Specialeforsvar

Johannes Jensen

Aarhus Universitet

23. juni 2022

Nu har vi fået karakteriseret nogle af de vigtige egenskaber for Voronoi diagrammet for P.

Nu har vi fået karakteriseret nogle af de vigtige egenskaber for Voronoi diagrammet for P.

Vi arbejder os nu i mod at beskrive Fortune's algoritme, som er en $\mathcal{O}(n \log n)$ algoritme til at beregne $\mathrm{Vor}(P)$.

Teoretiske antagelser:

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.
2. Punkterne i P ligger ikke alle på den samme linje.

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.
2. Punkterne i P ligger ikke alle på den samme linje.
3. Der ligger ikke mere end 3 punkter fra P på samme cirkel.

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell \colon y = \ell_y$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ så er

$$\mathrm{dist}(p, \ell) = |p_y - \ell_y| \, .$$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ så er

$$\operatorname{dist}(p, \ell) = |p_y - \ell_y| \,.$$

Vi definerer så

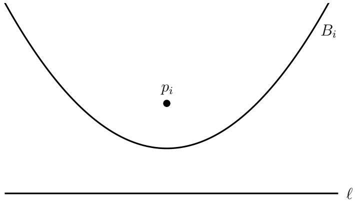
$$B_i = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(q, p_i) = \operatorname{dist}(q, \ell)\}$$

for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

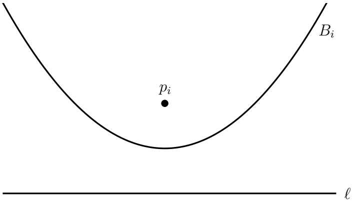
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:

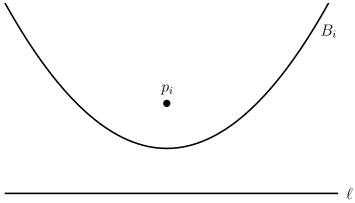


Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



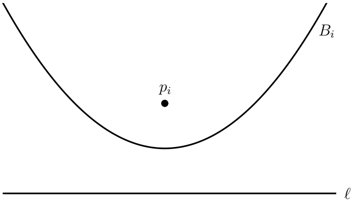
Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$.

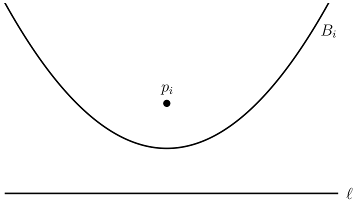
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2$$

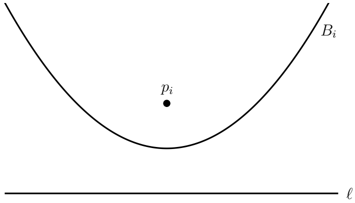
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



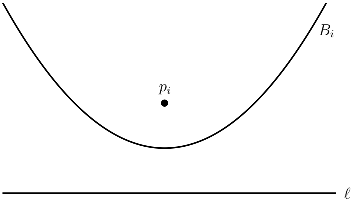
Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\operatorname{dist}(q,p)^2 = \operatorname{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Da $p_y \neq \ell_y$ kan vi omskrive til

$$y = \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2),$$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Da $p_y \neq \ell_y$ kan vi omskrive til

$$y = \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2),$$

hvilket parametriserer B_i hvis $(p_i)_y > \ell_y$.

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2$$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

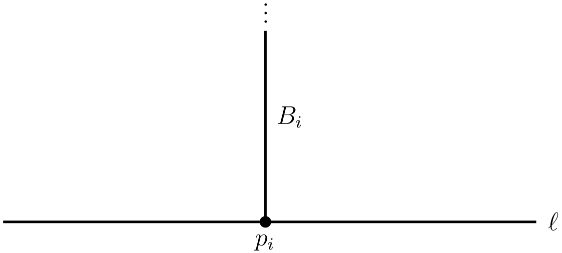
$$\operatorname{dist}(q,p)^2 = \operatorname{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

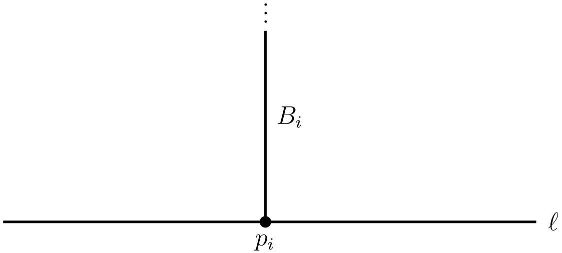
Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.



Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.

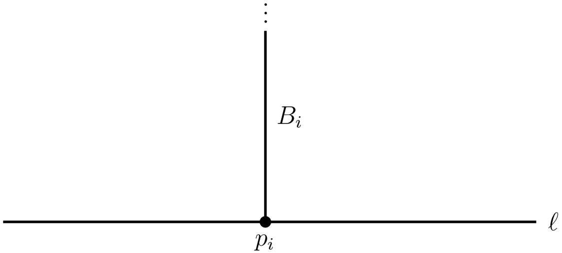


For $(p_i)_y < \ell_y$ definerer vi $B_i = \varnothing$.

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.



For $(p_i)_y < \ell_y$ definerer vi $B_i = \varnothing$. (Bemærk fejl i speciale på s. 19!)

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \left\{ \right.$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \end{cases}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) =$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)\}.$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht.* ℓ som mængden

$$G \cup V,$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for *g*rafdel er givet ved

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for $g$rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for *g*rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

og V for *v*ertikaldel er givet ved

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

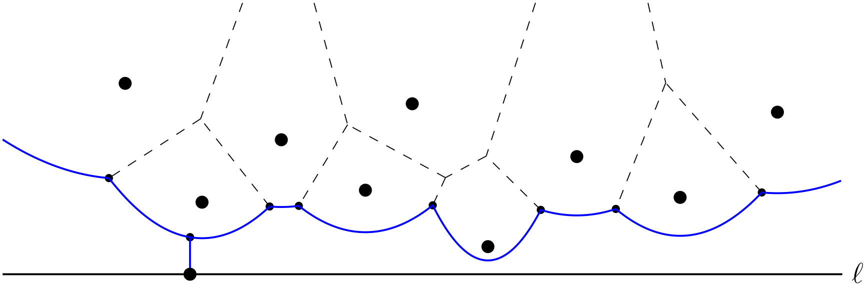
hvor G for *g*rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

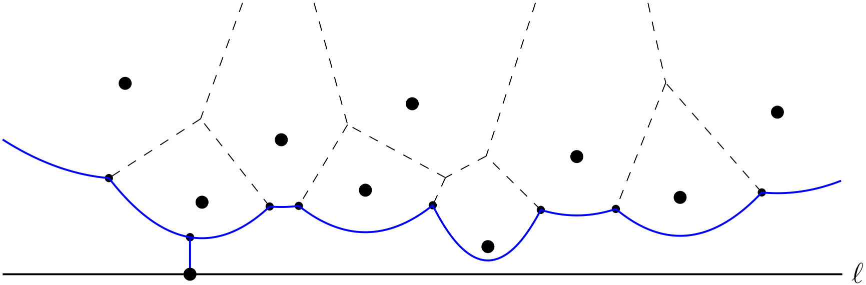
og V for *v*ertikaldel er givet ved

$$V = \{B_i - (p_i)_x \times (\mathrm{LB}((p_i)_x), \infty) \mid i = 1, \ldots, n \text{ hvor } (p_i)_y = \ell - y\}.$$

Et eksempel på kystlinjen er givet her:

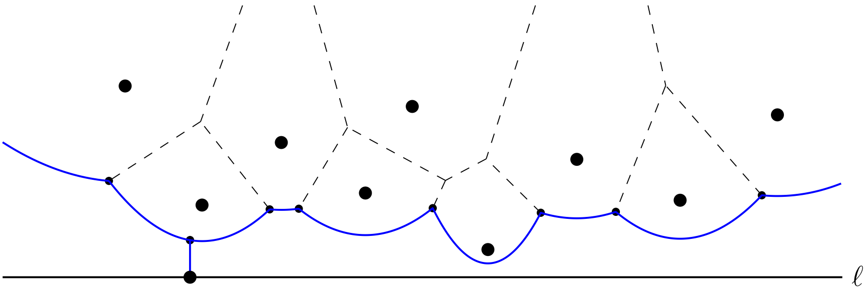


Et eksempel på kystlinjen er givet her:



De stykvis glatte kurver udgør G

Et eksempel på kystlinjen er givet her:



De stykvis glatte kurver udgør G, mens det vertikale linjestykke udgør V.

