GG23LM

સંમેય સંખ્યાઓ

પ્રકરણ

1

1. પ્રાસ્તાવિક

ગણિતશાસ્ત્રમાં આપણે સુરેખ (સાદા) સમીકરણને વારંવાર ઉકેલીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ

$$x + 2 = 13 \qquad (1)$$

જો સમીકરણ (1)માં આપણે $x = 11$ મૂકીએ, તો આ સમીકરણનો ઉકેલ મળે છે. કેમ કે xની કિંમત 11 મૂકતાં સમીકરણનું સમાધાન થાય છે. આ સમીકરણનો ઉકેલ 11 જે એક **પ્રાકૃતિક સંખ્યા (Natural Number)** છે. જ્યારે સમીકરણ

$$x + 5 = 5 \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)નો ઉકેલ **પૂર્ણ સંખ્યા (Whole Number)** 0 (શૂન્ય) છે. જો આપણે માત્ર પ્રાકૃતિક સંખ્યા જ વિચારીએ તો સમીકરણ (2) ઉકેલી શકાય નહિ. સમીકરણ (2)ને ઉકેલવા માટે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સમૂહમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરવું પડે છે. આમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરતાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ મળે. પરંતુ પૂર્ણ સંખ્યાઓ પણ કેટલાંક સમીકરણ ઉકેલવા માટે પૂરતી નથી. જેવાં કે,

$$x + 18 = 5 \qquad (3)$$

તમે નિરીક્ષણ કર્યું કે, આવું કેમ ? આ સમીકરણ (3)ના ઉકેલ માટે (–13) સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **પૂર્ણાંક (ધન અને ઋણ)** સંખ્યા તરફ દોરી જાય છે. અહીં નોંધીએ કે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને સંલગ્ન છે. હવે કોઈ એમ પણ વિચારી શકે કે આપણી પાસે સુરેખ સમીકરણોને ઉકેલવા માટે પૂરતી સંખ્યામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે.

હવે નીચેનાં સમીકરણો ચકાસો.

$$2x = 3 \qquad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \qquad (5)$$

ઉપરનાં કયાં સમીકરણો માટે આપણને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ઉકેલ તરીકે મળતી નથી. (તપાસો) આ બાબતની ચકાસણી કરતાં સમીકરણ (4) માટે $\frac{3}{2}$ અને સમીકરણ (5) માટે $\frac{-7}{5}$ સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **સંમેય સંખ્યા** તરફ દોરી જાય છે.

આપણે **સંમેય સંખ્યા** પરની મૂળભૂત ક્રિયાઓ જોઈ ગયાં છીએ. હવે આપણે અત્યાર સુધી શીખેલ જુદા જુદા પ્રકારની સંખ્યાઓ માટેની ગાણિતિક ક્રિયાઓના ગુણધર્મો સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

1.2 સંમેય સંખ્યાઓના ગુણધર્મો

1.2.1 સંવૃત્તતા (Closure)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ (Whole numbers)

આવો, ફરી એક વખત સંક્ષેપમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે બધી ક્રિયાઓ પર સંવૃત્તતાના ગુણધર્મની ચર્ચા કરીએ.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 5 = 5$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $4 + 7 = ...$ શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે, કોઈપણ બે પૂર્ણ સંખ્યા a અને b માટે $a + b$ પૂર્ણ સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$5 - 7 = -2$ એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.
ગુણાકાર	$0 \times 3 = 0$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $3 \times 7 = ...$ શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે જો a અને b કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય તો તેનો ગુણાકાર ab પણ પૂર્ણ સંખ્યા જ હોય.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સંદર્ભમાં પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે સંવૃત્તતાના ગુણધર્મોની ચકાસણી કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (Integers numbers)

હવે આપણે ફરીથી યાદ કરી લઈએ કે કઈ ક્રિયાઓ અંગે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$-6 + 5 = -1$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-7 + (-5)$ શું પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? શું $8 + 5$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે, $a + b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$7 - 5 = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $5 - 7$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-6 - 8 = -14$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-6 - (-8) = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $8 - (-6)$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a - b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. ચકાસો કે $b - a$ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ગુણાકાર	$5 \times 8 = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું -5×8 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-5 \times (-8) = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. સામાન્ય રીતે કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ એક પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે જોયું કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે પણ બાદબાકી અને ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી. જ્યારે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે, પણ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ (Rational numbers)

તમે યાદ કરો કે જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$, (જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $q \neq 0$) સ્વરૂપે લખી શકાય તેવી સંખ્યાને **સંમેય સંખ્યાઓ** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે : $-\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ એ સંમેય સંખ્યાઓ છે. જ્યારે 0, –2, 4 ને પણ $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપે લખી શકાય છે. તેથી તે પણ સંમેય સંખ્યાઓ છે. (ચકાસણી કરો !)

(a) બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કઈ રીતે થાય તે તમે જાણો છો. ચાલો, થોડી સંમેય સંખ્યાઓની જોડીઓનો સરવાળો કરીએ.

$$\frac{3}{8} + \frac{(-5)}{7} = \frac{21 + (-40)}{56} = \frac{-19}{56}$$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$$\frac{-3}{8} + \frac{(-4)}{5} = \frac{-15 + (-32)}{40} = \ldots$$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$$\frac{4}{7} + \frac{6}{11} = \ldots$$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

આપણને બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં સંમેય સંખ્યા મળે છે. વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડીઓ માટે ચકાસણી કરો.

આપણે કહી શકીએ કે સરવાળાની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે, *અર્થાત્ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b$ પણ સંમેય સંખ્યા મળે છે.*

(b) શું બે સંમેય સંખ્યાઓનો તફાવત ફરીથી સંમેય સંખ્યા મળે ?

