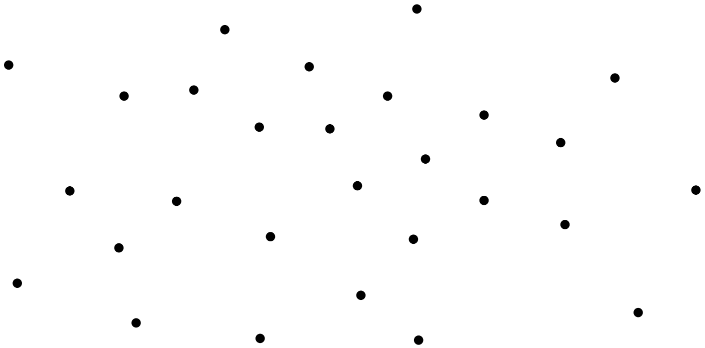
# Specialeforsvar

Johannes Jensen

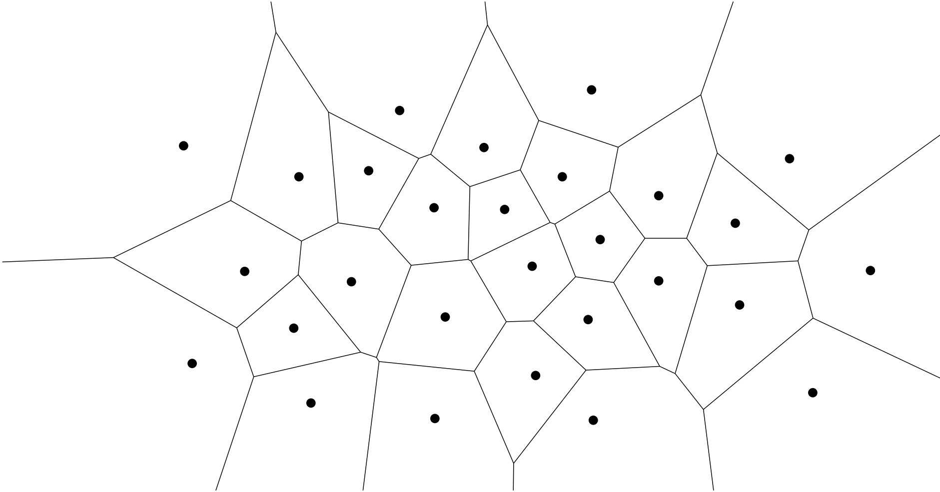
Aarhus Universitet

22. juni 2022

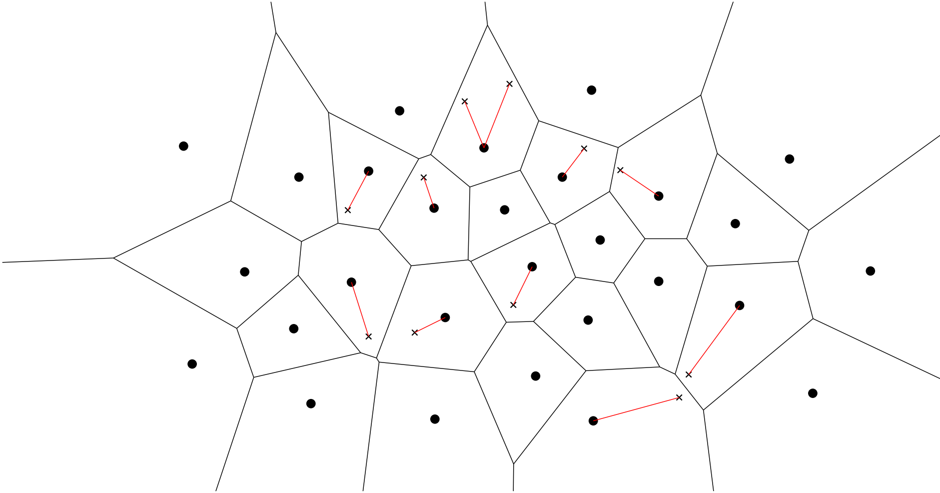
# Introduktion



Lad $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ betegne en endelig mængde af *sites*.



