# Specialeforsvar

Johannes Jensen

Aarhus Universitet

23. juni 2022

Sætning 2

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5

### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis.

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje.

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder,

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n-5 og antallet af kanter er højst 3n-6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V-E+F=2.$$

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2.$$

Vi har dog det problem at  $Vor_G(P)$  ikke er en plan graf i ovenstående forstand, da den har nogle uendelige kanter.

#### Sætning 2

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n-5 og antallet af kanter er højst 3n-6.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at  $Vor_G(P)$  opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2$$
.

Vi har dog det problem at  $Vor_G(P)$  ikke er en plan graf i ovenstående forstand, da den har nogle uendelige kanter. Vi laver nu en transformation af  $Vor_G(P)$  som gør at vi kan benytte formlen.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i  $Vor_G(P)$ .

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i  $Vor_G(P)$ . Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\operatorname{dist}(p, v_1), \ldots, \operatorname{dist}(p, v_k)\}.$$

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n-5 og antallet af kanter er højst 3n-6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\operatorname{dist}(p, v_1), \dots, \operatorname{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at  $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ 

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n-5 og antallet af kanter er højst 3n-6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\operatorname{dist}(p, v_1), \dots, \operatorname{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at  $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$  og enhver kant i  $Vor_G(P)$  som er en stråle skærer  $\partial B_r(p)$  i et entydigt punkt

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n-5 og antallet af kanter er højst 3n-6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\operatorname{dist}(p, v_1), \dots, \operatorname{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at  $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$  og enhver kant i  $Vor_G(P)$  som er en stråle skærer  $\partial B_r(p)$  i et entydigt punkt, kald disse punkter  $s_1, s_2, \ldots, s_t$ .

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n-5 og antallet af kanter er højst 3n-6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\operatorname{dist}(p, v_1), \dots, \operatorname{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at  $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$  og enhver kant i  $Vor_G(P)$  som er en stråle skærer  $\partial B_r(p)$  i et entydigt punkt, kald disse punkter  $s_1, s_2, \ldots, s_t$ . Definér så  $v_\infty$  som et vilkårligt element i  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$ .

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\operatorname{dist}(p, v_1), \dots, \operatorname{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at  $v_1,\ldots,v_k\in B_r(p)$  og enhver kant i  ${\rm Vor}_{\sf G}(P)$  som er en stråle skærer  $\partial B_r(p)$  i et entydigt punkt, kald disse punkter  $s_1,s_2,\ldots,s_t$ . Definér så  $v_\infty$  som et vilkårligt element i  $\mathbb{R}^2\setminus\overline{B_r(p)}$ . Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til  $v_\infty$ 

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\operatorname{dist}(p, v_1), \dots, \operatorname{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at  $v_1,\ldots,v_k\in B_r(p)$  og enhver kant i  ${\rm Vor}_{\sf G}(P)$  som er en stråle skærer  $\partial B_r(p)$  i et entydigt punkt, kald disse punkter  $s_1,s_2,\ldots,s_t$ . Definér så  $v_\infty$  som et vilkårligt element i  $\mathbb{R}^2\setminus\overline{B_r(p)}$ . Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til  $v_\infty$ , ved at forbinde  $s_i$  til  $v_\infty$  med en sti

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  være knuderne i Vor<sub>G</sub>(P). Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

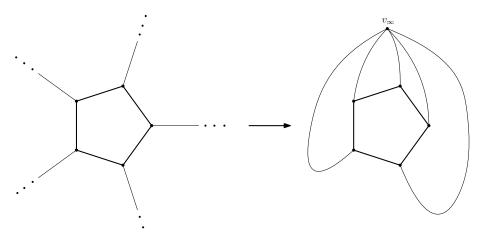
og

$$r = 1 + \max\{\mathsf{dist}(p, v_1), \dots, \mathsf{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at  $v_1,\ldots,v_k\in B_r(p)$  og enhver kant i  $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$  som er en stråle skærer  $\partial B_r(p)$  i et entydigt punkt, kald disse punkter  $s_1,s_2,\ldots,s_t$ . Definér så  $v_\infty$  som et vilkårligt element i  $\mathbb{R}^2\setminus\overline{B_r(p)}$ . Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til  $v_\infty$ , ved at forbinde  $s_i$  til  $v_\infty$  med en sti, og vi gør det i rækkefølge, startende med det  $s_i$  som ligger tættest på  $v_\infty$ .