આપણી પાસે,

$$-\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21}$$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25-32}{40} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right) = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

થોડી વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડીઓ માટે પ્રયત્ન કરો. આપણે કહી શકીએ કે બાદબાકીની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. અર્થાત્, બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a - b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.

(c) ચાલો, બે સંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકારની ક્રિયાઓમાં શું થાય છે તે આપણે જોઈએ.

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}$; $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (બંનેનો ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{-4}{5} \times \frac{-6}{11} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

તમે સંમેય સંખ્યાઓની વધુ જોડીઓ લઈ ચકાસણી કરો કે તે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર ફરીથી સંમેય સંખ્યા આવે છે કે નહીં.

આપણે કહી શકીએ કે ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. *કેમ કે કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.*

(d) આપણે નોંધીએ કે... $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

શું તમે કહી શકો કે સંમેય સંખ્યાઓ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે ? કોઈ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \div 0$ એ **અવ્યાખ્યાયિત** છે. તેથી કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ **સંવૃત્ત નથી.** જો કે આપણે શૂન્યને અપવાદ ગણીએ તો કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

સંખ્યાઓ	**ક્રિયા માટે સંવૃત્ત**			
	સરવાળો	**બાદબાકી**	**ગુણાકાર**	**ભાગાકાર**
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	હા	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	હા	...	ના
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

1.2.2 ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

પૂર્ણ સંખ્યાઓની જુદી-જુદી ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી કોષ્ટકની ખાલી જગ્યા ભરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = ... + ... = ...$ કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b = b + a$	સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે જાતે ચકાસો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે ચકાસણી કરી અને નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	શું $5 - (-3) = -3 - 5$?	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

તમે જાણો છો કે બે સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો કઈ રીતે કરાય. ચાલો આપણે થોડીક સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કરીએ.

$\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{1}{21}$ અને $\frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{21}$

તેથી, $\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right)$

વળી, $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = ...$ અને $\frac{-8}{3} + \left(\frac{-6}{5}\right) = ...$

શું $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = \left(\frac{-8}{3}\right) + \left(\frac{-6}{5}\right)$ છે ?

શું $\frac{-3}{8} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \left(\frac{-3}{8}\right)$ છે ?

તમે જોયું કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરીએ તો મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં સરવાળાની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. જેમ કે, કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b = b + a$.

(b) બાદબાકી

શું $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$ છે ?

શું $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ છે ?

તમે જોશો કે સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી. અહીં નોંધો કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી અને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ પણ છે.

તેથી સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(c) ગુણાકાર

અહીં, $\frac{-7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{-42}{15} = \frac{6}{5} \times \left(\frac{-7}{3}\right)$

શું $\frac{-8}{9} \times \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{-4}{7} \times \left(\frac{-8}{9}\right)$ છે ?

આવી બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈ ગુણાકાર માટે ક્રમના ગુણધર્મની ચકાસણી કરો.

તમને જાણવા મળશે કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં ગુણાકાર કરીએ તો પણ મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ગુણાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.

સામાન્ય રીતે $a \times b = b \times a$ (કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે)

(d) ભાગાકાર

શું $\frac{-5}{4} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \div \left(\frac{-5}{4}\right)$ છે ?

તમે જોશો કે બંને બાજુઓ સમાન થતી નથી. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ભાગાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	ક્રમનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	...	...	ના

1.2.3 જૂથનો ગુણધર્મ (Associativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

નીચેના કોષ્ટકની મદદથી પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળા માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકી માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? શું $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણ સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરી અને છેલ્લા ખાનામાં કરેલ નોંધની ચકાસણી કરો. આ ઉપરાંત પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી જાતે કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ચાર ક્રિયાઓ અંગે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે કેમ તે નીચેના કોષ્ટકની મદદથી જોઈ શકાશે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	શું $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3] + (-4)$ થાય ? શું $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a + (b + c) = (a + b) + c$	સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	$5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ થાય ?	બાદબાકીની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $5 \times [(-7) \times (-8)]$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ થાય ? શું $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	શું $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ થાય ?	ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

આપણી પાસે,

$$\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \frac{-2}{3} + \left(\frac{-7}{30}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

$$\left[-\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{15} + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

તેથી $\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \left[\frac{-2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right)$

ઉપરાંત, $\frac{-1}{2} + \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ અને $\left[\frac{-1}{2} + \frac{3}{7}\right] + \left(\frac{-4}{3}\right)$ શોધો.

શું બંનેનો સરવાળો સમાન આવે છે ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ સરવાળો કરો અને તપાસો કે બંને સમાન આવે છે ? આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a + (b + c) = (a + b) + c$.*

(b) બાદબાકી

તમે જાણો છો કે બાદબાકીની ક્રિયામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો સંમેય સંખ્યાઓ માટે

શું $\frac{-2}{3} - \left[\frac{-4}{5} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{-2}{3} - \left(\frac{-4}{5}\right)\right] - \frac{1}{2}$ થાય ?

ઉપરની બાબતની ચકાસણી તમારી જાતે કરો.

સંમેય સંખ્યાઓ માટે બાદબાકીની ક્રિયામાં **જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.**

(c) ગુણાકાર

ચાલો આપણે ગુણાકારની ક્રિયા માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી કરીએ.

$$\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{-7}{3} \times \frac{10}{36} = \frac{-70}{108} = \frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9} = \ldots$$

આપણને મળશે કે, $\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9}$

શું $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-6}{7} \times \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}\right) \times \frac{4}{5}$ થાય ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ ગુણાકાર કરો અને ચકાસો કે બંને ગુણાકાર સમાન આવે છે કે નહીં.

આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$*

(d) ભાગાકાર

યાદ કરો કે, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો પછી સંમેય સંખ્યાઓ માટે શું ?

અહીં, જો $\frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$ ચકાસીએ.

ડા. બા. $= \frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$ [$\because \frac{5}{2}$ એ $\frac{2}{5}$નો વ્યસ્ત છે.)

$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{-5}{6}\right) = \ldots$

જ. બા.$= \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{1}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{2} \div \frac{2}{5} = \ldots$

શું ડા.બા. = જ.બા. થાય છે ? જાતે ચકાસણી કરો. તમને જાણવા મળશે કે સંમેય સંખ્યાઓ માટે ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	જૂથનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	...	...	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

ઉદાહરણ 1 : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

$= \frac{198}{462} + \left(\frac{-252}{462}\right) + \left(\frac{-176}{462}\right) + \left(\frac{105}{462}\right)$ [7, 11, 21 અને 22નો લ.સા.અ. 462 થાય.]

$= \frac{198 - 252 - 176 + 105}{462} = \frac{-125}{462}$

આ ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે પણ ઉકેલી શકાય :

$$\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \frac{5}{22}$$

$$= \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-8}{21}\right)\right] + \left[\frac{-6}{11} + \frac{5}{22}\right]$$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= \left[\frac{9 + (-8)}{21}\right] + \left[\frac{-12 + 5}{22}\right]$$

[7 અને 21નો લ.સા.અ 21; 11 અને 22નો લ.સા.અ. 22]

$$= \frac{1}{21} + \left(\frac{-7}{22}\right)$$

$$= \frac{22 - 147}{462}$$

$$= \frac{-125}{462}$$

શું તમને લાગે છે કે ક્રમનો ગુણધર્મ અને જૂથનો ગુણધર્મ આ ગણતરીને સરળ બનાવે છે ?

ઉદાહરણ 2 : કિંમત શોધો : $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

ઉકેલ : આપણી પાસે $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

$$= \left[-\frac{4 \times 3}{5 \times 7}\right] \times \left[\frac{15 \times (-14)}{16 \times 9}\right]$$

$$= \frac{-12}{35} \times \left(\frac{-35}{24}\right) = \frac{-12 \times (-35)}{35 \times 24} = \frac{1}{2}$$

આ ગણતરી બીજી રીતે પણ કરી શકાય.

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{5} \times \frac{15}{16}\right) \times \left[\frac{3}{7} \times \left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

1.2.4 શૂન્યની ભૂમિકા

નીચેના પદ જુઓ :

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (પૂર્ણાંક સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$\frac{-2}{7} + \ldots = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (સંમેય સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

તમે આવા સરવાળા પહેલાં પણ કરેલ છે. ચાલો, આવા બીજા વધુ સરવાળા કરીએ.

તમે શું જોયું ? જ્યારે પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરવામાં આવે તો મળતી સંખ્યા પણ પૂર્ણ છે. આવું પૂર્ણાંક અને સંમેય સંખ્યા માટે પણ બને છે.

સામાન્ય રીતે, $a + 0 = 0 + a = a$ જ્યાં, a એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

$b + 0 = 0 + b = b$ જ્યાં b એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

$c + 0 = 0 + c = c$ જ્યાં c એ સંમેય સંખ્યા છે.

આમ, શૂન્યને સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) કહે છે. તે પૂર્ણાંક અને પૂર્ણ સંખ્યા માટે પણ સરવાળાનો તટસ્થ ઘટક છે.

1.2.5 1ની ભૂમિકા

અહીં,

$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$ (પૂર્ણ સંખ્યાને 1 વડે ગુણતાં)

$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$

$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

તમે શું જોયું ?

જ્યારે આપણે સંમેય સંખ્યાને 1 વડે ગુણીએ છીએ, ત્યારે એ જ સંમેય સંખ્યા નીપજ તરીકે મળે છે. આ બાબતની અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ સાથે ગુણાકાર કરી ચકાસણી કરો. આપણને જોવા મળશે. કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \times 1 = 1 \times a = a$.

આપણે કહી શકીએ કે 1 એ ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) છે.

શું 1 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ? શું તે પૂર્ણ સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો કોઈ ગુણધર્મ સંમેય સંખ્યા માટે સાચો હોય તો તે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ સાચો હોય ? પૂર્ણ સંખ્યા માટે શું કહી શકાય ? ક્યારે સાચો અને ક્યારે સાચો નહીં ?

1.2.6 સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા (Negative of a Number)

જ્યારે આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાનો અભ્યાસ કરતાં હતાં ત્યારે વિરોધી પૂર્ણાંકો પણ જોઈ ગયા છીએ. 1ની વિરોધી સંખ્યા શું ? તે -1 છે, કેમ કે $1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$

તેથી શું આપણે કહી શકીએ કે (-1) ની વિરોધી સંખ્યા કઈ ? તેનો જવાબ 1 છે.

તેમજ, $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$, તેથી આપણે કહી શકીએ છે કે 2ની **વિરોધી સંખ્યા અથવા વિરોધી ઘટક** -2 અને તેનું ઉલટું પણ કહી શકીએ કે -2 ની વિરોધી સંખ્યા 2 છે. સામાન્ય રીતે, કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, $a + (-a) = (-a) + a = 0$. તેથી a એ $-a$ની વિરોધી સંખ્યા છે. તેમજ $-a$ એ $+a$ની વિરોધી સંખ્યા છે.