Vi ønsker så at beregne Vor($P$), *Voronoi diagrammet* for $P$.



Hvad kan Voronoi diagrammet? Givet et $\times$ i en *Voronoi celle* angiver diagrammet hvilket punkt fra $P$ som er tættest på!

Men hvordan beregner man det?

Men hvordan beregner man det?

Man bruger en *sweep line algorithm*! (En fejende linje algoritme...?)

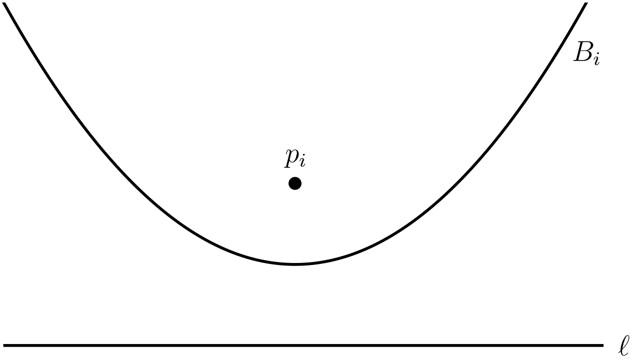
Men hvordan beregner man det?

Man bruger en *sweep line algorithm*! (En fejende linje algoritme...?)

Demo tid!

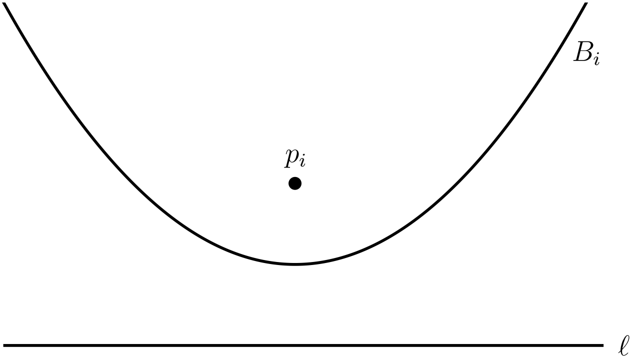
# Hvorfor virker det?

## Hvorfor virker det?



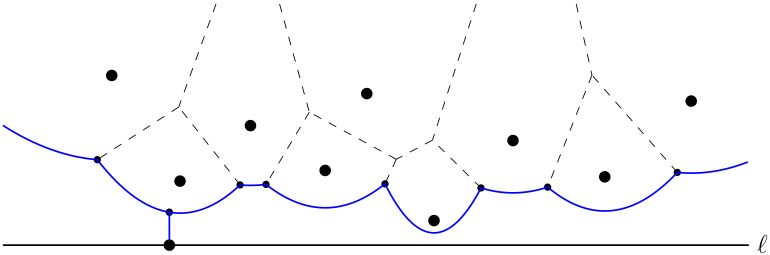

Vi kan separere ethvert site $p_i \in P$ og vores sweep line $\ell$ med en andengradskurve $B_i$

Hvorfor virker det?

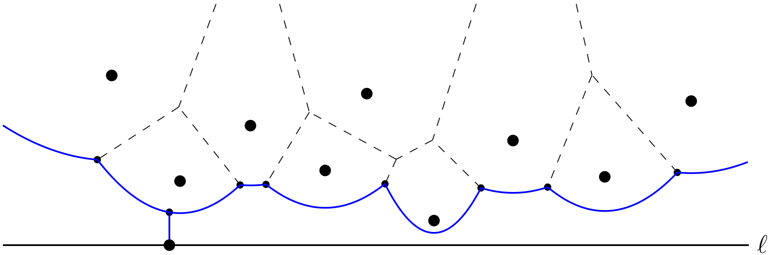



Vi kan separere ethvert site $p_i \in P$ og vores sweep line $\ell$ med en andengradskurve $B_i$, således at for alle $q \in B_i$ så $\mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, \ell)$.

