Problèmes aux limites en dimension 1

Simon Hergott

April 22, 2023

1 Introduction au problème

Cet article aura pour but de résumer les résultats et applications concernant les problèmes aux limites en dimension 1. Nous reviendrons sur la méthode des différences finies, fondant l'approximation des solutions des problèmes aux limites, et nous traiterons de plus quelques applications les plus courantes pour cette catégorie de problèmes. Éventuellement, nous verrons brièvement les méthodes de résolution de ces problèmes en dimension 2. Rappellons d'abord l'énoncé du modèle du problème aux limites en dimension 1:

$$-u''(x) = f(x) \qquad \forall x \in]0, 1[\tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

Ce problème est donc simplement caractérisé par l'équation (1), munie des conditions limites (2). Une partie importante lors de la résolution de ce problème est donc de trouver les valeurs propres et les fonctions propres (fonctions ne subissant qu'une transformation scalaire lors de leur utilisation comme solution) de l'équation différentielle

$$X'' + \alpha X = 0 \qquad \forall X \in]0, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}* \tag{3}$$

Nous pouvons alors écrire les solutions de (1) comme les fonctions de la forme

$$u(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x F(s)ds \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

selon le théorème fondamental de l'Analyse, avec

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \tag{5}$$

Nous verrons que l'on peut écrire u sous la forme

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s)f(s)ds \quad x \in [0, 1] \tag{6}$$

ce qui nous permettra d'introduire avec G le concept de *Fonction de Greene.*

Les applications du problème aux limites en dimension 1 sont multiples, et relatiement nombreuses dans la physique où sa résolution permet la simulation de plusieurs phénomènes tels que la conduction de la chaleur, et les défomrations élastiques.

2 Méthode des différences finies

Développée en 1715 par Brook Taylor dans son ouvrage *Methodus incrementorum directa et inversa*, la méthode des diffrences finies est un procédé courant utilisé pour approcher la solution d' équations différentielles. En résumé, on établit une grille de points généralement uniforme sur l'espace de recherche pour discrétiser le problème (le réduire à un nombre fini de pas), puis on réduit la distance entre les points pour approcher au maximum la solution. Formellement, on utilise la formule de Taylor pour discrétiser les différentielles n-ièmes : on peut alors choisir la formule de Taylor-Young, ou la formule de Taylor avec reste intégral pour évaluer les erreurs (la discrétisation induit une approximation, qui engendre des erreurs). Dans le cas de Taylor-Young simple (on appellera ici de cette manière la formule de Taylor sans reste intégral), on a:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{0<i\leq n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i$$

La méthode des différences finies sert à approximer la dérivée de certaines fonctions par des valeurs numériques, qui ne peut parfois pas être calculées par des méthodes formelles classiques. En effet, généralement les fonctions ne peuvent pas être formulées analytiquement ce qui rend le calcul de leurs dérivées impossible.
Pour appliquer la méthode des différences finies, on se place sur un segment $[0, \alpha]$ (on verra plus tard que dans le cas du problème aux limites en dimension 1, $\alpha = 1$)sur lequel on ajoute un pas de discrétisation h et une suite de points $x_n | n \in [0, N]$ avec $Nh = \alpha$. Ici, le pas est uniforme mais il peut tout à fait être défini non uniformément sur chaque x_i pour tout $i \in [0, N-1]$ comme h_i, avec $\sum_{0\leq i<N} h_i = \alpha$. On appellera x_n la *grille*.
Posons une fonction régulière u telle que: $u : [0, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$, et on appellera u_n l'évaluation de u en chaque point x_n de la grille.
On appelle *une différence finie à p points* une combinaison linéaire de p u_n, servant à approximer au point x_n les dérivées de u. Considérons Du une différence finie, on dira qu'elle *approche* $u^{(l)}(x_n)$ *à l'ordre* q si :

$$\exists C > 0, h_0 > 0 \quad | \quad \forall h \in [0, h_0] \quad ||Du - u^{(l)}(x_n)|| \leq Ch^q \tag{7}$$

Cette méthode permet donc de décomposer les équations différentielles ordinaires en un système d'équations linéaires, solvable en utilisant l'algèbre linéaire.

3 Résolution du problème en dimension 1

4 Introduction à la résolution du problème en dimension 2

5 Applications

5.1 Conduction de la chaleur

5.2 Déformation d'une corde élastique

5.3 Problème stationnaire elliptique

5.4 Problème hyperbolique