Specialeforsvar

Johannes Jensen

Aarhus Universitet

23. juni 2022

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor_G}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor_G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor_G}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder,

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2.$$

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2.$$

Vi har dog det problem at $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ ikke er en plan graf i ovenstående forstand, da den har nogle uendelige kanter.

Vi viser nu at antallet af knuder og kanter i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ er $\mathcal{O}(n)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis. Hvis punkterne i P alle ligger på den samme linje, så giver Sætning 1 at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ opfylder de angivne øvre grænser.

Antag nu at punkterne i P ikke alle ligger på den samme linje. Vi vil benytte Eulers formel, som for en plan graf med V knuder, E kanter og F sideflader siger at

$$V - E + F = 2.$$

Vi har dog det problem at $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ ikke er en plan graf i ovenstående forstand, da den har nogle uendelige kanter. Vi laver nu en transformation af $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ som gør at vi kan benytte formlen.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathsf{G}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_\mathsf{G}(P)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\text{Vor}_G(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\text{dist}(p, v_1), \ldots, \text{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\text{Vor}_G(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$. Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til v_∞

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$. Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til v_∞, ved at forbinde s_i til v_∞ med en sti

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være knuderne i $\mathrm{Vor}_G(P)$. Lad

$$p = \frac{1}{k}(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) \in \mathbb{R}^2$$

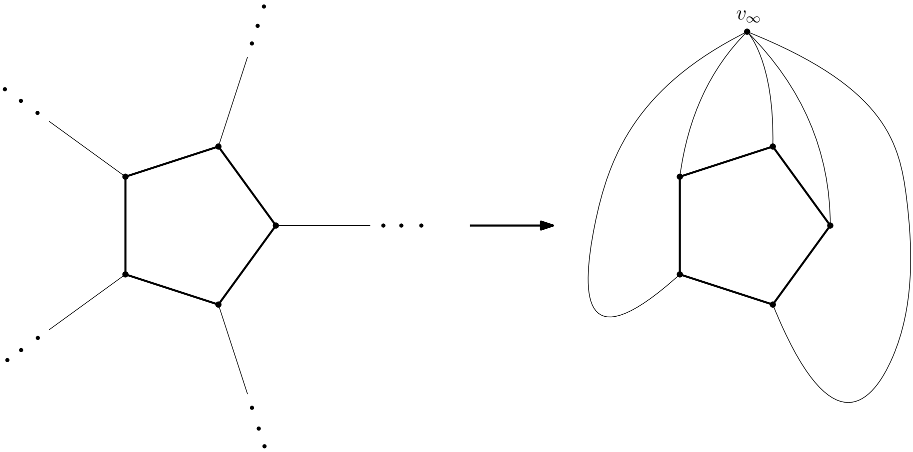
og

$$r = 1 + \max\{\mathrm{dist}(p, v_1), \ldots, \mathrm{dist}(p, v_k)\}.$$

Vi har så at $v_1, \ldots, v_k \in B_r(p)$ og enhver kant i $\mathrm{Vor}_G(P)$ som er en stråle skærer $\partial B_r(p)$ i et entydigt punkt, kald disse punkter $s_1, s_2, \ldots, s_t$. Definér så v_∞ som et vilkårligt element i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_r(p)}$. Vi kan så forbinde enhver uendelig kant til v_∞, ved at forbinde s_i til v_∞ med en sti, og vi gør det i rækkefølge, startende med det s_i som ligger tættest på v_∞.