Vi kan så gøre dette for alle sites i $P$, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på $\ell$:

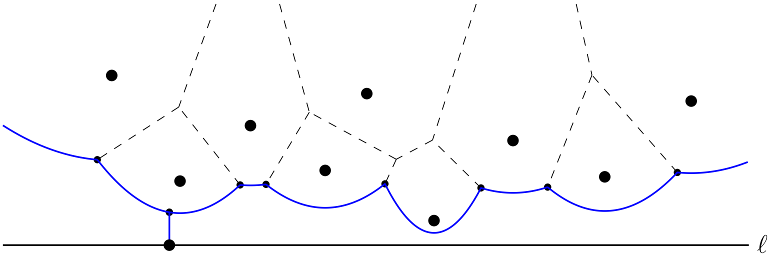


Vi kan så gøre dette for alle sites i $P$, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på $\ell$:




Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for $\ell$ mht. $P$.

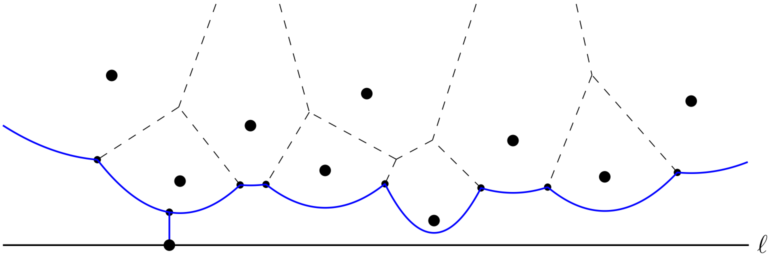
Vi kan så gøre dette for alle sites i $P$, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på $\ell$:




Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for $\ell$ mht. $P$.

At sweep line metoden virker følger så fra at skæringerne mellem forskellige $B_i$ og $B_j$

Vi kan så gøre dette for alle sites i $P$, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på $\ell$:




Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for $\ell$ mht. $P$.

At sweep line metoden virker følger så fra at skæringerne mellem forskellige $B_i$ og $B_j$ optegner Voronoi diagrammet når vi fejer $\ell$ fra "$y = \infty$" til "$y = -\infty$".

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for $\ell$, der er jo uendeligt mange af dem?

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for $\ell$, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for $\ell$ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for $\ell$, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for $\ell$ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Vi vil finde de positioner for $\ell$ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for $\ell$, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for $\ell$ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Vi vil finde de positioner for $\ell$ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen, og de tidspunkter hvor der bliver *fjernet* en kurve fra kystlinjen.

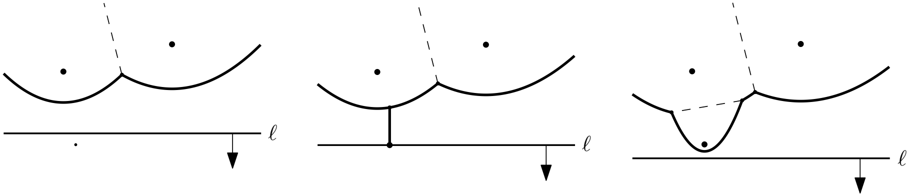
Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for $\ell$, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for $\ell$ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

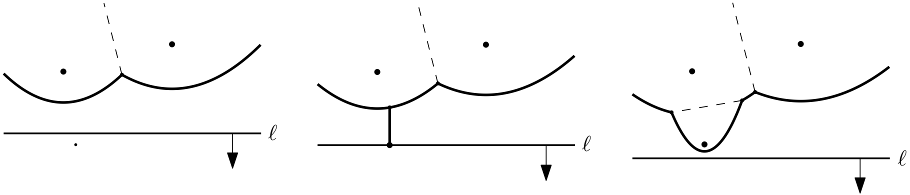
Vi vil finde de positioner for $\ell$ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen, og de tidspunkter hvor der bliver *fjernet* en kurve fra kystlinjen.

