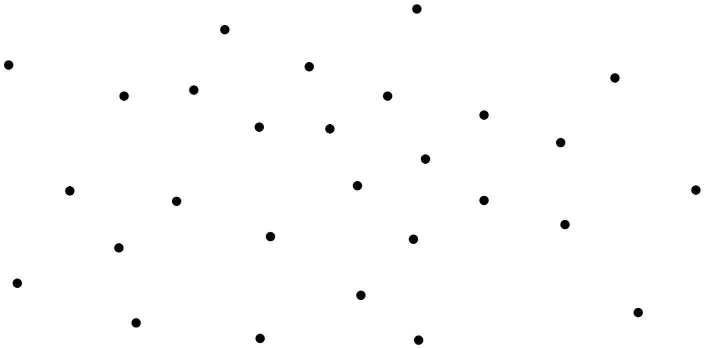
Specialeforsvar

Johannes Jensen

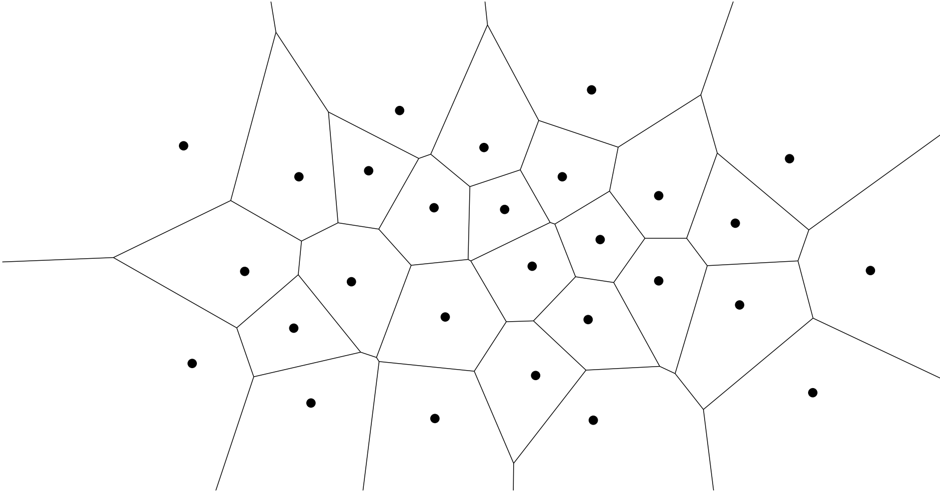
Aarhus Universitet

24. juni 2022

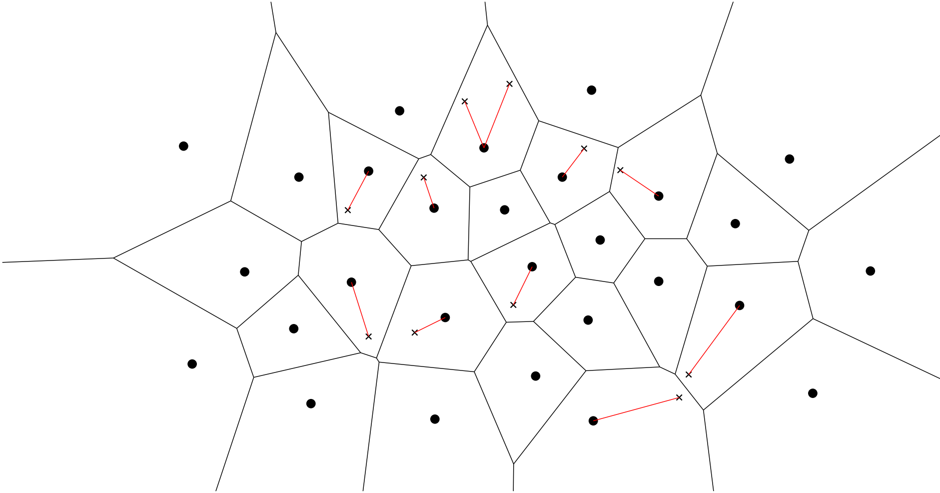
Introduktion



Lad $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ betegne en endelig mængde af *sites*.



Vi ønsker så at beregne Vor(P), *Voronoi diagrammet* for P.



Hvad kan Voronoi diagrammet? Givet et $\times$ i en *Voronoi celle* angiver diagrammet hvilket punkt fra P som er tættest på!

Men hvordan beregner man det?

Men hvordan beregner man det?

Man bruger en *sweep line algorithm*! (En fejende linje algoritme...?)

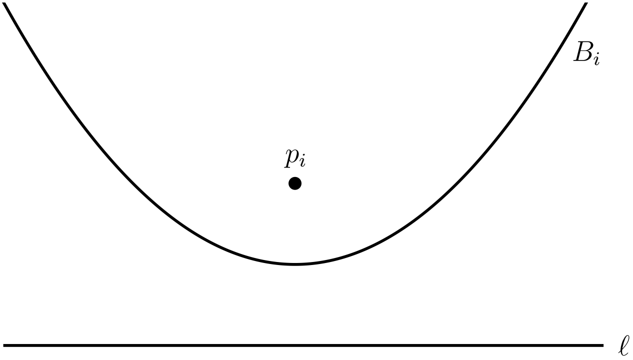
Men hvordan beregner man det?

Man bruger en *sweep line algorithm*! (En fejende linje algoritme...?)

Demo tid!

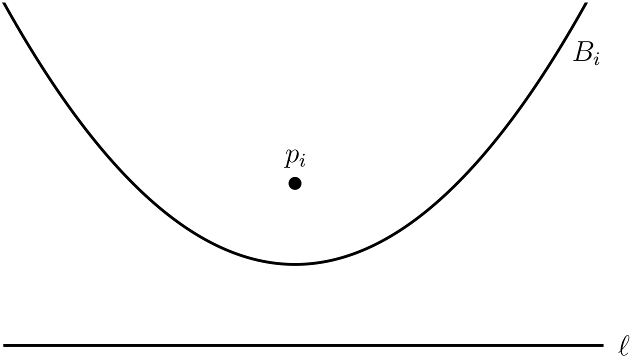
Hvorfor virker det?

Hvorfor virker det?



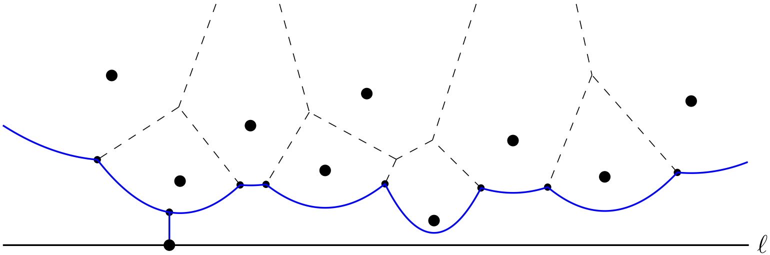
Vi kan separere ethvert site $p_i \in P$ og vores sweep line ℓ med en andengradskurve B_i

Hvorfor virker det?

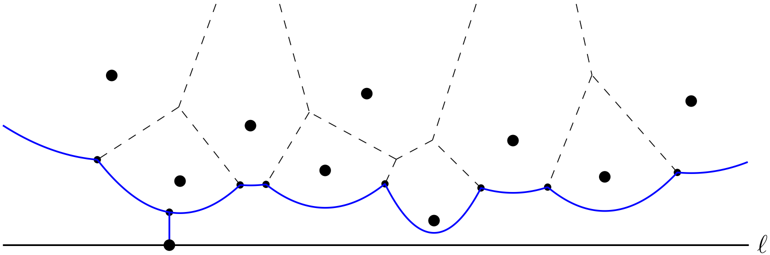


Vi kan separere ethvert site $p_i \in P$ og vores sweep line ℓ med en andengradskurve B_i, således at for alle $q \in B_i$ så $\mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, \ell)$.

Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:

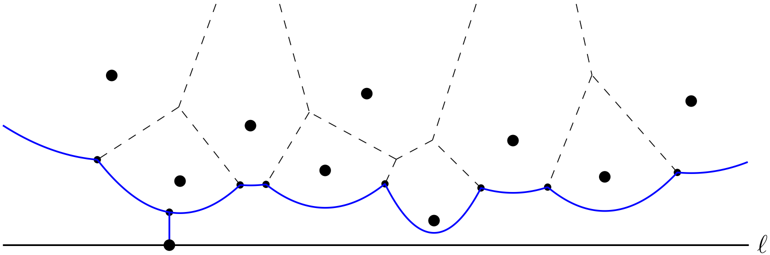


Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:



Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for ℓ mht. P.

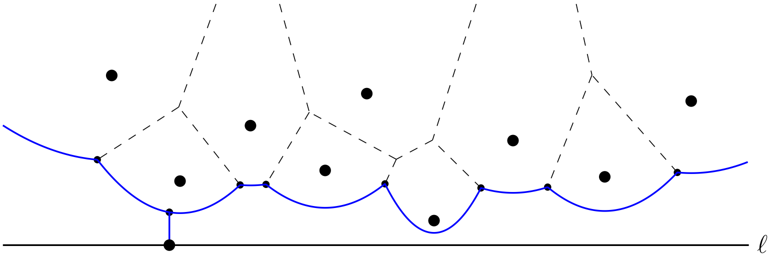
Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:



Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for ℓ mht. P.

At sweep line metoden virker følger så fra at skæringerne mellem forskellige B_i og B_j

Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:



Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for ℓ mht. P.

At sweep line metoden virker følger så fra at skæringerne mellem forskellige B_i og B_j optegner Voronoi diagrammet når vi fejer ℓ fra "$y = \infty$" til "$y = -\infty$".

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Vi vil finde de positioner for ℓ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Vi vil finde de positioner for ℓ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen, og de tidspunkter hvor der bliver *fjernet* en kurve fra kystlinjen.

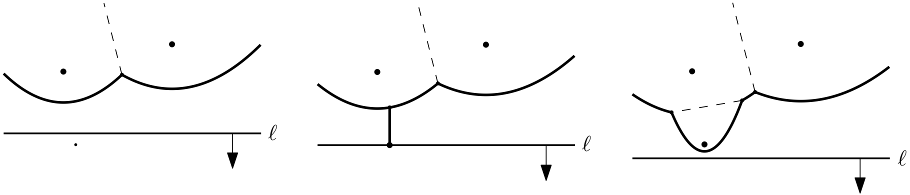
Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

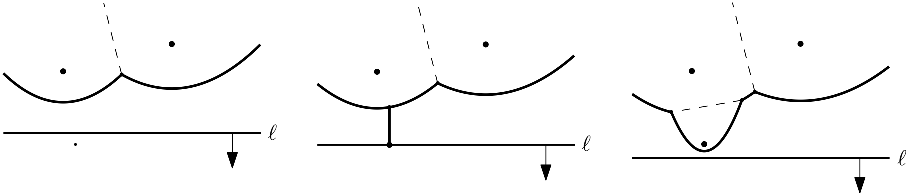
Vi vil finde de positioner for ℓ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen, og de tidspunkter hvor der bliver *fjernet* en kurve fra kystlinjen.

Dette kan illustreres med blot 3 punkter (Demo tid!)

Vi så at der bliver tilføjet en kurve til kystlinjen når ℓ rammer en site.

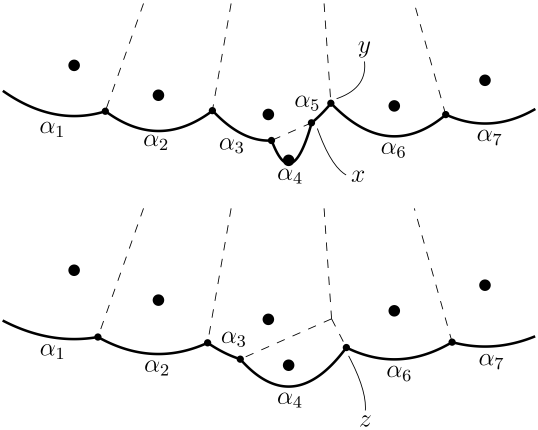


Vi så at der bliver tilføjet en kurve til kystlinjen når ℓ rammer en site.