સંમેય સંખ્યા $\frac{2}{3}$ માટે,

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$$

વળી, $\left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$ (શા માટે ?)

તેવી જ રીતે, $\frac{-8}{9} + \ldots = \ldots + \left(\frac{-8}{9}\right) = 0$

$$\ldots + \left(\frac{-11}{7}\right) = \left(\frac{-11}{7}\right) + \ldots = 0$$

આમ, વ્યાપક રૂપે, કોઈ સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ માટે, જો $\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right) = 0$, તો આપણે કહી શકીએ કે $\frac{-a}{b}$ એ $\frac{a}{b}$ની **વિરોધી સંખ્યા (Additive Inverse) છે.** તેમજ ઊલટી રીતે પણ કહી શકાય કે $\frac{a}{b}$ એ $\frac{-a}{b}$ની વિરોધી સંખ્યા છે.

1.2.7 વ્યસ્ત સંખ્યા (Reciprocal)

કઈ સંખ્યા વડે $\frac{8}{21}$ને ગુણવાથી મળતી સંખ્યા 1 હોય ? સ્પષ્ટ છે કે તે સંખ્યા $\frac{21}{8}$ જ હોય કેમ કે,

$\frac{8}{21} \times \frac{21}{8} = 1$

તેવી જ રીતે $\frac{-5}{7}$ ને $\frac{7}{-5}$ વડે ગુણવાથી 1 મળે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે, $\frac{8}{21}$ની વ્યસ્ત સંખ્યા $\frac{21}{8}$ છે, જ્યારે $\frac{-5}{7}$ની વ્યસ્ત સંખ્યા $\frac{7}{-5}$ છે.

તમે કહી શકશો કે શૂન્યની વ્યસ્ત સંખ્યા કઈ ?

શું એવી કોઈ સંમેય સંખ્યા મળે કે જેને 0 સાથે ગુણવાથી 1 મળે ? ના, તેથી આપણે કહી શકીએ કે શૂન્યની વ્યસ્ત સંખ્યા ન મળે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે સંમેય સંખ્યા $\frac{c}{d}$ માટે, જો કોઈ શૂન્યેત્તર સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ હોય અને $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$, તો $\frac{c}{d}$ એ $\frac{a}{b}$ની **વ્યસ્ત સંખ્યા (Reciprocal)** છે.

1.2.8 સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારનું સરવાળા પર વિભાજન

આ બાબતને સમજવા માટે, ચાલો $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{3}$ અને $\frac{-5}{6}$ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ.

$$\text{હવે, } \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{(4) + (-5)}{6}\right\}$$

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$\text{પણ } \frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{-3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$$

અને $\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6} = \frac{5}{8}$

આથી, $\left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

આમ, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$

ગુણાકારનું સરવાળા પર અને બાદબાકી પર વિભાજન

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a, b અને c માટે,

$a\ (b + c) = ab + ac$

$a\ (b - c) = ab - ac$

પ્રયત્ન કરો

વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી શોધો : (i) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{12}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16} \times \frac{4}{12}\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times \frac{-3}{9}\right\}$

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યાઓ જણાવો :

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

ઉકેલ : (i) $\frac{7}{19}$ એ $\frac{-7}{19}$ની વિરોધી સંખ્યા છે, કેમ કે

$\frac{-7}{19} + \frac{7}{19} = \frac{-7+7}{19} = \frac{0}{19} = 0$

(ii) $\frac{-21}{112}$ એ $\frac{21}{112}$ની વિરોધી સંખ્યા છે. (ચકાસણી કરો.)

જ્યારે તમે વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરો છો ત્યારે તમે કોઈ એક ગુણાકારને બે ગુણાકારોના સરવાળા અથવા બાદબાકી સ્વરૂપે વિભાજિત કરો છો.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલ સંખ્યાને x તરીકે લઈ ચકાસો કે $-(-x) = x$.

(i) $x = \frac{13}{17}$ (ii) $x = \frac{-21}{31}$

ઉકેલ : (i) અહીં, $x = \frac{13}{17}$ છે.

$x = \frac{13}{17}$ ની વિરોધી સંખ્યા $-x = \frac{-13}{17}$ હોવાથી $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$

સમતા $\frac{13}{17} + \left(\frac{-13}{17}\right) = 0$ દર્શાવે છે કે $\frac{13}{17}$ ની વિરોધી સંખ્યા $\frac{-13}{17}$ છે.

અથવા $-\left(\frac{-13}{17}\right) = \frac{13}{17}$ એટલે કે $-(-x) = x$

(ii) $x = \frac{-21}{31}$ની વિરોધી સંખ્યા $-x = \frac{21}{31}$ હોવાથી $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$

સમતા $\frac{-21}{31} + \frac{21}{31} = 0$ દર્શાવે છે કે $\frac{-21}{31}$ ની વિરોધી સંખ્યા $\frac{21}{31}$ છે.

એટલે કે $-(-x) = x$.

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો : $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5}$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

[ક્રમનો ગુણધર્મ]

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{-3}{7}\right) \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

$= \frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{14}$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= \frac{-3}{7} \times 1 - \frac{1}{14}$

$= \frac{-6 - 1}{14}$

$= \frac{-1}{2}$

સ્વાધ્યાય 1.1

1. યોગ્ય ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી કિંમત શોધો.

(i) $\frac{-2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5} \times \left(\frac{-3}{7}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{14} \times \frac{2}{5}$

2. નીચે આપેલ સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા લખો.

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$

(v) $\frac{19}{-6}$

3. ચકાસણી કરો : $-(-x) = x$

(i) $x = \frac{11}{15}$ (ii) $x = -\frac{13}{17}$

4. નીચે આપેલ સંખ્યાનો વ્યસ્ત જણાવો.