Dette kan illustreres med blot 3 punkter (Demo tid!)

Vi så at der bliver tilføjet en kurve til kystlinjen når $\ell$ rammer en site.

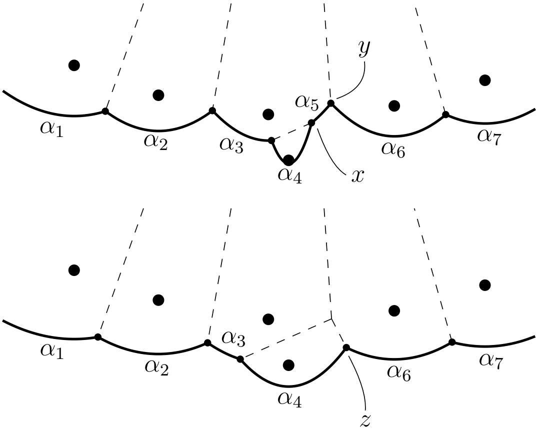


Vi så at der bliver tilføjet en kurve til kystlinjen når $\ell$ rammer en site.

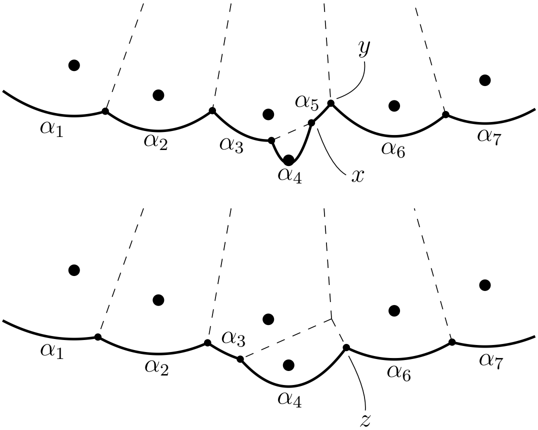



Dette kalder vi for en *site begivenhed*.

Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.

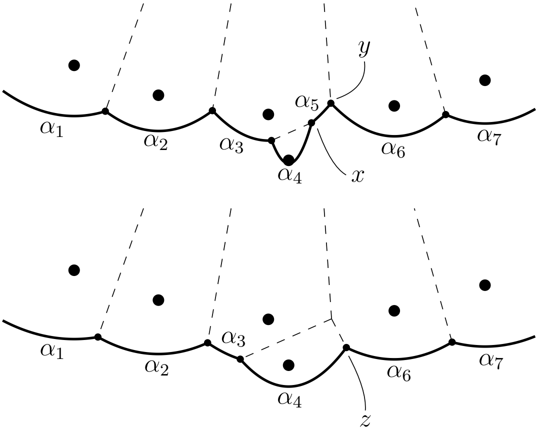


Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.




Dette kalder vi for en *cirkel begivenhed*.

Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.




Dette kalder vi for en *cirkel begivenhed*...indtil videre. Det er lidt mere teknisk og kommer senere.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en cirkel begivenhed bliver to kanter forbundet, og vi får en ny knude for Voronoi diagrammet, og en ny kant fortsættes.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en cirkel begivenhed bliver to kanter forbundet, og vi får en ny knude for Voronoi diagrammet, og en ny kant fortsættes.

Når vores sweep line $\ell$ har været i gennem alle begivenhederne i ordnet rækkefølge opdager vi da hele strukturen på Voronoi diagrammet.

Vi kommer til at se at for $P$ med $n$ punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi kommer til at se at for $P$ med $n$ punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi behøver altså kun at flytte $\ell$ et endeligt antal steder hen, for at opdage strukturen på Voronoi diagrammet.

Vi kommer til at se at for $P$ med $n$ punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi behøver altså kun at flytte $\ell$ et endeligt antal steder hen, for at opdage strukturen på Voronoi diagrammet.

