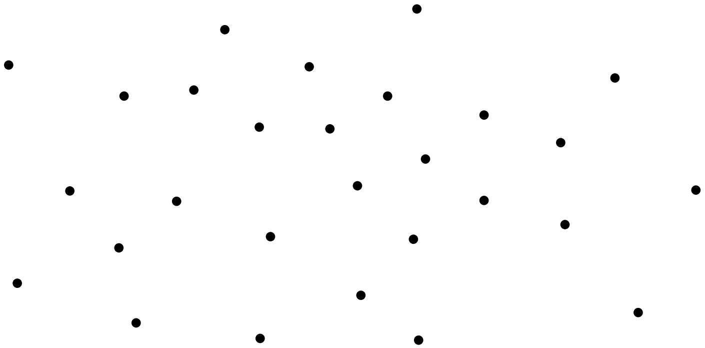
Specialeforsvar

Johannes Jensen

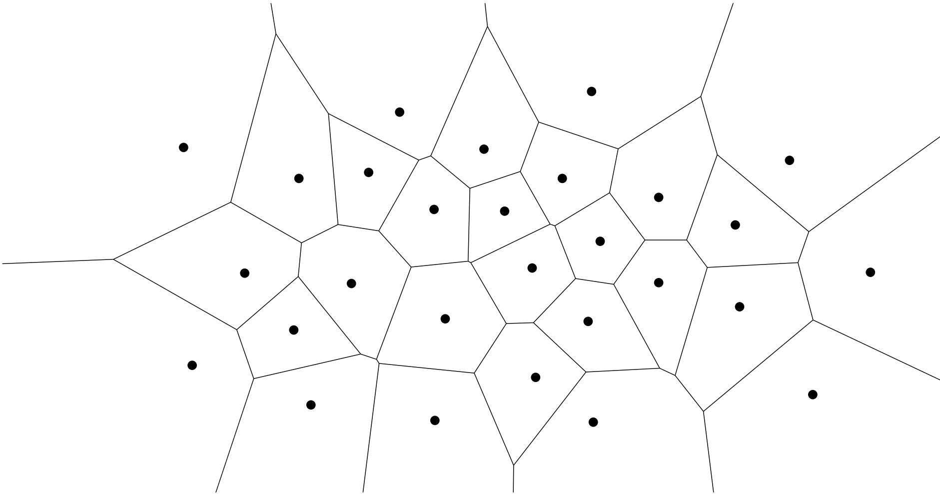
Aarhus Universitet

22. juni 2022

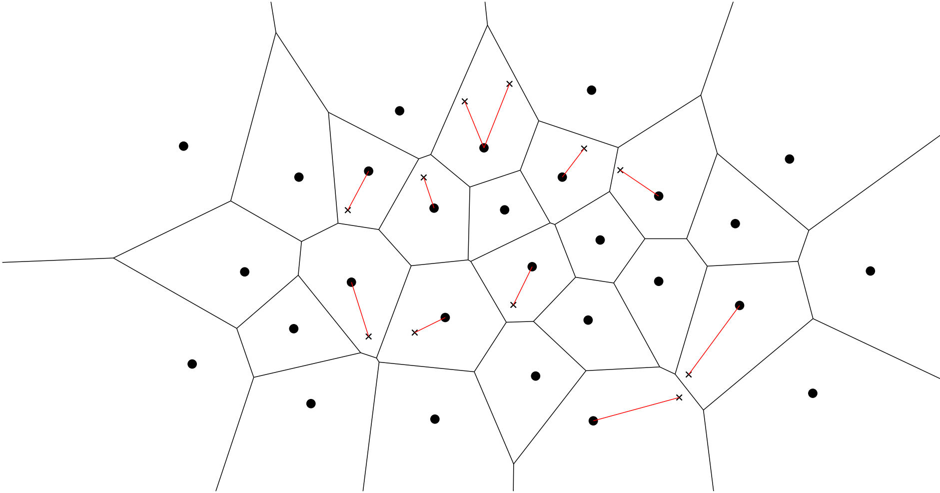
Introduktion



Lad $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ betegne en endelig mængde af *sites*.



