개념원리 문제기본서

RPM

확률과 통계

정답과 풀이

01 순열과 조합

교과서 문제 정/복/하/기

본문 7쪽

0001 $(6-1)!=5!=120$ 답 **120**

0002 (1) $(5-1)!=4!=24$
(2) A, C가 서로 이웃하므로 A, C를 한 명으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$
A, C가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$
답 (1) **24** (2) **12**

0003 원탁에 3명이 둘러앉는 경우의 수와 같으므로
$(3-1)!=2!=2$ 답 **2**

0004 ${}_2\Pi_3=2^3=8$ 답 **8**

0005 ${}_6\Pi_1=6^1=6$ 답 **6**

0006 ${}_4\Pi_2=4^2=16$ 답 **16**

0007 ${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 **243**

0008 ${}_n\Pi_3=64$이므로 $n^3=64$
$\therefore n=4$ 답 **4**

0009 ${}_2\Pi_r=128$이므로 $2^r=128$
$\therefore r=7$ 답 **7**

0010 ${}_3\Pi_r=81$이므로 $3^r=81$
$\therefore r=4$ 답 **4**

0011 ${}_n\Pi_3=125$이므로 $n^3=125$
$\therefore n=5$ 답 **5**

0012 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$ 답 **64**

0013 구하는 경우의 수는 ○, ×의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수이므로
${}_2\Pi_5=2^5=32$ 답 **32**

0014 $\dfrac{6!}{2!\times3!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1}=60$ 답 **60**

0015 (1) $\dfrac{5!}{2!\times2!}=\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=30$
(2) 3을 제외한 나머지 4개의 수 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=\dfrac{4\times3\times2\times1}{2\times1}=12$ 답 (1) **30** (2) **12**

0016 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b로 나타내면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 6개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
$\dfrac{9!}{6!\times3!}=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1}=84$ 답 **84**

0017 ${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$ 답 **5**

0018 ${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$
답 **21**

0019 ${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$
답 **35**

0020 ${}_5H_0={}_{5+0-1}C_0={}_4C_0=1$ 답 **1**

0021 ${}_7H_3={}_{7+3-1}C_3={}_9C_3$ $\therefore n=9$ 답 **9**

0022 ${}_5H_r={}_{5+r-1}C_r={}_{r+4}C_r={}_{r+4}C_4={}_9C_4$이므로
$r+4=9$ $\therefore r=5$ 답 **5**

0023 ${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ 답 **10**

유형 익/히/기

본문 8~13쪽

0024 영희의 양 옆에 부모님이 앉으면 3명이 이웃하므로 영희와 부모님을 한 명으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
부모님이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$ 답 ②

0025 어른 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

어른 4명 사이사이의 4개의 자리 중 3개의 자리에 아이 3명이 한 명씩 앉는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$ 답 ⑤

0026 남학생 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

남학생 5명 사이사이의 5개의 자리에 여학생 5명이 한 명씩 앉는 경우의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times120=2880$ 답 ⑤

0027 갑, 을 중 한 사람이 자리에 앉으면 다른 한 사람은 그 반대쪽에 앉으면 되므로 갑, 을이 마주 보고 앉는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $(7-1)!=6!=720$ 답 **720**

다른풀이 8명이 원탁에 둘러앉을 때, 갑, 을이 마주 보고 앉는 경우의 수는 갑, 을이 마주 보고 앉은 후, 남은 6개의 자리에 나머지 6명이 한 명씩 앉는 경우의 수와 같으므로

$6!=720$

0028 정사각형을 4등분한 각 영역을 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$ 답 **6**

0029 한 영역에 빨간색을 칠하면 맞은편에 보라색을 칠하면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같다.

$\therefore (5-1)!=4!=24$ 답 **24**

0030 5가지 색 중 하나를 택하여 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

나머지 4가지 색으로 옆면을 칠하는 경우의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$ 답 **30**

0031 8가지 색 중 작은 원의 내부의 네 영역을 칠할 4가지 색을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_4=70$

택한 4가지 색으로 작은 원의 내부의 네 영역을 칠하는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$

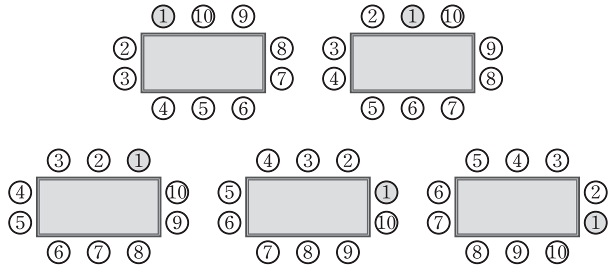
나머지 4가지 색으로 작은 원의 바깥쪽의 네 영역을 칠하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$70\times6\times24=10080$ 답 **10080**

0032 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

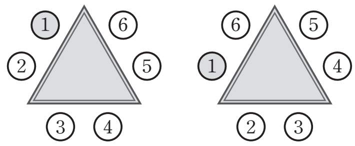


이때 위의 그림과 같이 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 5가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는

$9!\times5$ 답 ②

0033 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

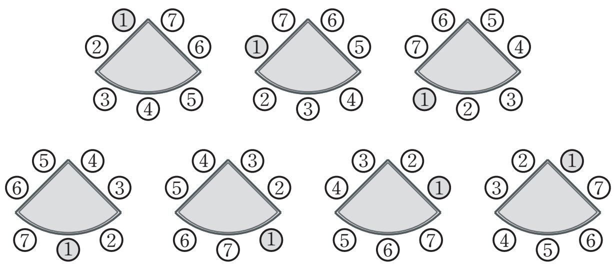


이때 위의 그림과 같이 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$ 답 ②

0034 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

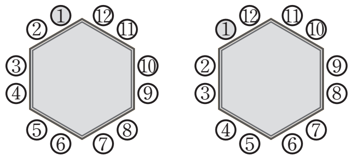


이때 위의 그림과 같이 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 7가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는

$720\times7=5040$ 답 **5040**

0035 12명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(12-1)!=11!$



이때 위의 그림과 같이 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는

$11!\times 2=11!\times 12\times\frac{1}{6}=12!\times\frac{1}{6}$

$\therefore a=\frac{1}{6}$ 답 ①

0036 영희와 철수를 한 사람으로 생각하여 4명이 축구반, 야구반, 육상반 중 한 반에 지원하는 경우의 수를 구하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개의 반 중 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{3}\Pi_{4}=3^4=81$ 답 **81**

0037 만들 수 있는 신호의 개수는 흰색 깃발, 파란색 깃발 중 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$ 답 **16**

0038 6명 중 갑에게 투표하는 2명을 정하는 경우의 수는

${}_{6}C_{2}=15$ ㉮

나머지 4명이 을, 병 중 한 명에게 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2명 중 4명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$ ㉯

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times 16=240$ ㉰

답 **240**

단계	채점요소	배점
㉮	갑에게 투표하는 2명을 정하는 경우의 수 구하기	40 %
㉯	나머지 4명이 투표하는 경우의 수 구하기	40 %
㉰	갑이 2표를 얻는 경우의 수 구하기	20 %

0039 모스 부호 •, — 중 중복을 허용하여
3개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_{2}\Pi_{3}=2^3=8$

4개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$

5개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_{2}\Pi_{5}=2^5=32$

따라서 만들 수 있는 신호의 개수는

$8+16+32=56$ 답 **56**

0040 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4개
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 숫자를 나열하는 경우의 수는 5개의 숫자 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{5}\Pi_{3}=5^3=125$

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3개
따라서 다섯 자리 짝수의 개수는

$4\times 125\times 3=1500$ 답 **1500**

0041 (i) 한 자리 자연수의 개수
1, 2, 3, 4의 4
(ii) 두 자리 자연수의 개수
1, 2, 3, 4의 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_{4}\Pi_{2}=4^2=16$
(iii) 세 자리 자연수의 개수
1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_{4}\Pi_{3}=4^3=64$
(i)~(iii)에서 세 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+16+64=84$ 답 **84**

0042 세 개의 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_{3}\Pi_{4}=3^4=81$

숫자 1을 포함하지 않는 네 자리 자연수의 개수는 2, 3의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$

따라서 숫자 1을 포함하는 자연수의 개수는

$81-16=65$ 답 ③

0043 (i) 한 자리 자연수의 개수
1, 2, 3, 4, 5의 5
(ii) 두 자리 자연수의 개수
십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6가지의 숫자가 올 수 있으므로
$5\times 6=30$
(iii) 세 자리 자연수의 개수
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지
십의 자리, 일의 자리에 숫자를 나열하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_{6}\Pi_{2}=6^2=36$
$\therefore 5\times 36=180$
(iv) 1□□□ 꼴의 네 자리 자연수의 개수
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_{6}\Pi_{3}=6^3=216$

(i)~(iv)에서 2000보다 작은 자연수의 개수는

$5+30+180+216=431$

이므로 2000은 432번째 수이다. 답 ③

0044 (i) X에서 Y로의 함수의 개수

Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$ $\quad\therefore m=125$

(ii) X에서 Y로의 일대일함수의 개수

Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$ $\quad\therefore n=60$

(i), (ii)에서 $m+n=125+60=185$ 답 ②

0045 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_4=5^4=625$

$f(3)=3$인 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$625-125=500$ 답 500

다른풀이 $f(3)\neq3$이면 $f(3)$의 값이 될 수 있는 Y의 원소는 1, 2, 4, 5의 4개

$f(1), f(2), f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$4\times125=500$

0046 (i) $f(1)=1$인 함수의 개수

Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(ii) $f(2)=2$인 함수의 개수

(i)과 같은 방법으로 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

(iii) $f(1)=1$이고 $f(2)=2$인 함수의 개수

Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

(i)~(iii)에서 구하는 함수의 개수는

$125+125-25=225$ 답 225

0047 $f(1)=f(4)>3$이므로

$f(1)=f(4)=4$ 또는 $f(1)=f(4)=5$

(i) $f(1)=f(4)=4$인 함수의 개수

공역 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(ii) $f(1)=f(4)=5$인 함수의 개수

(i)과 같은 방법으로 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$125+125=250$ 답 250

0048 양 끝에 1을 하나씩 나열하고 가운데에 c, h, a, e, n, g, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!}=2520$ 답 ②

0049 happiness의 9개의 문자 중 모음은 a, i, e의 3개이므로 a, i, e를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, h, p, p, n, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times2!}=1260$

모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260\times6=7560$ 답 7560

0050 internet의 8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{2!\times2!\times2!}=5040$

2개의 t를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 i, n, A, e, r, n, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times2!}=1260$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1260=3780$ 답 ④

다른풀이 2개의 t를 제외한 나머지 6개의 문자 i, n, e, r, n, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times2!}=180$

2개의 t가 서로 이웃하지 않으므로 6개의 문자 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에서 2개를 택하여 t를 하나씩 나열하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$180\times21=3780$

0051 a, b, b, c, c, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times3!}=420$

(i) 양 끝에 b가 오는 경우

양 끝에 b를 하나씩 나열하고 가운데에 a, c, c, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

·· ㉯

(ii) 양 끝에 c가 오는 경우

양 끝에 c를 하나씩 나열하고 가운데에 a, b, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

·· ㉰

(i), (ii)에서 양 끝에 서로 같은 문자가 오는 경우의 수는

$20+60=80$

따라서 구하는 경우의 수는

$420-80=340$

·· ㉱

답 **340**

단계	채점요소	배점
㉮	7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	20 %
㉯	양 끝에 b가 오는 경우의 수 구하기	30 %
㉰	양 끝에 c가 오는 경우의 수 구하기	30 %
㉱	양 끝에 서로 다른 문자가 오는 경우의 수 구하기	20 %

0052 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

0□□□□□ 꼴로 나열하는 경우의 수는 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$60-10=50$

답 ④

0053 (i) 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+6=30$

답 **30**

0054 (i) 4□□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 1, 2, 2, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(ii) 5□□□□□ 꼴의 자연수의 개수는 1, 2, 2, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+60=90$

답 ③

0055 홀수이므로 일의 자리의 숫자는 1 또는 3이어야 한다.

(i) □□□□□1 꼴의 자연수의 개수

0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

0□□□□1 꼴로 나열하는 경우의 수는 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

$\therefore 60-12=48$

(ii) □□□□□3 꼴의 자연수의 개수

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

0□□□□3 꼴로 나열하는 경우의 수는 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

$\therefore 30-6=24$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$48+24=72$

답 **72**

0056 a, e의 순서가 정해져 있으므로 a, e를 모두 A로 생각하여 A, b, c, d, A, f를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A를 a로, 두 번째 A를 e로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

답 ①

0057 t가 m보다 앞에 와야 하므로 t, m을 모두 A로 생각하여 AoAorrow를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A를 t로, 두 번째 A를 m으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times3!\times2!}=1680$

답 **1680**

0058 2, 3, 4를 이 순서대로 나열해야 하므로 2, 3, 4를 모두 A로 생각하여 1, 1, 1, A, A, A, 5를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A를 2로, 두 번째 A를 3으로, 세 번째 A를 4로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times 3!}=140$ 답 ⑤

0059 c는 p보다 앞에 오고, i는 r보다 앞에 오므로 c, p는 모두 A로, i, r는 모두 B로 생각하여 AomABomBse를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A를 c로, 두 번째 A를 p로 바꾸고 첫 번째 B를 i로, 두 번째 B를 r로 바꾸면 된다.
따라서 조건에 맞게 나열하는 경우의 수는

$\frac{10!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!}=\frac{1}{16}\times 10!\quad \therefore k=\frac{1}{16}$ 답 ③

0060 (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times 2!}=10$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!\times 1!}=3$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10\times 3=30$ 답 **30**

0061 A 지점에서 선분 PQ를 거쳐 B 지점까지 가려면
A → P → Q → B와 같이 이동해야 한다.
(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times 2!}=15$

(ii) P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1
(iii) Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$15\times 1\times 6=90$ 답 **90**

0062 (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!\times 1!}=3$

.... ㉮

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\times 3!}=35$

P 지점에서 Q 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!\times 1!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=18$

따라서 P 지점에서 Q 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$35-18=17$

.... ㉯

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times 17=51$

.... ㉰

답 **51**

단계	채점요소	배점
㉮	A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기	30 %
㉯	P 지점에서 Q 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기	60 %
㉰	P 지점은 거쳐 가고 Q 지점은 거쳐 가지 않는 경우의 수 구하기	10 %

0063 직육면체의 가로 방향으로 한 칸 가는 것을 a, 세로 방향으로 한 칸 가는 것을 b, 직육면체의 높이 방향으로 한 칸 가는 것을 c로 나타내면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a, 1개의 b, 2개의 c를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$ 답 **60**

0064 서로 다른 5명 중 10명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_{10}={}_{5+10-1}C_{10}={}_{14}C_{10}={}_{14}C_4=1001$ 답 **1001**

0065 $(a+b+c)^8$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 a, b, c의 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$ 답 **45**

0066 흰색 접시에 송편 2조각, 연두색 접시에 송편 3조각을 먼저 담고, 남은 송편 5조각을 4개의 접시에 나누어 담으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 흰색, 노란색, 연두색, 분홍색의 4개의 접시 중 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$ 답 ④

0067 갑, 을, 병에게 각각 구슬 2개씩을 먼저 주고, 남은 구슬 6개를 3명에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 갑, 을, 병 3명 중 6명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ 답 ③

0068 (i) 음이 아닌 정수해의 개수
x, y, z의 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$
$\therefore a=66$
(ii) 양의 정수해의 개수
x, y, z가 양의 정수이므로
$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$로 놓으면 x', y', z'은 모두 음이 아닌 정수이고, $x+y+z=10$에서

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=10$

$\therefore\ x'+y'+z'=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

방정식 $x+y+z=10$의 양의 정수해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수는 x', y', z'의 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

$\therefore\ b=36$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b=66+36=102$ 답 ②

0069 x, y, z가 각각 $x\geq2$, $y\geq2$, $z\geq1$인 정수이므로 $x=x'+2$, $y=y'+2$, $z=z'+1$로 놓으면 x', y', z'은 음이 아닌 정수이고, $x+y+z=11$에서

$(x'+2)+(y'+2)+(z'+1)=11$

$\therefore\ x'+y'+z'=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

방정식 $x+y+z=11\,(x\geq2,\ y\geq2,\ z\geq1)$의 정수해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수는 x', y', z'의 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ 답 28

0070 x, y, z가 모두 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z\geq0$이다. 따라서 $x+y+z<5$의 음이 아닌 정수해의 개수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $x+y+z=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$

(ⅱ) $x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

(ⅲ) $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

(ⅳ) $x+y+z=3$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

(ⅴ) $x+y+z=4$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$1+3+6+10+15=35$ 답 ④

0071 (ⅰ) $a=0$일 때

$b+c+d=9$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

(ⅱ) $a=1$일 때

$b+c+d=8$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

(ⅲ) $a=2$일 때

$b+c+d=5$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ⅳ) $a=3$일 때

$b+c+d=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$

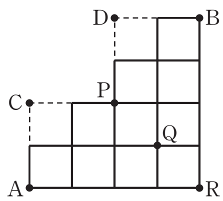
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$55+45+21+1=122$ 답 122

유형 up

본문 14쪽

0072 오른쪽 그림과 같이 중간 지점 P, Q, R를 잡으면



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\left(\dfrac{4!}{2!\times2!}-1\right)\times\left(\dfrac{4!}{2!\times2!}-1\right)$

$=25$ 점 C를 지나는 경우 점 D를 지나는 경우

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{4!}{3!}=16$

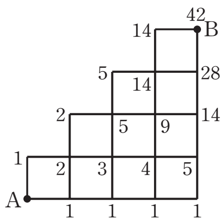
(ⅲ) A → R → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

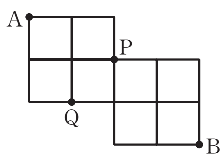
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$25+16+1=42$ 답 42

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 합의 법칙을 이용하면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 42이다.



0073 오른쪽 그림과 같이 중간 지점 P, Q를 잡으면



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=18$

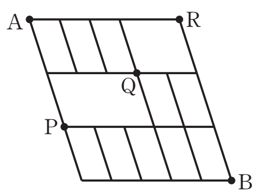
(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$18+9=27$ 답 27

0074 오른쪽 그림과 같이 중간 지점 P, Q, R를 잡으면



(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times\dfrac{6!}{5!}=6$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 24$

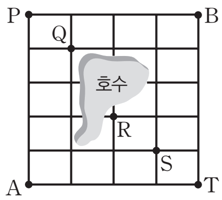
(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$1 \times 1 = 1$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$6 + 24 + 1 = 31$ 답 **31**

0075 오른쪽 그림과 같이 중간 지점 P, Q, R, S, T를 잡으면



(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1 \times 1 = 1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!} = 20$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!} \times \frac{4!}{3!} = 12$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{4!} = 20$

(v) A → T → B로 가는 경우의 수는

$1 \times 1 = 1$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$1 + 20 + 12 + 20 + 1 = 54$ 답 **54**

0076 $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$이므로 공역 Y의 원소 중 중복을 허용하여 4개를 택하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 정해진다.

따라서 구하는 함수의 개수는 공역 Y의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4 = 126$ 답 **126**

0077 주어진 조건에서 $f(1) \ge f(2) \ge f(3) \ge f(4)$이므로 공역 Y의 원소 중 중복을 허용하여 4개를 택하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 정해진다.

따라서 구하는 함수의 개수는 공역 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_7H_4 = {}_{7+4-1}C_4 = {}_{10}C_4 = 210$ 답 **210**

0078 (i) $f(1) \le f(2) = 3$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 공역 Y의 원소는 1, 2, 3의 3개

(ii) $f(2) = 3 \le f(3) \le f(4)$이므로 공역 Y의 원소 3, 4, 5, 6 중 중복을 허용하여 2개를 택하면 $f(3)$, $f(4)$의 값이 정해진다.
따라서 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 3, 4, 5, 6의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$

(iii) $f(5)$의 값이 될 수 있는 공역 Y의 원소는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개

(i)~(iii)에서 구하는 함수의 개수는

$3 \times 10 \times 6 = 180$ 답 **180**

0079 (i) 조건 (가)에서 $x \le 3$이면 $f(x) \ge 3$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 3, 4, 5 중 하나이다.
따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 3, 4, 5의 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

(ii) 조건 (나)에서 $f(4) \le f(5)$이므로 공역 X의 원소 중 중복을 허용하여 2개를 택하면 $f(4)$, $f(5)$의 값이 정해진다.
따라서 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_2 = {}_{5+2-1}C_2 = {}_6C_2 = 15$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$27 \times 15 = 405$ 답 **405**

시험에 꼭 나오는 문제

본문 15~17쪽

0080 한 쌍의 부부를 한 명으로 생각하여 3쌍의 부부를 각각 A, B, C로 놓으면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)! = 2! = 2$

부부 A가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

부부 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

부부 C가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 답 ③

0081 원을 5등분한 5개의 영역을 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

빨간색과 파란색을 한 가지 색으로 생각하여 서로 다른 4가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)! = 3! = 6$

빨간색과 파란색이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$이므로 빨간색과 파란색을 이웃하게 칠하는 경우의 수는

$6 \times 2 = 12$

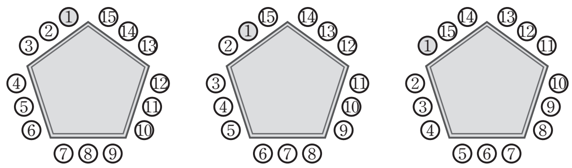
따라서 구하는 경우의 수는

$24 - 12 = 12$ 답 **12**

다른풀이 빨간색을 먼저 칠한 후, 빨간색과 이웃하지 않는 두 영역 중 하나에 파란색을 칠하는 경우의 수는 2
나머지 3가지 색을 남은 세 영역에 칠하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 빨간색과 파란색을 이웃하지 않게 칠하는 경우의 수는
$2\times6=12$

0082 윗면을 칠하는 경우의 수는 6
아랫면을 칠하는 경우의 수는 $6-1=5$
나머지 4가지 색으로 옆면을 칠하는 경우의 수는 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times5\times6=180$ 답 **180**

0083 15명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(15-1)!=14!$



이때 위의 그림과 같이 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 3가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는
$14!\times3$ 답 ③

0084 서로 다른 6개의 놀이기구 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_6\Pi_3=6^3=216$ 답 **216**

0085 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 5의 1개
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 숫자를 나열하는 경우의 수는 5개의 숫자 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$
따라서 네 자리 자연수가 5의 배수인 경우의 수는
$1\times125=125$ 답 ③

0086 (i) 3□□□ 꼴의 자연수의 개수
5개의 숫자 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$
(ii) 4□□□ 꼴의 자연수의 개수
5개의 숫자 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$
(i), (ii)에서 3000 이상의 자연수의 개수는
$125+125=250$
이므로 3000보다 큰 자연수의 개수는
$250-1=249$ 답 **249**
└네 자리 자연수 중 3000인 경우를 제외한다.

0087 $f(a)=f(b)$이므로 $f(a)$의 값이 정해지면 $f(b)$의 값도 정해진다.
따라서 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3의 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_3=3^3=27$ 답 **27**

0088 r끼리 이웃하므로 2개의 r를 한 문자 A로 생각하여 8개의 문자 s, e, c, A, e, t, a, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{8!}{2!}=\dfrac{1}{2}\times8!=\dfrac{1}{2}\times8\times7!=4\times7!$ 답 ③

0089 홀수가 4개, 짝수가 4개이므로 8개의 숫자를
홀짝홀짝홀짝홀짝과 같이 나열하면 된다.
홀수 번째 자리에 홀수 1, 1, 1, 3을 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{3!}=4$
짝수 번째 자리에 짝수 2, 2, 4, 4를 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times6=24$ 답 ④

0090 i, i, e를 모두 A로 생각하여 prAncAplA를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A와 두 번째 A를 i로, 세 번째 A를 e로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{9!}{2!\times3!}=30240$ 답 ⑤

0091 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{10!}{5!\times5!}=252$
$A\to P\to Q\to B$로 가는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times1\times\dfrac{5!}{3!\times2!}=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$252-60=192$ 답 **192**

0092 4명의 학생에게 각각 볼펜 1자루씩을 먼저 주고, 남은 볼펜 6자루를 4명에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 4명 중 6명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$ 답 **84**

0093 (i) 숫자 4를 0개 택하는 경우

1, 2, 3의 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ii) 숫자 4를 1개 택하는 경우

1, 2, 3의 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$21+15=36$

답 ④

0094 (i) $w=0$일 때

$x+y+z=6$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(ii) $w=1$일 때

$x+y+z=3$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

(iii) $w=2$일 때

$x+y+z=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$

(i)~(iii)에서 구하는 정수해의 개수는

$28+10+1=39$

답 39

0095 $f(3)=f(4)$이므로 $f(3)$의 값이 정해지면 $f(4)$의 값도 정해진다.

따라서 구하는 함수의 개수는 Y의 원소 -2, -1, 0, 1, 2의 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

답 ⑤

0096 같은 학년 학생을 한 명으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하면

$(3-1)!=2!=2$

㉮

1학년 학생 3명끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

2학년 학생 3명끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

3학년 학생 3명끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

㉯

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6\times6\times6=432$

㉰

답 432

단계	채점요소	배점
㉮	같은 학년 학생을 한 명으로 생각하여 원탁에 둘러앉는 경우의 수 구하기	40 %
㉯	같은 학년 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수 구하기	40 %
㉰	같은 학년 학생끼리 이웃하게 앉는 경우의 수 구하기	20 %

0097 $f(1)+f(2)=2$이므로

$f(1)=0,\ f(2)=2$

또는 $f(1)=1,\ f(2)=1$

또는 $f(1)=2,\ f(2)=0$

의 3가지 경우가 있다.

㉮

또, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

㉯

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times25=75$

㉰

답 75

단계	채점요소	배점
㉮	$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수 구하기	40 %
㉯	$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수 구하기	40 %
㉰	함수의 개수 구하기	20 %

0098 6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3 중에서 4개를 택하는 경우는

1, 1, 1, 2　　1, 1, 1, 3　　1, 1, 2, 2

1, 1, 2, 3　　1, 2, 2, 3

이때 3의 배수의 각 자리의 숫자의 합은 3의 배수이므로 4개의 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우를 찾으면

1, 1, 1, 3　　1, 1, 2, 2

㉮

1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

㉯

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4+6=10$

㉰

답 10

단계	채점요소	배점
㉮	각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 경우 찾기	40 %
㉯	㉮에서 구한 각 경우의 3의 배수의 개수 구하기	40 %
㉰	3의 배수의 개수 구하기	20 %

0099 8그릇 중 짜장면 3그릇을 먼저 주문한 후, 짜장면, 짬뽕, 볶음밥 중에서 나머지 5그릇을 주문하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 짜장면, 짬뽕, 볶음밥 중 5그릇을 택

하는 중복조합의 수와 같으므로

……………………………………………………………… ㉮

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

……………………………………………………………… ㉯

답 **21**

단계	채점요소	배점
㉮	구하는 경우의 수를 중복조합으로 생각하기	60 %
㉯	중복조합의 수 계산하기	40 %

0100 $f(1)=a$인 함수의 개수는 Y의 원소 a, b, c의 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

이때 $f(1)=a$이므로 함수의 치역은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$ 중 하나이다.

(i) $f(1)=a$이고, 치역이 $\{a\}$인 경우

$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=a$이므로 함수의 개수는 1

(ii) $f(1)=a$이고, 치역이 $\{a, b\}$인 경우

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 원소 a, b의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

그런데 $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=a$이면 치역이 $\{a\}$가 되므로 이 경우는 제외해야 한다.

$\therefore 32-1=31$

(iii) $f(1)=a$이고, 치역이 $\{a, c\}$인 경우

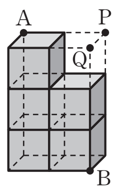
(ii)와 같은 방법으로 함수의 개수는 31

(i)~(iii)에서 구하는 함수의 개수는

$243-1-31-31=180$

답 **180**

0101 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 모서리를 점선으로 연결하고 두 점 P, Q를 잡자.



직육면체의 가로 방향으로 한 칸 가는 것을 a, 세로 방향으로 한 칸 가는 것을 b, 직육면체의 높이 방향으로 한 칸 가는 것을 c로 나타내면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times\dfrac{4!}{3!}=4$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times1=3$

이때 (i), (ii)에서 A → P → Q → B인 1가지 경우가 중복된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$60-4-3+1=54$

답 **54**

0102 (i) 사과를 0개 택하는 경우

감, 배, 귤 세 종류의 과일 중에서 8개를 선택하면 된다.

이때 감, 배, 귤을 각각 1개 이상씩 선택해야 하므로 감, 배, 귤을 각각 1개씩 먼저 선택한 후, 나머지 5개를 감, 배, 귤 중에서 택하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 감, 배, 귤 중 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ii) 사과를 1개 택하는 경우

감, 배, 귤 세 종류의 과일 중에서 7개를 선택하면 된다.

이때 감, 배, 귤을 각각 1개 이상씩 선택해야 하므로 감, 배, 귤을 각각 1개씩 먼저 선택한 후, 나머지 4개를 감, 배, 귤 중에서 택하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 감, 배, 귤 중 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

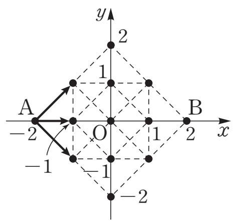
${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$21+15=36$

답 **36**

0103 점 A에서 한 번의 '점프'로 이동할 수 있는 경우는 길이가 1인 →, 길이가 $\sqrt{2}$인 ↗, 길이가 $\sqrt{2}$인 ↘의 세 가지가 있다.