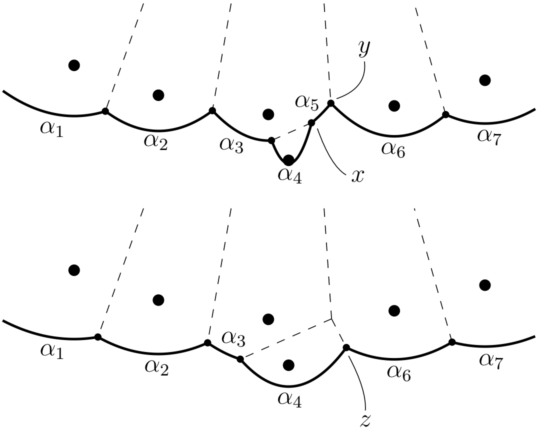


Dette kalder vi for en *site begivenhed*.

Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.

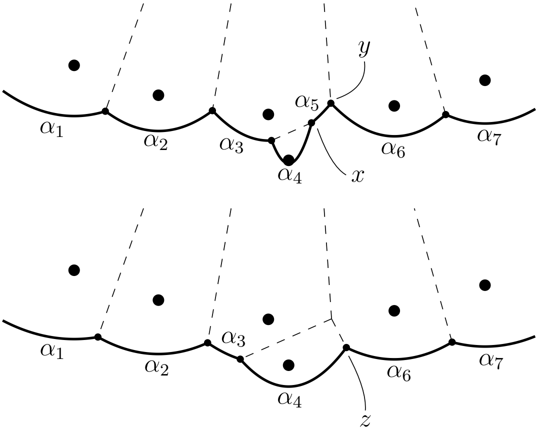


Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.



Dette kalder vi for en *cirkel begivenhed*.

Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.



Dette kalder vi for en *cirkel begivenhed*...indtil videre. Det er lidt mere teknisk og kommer senere.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en cirkel begivenhed bliver to kanter forbundet, og vi får en ny knude for Voronoi diagrammet, og en ny kant fortsættes.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en cirkel begivenhed bliver to kanter forbundet, og vi får en ny knude for Voronoi diagrammet, og en ny kant fortsættes.

Når vores sweep line ℓ har været i gennem alle begivenhederne i ordnet rækkefølge opdager vi da hele strukturen på Voronoi diagrammet.

Vi kommer til at se at for P med n punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi kommer til at se at for P med n punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi behøver altså kun at flytte ℓ et endeligt antal steder hen, for at opdage strukturen på Voronoi diagrammet.

Vi kommer til at se at for P med n punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi behøver altså kun at flytte ℓ et endeligt antal steder hen, for at opdage strukturen på Voronoi diagrammet.

Nu til de tekniske detaljer...

Matematisk teori

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|$$

Lad $\mathrm{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\mathrm{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lad $\mathrm{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\mathrm{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition (Voronoi celle)

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition (Voronoi celle)

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* p_i

Lad dist(p, q) betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition (Voronoi celle)

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* p_i til at være

$$\mathcal{V}(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(q, p_i) < dist(q, p_j) \text{ for alle } i \neq j\}.$$

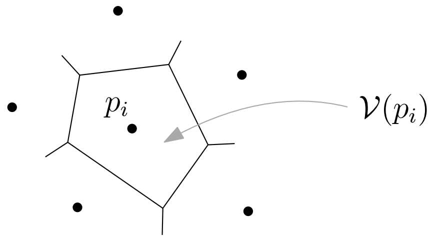
Lad dist(p, q) betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\operatorname{dist}(p,q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition (Voronoi celle)

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* p_i til at være

$$\mathcal{V}(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(q, p_i) < dist(q, p_j) \text{ for alle } i \neq j\}.$$



Definition (Voronoi diagram)

Definition (Voronoi diagram)

$\mathrm{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

Definition (Voronoi diagram)

$\mathrm{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

Definition (Voronoi graph)

Definition (Voronoi diagram)

$\mathrm{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

Definition (Voronoi graph)

$\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P) = \mathbb{R}^2 - \mathrm{Vor}(P)$.

Definition (Voronoi diagram)

$\mathrm{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(p_i)$.

Definition (Voronoi graph)

$\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P) = \mathbb{R}^2 - \mathrm{Vor}(P)$.

Strengt set, så er de knuder og kanter vi har lyst til at beregne en del af $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.

Definition (Bisector)

Definition (Bisector)

For $p, q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi

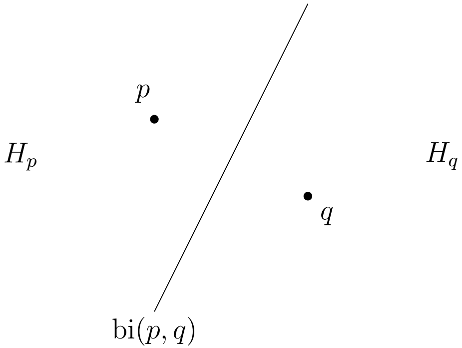
$$\mathrm{bi}(p, q) = \{r \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(r, p) = \mathrm{dist}(r, q)\}.$$

Definition (Bisector)

For $p, q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi

$$\mathrm{bi}(p,q) = \{r \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(r,p) = \mathrm{dist}(r,q)\}.$$

En sådan bisector splitter planen i to halvplaner, H_p og H_q.



Lad $h(p, q)$ betegne det indre af H_p.

Lad $h(p, q)$ betegne det indre af H_p.

Proposition

Lad $h(p, q)$ betegne det indre af H_p.

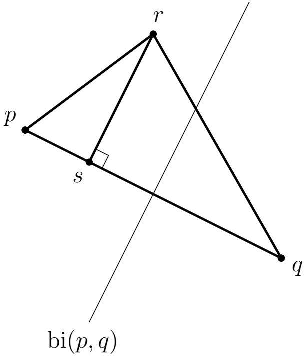
Proposition

$r \in h(p, q)$ hvis og kun hvis $\operatorname{dist}(r, p) < \operatorname{dist}(r, q)$.

Lad $h(p, q)$ betegne det indre af H_p.

Proposition

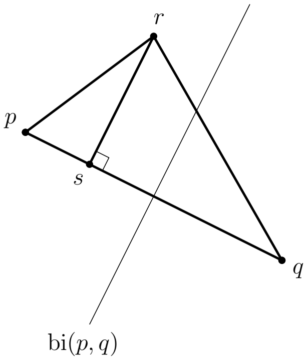
$r \in h(p, q)$ hvis og kun hvis $\mathrm{dist}(r, p) < \mathrm{dist}(r, q)$.



Lad $h(p, q)$ betegne det indre af H_p.

Proposition

$r \in h(p, q)$ hvis og kun hvis $\mathrm{dist}(r, p) < \mathrm{dist}(r, q)$.

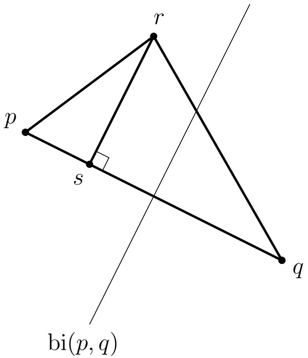


Korollar 1

Lad $h(p,q)$ betegne det indre af H_p.

Proposition

$r \in h(p,q)$ hvis og kun hvis $\mathrm{dist}(r,p) < \mathrm{dist}(r,q)$.



Korollar 1

$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$.

Da $h(p_i, p_j)$ er konveks for alle $i \neq j$, har vi at $\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$ også er konveks.

Da $h(p_i, p_j)$ er konveks for alle $i \neq j$, har vi at $\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$ også er konveks.

Dvs. at Voronoi celler er konvekse "polygoner" med højst $n - 1$ knuder og højst $n - 1$ kanter.

Da $h(p_i, p_j)$ er konveks for alle $i \neq j$, har vi at $\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$ også er konveks.

Dvs. at Voronoi celler er konvekse "polygoner" med højst $n - 1$ knuder og højst $n - 1$ kanter.

Nu ved vi hvordan diagrammet ser ud lokalt, men hvad med globalt?

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

Vi viser nu:

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

Vi viser nu:

Sætning 1

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

Vi viser nu:

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer.

Korollar 1 giver os at $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af sammenhængende men muligvis tomme dele fra $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ for alle $i \neq j$.

Dvs. at hele Voronoi diagrammet består af linjestykker, stråler og linjer, som alle ligger på forskellige bisectors $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$.

Vi viser nu:

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis. Antag at alle punkter i P ligger på den samme linje.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis. Antag at alle punkter i P ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i P,

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis. Antag at alle punkter i P ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i P, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis. Antag at alle punkter i P ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i P, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$, hvor vi bemærker at den topologiske struktur af Voronoi diagrammet dermed ikke ændres

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis. Antag at alle punkter i P ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i P, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$, hvor vi bemærker at den topologiske struktur af Voronoi diagrammet dermed ikke ændres, og ved dernæst at sortere punkterne

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis. Antag at alle punkter i P ligger på den samme linje. Ved at anvende en isometri på punkterne i P, dvs. en afbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som opfylder at

$$\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{dist}(\varphi(p), \varphi(q))$$

for alle $p, q \in \mathbb{R}^2$, hvor vi bemærker at den topologiske struktur af Voronoi diagrammet dermed ikke ændres, og ved dernæst at sortere punkterne, kan vi uden tab af generalitet antage at

$$P = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_n, 0)\},$$

for $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$ så gælder at

$$\|(x, y) - (x_i, 0)\| = \|(x, y) - (x_{i+1}, 0)\|$$

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$ så gælder at

$$\|(x,y) - (x_i, 0)\| = \|(x,y) - (x_{i+1}, 0)\|$$
$$\iff \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + y^2}$$

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så gælder at

$$
\begin{aligned}
& \|(x, y) - (x_i, 0)\| = \|(x, y) - (x_{i+1}, 0)\| \\
\iff & \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + y^2} \\
\iff & |x - x_i| = |x - x_{i+1}| .
\end{aligned}
$$

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så gælder at

$$\begin{aligned} & \|(x, y) - (x_i, 0)\| = \|(x, y) - (x_{i+1}, 0)\| \\ \iff & \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + y^2} \\ \iff & |x - x_i| = |x - x_{i+1}|. \end{aligned}$$

Dvs. at hvis $(x, 0) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så er $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Lad $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ så $x_i < x < x_{i+1}$ for et $i < n$. Bemærk så at hvis $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så gælder at

$$\begin{aligned} & \|(x, y) - (x_i, 0)\| = \|(x, y) - (x_{i+1}, 0)\| \\ \iff & \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_{i+1})^2 + y^2} \\ \iff & |x - x_i| = |x - x_{i+1}| . \end{aligned}$$

Dvs. at hvis $(x, 0) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ så er $(x, y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Det følger at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{bi}((x_i, 0), (x_{i+1}, 0))$, og disse er alle parallelle linjer.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n - 1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje.

