Fiche technique: $\mathbb{C}$, espace des nombres complexes

Tristan Duquesne

March 1, 2021

Prérequis: Une compréhension décente des nombres réels (cf. Fiche technique sur $\mathbb{R}$), connaître la lecture du langage ensembliste, ainsi que la définition d'un corps algébrique ainsi que celle d'un vecteur peut être utile (même si nous reviendrons sur ces deux notions avec des exemples dans cette fiche; cf. 01-Ensembles_Logique_Structures_Categories.pdf); celle de polynôme est mentionnée, mais pas essentielle dans cette fiche. D'autres notions (quotient de structures algébriques; algèbres géométriques) sont abordées mais sont données en "bonus": comprendre les sections sur ces sujets n'est pas nécessaire pour comprendre les nombres complexes.

1 Introduction

L'espace des nombres complexes joue un rôle fondamental dans plusieurs domaines des mathématiques. Il est souvent appelé ensemble des nombres imaginaires, car lors de leur invention/découverte, on ne pensait qu'ils pouvaient jouer un rôle physique concret. "Complexe" revient à l'idée qu'il s'agit de nombre "en plusieurs morceaux" (précisément en 2 morceaux, ce sont des nombres qui sont comparables à des vecteurs à 2 dimensions). Un bon nom pour eux, trop peu fréquemment utilisé, serait de les appeler les nombres "transversaux": cela est lié à la nature de la géométrie que ces nombres décrivent.

Tout est parti du besoin de résoudre des équations contenant des carrés ou des cubes (polynômes), mais où ce carré semblait être un nombre négatif. Le premier petit malin à s'être dit "on s'en fout de si j'ai le droit ou pas, essayons de définir un nombre que je pourrai utiliser comme une racine carrée d'un nombre négatif", du moins en Europe, s'appelle Gerolamo Cardano (dont nous avons gardé le nom pour la méthode de résolution des polynômes de degré 3, dite "méthode de Cardan") vers la moitié du XVIe siècle. C'est surtout Euler et Gauss qui ont formalisé les nombres complexes sous la forme proche de celle qu'on utilise encore actuellement, au XVIIIe siècle.

[Je dis "en Europe", car beaucoup de mathématiques ont été simultanément découvertes/inventés en Inde, sans contact ni échange avec l'Europe, et assez souvent avant l'Europe (du moins jusqu'au XIXe siècle en gros), et que ma culture de l'histoire mathématique ne va pas aussi loin dans les détails - détails avec lesquels les historiens eux-mêmes ont du mal.]

Il se trouve que Cardan "avait raison"; que le choix de dire "il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$" est tout à fait valide si l'on se positionne dans le bon contexte, et génère une algèbre cohérente et riche. Non seulement cela, mais les nombres complexes retrouvent énormément d'application en physique. Ils permettant de résoudre des équations différentielles (notamment en électronique), sont fondamentaux pour l'analyse de Fourier et le traitement des signaux, et la mécanique quantique entière peut sommairement être décrite comme "l'étude des espaces de fonction à valeurs complexes".

2 Algèbre et géométrie des nombres complexes

2.1 Présentation générale

Fondamentalement, les nombres complexes sont des points dans un plan 2D. La particularité des nombres complexes est que ce sont des nombres qui expriment des translations, des dilatations (changements d'échelles, aussi appelés "scaling" en anglais, ou "homothétie") et des rotations dans leurs opérations. Cette combinaison d'opérations, qu'on dit "conforme" (cela signifie que tout objet, même s'il est grossi, rapetissé, ou déplacé, garde les mêmes angles), est appelé une "similitude". $\mathbb{C}$ est l'espace de choix pour faire des similitudes en 2D.

De la même manière qu'on emploie souvent la lettre x pour désigner un nombre réel quelconque, on utilise souvent la lettre z pour désigner un nombre complexe quelconque.

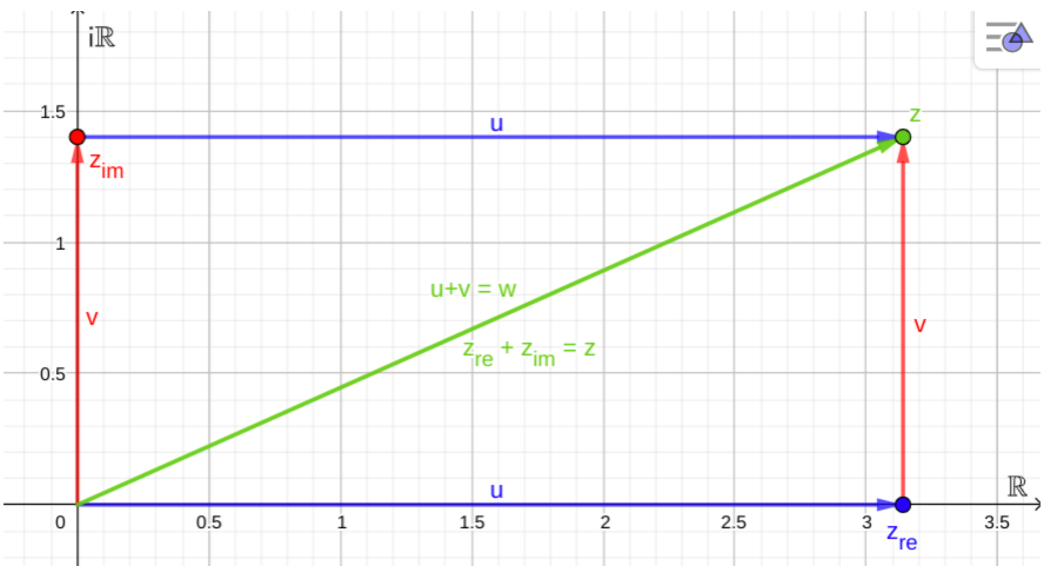

Figure 1: Le nombre complexe $z = \pi + 1.4i$. On voit ici comment celui-ci se décompose en une partie réelle $\mathrm{Re}(z) = \pi$ sur l'axe $\mathbb{R}$, et une partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) = 1.4$ sur l'axe $i\mathbb{R}$.

On appelle l'axe horizontal (abscisse) la "droite réelle" (c'est une copie conforme de notre $\mathbb{R}$ usuel, même pour la multiplication); on la note en général $\mathbb{R}$. On appelle la droite verticale la "droite imaginaire pure" (c'est une copie de notre $\mathbb{R}$ usuel, mais elle n'a pas le même fonctionnement pour la multiplication); on la note en général $i\mathbb{R}$. En effet, on appelle le nombre i "l'unité imaginaire", et ce nombre sert à construire toutes les racines de nombres négatifs, car il a pour propriété $i^2 = -1$ avec la multiplication complexe.

NB: On qualifie souvent i de "*la* racine de -1", mais c'est techniquement une erreur, car $-i$ est une seconde racine de -1 (et il n'y en a pas d'autres, car le polynôme $x^2 + 1$, correspondant à l'équation $x^2 = -1$, est de degré 2 donc a exactement 2 solutions).

2.2 Notations

Pour des questions algébriques (ce qui marche mieux avec la famille addition/translation d'un côté; et ce qui marche mieux avec la famille multiplication/homothétie/rotation d'un autre), on a deux notations pour les nombres complexes.

- La **notation cartésienne** (aussi appelée "forme additive"): $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels quelconques.

- La **notation polaire** (aussi appelée "forme multiplicative"): $re^{i\theta}$, où r est un réel positif, et θ est un angle en radians (nombre réel l'intervalle de $[0, \tau[$, où "tau", $\tau = 2 * \pi \approx 6.283185\ldots$)

2.2.1 Notation cartésienne

La notation cartésienne (aussi appelée vectorielle ou additive) d'un nombre complexe, $z = x + iy$, est celle qui marche bien avec l'addition. C'est presque la notation usuelle des vecteurs 2D, où l'on somme les composantes selon les axes (la base) du vecteur pour donner un vecteur total. Si l'on prend un vecteur $u = (2, 5) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, et des vecteurs de base $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors u peut s'écrire:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2e_1 + 5e_2$$

Considérer de noter $e_1 = 1$ et $e_2 = i$ nous donne précisément la notation cartésienne des nombres complexes. Cette analogie que nous venons de faire entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sera travaillée plus en détail plus bas.

On appelle x la **partie réelle** de z, et y sa **partie imaginaire**. x est le déplacement selon l'axe horizontal, y est le déplacement selon l'axe vertical. On a les opérateurs $\mathrm{Re}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$ pour extraire les composantes additives d'un nombre complexe.