(i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{7}$

(v) $-1 \times \frac{-2}{5}$ (vi) -1

5. નીચે આપેલ ગુણાકારની ક્રિયામાં કયા ગુણધર્મનો ઉપયોગ થયેલ છે તે જણાવો.

(i) $\frac{-4}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-13}{17} \times \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \times \frac{-13}{17}$

(iii) $\frac{-19}{29} \times \frac{29}{-19} = 1$

6. સંખ્યા $\frac{6}{13}$ ને $\frac{-7}{16}$ના વ્યસ્ત વડે ગુણો.

7. $\frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{4}{3}\right)$ની $\left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \frac{4}{3}$ રીતે ગણતરી કયા ગુણધર્મના ઉપયોગથી કરી શકાય તે જણાવો.

8. શું $\frac{8}{9}$ એ સંખ્યા $-1\frac{1}{8}$નો વ્યસ્ત છે ? કેમ અથવા કેમ નહીં ?

9. શું 0.3 એ $3\frac{1}{3}$નો વ્યસ્ત છે ? કેમ અથવા કેમ નહીં ?

10. લખો.
(i) એવી સંમેય સંખ્યા કે જેનો વ્યસ્ત ન હોય.
(ii) એવી સંમેય સંખ્યાઓ કે જે તેના વ્યસ્તને સમાન હોય.
(iii) એવી સંમેય સંખ્યા કે જે તેની વિરોધી સંખ્યાને સમાન હોય.

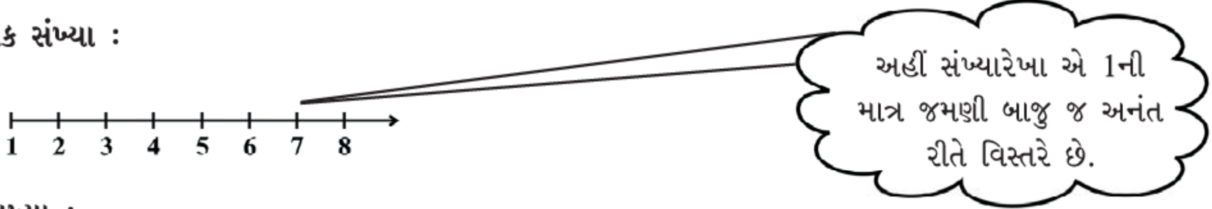
11. નીચેની ખાલી જગ્યા પૂરો.
(i) શૂન્યનો વ્યસ્ત ______ .
(ii) સંખ્યાઓ ______ અને ______ પોતાના જ વ્યસ્ત છે.
(iii) -5 ની વ્યસ્ત સંખ્યા ______ છે.
(iv) $\frac{1}{x}$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા ______ છે, કે જ્યાં $x \neq 0$.
(v) બે સંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર હંમેશા ______ જ હોય.
(vi) ધન સંમેય સંખ્યાની વ્યસ્ત સંખ્યા ______ હોય.

1.3 સંમેય સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ

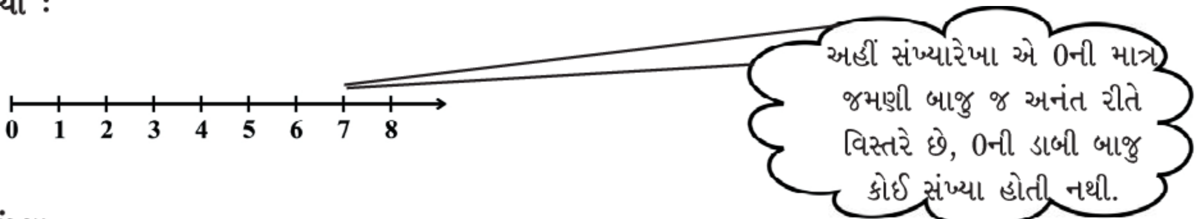
4XDSN7

તમે સંખ્યારેખા પર પ્રાકૃતિક સંખ્યા, પૂર્ણ સંખ્યા, પૂર્ણાંક સંખ્યા અને સંમેય સંખ્યાનું નિરૂપણ અગાઉ શીખી ગયા છો. ચાલો, આપણે તેનું પુનરાવર્તન કરી લઈએ.

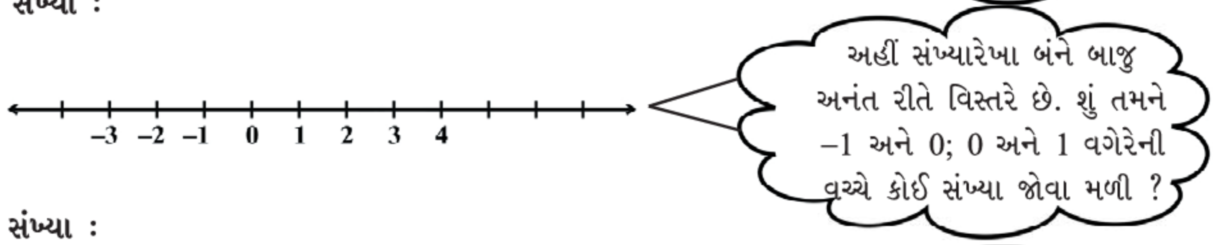
પ્રાકૃતિક સંખ્યા :

(i)