Et eksempel på denne konstruktion er givet her:

Et eksempel på denne konstruktion er givet her:



For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ .

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2.$$
 (1)

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_{v}+1)-n_{e}+n=2. (1)$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har  $deg(v) \ge 3$ 

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_{v}+1)-n_{e}+n=2. (1)$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har  $\deg(v) \geq 3$ , for ellers ville der være en  $\mathcal{V}(p_i)$  som ikke er konveks.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2.$$
 (1)

Bemærk så, at enhver knude v i G har  $\deg(v) \geq 3$ , for ellers ville der være en  $\mathcal{V}(p_i)$  som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$$

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2.$$
 (1)

Bemærk så, at enhver knude v i G har  $\deg(v) \geq 3$ , for ellers ville der være en  $\mathcal{V}(p_i)$  som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \ge 3 \, |V(G)|$$

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2.$$
 (1)

Bemærk så, at enhver knude v i G har  $\deg(v) \geq 3$ , for ellers ville der være en  $\mathcal{V}(p_i)$  som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \ge 3 |V(G)| = 3(n_v + 1).$$

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere  $Vor_G(P)$ . Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad  $n_v$  betegne antallet af knuder i  $Vor_G(P)$ , og lad  $n_e$  betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2.$$
 (1)

Bemærk så, at enhver knude v i G har  $\deg(v) \geq 3$ , for ellers ville der være en  $\mathcal{V}(p_i)$  som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \ge 3 |V(G)| = 3(n_v + 1).$$

Vi finder nu et udtryk for venstresiden.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat.

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at deg(v) tæller antallet af kanter som rører v

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at deg(v) tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at  $\deg(v)$  tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$ .

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at  $\deg(v)$  tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$ . Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v+1). \tag{2}$$

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at  $\deg(v)$  tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$ . Dvs.

$$2n_e \ge 3(n_v + 1).$$
 (2)

$$2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4$$
 (Gang (1) med 2)

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at  $\deg(v)$  tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$ . Dvs.

$$2n_e \ge 3(n_v + 1). \tag{2}$$

$$2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4$$
 (Gang (1) med 2)  
 $\iff 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4$  (Isolér  $2n_e$ )

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at  $\deg(v)$  tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$ . Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v+1). \tag{2}$$

$$2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4$$
 (Gang (1) med 2)  
 $\iff 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4$  (Isolér  $2n_e$ )  
 $\implies 3(n_v + 1) \le 2(n_v + 1) + 2n - 4$  (Anvend (2))

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at  $\deg(v)$  tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$ . Dvs.

$$2n_e \ge 3(n_v + 1).$$
 (2)

$$2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad (Gang (1) med 2)$$

$$\iff 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad (Isolér 2n_e)$$

$$\implies 3(n_v + 1) \le 2(n_v + 1) + 2n - 4 \quad (Anvend (2))$$

$$\implies n_v \le 2n - 5.$$

For  $n \ge 3$  er antallet af knuder i  $Vor_G(P)$  højst 2n - 5 og antallet af kanter er højst 3n - 6.

Bevis fortsat. Bemærk at  $\deg(v)$  tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$ . Dvs.

$$2n_e \ge 3(n_v + 1).$$
 (2)

Vi får så:

$$2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad (Gang (1) med 2)$$

$$\iff 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad (Isolér 2n_e)$$

$$\implies 3(n_v + 1) \le 2(n_v + 1) + 2n - 4 \quad (Anvend (2))$$

$$\implies n_v \le 2n - 5.$$

Altså er antallet af knuder højst 2n - 5.

