Specialeforsvar

Johannes Jensen

Aarhus Universitet

23. juni 2022

Nu har vi fået karakteriseret nogle af de vigtige egenskaber for Voronoi diagrammet for P.

Nu har vi fået karakteriseret nogle af de vigtige egenskaber for Voronoi diagrammet for P.

Vi arbejder os nu i mod at beskrive Fortune's algoritme, som er en $\mathcal{O}(n \log n)$ algoritme til at beregne $\mathrm{Vor}(P)$.

Teoretiske antagelser:

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.
2. Punkterne i P ligger ikke alle på den samme linje.

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.
2. Punkterne i P ligger ikke alle på den samme linje.
3. Der ligger ikke mere end 3 punkter fra P på samme cirkel.

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell \colon y = \ell_y$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ så er

$$\operatorname{dist}(p, \ell) = |p_y - \ell_y| \,.$$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ så er

$$\operatorname{dist}(p, \ell) = |p_y - \ell_y|\,.$$

Vi definerer så

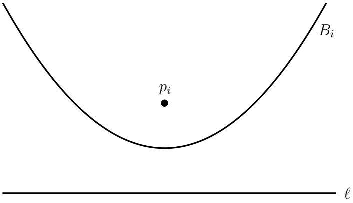
$$B_i = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(q, p_i) = \operatorname{dist}(q, \ell)\}$$

for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

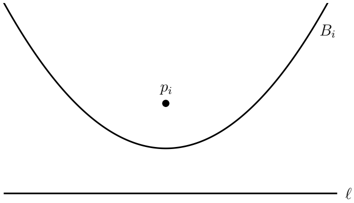
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:

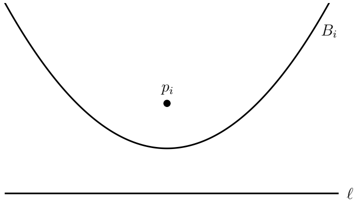


Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



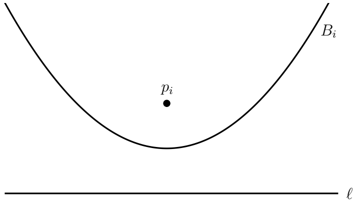
Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$.

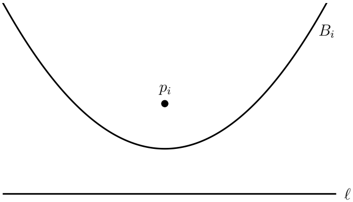
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2$$

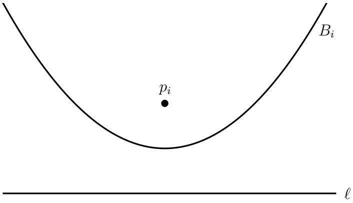
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\operatorname{dist}(q,p)^2 = \operatorname{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



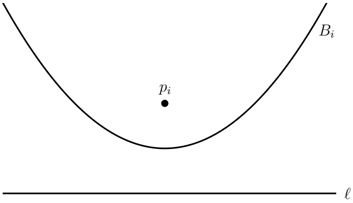
Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Da $p_y \neq \ell_y$ kan vi omskrive til

$$y = \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2),$$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Da $p_y \neq \ell_y$ kan vi omskrive til

$$y = \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2),$$

hvilket parametriserer B_i hvis $(p_i)_y > \ell_y$.

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2$$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

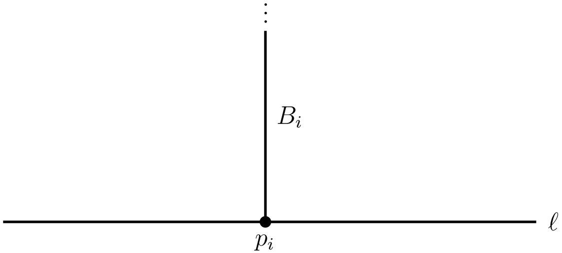
$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

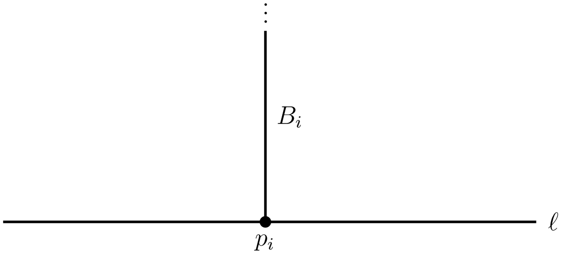
Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.



Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\operatorname{dist}(q, p)^2 = \operatorname{dist}(q, \ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.