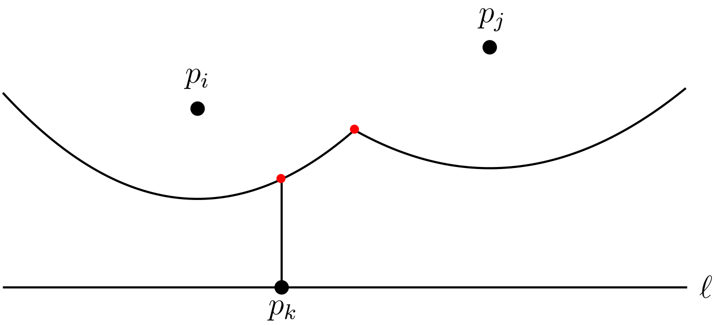
Definition (Breakpoint)

Definition (Breakpoint)

Ethvert punkt q på kystlinjen således at $q \in B_i \cap B_j$ for to forskellige i, j kaldes for et *breakpoint*.

Definition (Breakpoint)

Ethvert punkt q på kystlinjen således at $q \in B_i \cap B_j$ for to forskellige i, j kaldes for et *breakpoint*.



Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Vi viser nu at breakpoints optegner $\text{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \text{Vor}_{\text{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1):

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_G(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\text{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\text{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \text{Vor}_G(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$, hvilket vil sige at

$$\text{dist}(q, \ell) = \text{dist}(q, p_i) = \text{dist}(q, p_j).$$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$, hvilket vil sige at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Sidste lighedstegn giver at $q \notin \mathcal{V}(p_k)$ for alle k

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$, hvilket vil sige at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Sidste lighedstegn giver at $q \notin \mathcal{V}(p_k)$ for alle k, hvormed $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor_G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor_G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2):

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\text{Vor}_\text{G}(P)$.
2. For alle $q \in \text{Vor}_\text{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \text{Vor}_\text{G}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\text{Vor}_\text{G}(P)$.
2. For alle $q \in \text{Vor}_\text{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \text{Vor}_\text{G}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \text{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\text{dist}(q, \ell) = \text{dist}(q, p_i) = \text{dist}(q, p_j).$$

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_G(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q, og q er på kystlinjen da der ikke findes et site p_k med $k \neq i, j$ tættere på q

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q, og q er på kystlinjen da der ikke findes et site p_k med $k \neq i, j$ tættere på q, pr. definition af $C_P(q)$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q, og q er på kystlinjen da der ikke findes et site p_k med $k \neq i, j$ tættere på q, pr. definition af $C_P(q)$. **QED.**

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

Definition (Site begivenhed)

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

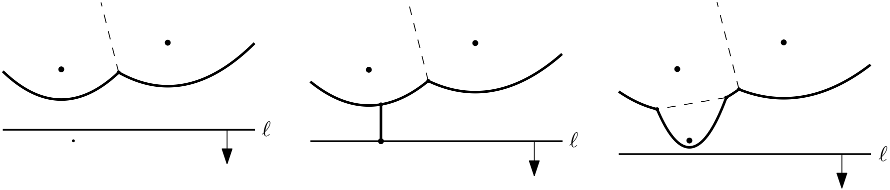
Definition (Site begivenhed)

Når ℓ møder et punkt $p_i \in P$, dvs. når $\ell_y = (p_i)_y$, så siger vi at vi møder en *site begivenhed*.

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

Definition (Site begivenhed)

Når ℓ møder et punkt $p_i \in P$, dvs. når $\ell_y = (p_i)_y$, så siger vi at vi møder en *site begivenhed*.



Lemma

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny kurve kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny kurve kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny kurve kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis.