UNIVERSITE DU SINE SALOUM EL HÂDJ IBRAHIMA NIASS

UFR SCIENCES FONDAMENTALES ET DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT MATHÉMATIQUES- INFORMATIQUE

LICENCE 3 AGROTIC
Traitement du Signal

Série de Fourrier /Echantillonnage /Quantification

Dr Fatou NDIAYE

SERIE DE FOURRIER

Définition du théorème de Fourrier

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n F_0 t) + b_n \sin(2\pi n F_0 t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t)\, \mathrm{d}t = \overline{s(t)} \qquad a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(2\pi n F_0 t) \cdot \mathrm{d}t \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

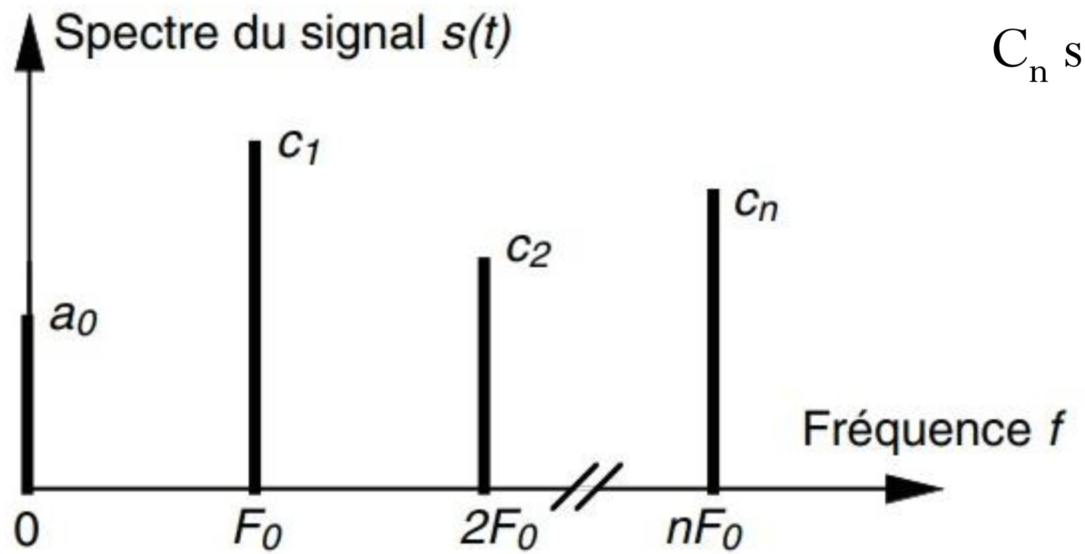
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin(2\pi n F_0 t) \cdot \mathrm{d}t \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

- a_{0}: Composante continue , a_1 le Fondamental
- a_n et b_n sont les coefficients (harmoniques)

Représentation Spectrale

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n F_0 t + \varphi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \text{Arctan}(-b_n/a_n)$$

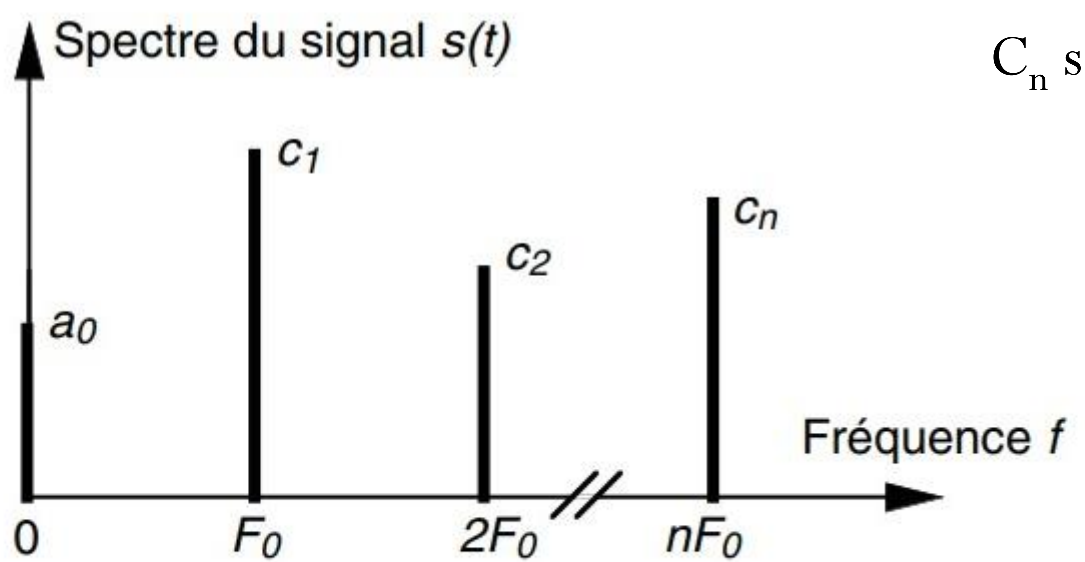


C_n sont des harmoniques

Représentation Spectrale

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n F_0 t + \varphi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \text{Arctan}(-b_n/a_n)$$



C_n sont des harmoniques

Propriétés

- Si la fonction x(t) est réelle et paire, les coefficients b_n du développement en série de Fourier sont tous nuls et la représentation spectrale X(f) est réelle et paire ;

- si la fonction x(t) est réelle et impaire, les coefficients a_n du développement en série de Fourier sont tous nuls et la représentation spectrale X(f) est imaginaire et impaire ;

- si la fonction x(t) est réelle quelconque, la représentation spectrale X(f) est complexe avec une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire.

Propriétés

Étant donné $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f)$ et $y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(f)$, nous avons :

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} a \cdot X(f) + b \cdot Y(f)$$

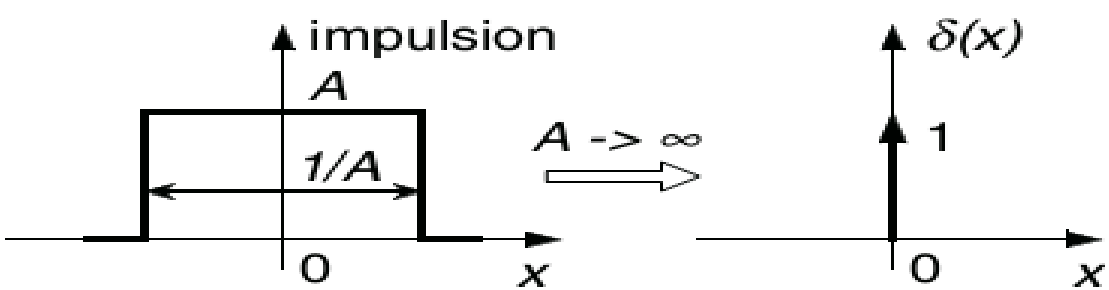
avec a et b des constantes.

ECHANTILLONNAGE

Outils mathématiques

- L'impulsion de Dirac ou pic de Dirac, notée δ, : la limite d'une impulsion d'amplitude A et de durée 1/A
- lorsque A tend vers l'infini. L'aire de cette impulsion est constante et égale à 1 quel que soit A.

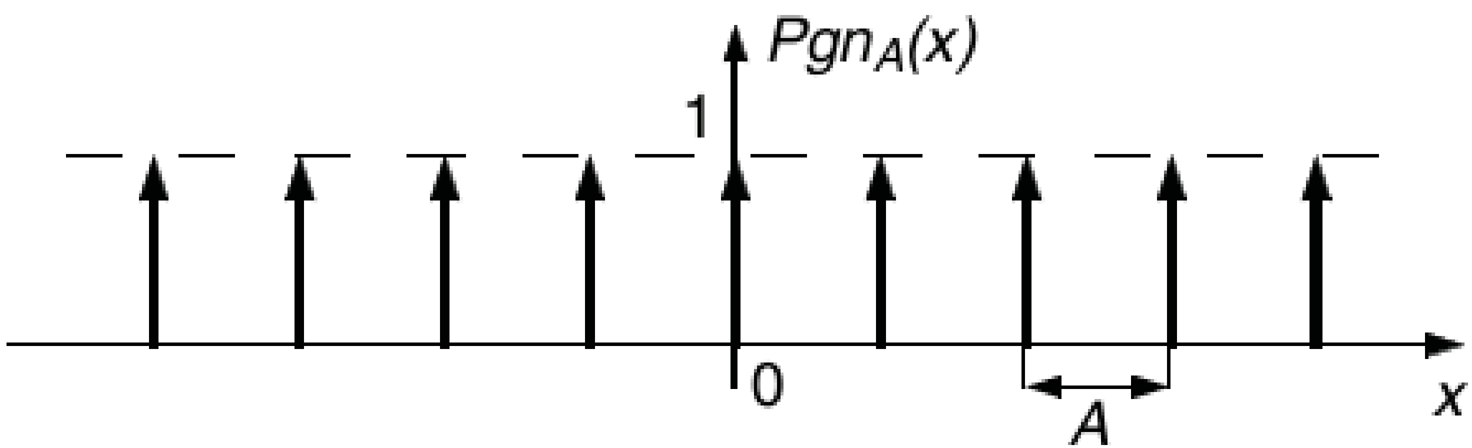
$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot \mathrm{d}x = 1$$



