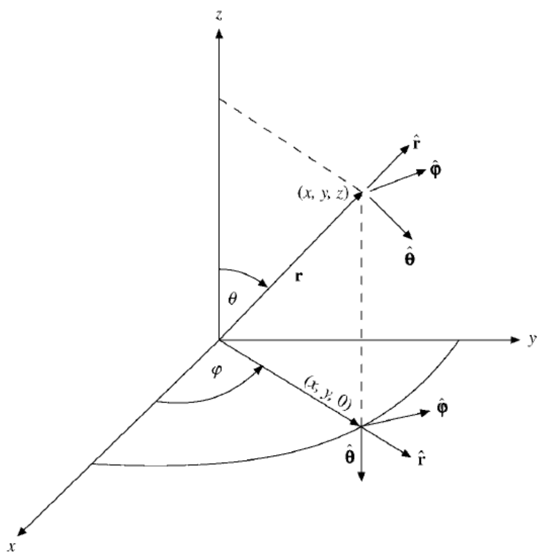
[3] $\nabla^2 = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

2.6. Coordenadas Esféricas

Función escalar ψ

Función vectorial $\mathbf{V}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\psi &= \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \\
\nabla\cdot\mathbf{V} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right) + r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V_\theta\right) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right] \\
\nabla\cdot\nabla\psi &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] \\
\nabla\times\mathbf{V} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\varphi \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$



2.7. Resumen

- Gradiente $\nabla\phi$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k$	$\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\widehat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\widehat{\varphi}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\widehat{z}$	$\frac{\partial\phi}{\partial r}\widehat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\widehat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\widehat{\varphi}$

- Divergencia $\nabla\cdot A$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2A_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

- Rotacional $\nabla\times A$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\widehat{\rho} & \widehat{\varphi} & \frac{1}{\rho}\widehat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\hat{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\widehat{\theta} & \frac{1}{r}\widehat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & rA_\varphi\sin\theta \end{vmatrix}$

- Laplaciano $\nabla^2\phi$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\quad\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$