(i) →로 네 번 '점프'하는 경우

→, →, →, →을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 1

(ii) →로 두 번, ↗와 ↘로 각각 한 번씩 '점프'하는 경우

→, →, ↗, ↘을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(iii) ↗와 ↘로 각각 두 번씩 '점프'하는 경우

↗, ↗, ↘, ↘을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$1+12+6=19$

답 **19**

02 | 이항정리

교과서 문제 정/복/하/기

본문 19쪽

0104 $(x+y)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3y+{}_4C_2x^2y^2+{}_4C_3xy^3+{}_4C_4y^4$
$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

답 $\boldsymbol{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}$

0105 $(x-2)^5$
$={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4(-2)+{}_5C_2x^3(-2)^2+{}_5C_3x^2(-2)^3$
$+{}_5C_4x(-2)^4+{}_5C_5(-2)^5$
$=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

답 $\boldsymbol{x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32}$

0106 $(3a+2b)^4$
$={}_4C_0(3a)^4+{}_4C_1(3a)^3(2b)+{}_4C_2(3a)^2(2b)^2$
$+{}_4C_3(3a)(2b)^3+{}_4C_4(2b)^4$
$=81a^4+216a^3b+216a^2b^2+96ab^3+16b^4$

답 $\boldsymbol{81a^4+216a^3b+216a^2b^2+96ab^3+16b^4}$

0107 $\left(a-\frac{2}{a}\right)^3$
$={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2\left(-\frac{2}{a}\right)+{}_3C_2a\left(-\frac{2}{a}\right)^2+{}_3C_3\left(-\frac{2}{a}\right)^3$
$=a^3-6a+\frac{12}{a}-\frac{8}{a^3}$ 답 $\boldsymbol{a^3-6a+\frac{12}{a}-\frac{8}{a^3}}$

0108 $(x+y)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_rx^{7-r}y^r$
(1) x^4y^3항은 $7-r=4$인 경우이므로 $r=3$
따라서 x^4y^3의 계수는 ${}_7C_3=35$
(2) x^5y^2항은 $7-r=5$인 경우이므로 $r=2$
따라서 x^5y^2의 계수는 ${}_7C_2=21$
(3) y^7항은 $r=7$인 경우이므로
y^7의 계수는 ${}_7C_7=1$ 답 (1) **35** (2) **21** (3) **1**

0109 $(x+2)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_rx^{4-r}2^r={}_4C_r2^rx^{4-r}$
x^3항은 $4-r=3$인 경우이므로 $r=1$
따라서 x^3의 계수는 ${}_4C_12^1=8$ 답 **8**

0110 $(2x-y)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(2x)^{5-r}(-y)^r={}_5C_r2^{5-r}(-1)^rx^{5-r}y^r$
x^3y^2항은 $5-r=3$인 경우이므로 $r=2$
따라서 x^3y^2의 계수는
${}_5C_22^3(-1)^2=10\times8\times1=80$ 답 **80**

0111 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_ra^{6-r}\left(-\frac{1}{a}\right)^r={}_6C_ra^{6-r}(-1)^r\frac{1}{a^r}$
$={}_6C_r(-1)^r\frac{a^{6-r}}{a^r}$
상수항은 $6-r=r$인 경우이므로 $r=3$
따라서 상수항은 ${}_6C_3(-1)^3=-20$ 답 $\boldsymbol{-20}$

0112
1 1
1 2 1
1 3 $\boxed{3}$ 1
1 $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ 4 1
1 $\boxed{5}$ $\boxed{10}$ 10 $\boxed{5}$ 1

$\therefore (a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

답 풀이 참조

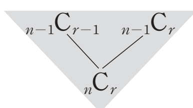
0113
1 1
1 2 1
1 3 $\boxed{3}$ 1
1 $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ 4 1
1 $\boxed{5}$ $\boxed{10}$ 10 $\boxed{5}$ 1
1 $\boxed{6}$ $\boxed{15}$ $\boxed{20}$ 15 6 1

$\therefore (a+2b)^6=a^6+6a^5(2b)+15a^4(2b)^2+20a^3(2b)^3$
$+15a^2(2b)^4+6a(2b)^5+(2b)^6$
$=a^6+12a^5b+60a^4b^2+160a^3b^3+240a^2b^4$
$+192ab^5+64b^6$

답 풀이 참조

0114 ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$
$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$ ($\because {}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1$)
$={}_5C_2+{}_5C_3$ ($\because {}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$)
$={}_6C_3$
$\therefore n=6$ 답 **6**

참고 파스칼의 삼각형에서
${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$



0115 ${}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$={}_5C_2+{}_5C_1+{}_6C_1$ ($\because {}_4C_2+{}_4C_1={}_5C_2$)
$={}_6C_2+{}_6C_1$ ($\because {}_5C_2+{}_5C_1={}_6C_2$)
$={}_7C_2$
$\therefore n=7$ 답 **7**

0116 ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8=256$ 답 **256**

0117 ${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2-{}_9C_3+\cdots-{}_9C_9=0$ 답 **0**

0118 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$
$=2^{10-1}=2^9=512$ 답 **512**

0119 ${}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7=2^{7-1}=2^6=64$ 답 **64**

0120 n이 짝수일 때,
$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+\boxed{{}_nC_2}x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ …… ㉠
㉠에 $x=1$을 대입하면
$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$ …… ㉡
㉠에 $x=\boxed{-1}$을 대입하면
$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+{}_nC_n$ …… ㉢
㉡+㉢을 하면
$2^n=2{}_nC_0+2\boxed{{}_nC_2}+2{}_nC_4+\cdots+2{}_nC_n$
양변을 2로 나누면
$2^{n-1}={}_nC_0+\boxed{{}_nC_2}+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n$
㉡−㉢을 하면
$2^n=2{}_nC_1+2{}_nC_3+2\boxed{{}_nC_5}+\cdots+2{}_nC_{n-1}$
양변을 2로 나누면
$\boxed{2^{n-1}}={}_nC_1+{}_nC_3+\boxed{{}_nC_5}+\cdots+{}_nC_{n-1}$
$\therefore\ 2^{n-1}={}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n$
$={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}$
답 **${}_nC_2$, -1, ${}_nC_2$, ${}_nC_2$, ${}_nC_5$, 2^{n-1}, ${}_nC_5$**

유형 익히기

본문 20~23쪽

0121 $\left(mx^2+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(mx^2)^{5-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_5C_rm^{5-r}x^{10-2r}\dfrac{1}{x^r}$
$={}_5C_rm^{5-r}\dfrac{x^{10-2r}}{x^r}$
x^4항은 $(10-2r)-r=4$인 경우이므로 $r=2$
따라서 x^4의 계수는 ${}_5C_2m^3=80$
$10m^3=80$, $m^3=8$
$\therefore\ m=2$ 답 ②

0122 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r1^{n-r}x^r={}_nC_rx^r$
x^2항은 $r=2$인 경우이므로
x^2의 계수는 ${}_nC_2=66$
$\dfrac{n(n-1)}{2!}=66$
$n(n-1)=132$, $(n+11)(n-12)=0$
$\therefore\ n=12$ ($\because$ n은 자연수) 답 **12**

0123 $(3x+k)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r(3x)^{6-r}k^r={}_6C_r3^{6-r}k^rx^{6-r}$
…… ㉮
x^3항은 $6-r=3$인 경우이므로 $r=3$
따라서 x^3의 계수는 ${}_6C_33^3k^3$
…… ㉯
x^2항은 $6-r=2$인 경우이므로 $r=4$
따라서 x^2의 계수는 ${}_6C_43^2k^4$
…… ㉰
x^3의 계수와 x^2의 계수가 같으므로
${}_6C_33^3k^3={}_6C_43^2k^4$, $20\times3^3\times k^3=15\times3^2\times k^4$
$\therefore\ k=4$
…… ㉱
답 **4**

단계	채점요소	배점
㉮	전개식의 일반항 구하기	25%
㉯	x^3의 계수 구하기	25%
㉰	x^2의 계수 구하기	25%
㉱	k의 값 구하기	25%

0124 $\left(x^2+\dfrac{2}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(\dfrac{2}{x^3}\right)^r={}_nC_rx^{2n-2r}\dfrac{2^r}{x^{3r}}$
$={}_nC_r2^r\dfrac{x^{2n-2r}}{x^{3r}}$
상수항은 $2n-2r=3r$인 경우이므로 $r=\dfrac{2}{5}n$
이때 5와 2는 서로소이므로 n은 5의 배수, r는 2의 배수이다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다. 답 ②

0125 $(\sqrt{6}+x)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r(\sqrt{6})^{6-r}x^r$
이때 계수 ${}_6C_r(\sqrt{6})^{6-r}$은 $6-r\,(0\le r\le6)$가 0 또는 짝수일 때 정수가 된다.
$\therefore\ r=0$ 또는 $r=2$ 또는 $r=4$ 또는 $r=6$
즉, 계수가 정수인 항은 상수항, x^2, x^4, x^6이므로
상수항은 ${}_6C_0(\sqrt{6})^6=216$
x^2의 계수는 ${}_6C_2(\sqrt{6})^4=540$

x^4의 계수는 ${}_6C_4(\sqrt{6})^2=90$
x^6의 계수는 ${}_6C_6=1$
따라서 계수가 정수인 모든 항의 계수의 합은
$216+540+90+1=847$ 답 ①

0126 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\frac{x^{4-r}}{x^r}$ …… ㉠

이때 $(x+2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$이므로

전개식에서 x^2항은 $x\times$(㉠의 x항), $2\times$(㉠의 x^2항)일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x항은 $(4-r)-r=1$인 경우이므로 $r=\frac{3}{2}$
그런데 r는 $0\le r\le 4$인 정수이므로 ㉠에서 x항은 존재하지 않는다.
(ii) ㉠에서 x^2항은 $(4-r)-r=2$인 경우이므로 $r=1$
따라서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는
${}_4C_1=4$
(i), (ii)에서 구하는 x^2의 계수는
$2\times4=8$ 답 ⑤

0127 $\frac{(1+x)^8-1}{x}$의 전개식에서 x^3의 계수는 $(1+x)^8$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.
$(1+x)^8$의 전개식의 일반항은
${}_8C_r 1^{8-r}x^r={}_8C_r x^r$
이고, x^4항은 $r=4$인 경우이므로 x^4의 계수는
${}_8C_4=70$
따라서 $\frac{(1+x)^8-1}{x}$의 전개식에서 x^3의 계수는 70이다. 답 ④

0128 $(x^2+2)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r(x^2)^{7-r}2^r={}_7C_r 2^r x^{14-2r}$ …… ㉠
이때 $(2x^2-x)(x^2+2)^7=2x^2(x^2+2)^7-x(x^2+2)^7$이므로
전개식에서 x^4항은 $2x^2\times$(㉠의 x^2항), $-x\times$(㉠의 x^3항)일 때 나타난다.
(i) ㉠에서 x^2항은 $14-2r=2$인 경우이므로 $r=6$
따라서 $(x^2+2)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는
${}_7C_6 2^6=448$
(ii) ㉠에서 x^3항은 $14-2r=3$인 경우이므로 $r=\frac{11}{2}$
그런데 r는 $0\le r\le 7$인 정수이므로 ㉠에서 x^3항은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 구하는 x^4의 계수는
$2\times448=896$ 답 ②

0129 $(3x+2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(3x)^{5-r}2^r={}_5C_r 2^r 3^{5-r}x^{5-r}$ …… ㉠
이때 $(ax^3-3x)(3x+2)^5=ax^3(3x+2)^5-3x(3x+2)^5$이므로
전개식에서 x^4항은 $ax^3\times$(㉠의 x항), $-3x\times$(㉠의 x^3항)일 때 나타난다.
(i) ㉠에서 x항은 $5-r=1$인 경우이므로 $r=4$
따라서 $(3x+2)^5$의 전개식에서 x의 계수는
${}_5C_4 2^4\times3^1=240$
(ii) ㉠에서 x^3항은 $5-r=3$인 경우이므로 $r=2$
따라서 $(3x+2)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는
${}_5C_2 2^2\times3^3=1080$
(i), (ii)에서 구하는 x^4의 계수는
$a\times240+(-3)\times1080=-2040$
$240a=1200$ $\quad\therefore a=5$ 답 ④

0130 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\frac{x^{6-r}}{x^r}$ …… ㉠

이때

$(x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

이므로 전개식에서 상수항은 $x^2\times\left(㉠의\ \frac{1}{x^2}항\right)$,

$x\times\left(㉠의\ \frac{1}{x}항\right)$, (㉠의 상수항)일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $\frac{1}{x^2}$항은 $r-(6-r)=2$인 경우이므로 $r=4$
따라서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수는
${}_6C_4={}_6C_2=15$
(ii) ㉠에서 $\frac{1}{x}$항은 $r-(6-r)=1$인 경우이므로 $r=\frac{7}{2}$
그런데 r는 $0\le r\le 6$인 정수이므로 ㉠에서 $\frac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.
(iii) ㉠에서 상수항은 $6-r=r$인 경우이므로 $r=3$
따라서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은 ${}_6C_3=20$
(i)~(iii)에서 구하는 상수항은 $15+20=35$ 답 ③

0131 $(x-2)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_r x^{3-r}(-2)^r={}_3C_r(-2)^r x^{3-r}$ …… ㉠
$(2x+1)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_s(2x)^{5-s}1^s={}_5C_s 2^{5-s}x^{5-s}$ …… ㉡
$(x-2)^3(2x+1)^5$의 전개식에서 x^2항은
(㉠의 상수항)$\times$(㉡의 x^2항)$+$(㉠의 x항)$\times$(㉡의 x항)
$+$(㉠의 x^2항)$\times$(㉡의 상수항)
이므로 x^2의 계수는

${}_3C_3(-2)^3\times{}_5C_3 2^2+{}_3C_2(-2)^2\times{}_5C_4 2+{}_3C_1(-2)\times{}_5C_5$
$=-320+120-6$
$=-206$ 답 -206

0132 $(x-3)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r x^{5-r}(-3)^r={}_5C_r(-3)^r x^{5-r}$ …… ㉠
$(x+a)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_s x^{4-s}a^s={}_4C_s a^s x^{4-s}$ …… ㉡
$(x-3)^5(x+a)^4$의 전개식에서 x^8항은
(㉠의 x^5항)$\times$(㉡의 x^3항)$+$(㉠의 x^4항)$\times$(㉡의 x^4항)
이므로 x^8의 계수는
${}_5C_0\times{}_4C_1 a+{}_5C_1(-3)\times{}_4C_0=1$
$4a=16$ $\therefore a=4$ 답 ④

0133 ${}_1C_0={}_2C_0=1$이므로
${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_5C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$
$={}_6C_4+{}_6C_5$
$={}_7C_5={}_7C_2$ 답 ④

0134 ${}_{n-1}C_5+{}_{n-1}C_6={}_nC_6$이므로 ${}_nC_5={}_nC_6$
즉, ${}_nC_5={}_nC_{n-5}={}_nC_6$이므로
$n-5=6$ $\therefore n=11$ 답 **11**

0135 ${}_2C_2={}_3C_3=1$이므로
${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
⋮
$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2$
$={}_{11}C_3$ 답 ③

0136 ${}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5$
$={}_7C_0+{}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$
$={}_8C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$
$={}_9C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$
$={}_{10}C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$
$={}_{11}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$
$={}_{12}C_5-{}_7C_0$
$={}_{12}C_5-1$ 답 ①

0137 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$이고
$2\le n\le 20$인 경우에만 x^2항이 나오므로
$(1+x)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_2C_2$
$(1+x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_3C_2$
$(1+x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_4C_2$
⋮
$(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_{20}C_2$
따라서 구하는 x^2의 계수는
${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{20}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{20}C_2$ ($\because {}_2C_2={}_3C_3=1$)
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{20}C_2$
$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{20}C_2$
$={}_6C_3+{}_6C_2+\cdots+{}_{20}C_2$
⋮
$={}_{20}C_3+{}_{20}C_2$
$={}_{21}C_3$ 답 ⑤

0138 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로
${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1$
따라서 주어진 부등식은 $100<2^n-1<200$
$\therefore 101<2^n<201$
이때 $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$이므로
$n=7$ 답 ②

0139 ${}_{99}C_k={}_{99}C_{99-k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 99)$이므로
${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+\cdots+{}_{99}C_{49}$
$={}_{99}C_{99}+{}_{99}C_{98}+{}_{99}C_{97}+\cdots+{}_{99}C_{50}$
이때 ${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+\cdots+{}_{99}C_{99}=2^{99}$이므로
${}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+\cdots+{}_{99}C_{49}=\frac{1}{2}\times 2^{99}=2^{98}$ 답 $\mathbf{2^{98}}$

0140 ${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-{}_{20}C_3+\cdots-{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=0$이므로
${}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{19}={}_{20}C_0+{}_{20}C_{20}$
$=1+1=2$ 답 ④

0141 ${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$이므로
$2^{2n-1}=512=2^9$
즉, $2n-1=9$이므로 $n=5$ 답 **5**

0142 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14}=2^{15-1}=2^{14}$
……………………………………… ㉮
또한, ${}_9C_k={}_9C_{9-k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 9)$이므로
${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4={}_9C_9+{}_9C_8+{}_9C_7+{}_9C_6+{}_9C_5$
이때 ${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9=2^9$이므로
${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4=\frac{1}{2}\times 2^9=2^8$
……………………………………… ㉯

따라서 $\dfrac{{}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14}}{{}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4}=\dfrac{2^{14}}{2^8}=2^6$이므로

$n=6$ ······ ㉰

답 6

단계	채점요소	배점
㉮	분자의 값 구하기	40 %
㉯	분모의 값 구하기	40 %
㉰	자연수 n의 값 구하기	20 %

0143 11명의 직원 중 회의에 참석하는 직원이

6명인 경우의 수는 ${}_{11}C_6$,

7명인 경우의 수는 ${}_{11}C_7$,

⋮

11명인 경우의 수는 ${}_{11}C_{11}$

이므로 회의에 참석하는 직원이 6명 이상인 경우의 수는

${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$

한편, ${}_{11}C_k={}_{11}C_{11-k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11)$이므로

${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$

$={}_{11}C_5+{}_{11}C_4+{}_{11}C_3+{}_{11}C_2+{}_{11}C_1+{}_{11}C_0$

이때 ${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$이므로

${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}=\dfrac{1}{2}\times 2^{11}$

$=2^{10}=1024$ 답 1024

0144 원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_1$,

원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_3$,

원소가 5개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_5$,

원소가 7개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_7$

이므로 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

${}_8C_1+{}_8C_3+{}_8C_5+{}_8C_7=2^{8-1}=2^7=128$ 답 128

0145 ㄱ. ${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}=2^{11-1}=2^{10}$

이므로

${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9=2^{10}-{}_{11}C_{11}=2^{10}-1$

ㄴ. ${}_7C_0-{}_7C_1+{}_7C_2-\cdots-{}_7C_7=0$

ㄷ. ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}=4^n$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

유형 up

본문 23쪽

0146 31^{20}

$=(30+1)^{20}$

$={}_{20}C_0\,30^{20}+{}_{20}C_1\,30^{19}+\cdots+{}_{20}C_{18}\,30^2+{}_{20}C_{19}\,30+{}_{20}C_{20}$

$=30^2({}_{20}C_0\,30^{18}+{}_{20}C_1\,30^{17}+\cdots+{}_{20}C_{18})+{}_{20}C_{19}\,30+{}_{20}C_{20}$

이때 $30^2({}_{20}C_0\,30^{18}+{}_{20}C_1\,30^{17}+\cdots+{}_{20}C_{18})$은 900으로 나누어떨어지므로 31^{20}을 900으로 나누었을 때의 나머지는

${}_{20}C_{19}\,30+{}_{20}C_{20}=601$ 답 ⑤

0147 ${}_{20}C_0+7\times{}_{20}C_1+7^2\times{}_{20}C_2+\cdots+7^{20}\times{}_{20}C_{20}$

$={}_{20}C_0\,1^{20}+{}_{20}C_1\,1^{19}7+{}_{20}C_2\,1^{18}7^2+\cdots+{}_{20}C_{20}\,7^{20}$

$=(1+7)^{20}=8^{20}=2^{60}$ 답 ③

0148 11^{30}

$=(10+1)^{30}$

$={}_{30}C_0\,10^{30}+{}_{30}C_1\,10^{29}+\cdots+{}_{30}C_{28}\,10^2+{}_{30}C_{29}\,10+{}_{30}C_{30}$

$=10^3({}_{30}C_0\,10^{27}+{}_{30}C_1\,10^{26}+\cdots+{}_{30}C_{27})$

$+{}_{30}C_{28}\,10^2+{}_{30}C_{29}\,10+{}_{30}C_{30}$

$=10^3({}_{30}C_0\,10^{27}+{}_{30}C_1\,10^{26}+\cdots+{}_{30}C_{27})+43500+300+1$

$=10^3({}_{30}C_0\,10^{27}+{}_{30}C_1\,10^{26}+\cdots+{}_{30}C_{27})+43801$

이때 $10^3({}_{30}C_0\,10^{27}+{}_{30}C_1\,10^{26}+\cdots+{}_{30}C_{27})$은 1000으로 나누어떨어지므로 11^{30}의 백의 자리의 숫자는 8, 십의 자리의 숫자는 0, 일의 자리의 숫자는 1이다.

따라서 $a=8,\ b=0,\ c=1$이므로

$a-b-c=7$ 답 7

0149 8^{13}

$=(7+1)^{13}$

$={}_{13}C_0\,7^{13}+{}_{13}C_1\,7^{12}+{}_{13}C_2\,7^{11}+\cdots+{}_{13}C_{12}\,7+{}_{13}C_{13}$

$=7({}_{13}C_0\,7^{12}+{}_{13}C_1\,7^{11}+{}_{13}C_2\,7^{10}+\cdots+{}_{13}C_{12})+{}_{13}C_{13}$

이때 $7({}_{13}C_0\,7^{12}+{}_{13}C_1\,7^{11}+{}_{13}C_2\,7^{10}+\cdots+{}_{13}C_{12})$는 7로 나누어떨어지므로 8^{13}을 7로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{13}C_{13}=1$이다.

따라서 어느 월요일로부터 8^{13}일 후는 화요일이다. 답 ②

시험에 꼭 나오는 문제

본문 24~25쪽

0150 $(2+ax)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,2^{5-r}(ax)^r={}_5C_r\,2^{5-r}a^rx^r$

x^2항은 $r=2$인 경우이므로

x^2의 계수는 ${}_5C_2\,2^3a^2=2000$

$80a^2=2000,\ a^2=25$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 ②

0151 $\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\,a^{4-r}\dfrac{x^{4-r}}{x^r}$

상수항은 $4-r=r$인 경우이므로 $r=2$

따라서 상수항은 ${}_4C_2\,a^2=54$

$6a^2=54$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 3

0152 $(2x+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(2x)^{4-r}1^r={}_4C_r\,2^{4-r}x^{4-r}$ …… ㉠

$(ax^2+1)(2x+1)^4=ax^2(2x+1)^4+(2x+1)^4$ …… ㉡

㉡의 전개식에서 x^4항은 $ax^2\times$(㉠의 x^2항), (㉠의 x^4항)일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $4-r=2$인 경우이므로 $r=2$

따라서 $(2x+1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_4C_2\,2^2=24$

(ii) ㉠에서 x^4의 계수는 ${}_4C_0\,2^4=16$

(i), (ii)에서 ㉡의 전개식에서 x^4의 계수는

$a\times24+16=-56$

$24a=-72$ $\therefore a=-3$

따라서 ㉡의 전개식에서 x^2항은 $-3x^2\times$(㉠의 상수항), (㉠의 x^2항)일 때 나타나므로 x^2의 계수는

$(-3)\times{}_4C_4+{}_4C_2\,2^2=-3+24=21$ 답 21

0153 $(x-1)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}(-1)^r={}_3C_r(-1)^r x^{3-r}$ …… ㉠

$\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s x^{5-s}\left(\dfrac{3}{x}\right)^s={}_5C_s\,3^s\dfrac{x^{5-s}}{x^s}$ …… ㉡

$(x-1)^3\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^6항은

(㉠의 x항)$\times$(㉡의 x^5항), (㉠의 x^2항)$\times$(㉡의 x^4항),

(㉠의 x^3항)$\times$(㉡의 x^3항)일 때 나타난다.

그런데 ㉡에서 x^4항은 $s=\dfrac{1}{2}$인 경우이고 이는 $0\le s\le5$인 정수가 아니므로 x^4항은 존재하지 않는다.

따라서 $(x-1)^3\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^5$의 전개식의 x^6항은

(㉠의 x항)$\times$(㉡의 x^5항)$+$(㉠의 x^3항)$\times$(㉡의 x^3항)

이므로 x^6의 계수는

${}_3C_2(-1)^2\times{}_5C_0+{}_3C_0\times{}_5C_1\,3^1=3+15=18$ 답 18

0154 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{40}C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{40}C_2$ ($\because {}_2C_2={}_3C_3=1$)

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{40}C_2$

$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{40}C_2$

$\vdots$

$={}_{40}C_3+{}_{40}C_2$

$={}_{41}C_3$

$\therefore n=41$ 답 41

0155 ${}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7$

$=({}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7)-{}_4C_1+{}_3C_1$

$=({}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7)-{}_4C_1+{}_3C_1$

$=({}_6C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7)-{}_4C_1+{}_3C_1$

$=({}_7C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7)-{}_4C_1+{}_3C_1$

$=({}_8C_5+{}_8C_6+{}_9C_7)-{}_4C_1+{}_3C_1$

$=({}_9C_6+{}_9C_7)-{}_4C_1+{}_3C_1$

$={}_{10}C_7-{}_4C_1+{}_3C_1$

$={}_{10}C_7-1$ 답 ①

0156 $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r 1^{n-r}(2x)^r={}_nC_r\,2^r x^r$

이고 $2\le n\le10$인 경우에만 x^2항이 나오므로

$(1+2x)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_2C_2\,2^2$

$(1+2x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_3C_2\,2^2$

$(1+2x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_4C_2\,2^2$

$\vdots$

$(1+2x)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_{10}C_2\,2^2$

따라서 구하는 x^2의 계수는

${}_2C_2\,2^2+{}_3C_2\,2^2+{}_4C_2\,2^2+{}_5C_2\,2^2+\cdots+{}_{10}C_2\,2^2$

$=2^2({}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2)$

$=2^2({}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2)$ ($\because {}_2C_2={}_3C_3=1$)

$=2^2({}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2)$

$=2^2({}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2)$

$\vdots$

$=2^2({}_{10}C_3+{}_{10}C_2)$

$=2^2\,{}_{11}C_3=660$ 답 ③

0157 ${}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+{}_{2n+1}C_6+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}$

$=2^{(2n+1)-1}=2^{2n}$

이므로

${}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+{}_{2n+1}C_6+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}$

$=2^{2n}-{}_{2n+1}C_0$

$=2^{2n}-1$

즉, $2^{2n}-1=255$이므로 $2^{2n}=256=2^8$

$2n=8$ $\therefore n=4$ 답 4

0158 ㄱ. ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=2^{10}$이므로

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9=2^{10}-{}_{10}C_{10}$

$=2^{10}-1$

ㄴ. ${}_4C_0-{}_4C_1+{}_4C_2-{}_4C_3+{}_4C_4=0$

ㄷ. ${}_7C_0+{}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6={}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7$이고

${}_7C_0={}_7C_7=1$이므로

${}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6={}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0159 ${}_{10}C_1 2^9+{}_{10}C_2 2^8+{}_{10}C_3 2^7+\cdots+{}_{10}C_9 2+{}_{10}C_{10}$

$=({}_{10}C_0 2^{10}+{}_{10}C_1 2^9+{}_{10}C_2 2^8+{}_{10}C_3 2^7+\cdots+{}_{10}C_9 2+{}_{10}C_{10})-{}_{10}C_0 2^{10}$

$=({}_{10}C_0 2^{10}+{}_{10}C_1 2^9 1+{}_{10}C_2 2^8 1^2+{}_{10}C_3 2^7 1^3+\cdots+{}_{10}C_9 2\times 1^9+{}_{10}C_{10} 1^{10})-2^{10}$

$=(2+1)^{10}-2^{10}=3^{10}-2^{10}$ 답 ③

0160 9^{11}

$=(10-1)^{11}$

$={}_{11}C_0 10^{11}+{}_{11}C_1 10^{10}(-1)+{}_{11}C_2 10^9(-1)^2+\cdots+{}_{11}C_9 10^2(-1)^9+{}_{11}C_{10} 10(-1)^{10}+{}_{11}C_{11}(-1)^{11}$

$=10^2\{{}_{11}C_0 10^9+{}_{11}C_1 10^8(-1)+{}_{11}C_2 10^7(-1)^2+\cdots+{}_{11}C_9(-1)^9\}+{}_{11}C_{10} 10(-1)^{10}+{}_{11}C_{11}(-1)^{11}$

이때

$10^2\{{}_{11}C_0 10^9+{}_{11}C_1 10^8(-1)+{}_{11}C_2 10^7(-1)^2+\cdots+{}_{11}C_9(-1)^9\}$

은 100으로 나누어떨어진다.

따라서 9^{11}을 100으로 나누었을 때의 나머지는

${}_{11}C_{10} 10(-1)^{10}+{}_{11}C_{11}(-1)^{11}=109$를 100으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 9이다. 답 9

0161 $(1+x)^{15}$의 전개식의 일반항은

${}_{15}C_r 1^{15-r}x^r={}_{15}C_r x^r$

이고 $(1+x)^{15}(1+x)^{15}$의 전개식에서 x^{15}의 계수는

${}_{15}C_0\times{}_{15}C_{15}+{}_{15}C_1\times{}_{15}C_{14}+{}_{15}C_2\times{}_{15}C_{13}+\cdots+{}_{15}C_{15}\times{}_{15}C_0$

$={}_{15}C_0\times{}_{15}C_0+{}_{15}C_1\times{}_{15}C_1+{}_{15}C_2\times{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}\times{}_{15}C_{15}$ $(\because {}_nC_r={}_nC_{n-r})$

$=({}_{15}C_0)^2+({}_{15}C_1)^2+({}_{15}C_2)^2+\cdots+({}_{15}C_{15})^2$

그런데 $(1+x)^{15}(1+x)^{15}$의 전개식에서 x^{15}의 계수는 $(1+x)^{30}$의 전개식에서 x^{15}의 계수와 같으므로

$({}_{15}C_0)^2+({}_{15}C_1)^2+({}_{15}C_2)^2+\cdots+({}_{15}C_{15})^2={}_{30}C_{15}$

따라서 $n=30$, $r=15$이므로

$n+r=45$ 답 45

0162 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r x^{6-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_6C_r 2^r\dfrac{x^{6-r}}{x^r}$

㉮

(i) 상수항은 $6-r=r$인 경우이므로 $r=3$

따라서 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은

${}_6C_3 2^3=20\times 8=160$ $\therefore a=160$

㉯

(ii) x^2항은 $(6-r)-r=2$인 경우이므로 $r=2$

따라서 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_6C_2 2^2=15\times 4=60$ $\therefore b=60$

㉰

(i), (ii)에서 $a+b=220$

㉱

답 220

단계	채점요소	배점
㉮	전개식의 일반항 구하기	30 %
㉯	상수항 구하기	30 %
㉰	x^2의 계수 구하기	30 %
㉱	$a+b$의 값 구하기	10 %

0163 원 위의 서로 다른 8개의 점을 이어 만들 수 있는 다각형은 삼각형, 사각형, 오각형, …, 팔각형이다.

㉮

삼각형의 개수는 ${}_8C_3$, 사각형의 개수는 ${}_8C_4$

오각형의 개수는 ${}_8C_5$, 육각형의 개수는 ${}_8C_6$

칠각형의 개수는 ${}_8C_7$, 팔각형의 개수는 ${}_8C_8$

㉯

따라서 모든 다각형의 개수는

${}_8C_3+{}_8C_4+{}_8C_5+{}_8C_6+{}_8C_7+{}_8C_8$

$=({}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8)-({}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2)$

$=2^8-(1+8+28)=219$

㉰

답 219

단계	채점요소	배점
㉮	만들 수 있는 다각형 구하기	30 %
㉯	각 다각형의 개수 구하기	35 %
㉰	다각형의 개수의 합 구하기	35 %

0164 $9^2\times{}_6C_1+9^3\times{}_6C_2+9^4\times{}_6C_3+\cdots+9^7\times{}_6C_6$

$=9(9\times{}_6C_1+9^2\times{}_6C_2+9^3\times{}_6C_3+\cdots+9^6\times{}_6C_6)$

$=9({}_6C_1 1^5 9+{}_6C_2 1^4 9^2+{}_6C_3 1^3 9^3+\cdots+{}_6C_6 9^6)$

$=9({}_6C_0 1^6+{}_6C_1 1^5 9+{}_6C_2 1^4 9^2+{}_6C_3 1^3 9^3+\cdots+{}_6C_6 9^6-{}_6C_0 1^6)$

$=9\{(1+9)^6-1\}=9(10^6-1)$

$=9000000-9=8999991$

따라서 각 자리의 숫자의 합은

$8+9+9+9+9+9+1=54$ 답 54

0165 ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

$=({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)-{}_nC_0$

$=2^n-1$

$n=1$일 때 $2^1-1=1$,

$n=2$일 때 $2^2-1=3$,

$n=3$일 때 $2^3-1=7$,

$n=4$일 때 $2^4-1=15$,

$n=5$일 때 $2^5-1=31$,

$n=6$일 때 $2^6-1=63$,

⋮

이므로 n이 짝수일 때 2^n-1의 값이 3의 배수이다.

따라서 50 이하의 짝수 n의 개수는 25이다. 답 **25**

수학 I 을 학습한 학생들을 위한 이항정리

본문 26~27쪽

0166 $P=\sum_{k=0}^{20}{}_{20}C_k\left(\frac{5}{2}\right)^{20-k}\left(\frac{3}{2}\right)^k$

$={}_{20}C_0\left(\frac{5}{2}\right)^{20}+{}_{20}C_1\left(\frac{5}{2}\right)^{19}\left(\frac{3}{2}\right)^1+\cdots+{}_{20}C_{20}\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$

$=\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)^{20}$

$=4^{20}=(2^2)^{20}=2^{40}$

$\therefore \log_2 P=\log_2 2^{40}=40$ 답 ④

참고 n이 자연수일 때,

$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$
$+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$

$=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r$

0167 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r1^{n-r}x^r={}_nC_rx^r$

따라서 x^8, x^9, x^{10}의 계수는 각각

${}_nC_8$, ${}_nC_9$, ${}_nC_{10}$

이고, 이 세 수가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2{}_nC_9={}_nC_8+{}_nC_{10}$

$2\times\frac{n!}{9!\times(n-9)!}=\frac{n!}{8!\times(n-8)!}+\frac{n!}{10!\times(n-10)!}$

양변에 $\frac{10!(n-8)!}{n!}$을 곱하면

$2\times10(n-8)=10\times9+(n-8)(n-9)$

$n^2-37n+322=0$

$(n-14)(n-23)=0$

$\therefore n=23$ ($\because n>20$) 답 **23**

참고 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\frac{a+c}{2}$가 성립한다.

0168 $(2x+1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}1^r={}_5C_r2^{5-r}x^{5-r}$

$(x-1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_sx^{4-s}(-1)^s={}_4C_s(-1)^sx^{4-s}$

따라서 $(2x+1)^5(x-1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r2^{5-r}x^{5-r}\times{}_4C_s(-1)^sx^{4-s}={}_5C_r\times{}_4C_s2^{5-r}(-1)^sx^{9-r-s}$

이때 x^2항은 $9-r-s=2$인 경우이므로

$r+s=7$ $(0\le r\le5,\ 0\le s\le4)$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$

따라서 x^2의 계수는

${}_5C_3\times{}_4C_42^2(-1)^4+{}_5C_4\times{}_4C_32^1(-1)^3+{}_5C_5\times{}_4C_22^0(-1)^2$

$=40-40+6=6$ 답 **6**

0169 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_rx^{5-r}x^{-r}={}_5C_rx^{5-2r}$

$(x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_s(x^2)^{3-s}1^s={}_3C_sx^{6-2s}$

따라서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5(x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-2r}\times{}_3C_sx^{6-2s}={}_5C_r\times{}_3C_sx^{11-2r-2s}$

이때 x항은 $11-2r-2s=1$인 경우이므로

$r+s=5$ $(0\le r\le5,\ 0\le s\le3)$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 0)$

따라서 x의 계수는

${}_5C_2\times{}_3C_3+{}_5C_3\times{}_3C_2+{}_5C_4\times{}_3C_1+{}_5C_5\times{}_3C_0$

$=10+30+15+1=56$ 답 ④

0170 $(x+a)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}a^r={}_4C_ra^rx^{4-r}$

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_sx^{3-s}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^s={}_3C_s(-1)^sx^{3-s}x^{-2s}={}_3C_s(-1)^sx^{3-3s}$

따라서 $(x+a)^4\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식의 일반항은

${}_4C_ra^rx^{4-r}\times{}_3C_s(-1)^sx^{3-3s}={}_4C_r\times{}_3C_sa^r(-1)^sx^{7-r-3s}$

이때 x^2항은 $7-r-3s=2$인 경우이므로

$r+3s=5$ $(0\le r\le4,\ 0\le s\le3)$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(2, 1)$뿐이다.

따라서 x^2의 계수는

${}_4C_2\times{}_3C_1a^2(-1)^1=-72$

$-18a^2=-72$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ②

0171 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$

$=\frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1}$ ← 첫째항: $1+x$, 공비: $1+x$, 항의 개수: 10

$=\frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$ …… ㉠

㉠의 전개식에서 x^2의 계수는 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$의 전개식의 일반항은

${}_{11}C_r 1^{11-r} x^r = {}_{11}C_r x^r$

이므로 x^3의 계수는 ${}_{11}C_3=165$

따라서 ㉠의 전개식에서 x^2의 계수는 165이다. 답 ④

0172 $x^2(1+x^2)+x^2(1+x^2)^2+x^2(1+x^2)^3+\cdots$
$+x^2(1+x^2)^{10}$

$=\dfrac{x^2(1+x^2)\{(1+x^2)^{10}-1\}}{(1+x^2)-1}$ ← 첫째항: $x^2(1+x^2)$, 공비: $1+x^2$, 항의 개수: 10

$=\dfrac{x^2(1+x^2)^{11}-x^2(1+x^2)}{x^2}$

$=(1+x^2)^{11}-(1+x^2)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 전개식에서 x^6의 계수는 $(1+x^2)^{11}$의 전개식에서 x^6의 계수와 같다.