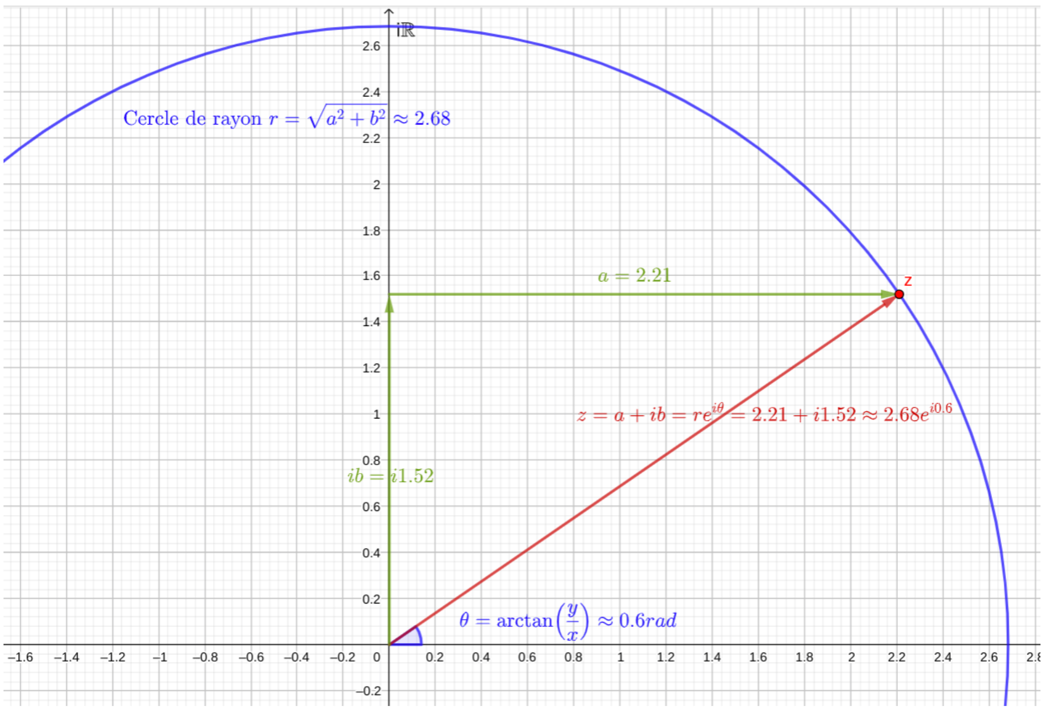

Figure 2: Le nombre $z = 2.21 + 1.52i$ (défini en forme cartésienne) et sa conversion vers la forme polaire. On a choisi un quadrillage servant à mieux illustrer les composantes cartésiennes a et b.

NB: Si vous voyez un nombre de la forme $z = 5$, comprenez $z = 5 + i0$: on a bien une correspondance tout à fait cohérente entre la "partie réelle" d'un nombre complexe et les nombres réels usuels !

2.2.2 Notation polaire

La notation polaire (aussi appelé multiplicative) d'un nombre complexe, $z = re^{i\theta}$, est celle qui marche bien avec la multiplication. Le terme "polaire" fait en général référence à des objets se déplaçant selon dans un système de coordonnées qui suit des rotations (coordonnées cycliques, sphériques, cylindriques). C'est le cas ici.

Le nombre r est appelé le **module** ou le **rayon** d'un nombre complexe. Il correspond géométriquement à la distance d'un nombre complexe par rapport à l'origine 0. Le module est un nombre réel positif ($r \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$).

Le nombre θ est appelé l'**argument** d'un nombre complexe. L'argument correspond à l'angle fait par le vecteur du nombre complexe par rapport à la demi-droite réelle positive (les nombres réels positifs on un argument nul). L'argument est un nombre en radians, c'est-à-dire qui peut techniquement être un réel quelconque, mais qu'on préfère en général noter comme un nombre entre $-\pi$ et π, ou entre 0 et $\tau = 2\pi$. La spécialité des radians est qu'il s'agit en quelque sorte d'une "horloge continue", où deux nombres sont équivalents (correspondent à un même argument, un même angle), s'ils diffèrent précisément d'un multiple de τ. Par exemple, $z = 4e^{i(5\tau+3)} = 4e^{5\tau i}e^{3i} = 4e^{0i}e^{3i} = 4e^{3i}$. π radians, c'est un demi-tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, et τ correspond à un tour complet, en quelque sorte. Pour ceux qui se souviennent de leurs rapporteurs toujours fendus: π radians $= 180$ et τ radians $= 360$.

Le nombre $e \approx 2.71828\dots$ est le nombre d'Euler, et c'est celui qui permet de définir la généralisation de la notion de puissance (a^n signifie habituellement multiplier un nombre a, n fois avec lui-même) aux nombres réels, puis complexes, par la fonction exponentielle. En effet, c'est déjà un peu bizarre de se dire "multiplier 7 3.724 fois par lui-même", alors "multiplier 7 $4.75 + i3.724$ fois par lui-même" n'en parlons pas. On définit alors une fonction $exp(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{z^n}{z!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2*3} + \frac{z^4}{2*3*4} + \dots$, qui se trouve correspondre à la notion de puissance usuelle quand z est un nombre entier. Dès lors, $e^{i\theta} = exp(i\theta)$. Rassurez-vous, on ne vous demandera plus, à l'ère de l'informatique, de calculer votre exponentielle à la main. Pour plus de détails sur la fonction exponentielle, voir les fiches sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

On note les opérateurs $|z| = r$, qui permet d'extraire le module (c'est une extension naturelle de la valeur absolue des nombres réels, d'où la notation), et $\arg(z) = \theta$ qui permet d'extraire l'argument (la fonction arg a quelques points communs avec le logarithme, c'est pourquoi elle peut extraire une puissance).

NB: tout nombre puissance 0 est égal à 1. Donc si θ est nul, $re^{i\theta} = r$, un nombre réel positif.

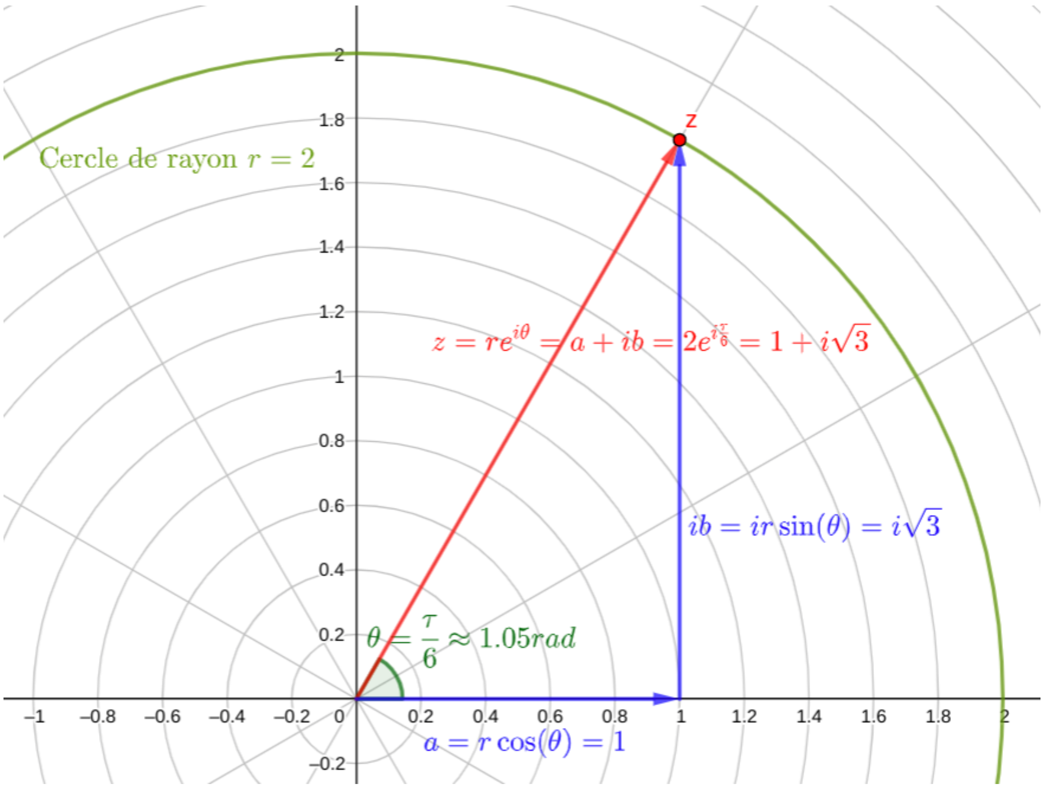

Figure 3: Le nombre $z = 2e^{i\frac{\tau}{6}}$ (défini en forme polaire) et sa conversion vers la forme cartésienne. On a choisi un quadrillage servant à mieux illustrer les composantes polaires r et θ.

2.2.3 Formules de conversion

Souvent on voudra exprimer un nombre complexe avec la notation avec laquelle il s'exprime le mieux pour le contexte ou problème donné. Il s'agit donc de comprendre comment calculer $\text{Re}(z) = x$, $\text{Im}(z) = y$, $|z| = r$, et $arg(z) = \theta$ quand on n'a pas forcément notre nombre complexe dans la forme qui nous convient.

Le truc à remarquer c'est que les côtés x, y, et r forment un triangle rectangle, et donc qu'on peut utiliser les outils de la trigonométrie pour résoudre ces problèmes. Les trois outils qui interviennent sont le théorème de Pythagore (pour trouver l'hypoténuse), l'arctangente (fonction inverse de la tangente, qui intervient en général pour obtenir la valeur en radians d'un angle, quand on a les deux côtés adjacents à un angle droit d'un triangle rectanle), et la formule d'Euler (expliquée plus en détail plus bas, qui relie les cosinus et sinus de la trigonométrie à l'exponentielle complexe).