Sætning 1

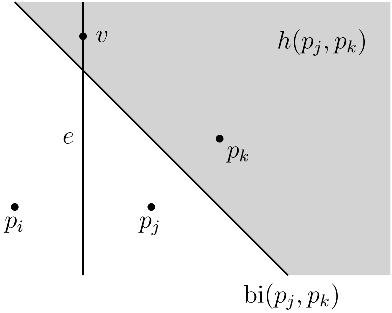
Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

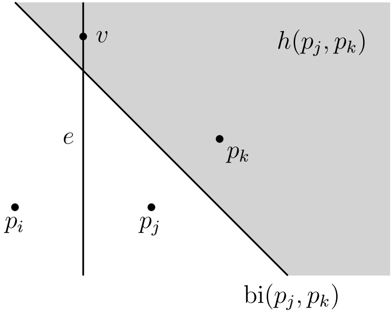


Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

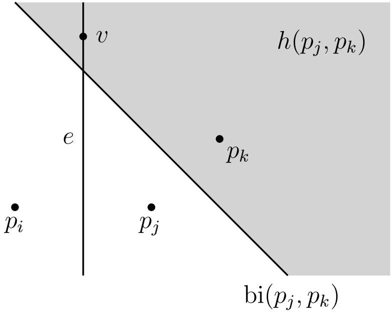


Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \subset \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

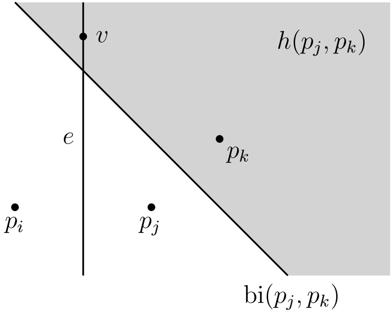


Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \subset \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad p_k være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

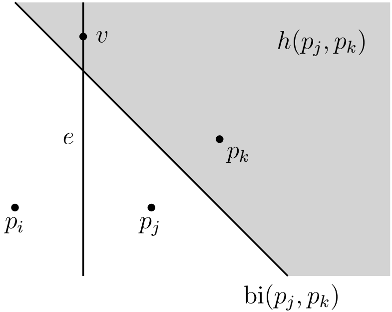


Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \subset \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad p_k være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$. Så er $\mathrm{bi}(p_j, p_k)$ og e ikke parallelle

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ enten er linjestykker eller stråler.

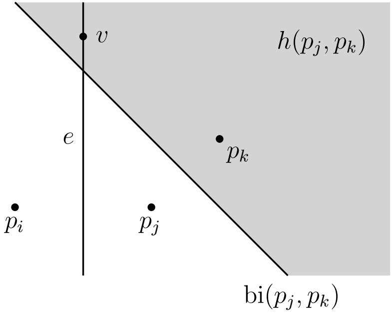


Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \subset \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad p_k være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$. Så er $\mathrm{bi}(p_j, p_k)$ og e ikke parallelle, hvormed de har et skæringspunkt.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Antag nu at punkterne i P ikke ligger på den samme linje. Vi viser først at alle kanterne i $\mathrm{Vor}_G(P)$ enten er linjestykker eller stråler.



Antag for modstrid at dette ikke er tilfældet, hvormed der findes en kant $e \subset \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j)$ som er en hel linje. Lad p_k være et punkt som ikke ligger på $\overline{p_i p_j}$. Så er $\mathrm{bi}(p_j, p_k)$ og e ikke parallelle, hvormed de har et skæringspunkt. Dette giver at der findes et punkt $v \in e \cap {}^\circ h(p_k, p_j)$.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Så $v \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j) \cap {}^{\circ}h(p_k, p_j)$.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Så $v \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j) \cap {}^{\circ}h(p_k, p_j)$. Da $v \in h(p_k, p_j)$ har vi at

$$\mathrm{dist}(v, p_k) < \mathrm{dist}(v, p_j).$$

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Så $v \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j) \cap {}^\circ h(p_k, p_j)$. Da $v \in h(p_k, p_j)$ har vi at

$$\mathrm{dist}(v, p_k) < \mathrm{dist}(v, p_j).$$

Men da $v \in \partial\mathcal{V}(p_j)$ gælder

$$\mathrm{dist}(v, p_k) \geq \mathrm{dist}(v, p_j),$$

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Så $v \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j) \cap {}^\circ h(p_k, p_j)$. Da $v \in h(p_k, p_j)$ har vi at

$$\mathrm{dist}(v, p_k) < \mathrm{dist}(v, p_j).$$

Men da $v \in \partial\mathcal{V}(p_j)$ gælder

$$\mathrm{dist}(v, p_k) \geq \mathrm{dist}(v, p_j),$$

og vi har en modstrid.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Så $v \in \partial\mathcal{V}(p_i) \cap \partial\mathcal{V}(p_j) \cap {}^\circ h(p_k, p_j)$. Da $v \in h(p_k, p_j)$ har vi at

$$\mathrm{dist}(v, p_k) < \mathrm{dist}(v, p_j).$$

Men da $v \in \partial\mathcal{V}(p_j)$ gælder

$$\mathrm{dist}(v, p_k) \geq \mathrm{dist}(v, p_j),$$

og vi har en modstrid. (Bemærk fejl i speciale på s. 8!)

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_G(P)$ af $n - 1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Vi viser nu at $\mathrm{Vor}_G(P)$ er sammenhængende.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Vi viser nu at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er sammenhængende. Antag for modstrid at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ ikke er sammenhængende.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Vi viser nu at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er sammenhængende. Antag for modstrid at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ ikke er sammenhængende. Så findes $\partial\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er stisammenhængende.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Vi viser nu at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er sammenhængende. Antag for modstrid at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ ikke er sammenhængende. Så findes $\partial\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er stisammenhængende. Det kan kun ske hvis $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af to parallelle linjer

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Vi viser nu at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er sammenhængende. Antag for modstrid at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ ikke er sammenhængende. Så findes $\partial\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er stisammenhængende. Det kan kun ske hvis $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af to parallelle linjer, hvilket er i modstrid med at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ ikke indeholder nogen linjer.

Sætning 1

Hvis alle punkter i P ligger på den samme linje, så består $\text{Vor}_G(P)$ af $n-1$ parallelle linjer. Hvis ikke, så er $\text{Vor}_G(P)$ sammenhængende, og kanterne er enten linjestykker eller stråler.

Bevis fortsat. Vi viser nu at $\text{Vor}_G(P)$ er sammenhængende. Antag for modstrid at $\text{Vor}_G(P)$ ikke er sammenhængende. Så findes $\partial\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er stisammenhængende. Det kan kun ske hvis $\partial\mathcal{V}(p_i)$ består af to parallelle linjer, hvilket er i modstrid med at $\text{Vor}_G(P)$ ikke indeholder nogen linjer. Altså er $\text{Vor}_G(P)$ sammenhængende. **QED.**

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_G(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\text{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2.$$

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2.$$

Vi har dog det problem at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ ikke er en plan graf i ovenstående forstand, da den har nogle uendelige kanter.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\text{Vor}_G(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\text{Vor}_G(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2.$$

Vi har dog det problem at $\text{Vor}_G(P)$ ikke er en plan graf i ovenstående forstand, da den har nogle uendelige kanter. Vi laver nu en transformation af $\text{Vor}_G(P)$ som gør at vi kan benytte formlen.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\text{Vor}_G(P)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_G(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\text{dist}(p, v_1), \ldots, \text{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$. Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til v_∞

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor_G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor_G}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor_G}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$. Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til v_∞, ved at forbinde s_i til v_∞ med en sti

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\text{Vor}_\text{G}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

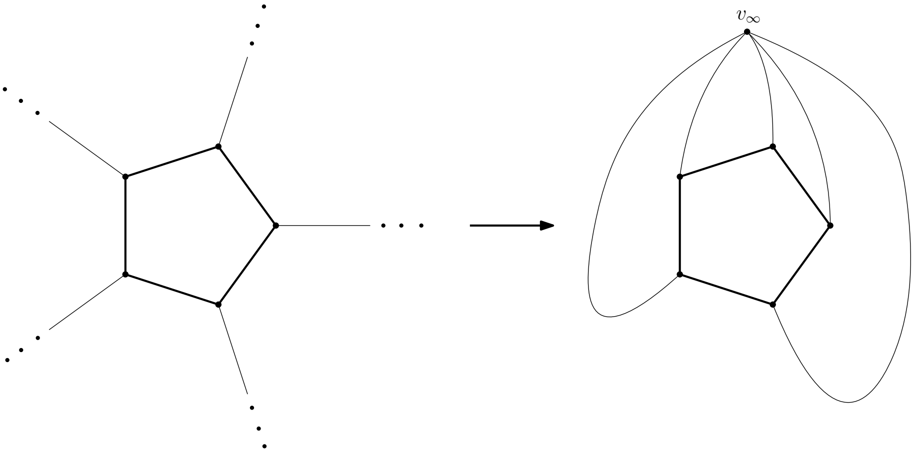
og

$$r = 1 + \max\{\text{dist}(p, v_1), \ldots, \text{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\text{Vor}_\text{G}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$. Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til v_∞, ved at forbinde s_i til v_∞ med en sti, og vi gør det i rækkefølge, startende med det s_i som ligger tættest på v_∞.

Et eksempel på denne konstruktion er givet her:

Et eksempel på denne konstruktion er givet her:



Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_G(P)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_\text{G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_G(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_G(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor_G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor_G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor_G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af siderflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3\,|V(G)|$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_\text{G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3\,|V(G)| = 3(n_v + 1).$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_G(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3\,|V(G)| = 3(n_v + 1).$$

Vi finder nu et udtryk for venstresiden.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Isolér } 2n_e\text{)} \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad (\text{Isolér } 2n_e) \\ \implies & 3(n_v + 1) \leq 2(n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Anvend (2))} \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Isolér } 2n_e\text{)} \\ \implies & 3(n_v + 1) \leq 2(n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Anvend (2))} \\ \implies & n_v \leq 2n - 5. \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Isolér } 2n_e\text{)} \\ \implies & 3(n_v + 1) \leq 2(n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Anvend (2))} \\ \implies & n_v \leq 2n - 5. \end{aligned}$$

Altså er antallet af knuder højst $2n - 5$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$3(n_v+1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$\begin{aligned} & 3(n_v+1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\ \iff & 3(n_v+1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v+1)\text{)} \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$\begin{aligned} & 3(n_v + 1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\ \iff & 3(n_v + 1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v + 1)\text{)} \\ \implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))} \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$
\begin{aligned}
& 3(n_v+1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\
\iff & 3(n_v+1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v+1)\text{)} \\
\implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))} \\
\implies & n_e \leq 3n - 6.
\end{aligned}
$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$\begin{aligned} & 3(n_v+1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\ \iff & 3(n_v+1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v+1)\text{)} \\ \implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))} \\ \implies & n_e \leq 3n - 6. \end{aligned}$$

Altså er antallet af kanter højst $3n-6$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$
\begin{aligned}
& 3(n_v + 1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\
\iff & 3(n_v + 1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v + 1)\text{)} \\
\implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))} \\
\implies & n_e \leq 3n - 6.
\end{aligned}
$$

Altså er antallet af kanter højst $3n - 6$. **QED.**

Vi har altså set at selvom vi har $\mathcal{O}(n^2)$ bisectors, så har vi kun $\mathcal{O}(n)$ kanter.

Vi har altså set at selvom vi har $\mathcal{O}(n^2)$ bisectors, så har vi kun $\mathcal{O}(n)$ kanter. Vi vil nu karakterisere hvornår en del af en bisector faktisk udgør en knude eller kant i $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$.

Definition (Største tomme cirkel)

Definition (Største tomme cirkel)

For $q \in \mathbb{R}^2$

Definition (Største tomme cirkel)

For $q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi $C_P(q)$ til at være *den største tommel cirkel for q mht. P*

Definition (Største tomme cirkel)

For $q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi $C_P(q)$ til at være *den største tommel cirkel for q mht.* P, givet ved

$$C_P(q) = B_r(q)$$

Definition (Største tomme cirkel)

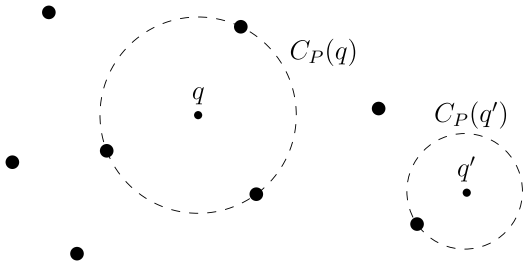
For $q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi $C_P(q)$ til at være *den største tommel cirkel for q mht. P*, givet ved

$$C_P(q) = B_r(q), \quad \text{hvor} \quad r = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid B_\lambda(q) \cap P = \emptyset\}.$$

Definition (Største tomme cirkel)

For $q \in \mathbb{R}^2$ definerer vi $C_P(q)$ til at være *den største tommel cirkel for* q *mht.* P, givet ved

$$C_P(q) = B_r(q), \quad \text{hvor} \quad r = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid B_\lambda(q) \cap P = \emptyset\}.$$



Sætning 3

Sætning 3

Vi har følgende:

Sætning 3

Vi har følgende:

1. $q \in \mathbb{R}^2$ er en knude i $\mathrm{Vor}_\mathsf{G}(P)$

Sætning 3

Vi har følgende:

1. $q \in \mathbb{R}^2$ er en knude i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ hvis og kun hvis

$$|\partial C_P(q) \cap P| \geq 3.$$

Sætning 3

Vi har følgende:

1. $q \in \mathbb{R}^2$ er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$ hvis og kun hvis

$$|\partial C_P(q) \cap P| \geq 3.$$

2. $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ definerer en kant i $\mathrm{Vor}_G(P)$

Sætning 3

Vi har følgende:

1. $q \in \mathbb{R}^2$ er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$ hvis og kun hvis
$$|\partial C_P(q) \cap P| \geq 3.$$

2. $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ definerer en kant i $\mathrm{Vor}_G(P)$ hvis og kun hvis
$$\exists q \in \mathrm{bi}(p_i, p_j) \colon \partial C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}.$$

Sætning 3

Vi har følgende:

1. $q \in \mathbb{R}^2$ er en knude i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ hvis og kun hvis

$$|\partial C_P(q) \cap P| \geq 3.$$

2. $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ definerer en kant i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ hvis og kun hvis

$$\exists q \in \mathrm{bi}(p_i, p_j) \colon \partial C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}.$$

Beviset består af nogle simple observationer og modstrider, så vi præsenterer det ikke her.

Sætning 3

Vi har følgende:

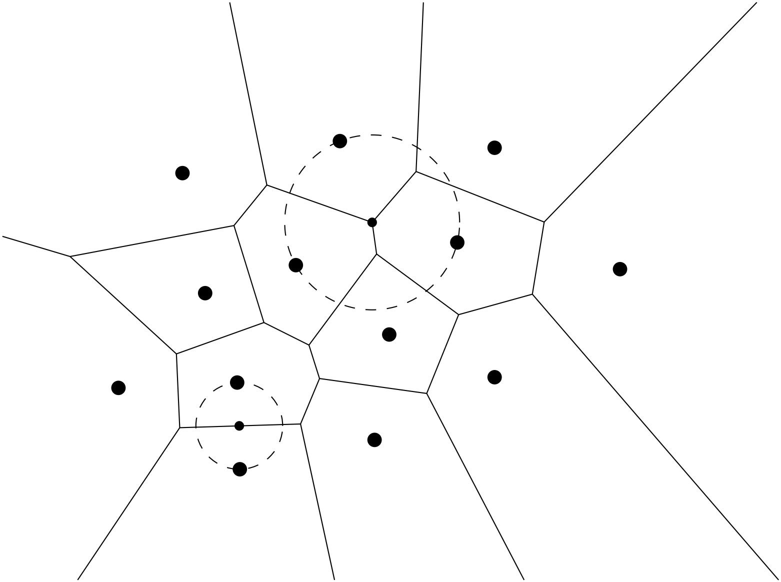
1. $q \in \mathbb{R}^2$ er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$ hvis og kun hvis

$$|\partial C_P(q) \cap P| \geq 3.$$

2. $\mathrm{bi}(p_i, p_j)$ definerer en kant i $\mathrm{Vor}_G(P)$ hvis og kun hvis

$$\exists q \in \mathrm{bi}(p_i, p_j) \colon \partial C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}.$$

Beviset består af nogle simple observationer og modstrider, så vi præsenterer det ikke her. Denne figur bør give den intuition som er nødvendig:



Nu har vi fået karakteriseret nogle af de vigtige egenskaber for Voronoi diagrammet for P.

Nu har vi fået karakteriseret nogle af de vigtige egenskaber for Voronoi diagrammet for P.

Vi arbejder os nu i mod at beskrive Fortune's algoritme, som er en $\mathcal{O}(n \log n)$ algoritme til at beregne $\mathrm{Vor}(P)$.

Teoretiske antagelser:

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.
2. Punkterne i P ligger ikke alle på den samme linje.

Teoretiske antagelser:

1. Punkterne i P er i *generel position*, dvs. ingen punkter i P har samme x- eller y-koordinat.
2. Punkterne i P ligger ikke alle på den samme linje.
3. Der ligger ikke mere end 3 punkter fra P på samme cirkel.

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell \colon y = \ell_y$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ så er

$$\mathrm{dist}(p, \ell) = |p_y - \ell_y| \, .$$

Givet et punkt $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ og en sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ så er

$$\mathrm{dist}(p, \ell) = |p_y - \ell_y| \, .$$

Vi definerer så

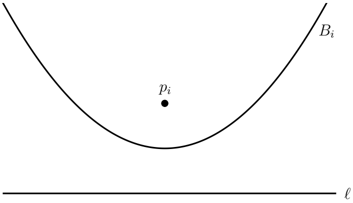
$$B_i = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, \ell)\}$$

for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

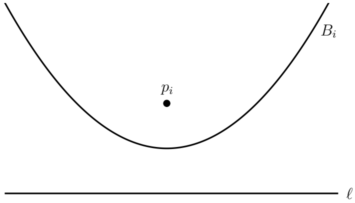
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:

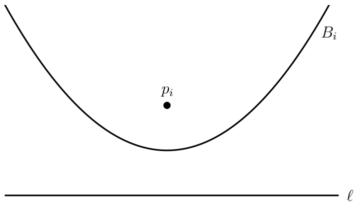


Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



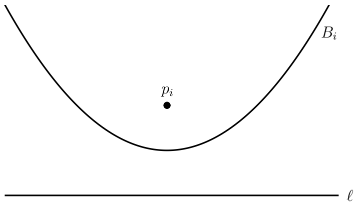
Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$.

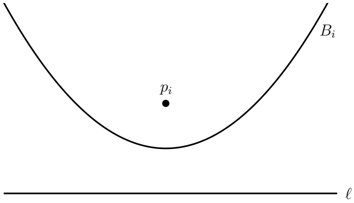
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\text{dist}(q, p)^2 = \text{dist}(q, \ell)^2$$

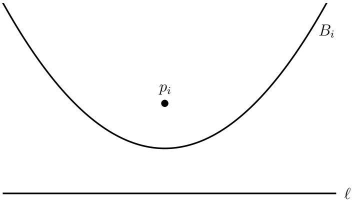
Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



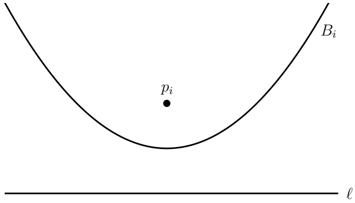
Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Da $p_y \neq \ell_y$ kan vi omskrive til

$$y = \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2),$$

Hvis $(p_i)_y > \ell_y$ så kan vi parametrisere B_i som en parabel:



Lad $p = (p_x, p_y)$ beskrive p_i og lad $q = (x, y) \in B_i$. Vi kigger så på

$$\operatorname{dist}(q,p)^2 = \operatorname{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (y - \ell_y)^2.$$

Da $p_y \neq \ell_y$ kan vi omskrive til

$$y = \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2),$$

hvilket parametriserer B_i hvis $(p_i)_y > \ell_y$.

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q, p)^2 = \mathrm{dist}(q, \ell)^2$$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

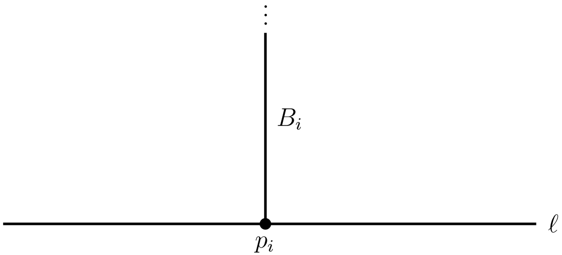
$$\text{dist}(q,p)^2 = \text{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

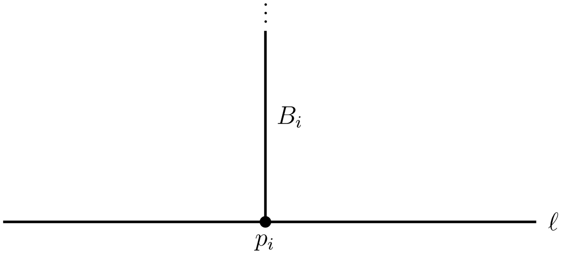
Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.



Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.

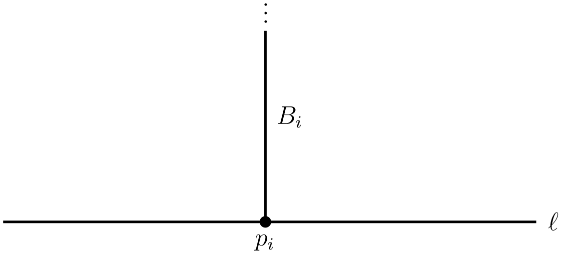


For $(p_i)_y < \ell_y$ definerer vi $B_i = \varnothing$.

Hvis derimod $(p_i)_y = \ell_y$, så får vi at

$$\mathrm{dist}(q,p)^2 = \mathrm{dist}(q,\ell)^2 \iff (p_x - x)^2 + (p_y - y)^2 = (p_y - y)^2.$$

Dvs. $p_x = x$, så B_i er en vertikal stråle der starter i p_i.



For $(p_i)_y < \ell_y$ definerer vi $B_i = \varnothing$. (Bemærk fejl i speciale på s. 19!)

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \end{cases}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \end{cases}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) =$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht.* ℓ som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for *g*rafdel er givet ved

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for *g*rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

hvor G for $g$rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

og V for $v$ertikaldel er givet ved

For alle i definerer vi nu for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p_y - \ell_y)}(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2 - \ell_y^2) & \text{hvis } (p_i)_y > \ell_y \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\mathrm{LB}(x) = \min\{\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)\}.$$

Definition (kystlinjen)

Vi definerer så *kystlinjen for P mht. ℓ* som mængden

$$G \cup V,$$

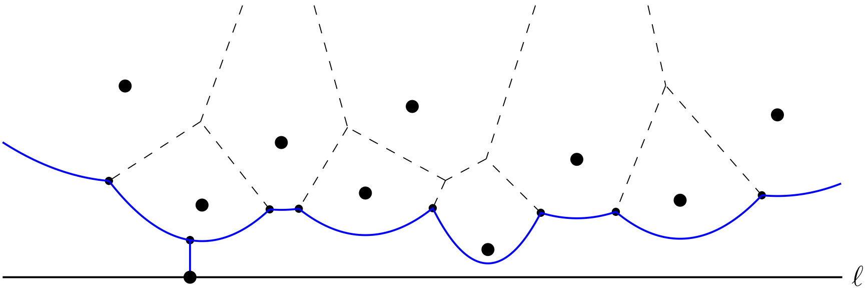
hvor G for *g*rafdel er givet ved

$$G = \{(x, \mathrm{LB}(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{LB}(x) < \infty\}$$

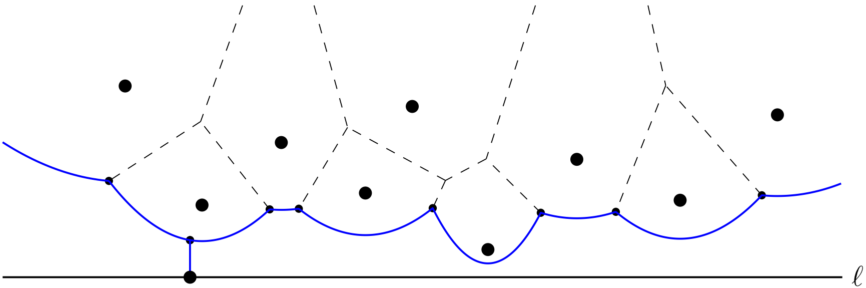
og V for *v*ertikaldel er givet ved

$$V = \{B_i - (p_i)_x \times (\mathrm{LB}((p_i)_x), \infty) \mid i = 1, \ldots, n \text{ hvor } (p_i)_y = \ell - y\}.$$

Et eksempel på kystlinjen er givet her:

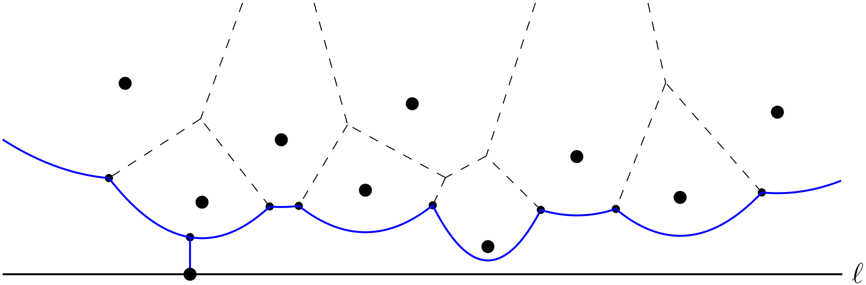


Et eksempel på kystlinjen er givet her:



De stykvis glatte kurver udgør G

Et eksempel på kystlinjen er givet her:



De stykvis glatte kurver udgør G, mens det vertikale linjestykke udgør V.