Outils mathématiques

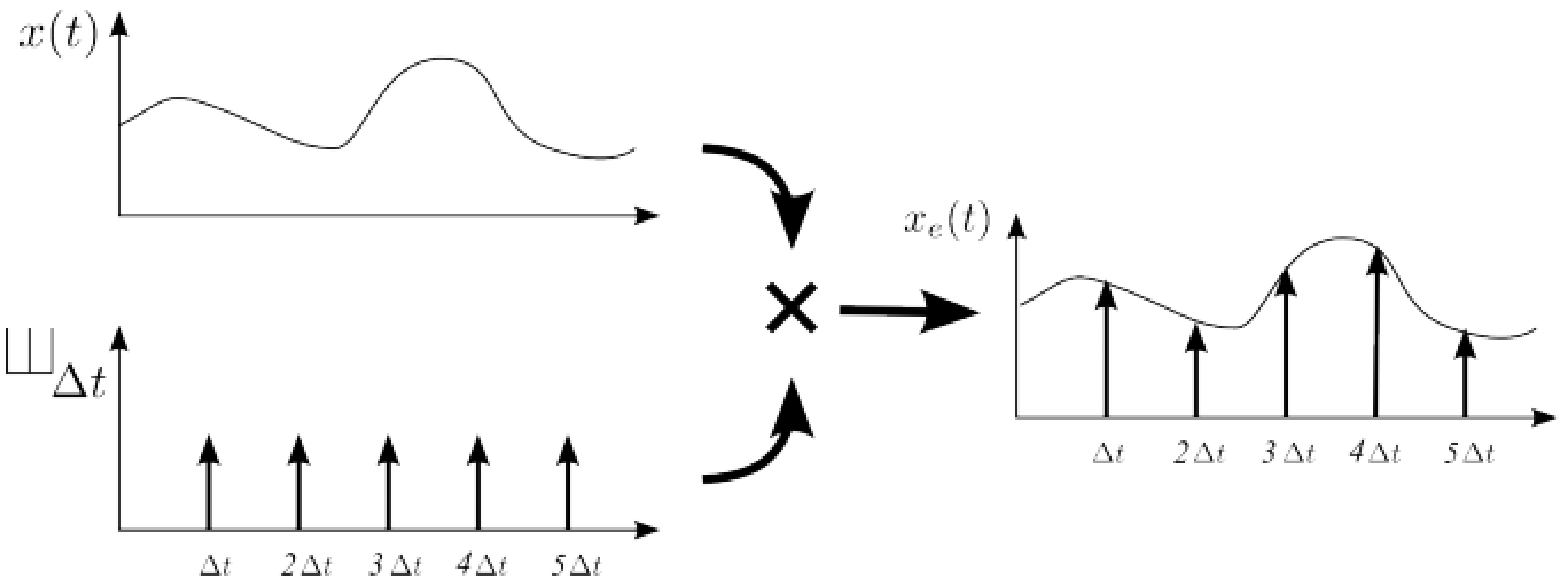
- « Peigne » de Dirac, qui s'écrit PgnA(x), est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de A, appelé période du « peigne » de Dirac

$$\mathrm{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\,(x - k \cdot A)$$



Définition

- Echantillonnage idéal : prélèvement pendant un temps infiniment court des valeurs de x(t) aux temps $t = t_n = n.\Delta t$
- Modélisation mathématique : produit de x(t) avec un peigne de Dirac



$$x_e(t) = x(t).Ш_{\Delta t}(t) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\Delta t).\delta(t - n\Delta t)$$