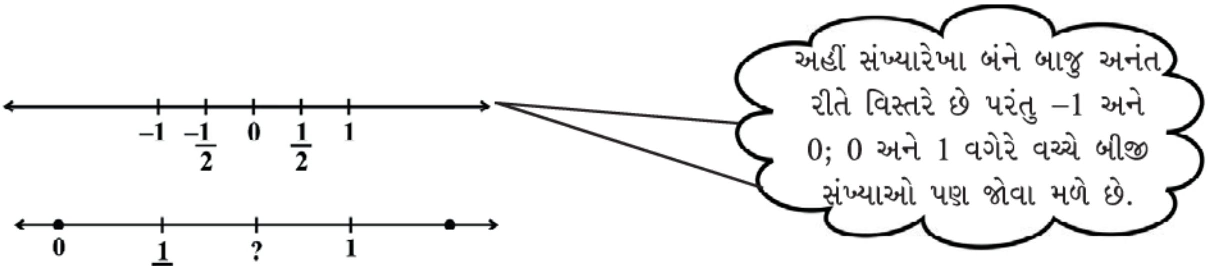
પૂર્ણ સખ્યા :

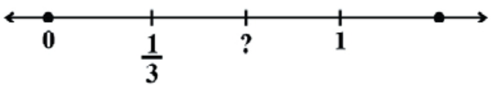
(ii)


પૂર્ણાંક સંખ્યા :

(iii)


સંમેય સંખ્યા :

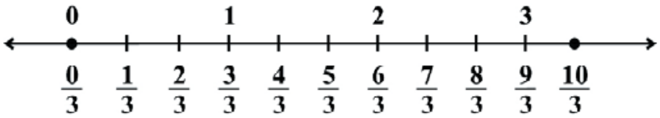
(iv)


(v)


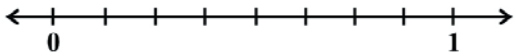
ઉપર સંખ્યારેખા(iv)માં 0 અને 1ની બરોબર વચ્ચે એક બિંદુ આવે છે, જેને $\frac{1}{2}$ વડે દર્શાવેલ છે. વળી, સંખ્યારેખા(v)માં બિંદુ $\frac{1}{3}$ એ 0 થી 1ના ત્રણ સરખા ભાગ કરે છે, તેથી તેને $\frac{1}{3}$ વડે દર્શાવેલ છે. તમે સંખ્યારેખા(v)માં બીજો ભાગ કે જેને (?) વડે દર્શાવેલ છે, ત્યાં કઈ સંમેય સંખ્યા લખશો ?

આ બિંદુ 0 થી જમણી બાજુ $\frac{1}{3}$થી બમણું દૂર છે. તેથી તેને $\frac{2}{3}$ વડે દર્શાવીશું. આ જ રીતે તમે સરખા ભાગ કરીને સંખ્યારેખા પર સંખ્યાઓ દર્શાવી શકો છો. આ પ્રમાણે પછીનું બિંદુ 1 થી દર્શાવેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $\frac{3}{3}$ અને 1 એ એક જ બિંદુ છે. ત્યાર પછી $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$ (અથવા 2), $\frac{7}{3}$ વગેરે આવે જે સંખ્યારેખા (vi) પર દર્શાવેલ છે.

(vi)

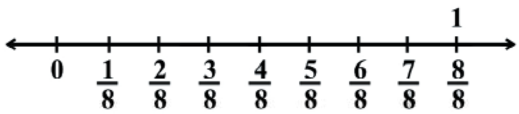


તેવી જ રીતે, $\frac{1}{8}$ સંખ્યાને સંખ્યારેખા પર દર્શાવવા માટે 0 થી 1 વચ્ચેની સંખ્યારેખાના આઠ સરખા ભાગ કરવામાં આવે છે. જેમ કે,



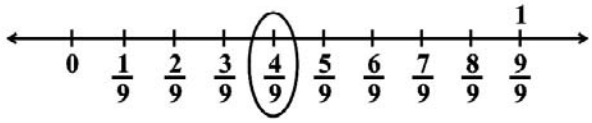
અહીં આપણે પ્રથમ ભાગના બિંદુને $\frac{1}{8}$ તરીકે દર્શાવીશું. બીજા ભાગના બિંદુને $\frac{2}{8}$, ત્રીજા ભાગના બિંદુને $\frac{3}{8}$ તેવી જ રીતે ક્રમશઃ આગળ બિંદુઓને દર્શાવીશું. જે સંખ્યારેખા (vii)માં બતાવેલ છે.

(vii)

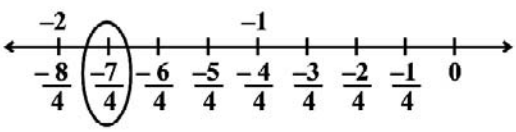


કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાનું આ રીતે સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરી શકાય. આપણે જાણીએ છીએ કે સંખ્યારેખામાં છેદમાં આપેલ સંખ્યા એ એક એકમના કેટલા ભાગ કરવા તે બતાવે છે. જ્યારે અંશમાં આપેલ સંખ્યા તે કરવામાં આવેલ ભાગમાંથી કેટલામો ભાગ છે તે દર્શાવે છે. તેથી સંમેય સંખ્યા $\frac{4}{9}$ નો અર્થ એ કે 9 સમાન ભાગનો ચોથો ભાગ કે જે શૂન્યની જમણી બાજુ છે. [સંખ્યારેખા (viii)] અને $\frac{-7}{4}$ માટે $\frac{1}{4}$ લંબાઈવાળા 7 ભાગ કરવાના કે જે શૂન્યથી ડાબી બાજુ હોય અને સાતમો ભાગ એ $\frac{-7}{4}$ દર્શાવે છે. [સંખ્યારેખા (ix)]

(viii)



(ix)



પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલ સંખ્યારેખામાં અંગ્રેજી મૂળાક્ષરથી દર્શાવેલ બિંદુઓને સંમેય સંખ્યાથી દર્શાવો :

(i)

	A			B	C			D	E			
$\frac{0}{5}$	?	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	?	?	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	?	?	$\frac{10}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$

(ii)

	J			I	H		G			F		
$\frac{-12}{6}$	?	$\frac{-10}{6}$	$\frac{-9}{6}$	?	?	$\frac{-6}{6}$	?	$\frac{-4}{6}$	$\frac{-3}{6}$	?	$\frac{-1}{6}$	$\frac{0}{6}$

1.4 બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ

શું તમે 1 અને 5 વચ્ચેની પ્રાકૃતિક સંખ્યા કહી શકો ?