$(1+x^2)^{11}$의 전개식의 일반항은

${}_{11}C_r 1^{11-r}(x^2)^r = {}_{11}C_r x^{2r}$

이므로 x^6의 계수는 $r=3$일 때 ${}_{11}C_3$

따라서 ㉠의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_{11}C_3$이다. 답 ②

0173 주어진 파스칼의 삼각형은 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & & \\
 & & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & & \\
 & {}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 & \\
{}_4C_0 & & {}_4C_1 & & {}_4C_2 & & {}_4C_3 & & {}_4C_4 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
{}_{10}C_0 & & {}_{10}C_1 & & \cdots & & {}_{10}C_9 & & {}_{10}C_{10}
\end{array}$$

${}_1C_0+{}_1C_1=2^1$

${}_2C_0+{}_2C_1+{}_2C_2=2^2$

${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=2^3$

${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4$

$\vdots$

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=2^{10}$

따라서 주어진 그림에 있는 모든 수들의 합은

$2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{10}=\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}$ ← 첫째항: 2, 공비: 2, 항의 개수: 10

$=2^{11}-2$

$=2046$ 답 **2046**

0174 ${}_{39}C_k={}_{39}C_{39-k}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 39)$이므로

${}_{39}C_0+{}_{39}C_1+{}_{39}C_2+\cdots+{}_{39}C_{19}$
$={}_{39}C_{39}+{}_{39}C_{38}+{}_{39}C_{37}+\cdots+{}_{39}C_{20}$

이때 ${}_{39}C_0+{}_{39}C_1+{}_{39}C_2+\cdots+{}_{39}C_{39}=2^{39}$이므로

${}_{39}C_0+{}_{39}C_1+{}_{39}C_2+\cdots+{}_{39}C_{19}=\dfrac{1}{2}\times 2^{39}=2^{38}$

$\therefore \log_2({}_{39}C_0+{}_{39}C_1+{}_{39}C_2+\cdots+{}_{39}C_{19})=\log_2 2^{38}=38$ 답 **38**

0175 ${}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}=2^{2k-1}$이므로

$f(n)=\sum_{k=1}^{n}({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1})$

$=\sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\times 4^k\right)$

$=\dfrac{2(4^n-1)}{4-1}$ ← 첫째항: 2, 공비: 4, 항의 개수: n

$=\dfrac{2}{3}(4^n-1)$

$\therefore f(5)=\dfrac{2}{3}(4^5-1)=682$ 답 **682**

0176 $(1+x)^{20}=a_{20}x^{20}+a_{19}x^{19}+a_{18}x^{18}+\cdots+a_1x+a_0$

이므로 a_{10}은 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수이다.

그런데 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수와 같다.

이때 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r 1^{10-r}x^r\times{}_{10}C_s 1^{10-s}x^s={}_{10}C_r\times{}_{10}C_s x^{r+s}$

이므로 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8+\cdots$
$+{}_{10}C_9\times{}_{10}C_1+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$

$=\sum_{k=0}^{10}({}_{10}C_k\times{}_{10}C_{10-k})$

$=\sum_{k=0}^{10}({}_{10}C_k\times{}_{10}C_k)\ (\because {}_nC_{n-k}={}_nC_k)$

$=\sum_{k=0}^{10}({}_{10}C_k)^2$

$\therefore a_{10}=\sum_{k=0}^{10}({}_{10}C_k)^2$ 답 ④

0177 $\sum_{r=1}^{20}{}_{20}C_r 2^{20-r}$

$={}_{20}C_1 2^{19}+{}_{20}C_2 2^{18}+{}_{20}C_3 2^{17}+\cdots+{}_{20}C_{20}$

$={}_{20}C_0 2^{20}+{}_{20}C_1 2^{19}1^1+{}_{20}C_2 2^{18}1^2+\cdots+{}_{20}C_{20}1^{20}-{}_{20}C_0 2^{20}$

$=(2+1)^{20}-2^{20}$

$=3^{20}-2^{20}$ 답 ③

0178 $\sum_{k=0}^{30}5^k{}_{30}C_k=5^0{}_{30}C_0+5^1{}_{30}C_1+5^2{}_{30}C_2+\cdots+5^{30}{}_{30}C_{30}$

$={}_{30}C_0 1^{30}+{}_{30}C_1 1^{29}5^1+{}_{30}C_2 1^{28}5^2+\cdots$
$+{}_{30}C_{30}5^{30}$

$=(1+5)^{30}=6^{30}$

$\therefore \log_6\left(\sum_{k=0}^{30}5^k{}_{30}C_k\right)=\log_6 6^{30}=30$ 답 **30**

03 확률의 뜻과 활용

교과서 문제 정/복/하/기

본문 31쪽, 33쪽

0179 (2) 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$의 6개이다.

답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (2) 6 (3) $\{2, 4, 6\}$

0180 표본공간을 S라 하면
$S=\{\mathrm{HH, HT, TH, TT}\}$,
$A=\{\mathrm{HT, TH}\}$, $B=\{\mathrm{HT, TH, TT}\}$, $C=\{\mathrm{HH}\}$
(1) $A\cap B=\{\mathrm{HT, TH}\}$
(2) $A\cup C=\{\mathrm{HT, TH, HH}\}$
(3) $B^C=\{\mathrm{HH}\}$
(4) $A\cap B=\{\mathrm{HT, TH}\}$
$B\cap C=\varnothing$
$A\cap C=\varnothing$
이므로 A, B, C 중 서로 배반사건인 두 사건은 A와 C, B와 C이다.

답 (1) $\{\mathrm{HT, TH}\}$ (2) $\{\mathrm{HT, TH, HH}\}$ (3) $\{\mathrm{HH}\}$ (4) A와 C, B와 C

0181 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{4, 8\}$
(1) $A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
(2) $B^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
(3) $A\cup B=\{3, 4, 6, 8, 9\}$
(4) $A\cap B=\varnothing$

답 (1) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ (2) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ (3) $\{3, 4, 6, 8, 9\}$ (4) $\varnothing$

0182 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 모든 경우의 수는 6이고, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$이므로
(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
(2) $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
(3) $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
(4) $A\cap B=\{3, 5\}$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$

0183 (1) 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$
A가 가장 앞에 서는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 확률은
$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$
(2) D, E를 한 사람으로 생각하여 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!=24$
D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 D, E가 이웃하게 서는 경우의 수는 $24\times2=48$이므로 구하는 확률은
$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$

0184 $\frac{10000-9900}{10000}=\frac{100}{10000}=\frac{1}{100}$

답 $\frac{1}{100}$

0185 $\frac{(4\text{가 적힌 과녁의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

0186 (1) 두 눈의 수의 곱은 항상 40 이하이다. 따라서 두 눈의 수의 곱이 40 이하인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.
(2) 두 눈의 수의 합의 최댓값은 12이다. 따라서 두 눈의 수의 합이 14인 사건은 절대로 일어나지 않으므로 구하는 확률은 0이다.

답 (1) 1 (2) 0

0187 (1) 음의 정수가 적힌 카드를 뽑는 사건은 절대로 일어나지 않으므로 구하는 확률은 0이다.
(2) 10 이하의 자연수가 적힌 카드를 뽑는 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

답 (1) 0 (2) 1

0188 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}$
$=\frac{11}{20}$

답 $\frac{11}{20}$

0189 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서
$\frac{5}{6}=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{30}$

답 $\frac{1}{30}$

0190 $A\cap B=\varnothing$, 즉 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서
$0.7=0.3+\mathrm{P}(B)$
$\therefore \mathrm{P}(B)=0.4$

답 0.4

0191 (1) 공에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 12의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{13}{40}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{40}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{40}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{13}{40}+\frac{10}{40}-\frac{3}{40}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) 공에 적힌 수가 5의 배수인 사건을 A, 9의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 45의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{40}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{40}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{8}{40}+\frac{4}{40}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{3}{10}}$

0192 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 $\mathbf{\frac{5}{6}}$

0193 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $2\times2\times2=8$

적어도 한 개는 앞면이 나오는 사건을 A라 하면 $\boxed{A^C}$는 동전 3개 모두 뒷면이 나오는 사건이다.

동전 3개 모두 뒷면이 나올 확률은

$\mathrm{P}(\boxed{A^C})=\boxed{\frac{1}{8}}$

이므로 적어도 한 개는 앞면이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{8}=\boxed{\frac{7}{8}}$

답 A^C, A^C, $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$

0194 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A라 하면 A^C는 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건이다.

(1) 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 두 주사위의 눈의 수가 모두 홀수가 나오는 경우이므로 그 경우의 수는

$3\times3=9$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(2) 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은 $\mathrm{P}(A^C)$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{4}}$ (2) $\mathbf{\frac{3}{4}}$

유형 익/히/기

본문 34~40쪽

0195 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{3, 6\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$

ㄴ. $B\cap C=\{3\}$

ㄷ. $A\cap C=\{6\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

0196 ㄱ. $\begin{aligned}A\cap(A^C\cup B)&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\\&=\varnothing\cup(A\cap B)\\&=A\cap B=\{3\}\end{aligned}$

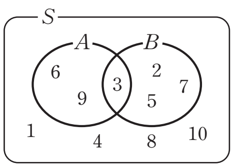
ㄴ. $A\cap(B^C\cap C)=\{1, 3, 6\}\cap\{5\}=\varnothing$

ㄷ. $A\cap(B\cap C^C)=\{1, 3, 6\}\cap\{4\}=\varnothing$

따라서 사건 A와 서로 배반사건인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0197 표본공간을 S라 하고, 두 집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽과 같다.



A와 배반사건인 사건은 A^C의 부분집합이고, B와 배반사건인 사건은 B^C의 부분집합이므로 두 사건 A, B 모두와 배반사건인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 4, 8, 10\}$이므로 A, B 모두와 배반사건인 사건의 개수는 $2^4=16$ 답 **16**

0198 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(i) 두 눈의 수의 차가 3인 경우

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (6, 3), (5, 2), (4, 1)의 6가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 4인 경우

(1, 5), (2, 6), (6, 2), (5, 1)의 4가지

(iii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우

(1, 6), (6, 1)의 2가지

(i)~(iii)에서 두 눈의 수의 차가 3 이상인 경우의 수는

$6+4+2=12$이므로 구하는 확률은

$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ 답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

0199 (i) B를 거치지 않고 A에서 C로 가는 경우의 수는 3
(ii) B를 거쳐 A에서 C로 가는 경우의 수는 $3\times2=6$
(i), (ii)에서 A에서 C로 가는 모든 경우의 수는 $3+6=9$이므로 구하는 확률은

$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0200 집합 A의 모든 부분집합의 개수는

$2^6=64$

원소 2, 5를 모두 포함하는 A의 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

답 ③

0201 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

······ ㉮

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=a^2-4b<0$

$\therefore b>\frac{a^2}{4}$

······ ㉯

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,
$(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$,
$(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$,
$(4, 5)$, $(4, 6)$

의 17개이다.

······ ㉰

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{36}$이다.

······ ㉱

답 $\frac{17}{36}$

단계	채점요소	배점
㉮	모든 경우의 수 구하기	20 %
㉯	이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가질 조건 구하기	30 %
㉰	조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	30 %
㉱	확률 구하기	20 %

0202 책 7권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $7!$
만화책 3권을 한 권으로 생각하여 총 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $5!$
만화책 3권의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$
따라서 만화책끼리 이웃하게 꽂는 경우의 수는 $5!\times3!$이므로 구하는 확률은

$\frac{5!\times3!}{7!}=\frac{1}{7}$

답 ②

0203 6명의 선수가 달리는 순서를 정하는 경우의 수는 $6!$
첫 번째로 달리는 여자 선수와 마지막에 달리는 여자 선수를 정하는 경우의 수는 ${}_3P_2$
나머지 4명이 달리는 순서를 정하는 경우의 수는 $4!$
따라서 첫 번째로 달리는 선수와 마지막에 달리는 선수가 모두 여자인 경우의 수는 ${}_3P_2\times4!$이므로 구하는 확률은

$\frac{{}_3P_2\times4!}{6!}=\frac{1}{5}$

답 ③

0204 8명이 일렬로 서는 경우의 수는 $8!$
양 끝에 서는 남학생을 정하는 경우의 수는 ${}_5P_2$
나머지 6명 중 여학생 3명을 한 명으로 생각하여 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!$
여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$
따라서 양 끝에는 남학생이 서고 여학생끼리는 서로 이웃하게 서는 경우의 수는 ${}_5P_2\times4!\times3!$이므로 구하는 확률은

$\frac{{}_5P_2\times4!\times3!}{8!}=\frac{1}{14}$

답 $\frac{1}{14}$

0205 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는 $5!=120$
이때 35000보다 큰 자연수는 35□□□ 또는 4□□□□ 또는 5□□□□ 꼴이다.
(i) 35□□□ 꼴의 자연수의 개수는
$3!=6$
(ii) 4□□□□ 꼴의 자연수의 개수는
$4!=24$
(iii) 5□□□□ 꼴의 자연수의 개수는
$4!=24$
(i)~(iii)에서 35000보다 큰 자연수의 개수는 $6+24+24=54$이므로 만든 자연수가 35000보다 클 확률은

$\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$

답 $\frac{9}{20}$

0206 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(7-1)!=6!$
부모를 한 사람으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
부모가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$
따라서 부모가 이웃하여 앉는 경우의 수는 $5!\times2!$이므로 구하는 확률은

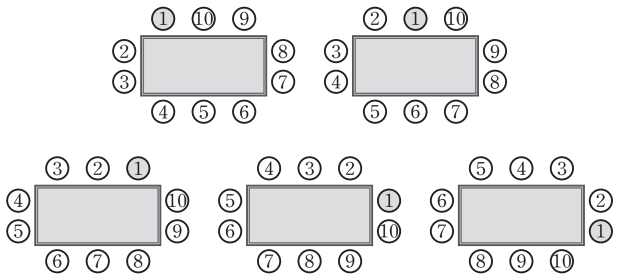
$\frac{5!\times2!}{6!}=\frac{1}{3}$

답 ①

0207 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(8-1)!=7!$
남자 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$
남자 4명이 앉은 자리 사이사이에 여자 4명이 각각 한 명씩 앉는 경우의 수는 $4!$
따라서 남녀가 번갈아 앉는 경우의 수는 $3!\times4!$이므로 구하는 확률은
$\dfrac{3!\times4!}{7!}=\dfrac{1}{35}$ 답 $\mathbf{\dfrac{1}{35}}$

0208 6가지 색을 모두 칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!$
한 영역에 빨간색을 칠하면 맞은편에 파란색을 칠하면 된다. 즉, 이 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(5-1)!=4!$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4!}{5!}=\dfrac{1}{5}$ 답 $\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

0209 10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(10-1)!=9!$



이때 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 서로 다른 경우가 5가지씩 존재하므로 주어진 직사각형 모양의 탁자에 10명이 둘러앉는 경우의 수는 $9!\times5$
할머니와 할아버지가 의자가 2개 놓인 쪽에 먼저 나란히 앉는 경우의 수는 2
나머지 8명이 남은 자리에 앉는 경우의 수는 $8!$
따라서 할머니와 할아버지가 의자가 2개 놓인 쪽에 나란히 앉는 경우의 수는 $2\times8!$이므로 구하는 확률은
$\dfrac{2\times8!}{9!\times5}=\dfrac{2}{45}$ 답 $\mathbf{\dfrac{2}{45}}$

0210 세 사람이 각각 4개의 호텔 중 한 곳을 택하여 투숙하는 경우의 수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$
세 사람이 서로 다른 호텔에 투숙하는 경우의 수는
${}_4P_3=24$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{24}{64}=\dfrac{3}{8}$ 답 ①

0211 서로 다른 6개의 과일을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\Pi_6=3^6$
사과와 귤을 먼저 갑에게 주고, 나머지 4개의 과일을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{3^4}{3^6}=\dfrac{1}{9}$ 답 $\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

0212 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는
${}_5\Pi_4=5^4=625$
집합 X의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일함수이므로 그 개수는
${}_5P_4=120$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{120}{625}=\dfrac{24}{125}$ 답 ④

0213 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
${}_5\Pi_4=5^4=625$
(i) 33□□, 34□□, 35□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각
${}_5\Pi_2=5^2=25$
(ii) 4□□□, 5□□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각
${}_5\Pi_3=5^3=125$
(i), (ii)에서 3300보다 큰 자연수의 개수는
$3\times25+2\times125=325$이므로 구하는 확률은
$\dfrac{325}{625}=\dfrac{13}{25}$ 답 ③

0214 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$
6개의 숫자 중 짝수, 즉 숫자 2끼리 서로 이웃하는 경우의 수는 숫자 2 세 개를 한 숫자로 보고 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{4!}{2!}=12$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$ 답 ②

0215 7개의 문자 C, E, C, I, L, I, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{2!\times2!}=1260$
자음은 C, C, L의 3개, 모음은 E, I, I, A의 4개이므로 자음과 모음이 번갈아 나오도록 모자모자모자모와 같이 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=36$

따라서 구하는 확률은

$\frac{36}{1260}=\frac{1}{35}$ 답 ①

0216 집합 X에서 집합 X로의 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=7$을 만족시키는 함수의 개수는

1, 1, 1, 4 또는 1, 1, 2, 3 또는 1, 2, 2, 2

를 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같다.

(ⅰ) 1, 1, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) 1, 1, 2, 3를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅲ) 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=7$인 경우의 수는

$4+12+4=20$이므로 구하는 확률은

$\frac{20}{256}=\frac{5}{64}$ 답 $\frac{5}{64}$

0217 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{8!}{4!\times4!}=70$

A 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

따라서 A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $3\times10=30$이므로 구하는 확률은

$\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$ 답 ③

0218 6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

영희는 대표로 뽑히고 철수는 대표로 뽑히지 않는 경우의 수는 영희와 철수를 제외한 나머지 4명 중에서 2명의 대표를 뽑고 영희를 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ 답 ③

0219 6장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

카드에 적힌 수의 곱이 홀수인 경우는 뽑은 카드 세 장에 적힌 수가 모두 홀수인 경우이므로 1, 3, 5가 적힌 카드를 뽑는 경우 1가지뿐이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{20}$이다. 답 ①

0220 10개의 공 중에서 5개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_5=252$

흰 공 4개 중 2개, 검은 공 6개 중 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_6C_3=6\times20=120$

따라서 구하는 확률은

$\frac{120}{252}=\frac{10}{21}$ 답 $\frac{10}{21}$

0221 20개의 제비 중에서 2개의 제비를 뽑는 경우의 수는

${}_{20}C_2=190$

㉮

상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 n개의 당첨 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_2$이므로

$\frac{{}_nC_2}{190}=\frac{1}{19}$

㉯

${}_nC_2=10$, $\frac{n(n-1)}{2!}=10$

$n(n-1)=20=5\times4$ $\therefore n=5$

따라서 당첨 제비의 개수는 5이다.

㉰

답 **5**

단계	채점요소	배점
㉮	모든 경우의 수 구하기	20 %
㉯	2개 모두 당첨 제비를 뽑을 확률을 이용하여 식 세우기	50 %
㉰	당첨 제비의 개수 구하기	30 %

0222 5명의 자리를 배정하는 경우의 수는

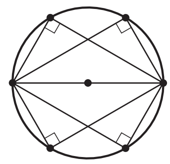
$5!=120$

처음 자리와 같은 자리에 배정받는 학생 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이고, 나머지 3명의 학생을 처음 자리와 다른 자리에 배정하는 경우의 수는 2이므로 처음 자리와 같은 자리에 배정받은 학생이 2명인 경우의 수는 $10\times2=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$ 답 ①

0223 6개의 점 중에서 임의로 택한 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는



${}_6C_3=20$

오른쪽 그림과 같이 하나의 지름에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 6개의 점

으로 만들 수 있는 지름은 3개이므로 직각삼각형의 개수는

$4\times3=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0224 10명의 유권자가 3명의 후보 중 1명에게 무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

갑이 2표를 받는 경우의 수는 을, 병이 합하여 8표를 받는 경우의 수와 같으므로

${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{66}=\frac{3}{22}$ 답 $\frac{3}{22}$

0225 방정식 $x+y+z=12$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$

$z=3$이면 $x+y=9$이므로 $x+y=9$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_2H_9={}_{2+9-1}C_9={}_{10}C_9={}_{10}C_1=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{91}$이다. 답 $\frac{10}{91}$

0226 10개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

10개의 공 중 흰 공을 n개라 하면 꺼낸 공 2개가 모두 흰 공인 경우의 수는 ${}_nC_2$

이때 2개의 공이 모두 흰 공일 통계적 확률이 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{{}_nC_2}{45}=\frac{1}{3}$, ${}_nC_2=15$, $\frac{n(n-1)}{2!}=15$

$n(n-1)=30=6\times5$

$\therefore n=6$

따라서 흰 공은 6개 들어 있다고 할 수 있다. 답 6

0227 조사한 전체 사람 수는

$272+160+82+106=620$(명)

이므로 임의로 택한 한 사람이 B사의 휴대전화를 사용할 확률은

$\frac{160}{620}=\frac{8}{31}$ 답 $\frac{8}{31}$

0228 60점 이상 80점 미만인 학생 수가

$26+18=44$(명)

이므로 구하는 확률은

$\frac{44}{100}=\frac{11}{25}$ 답 $\frac{11}{25}$

0229 ㄱ. $0\le P(A)\le1$

ㄴ. [반례] $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{2}{5}$이면

$P(A)+P(B)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}<1$

ㄷ. $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$이므로

$1-P(S)=P(\varnothing)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0230 ㄱ. $0\le P(A)\le1$, $0\le P(B)\le1$이므로

$0\le P(A)P(B)\le1$

ㄴ. $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$이므로

$P(S)+P(\varnothing)=1$

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로

$P(\varnothing)\le P(A\cap B)\le P(S)$

$\therefore 0\le P(A\cap B)\le1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0231 ㄱ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$P(A)+P(B)=\frac{5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{3}\neq1$

ㄴ. $0\le P(A)\le1$, $0\le P(B)\le1$이므로

$0\le P(A)+P(B)\le2$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$이면

$P(A)+P(B)=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=1$

이지만 $A\cap B=\{3, 5\}\neq\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

0232 두 상자 A, B에서 각각 한 장의 카드를 꺼낼 때, 모든 경우의 수는 $4\times5=20$

두 카드에 적힌 숫자를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타낼 때, 숫자의 합이 4 이하인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면

$A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$

$B=\{(1, 2), (1, 5), (3, 3), (5, 1), (5, 4), (7, 2), (7, 5)\}$

$A\cap B=\{(1, 2)\}$

$\therefore P(A)=\frac{4}{20}$, $P(B)=\frac{7}{20}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{4}{20}+\frac{7}{20}-\frac{1}{20}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0233 택한 학생이 영화감상반에 지원한 학생인 사건을 A, 곰인형 만들기반에 지원한 학생인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0234 $f(1)=0$인 사건을 A, $f(2)=1$인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4}$$
$$P(B)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4}$$
$$P(A\cap B)=\frac{{}_4\Pi_1}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$$

답 ②

0235 이차방정식 $10x^2-7ax+a^2=0$을 풀면

$(2x-a)(5x-a)=0$

$\therefore x=\frac{a}{2}$ 또는 $x=\frac{a}{5}$ ······ 가

이때 이차방정식이 정수해를 가지려면 a는 2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다. ······ 나

a가 2의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 10의 배수인 사건이므로

$P(A)=\frac{15}{30}$, $P(B)=\frac{6}{30}$, $P(A\cap B)=\frac{3}{30}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{15}{30}+\frac{6}{30}-\frac{3}{30}=\frac{3}{5}$$
······ 다

답 $\frac{3}{5}$

단계	채점요소	배점
가	주어진 이차방정식 풀기	30 %
나	a의 값의 조건 구하기	20 %
다	주어진 이차방정식이 정수해를 가질 확률 구하기	50 %

0236 8개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A, 2개의 공이 모두 검은 공인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$$
$$P(B)=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\frac{13}{28}$$

답 $\frac{13}{28}$

0237 뽑은 카드에 적힌 세 수의 합이 홀수인 경우는 공에 적힌 세 수가 홀수 1개, 짝수 2개인 경우와 홀수 3개인 경우이다.

뽑은 카드에 적힌 세 수가 홀수 1개, 짝수 2개인 사건을 A, 홀수 3개인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$
$$P(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{12}{35}+\frac{4}{35}=\frac{16}{35}$$

답 ④

0238 1학년 학생이 2학년 학생보다 많으려면 선발한 6명의 학생 중 1학년 학생이 4명 또는 5명이어야 한다.

1학년 학생이 4명 선발되는 사건을 A, 1학년 학생이 5명 선발되는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_5C_4\times{}_3C_2}{{}_8C_6}=\frac{15}{28}$$
$$P(B)=\frac{{}_5C_5\times{}_3C_1}{{}_8C_6}=\frac{3}{28}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{15}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$$

답 $\frac{9}{14}$

0239 연아와 윤주가 1열에 이웃하게 앉는 사건을 A, 2열에 이웃하게 앉는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{2\times{}_5P_4\times 2!}{{}_7P_6}=\frac{2}{21}$$
$$P(B)=\frac{3\times{}_5P_4\times 2!}{{}_7P_6}=\frac{1}{7}$$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{2}{21}+\frac{1}{7}=\frac{5}{21}$$

답 $\frac{5}{21}$

0240 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로 $P(A^C\cup B^C)=\frac{5}{6}$에서

$$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)=\frac{5}{6}$$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0241 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$

또, $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{4}{5}=\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$ 답 ④

0242 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

또한 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A-B)$

$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\frac{7}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{7}{12}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

0243 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{8}$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{8}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{7}{8}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{39}{40}-\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{5}\le\mathrm{P}(A)\le\frac{3}{8}$이므로 $\frac{1}{5}\le\frac{39}{40}-\mathrm{P}(B)\le\frac{3}{8}$

$-\frac{31}{40}\le-\mathrm{P}(B)\le-\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{3}{5}\le\mathrm{P}(B)\le\frac{31}{40}$

따라서 $\mathrm{P}(B)$의 최댓값은 $\frac{31}{40}$이다. 답 $\frac{31}{40}$

0244 적어도 한 개의 주사위의 눈의 수가 4 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 두 개의 주사위의 눈의 수가 모두 5 이상인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2\times2}{6^2}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ 답 ⑤

0245 5명이 일렬로 설 때, 적어도 한쪽 끝에는 남학생이 서는 사건을 A라 하면 A^C는 양쪽 끝에 모두 여학생이 서는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ 답 ⑤

0246 10명의 학생 중 2명의 대표를 선출할 때, 적어도 1명의 여학생이 대표로 선출되는 사건을 A라 하면 A^C는 2명의 대표가 모두 남학생이 선출되는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10-n}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{(10-n)(9-n)}{90}$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{13}{15}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{13}{15}=\frac{2}{15}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{(10-n)(9-n)}{90}=\frac{2}{15}$

$n^2-19n+78=0$, $(n-6)(n-13)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n\le10$) 답 6

0247 6명을 복도 청소, 운동장 청소를 하는 2개의 조에 각각 3명씩 배정하는 경우의 수는

$\left({}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3\times\frac{1}{2!}\right)\times2!=20$

영주, 민수 중 적어도 한 명이 복도 청소를 하는 사건을 A라 하면 A^C는 영주와 민수 모두 운동장 청소를 하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{20}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

참고 6명을 복도 청소, 운동장 청소를 하는 2개의 조에 각각 3명씩 배정하는 경우의 수는 6명 중 복도 청소를 할 3명을 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6\mathrm{C}_3=20$과 같이 구할 수도 있다.

유형 up

본문 41쪽

0248 9개의 구슬 중 4개의 구슬을 꺼낼 때, 검은 구슬이 2개 이하로 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 검은 구슬이 3개 또는 4개가 나오는 사건이다.

(i) 검은 구슬이 3개 나올 확률은

$$\frac{{}_5C_3\times{}_4C_1}{{}_9C_4}=\frac{20}{63}$$

(ii) 검은 구슬이 4개 나올 확률은

$$\frac{{}_5C_4\times{}_4C_0}{{}_9C_4}=\frac{5}{126}$$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{20}{63}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$ 답 $\frac{9}{14}$

0249 2문제 이상 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 1문제를 맞히거나 1문제도 맞히지 못하는 사건이다.

(i) 1문제를 맞힐 확률은

$$\frac{{}_5C_1}{{}_2\Pi_5}=\frac{5}{32}$$

(ii) 1문제도 맞히지 못할 확률은

$$\frac{{}_5C_0}{{}_2\Pi_5}=\frac{1}{32}$$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$ 답 ⑤

0250 3조각의 떡을 고를 때, 꿀떡이 2조각 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 꿀떡이 3조각인 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_3C_3}{{}_{n+3}C_3}=\frac{1}{{}_{n+3}C_3}$ …… ㉠

이때 $P(A)=\frac{83}{84}$이므로

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{83}{84}=\frac{1}{84}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{{}_{n+3}C_3}=\frac{1}{84}$이므로 ${}_{n+3}C_3=84$

$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}=84$

$(n+3)(n+2)(n+1)=84\times3!=9\times8\times7$

$\therefore n=6$ 답 6

0251 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건을 A라 하면 A^C는

$(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$인 사건이다. 즉, $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$이므로 세 개의 주사위의 눈의 수가 모두 다른 사건이다. ㉮

$\therefore P(A^C)=\frac{{}_6P_3}{6^3}=\frac{5}{9}$ ㉯

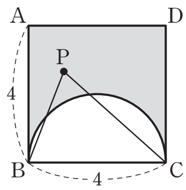
따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ ㉰

답 $\frac{4}{9}$

단계	채점요소	배점
㉮	$(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건을 A로 놓고 A^C의 의미 알기	30%
㉯	$P(A^C)$ 구하기	40%
㉰	$(a-b)(b-c)(c-a)=0$일 확률 구하기	30%

0252 삼각형 PBC가 예각삼각형이려면 점 P는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 외부에 있어야 한다.



정사각형 ABCD의 넓이는

$4\times4=16$

색칠한 부분의 넓이는

$16-\pi\times2^2\times\frac{1}{2}=16-2\pi$

따라서 삼각형 PBC가 예각삼각형일 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}=\frac{16-2\pi}{16}=1-\frac{\pi}{8}$

즉, $p=1$, $q=-\frac{1}{8}$이므로

$8pq=8\times1\times\left(-\frac{1}{8}\right)=-1$ 답 -1

0253 과녁 전체의 넓이는 $\pi\times4^2=16\pi$

색칠한 부분의 넓이는

(반지름의 길이가 3인 원의 넓이)

$-$(반지름의 길이가 2인 원의 넓이)

$+$(반지름의 길이가 1인 원의 넓이)

$=\pi\times3^2-\pi\times2^2+\pi\times1^2$

$=6\pi$

따라서 색칠한 부분을 맞힐 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{과녁 전체의 넓이})}=\frac{6\pi}{16\pi}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

0254 이차방정식 $x^2+ax-2a=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=a^2-4\times(-2a)=a^2+8a>0$

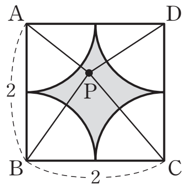
$a(a+8)>0$ $\therefore a<-8$ 또는 $a>0$

이때 $-3\leq a\leq4$이므로 $0<a\leq4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4-0}{4-(-3)}=\frac{4}{7}$ 답 $\frac{4}{7}$

0255 $\overline{PA}\geq1$, $\overline{PB}\geq1$, $\overline{PC}\geq1$, $\overline{PD}\geq1$이려면 점 P는 오른쪽 그림과 같이 정사각형의 각 꼭짓점을 중심으로 하는 사분원의 외부에 있어야 한다.



정사각형 ABCD의 넓이는

$2\times2=4$

색칠한 부분의 넓이는

$4-\left(\pi\times1^2\times\frac{1}{4}\right)\times4=4-\pi$

따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}=\frac{4-\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$

즉, $p=1$, $q=-\frac{1}{4}$이므로

$100pq=100\times1\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-25$ 답 -25

시험에 꼭 나오는 문제 본문 42~45쪽

0256 $A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$B=\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

$C=\{(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)\}$

$D=\{(5, 5)\}$

ㄱ. $A\cap B=\{(5, 5)\}$ ㄴ. $A\cap C=\varnothing$

ㄷ. $A\cap D=\{(5, 5)\}$ ㄹ. $B\cap C=\varnothing$

ㅁ. $B\cap D=\{(5, 5)\}$ ㅂ. $C\cap D=\varnothing$

따라서 서로 배반사건인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄴ, ㄹ, ㅂ

0257 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 세 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$5\times5\times4=100$

(i) □□0 꼴의 자연수의 개수는 $5\times4=20$

(ii) □□2 꼴의 자연수의 개수는 $4\times4=16$

(iii) □□4 꼴의 자연수의 개수는 $4\times4=16$

(i)~(iii)에서 짝수의 개수는 $20+16+16=52$

따라서 구하는 확률은 $\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$ 답 $\frac{13}{25}$

0258 갑이 주머니 A에서, 을이 주머니 B에서 각자 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_2=36$

두 장의 카드에 적힌 수의 합이

(i) 3일 때

갑이 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, 을이 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$를 뽑는 경우의 수는 1

(ii) 4일 때

갑이 $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, 을이 $\boxed{1}$, $\boxed{3}$을 뽑는 경우의 수는 1

(iii) 5일 때

갑이 $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 또는 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$을 뽑고, 을이 $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 또는 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$을 뽑는 경우의 수는 $2\times2=4$

(iv) 6일 때

갑이 $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, 을이 $\boxed{2}$, $\boxed{4}$를 뽑는 경우의 수는 1

(v) 7일 때

갑이 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, 을이 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$를 뽑는 경우의 수는 1

(i)~(v)에서 갑이 가진 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 카드에 적힌 수의 합이 서로 같은 경우의 수는

$1+1+4+1+1=8$

이므로 그 확률은

$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

따라서 $p=9$, $q=2$이므로

$p+q=9+2=11$ 답 11

0259 7명이 일렬로 서는 경우의 수는 $7!$

남학생 사이에 여학생 5명 중 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 ${}_5P_3$

남학생 2명과 그 사이에 선 여학생 3명을 한 명으로 생각하여 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 $3!$

남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

따라서 남학생 사이에 여학생 3명이 서는 경우의 수는

${}_5P_3\times3!\times2!$이므로 구하는 확률은

$\frac{{}_5P_3\times3!\times2!}{7!}=\frac{1}{7}$ 답 $\frac{1}{7}$

0260 네 사람이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

네 명을 키가 작은 순서대로 A, B, C, D라 하면

(i) □□B□와 같이 서는 경우

B보다 키가 큰 사람은 C, D뿐이므로 A는 가장 왼쪽에 서고, B와 이웃하는 두 자리에 C, D가 서는 경우의 수는

$2!=2$

(ii) □□A□와 같이 서는 경우

B, C, D 모두 A보다 키가 크므로 3명이 3개의 자리에 서는 경우의 수는

$3!=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 왼쪽에서 세 번째에 선 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작은 경우의 수는 $2+6=8$이므로 구하는 확률은

$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ 답 ①

0261 8가지 색을 모두 칠하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

노란색과 보라색을 한 가지 색으로 생각하여 7가지 색을 칠하는 경우의 수는 $(7-1)!=6!$

노란색과 보라색을 칠할 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

따라서 노란색과 보라색이 이웃하게 칠하는 경우의 수는 $6!\times2!$이므로 구하는 확률은

$\frac{6!\times2!}{7!}=\frac{2}{7}$ 답 $\frac{2}{7}$

0262 3명의 학생을 각각 6개의 반 중 하나에 배정하는 경우의 수는

${}_6\Pi_3=6^3$

갑과 을이 같은 반이 되는 경우의 수는 갑, 을을 한 명으로 보고 2명을 각각 6개의 반 중 하나에 배정하는 경우의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6^2}{6^3}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0263 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=3$을 만족시키는 함수의 개수는

0, 0, 1, 2 또는 0, 1, 1, 1

을 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같다.

(ⅰ) 0, 0, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅱ) 0, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=3$인 경우의 수는 $12+4=16$이므로 구하는 확률은 $\frac{16}{81}$이다. 답 ①

0264 6개의 문자 b, a, n, a, n, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!\times2!}=60$

두 개의 n이 서로 이웃하는 경우의 수는 두 개의 n을 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ 답 ⑤

0265 같은 종류의 수학책 2권, 국어책 1권, 영어책 1권을 4명에게 한 권씩 나누어 주는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

남학생 2명이 수학책 2권을 받으면 여학생 2명은 국어책과 영어책을 1권씩 받으면 되므로 그 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

0266 A, A, A, B, B, C가 적힌 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

양 끝에 모두 A가 적힌 카드를 놓고, 나머지 A, B, B, C가 적힌 카드를 가운데에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ 답 ②

0267 10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

한 직선 위의 세 점으로는 삼각형이 만들어지지 않으므로 반원의 지름 위의 점 5개 중 3개를 택한 경우에는 삼각형이 만들어지지 않는다.

이 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

따라서 삼각형이 만들어지는 경우의 수는 $120-10=110$이므로 구하는 확률은

$\frac{110}{120}=\frac{11}{12}$ 답 ④

0268 6개의 공 중 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우의 수는 ${}_2C_2=1$이므로 그 확률은 $\frac{1}{15}$이다.

따라서 $p=15$, $q=1$이므로

$p+q=15+1=16$ 답 16

0269 6명의 선수 중 2명씩 짝을 지어 3개의 팀을 만드는 경우의 수는 ${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15$

여자 선수가 2명뿐이므로 한 여자 선수가 어떤 남자 선수와 팀을 이루면 다른 여자 선수도 반드시 남자 선수와 팀을 이루게 된다.

남자 선수 4명 중 2명이 여자 선수와 팀을 이루는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

0270 사과, 귤, 배 중에서 8개의 과일을 사는 경우의 수는

$_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

사과를 5개 사고, 귤과 배 중에서 3개를 사는 경우의 수는

$_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{45}$이다. 답 $\frac{4}{45}$

0271 16개의 구슬 중에서 2개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

$_{16}C_2=120$

16개의 구슬 중 흰 구슬을 n개라 하면 꺼낸 구슬 2개가 모두 흰 구슬인 경우의 수는 $_nC_2$

이때 2개의 구슬이 모두 흰 구슬일 통계적 확률이 $\frac{3}{8}$이므로

$\frac{_nC_2}{120}=\frac{3}{8}$, $_nC_2=45$, $\frac{n(n-1)}{2!}=45$

$n(n-1)=90=10\times9$ $\quad\therefore n=10$

따라서 흰 구슬은 10개 들어 있다고 할 수 있다. 답 ④

0272 ㄱ. $0\le P(A)\le1$

ㄴ. $A\subset B$이면 $n(A)\le n(B)$이므로

$\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(B)}{n(S)}$ $\quad\therefore P(A)\le P(B)$

ㄷ. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\le P(A)+P(B)$ ($\because P(A\cap B)\ge0$)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0273 택한 학생이 한국지리를 선택한 학생인 사건을 A, 세계사를 선택한 학생인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{11}{18}$, $P(B)=\frac{5}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{5}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{11}{18}+\frac{5}{6}-\frac{5}{9}=\frac{8}{9}$ 답 $\frac{8}{9}$

0274 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(짝수, 짝수)인 경우의 수는 $3\times3=9$

(홀수, 홀수)인 경우의 수는 $3\times3=9$

이므로 $P(A)=\frac{9+9}{6^2}=\frac{1}{2}$

두 눈의 수의 곱이 15의 배수인 경우는 (3, 5), (5, 3), (5, 6), (6, 5)의 4가지이므로

$P(B)=\frac{4}{6^2}=\frac{1}{9}$

$A\cap B=\{(3, 5), (5, 3)\}$이므로

$P(A\cap B)=\frac{2}{6^2}=\frac{1}{18}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}=\frac{5}{9}$ 답 $\frac{5}{9}$

0275 생산직 근로자 2명, 관리직 근로자 1명이 뽑히는 사건을 A, 생산직 근로자 3명이 뽑히는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{_6C_2\times{}_4C_1}{_{10}C_3}=\frac{1}{2}$

$P(B)=\frac{_6C_3\times{}_4C_0}{_{10}C_3}=\frac{1}{6}$

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0276 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$

$\therefore P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ 답 ⑤

0277 B와 D 사이에 적어도 한 명의 학생이 서는 사건을 A라 하면 A^C는 B와 D 사이에 아무도 서지 않는 사건, 즉 B와 D가 서로 이웃하게 서는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0278 적어도 한 명의 남학생을 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 3명 모두 여학생을 뽑는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{_3C_3}{_6C_3}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$ 답 ⑤

0279 갑, 을, 병이 16종류의 여행 상품 중 서로 다른 여행 상품을 하나씩 택하는 경우의 수는 $_{16}P_3=3360$

적어도 한 명은 다른 나라의 여행 상품을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 세 명 모두 같은 나라의 여행 상품을 택하는 사건이다.

갑, 을, 병 모두

(i) 괌 여행 상품을 택할 확률은

$\frac{_4P_3}{_{16}P_3}=\frac{1}{140}$

(ii) 태국 여행 상품을 택할 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{{}_{16}\mathrm{P}_3}=\frac{1}{56}$$

(iii) 중국 여행 상품을 택할 확률은

$$\frac{{}_7\mathrm{P}_3}{{}_{16}\mathrm{P}_3}=\frac{1}{16}$$

(i)~(iii)에서

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{140}+\frac{1}{56}+\frac{1}{16}=\frac{7}{80}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{80}=\frac{73}{80}$$

답 $\frac{73}{80}$

0280 8개의 문자 c, o, m, p, u, t, e, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $8!$

㉮

c와 r 사이에 나머지 6개의 문자 중 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2$

c, r와 그 사이에 나열한 문자 2개를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$

c와 r가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

따라서 c와 r 사이에 2개의 문자가 오는 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_2\times5!\times2!$

㉯

이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_2\times5!\times2!}{8!}=\frac{5}{28}$$

㉰

답 $\frac{5}{28}$

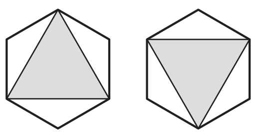
단계	채점요소	배점
㉮	모든 경우의 수 구하기	20 %
㉯	c와 r 사이에 2개의 문자가 오는 경우의 수 구하기	60 %
㉰	c와 r 사이에 2개의 문자가 올 확률 구하기	20 %

0281 정육각형의 6개의 꼭짓점 중 세 점을 택하여 삼각형을 만드는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

㉮

정삼각형이 만들어지는 경우는 오른쪽 그림과 같이 2가지이다.



㉯

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

㉰

답 $\frac{1}{10}$

단계	채점요소	배점
㉮	모든 경우의 수 구하기	30 %
㉯	정삼각형이 만들어지는 경우의 수 구하기	40 %
㉰	정삼각형이 만들어질 확률 구하기	30 %

0282 정상인 제품을 4개 택하는 사건을 A, 정상인 제품을 5개 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{5}{21}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_5\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{42}$$

㉮

A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{21}+\frac{1}{42}=\frac{11}{42}$$

㉯

답 $\frac{11}{42}$

단계	채점요소	배점
㉮	정상인 제품이 4개 포함될 확률, 5개 포함될 확률 각각 구하기	60 %
㉯	정상인 제품이 4개 이상 포함될 확률 구하기	40 %

0283 $\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{5}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{3}{5}$ ...... ㉠

㉮

$\mathrm{P}(A\cup B)\le\mathrm{P}(S)=1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\le1$

$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}-\mathrm{P}(A\cap B)\le1$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\ge\frac{13}{30}$ ...... ㉡

㉯

㉠, ㉡의 공통 범위는

$\frac{13}{30}\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{3}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최댓값은 $\frac{3}{5}$, 최솟값은 $\frac{13}{30}$이므로

$M=\frac{3}{5}$, $m=\frac{13}{30}$

㉰

$\therefore Mm=\frac{3}{5}\times\frac{13}{30}=\frac{13}{50}$

㉱

답 $\frac{13}{50}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\mathrm{P}(A\cap B)$의 범위 구하기	30 %
㉯	$\mathrm{P}(A\cap B)$의 범위 구하기	30 %
㉰	M, m의 값 구하기	30 %
㉱	Mm의 값 구하기	10 %

0284 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

A가 앉으면 B의 자리가 그 맞은편으로 정해지고, C가 나머지 6개의 자리 중 한 자리에 앉으면 D의 자리가 그 맞은편으로 정해진다. 또, 나머지 4명이 남은 4개의 자리에 앉는 경우의 수는 $4!$이다.

따라서 A는 B와, C는 D와 마주 보고 앉는 경우의 수는 $6\times4!$이므로 구하는 확률은

$\dfrac{6\times4!}{7!}=\dfrac{1}{35}$ 답 ①

0285 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_6\Pi_4=6^4=1296$

(i) $f(1)<f(2)<f(3)=f(4)$인 경우

공역 Y의 원소 중 서로 다른 3개를 택한 후 가장 작은 것부터 차례대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)(=f(4))$으로 정하면 된다.

$\therefore {}_6\mathrm{C}_3=20$

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)=f(4)$인 경우

공역 Y의 원소 중 서로 다른 2개를 택한 후 작은 것을 $f(1)(=f(2))$, 큰 것을 $f(3)(=f(4))$으로 정하면 된다.

$\therefore {}_6\mathrm{C}_2=15$

(i), (ii)에서 $f(1)\le f(2)<f(3)=f(4)$를 만족시키는 함수의 개수는 $20+15=35$이므로 구하는 확률은 $\dfrac{35}{1296}$이다.

답 $\dfrac{35}{1296}$

0286 방정식 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

$(x-y)(y-z)(z-x)\ne0$인 사건을 A라 하면

A^C는 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건이다.

이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이면

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

(i) $x=y$일 때

$2x+z=10$이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $(2, 2, 6)$, $(3, 3, 4)$, $(4, 4, 2)$, $(5, 5, 0)$의 6개이다.

(ii) $y=z$일 때

(i)과 같은 방법으로 풀면 $x+2y=10$이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는 6개이다.

(iii) $z=x$일 때

(i)과 같은 방법으로 풀면 $y+2z=10$이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는 6개이다.

(i)~(iii)에서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 경우의 수는 $6+6+6=18$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{18}{66}=\dfrac{3}{11}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{11}=\dfrac{8}{11}$

즉, $p=11$, $q=8$이므로

$p+q=11+8=19$ 답 19

참고 $x=y$이면서 $y=z$이면 $x=y=z$이므로 $x+y+z=10$을 만족시키는 정수해는 존재하지 않는다. 즉,
$x=y$이면 $x=y\ne z$, $y=z$이면 $x\ne y=z$, $z=x$이면 $z=x\ne y$
이므로 (i), (ii), (iii)의 순서쌍 (x, y, z) 중 중복되는 것은 없다.

0287 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$i^m\times(-i)^n=i^m\times(-1)^n\times i^n=(-1)^n\times i^{m+n}=1$

이때 n이 홀수이면 $(-1)^n=-1$, 짝수이면 $(-1)^n=1$이므로 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 m, n의 값을 구한다.

(i) n이 홀수일 때 ← $i^{m+n}=-1$이어야 한다.

$m+n$의 값은 2 또는 6 또는 10이어야 하므로 이를 만족시키는 경우를 순서쌍 (m, n)으로 나타내면

$(1, 1)$, $(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$의 5가지

(ii) n이 짝수일 때 ← $i^{m+n}=1$이어야 한다.

$m+n$의 값은 4 또는 8 또는 12이어야 하므로 이를 만족시키는 경우를 순서쌍 (m, n)으로 나타내면

$(2, 2)$, $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$, $(6, 6)$의 5가지

(i), (ii)에서 $i^m\times(-i)^n=1$이 되는 경우의 수는 $5+5=10$이므로 그 확률은

$\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

따라서 $p=18$, $q=5$이므로

$p+q=18+5=23$ 답 23

참고 i를 거듭제곱하면 i, -1, $-i$, 1이 차례대로 반복되어 나타나므로 다음과 같은 규칙을 갖는다.
$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$ (단, k는 음이 아닌 정수)

04 조건부확률

교과서 문제 정/복/하/기

본문 47쪽

0288 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에서

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$

0289 뒷면이 1개 나오는 사건을 A, 10원짜리 동전이 뒷면이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0290 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

0291 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=0.2\times0.5=0.1$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=0.3+0.2-0.1=0.4$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-0.4=0.6$

(4) $\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$
$=\frac{0.6}{1-\mathrm{P}(B)}$
$=\frac{0.6}{1-0.2}$
$=0.75$

답 (1) 0.1 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 0.6 (4) 0.75

0292 $\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{36}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{36}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

0293 (1) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$

(3) 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$
$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

(4) 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

0294 주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 동전의 앞면이 나오는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.
따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0295 선수 A가 화살을 명중시키는 사건을 A, 선수 B가 화살을 명중시키는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.
따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.5\times0.7=0.35$ 답 0.35

0296 (1) $A=\{2, 4, 6\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$ 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{16}$

0297 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나오는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$ 답 $\frac{1}{4}$

0298 오지선다형 한 문제에 임의로 답하여 정답을 맞히는 사건을 A라 하면

$P(A)=\frac{1}{5}$, $P(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{16}{625}$$ 답 $\frac{16}{625}$

0299 농구 선수가 1번의 자유투에서 골을 넣는 사건을 A라 하면

$P(A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$, $P(A^C)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$$ 답 $\frac{48}{125}$

유형 익/히/기

본문 48~53쪽

0300
$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=1-P((A\cup B)^C)\\&=1-P(A^C\cap B^C)\\&=1-0.5=0.5\end{aligned}$$
이므로
$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=0.2+0.4-0.5\\&=0.1\end{aligned}$$
$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4}$$ 답 $\frac{1}{4}$

0301
$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(B)P(A|B)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$
$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$$ 답 $\frac{3}{5}$

0302 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$ $\quad\therefore B\subset A^C$

따라서 $B\cap A^C=B$이므로

$$\begin{aligned}P(B|A^C)&=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{P(B)}{1-P(A)}\\&=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$ 답 ⑤

0303 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3}$에서

$P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(B)$ …… ㉠

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+P(B)-\frac{2}{3}P(B)$ ($\because$ ㉠)

$\frac{1}{3}P(B)=\frac{1}{12}$ $\quad\therefore P(B)=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0304 여학생을 뽑는 사건을 A, 수학을 선호하는 학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{28}{60}$, $P(A\cap B)=\frac{12}{60}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{12}{60}}{\frac{28}{60}}=\frac{3}{7}$$ 답 ③

0305 국내 여행을 선호하는 회원을 뽑는 사건을 A, 남자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{40}{100}$, $P(A\cap B)=\frac{25}{100}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{25}{100}}{\frac{40}{100}}=\frac{5}{8}$$ 답 $\frac{5}{8}$

0306 다음 달 낚시에 참여하는 회원을 택하는 사건을 A, 여자 회원을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{15+a}{30}$, $P(A\cap B)=\frac{a}{30}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{a}{30}}{\frac{15+a}{30}}=\frac{a}{15+a}$$

따라서 $\frac{a}{15+a}=\frac{2}{7}$이므로

$7a=2(15+a)$, $5a=30$ $\quad\therefore a=6$ 답 6

0307 첫 번째로 뽑은 학생이 여학생인 사건을 A, 두 번째로 뽑은 학생이 여학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{13}{27}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{12}{26}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{13}{27}\times\frac{12}{26}=\frac{2}{9}$ 답 ②

0308 주머니 A를 택하는 사건을 A, 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C|A)=\frac{5}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C|A)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$ 답 $\frac{5}{18}$

0309 첫 번째에 여학생을 호명하는 사건을 A, 두 번째에 남학생을 호명하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{9}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0310 첫 번째에 흰 바둑돌이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 바둑돌이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+4}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{n+3}$

이때 첫 번째에는 흰 바둑돌, 두 번째에는 검은 바둑돌이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{n}{n+4}\times\frac{4}{n+3}$

$=\frac{4n}{(n+4)(n+3)}$ ······ ㉮

즉, $\frac{4n}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{5}$이므로

$(n+4)(n+3)=20n$, $n^2-13n+12=0$

$(n-1)(n-12)=0$

$\therefore n=1$ 또는 $n=12$ ······ ㉯

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+12=13$ ······ ㉰

답 13

단계	채점요소	배점
㉮	첫 번째에는 흰 바둑돌, 두 번째에는 검은 바둑돌이 나올 확률을 n에 대한 식으로 나타내기	50 %
㉯	n의 값 구하기	40 %
㉰	n의 값의 합 구하기	10 %

0311 갑이 검은 공을 꺼내는 사건을 A, 을이 검은 공을 꺼내는 사건을 E라 하면 갑이 흰 공을 꺼내는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{7}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{6}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{7}$ 답 $\frac{3}{7}$

0312 이번 주 일요일에 비가 오는 사건을 A, 경기에서 이기는 사건을 E라 하면 이번 주 일요일에 비가 오지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=0.3$, $\mathrm{P}(A^C)=0.7$,

$\mathrm{P}(E|A)=0.4$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.6$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=0.3\times0.4+0.7\times0.6=0.54$ 답 **0.54**

0313 수시 합격자를 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 E라 하면 정시 합격자를 택하는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{70}{100}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{30}{100}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{60}{100}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{40}{100}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\frac{70}{100}\times\frac{60}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{27}{50}$ 답 ③

0314 A반 학생을 뽑는 사건을 A, B반 학생을 뽑는 사건을 B, 수학 과목 수업을 신청한 학생을 뽑는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{20}{50}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{30}{50}$, $\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$

$=\frac{20}{50}\times\frac{1}{5}+\frac{30}{50}\times\frac{1}{6}=\frac{9}{50}$ 답 $\frac{9}{50}$

0315 A 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{40}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{50}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{60}{100}\times\frac{3}{100}=\frac{9}{500}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{1}{50}+\frac{9}{500}=\frac{19}{500}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{19}{500}}=\frac{10}{19}$$

답 $\mathbf{\frac{10}{19}}$

0316 K 프로 야구팀이 치르는 경기가 홈 경기인 사건을 A, K 프로 야구팀이 승리하는 사건을 E라 하면 K 프로 야구팀이 치르는 경기가 원정 경기인 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{30}{100}\times\frac{70}{100}=\frac{21}{100}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{70}{100}\times\frac{50}{100}=\frac{7}{20}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$$
$$=\frac{21}{100}+\frac{7}{20}=\frac{14}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{21}{100}}{\frac{14}{25}}=\frac{3}{8}$$

답 ②

0317 필통 A를 택하는 사건을 A, 필통 B를 택하는 사건을 B라 하고, 빨간 볼펜 1개, 파란 볼펜 1개가 나오는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{17}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}}=\frac{9}{17}$$

답 ①

0318 민수가 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 지호가 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 E라 하면 민수가 꺼낸 공이 검은 공인 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

답 ②

0319 제품을 운송할 때 기차로 운송하는 사건을 A, 버스로 운송하는 사건을 B, 제품이 1일 이내에 배송되는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{70}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{7}{50}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{30}{100}\times\frac{80}{100}=\frac{6}{25}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{7}{50}+\frac{6}{25}=\frac{19}{50}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{7}{50}}{\frac{19}{50}}=\frac{7}{19}$$

답 ③

0320 카드 A를 뽑는 사건을 A, 카드 B를 뽑는 사건을 B, 카드 C를 뽑는 사건을 C, 보이는 면에 숫자 1이 쓰여 있는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{3}\times0=0$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

0321 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$, $C=\{2, 3, 5, 7, 11\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(C)=\frac{5}{12}$$

ㄱ. $A\cap B=\{3, 9\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄴ. $B\cap C=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

즉, 두 사건 B, C는 서로 종속이다.

ㄷ. $C\cap A=\{3, 5, 7, 11\}$이므로 $\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(C\cap A)\neq\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)$

즉, 두 사건 C, A는 서로 종속이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

0322 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 10원짜리 동전, 100원짜리 동전의 나온 면을 차례대로 나타내면 표본공간은 {HH, HT, TH, TT}이고,

$A=\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}\}$, $B=\{\mathrm{HT}, \mathrm{TT}\}$,

$C=\{\mathrm{HH}, \mathrm{TT}\}$, $D=\{\mathrm{HT}, \mathrm{TH}\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(D)=\frac{1}{2}$

① $A\cap B=\{\mathrm{HT}\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

② $B\cap C=\{\mathrm{TT}\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

즉, 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

③ $C\cap D=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(C\cap D)=0$

$\therefore \mathrm{P}(C\cap D)\neq\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D)$

즉, 두 사건 C, D는 서로 종속이다.

④ $D\cap A=\{\mathrm{HT}\}$이므로 $\mathrm{P}(D\cap A)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(D\cap A)=\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(A)$

즉, 두 사건 D, A는 서로 독립이다.

⑤ $D\cap B=\{\mathrm{HT}\}$이므로 $\mathrm{P}(D\cap B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(D\cap B)=\mathrm{P}(D)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 D, B는 서로 독립이다.

따라서 서로 독립이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0323 사건 $\{1, 2, 3, 4\}$를 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

ㄱ. 사건 $\{3, 5\}$를 B라 하면 $A\cap B=\{3\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. 사건 $\{1, 2, 6\}$을 C라 하면 $A\cap C=\{1, 2\}$이므로

$\mathrm{P}(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

즉, 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

ㄷ. 사건 $\{3, 4, 5, 6\}$을 D라 하면 $A\cap D=\{3, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(D)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}, \mathrm{P}(A\cap D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap D)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$

즉, 두 사건 A, D는 서로 종속이다.

따라서 사건 $\{1, 2, 3, 4\}$와 서로 독립인 사건은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0324 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0325 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{2}{5}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{11}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{11}{15}$ 답 $\frac{11}{15}$

0326 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(B)$이므로

$\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\mathrm{P}(B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

······ ㉮

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

······ ㉯

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점요소	배점
㉮	$\mathrm{P}(B)$ 구하기	40%
㉯	$\mathrm{P}(A)$ 구하기	60%

0327 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{5}{8}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$ ······ ㉠

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}-\mathrm{P}(B)$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$\left\{\frac{3}{4}-\mathrm{P}(B)\right\}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$, $8\{\mathrm{P}(B)\}^2-6\mathrm{P}(B)+1=0$

$\{2\mathrm{P}(B)-1\}\{4\mathrm{P}(B)-1\}=0$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ 또는 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

이때 $\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 답 ③

다른풀이 ㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$는 이차방정식

$t^2-\frac{3}{4}t+\frac{1}{8}=0$, 즉 $8t^2-6t+1=0$의 두 근이므로

$(2t-1)(4t-1)=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1}{4}$

이때 $\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

0328 주머니 A에서 파란 구슬을 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 파란 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{14}$ 답 $\frac{3}{14}$

0329 화요일, 수요일에 눈이 오는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 수요일에만 눈이 올 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=(1-0.2)\times0.3=0.24$ 답 ④

0330 선수 A, B가 페널티킥을 성공시키는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 선수 A, B 모두 페널티킥을 성공시키지 못할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{5}$

구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$\qquad=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0331 A 통신사, B 통신사 사용자가 통화에 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{9}{10}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(1-\frac{9}{10}\right)\times\frac{4}{5}$

$=\frac{9}{50}+\frac{4}{50}=\frac{13}{50}$ 답 $\frac{13}{50}$

0332 바이러스 A 보균자를 택하는 사건을 A, 남자를 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{240}{450}=\frac{8}{15}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{150}{450}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{450}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{x}{450}=\frac{8}{15}\times\frac{1}{3} \qquad \therefore x=80$ 답 ①

0333 두 수의 합이 홀수이려면 두 수 중 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이어야 한다. 상자 A, B에서 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

(i) A 상자에서 홀수, B 상자에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\quad\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{16}$

(ii) A 상자에서 짝수, B 상자에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\quad\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$\qquad=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

0334 스위치 A가 열려 있는 사건을 A, 스위치 B가 열려 있는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 스위치 A, B가 모두 열려 있을 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.5\times0.4=0.2$

······ ㉮

전구에 불이 켜지려면 적어도 하나의 스위치는 닫혀 있어야 하므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}((A^C\cup B^C)^C)$

$\qquad=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad=1-0.2=0.8$

······ ㉯

답 0.8

단계	채점요소	배점
㉮	두 스위치 A, B가 모두 열려 있을 확률 구하기	60 %
㉯	전구에 불이 켜질 확률 구하기	40 %

0335 표적을 한 번 이상 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 표적을 한 번도 맞히지 못하는 사건이다.

표적을 한 번도 맞히지 못할 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$$

답 ⑤

0336 윷 1개를 던질 때 ◠ 모양이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 네 개의 윷을 동시에 던져서 ◠ 모양이 3개 나올 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$$

답 $\mathbf{\frac{3}{64}}$

0337 6월의 4일 중 적어도 하루는 비가 내리지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 4일 내내 비가 내리는 사건이다.

6월의 어느 날 A 도시에 비가 내릴 확률은 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$이므로 4일 내내 비가 내릴 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$$

답 ①

0338 평균적으로 7문제 중 2문제를 맞히므로 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{2}{7}$이다.

(i) 4문제 중 3문제를 맞힐 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{7}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right)^1=\frac{160}{7^4}$$

(ii) 4문제 중 4문제 모두 맞힐 확률은

$$\left(\frac{2}{7}\right)^4=\frac{16}{7^4}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{160}{7^4}+\frac{16}{7^4}=\frac{176}{7^4}$$

$\therefore k=176$

답 **176**

0339 서브를 2번 이상 성공시키는 사건을 A라 하면 A^C는 서브를 1번 이하 성공시키는 사건이다.

서브 성공률은 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$이므로

(i) 서브를 한 번도 성공시키지 못할 확률은

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)^4=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$$

(ii) 서브를 1번 성공시킬 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$

(i), (ii)에서 서브를 1번 이하 성공시킬 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{81}{625}+\frac{216}{625}=\frac{297}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{297}{625}=\frac{328}{625}$$

답 ④

0340 4번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 3번째 경기까지 2승 1패를 기록하고 4번째 경기에서 이겨야 한다.

이때 두 팀 A, B가 한 경기에서 서로를 이길 확률이 같으므로 한 경기에서 A팀과 B팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

(i) A팀이 우승할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(ii) B팀이 우승할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$$

답 $\mathbf{\frac{3}{8}}$

0341 (i) 주사위를 던졌을 때 6의 눈이 나오고, 동전을 3번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$$

(ii) 주사위를 던졌을 때 6이 아닌 눈이 나오고, 동전을 2번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$$\frac{5}{6}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{12}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{5}{12}=\frac{23}{48}$$

답 $\mathbf{\frac{23}{48}}$

유형 up

본문 54쪽

0342 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0}{\mathrm{P}(A)}=0$$

ㄷ. $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0343 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

그런데 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, A, B는 서로 독립이 아니다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$ 이므로 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B-A)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

즉, A^C, B는 서로 독립이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0344 ㄱ. $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C|B)&=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B-A)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=1-\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=1-\mathrm{P}(A|B)\end{aligned}$$

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이므로

$$\begin{aligned}&\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=1-\mathrm{P}((A\cap B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cup B^C)\\&=\{1-\mathrm{P}(A^C)\}\{1-\mathrm{P}(B^C)\}\ (\because \text{ㄴ})\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0345 한 개의 주사위를 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

5의 약수의 눈이 x번, 5의 약수가 아닌 눈이 y번 나온다고 하면

$x+y=4$, $x-y=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$

따라서 점 A의 좌표가 2가 되려면 5의 약수의 눈이 3번, 5의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$ 답 ①

0346 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$, 검은 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

흰 공이 x번, 검은 공이 y번 나온다고 하면

$x+y=5$, $3x+2y=14$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=1$ ······ ㉮

따라서 이 게임을 5번 하여 14점을 얻으려면 흰 공이 4번, 검은 공이 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{162}{625}$ ······ ㉯

답 $\frac{162}{625}$

단계	채점요소	배점
㉮	흰 공, 검은 공이 나오는 횟수 구하기	40 %
㉯	게임을 5번 하여 14점을 얻을 확률 구하기	60 %

0347 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

앞면이 x번, 뒷면이 y번 나온다고 하면

$x+y=6$, $2x+y=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=2$

따라서 점 P가 점 A로 되돌아오려면 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$ 답 $\frac{15}{64}$

참고 점 P가 점 A로 되돌아오려면 시계 반대 방향으로 5, 10, 15, ⋯ 만큼 움직여야 한다. 또한 동전을 6번 던지면 점 P는 시계 반대 방향으로 최소 6에서 최대 12만큼 움직일 수 있으므로 점 P는 시계 반대 방향으로 10만큼 움직인다.

시험에 꼭 나오는 문제

본문 55~57쪽

0348 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.5\times 0.4=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A|B)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0349 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$ 답 $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

0350 임의로 택한 한 명이 축구 경기를 관람한 사건을 C, 야구 경기를 관람한 사건을 D라 하면

$\mathrm{P}(C)=\dfrac{42}{120}$, $\mathrm{P}(C\cap D)=\dfrac{6}{120}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(D|C)=\dfrac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)}=\dfrac{\frac{6}{120}}{\frac{42}{120}}=\dfrac{1}{7}$ 답 $\mathbf{\dfrac{1}{7}}$

0351 여학생의 수를 a라 하고 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	남학생	여학생	합계
체험 학습 A	90	70	160
체험 학습 B	$270-a$	$a-70$	200
합계	$360-a$	a	360

체험 학습 B를 선택한 학생을 뽑는 사건을 A, 남학생을 뽑는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{5}$이고

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{200}{360}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{270-a}{360}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{270-a}{360}}{\frac{200}{360}}$

$=\dfrac{270-a}{200}$

따라서 $\dfrac{270-a}{200}=\dfrac{2}{5}$이므로

$1350-5a=400 \qquad \therefore a=190$

따라서 이 학교의 여학생은 190명이다. 답 ③

0352 진구가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 우진이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{7}{10}$,

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{9}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{3}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{3}{10}$ 답 $\mathbf{\dfrac{3}{10}}$

0353 A상자를 택하는 사건을 A, B상자를 택하는 사건을 B, 꺼낸 2개의 구슬이 서로 다른 색인 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{4}{7}$, $\mathrm{P}(E|B)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{10}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{11}{21}$ 답 $\mathbf{\dfrac{11}{21}}$

0354 A 회사의 컴퓨터를 택하는 사건을 A, B 회사의 컴퓨터를 택하는 사건을 B, 컴퓨터에서 바이러스가 발견되는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\dfrac{10}{30}\times\dfrac{3}{100}=\dfrac{1}{100}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\dfrac{20}{30}\times\dfrac{x}{100}=\dfrac{2x}{300}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=\dfrac{1}{100}+\dfrac{2x}{300}=\dfrac{3+2x}{300}$

이때 $\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{3}{13}$이므로

$\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{3+2x}{300}}=\dfrac{3}{3+2x}=\dfrac{3}{13}$

$3+2x=13 \qquad \therefore x=5$ 답 **5**

0355 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

ㄱ. $A\cap B=\{2, 4\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄴ. $C^C=\{4, 5\}$, $B\cap C^C=\{4\}$이므로

$\mathrm{P}(C^C)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B\cap C^C)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C^C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^C)$

즉, 두 사건 B, C^C는 서로 독립이다.

ㄷ. $A^C=\{5, 6\}$, $A^C\cap C=\{6\}$이므로

$P(A^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A^C\cap C)=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A^C\cap C)\neq P(A^C)P(C)$

즉, 두 사건 A^C, C는 서로 독립이 아니다. (종속이다.)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0356 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$P(A|B^C)=P(A)$

$1-P(A|B)=1-P(A)=P(A^C)$

$\therefore P(A|B^C)\neq 1-P(A|B)$

ㄴ. $A=B^C$이면 $A\cap B=B^C\cap B=\varnothing$

즉, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1$이면 $P(A\cap B)=P(B)$

$\therefore B\subset A$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0357 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이고 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$에서

$P(A)P(B^C)+P(A^C)P(B)=\frac{1}{3}$

$P(A)\{1-P(B)\}+\{1-P(A)\}P(B)=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{6}\{1-P(B)\}+\frac{5}{6}P(B)=\frac{1}{3}\ \left(\because P(A)=\frac{1}{6}\right)$

$\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{6}\qquad \therefore P(B)=\frac{1}{4}$ 답 ②

0358 $0\le(\text{확률})\le 1$이므로

$0\le 4a-1\le 1$, $0\le 1-2a\le 1$

$\therefore \frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B)\\&=(4a-1)(1-2a)\\&=-8a^2+6a-1\\&=-8\left(a-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\end{aligned}$$

따라서 $P(A\cap B)$, 즉 A와 B가 동시에 일어날 확률은 $a=\frac{3}{8}$에서 최댓값 $\frac{1}{8}$을 갖는다. 답 ①

0359 남학생을 택하는 사건을 A, 놀이동산을 선호하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{b}{40}$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B)\\&=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}\end{aligned}$$

즉, $\frac{b}{40}=\frac{9}{20}$이므로 $b=18$

$\therefore a=30-18=12$, $d=24-18=6$

$\therefore \frac{a}{d}=\frac{12}{6}=2$ 답 2

0360 앞면이 나오는 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라 하면

$a+b=5$, $ab=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$

(i) $a=2$, $b=3$일 확률은

${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(ii) $a=3$, $b=2$일 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$ 답 ①

0361 혜진이가 이긴 횟수를 x번이라 하면 비기거나 진 횟수는 $(5-x)$번이다.

혜진이가 4계단을 올라가게 되므로

$2x-(5-x)=4\qquad \therefore x=3$

한 번의 가위바위보에서 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 구하는 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

따라서 $p=243$, $q=40$이므로

$p+q=243+40=283$ 답 ③

0362 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times 6=36$

······························ ㉮

두 주사위의 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 눈의 수가 모두 3인 사건을 B라 하면

$A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$B=\{(3, 3)\}$

$\therefore A\cap B=\{(3, 3)\}$

$\therefore P(A)=\frac{5}{36}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

······························ ㉯

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\dfrac{1}{5}$

…… ㉰

답 $\dfrac{1}{5}$

단계	채점요소	배점
㉮	서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때 나오는 모든 경우의 수 구하기	20 %
㉯	조건부확률을 구하는 데 필요한 확률 구하기	40 %
㉰	조건부확률 구하기	40 %

0363 첫 번째에 뽑은 제비가 당첨 제비인 사건을 A, 두 번째에 뽑은 제비가 당첨 제비인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{4}$

이때 2개 모두 당첨 제비일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore p_1=\dfrac{1}{10}$

…… ㉮

또, $\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$이므로 두 번째 제비만 당첨 제비일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$

$\therefore p_2=\dfrac{3}{10}$

…… ㉯

$\therefore p_1+p_2=\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{5}$

…… ㉰

답 $\dfrac{2}{5}$

단계	채점요소	배점
㉮	p_1의 값 구하기	40 %
㉯	p_2의 값 구하기	50 %
㉰	p_1+p_2의 값 구하기	10 %

0364 A가 시험에 합격하는 사건을 A, B가 시험에 합격하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A-B)\\&=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

…… ㉮

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{5}\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\dfrac{4}{5}=\mathrm{P}(A)+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{4}$

따라서 A가 시험에 합격할 확률은 $\dfrac{3}{4}$이다.

…… ㉯

답 $\dfrac{3}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	B가 시험에 합격할 확률 구하기	40 %
㉯	A가 시험에 합격할 확률 구하기	60 %

0365 평균적으로 5문제 중 4문제를 맞히므로 한 문제를 맞힐 확률은 $\dfrac{4}{5}$이다.

3문제 이상 맞히는 사건을 A, 1번 문제를 틀리는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)={}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\left(\dfrac{1}{5}\right)^1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^4=\dfrac{512}{625}$

…… ㉮

$A\cap B$는 3문제 이상을 맞히면서 1번 문제는 틀리는 사건이므로 2번, 3번, 4번 문제만 맞히는 사건과 같다.

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{625}$

…… ㉯

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{64}{625}}{\frac{512}{625}}=\dfrac{1}{8}$

…… ㉰

답 $\dfrac{1}{8}$

단계	채점요소	배점
㉮	3문제 이상 맞힐 확률 구하기	40 %
㉯	2번, 3번, 4번 문제만 맞힐 확률 구하기	40 %
㉰	조건부확률 구하기	20 %

0366 철수가 우산을 잃어버리는 사건을 A, 학교, 분식집, 서점에 가는 사건을 각각 B, C, D라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

$\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(A\cap D)$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{19}{27}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{27}}=\frac{6}{19}$$

답 $\mathbf{\frac{6}{19}}$

0367 세 번째 검사까지 1개의 불량품을 꺼내는 사건을 A, 네 번째 검사에서 두 번째 불량품을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\underbrace{\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}}_{\text{첫 번째에 불량품이 나올 확률}}+\underbrace{\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}}_{\text{두 번째에 불량품이 나올 확률}}+\underbrace{\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}}_{\text{세 번째에 불량품이 나올 확률}}=\frac{7}{15}$$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{15}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{15}$

답 ⑤

0368 주사위를 던질 때, 3 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 4 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

점 P가 색칠한 부분을 지나려면 점 (2, 2) 또는 점 (3, 2)를 지나야 한다.

(i) 점 P가 점 (2, 2)를 지날 확률은 ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

(ii) 점 P가 점 (3, 2)를 지날 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

(iii) 점 P가 두 점 (2, 2), (3, 2)를 모두 지날 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{3}{16}=\frac{1}{2}$

답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

Ⅲ. 통계

05 확률분포 (1)

교과서 문제 정/복/하/기

본문 61쪽, 63쪽

0369 이산확률변수는 확률변수가 가질 수 있는 값을 셀 수 있어야 하므로 이산확률변수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 **ㄱ, ㄷ**

0370 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

$X=0$인 경우는 TT의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$

$X=1$인 경우는 HT, TH의 2가지이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$X=2$인 경우는 HH의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

답 **풀이 참조**

0371 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

(3)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

답 (1) **0, 1, 2**

(2) $\mathbf{P(X=0)=\frac{3}{10},\ P(X=1)=\frac{3}{5},\ P(X=2)=\frac{1}{10}}$

(3) **풀이 참조**

0372 (1) 6개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3$, 나온 3개의 공 중에 빨간 공이 x개 포함되어 있는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_x\times{}_2\mathrm{C}_{3-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_{\boxed{x}}\times{}_2\mathrm{C}_{\boxed{3-x}}}{{}_6\mathrm{C}_3}$ $(x=1, 2, 3)$

(2) $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

답 (1) x, $3-x$ (2) 풀이 참조

0373 (1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+\frac{2}{9}+3a=1$, $4a=\frac{4}{9}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{9}$

(2) $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{2}{9}+3a=\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$

(3) $\mathrm{P}(-1\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{3}+a+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{5}{9}$ (3) $\frac{2}{3}$

0374 (1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}=\frac{11}{4}$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{3}{8}-\left(\frac{11}{4}\right)^2$

$=\frac{23}{16}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{23}{16}}=\frac{\sqrt{23}}{4}$

답 (1) $\frac{11}{4}$ (2) $\frac{23}{16}$ (3) $\frac{\sqrt{23}}{4}$

0375 (1) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 그 외의 눈이 나올 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\mathrm{E}(X)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{4}{9}$, $\sigma(X)=\frac{2}{3}$

0376 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=50)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=100)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+50\times\frac{1}{2}+100\times\frac{1}{4}=50$

따라서 X의 기댓값은 50원이다. 답 50원

0377 (1) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times2-1=3$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{3}{2}=6$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$

(2) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=-\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)+5$

$=-\frac{1}{3}\times2+5=\frac{13}{3}$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$

$\sigma(Y)=\sigma\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=\left|-\frac{1}{3}\right|\sigma(X)=\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

답 (1) $\mathrm{E}(Y)=3$, $\mathrm{V}(Y)=6$, $\sigma(Y)=\sqrt{6}$

(2) $\mathrm{E}(Y)=\frac{13}{3}$, $\mathrm{V}(Y)=\frac{1}{6}$, $\sigma(Y)=\frac{\sqrt{6}}{6}$

0378 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{21}{4}-2^2=\frac{5}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(1) $\mathrm{E}(4X+2)=4\mathrm{E}(X)+2=4\times2+2=10$

(2) $\mathrm{V}(4X+2)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{5}{4}=20$

(3) $\sigma(4X+2)=4\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$

답 (1) 10 (2) 20 (3) $2\sqrt{5}$

0379 뒷면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 뒷면이 나오는 동전의 개수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 답 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$

0380 명중률이 $\frac{1}{3}$이므로 과녁에 명중하는 화살의 개수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(7, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

답 $\mathbf{B}\left(7, \frac{1}{3}\right)$

0381 2개의 제비를 1개씩 차례대로 뽑을 때, 첫 번째 제비를 뽑는 시행과 두 번째 제비를 뽑는 시행은 서로 독립이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

답 **이항분포를 따르지 않는다.**

0382 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_9\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^9 & (x=0) \\ {}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{9-x} & (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 8) \\ {}_9\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9 & (x=9) \end{cases}$

(2) $\mathrm{P}(X=3)={}_9\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{21}{128}$

답 (1) **풀이 참조** (2) $\mathbf{\frac{21}{128}}$

0383 (1) X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

(2) $\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^5 & (x=0) \\ {}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x} & (x=1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ {}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{5}\right)^5 & (x=5) \end{cases}$

(3) $\mathrm{P}(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{144}{625}$

답 (1) $\mathbf{B}\left(5, \frac{3}{5}\right)$ (2) **풀이 참조** (3) $\mathbf{\frac{144}{625}}$

0384 $\mathrm{E}(X)=63\times\frac{1}{3}=21$

$\mathrm{V}(X)=63\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=14$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{14}$

답 $\mathbf{E(X)=21,\ V(X)=14,\ \sigma(X)=\sqrt{14}}$

0385 $\mathrm{E}(X)=128\times\frac{3}{4}=96$

$\mathrm{V}(X)=128\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=24$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

답 $\mathbf{E(X)=96,\ V(X)=24,\ \sigma(X)=2\sqrt{6}}$

0386 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

(1) $\mathrm{E}(X)=45\times\frac{2}{3}=30$

(2) $\mathrm{V}(X)=45\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=10$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{10}$

답 (1) **30** (2) **10** (3) $\mathbf{\sqrt{10}}$

유형 익/히/기

본문 64~69쪽

0387 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)=1$

$\frac{k}{2\times1}+\frac{k}{3\times2}+\cdots+\frac{k}{9\times8}=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{9}\right)=1,\ \frac{8}{9}k=1 \qquad \therefore k=\frac{9}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X=9)=\frac{9}{8}\times\frac{1}{9\times8}=\frac{1}{64}$

답 $\mathbf{\frac{1}{64}}$

0388 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$k+4k+9k+16k=1$

$30k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{30}$

답 $\mathbf{\frac{1}{30}}$

0389 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$a+\left(\frac{1}{12}+a\right)+\left(\frac{2}{12}+a\right)+\left(\frac{3}{12}-a\right)+\left(\frac{4}{12}-a\right)=1$

$a+\frac{5}{6}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{12}+a=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

0390 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$=\frac{k(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=15)=1$

$k(\sqrt{2}-\sqrt{1})+k(\sqrt{3}-\sqrt{2})+k(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+k(\sqrt{16}-\sqrt{15})=1$

$k\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}=1$

$k(-1+\sqrt{16})=1,\ 3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)+\cdots+\mathrm{P}(X=15)$

$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}$

$=\frac{1}{3}(-\sqrt{4}+\sqrt{16})=\frac{2}{3}$

답 ④

0391 확률의 총합은 1이므로

$\frac{k}{2}+\left(\frac{3}{8}-k^2\right)+\frac{1}{8}+k=1$

$2k^2-3k+1=0,\ (2k-1)(k-1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}\ (\because k\neq1)$

한편, $X^2-5X+6=0$에서

$(X-2)(X-3)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=3$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-5X+6=0)&=P(X=2)+P(X=3)\\&=\left(\frac{3}{8}-k^2\right)+\frac{1}{8}\\&=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

0392 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+a+\frac{4}{9}=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{9}$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\geq 4a)&=P\left(X\geq\frac{8}{9}\right)\\&=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\\&=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{9}$

0393 $P(X=1)=\frac{1}{3}P(X=-1)$에서

$q=\frac{1}{3}\times2p \qquad \therefore q=\frac{2}{3}p$ ...... ㉠

확률의 총합은 1이므로

$2p+\frac{4}{3}p+q=1 \qquad \therefore 10p+3q=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=\frac{1}{4},\ q=\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\therefore P(0\leq X\leq1)&=P(X=0)+P(X=1)\\&=\frac{4}{3}p+q\\&=\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0394 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_5C_2}{{}_9C_3}=\frac{10}{21}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_5C_1}{{}_9C_3}=\frac{5}{14}$

$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\times{}_5C_0}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

$$\begin{aligned}\therefore P(X\geq2)&=P(X=2)+P(X=3)\\&=\frac{5}{14}+\frac{1}{21}=\frac{17}{42}\end{aligned}$$

답 $\frac{17}{42}$

0395 나오는 두 눈의 수를 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 나오는 눈의 수의 합이

(i) 3인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지이므로

$P(X=3)=\frac{2}{36}$

(ii) 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$P(X=4)=\frac{3}{36}$

(iii) 5인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로

$P(X=5)=\frac{4}{36}$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(3\leq X\leq5)&=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\&=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}\\&=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ②

0396 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고,

$X^2-4X+3\leq0$에서

$(X-1)(X-3)\leq0 \qquad \therefore 1\leq X\leq3$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-4X+3\leq0)&=P(1\leq X\leq3)\\&=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\\&=1-P(X=0)\end{aligned}$$

이때 $P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$이므로 구하는 확률은

$1-P(X=0)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

답 $\frac{31}{35}$

0397 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$

$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_6C_0\times{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{15}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

앞의 표에서 $\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X\ge 1)=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=1$

답 1

0398 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{6}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{7}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{19}{18}$

답 $a=\frac{1}{4}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{19}{18}$

0399 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=1$

$k+2k+3k+4k=1$

$10k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{5}=4$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{2}{5}=17$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=17-4^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

답 ③

0400 $\mathrm{P}(X=-2)=a$, $\mathrm{P}(X=-1)=b$라 하면 확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{4}$ ...... ㉠

가

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{6}$이므로

$(-2)\times a+(-1)\times b+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore 2a+b=\frac{1}{3}$ ...... ㉡

나

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{12}$, $b=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X=-1)=\frac{1}{6}$

다

답 $\frac{1}{6}$

단계	채점요소	배점
가	확률의 총합이 1임을 이용하여 식 세우기	40 %
나	$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{6}$임을 이용하여 식 세우기	40 %
다	$\mathrm{P}(X=-1)$ 구하기	20 %

0401 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{30}=2$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

답 $\frac{14}{25}$

0402 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

답 $\frac{6}{7}$

0403 뽑은 카드에 적힌 두 수를 a, $b(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 큰 수가

2인 경우는 (1, 2)의 1가지

3인 경우는 (1, 3), (2, 3)의 2가지

4인 경우는 (1, 4), (2, 4), (3, 4)의 3가지

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{2}=\frac{35}{3}$$

$$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{35}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 ①

0404 (i) $X=1$인 경우

1회에서 3 이상의 눈이 나오는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(ii) $X=2$인 경우

1회에는 1의 눈이 나오고 2회에서 2 이상의 눈이 나오는 경우와 1회에는 2의 눈이 나오고 2회에서 1 이상의 눈이 나오는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times1=\frac{11}{36}$$

(iii) $X=3$인 경우

1회, 2회에는 모두 1의 눈이 나오고 3회에서 1 이상의 눈이 나오는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{36}$$

(i)~(iii)에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{11}{36}+3\times\frac{1}{36}=\frac{49}{36}$$

답 $\frac{49}{36}$

0405 확률변수 $Y=\frac{X-100}{4}$에 대하여

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{X-100}{4}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{4}X-25\right)$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{E}(X)-25$$
$$=\frac{1}{4}\times120-25=5$$

$\therefore a=5$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{V}(Y)+\{\mathrm{E}(Y)\}^2$$
$$=\mathrm{V}\left(\frac{X-100}{4}\right)+5^2$$
$$=\mathrm{V}\left(\frac{1}{4}X-25\right)+25$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)^2\mathrm{V}(X)+25$$
$$=\frac{1}{16}\times48+25=28$$

$\therefore b=28$

$\therefore a+b=5+28=33$

답 **33**

0406 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{E}(X^2)=29$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=29-5^2=4$$

확률변수 $Y=aX+b$에 대하여

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$$
$$=5a+b=20 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$$
$$=4a^2=16$$

$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$10+b=20 \qquad \therefore b=10$

답 $\boldsymbol{a=2,\ b=10}$

0407 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+a+4a^2=1$$

$8a^2+2a-1=0$, $(2a+1)(4a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}\ (\because a>0)$

······························ ㉮

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	200	300	500	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=200\times\frac{1}{2}+300\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{4}=300$$

······························ ㉯

$\therefore E(aX-5)=aE(X)-5$

$=\frac{1}{4}\times 300-5=70$

.... ㉰

답 70

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	30 %
㉯	$E(X)$ 구하기	40 %
㉰	$E(aX-5)$ 구하기	30 %

0408 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}=2$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{21}{4}-2^2=\frac{5}{4}$

확률변수 $Y=aX+b$에 대하여

$E(Y)=E(aX+b)$

$=aE(X)+b$

$=2a+b=14$ ...... ㉠

$V(Y)=V(aX+b)$

$=a^2V(X)$

$=\frac{5}{4}a^2=20$

$a^2=16$ $\quad\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$8+b=14$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore ab=4\times 6=24$

답 24

0409 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_4C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{4}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$

$\therefore V(4-3X)=(-3)^2V(X)$

$=9\times\frac{16}{45}=\frac{16}{5}$

답 ⑤

0410 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

$P(X=1)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$

$P(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{25}{36}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{1}{36}=\frac{1}{3}$

$\therefore E(6X-1)=6E(X)-1$

$=6\times\frac{1}{3}-1=1$

답 1

0411 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\times{}_2C_2}{{}_7C_3}=\frac{1}{7}$

$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\times{}_2C_1}{{}_7C_3}=\frac{4}{7}$

$P(X=3)=\frac{{}_5C_3\times{}_2C_0}{{}_7C_3}=\frac{2}{7}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{2}{7}=\frac{15}{7}$

$\therefore E(Y)=E(7X-5)$

$=7E(X)-5$

$=7\times\frac{15}{7}-5=10$

답 ④

0412 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} {}_5C_0\left(\frac{9}{10}\right)^5 & (x=0) \\ {}_5C_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{5-x} & (x=1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ {}_5C_5\left(\frac{1}{10}\right)^5 & (x=5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\geq 1)&=1-P(X=0)\\&=1-{}_5C_0\left(\frac{9}{10}\right)^5\\&=1-\left(\frac{9}{10}\right)^5\end{aligned}$$

답 ④

0413 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} {}_{10}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10} & (x=0) \\ {}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} & (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 9) \\ {}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} & (x=10) \end{cases}$$

$\therefore P(X\leq 2)$

$$\begin{aligned}&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&={}_{10}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8\\&=\frac{1}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{45}{1024}\\&=\frac{7}{128}\end{aligned}$$

따라서 $p=128,\ q=7$이므로

$p+q=128+7=135$

답 **135**

0414 과녁을 명중시키는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} {}_4C_0\left(\frac{1}{5}\right)^4 & (x=0) \\ {}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x} & (x=1,\ 2,\ 3) \\ {}_4C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4 & (x=4) \end{cases}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 2)&=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}\\&=1-\left\{{}_4C_0\left(\frac{1}{5}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^3\right\}\\&=1-\frac{17}{625}=\frac{608}{625}\end{aligned}$$

답 $\mathbf{\frac{608}{625}}$

0415 어느 레스토랑의 예약 취소율이 10 %이므로 예약을 취소하지 않고 실제로 레스토랑에 찾아오는 비율은 90 %이다.
실제로 레스토랑에 찾아오는 건수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(20,\ 0.9)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} {}_{20}C_0\,0.1^{20} & (x=0) \\ {}_{20}C_x\,0.9^x\times 0.1^{20-x} & (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 19) \\ {}_{20}C_{20}\,0.9^{20} & (x=20) \end{cases}$$

따라서 테이블이 부족하려면 $X>18$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X>18)&=P(X=19)+P(X=20)\\&={}_{20}C_{19}\,0.9^{19}\times 0.1^1+{}_{20}C_{20}\,0.9^{20}\\&=20\times 0.135\times 0.1+0.122\\&=0.392\end{aligned}$$

답 **0.392**

0416 $E(X)=10$에서 $20p=10 \qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$V(X)=20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=5$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\begin{aligned}E(X^2)&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=5+10^2=105\end{aligned}$$

$\therefore E(X^2)+V(X)=105+5=110$

답 ③

0417 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=36\times\frac{2}{3}=24$

$V(X)=36\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=8$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

답 $\mathbf{E(X)=24,\ \sigma(X)=2\sqrt{2}}$

0418 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르고

$E(X)=20,\ V(X)=4^2=16$이므로

$E(X)=np=20$ …… ㉠

$V(X)=np(1-p)=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$20(1-p)=16 \qquad \therefore p=\frac{1}{5}$

$p=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{5}n=20 \qquad \therefore n=100$

답 **100**

0419 확률변수 X는 이항분포 $B\left(72,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=72\times\frac{1}{6}=12$

$V(X)=72\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=10$

이때 12와 10을 두 근으로 하고, 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(12+10)x+12\times 10=0$

$\therefore x^2-22x+120=0$

따라서 $a=-22$, $b=120$이므로

$a+b=-22+120=98$ 답 **98**

0420 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르고

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=\frac{3}{2}$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=2$ ······ ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=\frac{3}{2}$ ······ ㉡

························ ㉮

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(1-p)=\frac{3}{2}$ $\therefore p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}n=2$ $\therefore n=8$

························ ㉯

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_8\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^8 & (x=0) \\ {}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{8-x} & (x=1, 2, \cdots, 7) \\ {}_8\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{4}\right)^8 & (x=8) \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{{}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^5}{{}_8\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6}=\frac{2\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

························ ㉰

답 $\frac{2}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	평균, 분산에 대한 식 세우기	30 %
㉯	n, p의 값 구하기	30 %
㉰	$\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}$의 값 구하기	40 %

0421 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_n\mathrm{C}_0(1-p)^n & (x=0) \\ {}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x} & (x=1, 2, \cdots, n-1) \\ {}_n\mathrm{C}_n p^n & (x=n) \end{cases}$$

$\mathrm{P}(X=n-1)=8\mathrm{P}(X=n)$에서

${}_n\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}(1-p)=8{}_n\mathrm{C}_n p^n$

$np^{n-1}(1-p)=8p^n$ $\therefore n(1-p)=8p$ ······ ㉠

$\mathrm{V}(X)=\frac{8}{9}$에서 $np(1-p)=\frac{8}{9}$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $p\times 8p=\frac{8}{9}$

$p^2=\frac{1}{9}$ $\therefore p=\frac{1}{3}$ ($\because 0<p<1$)

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{3}n=\frac{8}{3}$ $\therefore n=4$

한편, $X^2-5X+4<0$에서

$(X-1)(X-4)<0$ $\therefore 1<X<4$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-5X+4<0)=\mathrm{P}(1<X<4)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1$

$=\frac{32}{81}$ 답 $\frac{32}{81}$

0422 3개의 동전을 동시에 던질 때, 2개는 앞면, 1개는 뒷면이 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=6\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

0423 환자 한 명이 완치될 확률은 $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=50\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=12$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 답 ①

0424 A, B가 가위바위보를 한 번 할 때, A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=12\times\frac{1}{3}=4$

$\mathrm{V}(X)=12\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{8}{3}+4^2=\frac{56}{3}$ 답 ④

0425 윷가락 한 개를 던질 때, 평평한 면이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$, 둥근 면이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 윷가락 네 개를 동시에 던져 걸이 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{216}{625}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25, \frac{216}{625}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=25\times\frac{216}{625}=\frac{216}{25}$ 답 ④

0426 한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}n$

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\frac{3}{16}n=\frac{11}{2}-\left(\frac{1}{4}n\right)^2$, $n^2+3n-88=0$

$(n+11)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수) 답 8

0427 장난감 한 개가 불량품이 아닐 확률은

$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

상자 한 개가 불량품이 아닐 확률은

$1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

장난감과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률은

$\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=16$ 답 16

0428 드라마가 방영되고 있는 동안 어떤 한 가구가 이 드라마를 시청할 확률은

$\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(500, \frac{3}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=500\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=105$

$\therefore \mathrm{V}\left(\frac{1}{3}X-1\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)$

$=\frac{1}{9}\times105=\frac{35}{3}$ 답 $\frac{35}{3}$

0429 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{1}{6}=30$

$\mathrm{V}(X)=180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=25$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{25}=5$

$\therefore \mathrm{E}(2X-15)-\sigma(2X-15)=2\mathrm{E}(X)-15-2\sigma(X)$

$=2\times30-15-2\times5$

$=35$ 답 ②

0430 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{V}(X)=5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

이때 $\mathrm{E}(aX+b)=2$, $\mathrm{V}(aX+b)=20$이므로

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

$=\frac{5}{2}a+b=2$ …… ㉠

$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

$=\frac{5}{4}a^2=20$

$a^2=16$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$10+b=2$ $\therefore b=-8$

$\therefore ab=4\times(-8)=-32$ 답 ③

0431 주사위를 30번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 그 이외의 눈이 나오는 횟수는 $30-Y$이므로

$X=3Y-(30-Y)=4Y-30$

주사위 한 개를 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(Y)=30\times\frac{1}{3}=10$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(4Y-30)=4\mathrm{E}(Y)-30$

$=4\times10-30=10$ 답 10

유형 up

본문 70쪽

0432 주머니에서 3개의 동전을 동시에 꺼낼 때 나오는 동전의 금액의 합을 확률변수 X라 하자.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 200, 250, 300이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=200)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=250)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=300)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	200	250	300	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=200\times\frac{1}{5}+250\times\frac{3}{5}+300\times\frac{1}{5}=250$

따라서 구하는 기댓값은 250원이다. 답 ③

0433 제비 한 개를 뽑아서 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 하자.

전체 제비의 개수를 n이라 할 때, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 10000, 100000이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{n-6}{n}$

$\mathrm{P}(X=10000)=\frac{5}{n}$

$\mathrm{P}(X=100000)=\frac{1}{n}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	100000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{n-6}{n}$	$\frac{5}{n}$	$\frac{1}{n}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{n-6}{n}+10000\times\frac{5}{n}+100000\times\frac{1}{n}=100$

$100n=150000$

$\therefore n=1500$

따라서 전체 제비의 개수는 1500이다. 답 **1500**

0434 게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 X라 하자.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -1500, 5000이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=-1500)=\frac{a}{3+a}$

$\mathrm{P}(X=5000)=\frac{3}{3+a}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1500	5000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a}{3+a}$	$\frac{3}{3+a}$	1

.... ㉮

이때 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=450$이므로

$\mathrm{E}(X)=(-1500)\times\frac{a}{3+a}+5000\times\frac{3}{3+a}=450$

.... ㉯

$\frac{-150a+1500}{3+a}=45$

$-150a+1500=135+45a$

$195a=1365 \quad \therefore a=7$

.... ㉰

답 **7**

단계	채점요소	배점
㉮	한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X로 놓고 X의 확률분포를 표로 나타내기	50 %
㉯	기댓값이 450원임을 이용하여 식 세우기	30 %
㉰	a의 값 구하기	20 %

0435 영미와 진희가 각각 주사위 한 개를 동시에 던지는 경우의 수는

$6\times6=36$

두 주사위의 눈의 수의 합이 10보다 크거나 같은 경우는 다음과 같다.

(i) 합이 10인 경우

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

(ii) 합이 11인 경우

(5, 6), (6, 5)의 2가지

(iii) 합이 12인 경우

(6, 6)의 1가지

(i)~(iii)에서 눈의 수의 합이 10보다 크거나 같은 경우의 수는 $3+2+1=6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

즉, 영미가 1점을 얻을 확률은 $\frac{1}{6}$, 진희가 1점을 얻을 확률은 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이다.

30회의 시행에서 영미가 얻는 점수를 확률변수 X, 진희가 얻는 점수를 확률변수 Y라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{6}\right)$을 따르고 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{5}{6}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{6}=5,\ \mathrm{E}(Y)=30\times\frac{5}{6}=25$

따라서 영미와 진희가 얻는 점수의 기댓값의 차는

$25-5=20$(점) 답 ⑤

0436 자물쇠가 열릴 때까지 시도한 횟수를 확률변수 X라 하자.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 기댓값은 2.5번이다. 답 ③

0437 1장의 응모권으로 받을 수 있는 당첨금을 확률변수 X라 하자.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 5500, 22000, 110000이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{55}$

$\mathrm{P}(X=5500)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{27}{55}$

$\mathrm{P}(X=22000)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{27}{220}$

$\mathrm{P}(X=110000)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{220}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	5500	22000	110000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)$

$=0\times\frac{21}{55}+5500\times\frac{27}{55}+22000\times\frac{27}{220}+110000\times\frac{1}{220}$

$=5900$

따라서 응모권 1장을 최소 5900원에 팔아야 한다.

답 **5900원**

시험에 꼭 나오는 문제

본문 71~73쪽

0438 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\frac{k}{3}+\frac{k}{2}+k+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}=1$

$\frac{8}{3}k=1 \qquad \therefore k=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

0439 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{a}{2}+a^2=1,\ 2a^2+3a-2=0$

$(2a-1)(a+2)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

한편, $X^2=25$에서 $X=-5$ 또는 $X=5$이므로

$\mathrm{P}(X^2=25)=\mathrm{P}(X=-5$ 또는 $X=5)$

$=\mathrm{P}(X=-5)+\mathrm{P}(X=5)$

$=a+a^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

0440 $X^2-6X+8<0$에서

$(X-2)(X-4)<0$

$\therefore 2<X<4$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-6X+8<0)=\mathrm{P}(2<X<4)$

$=\mathrm{P}(X=3)$

두 수의 차가 3인 경우는 1과 4, 2와 5, 3과 6이 적힌 카드를 뽑는 경우의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$ 답 ①

0441 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_6\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0442 $\mathrm{P}(X=2)=1-\mathrm{P}(X=0)$에서

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)=1$

즉, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 2뿐이다.

$\{\mathrm{E}(X)\}^2=2\mathrm{V}(X)$에서

$\{\mathrm{E}(X)\}^2=2[\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2]$

$=2\mathrm{E}(X^2)-2\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\therefore 2\mathrm{E}(X^2)=3\{\mathrm{E}(X)\}^2$ …… ㉠

한편, $\mathrm{P}(X=2)=p\ (0<p<1)$라 하면 $\mathrm{P}(X=0)=1-p$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$1-p$	p	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times(1-p)+2\times p=2p$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times(1-p)+2^2\times p=4p$

이므로 ㉠에서 $2\times 4p=3\times(2p)^2$

$3p^2-2p=0,\ p(3p-2)=0$

$\therefore p=\frac{2}{3}\ (\because 0<p<1)$ 답 ④

0443 (i) 0점을 받는 경우

(앞, 뒤, 앞), (뒤, 앞, 뒤)의 2가지

(ii) 1점을 받는 경우

(앞, 앞, 뒤), (뒤, 앞, 앞), (뒤, 뒤, 앞), (앞, 뒤, 뒤)의 4가지

(iii) 3점을 받는 경우

(앞, 앞, 앞), (뒤, 뒤, 뒤)의 2가지

(i)~(iii)에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{11}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$ 답 ②

0444 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=(-2)\times\frac{4}{9}+(-1)\times\frac{4}{9}+0\times\frac{1}{9}=-\frac{4}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{4}{9}+(-1)^2\times\frac{4}{9}+0^2\times\frac{1}{9}=\frac{20}{9}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{20}{9}-\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$이므로

$\sigma(Y)=\sigma(3X-7)=3\sigma(X)$

$=3\times\frac{2}{3}=2$ 답 2

0445 $\mathrm{E}(2X+4)=2\mathrm{E}(X)+4=12$이므로

$2\mathrm{E}(X)=8 \qquad \therefore \mathrm{E}(X)=4$

$\mathrm{V}(2X)=2^2\mathrm{V}(X)=36$이므로

$\mathrm{V}(X)=9$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=9+4^2=25$ 답 25

0446 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\frac{-a+2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{a+2}{10}+\frac{2a+2}{10}=1$

$2a+8=10 \qquad \therefore a=1$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{5}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{2}{5}=2$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2-1^2=1$

$\therefore \mathrm{V}(-5X+1)=(-5)^2\mathrm{V}(X)$

$=25\times 1=25$ 답 25

0447 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$ ← 2, 3이 적힌 공을 꺼내는 경우

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$ ← 1, 3이 적힌 공을 꺼내는 경우

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$ ← 1, 2가 적힌 공을 꺼내는 경우

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$ ← 1, 1이 적힌 공을 꺼내는 경우

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{1}{6}=\frac{79}{6}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{79}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{12}}=\frac{\sqrt{33}}{6}$이므로

$\sigma(6X-1)=6\sigma(X)$

$=6\times\frac{\sqrt{33}}{6}=\sqrt{33}$ 답 $\sqrt{33}$

0448 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=16\times\frac{1}{4}=4$

$\mathrm{V}(X)=16\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=3$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{3}$

$\therefore \mathrm{E}(X)\times\sigma(X)=4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ 답 ②

0449 $\mathrm{E}(X)=6$에서 $np=6$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=40-6^2=4$이므로

$np(1-p)=4$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(1-p)=4 \quad \therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}n=6 \quad \therefore n=18$ 답 ③

0450 주머니에서 1개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은

$\frac{4}{4+m}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{4}{4+m}\right)$를 따른다.