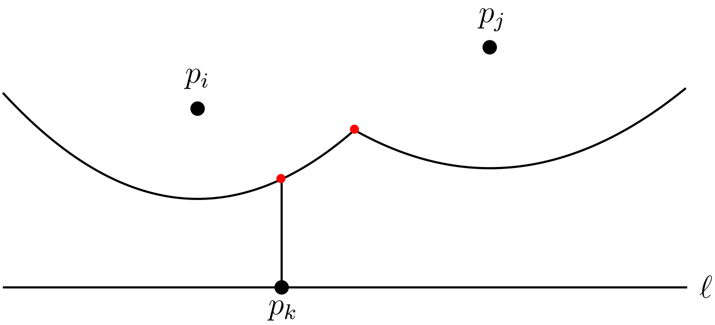
Definition (Breakpoint)

Definition (Breakpoint)

Ethvert punkt q på kystlinjen således at $q \in B_i \cap B_j$ for to forskellige i, j kaldes for et *breakpoint*.

Definition (Breakpoint)

Ethvert punkt q på kystlinjen således at $q \in B_i \cap B_j$ for to forskellige i, j kaldes for et *breakpoint*.



Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_G(P)$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell \colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1):

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem.

Vi viser nu at breakpoints optegner $\text{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\text{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \text{Vor}_G(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$, hvilket vil sige at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_G(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$, hvilket vil sige at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Sidste lighedstegn giver at $q \notin \mathcal{V}(p_k)$ for alle k

Vi viser nu at breakpoints optegner $\mathrm{Vor}_G(P)$ når ℓ bevæger sig gennem hele $\mathbb{R}$:

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line $\ell\colon y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_G(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis. (1): Antag at ℓ har mindst et breakpoint, og lad q være et af dem. Så gælder at $q \in B_i \cap B_j$ for $i \neq j$, hvilket vil sige at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Sidste lighedstegn giver at $q \notin \mathcal{V}(p_k)$ for alle k, hvormed $q \in \mathrm{Vor}_G(P)$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathsf{Vor_G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathsf{Vor_G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor_G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor_G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2):

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \text{Vor}_{\text{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \text{Vor}_{\text{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_G(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_G(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_G(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q, og q er på kystlinjen da der ikke findes et site p_k med $k \neq i, j$ tættere på q

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q, og q er på kystlinjen da der ikke findes et site p_k med $k \neq i, j$ tættere på q, pr. definition af $C_P(q)$.

Proposition

Vi har følgende:

1. For enhver sweep line ℓ: $y = \ell_y$ gælder det at ethvert breakpoint ligger på $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$.
2. For alle $q \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ findes der en position ℓ_y for ℓ således at q er et breakpoint.

Bevis fortsat. (2): Lad $q = (q_x, q_y) \in \mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$. Da q enten er en knude eller en kant, så giver Sætning 3 at $|\partial C_P(q) \cap P| \geq 2$. Så lad $p_i, p_j \in \partial C_P(q) \cap P$ så $p_i \neq p_j$. Vi sætter så

$$\ell_y := q_y - \mathrm{dist}(q, p_i).$$

Så er

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j).$$

Dvs. B_i og B_j skærer hinanden i q, og q er på kystlinjen da der ikke findes et site p_k med $k \neq i, j$ tættere på q, pr. definition af $C_P(q)$. **QED.**

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

Definition (Site begivenhed)

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

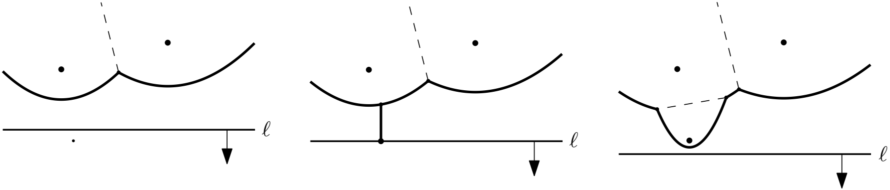
Definition (Site begivenhed)

Når ℓ møder et punkt $p_i \in P$, dvs. når $\ell_y = (p_i)_y$, så siger vi at vi møder en *site begivenhed*.

Vi vil nu til at beskrive *site* og *cirkel begivenheder*, og bevise at disse er de eneste tidspunkter hvorpå den topologiske struktur af kystlinjen ændres.

Definition (Site begivenhed)

Når ℓ møder et punkt $p_i \in P$, dvs. når $\ell_y = (p_i)_y$, så siger vi at vi møder en *site begivenhed*.



Lemma

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis. Antag for modstrid at en ny bue optræder på kystlinjen mens $\ell_y \neq (p_i)_y$ for alle i.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis. Antag for modstrid at en ny bue optræder på kystlinjen mens $\ell_y \neq (p_i)_y$ for alle i. Lad β_j være parablen som indeholder den nye bue der optræder på kystlinjen, som tilhører $p_j \in P$.

Lemma

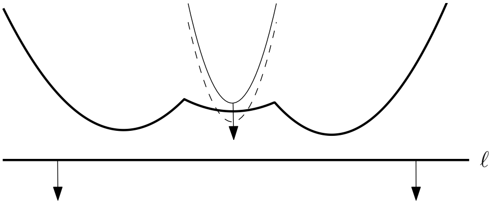
Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis. Antag for modstrid at en ny bue optræder på kystlinjen mens $\ell_y \neq (p_i)_y$ for alle i. Lad β_j være parablen som indeholder den nye bue der optræder på kystlinjen, som tilhører $p_j \in P$. Vi ser nu på 2 tilfælde hvorpå β_j kan optræde med en ny bue på kystlinjen.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis. Antag for modstrid at en ny bue optræder på kystlinjen mens $\ell_y \neq (p_i)_y$ for alle i. Lad β_j være parablen som indeholder den nye bue der optræder på kystlinjen, som tilhører $p_j \in P$. Vi ser nu på 2 tilfælde hvorpå β_j kan optræde med en ny bue på kystlinjen.



Det første tilfælde er hvor β_j smadrer igennem i midten af en anden bue, som er en del af en parabel β_i.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt. Da $p_i \neq p_j$ så ligger de ikke oveni hinanden, hvormed de må skære hinanden i ét punkt.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt. Da $p_i \neq p_j$ så ligger de ikke oveni hinanden, hvormed de må skære hinanden i ét punkt.

Fra vores teoretiske antagelser har vi at $(p_i)_y \neq (p_j)_y$

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt. Da $p_i \neq p_j$ så ligger de ikke oveni hinanden, hvormed de må skære hinanden i ét punkt.

Fra vores teoretiske antagelser har vi at $(p_i)_y \neq (p_j)_y$, hvormed $\beta_i(x) - \beta_j(x)$ er et andengradspolynomium

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt. Da $p_i \neq p_j$ så ligger de ikke oveni hinanden, hvormed de må skære hinanden i ét punkt.

Fra vores teoretiske antagelser har vi at $(p_i)_y \neq (p_j)_y$, hvormed $\beta_i(x) - \beta_j(x)$ er et andengradspolynomium med discriminant

$$D = \frac{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}{(p_y - \ell_y)(q_y - \ell_y)}$$

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt. Da $p_i \neq p_j$ så ligger de ikke oveni hinanden, hvormed de må skære hinanden i ét punkt.

Fra vores teoretiske antagelser har vi at $(p_i)_y \neq (p_j)_y$, hvormed $\beta_i(x) - \beta_j(x)$ er et andengradspolynomium med discriminant

$$D = \frac{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}{(p_y - \ell_y)(q_y - \ell_y)} > 0.$$

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt. Da $p_i \neq p_j$ så ligger de ikke oveni hinanden, hvormed de må skære hinanden i ét punkt.

Fra vores teoretiske antagelser har vi at $(p_i)_y \neq (p_j)_y$, hvormed $\beta_i(x) - \beta_j(x)$ er et andengradspolynomium med discriminant

$$D = \frac{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}{(p_y - \ell_y)(q_y - \ell_y)} > 0.$$

Dvs. at β_i og β_j skærer hinanden i to forskellige punkter

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. For at dette kan ske, så er der et tidspunkt hvorpå at β_i og β_j enten ligger helt oveni hinanden, eller så tangerer de hinanden, hvormed de skærer hinanden i præcis ét punkt. Da $p_i \neq p_j$ så ligger de ikke oveni hinanden, hvormed de må skære hinanden i ét punkt.

Fra vores teoretiske antagelser har vi at $(p_i)_y \neq (p_j)_y$, hvormed $\beta_i(x) - \beta_j(x)$ er et andengradspolynomium med discriminant

$$D = \frac{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}{(p_y - \ell_y)(q_y - \ell_y)} > 0.$$

Dvs. at β_i og β_j skærer hinanden i to forskellige punkter, en modstrid.

Lemma

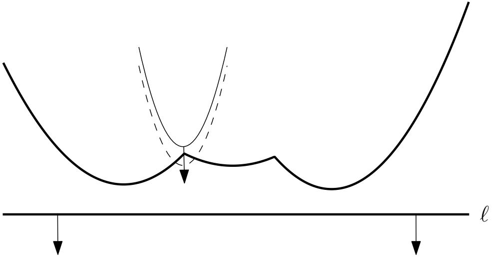
Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

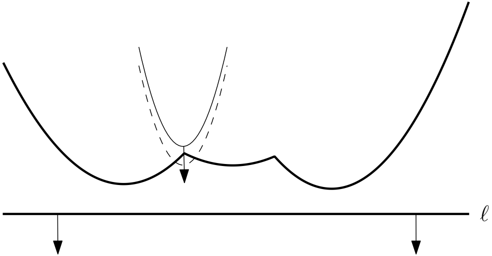
Bevis fortsat. Det andet tilfælde er hvor β_j optræder i mellem to buer.



Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Det andet tilfælde er hvor β_j optræder i mellem to buer.

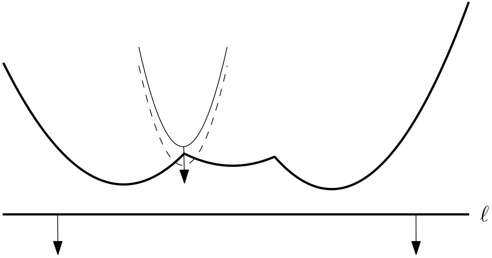


(Bemærk at øverste figur på s. 22 i specialet er forkert, og skal erstattes af ovenstående.)

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Det andet tilfælde er hvor β_j optræder i mellem to buer.



(Bemærk at øverste figur på s. 22 i specialet er forkert, og skal erstattes af ovenstående.) Antag at disse buer tilhører parablerne β_i og β_k.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Lad q være skæringspunktet mellem β_i, β_j og β_k

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Lad q være skæringspunktet mellem β_i, β_j og β_k, og antag at buen på kystlinjen fra β_i ligger til venstre for q

Lemma

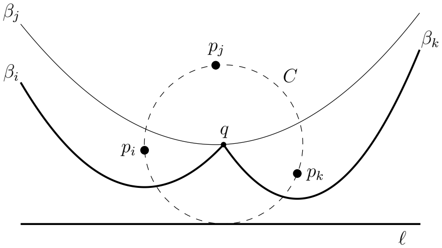
Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Lad q være skæringspunktet mellem β_i, β_j og β_k, og antag at buen på kystlinjen fra β_i ligger til venstre for q, og at buen på kystlinjen fra β_k ligger til højre for q.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

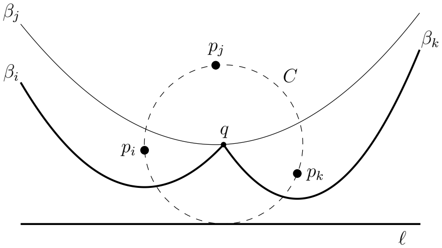
Bevis fortsat. Lad q være skæringspunktet mellem β_i, β_j og β_k, og antag at buen på kystlinjen fra β_i ligger til venstre for q, og at buen på kystlinjen fra β_k ligger til højre for q.



Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Lad q være skæringspunktet mellem β_i, β_j og β_k, og antag at buen på kystlinjen fra β_i ligger til venstre for q, og at buen på kystlinjen fra β_k ligger til højre for q.

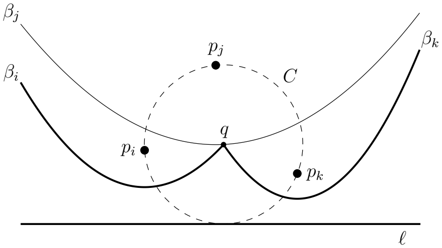


Lad C være $C_P(q)$

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Lad q være skæringspunktet mellem β_i, β_j og β_k, og antag at buen på kystlinjen fra β_i ligger til venstre for q, og at buen på kystlinjen fra β_k ligger til højre for q.

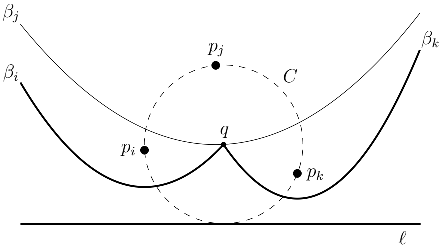


Lad C være $C_P(q)$, og bemærk at den har p_i, p_j, p_k på randen

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Lad q være skæringspunktet mellem β_i, β_j og β_k, og antag at buen på kystlinjen fra β_i ligger til venstre for q, og at buen på kystlinjen fra β_k ligger til højre for q.



Lad C være $C_P(q)$, og bemærk at den har p_i, p_j, p_k på randen, og at C tangerer ℓ.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad

Lemma

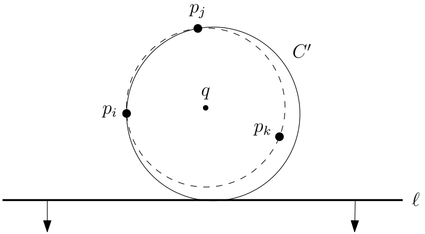
Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

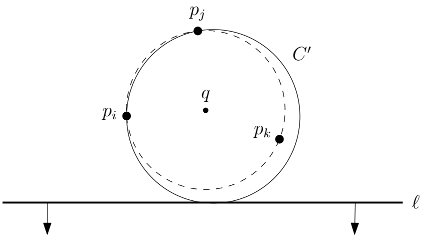
Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':



Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':

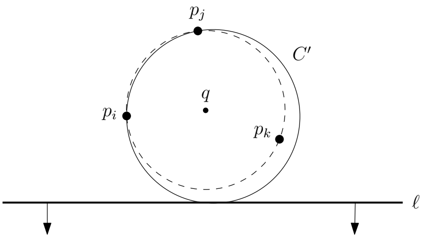


Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C'

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':

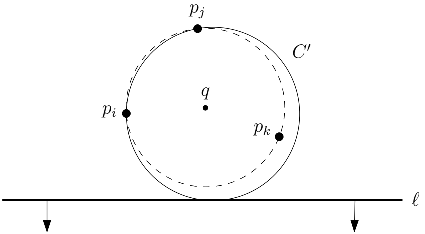


Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C', lad os sige det er p_k.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':

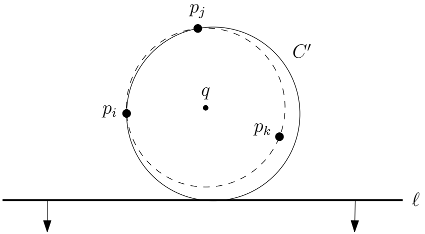


Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C', lad os sige det er p_k. Lad c være centrum for C'.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':

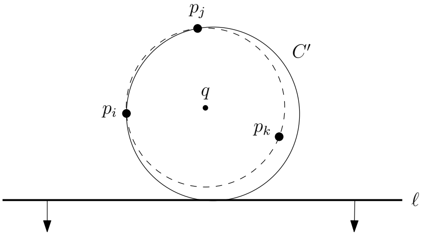


Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C', lad os sige det er p_k. Lad c være centrum for C'. Så er $\text{dist}(c, p_j) = \text{dist}(c, \ell)$

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':

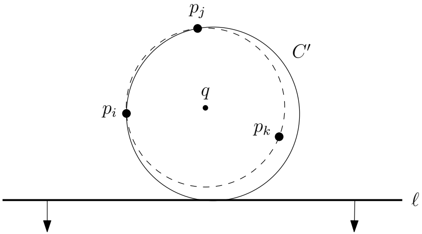


Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C', lad os sige det er p_k. Lad c være centrum for C'. Så er $\text{dist}(c, p_j) = \text{dist}(c, \ell)$, men $\text{dist}(c, p_k) < \text{dist}(c, p_j)$

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':

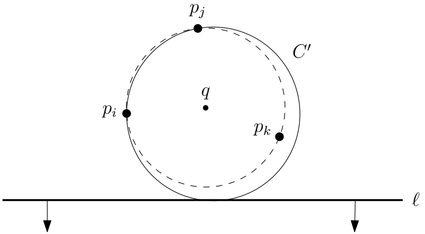


Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C', lad os sige det er p_k. Lad c være centrum for C'. Så er $\text{dist}(c, p_j) = \text{dist}(c, \ell)$, men $\text{dist}(c, p_k) < \text{dist}(c, p_j)$, hvormed β_j ikke kan være på kystlinjen

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':

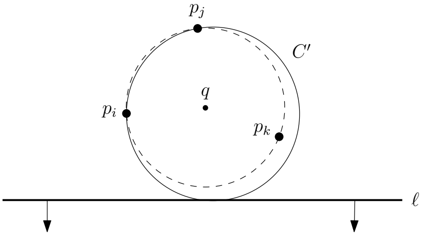


Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C', lad os sige det er p_k. Lad c være centrum for C'. Så er $\text{dist}(c, p_j) = \text{dist}(c, \ell)$, men $\text{dist}(c, p_k) < \text{dist}(c, p_j)$, hvormed β_j ikke kan være på kystlinjen, en modstrid.

Lemma

Den eneste måde hvorpå en ny bue kan optræde på kystlinjen er gennem en site begivenhed.

Bevis fortsat. Vi forestiller os nu at vi giver ℓ et meget lille skub nedad, mens vi holder C tangent til ℓ og p_j, vi kalder den nye cirkel for C':



Så vil enten p_i eller p_k være indeholdt i det indre af C', lad os sige det er p_k. Lad c være centrum for C'. Så er $\text{dist}(c, p_j) = \text{dist}(c, \ell)$, men $\text{dist}(c, p_k) < \text{dist}(c, p_j)$, hvormed β_j ikke kan være på kystlinjen, en modstrid. **QED.**

Korollar

Korollar

På ethvert tidspunkt indeholder kystlinjen højst $2n - 1$ buer.

Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen.

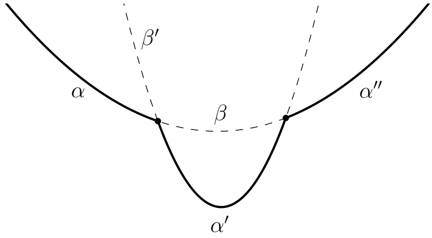
Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen

Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen, lad os kalde dem $\alpha, \alpha', \alpha''$.

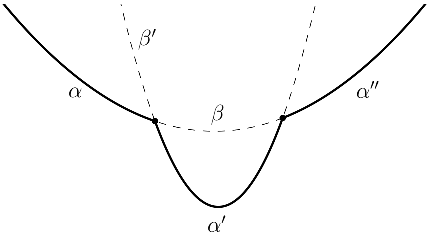
Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen, lad os kalde dem $\alpha, \alpha', \alpha''$. Vi antager at de ligger i forlængelse af hinanden.

Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen, lad os kalde dem $\alpha, \alpha', \alpha''$. Vi antager at de ligger i forlængelse af hinanden. Antag α' er den bue som skal til at forsvinde. Vi bemærker først at α og α'' ikke kan tilhøre den samme parabel.

Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen, lad os kalde dem $\alpha, \alpha', \alpha''$. Vi antager at de ligger i forlængelse af hinanden. Antag α' er den bue som skal til at forsvinde. Vi bemærker først at α og α'' ikke kan tilhøre den samme parabel. Hvis dette var tilfældet, så ville det se sådan ud:

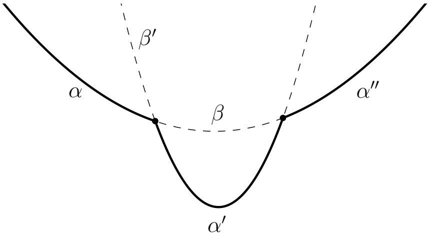


Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen, lad os kalde dem $\alpha, \alpha', \alpha''$. Vi antager at de ligger i forlængelse af hinanden. Antag α' er den bue som skal til at forsvinde. Vi bemærker først at α og α'' ikke kan tilhøre den samme parabel. Hvis dette var tilfældet, så ville det se sådan ud:



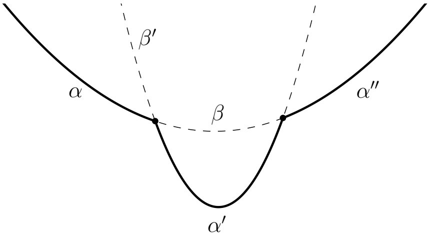
Når α' skal til at forsvinde, så er der et tidspunkt hvorpå at β og β' tangerer

Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen, lad os kalde dem $\alpha, \alpha', \alpha''$. Vi antager at de ligger i forlængelse af hinanden. Antag α' er den bue som skal til at forsvinde. Vi bemærker først at α og α'' ikke kan tilhøre den samme parabel. Hvis dette var tilfældet, så ville det se sådan ud:



Når α' skal til at forsvinde, så er der et tidspunkt hvorpå at β og β' tangerer, og her kan vi genbruge den samme modstrid som i beviset for site begivenheder.

Nu ser vi på hvornår buer forsvinder fra kystlinjen. Antag at der er mindst 3 buer på kystlinjen, lad os kalde dem $\alpha, \alpha', \alpha''$. Vi antager at de ligger i forlængelse af hinanden. Antag α' er den bue som skal til at forsvinde. Vi bemærker først at α og α'' ikke kan tilhøre den samme parabel. Hvis dette var tilfældet, så ville det se sådan ud:



Når α' skal til at forsvinde, så er der et tidspunkt hvorpå at β og β' tangerer, og her kan vi genbruge den samme modstrid som i beviset for site begivenheder. Altså er $\alpha, \alpha', \alpha''$ defineret ud fra 3 forskellige sites p_i, p_j, p_k.

I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q.

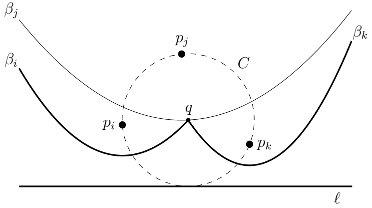
I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q. Vi bemærker at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j) = \mathrm{dist}(q, p_k).$$

I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q. Vi bemærker at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j) = \mathrm{dist}(q, p_k).$$

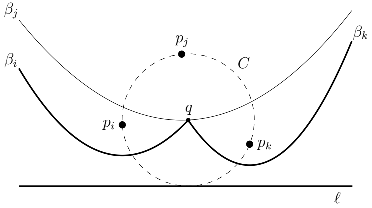
Dvs. at der findes en cirkel C med centrum q som går igennem p_i, p_j, p_k som tangerer ℓ i sit laveste punkt.