તે 2, 3 અને 4 છે. 7 અને 9 ની વચ્ચે કેટલી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે ?

માત્ર એક અને તે સંખ્યા 8 છે.

10 અને 11 ની વચ્ચે કેટલી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે ? સ્પષ્ટ છે કે એક પણ નહિ.

-5 અને 4 વચ્ચે આવતી પૂર્ણાંક સંખ્યાની યાદી બનાવો. તે યાદી $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ છે.

-1 અને 1 વચ્ચે કેટલી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય ?

-9 અને -10 વચ્ચે કેટલી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય ?

અહીં, તમને બે પ્રાકૃતિક કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વચ્ચે આવેલી પ્રાકૃતિક કે પૂર્ણાંક સંખ્યાની ચોક્કસ સંખ્યા મળશે.

$\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ વચ્ચે કેટલી સંમેય સંખ્યાઓ મળશે ?

તમને એમ થશે કે તે સંખ્યાઓ માત્ર $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ અને $\frac{6}{10}$ છે.

પરંતુ તમે $\frac{3}{10}$ ને $\frac{30}{100}$ અને $\frac{7}{10}$ ને $\frac{70}{100}$ વડે લખી શકો. તેથી સંખ્યાઓ $\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}, \ldots \frac{68}{100}$, $\frac{69}{100}$. આ બધી જ સંખ્યાઓ $\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ ની વચ્ચે આવેલી હોય છે. આ 39 સંખ્યાઓ થાય.

ઉપરાંત $\frac{3}{10}$ ને $\frac{3000}{10000}$ વડે અને $\frac{7}{10}$ ને $\frac{7000}{10000}$ વડે પણ દર્શાવી શકાય. તેથી આપણને $\frac{3001}{1000}$, $\frac{3002}{1000}, \frac{3003}{1000}, \ldots, \frac{6998}{1000}, \frac{6999}{1000}$ સંખ્યાઓ પણ $\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ વચ્ચે આવેલી સંખ્યાઓ છે. આ સંખ્યાઓ 3999 જેટલી થાય.

આ રીતે આગળ ને આગળ આપણે $\frac{3}{10}$ અને $\frac{7}{10}$ વચ્ચે સંમેય સંખ્યાઓ ઉમેરતાં જઈ શકીએ. તેથી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અને પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જેમ, બે સંખ્યાઓની વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યાઓની સંખ્યા નિશ્ચિત નથી. અહીં બીજું ઉદાહરણ પણ આપેલ છે.

$\frac{-1}{10}$ અને $\frac{3}{10}$ વચ્ચે કેટલી સંમેય સંખ્યાઓ હશે ?

સ્પષ્ટ છે કે $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}$ સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{-1}{10}$ અને $\frac{3}{10}$ વચ્ચે છે.

જો આપણે $\frac{-1}{10}$ ને $\frac{-10000}{100000}$ અને $\frac{3}{10}$ ને $\frac{30000}{100000}$ વડે દર્શાવીએ, તો આપણને $\frac{-9999}{100000}$, $\frac{-9998}{100000}$, ... , $\frac{-29998}{100000}$, $\frac{-29999}{100000}$ સંખ્યાઓ $\frac{-1}{10}$ અને $\frac{3}{10}$ વચ્ચે મળે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે આપેલ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે આપણને અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ મળે.

ઉદાહરણ 6 : –2 અને 0 વચ્ચે આવતી કોઈ પણ ત્રણ સંમેય સંખ્યા લખો.

ઉકેલ : –2 ને $\frac{-20}{10}$ અને 0 ને $\frac{0}{10}$ વડે દર્શાવી શકાય.

તેથી $\frac{-19}{10}$, $\frac{-18}{10}$, $\frac{-17}{10}$, $\frac{-16}{10}$, $\frac{-15}{10}$, ... , $\frac{-1}{10}$ એ –2 અને 0 ની વચ્ચે આવતી સંમેય સંખ્યાઓ છે.

ઉદાહરણ 7 : $\frac{-5}{6}$ અને $\frac{5}{8}$ વચ્ચે આવતી કોઈ પણ દસ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે $\frac{-5}{6}$ અને $\frac{5}{8}$ ને સમચ્છેદી બનાવીશું. એટલે કે બંને સંખ્યાઓના છેદ સરખા કરીશું.

તેથી $\frac{-5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-20}{24}$ અને $\frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$

તેથી $\frac{-19}{24}$, $\frac{-18}{24}$, $\frac{-17}{24}$, ... , $\frac{14}{24}$ એ સંખ્યાઓ $\frac{-20}{24}$ અને $\frac{15}{24}$ વચ્ચે આવેલી સંમેય સંખ્યાઓ છે. આમાંથી આપણે ગમે તે 10 લઈ શકીએ.

બીજી રીત

ચાલો આપણે 1 અને 2 વચ્ચે આવતી સંમેય સંખ્યાઓ શોધીએ. 1.5 અથવા $1\frac{1}{2}$ અથવા $\frac{3}{2}$ એ 1 અને 2 વચ્ચે આવતી સંખ્યાઓ પૈકીની એક સંખ્યા છે. જે 1 અને 2નો મધ્યક છે. તમે ધોરણ 7 માં મધ્યક વિશે શીખી ગયા છો.