Vi ønsker så at beregne Vor(P), *Voronoi diagrammet* for P.



Hvad kan Voronoi diagrammet? Givet et $\times$ i en *Voronoi celle* angiver diagrammet hvilket punkt fra P som er tættest på!

Men hvordan beregner man det?

Men hvordan beregner man det?

Man bruger en *sweep line algorithm*! (En fejende linje algoritme...?)

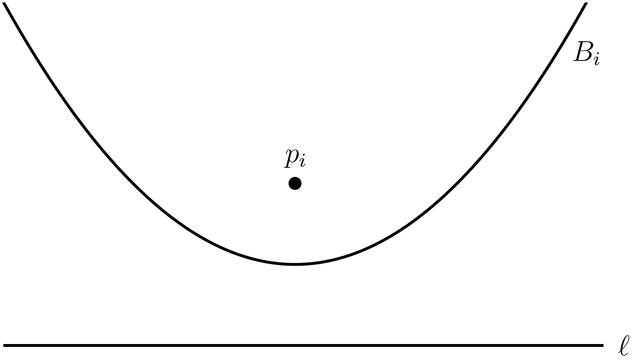
Men hvordan beregner man det?

Man bruger en *sweep line algorithm*! (En fejende linje algoritme...?)

Demo tid!

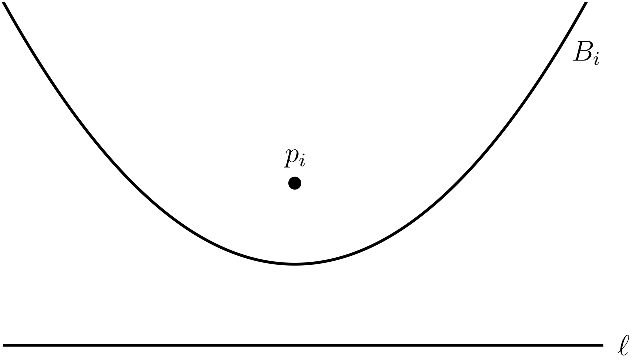
Hvorfor virker det?

Hvorfor virker det?



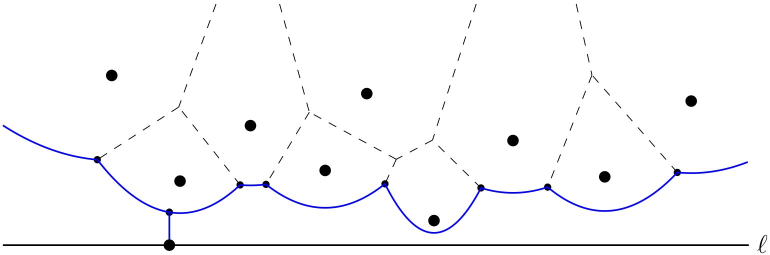
Vi kan separere ethvert site $p_i \in P$ og vores sweep line ℓ med en andengrads kurve B_i

Hvorfor virker det?

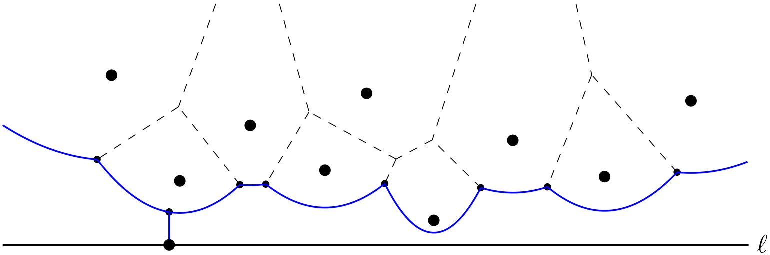


Vi kan separere ethvert site $p_i \in P$ og vores sweep line ℓ med en andengrads kurve B_i, således at for alle $q \in B_i$ så $\text{dist}(q, p_i) = \text{dist}(q, \ell)$.

Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:

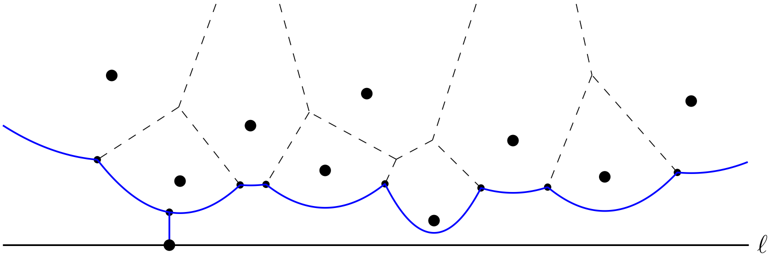


Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:



Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for ℓ mht. P.

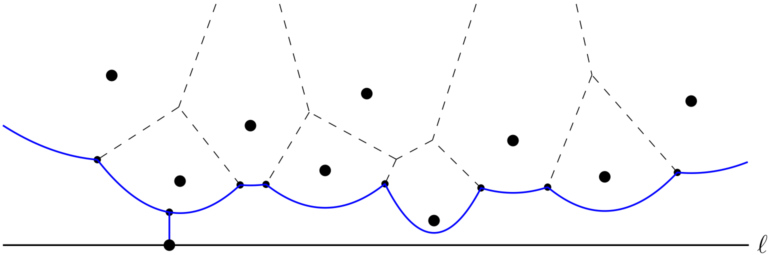
Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:



Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for ℓ mht. P.

At sweep line metoden virker følger så fra at skæringerne mellem forskellige B_i og B_j

Vi kan så gøre dette for alle sites i P, men vi beholder kun de dele af kurverne som ligger tættest på ℓ:



Den blå kurve kalder vi for *the beach line* (kystlinjen) for ℓ mht. P.

At sweep line metoden virker følger så fra at skæringerne mellem forskellige B_i og B_j optegner Voronoi diagrammet når vi fejer ℓ fra "$y = \infty$" til "$y = -\infty$".

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Vi vil finde de positioner for ℓ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen

Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

Vi vil finde de positioner for ℓ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen, og de tidspunkter hvor der bliver *fjernet* en kurve fra kystlinjen.

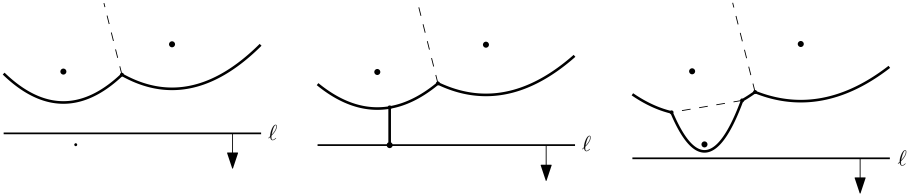
Men hvordan får man en computer til at gå igennem alle mulige positioner for ℓ, der er jo uendeligt mange af dem?

Nøgleindsigt: Vi behøver kun at holde øje med de positioner for ℓ hvor kystlinjens topologiske struktur ændrer sig!

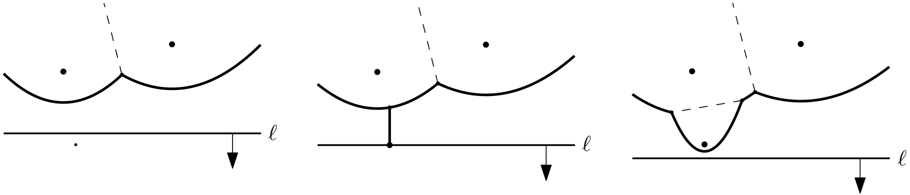
Vi vil finde de positioner for ℓ hvor der bliver *tilføjet* en kurve til kystlinjen, og de tidspunkter hvor der bliver *fjernet* en kurve fra kystlinjen.

Dette kan illustreres med blot 3 punkter (Demo tid!)

Vi så at der bliver tilføjet en kurve til kystlinjen når ℓ rammer en site.