Nu til de tekniske detaljer...

# Matematisk teori

Lad $\mathrm{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|$$

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lad dist$(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\operatorname{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

### Definition (Voronoi celle)

Lad dist$(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Definition (Voronoi celle)**

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* $p_i$

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Definition (Voronoi celle)**

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* $p_i$ til at være

$$\mathcal{V}(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(q, p_i) < dist(q, p_j) \text{ for alle } i \neq j\}.$$

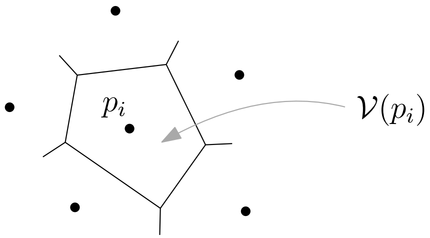
Lad dist$(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

## Definition (Voronoi celle)

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* $p_i$ til at være

$$\mathcal{V}(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(q, p_i) < dist(q, p_j) \text{ for alle } i \neq j\}.$$



**Definition (Voronoi diagram)**

## Definition (Voronoi diagram)

$\mathrm{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

**Definition (Voronoi diagram)**

$\text{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

**Definition (Voronoi graph)**

## Definition (Voronoi diagram)

$\mathrm{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

## Definition (Voronoi graph)

$\mathrm{Vor_G}(P) = \mathbb{R}^2 - \mathrm{Vor}(P)$.

**Definition (Voronoi diagram)**

$\mathrm{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

**Definition (Voronoi graph)**

$\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P) = \mathbb{R}^2 - \mathrm{Vor}(P)$.

Strengt set, så er de knuder og kanter vi har lyst til at beregne en del af $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.

## Definition (Bisector)

## Definition (Bisector)

For $p, q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi

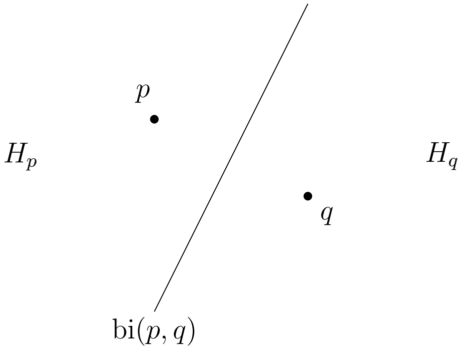
$$\mathrm{bi}(p, q) = \{r \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(r, p) = \mathrm{dist}(r, q)\}.$$

## Definition (Bisector)

For $p, q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi

$$\mathrm{bi}(p, q) = \{r \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(r, p) = \mathrm{dist}(r, q)\}.$$

En sådan bisector splitter planen i to halvplaner, $H_p$ og $H_q$.



Lad $h(p, q)$ betegne det indre af $H_p$.

Lad $h(p,q)$ betegne det indre af $H_p$.

## Proposition

Lad $h(p,q)$ betegne det indre af $H_p$.

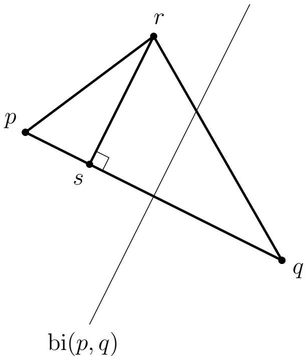
**Proposition**

$r \in h(p,q)$ hvis og kun hvis $\operatorname{dist}(r,p) < \operatorname{dist}(r,q)$.

Lad $h(p, q)$ betegne det indre af $H_p$.

## Proposition

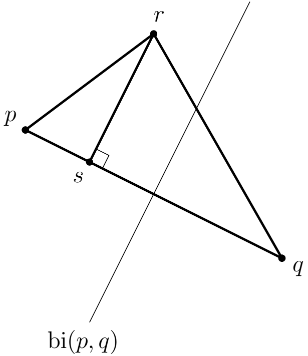
$r \in h(p, q)$ hvis og kun hvis $\mathrm{dist}(r, p) < \mathrm{dist}(r, q)$.