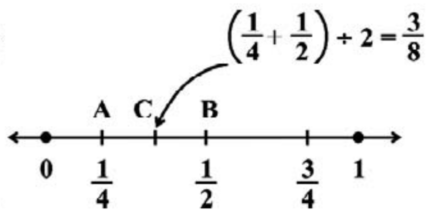
આપણે કહી શકીએ કે, આપેલ કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ માટે, એવું જરૂરી નથી કે આપેલ બે સંખ્યાઓની વચ્ચે એક પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે, પરંતુ એક સંમેય સંખ્યા તો અવશ્ય મળે.

આપણે મધ્યકના ખ્યાલનો ઉપયોગ કરી આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે આપેલ સંમેય સંખ્યાઓ શોધીશું.

ઉદાહરણ 8 : $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે આપેલ સંખ્યાનો મધ્યક શોધીશું.

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \div 2 = \left(\frac{1+2}{4}\right) \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$



આમ, $\frac{3}{8}$ એ $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવેલી સંમેય સંખ્યા છે.

આ સંખ્યાને આપણે સંખ્યારેખા પર પણ નિરૂપણ કરી શકીએ.

અહીં આપણને ABનું મધ્યબિંદુ C મળે છે. બિંદુ C એ $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{8}$ સંખ્યા બતાવે છે.

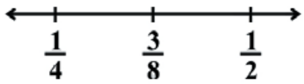
ઉપરાંત $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

જો a અને b બે સંમેય સંખ્યાઓ હોય, તો $\frac{a+b}{2}$ એ સંમેય સંખ્યાઓ a અને b વચ્ચે આવેલ સંમેય સંખ્યા છે. જ્યાં $a < \frac{a+b}{2} < b$.

આ બાબત ફરીથી સાબિત કરે છે કે આપેલ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ હોય.

ઉદાહરણ 9 : $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચેની ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે આપેલ બંને સંમેય સંખ્યાનો મધ્યક મેળવીએ. ઉપરના ઉદાહરણમાં જણાવ્યા મુજબ $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$નો મધ્યક $\frac{3}{8}$ છે અને $\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

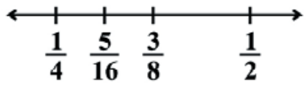


હવે આપણે સંમેય સંખ્યા $\frac{1}{4}$ અને $\frac{3}{8}$ વચ્ચેની બીજી સંમેય સંખ્યા શોધીએ.

તેના માટે ફરીથી $\frac{1}{4}$ અને $\frac{3}{8}$નો મધ્યક મેળવીએ.

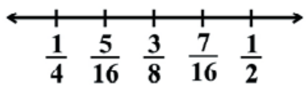
$\therefore \quad \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \div 2 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$ અને

$\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$



હવે $\frac{3}{8}$ અને $\frac{1}{2}$ નો મધ્યક મેળવીએ.

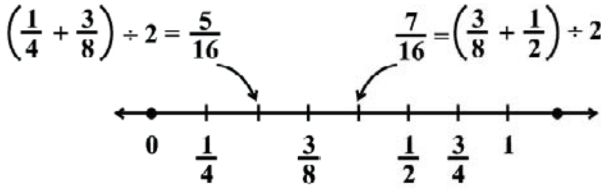
$\therefore \quad \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$



આમ, આપણે $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ જેવી સંખ્યાઓ મેળવી.

આમ, $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}$ એ ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવેલી સંખ્યાઓ છે.

આ બાબતને નીચે મુજબ સંખ્યારેખા પર સ્પષ્ટ રીતે દર્શાવી શકાય :



આ રીતે આપણે આપેલ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે ઇચ્છીએ તેટલી સંમેય સંખ્યાઓ મેળવી શકીએ. અહીં ફરીથી આપણે નોંધીએ કે કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ મળે.

સ્વાધ્યાય : 1.2

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરો.

   (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$

2. સંખ્યાઓ $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

3. 2 થી નાની હોય તેવી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

4. $\frac{-2}{5}$ અને $\frac{1}{2}$ વચ્ચે આવતી દસ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

5. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ વચ્ચે આવતી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

   (i) $\frac{2}{3}$ અને $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ અને $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{2}$

6. -2 થી મોટી હોય તેવી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

7. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{3}{4}$ વચ્ચે આવતી હોય તેવી દસ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંમેય સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા અંગે **સંવૃત્ત** હોય છે.

2. સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા દરમ્યાન,

   (i) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ક્રમના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.

   (ii) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **જૂથના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.

3. સંમેય સંખ્યા શૂન્ય (0) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **સરવાળાનો તટસ્થ** ઘટક છે.

4. સંમેય સંખ્યા 1 (એક) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ગુણાકારનો તટસ્થ** ઘટક છે.

5. સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ ની વિરોધી સંખ્યા $\frac{-a}{b}$ છે. ઉલટું પણ સાચું છે.

6. જો $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ હોય તો સંમેય સંખ્યા $\frac{a}{b}$ એ સંમેય સંખ્યા $\frac{c}{d}$ નો વ્યસ્ત છે.

7. સંમેય સંખ્યા માટે **વિભાજનનો ગુણધર્મ** : સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે,

   $a\,(b + c) = ab + ac$ અને $a\,(b - c) = ab - ac$

8. સંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરી શકાય.

9. કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ આવેલ હોય છે. બે સંખ્યાઓના **મધ્યક**નો ખ્યાલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની સંખ્યાઓ શોધવામાં મદદરૂપ બને છે.