Problèmes aux limites en dimension 1

Simon Hergott

May 1, 2023

1 Abstract

In this documentary research article, we will study boundary values problems in one dimension, and eventually give some clues for the second dimension. Boundary value problems are defined by a differential equation and a set of boundaries the solution needs to meet. Its resolution in one dimension can be done for functions of one or more variables (p-variables differential equation), and is a key element to solve many physics problems such as heat conduction in a metal rod. To solve this problem, we will need to introduce some other concepts, such as the finite differences method to approximate the solutions of a differential equation, and Green's function to get solutions the less dependent possible to the problem.

2 Mots-clés

- BVP (Boundary Value Problem : *Problème aux limites*
- Green's function : *fonction de Green*
- Finite differences (method) : *(méthode des) différences finies*

3 Bibliographie commentée

Nous devrons premièrement définir le problème aux limites en dimension 1: ici, nous utiliserons la définition trouvée notamment dans [1]:

$$-u''(x) = f(x) \forall x \in [0,1] \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

Plusieurs autres définitions sont possibles, comme notamment dans [2] où on ajoute k^2u au membre de gauche de l'équation différentielle, ainsi que x peut se trouver sur n'importe quel intervalle $[0, L]$ et n'est plus contraint à $[0, 1]$.

Dans la résolution du problème aux limites la méthode des différences finies est utilisée pour trouver numériquement une solution (ou plus précisément, l' *approximer*). Nous passerons alors rapidement sur la méthode des différences finies, en définissant dans notre cas une *grille* de points sur laquelle résoudre le problème. Nous définirons cette grille suivant [1] telle qu'un ensemble de points $(x_j)_{j=0}^n$ répartis avec un *pas* h sur $[0, 1]$.
Pour développer sur les différences finies, nous nous aiderons de [3], particulièrement compréhensible, ainsi que de [5] éventuellement.

La résolution du problème nous amènera à utiliser la fonction de Green : elle peut être définie comme

$$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x) & s \in [0,x] \\ x(1-s) & s \in [x,1] \end{cases} \tag{2}$$

avec $x, s \in [0, 1]$. Nous utiliserons les définitions de [1] et 2, la seconde permettant de vérifier que G est bien une solution du problème, et qu'elle possède toutes les propriétés nécessaires pour être cohérente dans ce contexte. Cette fonction est particulièreme,t intéressante, car en écrivant $u(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)ds$ nous pouvons rendre les solutions du problème dépendantes exclusivement de G et f. Nous étudierons la fonction de Green sur son intervalle $[0, 1]^2$ pour continuer la recherche de solutions: nous utiliserons alors [6].

Éventuellement, nous passerons rapidement sur la résolution en dimension 2 du problème, présente dans [1] et appliquée dans [5].

Ce problème étant très utilisé en physique, nous passerons en revue quelques unes de ces applications à travers la conduction de la chaleur, exemple très courant et présenté notamment dans [5] et [7]. De plus, nous verrons aussi la déformation d'une corde élastique à travers les applications de l'analyse de Fourier de [7], ainsi que le problème elliptique et le problème hyperbolique, qui sont deux utilisation du problème aux limites avec des équations différentielles partielles [6].

4 Répartition du travail

Comme vous l'aurez constaté en lisant l'auteur, je suis seul.
Suivre la progression du rapport : https://github.com/FumedSaumonSauvage/TIPEpbLimDim1

References

[1] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri.Méthodes Numériques, *Springer*2007, p. 369–452.

[2] G.F.Roach. Green's functions,*Cambridge University Press*, 1982, p.1–8

[3] Sebastien Tordeux, Victor Peron. Methode des différences finies,*Université de Pau*, 2020, p.1–48

[4] Dean G.Duffy. Studies in advanced mathematics - Green's functions with applications,*Chapman & Hall*, 2001, p.13–242

[5] Dennis.G.Zill. Differential equations with Boundary-Value-Problems, *Cengage*, 2013, p.471–484

[6] Ivar Stakgold, Michael Holst.Green's Function and Boundary-value-Problems, *Wiley*, 2011, p.471–484

[7] Murray R.Spiegel. Fourier Analysis with applications to boundary value problems,*McGraw-Hill*, 1974, p.1–19