이때 X의 평균이 40, 분산이 24이므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{4}{4+m}=40$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{4}{4+m}\times\left(1-\frac{4}{4+m}\right)=24$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $40\left(1-\frac{4}{4+m}\right)=24$

$2m=12 \quad \therefore m=6$

$m=6$을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{5}n=40 \quad \therefore n=100$

$\therefore n-m=100-6=94$ 답 94

0451 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=120\times\frac{1}{2}=60$

$\mathrm{V}(X)=120\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=30$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=30+60^2=3630$

$\therefore f(a)=\mathrm{E}((X-a)^2)$

$=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)$

$=\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2$

$=3630-2a\times60+a^2$

$=(a-60)^2+30$

따라서 $f(a)$는 $a=60$에서 최솟값 30을 갖는다. 답 30

0452 한 상자에서 3개의 과일을 동시에 꺼낼 때 나오는 상한 과일의 개수를 확률변수 X라 하자.

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_{38}\mathrm{C}_3}{{}_{40}\mathrm{C}_3}=\frac{111}{130}$이므로 한 상자에서 상한 과일이 1개 이상 나올 확률은

$\mathrm{P}(X\geq1)=1-\mathrm{P}(X=0)$

$=1-\frac{111}{130}=\frac{19}{130}$

따라서 한 상자를 판매할 때, 판매액의 기댓값은

$5000\times\frac{111}{130}+6000\times\frac{19}{130}$(원)

이므로 130상자를 판매할 때, 전체 판매액의 기댓값은

$130\times\left(5000\times\frac{111}{130}+6000\times\frac{19}{130}\right)=555000+114000$

$=669000$(원)

답 ⑤

0453 $\mathrm{P}(0\leq X\leq2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{3}+\frac{a-2}{6}+\frac{1}{6}$

$=\frac{a+1}{6}$

즉, $\frac{a+1}{6}=\frac{5}{6}$이므로 $a=4$

.... ㉮

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{6}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

.... ㉯

$\therefore \mathrm{V}(aX+3)=\mathrm{V}(4X+3)=4^2\mathrm{V}(X)$

$=16\times\frac{11}{12}=\frac{44}{3}$

.... ㉰

답 $\frac{44}{3}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	30 %
㉯	$\mathrm{V}(X)$ 구하기	50 %
㉰	$\mathrm{V}(aX+3)$ 구하기	20 %

0454 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, a이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}+a\times\frac{1}{5}$$
$$=\frac{a+9}{5}$$

이때 $\mathrm{E}(5X-6)=8$이므로

$5\mathrm{E}(X)-6=8$, $5\times\frac{a+9}{5}-6=8$

$a+3=8$　　$\therefore a=5$

㉮

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}+5^2\times\frac{1}{5}=\frac{48}{5}$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{48}{5}-\left(\frac{14}{5}\right)^2=\frac{44}{25}$$

㉯

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{44}{25}}=\frac{2\sqrt{11}}{5}$$
$$\therefore \sigma(5X-6)=5\sigma(X)$$
$$=5\times\frac{2\sqrt{11}}{5}=2\sqrt{11}$$

㉰

답 $2\sqrt{11}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	40 %
㉯	$\mathrm{V}(X)$ 구하기	30 %
㉰	$\sigma(5X-6)$ 구하기	30 %

0455 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{5}\right)^{10} & (x=0) \\ {}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{10-x} & (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 9) \\ {}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10} & (x=10) \end{cases}$$

㉮

$$\therefore \mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{5}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^9$$
$$=\frac{1}{5^{10}}+10\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5^9}=\frac{41}{5^{10}}$$

㉯

따라서 $\frac{k}{5^{10}}=\frac{41}{5^{10}}$이므로 $k=41$

㉰

답 41

단계	채점요소	배점
㉮	확률변수 X의 확률질량함수 구하기	30 %
㉯	$\mathrm{P}(X\le1)$ 구하기	60 %
㉰	k의 값 구하기	10 %

0456 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(80, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

㉮

$$\mathrm{E}(X)=80\times\frac{1}{4}=20$$
$$\mathrm{V}(X)=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15$$

㉯

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=15+20^2=415$

㉰

답 415

단계	채점요소	배점
㉮	확률변수 X가 따르는 이항분포 구하기	20 %
㉯	$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ 구하기	40 %
㉰	$\mathrm{E}(X^2)$ 구하기	40 %

0457 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 부품 T인 사건을 T라 하고, 추가된 부품이 모두 S인 사건을 S라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(S|T)$이다.

한편, 추가된 부품 중 S의 개수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2 & (x=0) \\ {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 & (x=1) \\ {}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 & (x=2) \end{cases}$$

(i) $X=0$인 경우 ← 부품 S는 3개, 부품 T는 4개인 경우

$\mathrm{P}(X=0)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 7개의 부품 중 임의로 선택한 것이 T일 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{7}$

(ii) $X=1$인 경우 ← 부품 S는 4개, 부품 T는 3개인 경우

$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$이므로 7개의 부품 중 임의로 선택한 것이 T일 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$

(iii) $X=2$인 경우 ← 부품 S는 5개, 부품 T는 2개인 경우

$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 7개의 부품 중 임의로 선택한 것이 T일 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$

(i)~(iii)에서 $P(T)=\frac{1}{7}+\frac{3}{14}+\frac{1}{14}=\frac{3}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$P(S|T)=\frac{P(S\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{6}$$

답 ①

0458 확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} {}_nC_0(1-p)^n & (x=0) \\ {}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} & (x=1, 2, \cdots, n-1) \\ {}_nC_n p^n & (x=n) \end{cases}$$

이때 $P(X=n-1)=4P(X=n)$이므로

${}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1=4{}_nC_n p^n$

$np^{n-1}(1-p)=4p^n$

$\therefore n(1-p)=4p$ …… ㉠

또, $V(X)=1$이므로

$np(1-p)=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4p^2=1,\ p^2=\frac{1}{4}\qquad \therefore p=\frac{1}{2}\ (\because p>0)$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}n=2\qquad \therefore n=4$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$m=E(X)=4\times\frac{1}{2}=2$

$\sigma=\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=1$

이때 $|X-m|<\sigma$에서

$|X-2|<1,\ -1<X-2<1$

$\therefore 1<X<3$

$\therefore P(|X-m|<\sigma)=P(1<X<3)$

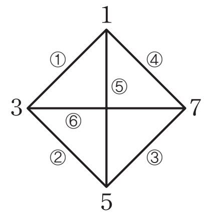
$=P(X=2)$

$={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

0459 오른쪽 그림과 같이 6개의 선분을 각각 ①, ②, …, ⑥이라 하면 선분의 양 끝점에 대응하는 수 중 큰 수는



①에서 3, ②에서 5, ③에서 7

④에서 7, ⑤에서 5, ⑥에서 7

이다. 즉, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 5, 7이고, 그 확률은 각각

$P(X=3)=\frac{1}{6}$

$P(X=5)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(X=7)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

이때 확률변수 X에 대하여

$E(X)=3\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{3}+7\times\frac{1}{2}=\frac{17}{3}$

$E(X^2)=3^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{3}+7^2\times\frac{1}{2}=\frac{103}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{103}{3}-\left(\frac{17}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$이므로

$\sigma\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{1}{2}\sigma(X)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

06 확률분포 (2)

교과서 문제 정/복/하/기

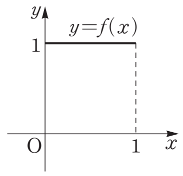
본문 75쪽, 77쪽

0460 연속확률변수는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가지므로 연속확률변수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

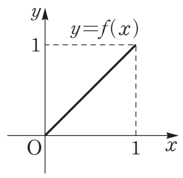
0461 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

(1)



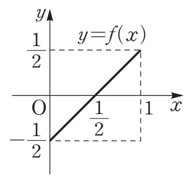
⇨ $f(x)\ge 0$이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 $f(x)=1$은 확률밀도함수가 될 수 있다.

(2)



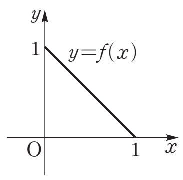
⇨ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 $f(x)=x$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

(3)



⇨ $0\le x<\frac{1}{2}$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)=x-\frac{1}{2}$은 확률밀도함수가 될 수 없다.

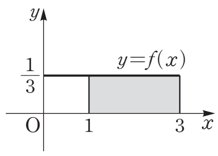
(4)



⇨ $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 $f(x)=1-x$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

답 (1) **확률밀도함수가 될 수 있다.**
(2) **확률밀도함수가 될 수 없다.**
(3) **확률밀도함수가 될 수 없다.**
(4) **확률밀도함수가 될 수 없다.**

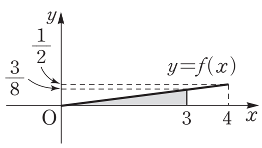
0462 $\mathrm{P}(X\ge 1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 직사각형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\ge 1)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

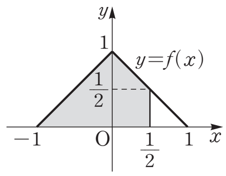
0463 $\mathrm{P}(0\le X\le 3)$은 오른쪽 그림의 색칠한 삼각형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{16}$

답 $\frac{9}{16}$

0464 $\mathrm{P}\left(-1\le X\le\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(-1\le X\le\frac{1}{2}\right)$

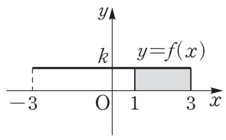
$=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{8}$

답 $\frac{7}{8}$

0465 (1) $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 직사각형의 넓이가 1이므로



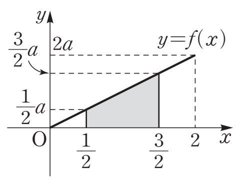
$6\times k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 1)$은 위의 그림의 색칠한 직사각형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X\ge 1)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$

0466 (1) $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로



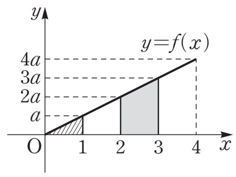
$\frac{1}{2}\times 2\times 2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)$은 위의 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\times 1=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

0467 (1) $f(x)=ax$라 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 4\times 4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{8}x$

(2) $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$은 위의 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\times 1=\frac{5}{16}$

(3) $\mathrm{P}(X\le 1)$은 위의 그림의 빗금친 삼각형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X\le 1)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

답 (1) $f(x)=\frac{1}{8}x$ (2) $\frac{5}{16}$ (3) $\frac{1}{16}$

0468 평균이 6, 분산이 $4=2^2$이므로 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$

답 $\mathbf{N(6,\ 2^2)}$

0469 평균이 5, 분산이 $9=3^2$이므로 $\mathrm{N}(5,\ 3^2)$

답 $\mathbf{N(5,\ 3^2)}$

0470 $\mathrm{E}(X)=10$, $\sigma(X)=3$이므로

(1) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1$

$=2\times10-1=19$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)$

$=2\times3=6$

(2) 평균이 19, 표준편차가 6이므로 $\mathrm{N}(19,\ 6^2)$

답 (1) $\mathbf{E(Y)=19,\ \sigma(Y)=6}$ (2) $\mathbf{N(19,\ 6^2)}$

0471 ④ 표준편차 σ의 값이 클수록 곡선이 옆으로 퍼진다.

답 ④

0472 $\mathrm{P}(Z\le0)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(Z\le1)=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$

답 **0.8413**

0473 $\mathrm{P}(Z\ge0)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(Z\ge0.5)=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=0.5-0.1915$

$=0.3085$

답 **0.3085**

0474 $\mathrm{P}(0.5\le Z\le2)=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=0.4772-0.1915$

$=0.2857$

답 **0.2857**

0475 $\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=2\times0.1915=0.383$

답 **0.383**

0476 $\mathrm{P}(Z\ge0)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(Z\le-1.5)=\mathrm{P}(Z\ge1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

답 **0.0668**

0477 X의 평균이 5, 표준편차가 2이므로

$Z=\dfrac{X-5}{2}$

답 $\mathbf{Z=\dfrac{X-5}{2}}$

0478 X의 평균이 7, 표준편차가 $\sqrt{9}=3$이므로

$Z=\dfrac{X-7}{3}$

답 $\mathbf{Z=\dfrac{X-7}{3}}$

0479 (1) X의 평균이 8, 표준편차가 $\sqrt{16}=4$이므로

$Z=\dfrac{X-8}{4}$

(2) $\mathrm{P}(4\le X\le14)=\mathrm{P}\left(\dfrac{4-8}{4}\le Z\le\dfrac{14-8}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.3413+0.4332$

$=0.7745$

답 (1) $\mathbf{Z=\dfrac{X-8}{4}}$ (2) **0.7745**

0480 $\mathrm{E}(X)=48\times\dfrac{1}{4}=12$

$\sigma(X)=\sqrt{48\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}}=3$

따라서 X의 평균이 12, 표준편차가 3이므로

$\mathrm{N}(12,\ 3^2)$

답 $\mathbf{N(12,\ 3^2)}$

0481 $\mathrm{E}(X)=180\times\dfrac{5}{6}=150$

$\sigma(X)=\sqrt{180\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}}=5$

따라서 X의 평균이 150, 표준편차가 5이므로

$\mathrm{N}(150,\ 5^2)$

답 $\mathbf{N(150,\ 5^2)}$

0482 (1) 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=64\times\dfrac{1}{2}=32$

$\sigma(X)=\sqrt{64\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}}=4$

(2) X의 평균이 32, 표준편차가 4이므로

$\mathrm{N}(32,\ 4^2)$

(3) $Z=\dfrac{X-32}{4}$

(4) $\mathrm{P}(X\ge40)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{40-32}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

답 (1) $\mathbf{E(X)=32,\ \sigma(X)=4}$ (2) $\mathbf{N(32,\ 4^2)}$ (3) $\mathbf{Z=\dfrac{X-32}{4}}$ (4) **0.0228**

0483 (1) $\mathrm{E}(X)=162\times\frac{1}{3}=54$

$\sigma(X)=\sqrt{162\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=6$

X의 평균이 54, 표준편차가 6이므로

$\mathrm{N}(54,\ 6^2)$

(2) $Z=\dfrac{X-54}{6}$

(3) $\mathrm{P}(42\le X\le 60)=\mathrm{P}\left(\frac{42-54}{6}\le Z\le\frac{60-54}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772+0.3413$

$=0.8185$

답 (1) $\mathbf{N(54,\ 6^2)}$ (2) $\boldsymbol{Z=\frac{X-54}{6}}$ (3) **0.8185**

유형 익히기

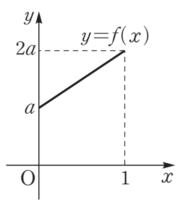
본문 78~86쪽

0484 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 1\times a+1\times a=1$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

0485 함수 $f(x)=ax+a$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times(a+2a)\times 1=1$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

참고 함수 $f(x)=ax+a$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 0)$을 지난다. 이때 $a<0$이면 $0\le x\le 1$에서 $f(x)<0$이므로 $a<0$인 경우는 생각하지 않는다.

0486 ①, ③ $-1\le x\le 1$에서 항상 $f(x)\ge 0$인 것은 아니므로 확률밀도함수가 아니다.

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $2\times 1=2$이므로 확률밀도함수가 아니다.

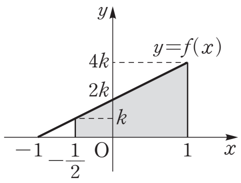
④ $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$이므로 확률밀도함수이다.

⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$이므로 확률밀도함수가 아니다.

따라서 X의 확률밀도함수의 그래프가 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

0487 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



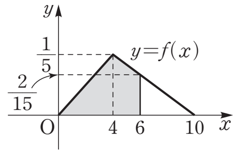
$\frac{1}{2}\times 2\times 4k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$은 위의 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le 1\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+1\right)\times\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$

답 ⑤

0488 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X\le 6)$이므로 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같다.



$\therefore \mathrm{P}(X\le 6)=1-\mathrm{P}(6\le X\le 10)$

$=1-\frac{1}{2}\times 4\times\frac{2}{15}=\frac{11}{15}$

답 $\frac{11}{15}$

0489 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

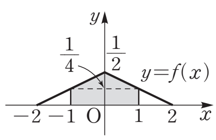
$\frac{1}{2}\times 4\times a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ㉮

$0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $(2,\ 0)$을 지나는 직선이므로

$f(x)=\dfrac{0-\frac{1}{2}}{2-0}(x-2)=-\frac{1}{4}(x-2)$

$\therefore f(1)=\frac{1}{4}$ ㉯

$\mathrm{P}(|X|\le 1)=\mathrm{P}(-1\le X\le 1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(|X|\le 1)=\mathrm{P}(-1\le X\le 1)$

$=2\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{3}{4}$ ㉰

답 $\frac{3}{4}$

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	30 %
㉯	$f(1)$의 값 구하기	30 %
㉰	$\mathrm{P}(\vert X\vert\le 1)$ 구하기	40 %

0490 ㄱ. 평균이 m인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$P(X_1 \geq x_1)=P(X_2 \leq x_2)=0.5$

ㄴ. 확률변수 X_1, X_2의 정규분포곡선이 각각 직선 $x=x_1$, $x=x_2$에 대하여 대칭이므로

$E(X_1)=x_1$, $E(X_2)=x_2$

이때 $x_1<x_2$이므로 $E(X_1)<E(X_2)$

ㄷ. 확률변수 X_2의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_1의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이보다 높으므로

$\sigma(X_1)>\sigma(X_2)$

ㄹ. $E(X_1)=x_1$, $E(X_2)=x_2$이고 $f(x_1)<g(x_2)$이므로

$f(E(X_1))<g(E(X_2))$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

0491 평균이 m인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이므로 평균이 가장 높은 학교는 B이다.

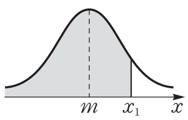
또, 표준편차가 클수록 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼지므로 표준편차가 가장 큰 학교는 C이다.

답 **B, C**

0492 ㄱ. 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$P(X \leq m)=P(X \geq m)=0.5$

ㄴ. $x_1>m$일 때



$P(X \leq x_1)$

$=P(X \leq m)+P(m \leq X \leq x_1)$

$=0.5+P(m \leq X \leq x_1)$

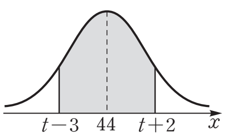
ㄷ. 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이는 1이므로

$P(X \leq a)+P(X \geq a)=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0493 확률변수 X가 정규분포 $N(44, 5^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수는 $x=44$일 때 최댓값을 갖고, 그 그래프는 직선 $x=44$에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(t-3 \leq X \leq t+2)$가 최대가 되려면 $t-3$과 $t+2$의 평균이 44이어야 하므로



$\frac{(t-3)+(t+2)}{2}=44$

$\therefore t=\frac{89}{2}$ 답 ②

0494 정규분포곡선은 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로

$P(X \leq -2)=P(X \geq 12)$에서

$a=\frac{-2+12}{2}=5$

또, $V\left(\frac{1}{2}X\right)=1$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X)=1$

$\therefore V(X)=4$

즉, $b^2=4$이므로 $b=2$ ($\because b>0$)

$\therefore a+b=5+2=7$ 답 **7**

0495 확률변수 X가 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르므로

$m=20$, $\sigma=4$

$$\begin{aligned}\therefore P(12 \leq X \leq 28)&=P(20-8 \leq X \leq 20+8)\\&=P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma)\\&=2P(m \leq X \leq m+2\sigma)\\&=2\times 0.4772\\&=0.9544\end{aligned}$$

답 **0.9544**

0496 $P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma)=a$에서

$2P(m \leq X \leq m+\sigma)=a$

$\therefore P(m \leq X \leq m+\sigma)=\frac{a}{2}$

$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma)=b$에서

$2P(m \leq X \leq m+2\sigma)=b$

$\therefore P(m \leq X \leq m+2\sigma)=\frac{b}{2}$

$\therefore P(m-\sigma \leq X \leq m+2\sigma)$

$=P(m-\sigma \leq X \leq m)+P(m \leq X \leq m+2\sigma)$

$=P(m \leq X \leq m+\sigma)+P(m \leq X \leq m+2\sigma)$

$=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$

답 ④

0497 $P(X \leq k)=0.0013$에서

$P(X \leq m)-P(k \leq X \leq m)=0.0013$

$0.5-P(k \leq X \leq m)=0.0013$

$\therefore P(k \leq X \leq m)=0.4987$

이때 $P(m \leq X \leq m+3\sigma)=0.4987$이므로

$P(m-3\sigma \leq X \leq m)=0.4987$

$\therefore k=m-3\sigma=48-3\times 3=39$ 답 **39**

0498 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(10, 2^2)$, $N(20, 3^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-10}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-20}{3}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(10 \leq X \leq 14)=P(20 \leq Y \leq k)$에서

$P\left(\frac{10-10}{2} \leq Z_X \leq \frac{14-10}{2}\right)=P\left(\frac{20-20}{3} \leq Z_Y \leq \frac{k-20}{3}\right)$

$P(0 \leq Z_X \leq 2)=P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{k-20}{3}\right)$

따라서 $2=\frac{k-20}{3}$이므로

$k-20=6 \qquad \therefore k=26$ 답 ③

0499 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(17, \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-17}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 $\dfrac{X-17}{\sigma}=\dfrac{X-m}{6}$이므로 $m=17$, $\sigma=6$

$\therefore m-\sigma=17-6=11$ 답 ③

0500 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(8, 3^2)$, $\mathrm{N}(9, 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-8}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-9}{4}$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq k)=\mathrm{P}(Y\geq k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\geq\dfrac{k-8}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\geq\dfrac{k-9}{4}\right)$

따라서 $\dfrac{k-8}{3}=\dfrac{k-9}{4}$이므로

$4k-32=3k-27 \qquad \therefore k=5$ 답 ⑤

0501 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(4, 1^2)$, $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-4}{1}$, $Z_Y=\dfrac{Y-m}{2}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

.... ㉮

$\mathrm{P}(1\leq X\leq 7)=2\mathrm{P}(m\leq Y\leq 2m+3)$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1-4}{1}\leq Z_X\leq\dfrac{7-4}{1}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(\dfrac{m-m}{2}\leq Z_Y\leq\dfrac{(2m+3)-m}{2}\right)$

$\mathrm{P}(-3\leq Z_X\leq 3)=2\mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\dfrac{m+3}{2}\right)$

$2\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 3)=2\mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\dfrac{m+3}{2}\right)$

.... ㉯

따라서 $3=\dfrac{m+3}{2}$이므로 $m+3=6 \qquad \therefore m=3$

.... ㉰

답 3

단계	채점요소	배점
㉮	확률변수 X, Y를 각각 표준화하기	20 %
㉯	주어진 확률을 Z에 대한 확률로 나타내기	50 %
㉰	m의 값 구하기	30 %

0502 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(a, 3^2)$, $\mathrm{N}(a+7, 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-a}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-(a+7)}{4}$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq b)=\mathrm{P}(Y\leq b)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\geq\dfrac{b-a}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\leq\dfrac{b-(a+7)}{4}\right)$

따라서 $\dfrac{b-a}{3}=-\dfrac{b-(a+7)}{4}$이므로

$4b-4a=-3b+3a+21$

$\therefore a-b=-3$ 답 -3

0503 $Z=\dfrac{X-25}{8}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-23|\leq 10)&=\mathrm{P}(-10\leq X-23\leq 10)\\&=\mathrm{P}(13\leq X\leq 33)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{13-25}{8}\leq Z\leq\frac{33-25}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 1)\\&=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.4332+0.3413\\&=0.7745\end{aligned}$$

답 ③

0504 $Z=\dfrac{X-12}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

① $\mathrm{P}(X\geq 12)=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{12-12}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 0)=0.5$

② $\mathrm{P}(X\leq 18)=\mathrm{P}\left(Z\leq\dfrac{18-12}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\leq 1)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

③ $\mathrm{P}(0\leq X\leq 12)=\mathrm{P}\left(\dfrac{0-12}{6}\leq Z\leq\dfrac{12-12}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.4772$

④ $\mathrm{P}(6\leq X\leq 18)=\mathrm{P}\left(\dfrac{6-12}{6}\leq Z\leq\dfrac{18-12}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 1)=2\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=2\times 0.3413=0.6826$

⑤ $\mathrm{P}(18\leq X\leq 24)=\mathrm{P}\left(\dfrac{18-12}{6}\leq Z\leq\dfrac{24-12}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(1\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

따라서 값이 가장 작은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0505 $Z=\dfrac{X-40}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(36\leq X\leq 44)=0.5762$에서

$$\mathrm{P}(36\le X\le 44)=\mathrm{P}\left(\frac{36-40}{5}\le Z\le\frac{44-40}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-0.8\le Z\le 0.8)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.5762$$
$\therefore$ $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.2881$

$$\therefore \mathrm{P}(X\ge 44)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{44-40}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.8)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$$
$$=0.5-0.2881=0.2119$$
답 ①

0506 $\mathrm{E}(X)=25$, $\sigma(X)=10$이므로
$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+4)=2\mathrm{E}(X)+4=2\times25+4=54$
$\sigma(Y)=\sigma(2X+4)=|2|\sigma(X)=2\times10=20$
따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 20^2)$을 따르므로
$Z=\frac{Y-54}{20}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(Y\le 94)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{94-54}{20}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5+0.4772=0.9772$$
답 ⑤

0507 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(40\le X\le a)=0.8185$에서

$$\mathrm{P}(40\le X\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{40-50}{5}\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-2\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)$$
$$=0.4772+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)=0.8185$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)=0.3413$$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로
$\frac{a-50}{5}=1$, $a-50=5$ $\quad\therefore a=55$
답 55

0508 $Z=\frac{X-m}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge 24)=0.3085$에서

$$\mathrm{P}(X\ge 24)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{24-m}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{24-m}{2}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{24-m}{2}\right)=0.3085$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{24-m}{2}\right)=0.1915$$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로
$\frac{24-m}{2}=0.5$, $24-m=1$ $\quad\therefore m=23$
답 23

0509 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(|X-m|\le a\sigma)=0.9544$에서

$$\mathrm{P}(|X-m|\le a\sigma)=\mathrm{P}(-a\sigma\le X-m\le a\sigma)$$
$$=\mathrm{P}\left(-a\le\frac{X-m}{\sigma}\le a\right)$$
$$=\mathrm{P}(-a\le Z\le a)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.9544$$
$\therefore$ $\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.4772$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로 $a=2$
답 2

0510 $Z=\frac{X-20}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\ge k)=0.0668$에서

$$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-20}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-20}{3}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-20}{3}\right)=0.0668$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-20}{3}\right)=0.4332$$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로
$\frac{k-20}{3}=1.5$, $k-20=4.5$ $\quad\therefore k=24.5$
답 ②

0511 사과 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-250}{15}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(220\le X\le 265)=\mathrm{P}\left(\frac{220-250}{15}\le Z\le\frac{265-250}{15}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.48+0.34=0.82$$
답 0.82

0512 물 1 L에 들어 있는 칼슘의 양을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-18}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(X\geq 22)=P\left(Z\geq \frac{22-18}{4}\right)=P(Z\geq 1)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

답 ①

0513 3학년 학생들의 수학 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(57, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-57}{8}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$P(X\leq 45)=P\left(Z\leq \frac{45-57}{8}\right)=P(Z\leq -1.5)$$
$$=P(Z\geq 1.5)=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=0.5-0.43=0.07$$

답 **0.07**

0514 직원들의 일일 TV 시청 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(90, 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-90}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(50\leq X\leq 80)=P\left(\frac{50-90}{20}\leq Z\leq \frac{80-90}{20}\right)$$
$$=P(-2\leq Z\leq -0.5)=P(0.5\leq Z\leq 2)$$
$$=P(0\leq Z\leq 2)-P(0\leq Z\leq 0.5)$$
$$=0.48-0.19=0.29$$

따라서 일일 TV 시청 시간이 50분 이상 80분 이하인 직원은 전체의 29 %이다.

답 ⑤

0515 지현이가 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(40, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
집에서 7시 58분에 출발하여 학교에 8시 40분 이내에 도착해야 지각이 아니므로 등교하는 데 걸리는 시간이 42분 이하이어야 한다.
따라서 구하는 확률은

$$P(X\leq 42)=P\left(Z\leq \frac{42-40}{5}\right)=P(Z\leq 0.4)$$
$$=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.4)$$
$$=0.5+0.1554=0.6554$$

답 ④

0516 골프공 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(45.5, 0.5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-45.5}{0.5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
이때 골프공의 기준 무게가 46 g이므로 구하는 확률은

$$P(|X-46|\geq 1)$$
$$=P(X-46\leq -1)+P(X-46\geq 1)$$
$$=P(X\leq 45)+P(X\geq 47)$$
$$=P\left(Z\leq \frac{45-45.5}{0.5}\right)+P\left(Z\geq \frac{47-45.5}{0.5}\right)$$
$$=P(Z\leq -1)+P(Z\geq 3)$$
$$=P(Z\geq 1)+P(Z\geq 3)$$
$$=\{P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)\}+\{P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 3)\}$$
$$=(0.5-0.3413)+(0.5-0.4987)$$
$$=0.16$$

답 **0.16**

0517 학생들의 수학 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(65, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(60\leq X\leq 80)=P\left(\frac{60-65}{5}\leq Z\leq \frac{80-65}{5}\right)$$
$$=P(-1\leq Z\leq 3)$$
$$=P(-1\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 3)$$
$$=P(0\leq Z\leq 1)+P(0\leq Z\leq 3)$$
$$=0.3413+0.4987=0.84$$

따라서 60점 이상 80점 이하의 점수를 받은 학생 수는
$100\times 0.84=84$(명)

답 **84명**

0518 오렌지의 당도를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(14, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-14}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(X\leq 12)=P\left(Z\leq \frac{12-14}{2}\right)$$
$$=P(Z\leq -1)=P(Z\geq 1)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=0.5-0.34=0.16$$

따라서 당도가 12 Brix 이하인 오렌지의 개수는
$2000\times 0.16=320$

답 **320**

0519 신입생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(165, 5.5^2)$을 따른다.

······ ㉮

이때 $Z=\frac{X-165}{5.5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(X\geq 176)=P\left(Z\geq \frac{176-165}{5.5}\right)=P(Z\geq 2)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$

······ ㉯

따라서 키가 176 cm 이상인 학생 수는

$1000\times0.02=20$(명)

㉰

답 20명

단계	채점요소	배점
㉮	신입생들의 키를 확률변수 X로 놓고 X가 따르는 정규분포 구하기	20 %
㉯	$\mathrm{P}(X\geq176)$ 구하기	50 %
㉰	키가 176 cm 이상인 학생 수 구하기	30 %

0520 노트북의 사용 기간을 확률변수 X라 하면 X의 평균은 72개월, 즉 6년이고 표준편차는 24개월, 즉 2년이므로 X는 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{X-6}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(8\leq X\leq9)&=\mathrm{P}\left(\frac{8-6}{2}\leq Z\leq\frac{9-6}{2}\right)=\mathrm{P}(1\leq Z\leq1.5)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)\\&=0.4332-0.3413=0.0919\end{aligned}$$

따라서 사용 기간이 8년에서 9년 사이인 소비자의 수는

$10000\times0.0919=919$(명) $\quad\therefore n=919$ 답 919

0521 응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(58,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-58}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X\geq a)=\dfrac{360}{4500}=0.08$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq a)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-58}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-58}{10}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-58}{10}\right)=0.08\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{a-58}{10}\right)=0.42$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.4)=0.42$이므로

$\dfrac{a-58}{10}=1.4,\ a-58=14 \quad\therefore a=72$

따라서 합격자의 최저 점수는 72점이다. 답 ②

0522 학생들의 수학 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-80}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

수학 성적이 2등급 이내에 속하는 학생의 최저 점수를 a점이라 하면 $\mathrm{P}(X\geq a)=0.11$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq a)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-80}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-80}{10}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-80}{10}\right)=0.11\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{a-80}{10}\right)=0.39$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.23)=0.39$이므로

$\dfrac{a-80}{10}=1.23,\ a-80=12.3 \quad\therefore a=92.3$

따라서 2등급 이내에 속하는 학생의 최저 점수는 92.3점이다.