Lad $h(p, q)$ betegne det indre af $H_p$.

## Proposition

$r \in h(p, q)$ hvis og kun hvis $\text{dist}(r, p) < \text{dist}(r, q)$.

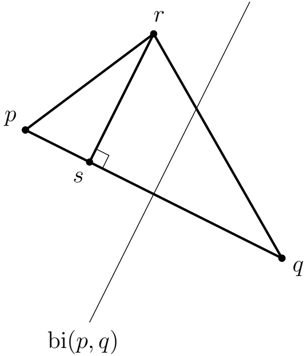



## Korollar 1

Lad $h(p, q)$ betegne det indre af $H_p$.

## Proposition

$r \in h(p, q)$ hvis og kun hvis $\text{dist}(r, p) < \text{dist}(r, q)$.




## Korollar 1

$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$.

Da $h(p_i, p_j)$ er konveks for alle $i \neq j$, har vi at $\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$ også er konveks.

Da $h(p_i, p_j)$ er konveks for alle $i \neq j$, har vi at $\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$ også er konveks.

Dvs. at Voronoi celler er konvekse "polygoner" med højst $n-1$ knuder og højst $n-1$ kanter.

Da $h(p_i, p_j)$ er konveks for alle $i \neq j$, har vi at $\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$ også er konveks.

Dvs. at Voronoi celler er konvekse "polygoner" med højst $n - 1$ knuder og højst $n - 1$ kanter.

Nu ved vi hvordan diagrammet ser ud lokalt, men hvad med globalt?

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

For at være mere præcis, så har vi at:

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra bi$(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors bi$(p_i, p_j)$.

For at være mere præcis, så har vi at:

### Sætning 1

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

For at være mere præcis, så har vi at:

**Sætning 1**

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer.

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

For at være mere præcis, så har vi at:

**Sætning 1**

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis.*

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis.* Antag at alle punkter i $P$ ligger på den samme linje.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis.* Antag at alle punkter i $P$ ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i $P$,

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis.* Antag at alle punkter i $P$ ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i $P$, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis.* Antag at alle punkter i $P$ ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i $P$, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$, hvor vi bemærker at den topologiske struktur af Voronoi diagrammet dermed ikke ændres

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis.* Antag at alle punkter i $P$ ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i $P$, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$, hvor vi bemærker at den topologiske struktur af Voronoi diagrammet dermed ikke ændres, og ved dernæst at sortere punkterne

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis.* Antag at alle punkter i $P$ ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i $P$, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$, hvor vi bemærker at den topologiske struktur af Voronoi diagrammet dermed ikke ændres, og ved dernæst at sortere punkterne, kan vi uden tab af generalitet antage at

$$P = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)\},$$

for $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n - 1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.*

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$ så gælder at

$$\|(x, y) - (x_i, 0)\| = \|(x, y) - (x_{i+1}, 0)\|$$

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Lad $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x,y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så gælder at

$$\|(x,y)-(x_i,0)\| = \|(x,y)-(x_{i+1},0)\|$$
$$\iff \sqrt{(x-x_i)^2+y^2} = \sqrt{(x-x_{i+1})^2+y^2}$$

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så gælder at

$$\begin{aligned}
& \|(x, y) - (x_i, 0)\| = \|(x, y) - (x_{i+1}, 0)\| \\
\iff & \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + y^2} \\
\iff & |x - x_i| = |x - x_{i+1}| \,.
\end{aligned}$$

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$ så gælder at

$$\begin{aligned} & \|(x,y) - (x_i, 0)\| = \|(x,y) - (x_{i+1}, 0)\| \\ \iff & \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + y^2} \\ \iff & |x - x_i| = |x - x_{i+1}| \,. \end{aligned}$$

Dvs. at hvis $(x, 0) \in \mathrm{Vor}_G(P)$ så er $(x, y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så gælder at

$$\begin{aligned} & \|(x, y) - (x_i, 0)\| = \|(x, y) - (x_{i+1}, 0)\| \\ \iff & \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + y^2} \\ \iff & |x - x_i| = |x - x_{i+1}| . \end{aligned}$$

Dvs. at hvis $(x, 0) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så er $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Det følger at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{bi}((x_i, 0), (x_{i+1}, 0))$, og disse er alle parallelle linjer.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.*

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje.