Et eksempel på denne konstruktion er givet her:

Et eksempel på denne konstruktion er givet her:



Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_\text{G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor_G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor_G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor_G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_\text{G}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_\text{G}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_{\text{G}}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_G(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3\,|V(G)|$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\text{Vor}_G(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3\,|V(G)| = 3(n_v + 1).$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Lad G være grafen der fremkommer ved at transformere $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$. Vi kan nu anvende Eulers formel på G. Lad n_v betegne antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$, og lad n_e betegne antallet af kanter. Antallet af sideflader er n, da vi har én Voronoi celle for hvert site. Vi har kun tilføjet en enkelt knude, så ved indsættelse i Eulers formel får vi

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2. \tag{1}$$

Bemærk så, at enhver knude v i G har $\deg(v) \geq 3$, for ellers ville der være en $\mathcal{V}(p_i)$ som ikke er konveks. Dvs.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3\,|V(G)| = 3(n_v + 1).$$

Vi finder nu et udtryk for venstresiden.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathsf{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 && \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 && \text{(Isolér } 2n_e\text{)} \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Isolér } 2n_e\text{)} \\ \implies & 3(n_v + 1) \leq 2(n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Anvend (2))} \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v + 1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v + 1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Isolér } 2n_e\text{)} \\ \implies & 3(n_v + 1) \leq 2(n_v + 1) + 2n - 4 \quad \text{(Anvend (2))} \\ \implies & n_v \leq 2n - 5. \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Bemærk at $\deg(v)$ tæller antallet af kanter som rører v, og i G så rører hver kant ved præcis 2 knuder, så $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2n_e$. Dvs.

$$2n_e \geq 3(n_v+1). \tag{2}$$

Vi får så:

$$\begin{aligned} & 2(n_v+1) - 2n_e + 2n = 4 \quad \text{(Gang (1) med 2)} \\ \iff & 2n_e = (2n_v+1) + 2n - 4 \quad \text{(Isolér } 2n_e\text{)} \\ \implies & 3(n_v+1) \leq 2(n_v+1) + 2n - 4 \quad \text{(Anvend (2))} \\ \implies & n_v \leq 2n-5. \end{aligned}$$

Altså er antallet af knuder højst $2n-5$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_\mathrm{G}(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$3(n_v + 1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$\begin{aligned} & 3(n_v + 1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\ \iff & 3(n_v + 1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v + 1)\text{)} \end{aligned}$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\text{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$
\begin{aligned}
& 3(n_v + 1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\
\iff & 3(n_v + 1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v + 1)\text{)} \\
\implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))}
\end{aligned}
$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$
\begin{aligned}
& 3(n_v + 1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\
\iff & 3(n_v + 1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v + 1)\text{)} \\
\implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))} \\
\implies & n_e \leq 3n - 6.
\end{aligned}
$$

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n-5$ og antallet af kanter er højst $3n-6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$\begin{aligned} & 3(n_v+1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\ \iff & 3(n_v+1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v+1)\text{)} \\ \implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))} \\ \implies & n_e \leq 3n - 6. \end{aligned}$$

Altså er antallet af kanter højst $3n-6$.

Sætning 2

For $n \geq 3$ er antallet af knuder i $\mathrm{Vor}_G(P)$ højst $2n - 5$ og antallet af kanter er højst $3n - 6$.

Bevis fortsat. Mht. kanterne har vi:

$$\begin{aligned} & 3(n_v + 1) - 3n_e + 3n = 6 \quad \text{(Gang (1) med 3)} \\ \iff & 3(n_v + 1) = 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Isoler } 3(n_v+1)\text{)} \\ \implies & 2n_e \geq 3n_e - 3n + 6 \quad \text{(Anvend (2))} \\ \implies & n_e \leq 3n - 6. \end{aligned}$$

Altså er antallet af kanter højst $3n - 6$. **QED.**

Vi har altså set at selvom vi har $\mathcal{O}(n^2)$ bisectors, så har vi kun $\mathcal{O}(n)$ kanter.

Vi har altså set at selvom vi har $\mathcal{O}(n^2)$ bisectors, så har vi kun $\mathcal{O}(n)$ kanter. Vi vil nu karakterisere hvornår en del af en bisector faktisk udgør en knude eller kant i $\mathrm{Vor}_{\mathrm{G}}(P)$.