On rappelle le formulaire fondamental de trigo classique, "SOHCAH-TOA", dans le contexte où θ est notre angle, x la longueur du côté adjacent à l'angle, y celle du côté opposé à l'angle, et r celle de l'hypoténuse:

$$\sin = \frac{opp}{hyp} \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{y}{r}$$
$$\cos = \frac{adj}{hyp} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$
$$\tan = \frac{opp}{adj} \Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Nos formules de conversion sont alors:

- $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, par le théorème de Pythagore.

- $\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \text{si } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\tau}{4} = \frac{\tau}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\frac{\tau}{4} = -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$

- $\mathrm{Re}(z) = x = r\cos(\theta)$, par la trigonométrie (formule SOH, ou formule d'Euler).

- $\mathrm{Im}(z) = y = r\sin(\theta)$, par la trigonométrie (formule CAH, ou formule d'Euler).

NB: il existe d'autres paramétrisation de $\arg(z)$ si l'on souhaite obtenir un angle non pas de $[0, \tau[$ mais plutôt de $[-\pi, \pi[$. Je vous laisse les trouver en exercice.

2.3 Nature algébrique de $\mathbb{C}$

Il y a beaucoup de manières de construire ou de décrire l'espace des nombres complexes à l'aide d'autres espaces mathématiques. Nous en verrons quatre différentes, qui sont en général les plus utiles pour le situer dans le monde des mathématiques. Nous les avons ordonnées de la plus simple à la plus technique. Ceux en première lecture devraient comprendre les deux premières sans problème (si vous avez bien les prérequis); les lecteurs aux connaissances plus confirmées trouveront dans la troisième et la quatrième des perspectives plus enrichissantes et étonnantes (ainsi que des exemples assez simples d'outils avancés).

2.3.1 $\mathbb{C}$ en tant que corps

$\mathbb{C}$ hérite la plupart de sa structure de $\mathbb{R}$ à un détail près: contrairement à $\mathbb{R}$, il n'existe pas d'ordre total unique $\leq$ (ou $\geq$) sur $\mathbb{C}$ (à isomorphisme près). On peut définir des ordres totaux sur $\mathbb{C}$, mais il y en a une variété infinie. Le reste des règles de calcul sont les règles standardes d'un corps (algébrique): addition, soustraction, multiplication, division. (On rajoute aussi une opération supplémentaire: la conjugaison, vue dans une section plus bas.)

Notez que la notion de corps se comprend beaucoup mieux dans le cadre de l'algèbre abstraite (théorie des structures algébriques), en situant cette notion par rapport au notions voisines de groupe abélien et d'anneau. Nous vous invitons à consulter le document à ce sujet, indiqué dans les prérequis. Ce qui suit est donc un récapitulatif de la définition d'un corps "en faisant comme si on n'avait pas le droit d'utiliser la notion de groupe ou d'anneau".

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps. Cela signifie que:

– $+$ est **stable** :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

– $+$ est **associative** :

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3,\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

– existence d'un **élément neutre** (noté $0_{\mathbb{C}}$ ou plus simplement 0) pour $+$:

$$\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C},\ z + 0 = 0 + z = z$$

– existence d'un **élément symétrique** par rapport + pour chaque z, appelé "l'opposé" :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists (-z) \in \mathbb{C},\ z + (-z) = (-z) + z = 0$$

– + est **commutative** :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

– $\times$ est **stable** :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$$

– $\times$ est **associative** :

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3,\ (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$$

– existence d'un **élément neutre** (noté $1_{\mathbb{C}}$ ou plus simplement 1) pour $\times$:

$$\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C},\ z \times 1 = 1 \times z = z$$

– $\mathbb{C}$ ne possède pas de diviseur de zéro

– existence d'un **élément symétrique** par rapport à $\times$, pour tout z non-nul, appelé "inverse" :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z^{-1} \in \mathbb{C},\ z \times z^{-1} = z^{-1} \times z = 1$$

– $\times$ est **commutative** :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$$

– $\times$ est **distributive des deux côtés** sur +, càd :

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$$

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_2 + z_3) \times z_1 = (z_2 \times z_1) + (z_3 \times z_1)$$

– $(\mathbb{C}, +, \times)$ n'est pas l'anneau nul (ie, $(\mathbb{C}, +, \times)$ possède bien au moins les DEUX éléments neutres, $0_{\mathbb{C}}$ et $1_{\mathbb{C}}$)

La soustraction est alors définie comme l'addition par l'opposé, et la division comme la multiplication par l'inverse. Souvent, on omet la notation de la multiplication, c'est-à-dire qu'on la note avec un point centré "$\cdot$", ou sans notation, juste en collant les lettres.

De plus, les polynômes (non-constants) sur $\mathbb{C}$ ont forcément au moins une racine complexe. On dit que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos (ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{R}$: certains polynômes réels ont des racines complexes, ce qui a mené à l'invention/découverte des complexes). Ce fait est appelé le "théorème fondamental de l'algèbre" (nom qui vient d'une époque où "algèbre" voulait plutôt dire "l'art de résoudre des équations" que "la théorie des maths symboliques et des espaces mathématiques").

2.3.2 $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 2

On part de $\mathbb{R}^2$, l'espace vectoriel standard de dimension 2. On rappelle la définition d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel:

– $\mathbb{R}$ est un corps; ses éléments sont appelés les scalaires.

– $(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2})$ un groupe abélien (stabilité, associativité, élément neutre, éléments symétriques, commutativité); ses éléments sont appelés les vecteurs.

– On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ d'un opérateur dans $\mathbb{R}^2$ nommé "loi externe" ou "loi scalaire" noté comme la multiplication (càd avec $\times$, un point centré "$\cdot$", ou sans notation, juste en collant les lettres). En clair, $\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$. Cet opérateur respecte les propriétés de compatibilité suivantes entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$:

– Pseudo-distributivité sur les vecteurs :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2, \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

– Pseudo-distributivité sur les scalaires :

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R})^2, \forall u \in \mathbb{R}^2, (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

– Pseudo-associativité multiplicative de la loi scalaire :

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R})^2, \forall u \in \mathbb{R}^2, (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$$

– Compatibilité du neutre multiplicatif du corps avec la loi scalaire :

$$\forall x \in E, 1_{\mathbb{R}} u = u$$

Un élément de $\mathbb{R}^2$ est noté $u = (x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un couple de vecteurs, appelés base canonique, avec pour nom et valeur $e_1 = (1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $e_2 = (0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ peut alors s'exprimer comme $u = xe_1 + ye_2$.

On donne pour alias 1 au vecteur e_1 et i au vecteur e_2. Cela permet de noter, pour tout vecteur, $u = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x \times 1 + y \times i = x + iy$.

On munit notre $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ d'une multiplication, afin d'en faire une $\mathbb{R}$-algèbre, que l'on nomme $(\mathbb{C}, +, \cdot, \times)$, ou plus simplement $\mathbb{C}$. Soit un couple de vecteur, $u = (a,b)$ et $v = (c,d)$. On définit alors la multiplication sur $\mathbb{C}$ comme $u \times v = (a,b) \times (c,d) = (ac-bd, ad+bc) = (ac-bd) + i(ad+bc)$. Dans ce système, on a alors $i^2 = (0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1,0) = -1$, et i est alors l'une des deux racines de -1.

$\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 2, associative, unitaire, commutative et inversible (vous pouvez vous amuser à le démontrer ici avec la notation entre parenthèses, mais je conseillerais plutôt de le faire avec du développement/factorisation en notation cartésienne). Elle fonctionne donc comme un corps algébrique.

2.3.3 $\mathbb{C}$ en tant que quotient d'anneau, ou de $\mathbb{R}$-algèbre, c'est-à-dire $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'anneau (ou la $\mathbb{R}$-algèbre) des polynômes à coefficients réels. On note $I = (X^2+1)\mathbb{R}[X]$ l'idéal des polynômes multiples de (X^2+1), c'est-à-dire les polynômes de la forme $Q = (X^2+1)P$ où P est un polynôme quelconque. En clair, $I = (X^2+1)\mathbb{R}[X] = \{(X^2+1)P \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

On définit la classe d'équivalence $\sim_I$ standarde générée par l'idéal d'un anneau: deux polynômes P et Q sont équivalents par $\sim_I$ ssi $P - Q \in I$. Cela correspond au fait que deux polynômes sont équivalents ssi ils existent dans le même espace affine parallèle à I.

On procède alors au quotient algébrique $\mathbb{R}[X]/\sim_I$ (souvent noté $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$): soit l'application (le morphisme d'anneau intègre commutatif) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/\sim_I$ qui associe à chaque élément de $\mathbb{R}[X]$ sa classe d'équivalence dans $\mathbb{R}[X]/\sim_I$. Ce morphisme est bien défini (morphisme par les propriétés générales des idéaux), clairement une surjection, et n'est clairement pas une injection. Le noyau (ensemble des éléments qui ont pour image l'élément 0) de ce morphisme est I tout entier: cela signifie que dans $\mathbb{R}[X]/\sim_I$, la propriété $X^2+1 = 0$ est vérifiée par tous les polynômes (dès qu'un polynôme est multiple de X^2+1, il est équivalent au polynôme nul dans l'espace quotient). Cela signifie l'existence d'un élément (un polynôme) P tel que $P^2 = -1$. Ce polynôme est $P = X$, et on le nomme en général i plutôt que P.

Il existe un isomorphisme d'anneau intègre commutatif (et de $\mathbb{R}$-algèbre, et de corps) entre $\mathbb{R}[X]/\sim_I$ ainsi défini, et l'espace $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2.3.4 $\mathbb{C}$ et algèbres géométriques

NB: En première lecture, il vaut peut-être mieux sauter cette section, mais elle est très intéressante une fois que vous aurez bien compris les nombres complexes.

Quelques bases sur les algèbres géométriques (algèbres de Clifford)

On note:

- $\vee$ (souvent aussi, $\cdot$) le **produit intérieur** (produit scalaire généralisé)

- $\wedge$ le **produit extérieur** (produit de Grassmann)

- et multiplicativement (sans symbole ou $\times$; ou plus rarement $\cdot$ si on ne l'a pas déjà choisi pour le produit intérieur) le **produit géométrique**.

La relation entre ces différents produits est la suivante: $uv = u \vee v + u \wedge v$. Le produit intérieur est la partie paire (symétrique, commutative) du produit géométrique, le produit extérieur sa partie impaire (antisymétrique, anticommutative).

Les éléments d'une algèbre géométrique sont appelés des **multivecteurs**. Ceux-ci sont des combinaisons linéaires (sommes généralisées; n-sommes de dilatations) de k-lames, où une **k-lame** est l'extension à k dimensions de ce qu'est un scalaire (objet 0-dimensionnel, un point avec une masse et un signe), un vecteur (objet 1-dimensionnel, une droite avec une longueur et une orientation). Les 2-lames sont des morceaux de plan orienté (avec comme "masse" l'aire, et comme orientation le sens de rotation), les 3-lames sont des morceaux de volume orienté (leur orientation peut être décrite comme le sens de rotation à la surface du volume, autour des vecteurs partant de l'intérieur du volume et allant vers l'extérieur du volume), etc.

Les trois produits sont associatifs (pas besoin de parenthèses). Le produit intérieur est commutatif (symétrique), le produit extérieur anticommutatif (antisymétrique). Le produit géométrique n'est ni commutatif, ni anticommutatif, sauf dans le cas où il peut être réduit à l'un de ses composants. Ces cas sont précisément: un, ssi deux multivecteurs sont parallèles (dans quel cas leur produit extérieur est nul, le produit géométrique se réduit au produit intérieur, et donc est commutatif); deux, ssi deux multivecteurs sont perpendiculaires (dans quel cas leur produit intérieur est nul, le produit géométrique se réduit au produit extérieur, et donc est anticommutatif).

Le nombre k est appelé le **grade** d'une lame. Le produit intérieur "consomme" (soustrait) les grades, le produit extérieur "combine" (additionne) les grades. Une 2-lame s'exprime ainsi comme le produit extérieur de deux vecteurs ($1 + 1 = 2$, une 2-lame est alors souvent représenté comme le parallélogramme formé par les deux vecteurs la composant); une 3-lame comme le produit extérieur d'un bivecteur et d'un vecteur etc. Le produit intérieur de deux vecteurs, appelé généralement produit scalaire) consomme les dimensions ($1 - 1 = 0$) et renvoie un scalaire. Le produit intérieur d'un bivecteur et d'un vecteur renvoie un vecteur ($2 - 1 = 1$).

Le produit intérieur $u \vee v$ représente le fait de projeter u sur v (si u a un grade inférieur ou égal à celui de v; ou inversement si le grade de v est le plus petit) et de multiplier les masses respectives des deux objets résultants (masse, longueur, aire, volume, hypervolume; orientés), en ne gardant que les dimensions de v (si plus grand) qui étaient perpendiculaires à u (si plus petit). Le produit extérieur correspond au fait de déplacer l'objet u le long de l'objet v (dans les différentes dimensions de v), et de prendre l'objet ainsi dessiné (la masse de l'objet final étant le produit des masses, et l'orientation définie par le fait de d'abord commencer dans le sens de u et de compléter en suivant le sens de v), en annulant les parties colinéaires de u et v.

A la notion de k-lame, on rajoute celle de **k-vecteur**. Un k-vecteur est une combinaison linéaire de lames de grade k. C'est un multivecteur de grade homogène. Pour faire la distinction en un mot: une k-lame peut toujours se décomposer en un produit extérieur successif de k différents vecteurs (1-lame); un k-vecteur ne pourra pas toujours se décomposer ainsi. Ainsi, on dit aussi qu'une k-lame est un "k-vecteur simple". Tout k-vecteur dans un espace de dimension ≤ 3 est une k-lame (et inversement, vu que l'inverse est toujours vrai); ceci est parce qu'une somme de bivecteurs (resp. trivecteurs) dans un tel espace peut toujours s'exprimer comme une 2-lame (res. 3-lame). Pour cette raison, vous verrez parfois de l'abus de langages confondant bivecteur (2-vecteur) et 2-lame, ou trivecteur (3-vecteur) et 3-lame; cet abus de langage ne pose pas de problème pour $\mathbb{G}^n$ avec $n \leq 3$. Cependant, à partir d'un espace de dimension $n \geq 4$, il existe des k-vecteurs qui ne sont

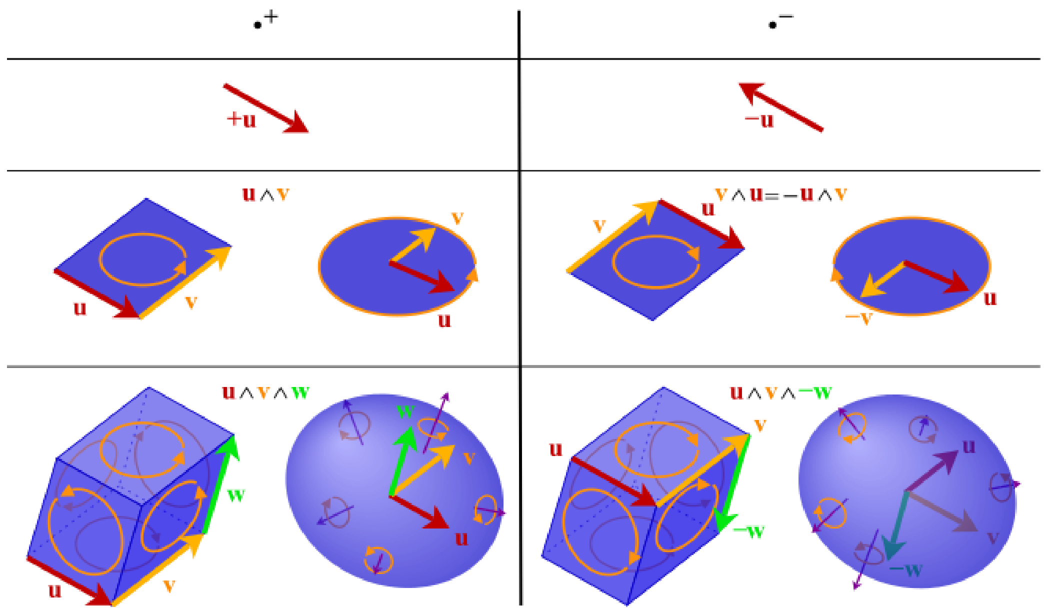

Figure 4: Exemples de lames. Notez que le choix de la représentation (ellipsoïde ou parallélépipéde, ou toute autre forme) n'importe pas. Deux k-lames sont égales ssi elles ont les même masse, même grade, même orientation et même direction.

pas des k-lames. Si l'on prend l'exemple $\mathbb{G}^4 \overset{Vect_{\mathbb{R}}}{\cong} Cl_{0,4}(\mathbb{R})$, avec pour base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, le 2-vecteur $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ n'est pas une 2-lame.

$\mathbb{G}^n$, l'algèbre géométrique générée par $\mathbb{R}^n$, est un espace vectoriel de dimension 2^n. Par exemple, pour $\mathbb{R}^3$ avec pour base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathbb{G}^3$ a pour base $\{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2e_3\}$ (souvent notée $\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{23}, e_{31}, e_{123}\}$). L'addition dans une algèbre géométrique, comme dans tout espace vectoriel, forme un groupe abélien; le produit géométrique forme un monoïde (et est distributif); cependant, l'anneau ainsi formé possède aussi de nombreux éléments inversibles. On note souvent $\mathbb{G}^{p+q} = Cl_{p,q}(\mathbb{R})$, et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_{p+q}\}$ la base de $\mathbb{R}^n$ sous-jacente. p désigne le nombre d'éléments de la base qui vérifient $e_i^2 = 1$, q le nombre d'éléments de la base qui vérifient $e_i^2 = -1$. (p, q) est appelé la **signature** d'une algèbre géométrique. Notez qu'on peut avoir des signatures de la forme (p, q, r), où les éléments comptés par r sont ceux qui vérifient $e_i^2 = 0$. Par exemple, $Cl_{(0,0,n)}(\mathbb{R})$ est l'algèbre extérieure (algèbre de Grassmann) de rang n.

Un objet de dimension n dans $\mathbb{G}^n$ est appelé un pseudoscalaire, un objet de dimension $n-1$ est appelé un pseudovecteur. Par exemple, la torque en 3D, classiquement définie avec un pseudovecteur, est une force de rotation, donc un bivecteur.

Isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $Cl_{0,1}(\mathbb{R})$

Soit $Cl_{0,1}(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre de Clifford générée par la base $\{e\}$, avec $e^2 = e \vee e + e \wedge e = e \vee e = -1$. Tout multivecteur $Cl_{0,1}(\mathbb{R})$ peut s'écrire $a + be$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Soient 2 multivecteurs $U = a + be$ et $V = c + de$. On a:

$$\begin{aligned} UV = (a+be)(c+de) &= (a+be)(c+de) \\ &= ac + bce + ade + bede && \text{(distributivité)} \\ &= ac + (bc+ad)e + bdee && \text{(commutativité d'un scalaire avec tout} \\ &= ac + (bc+ad)e - bd && \text{(carré du vecteur de base)} \\ &= (ac-bd) + (bc+ad)e \end{aligned}$$

Il est alors clair que $Cl_{0,1}(\mathbb{R}) \overset{Alg_{\mathbb{R}}}{\cong} \mathbb{C}$.

Isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et plans vectoriels d'une algèbre géométrique générale

Le produit géométrique uv de deux vecteurs u et v peut être écrit, et interprété, comme $uv = u \vee v + u \wedge v = \|u\|\|v\|(e_u \vee e_v + e_u \wedge e_v) = \|u\|\|v\|(\cos(u,v) + i\sin(u,v)) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\exp(i\theta)$, où:

- e_u (resp. e_v) est le vecteur de norme 1 dans la direction et le sens de u (resp. v),
- $i = \frac{e_u \wedge e_v}{\sin(u,v)}$ est le pseudoscalaire unitaire dans le plan contenant u et v (c'est donc une 2-lame, éventuellement nulle si les vecteurs sont colinéaires),
- $r = \|u\|\|v\|$ est le produit des normes des deux vecteurs, et,
- θ est l'angle orienté allant de u à v.

Ceci peut être interprété géométriquement comme un arc de cercle de rayon r et d'angle θ. Cet arc de cercle peut-être tourné le long de la circonférence du cercle sans en changer l'interprétation, tout comme deux vecteurs sont interprétés comme identiques s'ils sont parallèles, de même longueur, et de même sens. On appelle un tel produit géométrique de deux vecteurs un **rotor**. Il est alors clair que tout plan d'une algèbre géométrique possède une paramétrisation isomorphe au plan complexe, en utilisant la base $\{1, i = \frac{e_u \wedge e_v}{\sin(u,v)}$. Les rotors (par un sandwichage spécial appelé "produit versoriel") permettent alors de définir des rotations simples, comme les nombres complexes; mais cette fois-ci dans un espace de dimension arbitraire.

2.4 Opérations sur les nombres complexes

Nous en venons à la partie "pratique".

2.4.1 Addition

L'addition complexe est l'addition vectorielle classique dans $\mathbb{R}^2$. Algébriquement, c'est une addition terme-à-terme. Géométriquement, c'est la somme des chemins parcourus par les flèches.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2.4.2 Opposition et soustraction

La soustraction complexe c'est similaire juste la soustraction vectorielle. C'est l'addition par l'opposé. L'opposé d'un vecteur, c'est le vecteur de même direction et même norme (=module=rayon), mais qui va dans le sens opposé. Géométriquement la soustraction de deux vecteurs revient au vecteur allant de la pointe du second vers la tête du premier.

$$-z = -(x + iy) = -x - iy$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + iy_1 - iy_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Exercice pour comprendre l'intérêt des deux notations (quand vous aurez fini votre première lecture): essayer d'exprimer $z_1 + z_2$ en forme polaire; en restant toujours en forme polaire, sans jamais passer par x_1, x_2, y_1 ni y_2, ni les avoir dans votre résultat final; juste r_1, r_2, θ_1 et θ_2. Il faut utiliser la formule d'Euler plus bas, bien sûr. Joyeux bordel, n'est-ce pas ?

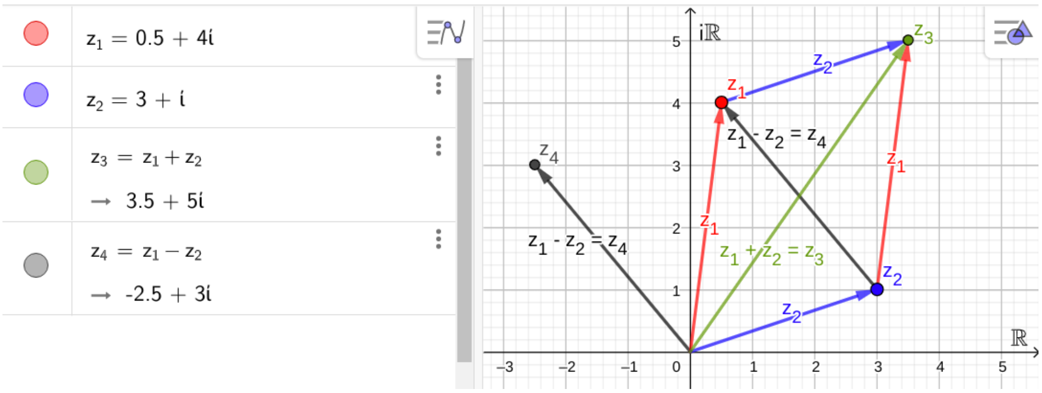

Figure 5: Le diagramme classique résumant l'addition et la soustraction vectorielle, souvent appelé "diagramme du parallélogramme".

2.4.3 Multiplication

La multiplication complexe est plus intéressante, et propre aux nombres complexes. Son interprétation géométrique se comprend uniquement via la forme polaire, et c'est pourquoi cette forme polaire correspond à la multiplication (elle se calcule mieux aussi).

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = x_1y_1 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1y_1 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 \times z_2 = (r_1e^{i\theta_1}) \times (r_2e^{i\theta_2}) = r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

On voit avec la deuxième formule que l'interprétation géométrique de la multiplication complexe est la multiplication (réelle, habituelle) des modules, et l'addition (réelle, mais avec cyclicité de période τ) des arguments. C'est donc la combinaison multiplicative des écarts avec l'origine, et la combinaison additive des angles orientés (des rotations) par rapport à la droite réelle positive.

NB: Si les propriétés de l'exponentielle (ou des puissances) vous posent problème, voir la fiche sur les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou l'introduction à l'analyse.

NB: les réels positifs ayant un argument nul, multiplier par un réel positif revient à faire un scaling d'un nombre complexe, sans en changer l'argument.

C'est parfaitement cohérent avec la vision de $\mathbb{C}$ comme une $\mathbb{R}$-algèbre. Multiplier par -1 revient à prendre l'opposé, de même, c'est parfaitement cohérent avec la vision vectorielle de $\mathbb{C}$.

NB: Multiplier un complexe z par $i = e^{i\frac{\tau}{4}}$ correspond à une rotation de 90 dans le sens trigonométrique (sens positif, sens inverse des aiguilles d'une montre), sans changer le module de z. De même, la multiplication par un nombre complexe quelconque u de module 1 correspond à une rotation simple par $arg(u)$.

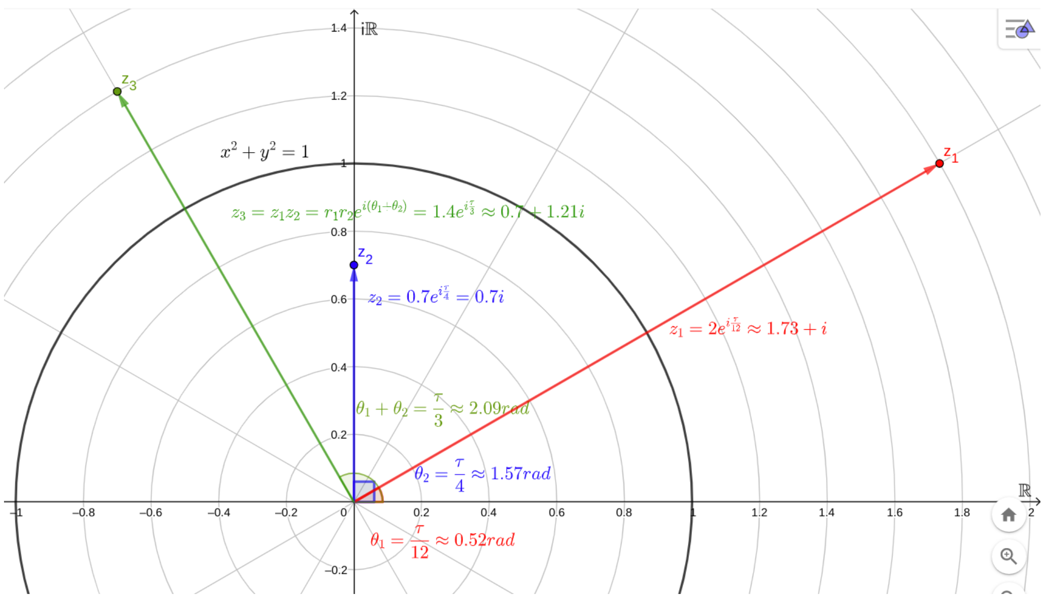

Figure 6: Image récapitulant la multiplication complexe. Remarquez bien la multiplication des modules (longueurs), et l'addition des arguments (angles).

2.4.4 Conjugaison

La conjugaison est une opération propre aux nombres complexes. C'est une involution (une fonction qui appliquée deux fois revient au point de départ). Enfin, pour être exact, elle existe dans $\mathbb{C}$, donc *a fortiori* existe dans $\mathbb{R}$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Il se trouve que les nombres réels sont invariants par conjugaison, donc la conjugaison sur $\mathbb{R}$ est équivalente à la fonction identité $x \to x$. On note $\overline{z}$ le conjugué de z.

$\overline{z} = x - iy = re^{-i\theta}$

Géométriquement, la conjugaison est la réflexion d'un nombre complexe en utilisant la droite réelle comme axe de symétrie.

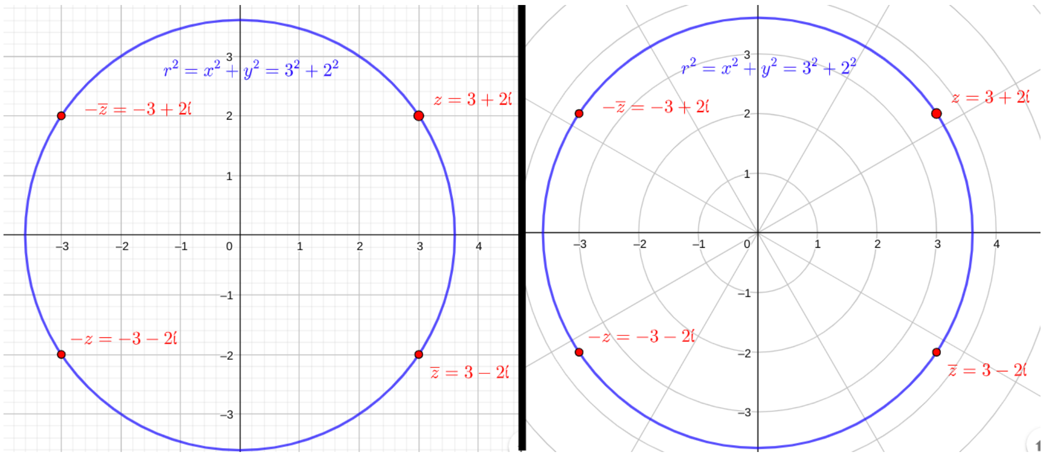

Figure 7: Image récapitulant les combinaisons de négation et conjugaisons de z. La négation $(-z)$ est une symétrie centrale. La conjugaison $(\overline{z})$ est une symétrie axiale par rapport à la droite réelle. La combinaison de la négation et de la conjugaison $(-\overline{z})$ est une symétrie axial par rapport à la droite des imaginaires purs.

On note les propriétés suivantes pour la conjugaison:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$\overline{-z} = -\overline{z}$$

$$z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)$$

$$z\overline{z} = |z|^2 = |z^2|$$

Les trois dernières propriétés montrent que toute opération complexe (sauf division) entre un nombre et son conjugué a pour résultat un nombre réel. C'est pour cette raison que les polynômes de degré 2 à coefficients réels, s'ils ont des racines complexes, auront toujours des racines conjuguées.

2.4.5 Inversion et division

On définit la division comme le fait de multiplier par l'inverse. L'inverse est noté z^{-1} et est défini comme:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

ou en forme additive:

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Géométriquement, l'inverse d'un nombre complexe est donc son symétrique par rapport à la droite réelle, mais à une distance $1/r$ de l'origine plutôt que r. Si $r > 1$, alors z est en dehors du cercle trigonométrique, et $\overline{z}$ est dedans. Si $r < 1$, alors z est dans le cercle trigonométrique, et $\overline{z}$ est en dehors. Si $r = 1$, alors $\overline{z} = z^{-1}$.

Il n'y a pas vraiment de manière élégante de penser la division autre que comme la multiplication par l'inverse; mais cela convient très bien, quand on a bien compris la multiplication complexe.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2} = r_1e^{i\theta_1}\frac{1}{r_2}e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

NB: il est souvent utile de savoir comment faire une division sans passer par la forme multiplicative. Pour cela, il faut retirer le membre i du dénominateur. La technique est assez simple: il faut multiplier par le conjugué du dénominateur en haut et en bas de la fraction, afin d'exploiter la formule $z\overline{z} = |z|^2$. Cela revient à faire:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Ou encore, avec le détail du calcul, on obtient:

$$
\begin{aligned}
\frac{a+ib}{c+id} &= \frac{a+ib}{c+id} \times 1 \\
&= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id} \\
&= \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}
\end{aligned}
$$

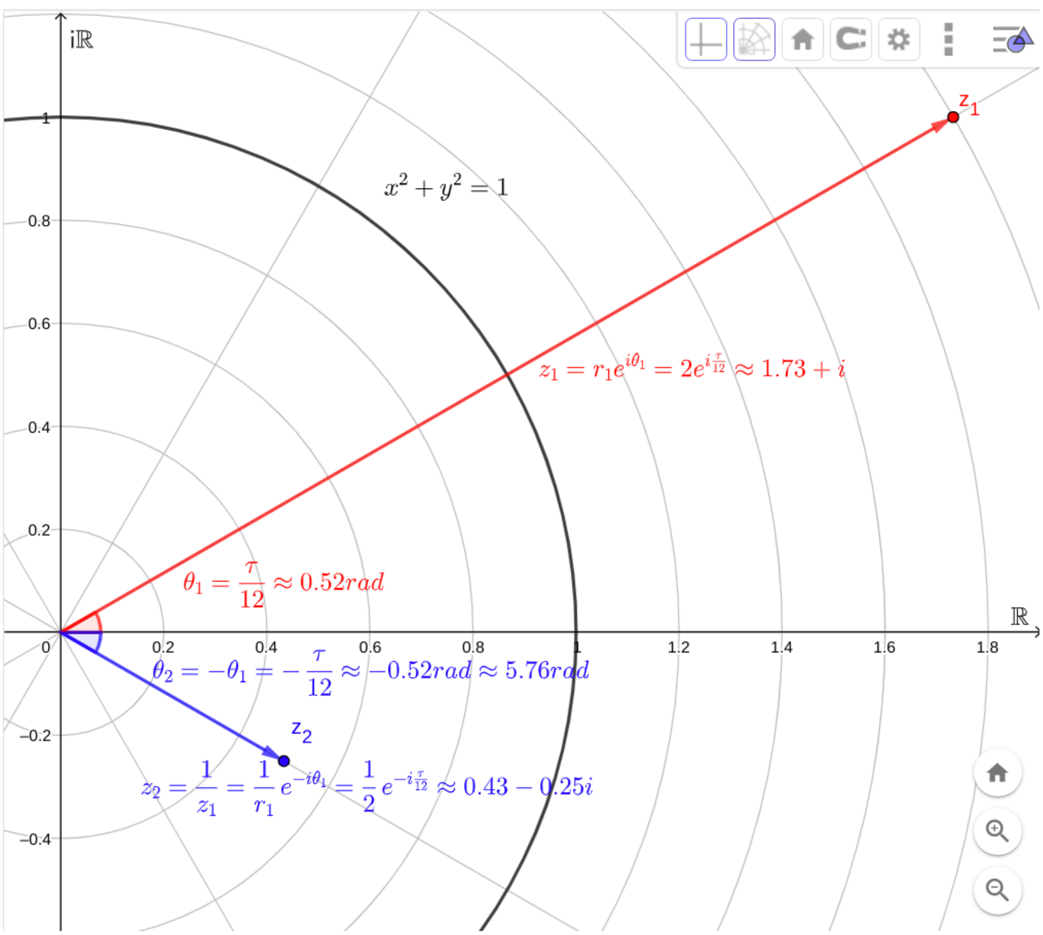

Figure 8: Image récapitulant l'inversion d'un nombre complexe. Il s'agit d'une négation de l'argument et d'une inversion de la longueur.

3 Eléments de culture générale

Voici enfin quelques éléments de culture générale sur les nombres complexes. Il y a beaucoup trop à dire, donc je me suis limité dans ce document à quelques sujets propres aux nombres complexes "purs", réservant ainsi les sujets périphériques aux fiches pour lesquelles ces sujets conviendraient le mieux.

3.1 Théorèmes et formules importants

3.1.1 Identité d'Euler

L'identité peut-être la plus connue des mathématiques (mis à part le théorème de Pythagore), qualifiée par certains de "la plus belle", est une qui touche aux nombres complexes. On l'appelle l'identité d'Euler. La voici:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Si on la considère si belle, c'est qu'elle illustre un lien profond entre différentes branches des mathématiques, à travers leur constantes emblématiques. Derrière e, il y a toute l'analyse, la physique, la finance, etc, la théorie des équations différentielles: l'étude des changements et des systèmes avec multiples parties en interaction mutuelle. Derrière π, toute la géométrie. Derrière 1 et 0, les deux éléments neutres, toute l'arithmétique et l'algèbre (au sens de théorie des structures algébriques). Et derrière i, toute l'algèbre (dans le sens historique de l'étude de la résolution des équations) et les polynômes. Chaque opérateur fondamental (addition, multiplication, exponentiation) apparaît une et une seule fois. C'est en effet assez mystifiant.

Cependant, je lui préfère personnellement la version:

$$e^{i\tau} = 1$$

qui exprime de manière plus pure et plus simple la beauté des nombres complexes eux-mêmes: l'idée que τ radians c'est 1 tour complet du plan complexe.