Aspect fréquentiels

- Calcul la Transformée de Fourrier du signal échantillonné:

$$\mathcal{F}\left[x_e(t)\right] = \mathcal{F}\left[(x \cdot Ш_{T_e})(t)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[x_e(t)\right] = \mathcal{F}\left[x(t)\right] * \mathcal{F}\left[Ш_{T_e}(t)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[Ш_{T_e}(t)\right] = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

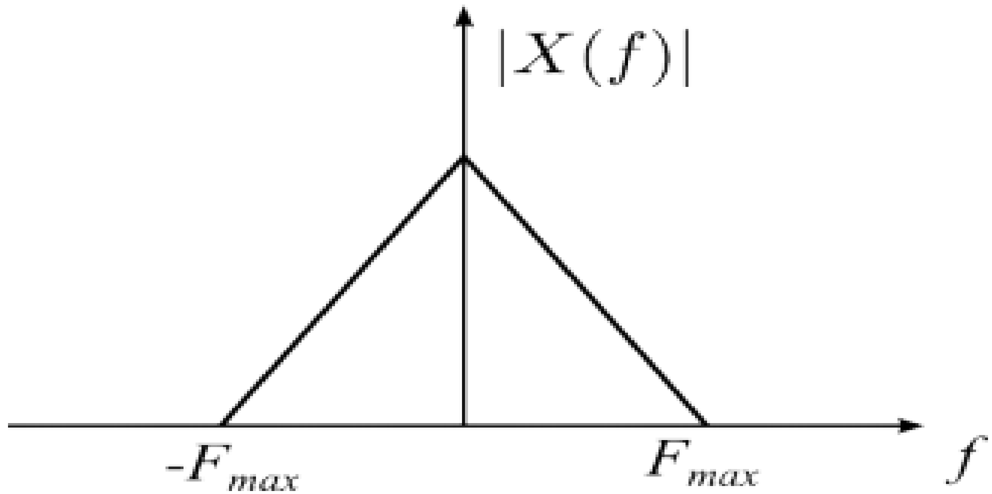
$$\mathcal{F}\left[x_e(t)\right] = X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$

Le spectre Xe(f) d'un signal échantillonne à la fréquence Fe est celui du signal non échantillonné répété avec une période fréquentielle Fe

Aspect fréquentiels

- **Spectre, Notion de Repliement**



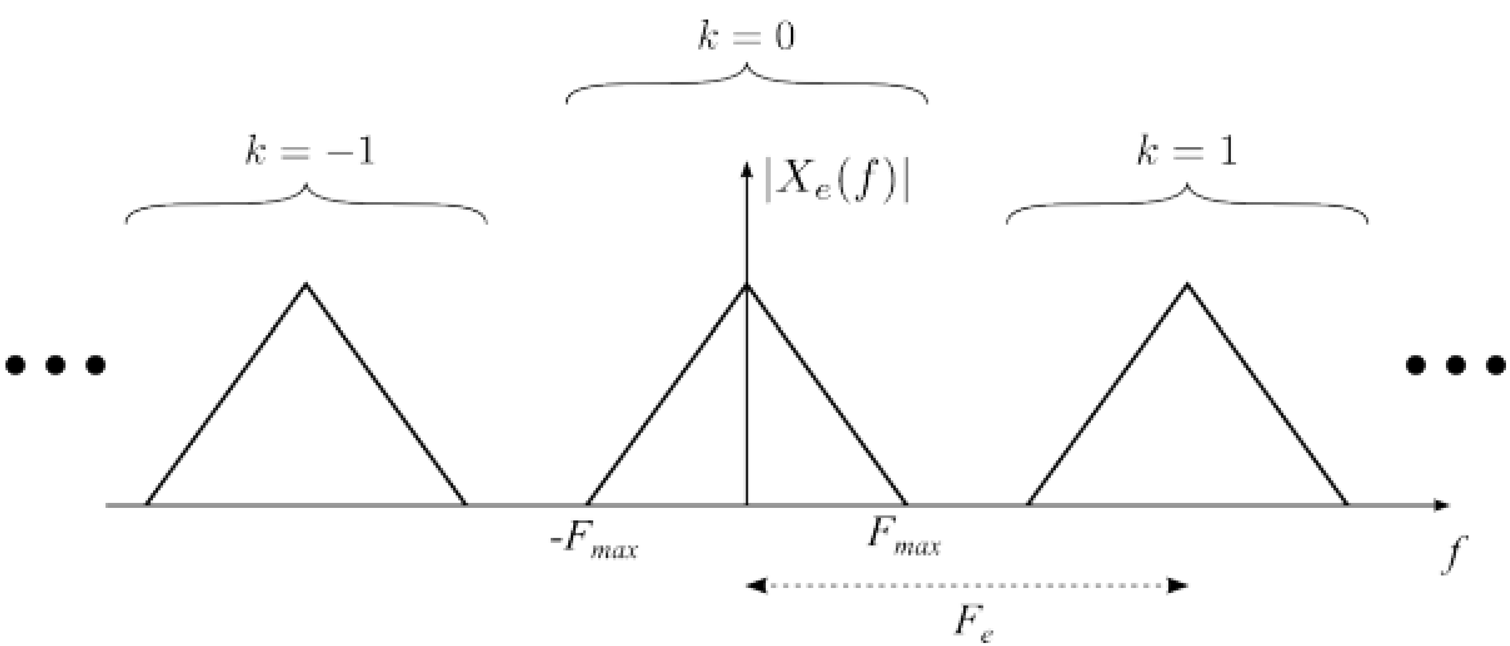
$$|f| > F_{max} \quad \Rightarrow \quad X(f) = 0.$$

Si on échantillonne le signal, on obtient le spectre:

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$

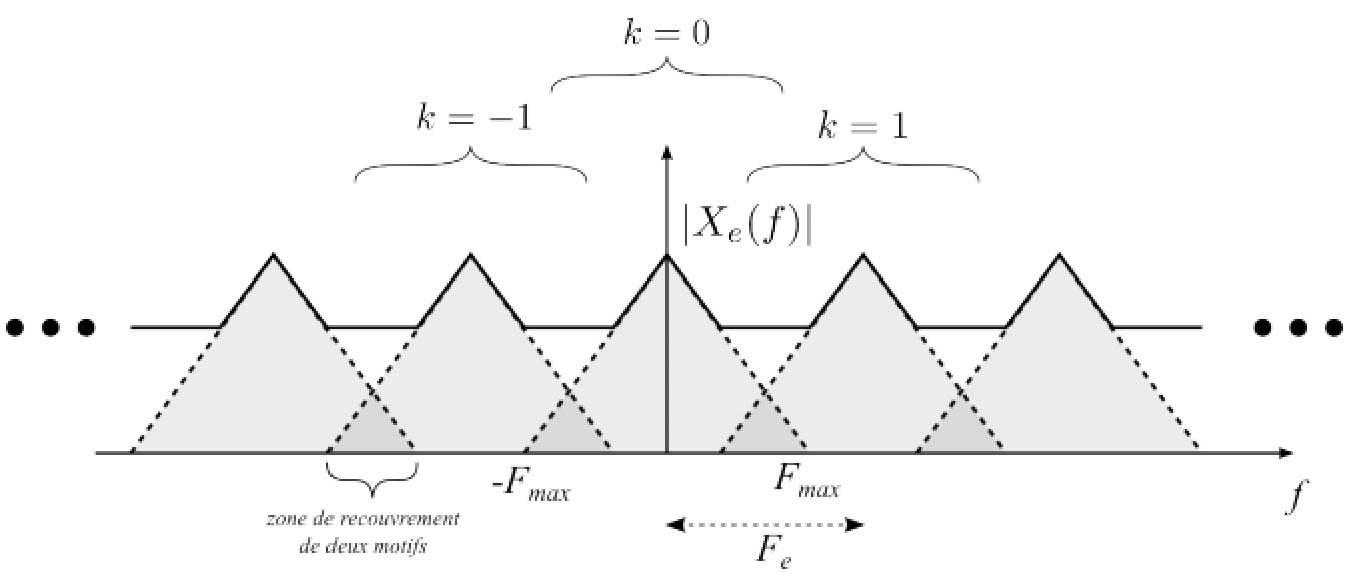
Aspect fréquentiels

- **Spectre, Notion de Repliement**
  - **Si Fe ≥ 2Fmax**
  - pas de recouvrement des motifs élémentaires : On peut donc extraire X(f) et reconstituer le signal x(t).
  - Il n'y a pas de perte d'information lors de l' échantillonnage.