I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q. Vi bemærker at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j) = \mathrm{dist}(q, p_k).$$

Dvs. at der findes en cirkel C med centrum q som går igennem p_i, p_j, p_k som tangerer ℓ i sit laveste punkt.

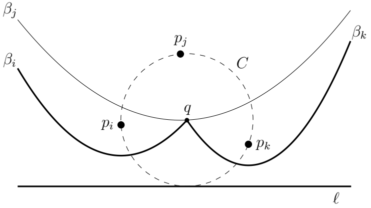


Vi påstår nu at $C = C_P(q)$.

I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q. Vi bemærker at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j) = \mathrm{dist}(q, p_k).$$

Dvs. at der findes en cirkel C med centrum q som går igennem p_i, p_j, p_k som tangerer ℓ i sit laveste punkt.

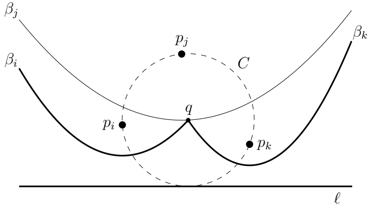


Vi påstår nu at $C = C_P(q)$. Antag for modstrid at der findes et site $p \in P$ som ligger i $^\circ C_P(q)$.

I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q. Vi bemærker at

$$\text{dist}(q, \ell) = \text{dist}(q, p_i) = \text{dist}(q, p_j) = \text{dist}(q, p_k).$$

Dvs. at der findes en cirkel C med centrum q som går igennem p_i, p_j, p_k som tangerer ℓ i sit laveste punkt.

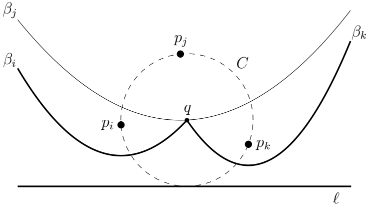


Vi påstår nu at $C = C_P(q)$. Antag for modstrid at der findes et site $p \in P$ som ligger i $^\circ C_P(q)$. Så er $\text{dist}(p, q) < \text{dist}(q, \ell)$

I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q. Vi bemærker at

$$\text{dist}(q, \ell) = \text{dist}(q, p_i) = \text{dist}(q, p_j) = \text{dist}(q, p_k).$$

Dvs. at der findes en cirkel C med centrum q som går igennem p_i, p_j, p_k som tangerer ℓ i sit laveste punkt.

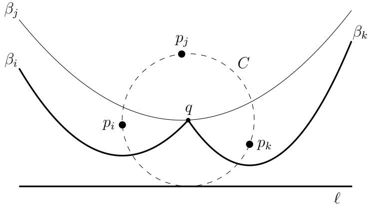


Vi påstår nu at $C = C_P(q)$. Antag for modstrid at der findes et site $p \in P$ som ligger i ${}^\circ C_P(q)$. Så er $\text{dist}(p, q) < \text{dist}(q, \ell)$, hvilket er i modstrid med at q er på kystlinjen.

I det øjeblik hvor α' forsvinder, så er der 3 parabler $\beta_i \supset \alpha$, $\beta_j \supset \alpha'$ og $\beta_k \supset \alpha''$ som skærer hinanden i et enkelt punkt q. Vi bemærker at

$$\mathrm{dist}(q, \ell) = \mathrm{dist}(q, p_i) = \mathrm{dist}(q, p_j) = \mathrm{dist}(q, p_k).$$

Dvs. at der findes en cirkel C med centrum q som går igennem p_i, p_j, p_k som tangerer ℓ i sit laveste punkt.



Vi påstår nu at $C = C_P(q)$. Antag for modstrid at der findes et site $p \in P$ som ligger i ${}^\circ C_P(q)$. Så er $\mathrm{dist}(p, q) < \mathrm{dist}(q, \ell)$, hvilket er i modstrid med at q er på kystlinjen. Altså er $C = C_P(q)$.

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$.

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude.

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Definition (Cirkel begivenhed)

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Definition (Cirkel begivenhed)

En *cirkel begivenhed* indtræffer når ℓ når det laveste punkt på en cirkel C

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Definition (Cirkel begivenhed)

En *cirkel begivenhed* indtræffer når ℓ når det laveste punkt på en cirkel C som går igennem 3 sites,

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Definition (Cirkel begivenhed)

En *cirkel begivenhed* indtræffer når ℓ når det laveste punkt på en cirkel C som går igennem 3 sites, som definerer buer på kystlinjen som ligger i forlængelse af hinanden.

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Definition (Cirkel begivenhed)

En *cirkel begivenhed* indtræffer når ℓ når det laveste punkt på en cirkel C som går igennem 3 sites, som definerer buer på kystlinjen som ligger i forlængelse af hinanden.

Vi har så lige vist:

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor}_G(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Definition (Cirkel begivenhed)

En *cirkel begivenhed* indtræffer når ℓ når det laveste punkt på en cirkel C som går igennem 3 sites, som definerer buer på kystlinjen som ligger i forlængelse af hinanden.

Vi har så lige vist:

Lemma

Bemærk nu at $\{p_i, p_j, p_k\} \subset \partial C_P(q)$, hvormed Sætning 3 giver at q er en knude i $\mathrm{Vor_G}(P)$. Vi ser altså at to breakpoints møder hinanden i q, en bue forsvinder fra kystlinjen, og to kanter fra $\mathrm{Vor_G}(P)$ mødes og danner en knude. Vi er nu klar til at definere:

Definition (Cirkel begivenhed)

En *cirkel begivenhed* indtræffer når ℓ når det laveste punkt på en cirkel C som går igennem 3 sites, som definerer buer på kystlinjen som ligger i forlængelse af hinanden.

Vi har så lige vist:

Lemma

Den eneste måde hvorpå en bue kan forsvinde fra kystlinjen er gennem en cirkel begivenhed.

Til sidst så kan man vise at:

Til sidst så kan man vise at:

Lemma

Til sidst så kan man vise at:

Lemma

Enhver knude i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ har en tilsvarende cirkel begivenhed.

Til sidst så kan man vise at:

Lemma

Enhver knude i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ har en tilsvarende cirkel begivenhed.

Vi udelader beviset da der bruges lignende teknikker set tidligere.

Addendum til treaps

I specialet beskrives det at vi bruger et selvbalancerende binært søgetræ til at holde styr på kystlinjen.

I specialet beskrives det at vi bruger et selvbalancerende binært søgetræ til at holde styr på kystlinjen.

Et forslag er at bruge en treap som et selvbalancerende binært søgetræ, og det bevises at treaps har de rigtige kørselstider *i forventning*.

I specialet beskrives det at vi bruger et selvbalancerende binært søgetræ til at holde styr på kystlinjen.

Et forslag er at bruge en treap som et selvbalancerende binært søgetræ, og det bevises at treaps har de rigtige kørselstider *i forventning*.

Det nævnes dog ikke hvordan man sørger for at træstrukturen forbliver en treap ved hhv. indsættelser og sletninger.

I specialet beskrives det at vi bruger et selvbalancerende binært søgetræ til at holde styr på kystlinjen.

Et forslag er at bruge en treap som et selvbalancerende binært søgetræ, og det bevises at treaps har de rigtige kørselstider *i forventning*.

Det nævnes dog ikke hvordan man sørger for at træstrukturen forbliver en treap ved hhv. indsættelser og sletninger. Dette snakker jeg lige kort om.

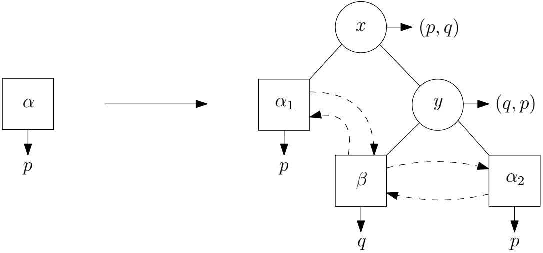
I specialet beskrives det at vi bruger et selvbalancerende binært søgetræ til at holde styr på kystlinjen.

Et forslag er at bruge en treap som et selvbalancerende binært søgetræ, og det bevises at treaps har de rigtige kørselstider *i forventning*.

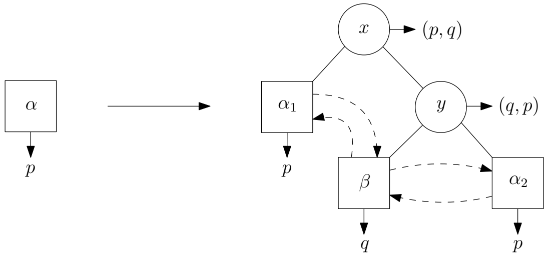
Det nævnes dog ikke hvordan man sørger for at træstrukturen forbliver en treap ved hhv. indsættelser og sletninger. Dette snakker jeg lige kort om.

Først skal det gøres klart at når vi bruger en treap til det søgetræ vi har beskrevet, så antager vi at det kun er de indre knuder som har en prioritet.

Indsættelse

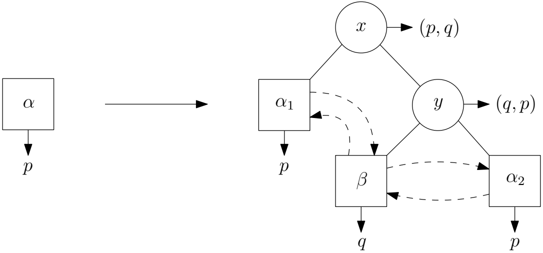


Indsættelse



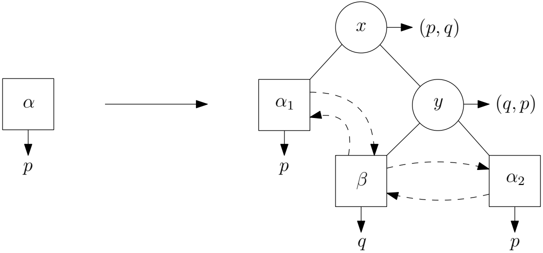
Lad w betegne forælderen til x.

Indsættelse



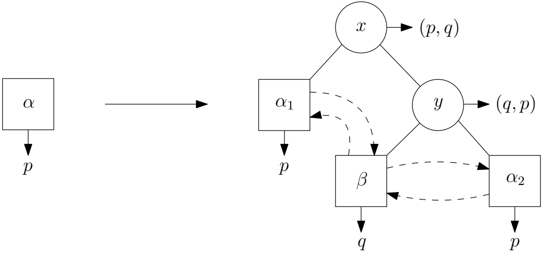
Lad w betegne forælderen til x. For at sørge for at det forbliver en treap, så har vi så valget om at rotere x op først, og så y

Indsættelse



Lad *w* betegne forælderen til *x*. For at sørge for at det forbliver en treap, så har vi så valget om at rotere *x* op først, og så *y*, og ellers så rotere vi *y* op først, og så *x*.

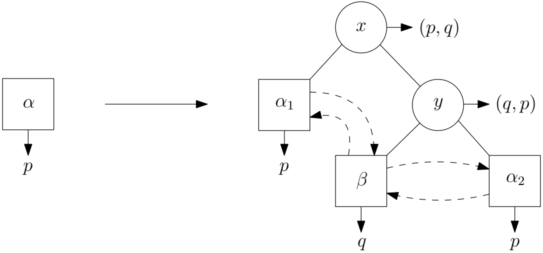
Indsættelse



Lad w betegne forælderen til x. For at sørge for at det forbliver en treap, så har vi så valget om at rotere x op først, og så y, og ellers så rotere vi y op først, og så x.