## Sætning 1

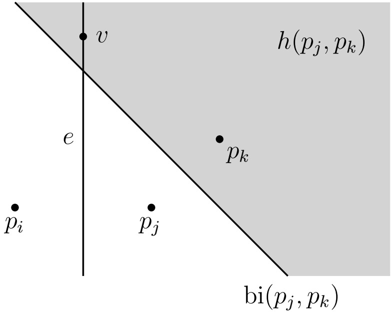
Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

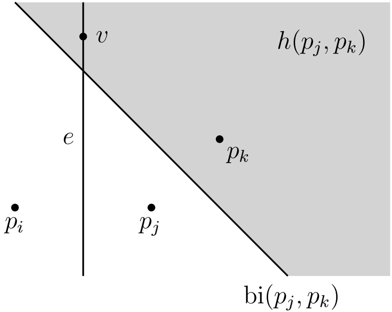



Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

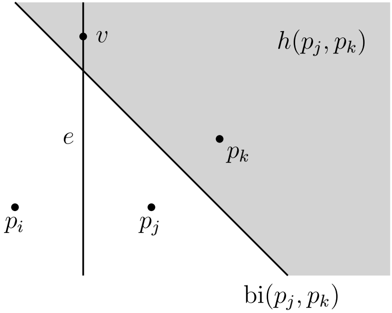



Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\text{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\text{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\text{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

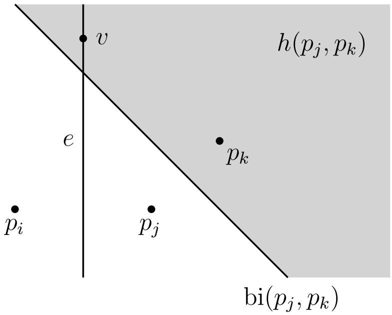



Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad $p_k$ være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

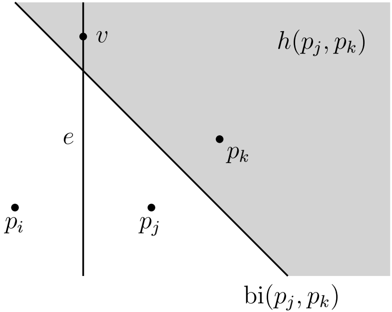



Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad $p_k$ være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$. Så er $\mathrm{bi}(p_j, p_k)$ og $e$ ikke parallelle

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

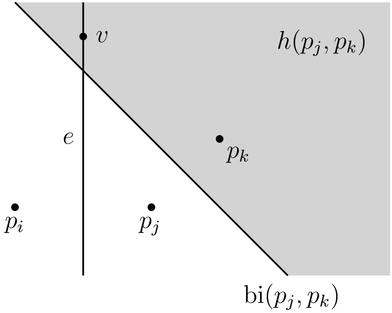



Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad $p_k$ være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$. Så er $\mathrm{bi}(p_j, p_k)$ og $e$ ikke parallelle, hvormed de har et skæringspunkt.

## Sætning 1

Hvis alle punkter i $P$ ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

*Bevis fortsat.* Antag nu at punkterne i $P$ ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.




Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad $p_k$ være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$. Så er $\mathrm{bi}(p_j, p_k)$ og $e$ ikke parallelle, hvormed de har et skæringspunkt. Dette giver at der findes et punkt $v \in e \cap {}^\circ h(p_k, p_j)$.