Aspect fréquentiels

- **Spectre, Notion de Repliement**
- **Fe < 2Fmax**
  - Il y a recouvrement des motifs élémentaires de Xe(f)
  - repliement de spectres: on ne peut plus récupérer le spectre X(f) du signal initial.
  - Il y a perte d'information lors de l' échantillonnage.



Aspect fréquentiels

- **Théorème de SHANNON**

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l' échantillonnage d'un signal

- le signal bornée : fréquence maximale Fmax
- **$Fe \geq 2Fmax$**

- **Fe/2** : **fréquence de Nyquist.**

- Bande de fréquence de -Fe/2 à Fe/2 : **bande de Nyquist**

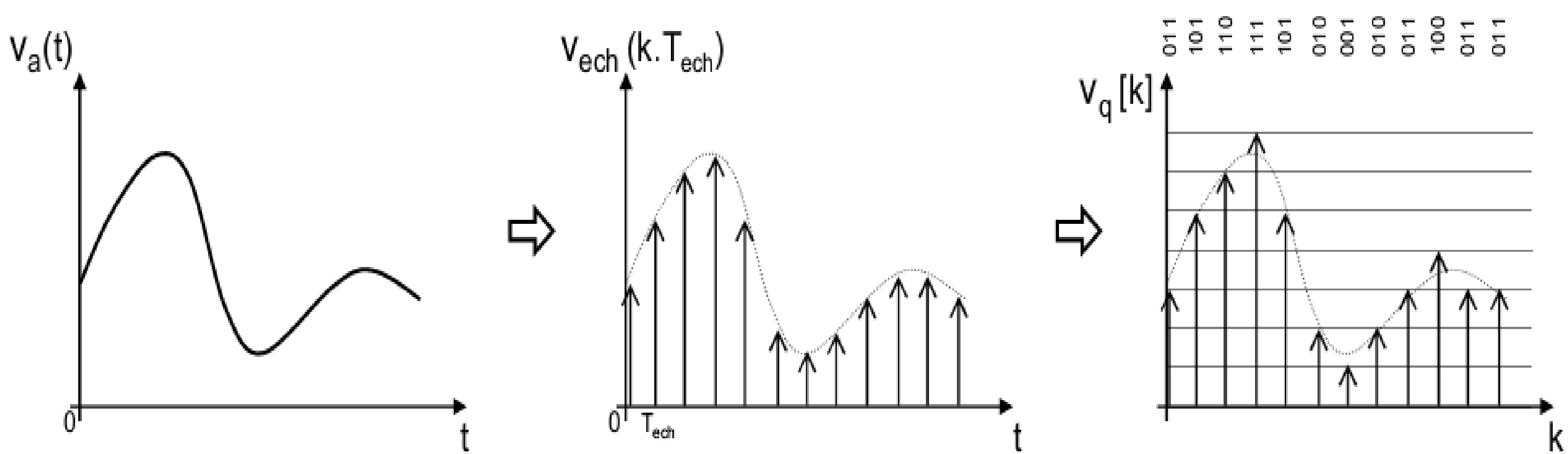
Un capteur est un convertisseur

Capteurs analogiques

Capteurs numériques: CAN

Conversion analogique numérique

- la conversion analogique – numérique peut être divisée en trois étapes : l’échantillonnage temporel, la quantification et le codage.



CAN dont la sortie du signal numérique est sur 3 bits :

