# Devoir 2

Date de distribution : 3 octobre 2022

Date de remise : 31 octobre 2022

**Simulation de vol d'une fusée**

Le devoir consiste à simuler le lancement d'une fusée de la surface de la Terre vers l'espace. Les caractéristiques de cette fusée sont données dans le tableau suivant.

Pour simplifier la simulation, on considérera que la fusée est composée d'un cylindre surmonté d'un cône. Avant le décollage, la fusée repose sur la surface de la Terre dans la position verticale comme indiqué sur la figure 1.

Le système d'axes *oxyz* lié à la fusée a comme origine son centre de masse et orienté tel que représenté sur la figure 1. Le système d'axes global *OXYZ* a comme origine le centre de la Terre et orienté de la même façon que le système d'axes de la fusée avant le décollage. La Terre est considérée comme parfaitement sphérique de rayon $R_T = 6371$ km.

| Caractéristiques de la fusée | Valeurs |
|---|---|
| Masse initiale totale | 320 tonnes |
| Hauteur totale | 53 m |
| Rayon latéral (cylindre et cône) | 1.8 m |
| Vitesse d'éjection du carburant par le propulseur sous forme de gaz $\|\vec{v}_{gaz}\|$ | 3.5 km/s |
| Quantité initiale du carburant | 300 tonnes |

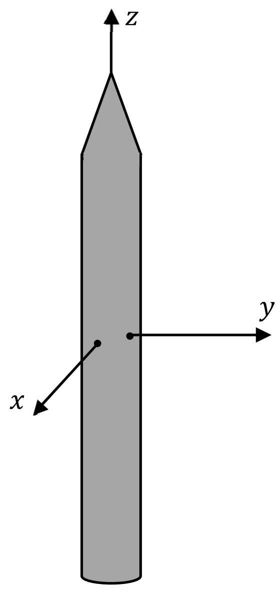


**Figure 1:** Schéma de la fusée au moment du décollage.

On considérera que la fusée possède un seul propulseur situé au centre de sa base située à une distance $d = 25$ m de son centre de masse.

Il s'agit dans ce devoir, de tracer la trajectoire de la fusée de son point de départ jusqu'à ce qu'elle dépasse la distance de 10 000 km du centre de la Terre ou qu'elle s'écrase sur la surface de la Terre.

La simulation s'arrêtera donc dès qu'une des situations suivantes se produit :

1. La fusée s'éloigne de la Terre si ses coordonnées vérifient : $x^2 + y^2 + z^2 \geq 10^{14}(\mathrm{m}^2)$
2. La fusée s'écrase au sol si ses coordonnées vérifient : $x^2 + y^2 + z^2 \leq R_T^2$

   (ici pour simplifier, on considérera qu'il y a écrasement lorsque le centre de masse de la fusée franchit la surface de la Terre).

Les forces qui s'appliquent sur la fusée durant son vol sont : la force de poussée du propulseur, la force gravitationnelle et la force de frottement visqueux de l'air.

- La force de propulsion est produite par l'éjection du carburant sous forme de gaz. Cette force est donnée par :

  $$\vec{F}_p = -\mu\vec{v}_{gaz}$$

  où $\mu = 1200$ kg/s est le débit massique avec lequel les gaz sont éjectés. Il représente aussi la variation de la masse de la fusée :

  $$\mu = \left|\frac{dm}{dt}\right|$$

  $\vec{v}_{gaz}$ est la vitesse d'éjection des gaz. Dans le référentiel lié à la fusée, celle-ci s'écrit :

  $$\vec{v}_{gaz} = -|\vec{v}_{gaz}|\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

  où $\theta$ est l'angle d'inclinaison du propulseur par rapport à l'axe de la fusée. En temps normal, cet angle sert à contrôler la trajectoire de la fusée en variant l'orientant du propulseur. Dans cette simulation, on considérera que $\theta$ reste constant durant tout le vol à cause d'une défaillance mécanique.

  On considérera aussi que $\mu$ et $|\vec{v}_{gaz}|$ restent constants jusqu'à l'épuisement complet du carburant.

- La force de gravitation est représentée par $\vec{F}_g = m\vec{g}$ avec :

  $$\vec{g} = -GM_T\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

  où $G = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ est la constante gravitationnelle, $M_T = 5.974 \times 10^{24}$ kg est la masse de la Terre et $\vec{r}$ est la position de la fusée dans le référentiel global.

- La force de frottement visqueux est donnée par :

$$\vec{F}_{vis} = -\frac{1}{2} A\rho C_{vis} |\vec{v}|\vec{v}$$

où $A$ est l'aire effective de la fusée vue dans la direction du déplacement. On l'approximera par $A = (\pi R^2 \cos\alpha + 2RH \sin\alpha)$ où $R$ et $H$ sont le rayon et la hauteur totale de la fusée et $\alpha$ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe de la fusée. $C_{vis} = 0.5$ est le coefficient de trainée de la fusée que l'on considérera constant. $\rho$ est la masse volumique de l'air dépendante de l'altitude :

$\rho = \rho_0 e^{(R_T - |\vec{r}|)/h_0}$ où $\rho_0 = 1.275 \text{ kg/m}^3$ et $h_0 = 7200$ m.

On considérera que la force de frottements visqueux s'applique sur le centre de masse de la fusée.

**But du devoir**

Le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab ou Octave qui permet de tracer la trajectoire de la fusée pour des valeur données de l'angle $\theta$ qui demeurera constante durant tout le vol. La fonction demandée doit pouvoir être appelée comme suit :

```
[Vf t x y z]=Devoir2(theta)
```

La donnée d'entrée pour cette fonction est `theta en radian.`

Les résultats produits par cette fonction Matlab (ou Octave) sont :

- `Vbf` est un vecteur contenant les trois composantes du vecteur vitesse linéaire du centre de masse de la fusée (en m/s) lorsque la simulation est terminée.

- `t` vecteur contenant le temps correspondant à chacune des positions enregistrées pour le tracé de la trajectoire. La dernière valeur doit être l'instant d'arrêt de la simulation. Le nombre d'instants utilisés pour tracer la trajectoire doit être compris entre 100 et 1000.
- `x` vecteur contenant les positions en *x* du centre de masse de la fusée enregistrées pour le tracé de la trajectoire.
- `y` vecteur contenant les positions en *y* du centre de masse de la fusée enregistrées pour le tracé de la trajectoire.
- `z` vecteur contenant les positions en *z* du centre de masse de la fusée enregistrées pour le tracé de la trajectoire. La première valeur doit être égale à $R_T + d$.

**Simulations requises**

La simulation doit se faire à partir de l'instant du décollage où $t = 0$. Il est demandé de déterminer la valeur maximale de $\theta$ qui permet à la fusée de quitter la Terre ($|\vec{r}| \geq 10\ 000$ km).

La précision requise pour les simulations correspond à des erreurs maximales sur la position finale de la fusée en $x$, $y$ et $z$ de $\pm 10$ m.

Pour simplifier le problème, on prendra le moment d'inertie de la fusée dans son propre référentiel comme étant celui d'un cylindre plein de rayon $R$ et de hauteur $H$ (hauteur totale de la fusée) et de masse $m(t)$ (masse totale de la fusée à l'instant $t$).