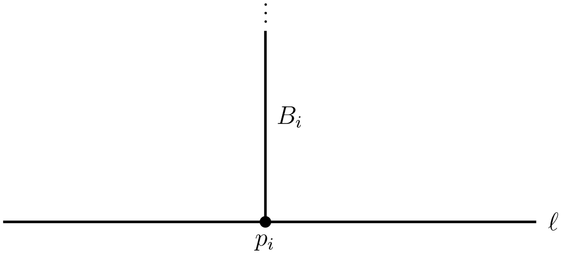


For $(p_i)_y < \ell_y$ definerer vi $B_i = \varnothing$.

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\text{dist}(q,p)^2 = \text{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.



For $(p_i)_y < \ell_y$ definerer vi $B_i = \varnothing$. (Bemærk fejl i speciale på s. 19!)

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right.$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \end{cases}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) =$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht.* ℓ som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for *g*rafdel er givet ved

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for *g*rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for *g*rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

og V for *v*ertikaldel er givet ved

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

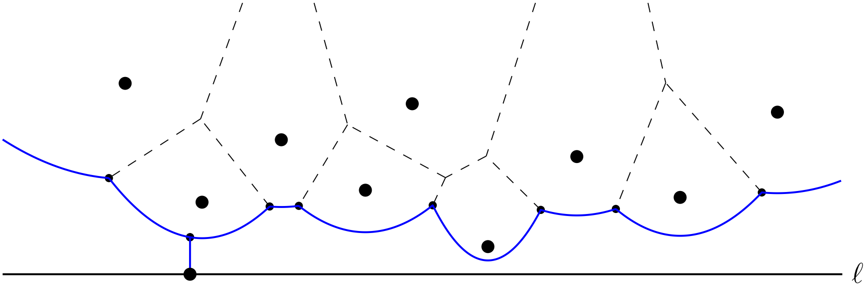
hvor G for *g*rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

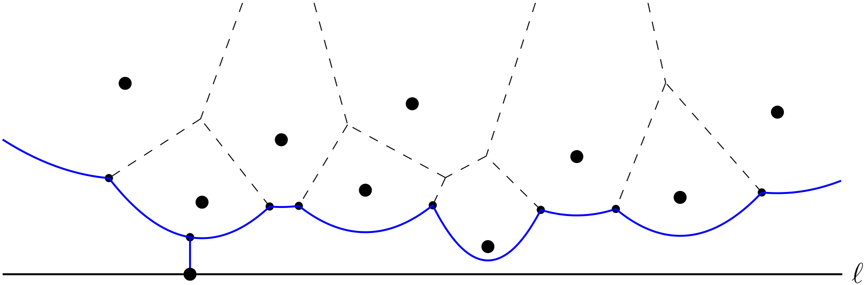
og V for *v*ertikaldel er givet ved

$$V = \{B_i - (p_i)_x \times (\mathrm{LB}((p_i)_x), \infty) \mid i = 1, \ldots, n \text{ hvor } (p_i)_y = \ell - y\}.$$

Et eksempel på kystlinjen er givet her:

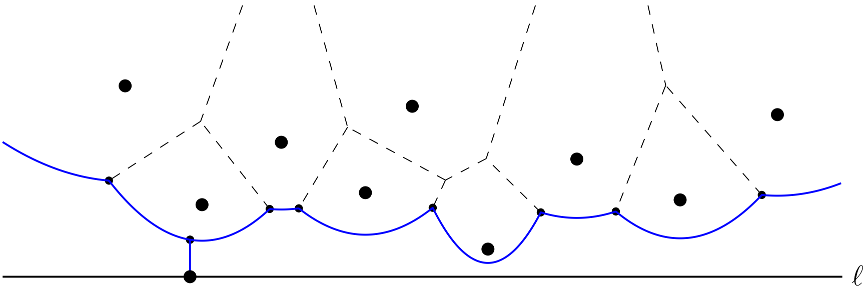


Et eksempel på kystlinjen er givet her:



De stykvis glatte kurver udgør G

Et eksempel på kystlinjen er givet her:



De stykvis glatte kurver udgør G, mens det vertikale linjestykke udgør V.

Definition (Breakpoint)

Definition (Breakpoint)

Ethvert punkt q på kystlinjen således at $q \in B_i \cap B_j$ for to forskellige i, j kaldes for et *breakpoint*.

Definition (Breakpoint)

Ethvert punkt q på kystlinjen således at $q \in B_i \cap B_j$ for to forskellige i, j kaldes for et *breakpoint*.