답 92.3점

0523 학생들의 수학 영역 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(74,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-74}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

수학 영역에서 21등을 한 학생의 점수를 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X\geq a)=\dfrac{21}{300}=0.07$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq a)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-74}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-74}{6}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-74}{6}\right)=0.07\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{a-74}{6}\right)=0.43$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)=0.43$이므로

$\dfrac{a-74}{6}=1.5,\ a-74=9 \quad\therefore a=83$

따라서 21등을 한 학생의 점수는 83점이다. 답 83점

0524 제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12.25,\ 0.1^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-12.25}{0.1}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

기계의 가동을 멈추고 조사에 들어갈 확률이 0.0228이므로

$\mathrm{P}(X\leq a)=0.0228$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\leq a)&=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-12.25}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\geq-\frac{a-12.25}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{a-12.25}{0.1}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{a-12.25}{0.1}\right)=0.0228\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le -\dfrac{a-12.25}{0.1}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로

$-\dfrac{a-12.25}{0.1}=2$, $a-12.25=-0.2$

$\therefore a=12.05$ 답 ②

0525 A반 학생들의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(47.3,\ 7^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-47.3}{7}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
A반 학생의 몸무게가 55 kg 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 55)=\mathrm{P}\left(Z_X \ge \dfrac{55-47.3}{7}\right)=\mathrm{P}(Z_X \ge 1.1)$
$=\mathrm{P}(Z_X \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 1.1)$
$=0.5-0.36=0.14$

한편, B반 학생들의 몸무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(50.1,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-50.1}{5}$로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 A반, B반의 학생 수가 서로 같고, A반 학생 중 몸무게가 55 kg 이상인 학생 수가 B반 학생 중 몸무게가 k kg 이상인 학생 수의 $\dfrac{1}{2}$배이므로 A반 학생의 몸무게가 55 kg 이상일 확률도 B반 학생의 몸무게가 k kg 이상일 확률의 $\dfrac{1}{2}$배이다.

즉, $\mathrm{P}(X \ge 55)=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(Y \ge k)$이므로

$\mathrm{P}(Y \ge k)=2\mathrm{P}(X \ge 55)=2 \times 0.14=0.28$에서

$\mathrm{P}(Y \ge k)=\mathrm{P}\left(Z_Y \ge \dfrac{k-50.1}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_Y \ge 0)-\mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{k-50.1}{5}\right)$
$=0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{k-50.1}{5}\right)=0.28$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{k-50.1}{5}\right)=0.22$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.58)=0.22$이므로

$\dfrac{k-50.1}{5}=0.58$, $k-50.1=2.9$ $\quad \therefore k=53$ 답 **53**

0526 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=150 \times \dfrac{3}{5}=90$

$\mathrm{V}(X)=150 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5}=36$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-90}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(96 \le X \le 105)=\mathrm{P}\left(\dfrac{96-90}{6} \le Z \le \dfrac{105-90}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(1 \le Z \le 2.5)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.4938-0.3413$
$=0.1525$ 답 ②

0527 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=72 \times \dfrac{2}{3}=48$

$\mathrm{V}(X)=72 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3}=16$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-48}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X \le 52)=\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{52-48}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \le 1)$
$=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.5+0.3413$
$=0.8413$ 답 ⑤

0528 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225,\ \dfrac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=225 \times \dfrac{4}{5}=180$

$\mathrm{V}(X)=225 \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{5}=36$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 6^2)$을 따른다.

$\therefore a=180$, $b=36$ ㉮

이때 $Z=\dfrac{X-180}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(168 \le X \le 180)=\mathrm{P}\left(\dfrac{168-180}{6} \le Z \le \dfrac{180-180}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 0)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$\therefore c=2$ ㉯

$\therefore a+b+c=180+36+2=218$ ㉰

답 **218**

단계	채점요소	배점
㉮	a, b의 값 구하기	40 %
㉯	c의 값 구하기	50 %
㉰	$a+b+c$의 값 구하기	10 %

0529 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{5}{6}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{5}{6}=150$

$\mathrm{V}(X)=180\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=25$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-150}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq160)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{160-150}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq2)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 **0.0228**

0530 주사위를 720번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120$

$\mathrm{V}(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(130\leq X\leq140)&=\mathrm{P}\left(\frac{130-120}{10}\leq Z\leq\frac{140-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(1\leq Z\leq2)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 ①

0531 도보로 등교하는 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=192\times\frac{1}{4}=48$

$\mathrm{V}(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq57)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{57-48}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 **0.0668**

0532 A 후보를 지지하는 유권자의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(600,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=600\times\frac{2}{5}=240$

$\mathrm{V}(X)=600\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=144$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-240}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq264)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{264-240}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\geq2)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

0533 예약을 취소하는 승객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.2)$를 따르므로

…… ㉮

$\mathrm{E}(X)=400\times0.2=80$

$\mathrm{V}(X)=400\times0.2\times0.8=64$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르므로

…… ㉯

$Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

탑승객이 정원을 초과하지 않으려면 예약을 취소하는 승객이 $400-340=60$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq60)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{60-80}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq-2.5)=\mathrm{P}(Z\leq2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.5)\\&=0.5+0.4938=0.9938\end{aligned}$$

…… ㉰

답 **0.9938**

단계	채점요소	배점
㉮	확률변수 X를 정하고, X가 따르는 이항분포 구하기	20%
㉯	확률변수 X가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	30%
㉰	탑승객이 정원을 초과하지 않을 확률 구하기	50%

0534 10점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(448,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=448\times\frac{1}{8}=56$

$\mathrm{V}(X)=448\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=49$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 7^2)$을 따른다.

한편, 448번의 시행에서 1점을 잃는 횟수는 $448-X$이므로 245점 이상을 얻으려면

$10X-(448-X)\geq 245$

$11X\geq 693 \qquad \therefore X\geq 63$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 63)&=P\left(Z\geq \frac{63-56}{7}\right)=P(Z\geq 1)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 **0.1587**

0535 맞히는 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\geq a)=0.02$에서

$$\begin{aligned}P(X\geq a)&=P\left(Z\geq\frac{a-20}{4}\right)\\&=P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)\\&=0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.02\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.48$

이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.48$이므로

$\frac{a-20}{4}=2,\ a-20=8 \qquad \therefore a=28$

답 **28**

0536 확률변수 X가 이항분포 $B\left(1458, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=1458\times\frac{1}{3}=486$

$V(X)=1458\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=324$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(486, 18^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-486}{18}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\geq a)=0.0668$에서

$$\begin{aligned}P(X\geq a)&=P\left(Z\geq\frac{a-486}{18}\right)\\&=P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-486}{18}\right)\\&=0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-486}{18}\right)=0.0668\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-486}{18}\right)=0.4332$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a-486}{18}=1.5,\ a-486=27 \qquad \therefore a=513$

답 ③

0537 확률변수 X는 이항분포 $B(2500, 0.02)$를 따르므로

$E(X)=2500\times 0.02=50$

$V(X)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(50, 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-50}{7}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(k\leq X\leq 57)=0.6826$에서

$$\begin{aligned}P(k\leq X\leq 57)&=P\left(\frac{k-50}{7}\leq Z\leq\frac{57-50}{7}\right)\\&=P\left(\frac{k-50}{7}\leq Z\leq 1\right)\\&=P\left(\frac{k-50}{7}\leq Z\leq 0\right)+P(0\leq Z\leq 1)\\&=P\left(0\leq Z\leq -\frac{k-50}{7}\right)+0.3413=0.6826\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq -\frac{k-50}{7}\right)=0.3413$

이때 $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$-\frac{k-50}{7}=1,\ k-50=-7 \qquad \therefore k=43$

답 **43**

유형 up

본문 87쪽

0538 현이네 반 학생들의 국어, 영어, 수학 성적을 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $N(80, 6^2)$, $N(55, 15^2)$, $N(65, 8^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-80}{6},\ Z_B=\frac{X_B-55}{15},\ Z_C=\frac{X_C-65}{8}$

로 놓으면 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 학생이 현이보다 각 과목의 성적이 높을 확률은 각각

$P(X_A>86)=P\left(Z_A>\frac{86-80}{6}\right)=P(Z_A>1)$

$P(X_B>85)=P\left(Z_B>\frac{85-55}{15}\right)=P(Z_B>2)$

$P(X_C>80)=P\left(Z_C>\frac{80-65}{8}\right)=P\left(Z_C>\frac{15}{8}\right)$

즉, $P(Z_B>2)<P\left(Z_C>\frac{15}{8}\right)<P(Z_A>1)$이므로

$P(X_B>85)<P(X_C>80)<P(X_A>86)$

따라서 현이의 성적을 반 전체의 성적과 비교할 때, 상대적으로 가장 성적이 좋은 과목은 영어이다.

답 영어

확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 현이의 성적이 높다.

0539 확률변수 X, Y, W는 각각 정규분포 $N(42, 4^2)$, $N(37, 5^2)$, $N(40, 2^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-42}{4},\ Z_Y=\frac{Y-37}{5},\ Z_W=\frac{W-40}{2}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y, Z_W는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$a=\mathrm{P}(X\ge 45)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{45-42}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{3}{4}\right)$

$b=\mathrm{P}(Y\ge 42)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{42-37}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)$

$c=\mathrm{P}(W\le 39)=\mathrm{P}\left(Z_W\le\frac{39-40}{2}\right)$

$\quad=\mathrm{P}\left(Z_W\le -\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_W\ge\frac{1}{2}\right)$

이때 $\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)<\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{3}{4}\right)<\mathrm{P}\left(Z_W\ge\frac{1}{2}\right)$이므로

$b<a<c$ 답 ③

0540 성희네 반 학생들의 수학, 영어, 국어, 과학 성적을 각각 확률변수 X_{A}, X_{B}, X_{C}, X_{D}라 하면 X_{A}, X_{B}, X_{C}, X_{D}는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(83,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(78,\ 6^2)$, $\mathrm{N}(68,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(73,\ 5^2)$을 따르므로

$Z_{\mathrm{A}}=\frac{X_{\mathrm{A}}-83}{2}$, $Z_{\mathrm{B}}=\frac{X_{\mathrm{B}}-78}{6}$,

$Z_{\mathrm{C}}=\frac{X_{\mathrm{C}}-68}{4}$, $Z_{\mathrm{D}}=\frac{X_{\mathrm{D}}-73}{5}$

으로 놓으면 Z_{A}, Z_{B}, Z_{C}, Z_{D}는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 다른 학생이 성희보다 수학, 영어, 국어, 과학 성적이 높을 확률은 각각

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{A}}>86)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}}>\frac{86-83}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}}>\frac{3}{2}\right)$

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{B}}>81)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}}>\frac{81-78}{6}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}}>\frac{1}{2}\right)$

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{C}}>76)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{C}}>\frac{76-68}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_{\mathrm{C}}>2)$

$\mathrm{P}(X_{\mathrm{D}}>78)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{D}}>\frac{78-73}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_{\mathrm{D}}>1)$

즉, $\mathrm{P}(Z_{\mathrm{C}}>2)<\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}}>\frac{3}{2}\right)<\mathrm{P}(Z_{\mathrm{D}}>1)<\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}}>\frac{1}{2}\right)$이므로 $\mathrm{P}(X_{\mathrm{C}}>76)<\mathrm{P}(X_{\mathrm{A}}>86)<\mathrm{P}(X_{\mathrm{D}}>78)<\mathrm{P}(X_{\mathrm{B}}>81)$

ㄱ. 수학 성적이 과학 성적보다 상대적으로 좋다.

ㄴ. 국어 성적이 가장 낮게 나왔으나 수학 성적보다는 상대적으로 좋다.

ㄷ. 국어 성적이 상대적으로 가장 좋고, 영어 성적이 상대적으로 가장 나쁘다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0541 1반, 2반, 3반 학생들의 봉사 시간을 각각 확률변수 X_1, X_2, X_3이라 하면 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(46,\ 7^2)$, $\mathrm{N}(39,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X_1-40}{3}$, $Z_2=\frac{X_2-46}{7}$, $Z_3=\frac{X_3-39}{4}$

로 놓으면 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 1반의 다른 학생이 A보다 봉사 시간이 길 확률은

$\mathrm{P}(X_1>42)=\mathrm{P}\left(Z_1>\frac{42-40}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_1>\frac{2}{3}\right)$

2반의 다른 학생이 B보다 봉사 시간이 길 확률은

$\mathrm{P}(X_2>47)=\mathrm{P}\left(Z_2>\frac{47-46}{7}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2>\frac{1}{7}\right)$

3반의 다른 학생이 C보다 봉사 시간이 길 확률은

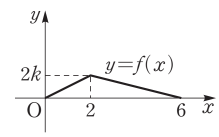
$\mathrm{P}(X_3>49)=\mathrm{P}\left(Z_3>\frac{49-39}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z_3>\frac{5}{2}\right)$

따라서 A, B, C를 각각 자기 반에서 상대적으로 봉사 시간이 긴 학생부터 차례대로 나열하면 C, A, B이다. 답 ④

시험에 꼭 나오는 문제

본문 88~91쪽

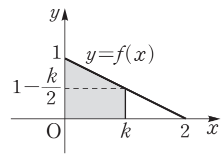
0542 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 6\times 2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

0543 $\mathrm{P}(X\le k)$는 오른쪽 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로



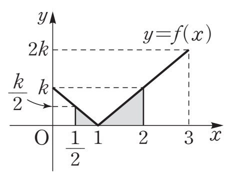
$\mathrm{P}(X\le k)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{k}{2}+1\right)\times k$

$\qquad=k-\frac{k^2}{4}$

즉, $k-\frac{k^2}{4}=\frac{3}{4}$이므로 $k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0 \qquad \therefore k=1\ (\because 0<k<2)$ 답 ③

0544 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 1\times k+\frac{1}{2}\times 2\times 2k=1$

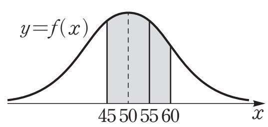
$\frac{5}{2}k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)$는 위의 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$ 답 ③

0545 평균이 클수록 곡선은 오른쪽에 위치하고, 표준편차가 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지면서 옆으로 퍼진 모양이 되므로 두 과목의 정규분포곡선으로 알맞은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

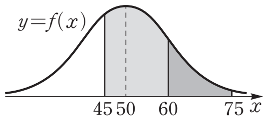
0546 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면



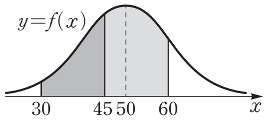
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=50$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(45 \le X \le 60)$
$= \mathrm{P}(45 \le X \le 50) + \mathrm{P}(50 \le X \le 55) + \mathrm{P}(55 \le X \le 60)$
$= \mathrm{P}(50 \le X \le 55) + \mathrm{P}(50 \le X \le 55) + \mathrm{P}(55 \le X \le 60)$
$= 2\mathrm{P}(50 \le X \le 55) + \mathrm{P}(55 \le X \le 60)$
$> 2\mathrm{P}(50 \le X \le 55)$

ㄴ. [반례] $a=15$일 때,
$\mathrm{P}(45 \le X \le 60)$
$> \mathrm{P}(60 \le X \le 75)$



ㄷ. [반례] $a=15$일 때,
$\mathrm{P}(45 \le X \le 60)$
$> \mathrm{P}(30 \le X \le 45)$



따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0547 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 조건 (가)에서

$\mathrm{E}(2Y-1) = 2\mathrm{E}(Y) - 1 = 9$
$\therefore \mathrm{E}(Y) = 5$
$\sigma(2Y-1) = 2\sigma(Y) = 2$
$\therefore \sigma(Y) = 1$
$\therefore m=5, \sigma=1$

즉, 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(4, 3^2)$, $\mathrm{N}(5, 1^2)$을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-4}{3},\ Z_Y = \frac{Y-5}{1}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X \le k) = \mathrm{P}(Y \ge 4)$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z_X \le \frac{k-4}{3}\right) = \mathrm{P}\left(Z_Y \ge \frac{4-5}{1}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(Z_X \le \frac{k-4}{3}\right) = \mathrm{P}(Z_Y \ge -1)$$

따라서 $\frac{k-4}{3} = 1$이므로 $k=7$ 답 **7**

0548 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(40, 4^2)$을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-m}{\sigma},\ Z_Y = \frac{Y-40}{4}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(m-4 \le X \le m+4) = \mathrm{P}(32 \le Y \le 48)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{m-4-m}{\sigma} \le Z_X \le \frac{m+4-m}{\sigma}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{32-40}{4} \le Z_Y \le \frac{48-40}{4}\right)$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma} \le Z_X \le \frac{4}{\sigma}\right) = \mathrm{P}(-2 \le Z_Y \le 2)$$

따라서 $\frac{4}{\sigma} = 2$이므로 $\sigma = 2$

$\therefore \mathrm{V}(2X+1) = 2^2\mathrm{V}(X) = 2^2 \times 2^2 = 16$ 답 **16**

0549 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{3}{2}, 2^2\right)$을 따르므로

$Z = \dfrac{X - \frac{3}{2}}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$H(0) = \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{0-\frac{3}{2}}{2} \le Z \le \frac{1-\frac{3}{2}}{2}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-0.75 \le Z \le -0.25)$$
$$= \mathrm{P}(0.25 \le Z \le 0.75)$$
$$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.75) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.25)$$
$$= 0.2734 - 0.0987 = 0.1747$$
$$H(2) = \mathrm{P}(2 \le X \le 3)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{2-\frac{3}{2}}{2} \le Z \le \frac{3-\frac{3}{2}}{2}\right)$$
$$= \mathrm{P}(0.25 \le Z \le 0.75)$$
$$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.75) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.25)$$
$$= 0.2734 - 0.0987 = 0.1747$$
$$\therefore H(0) + H(2) = 0.1747 + 0.1747$$
$$= 0.3494$$

답 ①

0550 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50, 4^2)$을 따르므로

$Z = \dfrac{X-50}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(X \ge a) = 0.6915$에서

$$\mathrm{P}(X \ge a) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{a-50}{4}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{a-50}{4} \le Z \le 0\right) + \mathrm{P}(Z \ge 0)$$
$$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le -\frac{a-50}{4}\right) + 0.5 = 0.6915$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le -\frac{a-50}{4}\right) = 0.1915$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5) = 0.1915$이므로

$-\frac{a-50}{4} = 0.5,\ a-50 = -2 \quad \therefore a=48$ 답 **48**

0551 쿠키 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 2^2)$을 따르므로 $Z = \dfrac{X-30}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(29 \le X \le 32) = \mathrm{P}\left(\frac{29-30}{2} \le Z \le \frac{32-30}{2}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1)$$
$$= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$$
$$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$$
$$= 0.1915 + 0.3413$$
$$= 0.5328$$

답 ②

0552 음료 한 병의 양을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-250}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 이 공장에서 생산된 음료 한 병이 불량품으로 판정될 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 245)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{245-250}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

따라서 임의로 선택한 3병의 음료가 모두 불량품일 확률은
$0.16\times 0.16\times 0.16=0.16^3$ 답 ⑤

0553 과자 A, B의 길이를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ {\sigma_1}^2)$, $\mathrm{N}(m+25,\ {\sigma_2}^2)$을 따르므로
$Z_X=\dfrac{X-m}{\sigma_1}$, $Z_Y=\dfrac{Y-(m+25)}{\sigma_2}$
로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
과자 A의 길이가 $m+10$ 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge m+10)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{m+10-m}{\sigma_1}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{10}{\sigma_1}\right)\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

과자 B의 길이가 $m+10$ 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le m+10)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{m+10-(m+25)}{\sigma_2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le -\frac{15}{\sigma_2}\right)\qquad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

이때 ㉠, ㉡이 서로 같으므로

$$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{10}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le -\frac{15}{\sigma_2}\right)$$

따라서 $\dfrac{10}{\sigma_1}=\dfrac{15}{\sigma_2}$이므로 $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}=\dfrac{3}{2}$ 답 ①

0554 지원자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(389,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-389}{12}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
합격하기 위한 최저 점수가 407점이므로 합격할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 407)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{407-389}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

$\therefore n=600\times 0.07=42$ 답 **42**

0555 참가자들의 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(160,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-160}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
기록이 a분 이하일 때 상위 20 % 이내에 든다고 하면
$\mathrm{P}(X\le a)=\dfrac{20}{100}=0.2$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le a)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{a-160}{20}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge -\frac{a-160}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le -\frac{a-160}{20}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le -\frac{a-160}{20}\right)=0.2\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le -\dfrac{a-160}{20}\right)=0.3$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로
$-\dfrac{a-160}{20}=0.84$, $a-160=-16.8$
$\therefore a=143.2$
따라서 기록이 143.2분 이하이면 상위 20 % 이내에 든다.
답 **143.2분**

0556 맞힌 문제 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(256,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=256\times\dfrac{1}{2}=128$
$\mathrm{V}(X)=256\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=64$
즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(128,\ 8^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{X-128}{8}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 120)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{120-128}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1)=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 **0.8413**

0557 주사위를 162번 던질 때, 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=162\times\dfrac{1}{3}=54$
$\mathrm{V}(X)=162\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=36$
즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따른다.
한편, 162번의 게임에서 300원을 내야 하는 횟수는 $162-X$이므로 상금으로 25500원 이상을 받으려면
$1000X-300(162-X)\ge 25500$
$1300X\ge 74100\qquad \therefore X\ge 57$
따라서 구하는 확률은

$$P(X\ge 57)=P\left(Z\ge\frac{57-54}{6}\right)=P(Z\ge 0.5)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5-0.1915=0.3085$$

답 **0.3085**

0558 확률변수 X는 이항분포 $B\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=600\times\frac{3}{5}=360$

$V(X)=600\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=144$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(360,\ 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-360}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(|X-360|\ge a)=0.14$에서

$$P(|X-360|\ge a)=P\left(\left|\frac{X-360}{12}\right|\ge\frac{a}{12}\right)$$
$$=P\left(|Z|\ge\frac{a}{12}\right)$$
$$=P\left(Z\le-\frac{a}{12}\right)+P\left(Z\ge\frac{a}{12}\right)$$
$$=2P\left(Z\ge\frac{a}{12}\right)$$
$$=2\left\{P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a}{12}\right)\right\}$$
$$=2\left\{0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a}{12}\right)\right\}=0.14$$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a}{12}\right)=0.43$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{a}{12}=1.5 \qquad \therefore a=18$

답 ①

0559 확률변수 X가 정규분포 $N(100,\ 20^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-100}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(60\le X\le a)=0.9759$에서

$$P(60\le X\le a)=P\left(\frac{60-100}{20}\le Z\le\frac{a-100}{20}\right)$$
$$=P\left(-2\le Z\le\frac{a-100}{20}\right)$$

·· ㉮

$$=P(-2\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{a-100}{20}\right)$$
$$=P(0\le Z\le 2)+P\left(0\le Z\le\frac{a-100}{20}\right)$$
$$=0.4772+P\left(0\le Z\le\frac{a-100}{20}\right)=0.9759$$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-100}{20}\right)=0.4987$

·· ㉯

이때 $P(0\le Z\le 3)=0.4987$이므로

$\frac{a-100}{20}=3,\ a-100=60 \qquad \therefore a=160$

·· ㉰

답 **160**

단계	채점요소	배점
㉮	$P(60\le X\le a)$를 Z에 대한 확률로 나타내기	30 %
㉯	$P(60\le X\le a)=0.9759$를 표준정규분포표를 이용할 수 있도록 변형하기	40 %
㉰	a의 값 구하기	30 %

0560 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

·· ㉮

$E(X)=450\times\frac{1}{3}=150$

$V(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 10^2)$을 따른다.

·· ㉯

따라서 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(120\le X\le 170)=P\left(\frac{120-150}{10}\le Z\le\frac{170-150}{10}\right)$$
$$=P(-3\le Z\le 2)$$
$$=P(-3\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 3)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.4987+0.4772=0.9759$$

·· ㉰

답 **0.9759**

단계	채점요소	배점
㉮	확률변수 X가 따르는 이항분포 구하기	20 %
㉯	확률변수 X가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	30 %
㉯	$P(120\le X\le 170)$ 구하기	50 %

0561 2개의 동전을 동시에 던질 때, 2개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

·· ㉮

$E(X)=192\times\frac{1}{4}=48$

$V(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(48,\ 6^2)$을 따른다.

·· ㉯

따라서 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(54 \le X \le 60) = \mathrm{P}\left(\frac{54-48}{6} \le Z \le \frac{60-48}{6}\right)$$
$$= \mathrm{P}(1 \le Z \le 2)$$
$$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$$
$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

········· ㉰

답 **0.1359**

단계	채점요소	배점
㉮	확률변수 X가 따르는 이항분포 구하기	20 %
㉯	확률변수 X가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	30 %
㉰	$\mathrm{P}(54 \le X \le 60)$ 구하기	50 %

0562 방문하는 고객 중 실제로 자동차를 빌리는 고객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

········· ㉮

$$\mathrm{E}(X) = 400 \times \frac{1}{2} = 200$$
$$\mathrm{V}(X) = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200, 10^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X-200}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

········· ㉯

회사가 준비하는 자동차를 k대라 하면 $\mathrm{P}(X \le k) \ge 0.95$에서

$$\mathrm{P}(X \le k) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{k-200}{10}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-200}{10}\right)$$
$$= 0.5 + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-200}{10}\right) \ge 0.95$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-200}{10}\right) \ge 0.45$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.60) = 0.45$이므로

$$\frac{k-200}{10} \ge 1.60,\ k-200 \ge 16 \qquad \therefore k \ge 216$$

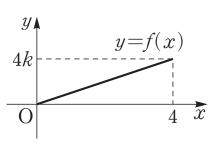
따라서 최소 216대의 자동차를 준비해야 한다.

········· ㉰

답 **216대**

단계	채점요소	배점
㉮	확률변수 X를 정하고, X가 따르는 이항분포 구하기	20 %
㉯	확률변수 X가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	30 %
㉰	준비해야 하는 자동차가 최소 몇 대인지 구하기	50 %

0563 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4k = 1 \qquad \therefore k = \frac{1}{8}$$

한편, t에 대한 이차방정식 $t^2+2Xt+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면 $D \ge 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = X^2 - 1 \ge 0,\ (X+1)(X-1) \ge 0$$
$$\therefore X \le -1 \text{ 또는 } X \ge 1$$

이때 $0 \le X \le 4$이므로 $1 \le X \le 4$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(1 \le X \le 4) = 1 - \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{16}$$

답 $\mathbf{\frac{15}{16}}$

0564 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $\mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{4}\right)$을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-0}{\sigma},\ Z_Y = \frac{Y-0}{\frac{\sigma}{2}}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|X| \le a) = \mathrm{P}(|Y| \le b)$에서

$$\mathrm{P}(-a \le X \le a) = \mathrm{P}(-b \le Y \le b)$$
$$2\mathrm{P}(0 \le X \le a) = 2\mathrm{P}(0 \le Y \le b)$$
$$\mathrm{P}(0 \le X \le a) = \mathrm{P}(0 \le Y \le b)$$
$$\mathrm{P}\left(0 \le Z_X \le \frac{a-0}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \frac{b-0}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z_X \le \frac{a}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \frac{2b}{\sigma}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 a, b는 양수이므로

$$\frac{a}{\sigma} = \frac{2b}{\sigma} \qquad \therefore a = 2b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

ㄱ. a, b는 양수이므로 $a = 2b > b$
  $\therefore a > b$

ㄴ. ㉡에 의하여 $\frac{a}{2} = b$이므로

$$\mathrm{P}\left(Y > \frac{a}{2}\right) = \mathrm{P}(Y > b) = \mathrm{P}\left(Z_Y > \frac{b-0}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(Z_Y > \frac{2b}{\sigma}\right)$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(Z > \frac{2b}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Y > \frac{a}{2}\right)$$

ㄷ. $\mathrm{P}(Y \le b) = \mathrm{P}\left(Z_Y \le \frac{b-0}{\frac{\sigma}{2}}\right) = \mathrm{P}\left(Z_Y \le \frac{2b}{\sigma}\right)$

$$= \mathrm{P}(Z_Y \le 0) + \mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \frac{2b}{\sigma}\right)$$
$$= 0.5 + \mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \frac{2b}{\sigma}\right) = 0.7$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \frac{2b}{\sigma}\right) = 0.2$$

$\therefore \mathrm{P}(|X| \le a) = \mathrm{P}(-a \le X \le a)$

$= 2\mathrm{P}(0 \le X \le a)$

$= 2\mathrm{P}\left(0 \le Z_X \le \dfrac{a}{\sigma}\right)$

$= 2\mathrm{P}\left(0 \le Z_Y \le \dfrac{2b}{\sigma}\right)$ ($\because$ ㉠)

$= 2 \times 0.2 = 0.4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0565 $\mathrm{E}(X)=32$, $\sigma(X)=4$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-24)=2\mathrm{E}(X)-24=2\times32-24=40$

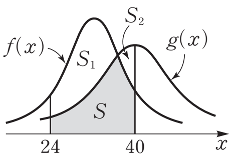
$\sigma(Y)=\sigma(2X-24)=2\sigma(X)=2\times4=8$

즉, 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(40,\ 8^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-32}{4}$, $Z_Y=\dfrac{Y-40}{8}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이를 S라 하면



$S_1=\mathrm{P}(24\le X\le40)-S$

$S_2=\mathrm{P}(24\le Y\le40)-S$

$\therefore S_1-S_2=\{\mathrm{P}(24\le X\le40)-S\}-\{\mathrm{P}(24\le Y\le40)-S\}$

$=\mathrm{P}(24\le X\le40)-\mathrm{P}(24\le Y\le40)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{24-32}{4}\le Z_X\le\dfrac{40-32}{4}\right)$

$-\mathrm{P}\left(\dfrac{24-40}{8}\le Z_Y\le\dfrac{40-40}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z_X\le2)-\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le0)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$ 답 **0.4772**

수학Ⅰ, Ⅱ를 학습한 학생들을 위한 확률분포

본문 92~93쪽

0566 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)=1$

$a^2\log\dfrac{2}{1}+a^2\log\dfrac{3}{2}+a^2\log\dfrac{4}{3}+\cdots+a^2\log\dfrac{10}{9}=1$

$a^2\log\left(\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{10}{9}\right)=1$

$a^2\log10=1\qquad\therefore a^2=1$

$\therefore \mathrm{P}(X=5)=\log\dfrac{5}{4}$ 답 ②

참고 $a>0$, $a\ne1$, $x>0$, $y>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (단, n은 실수)

0567 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{10}+a+b+\dfrac{2}{5}=1\qquad\therefore a+b=\dfrac{1}{2}$ ······ ㉠

a, b, $\dfrac{2}{5}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+\dfrac{2}{5}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{5}$, $b=\dfrac{3}{10}$ 답 $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{5},\ b=\dfrac{3}{10}}$

참고 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\dfrac{a+c}{2}$가 성립한다.

0568 p_1, p_2, p_3, p_4가 이 순서대로 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열을 이루므로

$p_2=\dfrac{1}{3}p_1$, $p_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2p_1$, $p_4=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3p_1$

확률의 총합은 1이므로 $p_1+p_2+p_3+p_4=1$에서

$p_1+\dfrac{1}{3}p_1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2p_1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3p_1=1$

$\dfrac{40}{27}p_1=1\qquad\therefore p_1=\dfrac{27}{40}$

$\therefore \mathrm{P}(1\le X\le2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=p_1+p_2=p_1+\dfrac{1}{3}p_1=\dfrac{4}{3}p_1$

$=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{27}{40}=\dfrac{9}{10}$ 답 ⑤

참고 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2=ac$가 성립한다.

0569 주어진 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{100}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}$

$={}_{100}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{2}=50$

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=25$

$\sigma(X)=\sqrt{25}=5$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\sigma(X)=50+5=55$ 답 **55**

0570 ${}_{144}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\left(\dfrac{3}{4}\right)^{144-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 144)$은 이항분포 $\mathrm{B}\left(144,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대한 확률 $\mathrm{P}(X=x)$를 뜻하므로

$\sum_{x=0}^{144} x^2 {}_{144}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{144-x} = \sum_{x=0}^{144} x^2 P(X=x) = E(X^2)$

이때 $E(X)=144\times\frac{1}{4}=36$, $V(X)=144\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=27$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X)+\{E(X)\}^2 \\ &= 27+36^2=1323 \end{aligned}$$

답 ③

0571 확률변수 X는 이항분포 $B\left(90, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=90\times\frac{1}{3}=30$

$V(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X)+\{E(X)\}^2 \\ &= 20+30^2=920 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{x=0}^{90}(x^2-x)P(X=x) &= \sum_{x=0}^{90} x^2 P(X=x) - \sum_{x=0}^{90} xP(X=x) \\ &= E(X^2)-E(X) \\ &= 920-30=890 \end{aligned}$$

답 **890**

0572 $$\begin{aligned} P\left(0\le X\le\frac{1}{3}\right) &= \int_0^{\frac{1}{3}} 6x(1-x)dx \\ &= 6\int_0^{\frac{1}{3}}(x-x^2)dx \\ &= 6\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= 6\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{81}\right)=\frac{7}{27} \end{aligned}$$

답 $\mathbf{\frac{7}{27}}$

0573 $$\begin{aligned} P(0\le X\le 3) &= P(0\le X\le 2)+P(2\le X\le 3) \\ &= \int_0^2 \frac{1}{6}x\,dx+\int_2^3 \frac{1}{3}dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

0574 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\begin{aligned} \int_2^4(kx-1)dx &= \left[\frac{k}{2}x^2-x\right]_2^4=(8k-4)-(2k-2) \\ &= 6k-2=1 \end{aligned}$$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(2\le X\le\frac{5}{2}\right) &= \int_2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_2^{\frac{5}{2}} \\ &= \left(\frac{25}{16}-\frac{5}{2}\right)-(1-2)=\frac{1}{16} \end{aligned}$$

답 ①

0575 $E(X)=\int_0^1(x\times 2x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^1(x^2\times 2x)dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\int_0^1 2x^3dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18} \end{aligned}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

답 $\mathbf{E(X)=\frac{2}{3},\ \sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{6}}$

0576 $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^1\left\{x\times\frac{3}{4}(1-x^2)\right\}dx \\ &= \frac{3}{4}\int_{-1}^1 \underbrace{(x-x^3)}_{\text{기함수}}dx=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-1}^1\left\{x^2\times\frac{3}{4}(1-x^2)\right\}dx-0^2=\frac{3}{4}\int_{-1}^1(x^2-x^4)dx \\ &= 2\times\frac{3}{4}\int_0^1(x^2-x^4)dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$\therefore V(5X+2)=5^2V(X)=25\times\frac{1}{5}=5$

답 ④

0577 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

${}_{100}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 100)$은 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대한 확률 $P(X=x)$를 뜻하므로

$$\begin{aligned} & \sum_{x=16}^{a} {}_{100}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x} \\ &= \sum_{x=16}^{a} P(X=x)=P(16\le X\le a) \\ &= P\left(\frac{16-20}{4}\le Z\le\frac{a-20}{4}\right) \\ &= P\left(-1\le Z\le\frac{a-20}{4}\right) \\ &= P(0\le Z\le 1)+P\left(0\le Z\le\frac{a-20}{4}\right) \\ &= 0.34+P\left(0\le Z\le\frac{a-20}{4}\right)\le 0.82 \end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-20}{4}\right)\le 0.48$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로 $\frac{a-20}{4}\le 2$ $\quad\therefore a\le 28$

따라서 a의 최댓값은 28이다.

답 **28**

07 통계적 추정

교과서 문제 정/복/하/기

본문 95쪽

0578 ㄱ, ㄴ. 전수조사가 어려우므로 표본조사가 적합하다.
ㄷ. 전수조사가 가능하다.
따라서 표본조사가 적합한 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 **ㄱ, ㄴ**

0579 (1) 4개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$
(2) 4개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 순열의 수와 같으므로 ${}_4P_2=4\times3=12$

답 (1) **16** (2) **12**

0580 (1) 모집단의 숫자 1, 3, 5 중에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$
카드에 적힌 숫자의 합은 오른쪽 표와 같으므로

+	1	3	5
1	2	4	6
3	4	6	8
5	6	8	10

$\overline{X}=2$인 경우는 $(1, 3)$, $(3, 1)$의 2가지
$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{2}{9}$
$\overline{X}=4$인 경우는 $(3, 5)$, $(5, 3)$의 2가지
$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=4)=\dfrac{2}{9}$
$\overline{X}=5$인 경우는 $(5, 5)$의 1가지
$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=5)=\dfrac{1}{9}$
따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=1\times\dfrac{1}{9}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{2}{9}+5\times\dfrac{1}{9}=3$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$
$=\left(1^2\times\dfrac{1}{9}+2^2\times\dfrac{2}{9}+3^2\times\dfrac{1}{3}+4^2\times\dfrac{2}{9}+5^2\times\dfrac{1}{9}\right)-3^2$
$=\dfrac{31}{3}-9=\dfrac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

답 (1) **풀이 참조**
(2) $\mathbf{E}(\overline{X})=3$, $\mathbf{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{3}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

0581 모평균이 30, 모표준편차가 $\sqrt{81}=9$, 표본의 크기가 9이므로
(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=30$
(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{9^2}{9}=9$
(3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=3$

답 (1) **30** (2) **9** (3) **3**

0582 모평균이 60, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 16이므로
(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=60$
(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{8^2}{16}=4$
(3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{8}{\sqrt{16}}=2$

답 (1) **60** (2) **4** (3) **2**

0583 모평균이 300, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 25이므로
(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=300$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{10^2}{25}=4$
(2) 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(300, 2^2)$을 따른다.
(3) $Z=\dfrac{\overline{X}-300}{2}$
(4) $\mathrm{P}(\overline{X}\ge302)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{302-300}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge1)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$

답 (1) $\mathbf{E}(\overline{X})=300$, $\mathbf{V}(\overline{X})=4$ (2) $\mathbf{N}(300, 2^2)$
(3) $Z=\dfrac{\overline{X}-300}{2}$ (4) **0.1587**

0584 $\mathrm{E}(\overline{X})=600$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{24^2}{36}=16$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(600, 4^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-600}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
(1) $\mathrm{P}(\overline{X}\le592)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{592-600}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le-2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge2)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$
(2) $\mathrm{P}(590\le\overline{X}\le606)=\mathrm{P}\left(\dfrac{590-600}{4}\le Z\le\dfrac{606-600}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le1.5)$
$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=0.4938+0.4332$
$=0.927$

답 (1) **0.0228** (2) **0.927**

0585 (1) 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$60-1.96\times\frac{6}{\sqrt{100}}\le m\le 60+1.96\times\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $58.824\le m\le 61.176$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$60-2.58\times\frac{6}{\sqrt{100}}\le m\le 60+2.58\times\frac{6}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $58.452\le m\le 61.548$

답 (1) $\mathbf{58.824\le m\le 61.176}$ (2) $\mathbf{58.452\le m\le 61.548}$

0586 (1) 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$100-1.96\times\frac{10}{\sqrt{400}}\le m\le 100+1.96\times\frac{10}{\sqrt{400}}$$

$\therefore$ $99.02\le m\le 100.98$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$100-2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}\le m\le 100+2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}$$

$\therefore$ $98.71\le m\le 101.29$

답 (1) $\mathbf{99.02\le m\le 100.98}$ (2) $\mathbf{98.71\le m\le 101.29}$

유형 익/히/기

본문 96~102쪽

0587 모평균이 20, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 25이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=4$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=4+20^2=404$

답 **404**

0588 모평균이 200, 모분산이 144, 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=200$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{144}{4}=36$

$\therefore$ $\mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=200+36=236$

답 ③

0589 모평균이 50, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=50$ $\quad\therefore$ $m=50$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{8^2}{n}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ $n=128$

$\therefore$ $m+n=50+128=178$

답 **178**

0590 모표준편차가 60, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{60^2}{n}=\frac{3600}{n}$

$\mathrm{V}(\overline{X})\le 10$이므로 $\frac{3600}{n}\le 10$

$\frac{n}{3600}\ge\frac{1}{10}$ $\quad\therefore$ $n\ge 360$

따라서 n의 최솟값은 360이다.

답 **360**

0591 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1$ $\quad\therefore$ $a=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=0$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}-0^2=\frac{1}{2}$

이때 표본의 크기가 10이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=0$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{1}{2}}{10}=\frac{1}{20}$

$\therefore$ $\mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=0+\frac{1}{20}=\frac{1}{20}$

답 $\mathbf{\frac{1}{20}}$

0592 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{2}{5}=3$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{2}{5}-3^2$

$=1$

이때 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{n}$

$\mathrm{E}(\overline{X})\mathrm{V}(\overline{X})=1$이므로

$3\times\frac{1}{n}=1$ $\quad\therefore$ $n=3$

답 **3**

0593 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{5}{9}}{4}=\frac{5}{36}$ $\quad\therefore$ $\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{5}{36}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$

$\therefore$ $\sigma(6\overline{X})=6\sigma(\overline{X})=6\times\frac{\sqrt{5}}{6}=\sqrt{5}$

답 $\mathbf{\sqrt{5}}$

0594 상자에서 임의추출한 한 장의 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=2$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-2^2=\frac{10}{3}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{10}{3}}{2}=\frac{5}{3}$ 답 ⑤

0595 주머니에서 임의추출한 한 개의 구슬에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=\frac{5}{4}$

이때 표본의 크기가 3이므로

$E(\overline{X})=\frac{5}{2}$, $V(\overline{X})=\frac{\frac{5}{4}}{3}=\frac{5}{12}$

따라서

$E(2\overline{X}-3)=2E(\overline{X})-3=2\times\frac{5}{2}-3=2$

$V(6\overline{X})=6^2V(\overline{X})=36\times\frac{5}{12}=15$

이므로

$E(2\overline{X}-3)+V(6\overline{X})=2+15=17$ 답 **17**

0596 상자에서 임의추출한 한 개의 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

㉮

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$

$V(X)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{34}{25}$

㉯

이때 표본의 크기가 n이므로

$V(\overline{X})=\frac{34}{25n}$

㉰

$V(\overline{X})=\frac{1}{50}$이므로 $\frac{34}{25n}=\frac{1}{50}$

$\therefore n=68$

㉱

답 **68**

단계	채점요소	배점
㉮	모집단의 확률분포를 표로 나타내기	30 %
㉯	모집단의 평균, 분산 구하기	30 %
㉰	표본평균의 분산 구하기	20 %
㉱	n의 값 구하기	20 %

0597 모집단이 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(50, 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\le 45)=P\left(Z\le\frac{45-50}{2}\right)$

$=P(Z\le -2.5)$

$=P(Z\ge 2.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$ 답 **0.0062**

0598 모집단이 정규분포 $N(60, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60, \frac{10^2}{16}\right)$, 즉 $N(60, 2.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-60}{2.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(55\le\overline{X}\le 65)=P\left(\frac{55-60}{2.5}\le Z\le\frac{65-60}{2.5}\right)$

$=P(-2\le Z\le 2)$

$=2P(0\le Z\le 2)$

$=2\times 0.4772$

$=0.9544$ 답 **0.9544**

0599 모집단이 정규분포 $N(52, 18^2)$을 따르고 표본의 크기가 81이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(52, \frac{18^2}{81}\right)$, 즉 $N(52, 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-52}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(47\le\overline{X}\le50)&=\mathrm{P}\left(\frac{47-52}{2}\le Z\le\frac{50-52}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le-1)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.4938-0.3413\\&=0.1525\end{aligned}$$

답 **0.1525**

0600 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(300,\ \frac{24^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(300,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-300}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge294)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{294-300}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-2)\\&=\mathrm{P}(Z\le2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

0601 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따르고, 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\ge6)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{4}\right|\ge\frac{6}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(|Z|\ge1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1.5)+\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=2\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\}\\&=2(0.5-0.4332)\\&=0.1336\end{aligned}$$

답 **0.1336**

0602 임의추출한 비누 4개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(100,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-100}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 비누 4개의 무게가 392 g 이상 416 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(392\le4\overline{X}\le416)&=\mathrm{P}(98\le\overline{X}\le104)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{98-100}{4}\le Z\le\frac{104-100}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

따라서 5000개의 세트 중 정품으로 판정되는 것의 개수는

$5000\times0.5328=2664$

답 **2664**

0603 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10,\ \frac{2^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(10,\ \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge11)=0.1587$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge11)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.1587\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1,\ \sqrt{n}=2$

$\therefore\ n=4$

답 **4**

0604 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \frac{16^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(80,\ \left(\frac{16}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

.... ㉮

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{16}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{648}{\sqrt{n}}\right)=0.6915$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{648}{\sqrt{n}}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{648}{\sqrt{n}}-80}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le40.5-5\sqrt{n})\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le40.5-5\sqrt{n})=0.6915\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le40.5-5\sqrt{n})=0.1915$

.... ㉯

이때 $P(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$40.5-5\sqrt{n}=0.5$, $\sqrt{n}=8$

$\therefore n=64$

······························ ㉰

답 64

단계	채점요소	배점
㉮	표본평균 $\overline{X}$가 따르는 확률분포 구하기	20 %
㉯	주어진 확률을 표준정규분포표를 이용할 수 있도록 변형하기	50 %
㉰	n의 값 구하기	30 %

0605 모집단이 정규분포 $N(120, 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(120, \frac{5^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(120, \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-120}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(119\le\overline{X}\le 121)\ge 0.9$에서

$$P(119\le\overline{X}\le 121)=P\left(\frac{119-120}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{121-120}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$
$$=2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.9$$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.45$

이때 $P(0\le Z\le 1.6)=0.45$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge 1.6$, $\sqrt{n}\ge 8$

$\therefore n\ge 64$

따라서 n의 최솟값은 64이다. 답 64

0606 모집단이 정규분포 $N(60, 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60, \frac{15^2}{100}\right)$, 즉 $N(60, 1.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-60}{1.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le k)=0.0013$에서

$$P(\overline{X}\le k)=P\left(Z\le\frac{k-60}{1.5}\right)$$
$$=P\left(Z\ge-\frac{k-60}{1.5}\right)$$
$$=0.5-P\left(0\le Z\le-\frac{k-60}{1.5}\right)=0.0013$$

$\therefore P\left(0\le Z\le-\frac{k-60}{1.5}\right)=0.4987$

이때 $P(0\le Z\le 3)=0.4987$이므로

$-\frac{k-60}{1.5}=3$, $k-60=-4.5$ $\therefore k=55.5$ 답 ④

0607 모집단이 정규분포 $N(250, 14^2)$을 따르고 표본의 크기가 49이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(250, \frac{14^2}{49}\right)$, 즉 $N(250, 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-250}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge k)\le 0.0062$에서

$$P(\overline{X}\ge k)=P\left(Z\ge\frac{k-250}{2}\right)$$
$$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-250}{2}\right)\le 0.0062$$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-250}{2}\right)\ge 0.4938$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{k-250}{2}\ge 2.5$, $k-250\ge 5$ $\therefore k\ge 255$

따라서 실수 k의 최솟값은 255이다. 답 ②

0608 표본평균이 120, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$120-1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 120+1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}$

$\therefore 119.02\le m\le 120.98$ 답 ③

0609 표본평균이 10, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$10-2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}\le m\le 10+2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}$

$\therefore 8.71\le m\le 11.29$ 답 ①

0610 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

······························ ㉮

이때 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $138.24\le m\le 161.76$이므로

$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=138.24$, $\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=161.76$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x}=150$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=6$

······························ ㉯

따라서 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$150-2.58\times6\le m\le150+2.58\times6$

$\therefore\ 134.52\le m\le165.48$

······························ ㉰

따라서 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간에 속하는 정수는 135, 136, 137, ⋯, 165의 31개이다.

······························ ㉱

답 **31**

단계	채점요소	배점
㉮	모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간 구하기	25 %
㉯	표본평균 $\overline{X}$의 값과 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값 구하기	30 %
㉰	모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간 구하기	25 %
㉱	정수의 개수 구하기	20 %

0611 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{3}{\sqrt{81}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{3}{\sqrt{81}}$

$\therefore\ c=2.58\times\frac{3}{\sqrt{81}}=0.86$ 답 ①

참고 $\mathrm{P}(|Z|\le2.58)=2\mathrm{P}(0\le Z\le2.58)$
$=2\times0.495=0.99$

0612 표본평균이 66, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 25이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$66-k\frac{20}{\sqrt{25}}\le m\le66+k\frac{20}{\sqrt{25}}$

$\therefore\ 66-4k\le m\le66+4k$

모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이

$58.48\le m\le73.52$이므로

$66-4k=58.48,\ 66+4k=73.52$

$4k=7.52\qquad\therefore\ k=1.88$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.88)=0.47$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le1.88)=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.88)$
$=2\times0.47=0.94$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.94$이므로 $\alpha=94$ 답 **94**

0613 표본의 크기 225가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 3을 사용할 수 있고, 표본평균이 10이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$10-2.5\times\frac{3}{\sqrt{225}}\le m\le10+2.5\times\frac{3}{\sqrt{225}}$

$\therefore\ 9.5\le m\le10.5$ 답 ①

0614 표본의 크기 2500이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 15를 사용할 수 있고, 표본평균이 75이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$75-1.96\times\frac{15}{\sqrt{2500}}\le m\le75+1.96\times\frac{15}{\sqrt{2500}}$

$\therefore\ 74.412\le m\le75.588$ 답 ④

0615 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용할 수 있고, 표본평균이 245이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$245-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le245+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 241.08\le m\le248.92$

따라서 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간에 속하는 자연수는 242, 243, 244, ⋯, 248의 7개이다. 답 **7**

0616 표본평균이 140, 모표준편차가 15, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$140-2\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m\le140+2\times\frac{15}{\sqrt{n}}$

이때 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이

$137\le m\le143$이므로

$140-2\times\frac{15}{\sqrt{n}}=137,\ 140+2\times\frac{15}{\sqrt{n}}=143$

$2\times\frac{15}{\sqrt{n}}=3,\ \sqrt{n}=10\qquad\therefore\ n=100$ 답 ②

0617 표본평균이 30, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$30-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le30+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이

$27.85\le m\le32.15$이므로

$30-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=27.85,\ 30+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=32.15$

$2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=2.15,\ \sqrt{n}=6\qquad\therefore\ n=36$ 답 ①

0618 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}=1.96$ 답 ②

0619 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$b-a=2\times3\times\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{12}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a\le 2$이므로

$$\frac{12}{\sqrt{n}}\le 2,\ \sqrt{n}\ge 6 \qquad \therefore\ n\ge 36$$

따라서 n의 최솟값은 36이다. 답 **36**

0620 표본의 크기 121이 충분히 크므로 모평균을 추정할 때 모표준편차 대신 표본표준편차 11을 사용할 수 있다.
이 학교 남학생들의 평균 키 m cm의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\frac{11}{\sqrt{121}}=3.92$$

또, 이 학교 남학생들의 평균 키 m cm의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$d-c=2\times 2.58\times\frac{11}{\sqrt{121}}=5.16$$

$\therefore\ |(d-c)-(b-a)|=5.16-3.92=1.24$ 답 ①

0621 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 100일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=l$$

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 400일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$\begin{aligned}d-c&=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\\&=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{2\sqrt{100}}\\&=\frac{1}{2}\left(2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right)=\frac{1}{2}l\end{aligned}$$

답 ②

0622 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하자.
모표준편차가 σ, 표본의 크기가 64일 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$$

…… ㉮

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$d-c=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

…… ㉯

이때 $d-c=2(b-a)$이므로

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{64}},\ \frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ n=16$

…… ㉰

답 **16**

단계	채점요소	배점
㉮	$b-a$를 k, σ에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉯	$d-c$를 k, σ에 대한 식으로 나타내기	30 %
㉰	n의 값 구하기	30 %

0623 $\mathrm{P}(|Z|\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=2\times 0.48=0.96$이고, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 36일 때, 모평균 m의 신뢰도 96 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times 2\times\frac{2}{\sqrt{36}}=\frac{4}{3}$$

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모표준편차가 2, 표본의 크기가 36일 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$d-c=2\times k\times\frac{2}{\sqrt{36}}=\frac{2}{3}k$$

이때 $d-c=\dfrac{1}{2}(b-a)$이므로

$$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3} \qquad \therefore\ k=1$$

$\therefore\ \mathrm{P}(|Z|\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=2\times 0.34=0.68$

따라서 $\dfrac{\alpha}{100}=0.68$이므로 $\alpha=68$ 답 **68**

0624 표본평균이 $\overline{X}$, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{X}|\le 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m-\overline{X}|\le 2$이어야 하므로

$$1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le 2,\ \sqrt{n}\ge 9.8$$

$\therefore\ n\ge 96.04$

따라서 n의 최솟값은 97이다. 답 ⑤

0625 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{X}-3\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+3\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

$$-3\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 3\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{X}|\le 3\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

모평균과 표본평균의 차가 1 이하이어야 하므로

$$3\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le 1,\ \sqrt{n}\ge 18 \qquad \therefore\ n\ge 324$$

따라서 n의 최솟값은 324이다. 답 **324**

0626 표본평균을 $\overline{X}$, 모표준편차를 σ라 할 때, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{X}-2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{X}|\le 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

모평균과 표본평균의 차가 모표준편차의 $\frac{1}{5}$ 이하이어야 하므로

$$2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{5}\sigma,\ \sqrt{n}\ge 10$$

$\therefore\ n\ge 100$

따라서 n의 최솟값은 100이다. 답 **100**

유형 up

본문 103쪽

0627 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ㄱ. α의 값이 커지면 k의 값이 커지므로 $b-a$의 값이 커진다.
ㄴ. 표본평균의 값은 $b-a$의 값과 관계가 없다.
ㄷ. n의 값이 커지면 $b-a$의 값이 작아진다.
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0628 $\mathrm{P}(|Z|\le k_1)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le k_2)=0.99$라 하면 각각의 $b-a$의 값은 다음과 같다.

① $2k_1\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{k_1\sigma}{5}$　② $2k_2\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{k_2\sigma}{5}$

③ $2k_1\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}=\frac{k_1\sigma}{8}$　④ $2k_2\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{k_2\sigma}{10}$

⑤ $2k_1\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{k_1\sigma}{10}$

이때 $k_1<k_2$이므로

$$\frac{k_1\sigma}{10}<\frac{k_2\sigma}{10},\ \frac{k_1\sigma}{5}<\frac{k_2\sigma}{5},\ \frac{k_1\sigma}{10}<\frac{k_1\sigma}{8}<\frac{k_1\sigma}{5}$$

따라서 $b-a$의 값이 가장 큰 것은 ②이다. 답 ②

0629 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로 표본의 크기를 n, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

① 신뢰도가 낮아지면 k의 값이 작아지고, 표본의 크기를 크게 하면 n의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 작아진다.
② 표본의 크기가 일정할 때, $b-a$의 값이 작아지면 k의 값이 작아지므로 신뢰도가 낮아진다.
③ $b-a$의 값은 표본평균의 값과는 관계가 없다.
④ 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 $4n$이면 $b-a$의 값은

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=2k\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉, $b-a$의 값은 $\frac{1}{2}$배가 된다.
⑤ 신뢰도가 일정하면 k의 값이 일정하므로 표본의 크기를 작게 하면 $b-a$의 값은 커진다.
따라서 옳은 것은 ②, ③이다. 답 ②, ③

0630 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로 모표준편차를 σ, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ㄱ. 표본의 크기가 $16n$이면 $b-a$의 값은

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{16n}}=2k\frac{\sigma}{4\sqrt{n}}=\frac{1}{4}\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉, $b-a$의 값은 $\frac{1}{4}$배가 된다.
ㄴ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 k의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 커진다.
ㄷ. 동일한 표본을 이용할 때, 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

신뢰도가 99 %이면 신뢰도가 95 %일 때보다 k의 값이 더 크므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 포함한다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

시험에 꼭 나오는 문제

본문 104~107쪽

0631 모평균이 30, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 36이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=30,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{12^2}{36}=4$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=4+30^2=904$

또, $\sigma(\overline{X})=\sqrt{4}=2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)+\sigma(\overline{X})=904+2=906$ 답 **906**

0632 $\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-1)^2\times\frac{1}{8}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=1$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{2}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 답 ①

0633 주머니에서 임의추출한 한 장의 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{1}{6}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{2}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-2^2$

$=\frac{1}{3}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=2$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{1}{3}}{4}=\frac{1}{12}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=\frac{1}{12}+2^2=\frac{49}{12}$

따라서 $p=12$, $q=49$이므로

$p+q=12+49=61$ 답 **61**

0634 $\overline{X_1}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{10}\right)^2\right)$을,

$\overline{X_2}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{225}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{15}\right)^2\right)$을,

$\overline{X_3}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{400}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{20}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $\overline{X_3}$의 값은 알 수 없다.

ㄴ. $\mathrm{E}(\overline{X_1})=\mathrm{E}(\overline{X_2})=\mathrm{E}(\overline{X_3})=m$

ㄷ. $\sigma(\overline{X_1})=\frac{\sigma}{10}$, $\sigma(\overline{X_2})=\frac{\sigma}{15}$, $\sigma(\overline{X_3})=\frac{\sigma}{20}$에서

$\frac{\sigma}{10}>\frac{\sigma}{15}>\frac{\sigma}{20}$

$\therefore \sigma(\overline{X_1})>\sigma(\overline{X_2})>\sigma(\overline{X_3})$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0635 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(45, 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(45, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(45, 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-45}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(44\le\overline{X}\le47)=\mathrm{P}\left(\frac{44-45}{2}\le Z\le\frac{47-45}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.1915+0.3413$

$=0.5328$ 답 ②

0636 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40, 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40, \frac{9^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(40, 1.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-40}{1.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(37\le\overline{X}\le43)=\mathrm{P}\left(\frac{37-40}{1.5}\le Z\le\frac{43-40}{1.5}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=2\times0.4772$

$=0.9544$ 답 **0.9544**

0637 한 상자에 들어 있는 초콜릿 25개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \frac{2^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(10, 0.4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-10}{0.4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 25개의 초콜릿을 담은 한 상자의 무게가 240 g 이하일 확률은

$\mathrm{P}(25\overline{X}\le240)=\mathrm{P}(\overline{X}\le9.6)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{9.6-10}{0.4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-1)$

$=\mathrm{P}(Z\ge1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$ 답 ②

0638 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40, 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40, \frac{4^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(40, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-40}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 42)=0.0228$에서

$$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 42)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{42-40}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0228$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{2}=2,\ \sqrt{n}=4 \qquad \therefore\ n=16$ 답 **16**

0639 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{3^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(m-0.5\leq \overline{X}\leq m+0.5)=0.8664$에서

$$\mathrm{P}(m-0.5\leq \overline{X}\leq m+0.5)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{m-0.5-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\leq Z\leq \frac{m+0.5-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{6}\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

$$=2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.8664$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{6}=1.5,\ \sqrt{n}=9 \qquad \therefore\ n=81$ 답 ③

0640 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(400,\ 80^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(400,\ \dfrac{80^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(400,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-400}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq k)=0.3085$에서

$$\mathrm{P}(\overline{X}\geq k)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{k-400}{10}\right)$$

$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{k-400}{10}\right)=0.3085$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \dfrac{k-400}{10}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{k-400}{10}=0.5,\ k-400=5 \qquad \therefore\ k=405$ 답 **405**

0641 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(0,\ \dfrac{4^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(0,\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2\right)$을 따르고,

$\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3,\ \dfrac{2^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(3,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{4}{3}}$, $Z_Y=\dfrac{\overline{Y}-3}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\geq 1)=\mathrm{P}\left(Z_X\geq \frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_X\geq \frac{3}{4}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\mathrm{P}(\overline{Y}\leq a)=\mathrm{P}\left(Z_Y\leq \frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\leq 2a-6) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}\left(Z_X\geq \dfrac{3}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\leq 2a-6)$이므로

$\dfrac{3}{4}=-(2a-6),\ 2a=\dfrac{21}{4} \qquad \therefore\ a=\dfrac{21}{8}$ 답 ③

0642 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 2500이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(360,\ \dfrac{20^2}{2500}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(360,\ 0.4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-360}{0.4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률은
$\mathrm{P}(\overline{X}\leq k)=0.0062$이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\leq k)=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{k-360}{0.4}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\geq -\frac{k-360}{0.4}\right)$$

$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq -\frac{k-360}{0.4}\right)=0.0062$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq -\dfrac{k-360}{0.4}\right)=0.4938$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938$이므로

$-\dfrac{k-360}{0.4}=2.5,\ k-360=-1$

$\therefore\ k=359$ 답 **359**

0643 표본평균이 50, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$50-2.58\times \frac{20}{\sqrt{100}}\leq m\leq 50+2.58\times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 44.84\leq m\leq 55.16$ 답 ④

0644 표본의 크기 64가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본 표준편차 24를 사용할 수 있고, 표본평균이 365이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$365-1.96\times\frac{24}{\sqrt{64}}\le m\le 365+1.96\times\frac{24}{\sqrt{64}}$$

$\therefore 359.12\le m\le 370.88$

따라서 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간에 속하는 정수는 360, 361, 362, …, 370의 11개이다. 답 **11**

0645 표본평균이 4860, 모표준편차가 700, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$4860-3\times\frac{700}{\sqrt{n}}\le m\le 4860+3\times\frac{700}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $4710\le m\le 5010$이므로

$$4860-3\times\frac{700}{\sqrt{n}}=4710,\ 4860+3\times\frac{700}{\sqrt{n}}=5010$$

$$3\times\frac{700}{\sqrt{n}}=150,\ \sqrt{n}=14$$

$\therefore n=196$ 답 **196**

0646 모표준편차가 40, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times2\times\frac{40}{\sqrt{n}}=\frac{160}{\sqrt{n}}$$

이때 $b-a=8$이므로

$$\frac{160}{\sqrt{n}}=8,\ \sqrt{n}=20\qquad\therefore n=400$$ 답 **400**

0647 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times2\times\frac{10}{\sqrt{100}}=4$$

모표준편차가 10, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$d-c=2\times2.6\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{52}{\sqrt{n}}$$

이때 $b-a\ge d-c$이므로

$$4\ge\frac{52}{\sqrt{n}},\ \sqrt{n}\ge13\qquad\therefore n\ge169$$

따라서 n의 최솟값은 169이다. 답 **169**

0648 표본평균을 $\overline{X}$, 표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 15이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{X}-2\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

$$-2\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le2\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{X}|\le2\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균과 표본평균의 차가 3 이하이어야 하므로

$$2\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le3,\ \sqrt{n}\ge10$$

$\therefore n\ge100$

따라서 n의 최솟값은 100이다. 답 **100**

0649 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.95$라 하면 각각의 $b-a$의 값은 다음과 같다.

ㄱ. $2k\times\dfrac{9}{\sqrt{81}}=2k$

ㄴ. $2k\times\dfrac{15}{\sqrt{81}}=\dfrac{10}{3}k$

ㄷ. $2k\times\dfrac{15}{\sqrt{100}}=3k$

따라서 $b-a$의 값이 큰 것부터 차례대로 나열하면 ㄴ, ㄷ, ㄱ이다. 답 ③

0650 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1\qquad\therefore a=\frac{1}{4}$$

…… ㉮

$$\therefore \mathrm{E}(X)=(-8)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{2}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=(-8)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+8^2\times\frac{1}{2}-2^2=44$$

…… ㉯

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{44}{4}=11$$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=11+2^2=15$$

…… ㉰

답 **15**

단계	채점요소	배점
㉮	a의 값 구하기	20 %
㉯	$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ 구하기	30 %
㉰	$\mathrm{E}(\overline{X}^2)$ 구하기	50 %

0651 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 225이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{5^2}{225}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

…… ㉮

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{1}{3}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge198)=0.9987$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge198)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{198-m}{\frac{1}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge594-3m)\\&=\mathrm{P}(Z\le3m-594)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le3m-594)=0.9987\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le3m-594)=0.4987$

·· ㉯

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le3)=0.4987$이므로

$3m-594=3,\ 3m=597$

$\therefore\ m=199$

·· ㉰

답 199

단계	채점요소	배점
㉮	표본평균 $\overline{X}$가 따르는 확률분포 구하기	20 %
㉯	주어진 확률을 표준정규분포표를 이용할 수 있도록 변형하기	50 %
㉰	m의 값 구하기	30 %

0652 모표준편차가 25, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$b-a=2\times1.96\times\dfrac{25}{\sqrt{n}}=\dfrac{98}{\sqrt{n}}$

·· ㉮

이때 $b-a\le7$이므로

$\dfrac{98}{\sqrt{n}}\le7,\ \sqrt{n}\ge14$

$\therefore\ n\ge196$

·· ㉯

따라서 n의 최솟값은 196이다.

·· ㉰

답 196

단계	채점요소	배점
㉮	$b-a$를 n에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉯	n에 대한 부등식 풀기	50 %
㉰	n의 최솟값 구하기	10 %

0653 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 30^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{30^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z_1=\dfrac{X-m}{30}$, $Z_2=\dfrac{\overline{X}-m}{10}$으로 놓으면 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}G(k)&=\mathrm{P}(X\le m+30k)\\&=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{m+30k-m}{30}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_1\le k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(k)&=\mathrm{P}(\overline{X}\ge m-30k)\\&=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{m-30k-m}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_2\ge-3k)\end{aligned}$$

ㄱ. $G(0)=\mathrm{P}(Z_1\le0)=0.5$

$H(0)=\mathrm{P}(Z_2\ge0)=0.5$

$\therefore\ G(0)=H(0)$

ㄴ. $G(3)=\mathrm{P}(Z_1\le3)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_1\le3)$

$H(1)=\mathrm{P}(Z_2\ge-3)$

$=\mathrm{P}(Z_2\le3)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_2\le3)$

$\therefore\ G(3)=H(1)$

ㄷ. $G(1)+H(-1)$

$=\mathrm{P}(Z_1\le1)+\mathrm{P}(Z_2\ge3)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_1\le1)+0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le3)$

$=1+\mathrm{P}(0\le Z_1\le1)-\mathrm{P}(0\le Z_2\le3)$

$=1+\mathrm{P}(0\le Z_1\le1)-\mathrm{P}(0\le Z_1\le3)$

$=1-\{\mathrm{P}(0\le Z_1\le3)-\mathrm{P}(0\le Z_1\le1)\}$

$=1-\mathrm{P}(1\le Z_1\le3)\neq1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0654 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 크기가 25인 표본을 임의추출했을 때 표본평균 $\overline{X_{\mathrm{A}}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

또, 크기가 100인 표본을 임의추출했을 때 표본평균 $\overline{X_{\mathrm{B}}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{10}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_{\mathrm{A}}=\dfrac{\overline{X_{\mathrm{A}}}-m}{\frac{\sigma}{5}}$, $Z_{\mathrm{B}}=\dfrac{\overline{X_{\mathrm{B}}}-m}{\frac{\sigma}{10}}$으로 놓으면 Z_{A}, Z_{B}는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{V}(\overline{X_{\mathrm{A}}})=\dfrac{\sigma^2}{25}$, $\mathrm{V}(\overline{X_{\mathrm{B}}})=\dfrac{\sigma^2}{100}$에서

$\dfrac{\sigma^2}{25}>\dfrac{\sigma^2}{100}$

$\therefore\ \mathrm{V}(\overline{X_{\mathrm{A}}})>\mathrm{V}(\overline{X_{\mathrm{B}}})$

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X_{\mathrm{A}}}\le m+5)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}}\le\dfrac{m+5-m}{\frac{\sigma}{5}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}}\le\dfrac{25}{\sigma}\right)$

$$\mathrm{P}(\overline{X_{\mathrm{B}}} \le m+5) = \mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}} \le \frac{m+5-m}{\frac{\sigma}{10}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}} \le \frac{50}{\sigma}\right)$$

이때 $0 < \frac{25}{\sigma} < \frac{50}{\sigma}$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}} \le \frac{25}{\sigma}\right) < \mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}} \le \frac{50}{\sigma}\right)$$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X_{\mathrm{A}}} \le m+5) < \mathrm{P}(\overline{X_{\mathrm{B}}} \le m+5)$

ㄷ. $\mathrm{P}(|Z| \le k) = 0.95$라 할 때, 모표준편차가 σ이고

표본의 크기가 25이므로

$$b-a = 2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = \frac{2k\sigma}{5}$$

표본의 크기가 100이므로

$$d-c = 2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{2k\sigma}{10}$$

$$\frac{2k\sigma}{5} > \frac{2k\sigma}{10}$$

$\therefore b-a > d-c$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

memo

memo

memo