3.1.2 Formule d'Euler

La formule d'Euler est peut-être la plus importante et plus utile des nombres complexes. Je la préfère encore aux deux précédentes. A elle seule, elle résume plus de 80% du formulaire de trigonométrie usuel. Si vous comprenez cette formule, qui encode les liens entre l'addition et la multiplication complexes, l'exponentielle, les sinus et les cosinus, vous pouvez retrouver toutes les formules que vous aviez oubliées de la trigonométrie par pure intuition géométrique (pas juste le SOHCAHTOA, aussi les formules de sommes et produits de cosinus et sinus). C'est aussi elle qui résume le passage de la forme additive à la forme multiplicative des nombres complexes. D'ailleurs, les deux identités précédentes sont des conséquences de celle-ci: le première quand $\theta = \pi$, la deuxième quand $\theta = \tau$

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Géométriquement, cette formule paraît évidente. Le cosinus est la composante horizontale, le sinus, la composante verticale, l'exponentielle notre nombre complexe de module 1 résultant (l'hypoténuse). Cette équation décrit juste un triangle rectangle tout bête. Pour autant, elle cache une profondeur impressionante. Vous vous souvenez de la définition de l'exponentielle comme une série entière (grosse somme polynômiale) plus haut ? Et bien, il existe une définition de cosinus et de sinus similaires, et ces deux-ci se compensent dans leur somme pour donner précisément la série entière de l'exponentielle.

Vous avez un théorème en analyse qui dit que toute fonction peut-être exprimée comme la somme d'une fonction paire (une fonction telle que $f(x) = f(-x)$) et d'une fonction impaire (une fonction telle que $f(x) = -f(x)$). Ce théorème, muni de cette formule, induit des liens profonds entre les cosinus et sinus usuels (cos et sin, de la géométrie elliptique et des nombres complexes) mais aussi les cosinus et sinus hyperboliques (cosh et sinh, de la géométrie hyperbolique et des nombres complexes déployés, un espace cousin où l'on définit comme vecteurs de base 1 et j, où $j \neq -1$ et $j^2 = 1$).

- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
- $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$, car sin est une fonction impaire, et cos une fonction paire
- $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
- $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$
- $\cos(ix) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- $\sin(ix) = i\sinh(x) = i\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

3.1.3 Formule de de Moivre

Celle-ci est très utile pour trouver les caractéristiques algébriques des multiples d'un angle. Elle sert souvent aussi à linéariser (retirer les puissances) d'un cosinus ou d'un sinus (souvent utile pour l'intégration). Elle se déduit de manière assez évidente de la formule précédente:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = e^{i\theta n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

On remarque avec $n = -1$ la définition du conjugué (égale à l'inverse) d'un nombre complexe unitaire.

3.2 τ vs π

Vous l'aurez sûrement remarqué, on a eu tendance dans ce document à favoriser la constante "tau", $\tau \approx 6.28\ldots$, plutôt que "pi", $\pi \approx 3.14\ldots$, qui est pourtant plus connue. La liste des raisons pour cela est (très) longue (https://tauday.com/tau-manifesto), mais peut se résumer assez bien par l'idée qu'en mathématique, la grandeur principale d'un cercle, d'une sphère, etc (toutes les versions de plus haute dimension de ces objets), n'est pas son diamètre, mais son rayon. π est le ratio qui correspond à périmètre/diamètre, τ le ratio périmètre/rayon. La (quasi) totalité des formules mathématiques faisant intervenir π deviennent plus expressives ou simples quand on remplace π par $\frac{\tau}{2}$. La plupart de ces formules font déjà intervenir 2π directement, d'ailleurs...

Mais le cas où la supériorité de τ est vraiment, mais alors vraiment, indiscutable, c'est bien la gestion des arguments des nombres complexes. Un angle droit correspond à ± 90, ou à $\pm\frac{\pi}{2}$ radians, à première vue ça paraît étrange et arbitraire, mais bon, on accepte, on mémorise, on ressasse... Maintenant, je vais vous poser une question. Vous savez ce que c'est 90 sur une horloge, en minutes ? 15 minutes, ou un quart d'heure. Après tout, $90 = \frac{360}{4}$, un quart de tour, c'est logique. Mais du coup c'est aussi et surtout $\frac{\tau}{4}$ radians. Voilà la supériorité de τ sur π ici: les angles, exprimés comme des ratios de τ, sont juste des fractions du cercle. Cela devient extrêmement utile, et beaucoup, beaucoup plus intuitif à l'usage, notamment quand on considère la section suivante.

3.3 Racines de l'unité, cercle trigonométrique, et groupe cyclique $\mathbb{T}$

L'ensemble des nombres complexes de module 1, noté $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, \tau[\bmod \tau\}$, qui correspond au "cercle trigonométrique", est un ensemble très important en mathématiques. On l'appelle le groupe circulaire (aussi appelé S^1, $SO(2)$, $U(1)$, ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, quotient du groupe additif de $\mathbb{R}$ par celui de $\mathbb{Z}$). Il existe plusieurs manières de le construire, et ces constructions sont topologiquement isomorphes, parfois à une dilatation (un scalaire) près. Nous nous concentrerons sur les aspects de cet espace qui jouent un rôle avec les nombres complexes.

Tout d'abord, $(\mathbb{T}, \star)$ est un groupe abélien (stable, associatif, unitaire, inversible, commutatif). Vous verrez parfois $+$, parfois $\times$ à la place de l'étoile, car on peut considérer soit les sommes de θ, soit les produits de $e^{i\theta}$, ce qui revient précisément au même. On préférera $\times$ pour la suite.

On appelle un sous-groupe de torsion l'ensemble des éléments d'un groupe qui, mis à une puissance entière strictement positive, peuvent atteindre l'élement neutre (on dit que ce sont les éléments "d'ordre fini" où l'ordre signifie la puissance à laquelle il faut mettre ce nombre pour obtenir le neutre). Le sous-groupe de torsion de $(\mathbb{T}, \star)$, aussi appelé groupe des racines de l'unité, est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et est (topologiquement) dense dans $\mathbb{T}$.

Une racine n-ième de l'unité est un nombre complexe qui vérifie $z^n = 1$.

Les racines carrés de l'unité sont:
- $-1 = e^{i\frac{\tau}{2}}$ et
- $(-1)^2 = 1 = e^{i\frac{2\tau}{2}} = e^{i\tau} = e^{i0}$.

Les racines cubiques de l'unité sont:
- $j = e^{i\frac{\tau}{3}}$,
- $j^2 = \overline{j} = e^{i\frac{2\tau}{3}}$, et
- $j^3 = 1$.

Les racines quartiques de l'unité sont:
- $i = e^{i\frac{\tau}{4}}$,
- $i^2 = -1 = e^{i\frac{2\tau}{4}}$,
- $i^3 = -i = \overline{i} = e^{i\frac{3\tau}{4}}$ et
- $i^4 = 1$

NB: ne pas confondre le nombre j dans le contexte des racines de l'unité avec, le j (tel que $j^2 = 1$) des nombres complexes déployés.

La forme générale des racine n-ièmes de l'unité est $e^{\frac{ik\tau}{n}}$ pour $k \in [[0, n[[$.

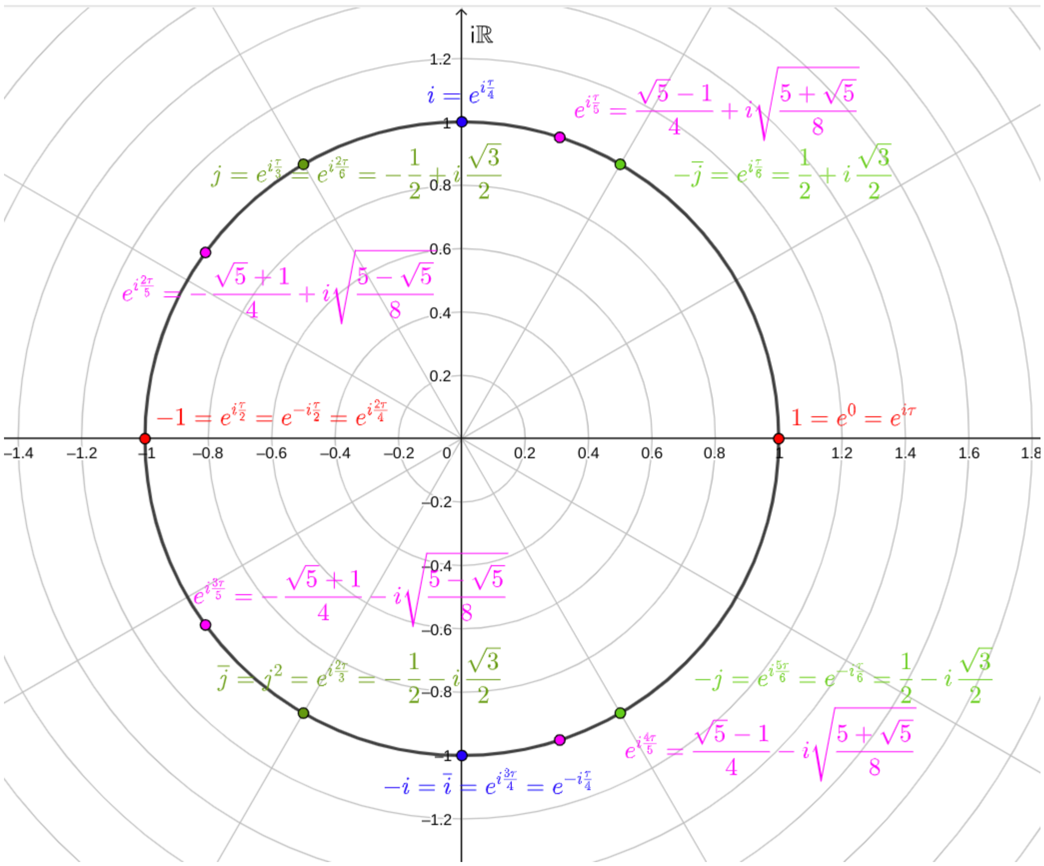

Figure 9: Image montrant les racines de l'unité de jusqu'aux racines 6-ièmes. Notez que certains de ces nombres sont des racines pour multiples n. Par exemple, -1 est une racine n-ième de 1 pour tout n pair.