Vi kan få et problem hvis vi vælger at kigge på y først, for det kan godt ske at x.priority $>$ y.priority men w.priority $<$ x.priority

Indsættelse

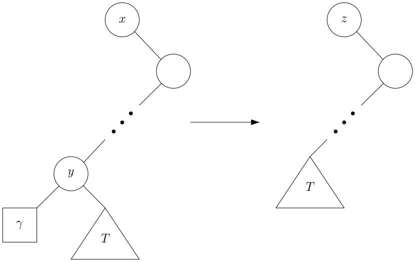


Lad w betegne forælderen til x. For at sørge for at det forbliver en treap, så har vi så valget om at rotere x op først, og så y, og ellers så rotere vi y op først, og så x.

Vi kan få et problem hvis vi vælger at kigge på y først, for det kan godt ske at x.priority $>$ y.priority men w.priority $<$ x.priority

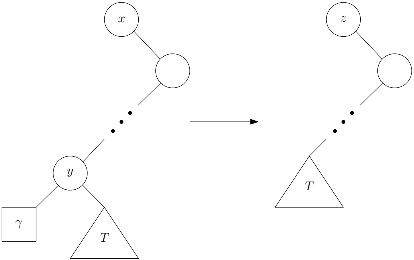
Vi vælger derfor at rotere x op til sin rigtige plads først, og så derefter y.

Sletning



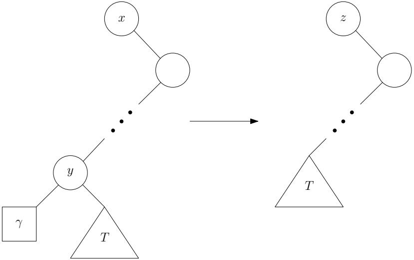
Sletning

Vi antager at x er en forfader til y.

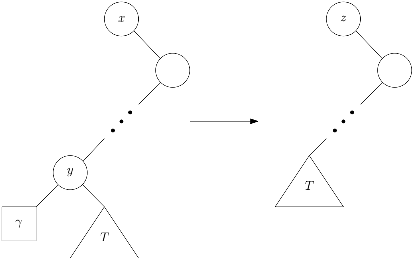


Sletning

Vi antager at x er en forfader til y.
Lad w betegne forælderen til x og z.

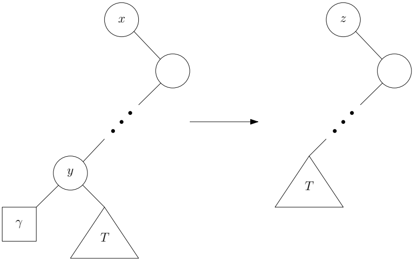


Sletning



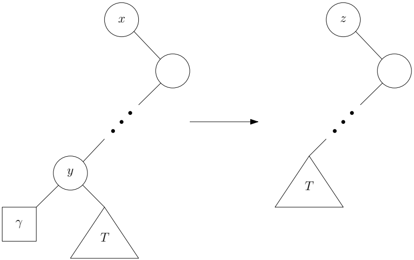
Vi antager at x er en forfader til y. Lad w betegne forælderen til x og z. Lad T_1 og T_2 betegne hhv venstre og højre undertræ for z.

Sletning



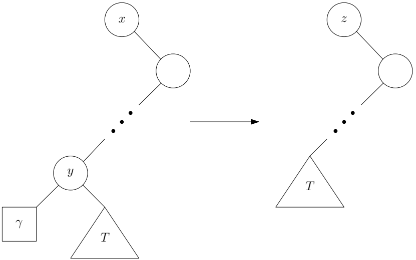
Vi antager at x er en forfader til y. Lad w betegne forælderen til x og z. Lad T_1 og T_2 betegne hhv venstre og højre undertræ for z. Bemærk at T_1 og T_2 forbliver treaps.

Sletning



Vi antager at x er en forfader til y. Lad w betegne forælderen til x og z. Lad T_1 og T_2 betegne hhv venstre og højre undertræ for z. Bemærk at T_1 og T_2 forbliver treaps. Vi skal så bare se på z.

Sletning

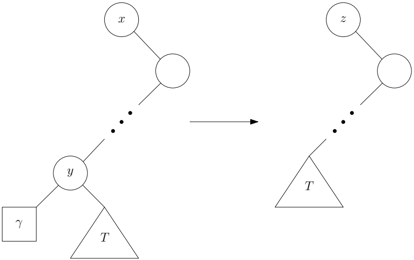


Vi antager at x er en forfader til y. Lad w betegne forælderen til x og z. Lad T_1 og T_2 betegne hhv venstre og højre undertræ for z. Bemærk at T_1 og T_2 forbliver treaps. Vi skal så bare se på z. Hvis

$$w > z > T_1, T_2$$

så gør vi intet, da vi har en treap.

Sletning

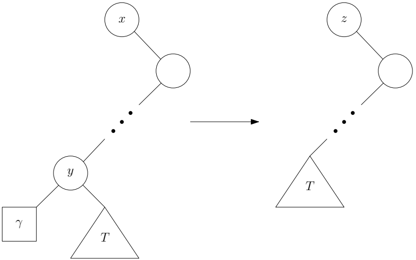


Vi antager at x er en forfader til y. Lad w betegne forælderen til x og z. Lad T_1 og T_2 betegne hhv venstre og højre undertræ for z. Bemærk at T_1 og T_2 forbliver treaps. Vi skal så bare se på z. Hvis

$$w > z > T_1, T_2$$

så gør vi intet, da vi har en treap. Ellers, så gælder enten

Sletning



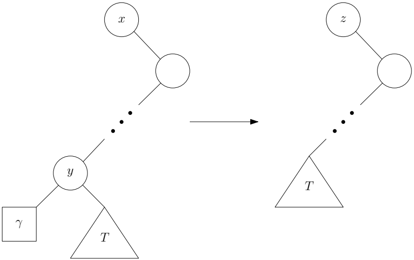
Vi antager at x er en forfader til y. Lad w betegne forælderen til x og z. Lad T_1 og T_2 betegne hhv venstre og højre undertræ for z. Bemærk at T_1 og T_2 forbliver treaps. Vi skal så bare se på z. Hvis

$$w > z > T_1, T_2$$

så gør vi intet, da vi har en treap. Ellers, så gælder enten

1. $w < z$.

Sletning



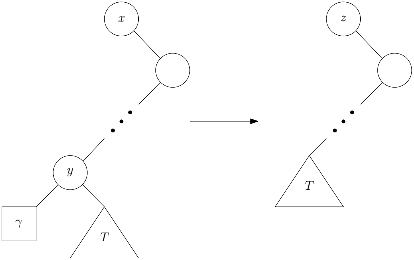
Vi antager at x er en forfader til y. Lad w betegne forælderen til x og z. Lad T_1 og T_2 betegne hhv venstre og højre undertræ for z. Bemærk at T_1 og T_2 forbliver treaps. Vi skal så bare se på z. Hvis

$$w > z > T_1, T_2$$

så gør vi intet, da vi har en treap. Ellers, så gælder enten

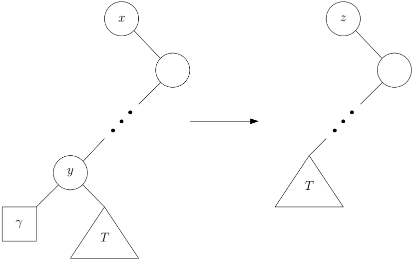
1. $w < z$.
2. $z < T_1$ eller $z < T_2$.

Sletning

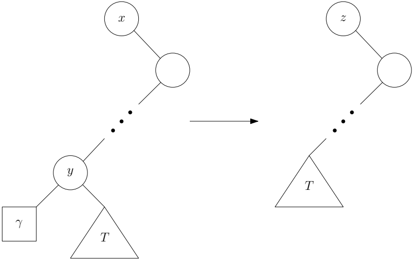


Sletning

Hvis $w < z$

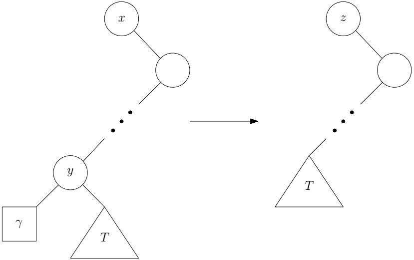


Sletning



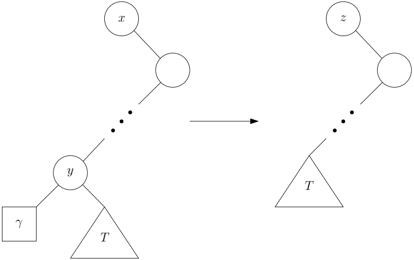
Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$

Sletning



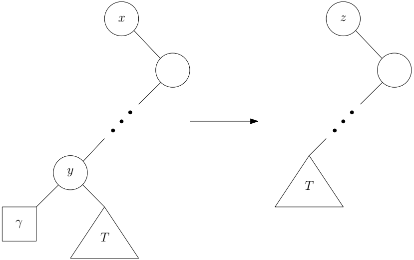
Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$ har vi at $T_1, T_2 < z$.

Sletning



Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$ har vi at $T_1, T_2 < z$. Så vi skal bare rotere z op indtil at prioriteterne passer.

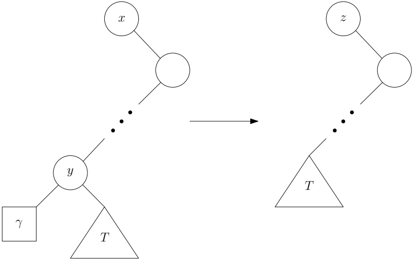
Sletning



Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$ har vi at $T_1, T_2 < z$. Så vi skal bare rotere z op indtil at prioriteterne passer.

Hvis $z < T_1$ eller $z < T_2$

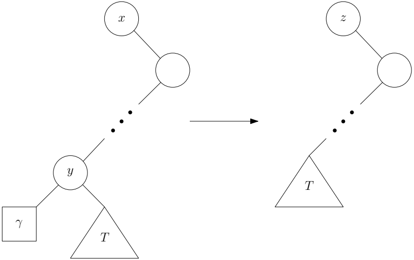
Sletning



Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$ har vi at $T_1, T_2 < z$. Så vi skal bare rotere z op indtil at prioriteterne passer.

Hvis $z < T_1$ eller $z < T_2$ så roterer vi z ned

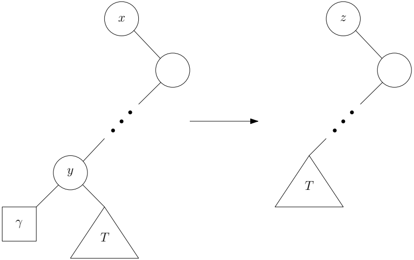
Sletning



Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$ har vi at $T_1, T_2 < z$. Så vi skal bare rotere z op indtil at prioriteterne passer.

Hvis $z < T_1$ eller $z < T_2$ så roterer vi z ned, og vi roterer med det undertræ som har den højeste prioritet.

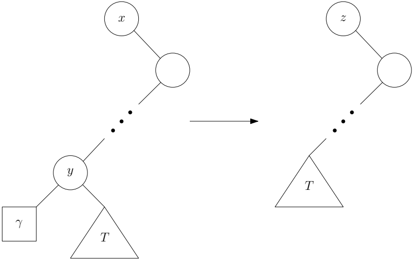
Sletning



Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$ har vi at $T_1, T_2 < z$. Så vi skal bare rotere z op indtil at prioriteterne passer.

Hvis $z < T_1$ eller $z < T_2$ så roterer vi z ned, og vi roterer med det undertræ som har den højeste prioritet. Sådan bliver vi ved indtil z sidder det rigtige sted.

Sletning



Hvis $w < z$, så da $T_1, T_2 < w$ har vi at $T_1, T_2 < z$. Så vi skal bare rotere z op indtil at prioriteterne passer.

Hvis $z < T_1$ eller $z < T_2$ så roterer vi z ned, og vi roterer med det undertræ som har den højeste prioritet. Sådan bliver vi ved indtil z sidder det rigtige sted.

På denne måde bevarer vi de teoretiske garantier, og vi kan så bruge en treap i vores implementation til at opnå forventet $\mathcal{O}(n \log n)$ tid på Fortunes algoritme.