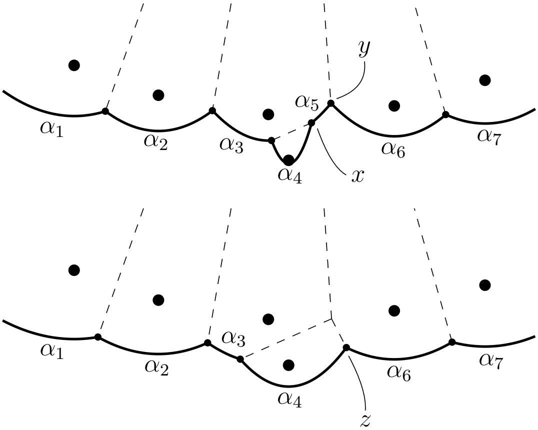


Vi så at der bliver tilføjet en kurve til kystlinjen når ℓ rammer en site.

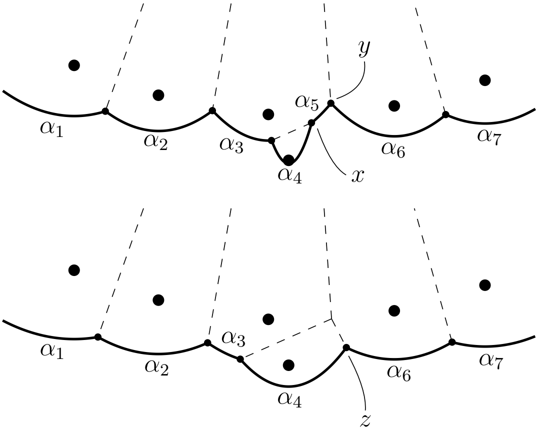


Dette kalder vi for en *site begivenhed*.

Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.

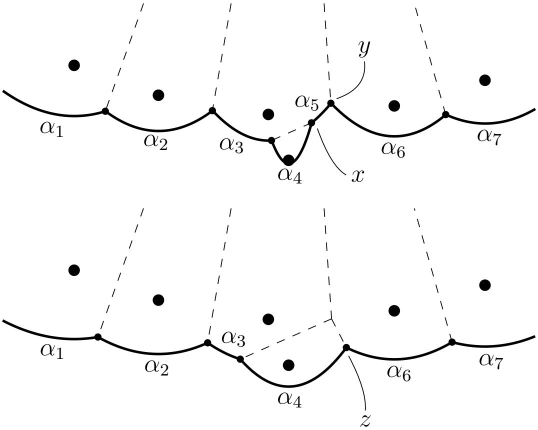


Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.



Dette kalder vi for en *cirkel begivenhed*.

Vi så at der bliver fjernet en kurve fra kystlinjen når to Voronoi diagram kanter mødes.



Dette kalder vi for en *cirkel begivenhed*...indtil videre. Det er lidt mere teknisk og kommer senere.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en cirkel begivenhed bliver to kanter forbundet, og vi får en ny knude for Voronoi diagrammet, og en ny kant fortsættes.

Ved en site begivenhed begynder en ny kant fra Voronoi diagrammet at vise sig.

Ved en cirkel begivenhed bliver to kanter forbundet, og vi får en ny knude for Voronoi diagrammet, og en ny kant fortsættes.

Når vores sweep line ℓ har været i gennem alle begivenhederne i ordnet rækkefølge opdager vi da hele strukturen på Voronoi diagrammet.

Vi kommer til at se at for P med n punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi kommer til at se at for P med n punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi behøver altså kun at flytte ℓ et endeligt antal steder hen, for at opdage strukturen på Voronoi diagrammet.

Vi kommer til at se at for P med n punkter at der kun er $\mathcal{O}(n)$ site og cirkel begivenheder.

Vi behøver altså kun at flytte ℓ et endeligt antal steder hen, for at opdage strukturen på Voronoi diagrammet.

Nu til de tekniske detaljer...

Matematisk teori

Lad $\mathrm{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|$$

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition (Voronoi celle)

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition (Voronoi celle)

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* p_i

Lad $\text{dist}(p, q)$ betegne den Euklidiske afstand mellem $p, q \in \mathbb{R}^2$. Dvs.

$$\text{dist}(p, q) = \|p - q\|, \quad \text{hvor} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definition (Voronoi celle)

For $p_i \in P$ definerer vi *Voronoi cellen for* p_i til at være

$$\mathcal{V}(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(q, p_i) < dist(q, p_j) \text{ for all } i \neq j\}.$$