NB: $\mathbb{T}^n$, le produit (cartésien, ou plutôt topologique) de $\mathbb{T}$ n fois avec lui-même est un tore n-dimensionnel.

3.4 Escape-Time Fractals

[TODO: faire cette section plutôt dans la fiche sur C[X] ?]

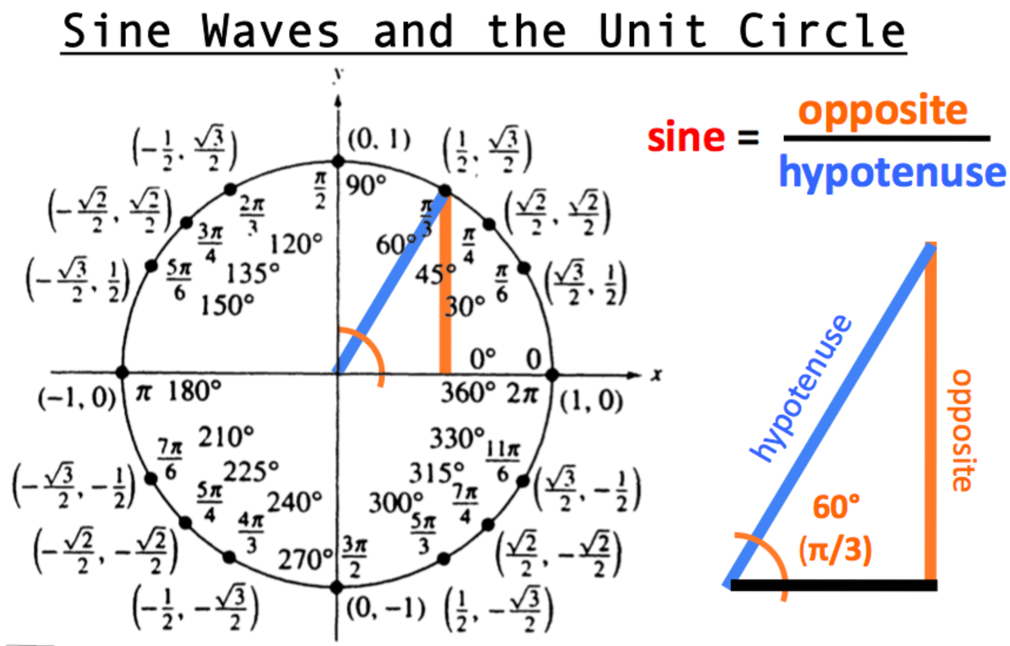

Figure 10: Ici, on a les racines de l'unité les plus connues, qui ont des valeurs sympathiques en trigonométrie.

3.5 Sphère de Riemann / droite complexe projective

La sphère de Riemann, aussi appelé "plan complexe étendu", ou "droite complexe projective" est l'ensemble noté $\overline{\mathbb{C}} = P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On lui ajoute les opérations suivantes pour tout $z \in \overline{\mathbb{C}}$:

- $z + \infty = \infty$

- $z * \infty = \infty$ (z non nul)

La sphère de Riemann n'est pas un corps car ∞ n'a pas d'inverse pour l'addition, ni pour la multiplication. Cependant, on a tendance à définir usuellement $\frac{z}{\infty} = 0$ (marche avec $z = 0$) et $\frac{z}{0} = \infty$ (marche avec $z = \infty$). Par contre, 0, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont laissés indéfinis.

Les fonctions (polynômiales) rationnelles sont toutes continues sur la sphère de Riemann.

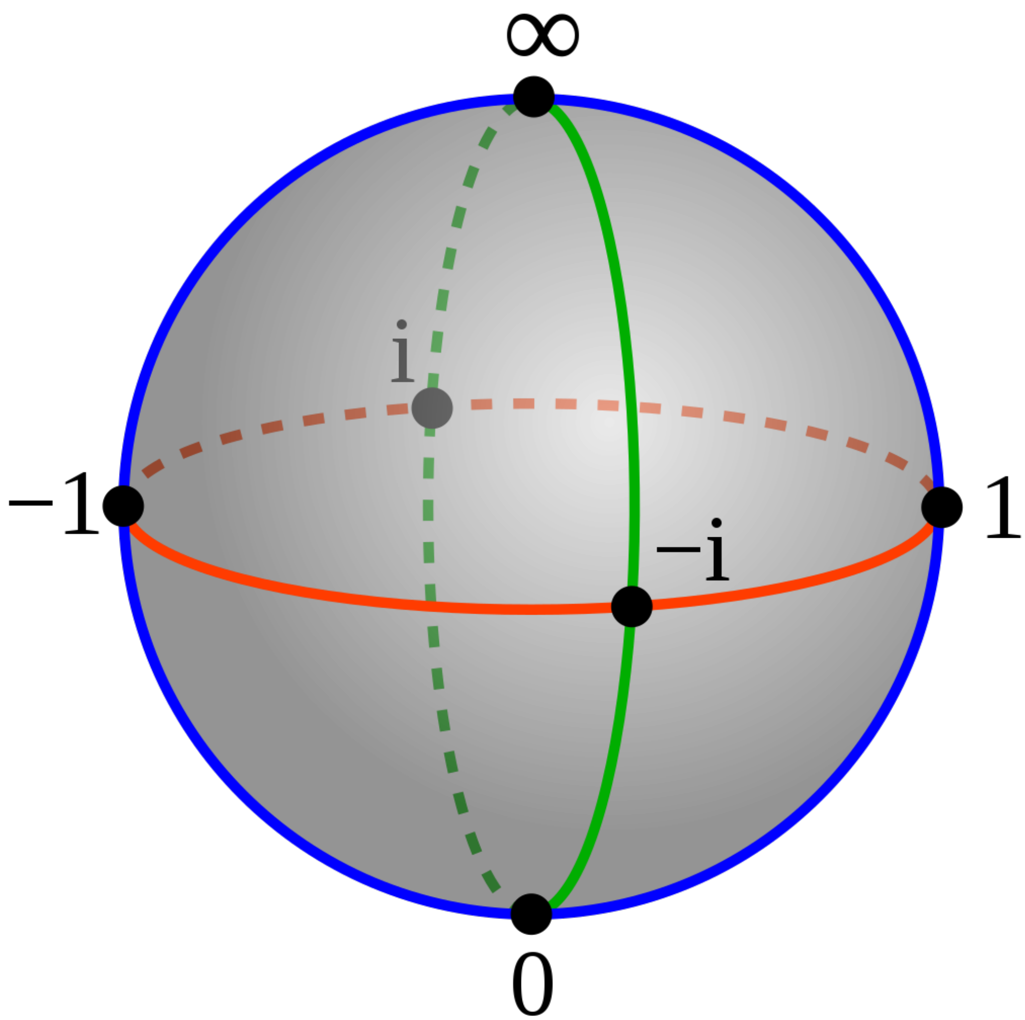

Figure 11: Sphère de Riemann

3.6 Espaces de Gauss

On peut construire, à l'aide de i, des anneaux et corps qui sont des sous-espaces stables de $\mathbb{C}$, sans passer par $\mathbb{R}$. On appelle ces espaces les espaces de Gauss. Je vous laisse vous figurer leur géométrie et celle de leurs opérations dans votre tête.

- $\mathbb{Z}[i] = \{n + im \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$, espace des entiers de Gauss, sous-anneau de $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq \mid (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$, espace des rationnels de Gauss, sous-corps de $\mathbb{C}$, (topologiquement) dense dans $\mathbb{C}$.

3.7 Pour aller plus loin

Il y a vraiment, vraiment beaucoup trop de sujets à aborder qui ne pourrait pas faire l'office d'un paragraphe simple dans cette section, c'est pourquoi je vous encourage de jeter un oeil aux fiches techniques suivantes, dans lesquelles ces sujets reçoivent le soin qui leur est dû.

Fiches techniques liées: - $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, espace des suites à valeurs complexes (et sous-espaces importants)

- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, espaces des fonctions complexes (et sous-espaces importants)
- $\mathbb{C}^n$, espace vectoriel complexe de dimension finie n.
- $\mathbb{C}[X]$, anneau des polynômes complexes de dimension finie.
- $\mathbb{D}$, espace des nombres complexes déployés ($j^2 = 1$).
- $\mathbb{E}$, espace des nombres duaux ($\epsilon^2 = 0$).