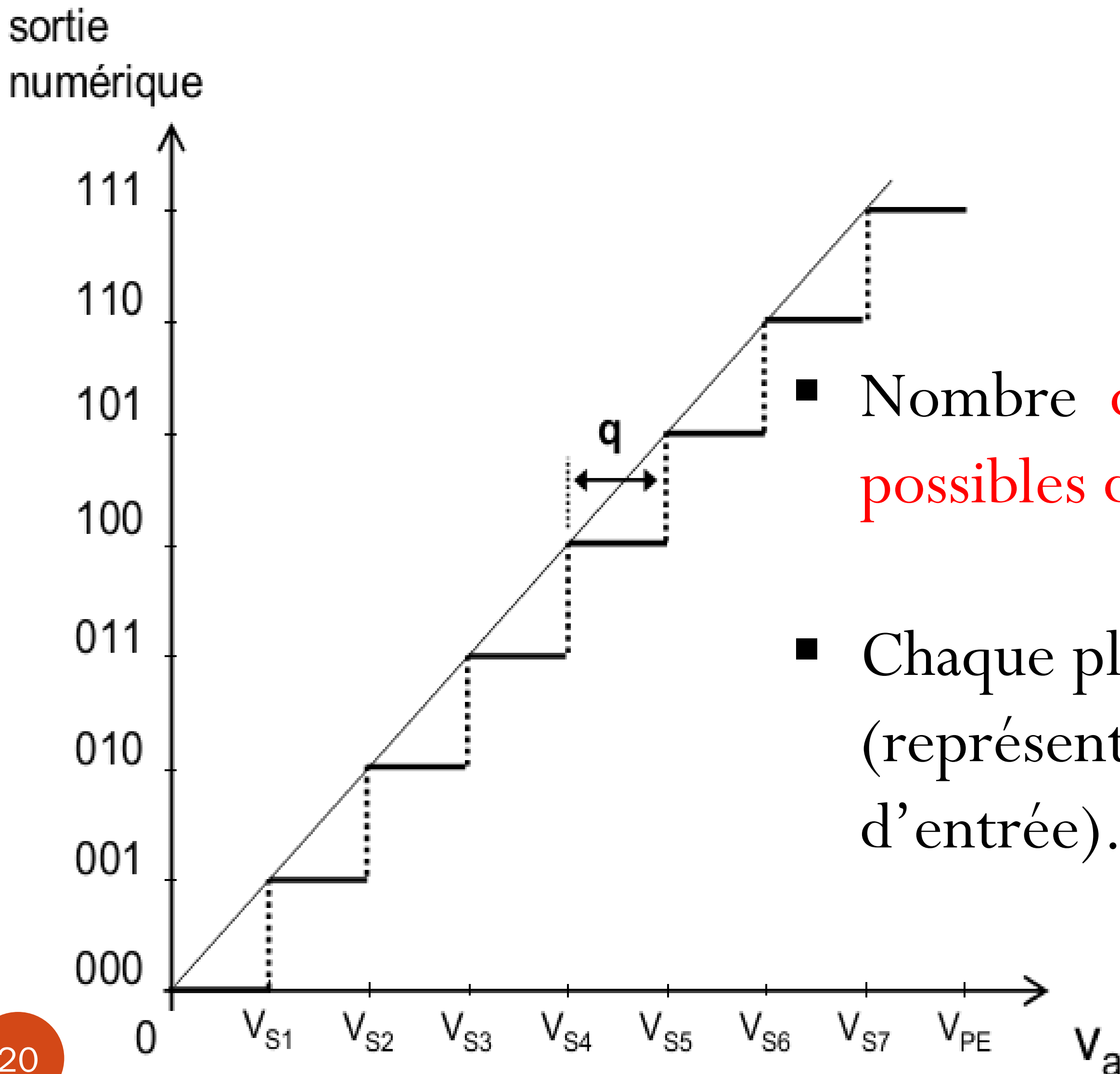
Caractéristique de transfert

- Le pas de quantification et la précision d'un CAN dépendent du nombre de bits en sortie, appelé résolution.

- Pour un CAN à N bits : nombre d'états possibles en sortie est 2^N (0 à 2^N-1).

- Un CAN est caractérisé également par la plage de variation acceptable de la tension analogique d'entrée, appelée Pleine Echelle(FS pour Full Scale) et notée V_{PE}

Caractéristique de transfert



- Nombre de plages = d'états possibles de la sortie numérique
- Chaque plage est code (représentant la tension analogique d'entrée).

Caractéristique de transfert

- Quantum, Résolution ou LSB(pour Least Significant Bit, le bit de poids faible) : la dimension de ces plages

$$q = LSB = \frac{V_{PE}}{2^N}$$

- Les tensions de seuil V_{Sk} correspondant aux transitions entre les codes de sortie:

$$V_{Sk} = k.q \qquad k \in (1 \text{ à } 2^N-1).$$

Bruit de quantification.

- l'erreur de quantification : un bruit dont la puissance moyenne est égale à (pour une résistance normalisée de 1Ω) :

$$P_{bruit} = \frac{1}{T_{tri}} \int_0^{T_{tri}} E_q^2(t)dt \qquad P_{bruit} = \frac{q^2}{12}$$

On admettra que ce résultat est valide pour un signal pleine échelle triangulaire ou sinusoïdal dès que la résolution est supérieure à 6.

Le rapport signal sur bruit d'un signal sinusoïdal (SNR Signal to Noise Ratio)

$$V_{eff,sinus} = \frac{V_{PE}}{2\sqrt{2}} = \frac{2^{N-1}q}{\sqrt{2}}$$

$$SNR = \frac{V_{eff,sinus}}{V_{eff,bruit}}$$

$$V_{eff,bruit} = \sqrt{P_{bruit}} = \frac{q}{\sqrt{12}}$$

$$SNR = \sqrt{6}.2^{N-1}$$

$$SNR_{dB} = 20\log SNR = 6{,}02N + 1{,}76$$

CODAGE

- En mode unipolaire le codage le plus utilisé est le code binaire naturel. Un mot binaire s'écrit :

$$b_1\ b_2\ \ldots.\ b_{N-1}\ b_N$$

Avec b_1 le bit de poids fort et b_N le bit de poids faible

- Le nombre décimal correspondant est :

$$D = b_1.2^{N-1} + b_2.2^{N-2} + b_{N-1}.2^1 + b_N.2^0.$$

- A un code D donné correspond la tension:

$$V = q.(\ b_1.2^{N-1} + b_2.2^{N-2} + \ldots + b_{N-1}.2^1 + b_N.2^0\ )$$

$$V = V_{PE}.(\ b_1 / 2 + b_2 / 2^2 + \ldots + b_N / 2^N\ )$$

CODAGE

- Code binaire signé en mode bipolaire : en rajoutant un bit de signe devant le bit de poids fort au code binaire naturel.
  - Pour un bit de signe nul, le nombre est positif, il est négatif pour un bit égale à un.
- code binaire décalé consiste, comme son nom l'indique, à décaler le code binaire naturel.
  - Il permet de compter de -2^{N-1} à $2^{N-1}-1$. b_1 fait office de bit de signe. C'est un code fréquemment utilisé dans les CANs.
- Code complément à 2 correspond au code binaire décalé avec complémentation du bit de signe.
  - Pour les nombres positifs on retrouve le code binaire naturel (facilité d'implémentation au niveau des opérateurs logiques)

CODAGE

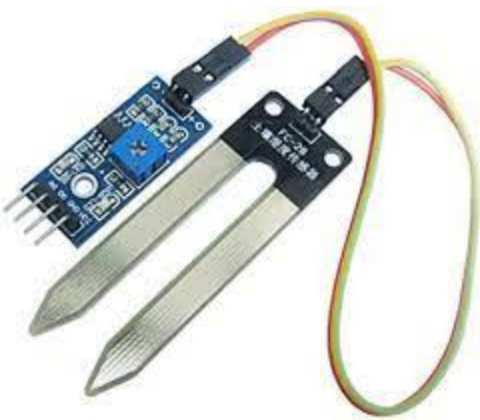
D	signé	binaire décalé	complément à 2
3	011	111	011
2	010	110	010
1	001	101	001
0	000/100	100	000
-1	101	011	111
-2	110	010	110
-3	111	001	101
-4	-	000	100

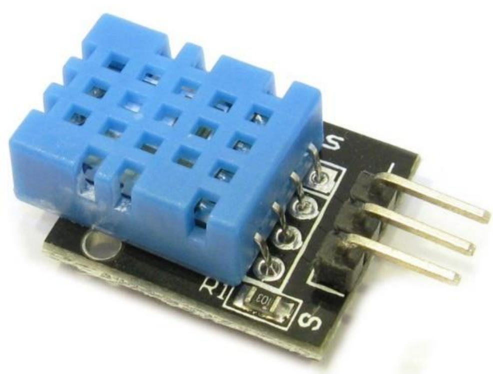
CODAGE

- thermomètre. Par comparaison avec un code binaire classique sur N bits il s'écrit avec 2^N-1 bits

D	binaire	code thermomètre
7	111	1111111
6	110	0111111
5	101	0011111
4	100	0001111
3	011	0000111
2	010	0000011
1	001	0000001
0	000	0000000

Applications





QUESTIONS?????