dzdm_kn2015_part1-3_2015_10_13_00_38_12_941

Домашние задания по дискретной математике
КН-201 (2015/2016 уч.г.)

Тема: «Бинарные отношения»

1. Исследовать отношения R на M = {-4,-3,-2,-1,0,1,2,3}, используя определения. $R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$.

2. Исследовать отношения R на M = {-4,-3,-2,-1,0,1,2,3}, используя определения. $R = \{(x, y) \mid \ x < y + 2\}$.

3. Исследовать отношение R на M = $\mathcal{B}$ ({1,2,3}) (т.е. M – булеан трехэлементного множества), $R = \{(x, y) \mid x \cap y = \varnothing\}$.

4. Исследовать бинарное отношение R, заданное матрицей. Найти R^+.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Исследовать бинарное отношение R, заданное матрицей. Найти R^+.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Доказать, что $R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^{n-1}$, если R задано на конечном множестве M, и $|M| = n$.

7.
а) Привести пример отношения, симметричного и антисимметричного одновременно.
б) Найти количество всех отношений на M = {1, 2, 3}, симметричных и антисимметричных одновременно.

dzdm_kn2015_part1-3_2015_10_13_00_38_12_941

8. Доказать, что бинарное отношение R на М является отношением частичного порядка и нарисовать диаграмму.

М =$\{2,4,6,8, ...,16\}$, $R = \{(x, y) \mid \frac{y}{x} - \text{целое}\}$.

9. Доказать, что бинарное отношение R, заданное матрицей, является отношением частичного порядка, нарисовать диаграмму.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Нарисовать диаграмму прямого произведения ч.у.м. А = ($\mathcal{B}$({1,2}), $\subseteq$) и В = ({3,4,5}, $\leq$) (т.е. отношение сравнения чисел). Указать наименьший, наибольший, минимальный, максимальный элементы.

11. Доказать, что бинарное отношение R, заданное матрицей, является отношением эквивалентности, построить разбиение.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Перечислить все попарно неизоморфные ч.у.м на четырехэлементном множестве.

Тема: «Комбинаторика»

К1. Пусть $M = \{a, b, c, d, e\}$, $K = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$.
Найти мощность множеств:

A_1 = {Все всюду определенные функции $M \to K$};

A_2 = {Все всюду определенные инъекции $M \to K$};

A_3 = {Все всюду определенные возрастающие функции $M \to K$}.

К2. Возле стойки в баре установлено N стульев. В бар пришло М посетителей. Найти количество всех различных способов рассадить посетителей, если:
а) N = 12 = M;
б) N = 9, M = 12;
в) N = 12, M = 9.

К3.

1. Найти коэффициент при $x^{10}y^7$ в разложении $(x + y)^{17}$.

2. Найти коэффициент при $w^3x^2y^5z^7$ в разложении $(w + x + y + z)^{17}$.

3. Найти коэффициент при $w^{10}x^{12}y^4z^3$ в разложении $(4w^5 + 2x^3 + y^2 + 5z)^{11}$.

dzdm_kn2015_part1-3_2015_10_13_00_38_12_941

K4. Сколько разных слов можно образовать, используя все буквы в слове "программирование"?

K5. Сколько различных букетов из 7 цветков можно сделать, используя 5 видов цветов?

K6. Решить рекуррентные соотношения:

а) $a_0 = 1;\ \ a_n = 6a_{n-1}$.

б) $a_0 = 2;\ \ a_1 = 4;\ \ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$.

в) $a_0 = 2;\ \ a_1 = 6;\ \ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$.

г) $a_0 = 3;\ \ a_1 = 4;\ \ a_n = -4a_{n-2}$.

K7. Найти общее решение рекуррентного соотношения
$a_n = a_{n-4}$.

K8. Найти сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, используя рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + n^3$.

K9. Доказать, что в любой компании из 30 человек существуют двое, имеющие одинаковое количество взаимных друзей.

K10. Найти количество всех всюду определенных сюръекций из множества $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ в множество $K = \{1, 2, 3\}$.

K11. Найти количество способов разделить группу из 5 человек на две команды для игры в пейнтбол (команды не пустые, количество людей в командах не обязательно одинаковое).

K12. Доказать методом математической индукции, что

$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m) \cdot f_m(x)$, где $f_m(x) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-m+1)$, при m > 0, и $f_0(x) = 1$.

K13. Доказать, что следующие величины выражаются через числа Каталана:

1) число всех последовательностей длины $2n$: из n открывающих и n закрывающих скобок, где скобки расставлены как в правильных алгебраических выражениях;

2) число всех последовательностей длины $2n$: из n чисел, равных 1, и n чисел, равных -1, где все частичные суммы не отрицательные (т.е. $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0,\ \ k \leq 2n$);

3) число всех двоичных деревьев с n вершинами;

4) число всех способов провести диагонали в выпуклом n-угольнике, так, чтобы получилось (n-2) треугольника;

5) число всех таблиц Юнга размером $2 \times n$. Таблица Юнга – матрица, состоящая из всех чисел 1,…,$2n$, где все строки и все столбцы являются возрастающими наборами чисел.

K14. Найти число всех натуральных чисел, меньших 330, взаимно простых с ним.

K15. В студенческой группе 6 человек. Список вопросов к экзамену содержит 6 пунктов, один билет содержит один вопрос из списка. Студенты распределили все вопросы, так, что каждый студент выучил ровно один вопрос. Сколько разных вариантов так выдать билеты на экзамене, что вся группа получит «неудовлетворительно»?

dzdm_kn2015_part1-3_2015_10_13_00_38_12_941

Ответы.

1. R рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

2. R рефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

3. R не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

4. R рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, не транзитивно.

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

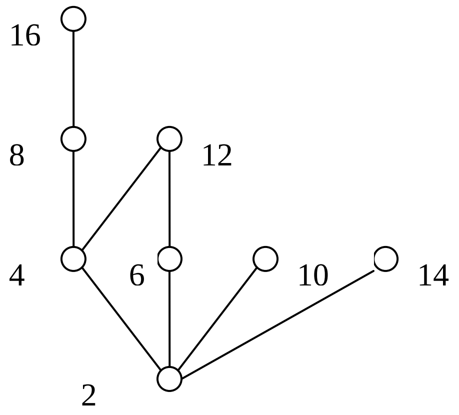
5. R не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

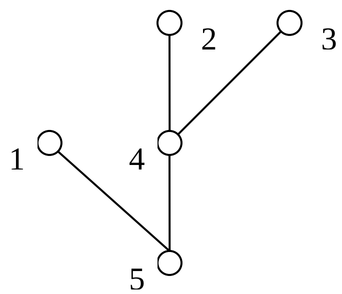
7. б) $2^3 = 8$.

dzdm_kn2015_part1-3_2015_10_13_00_38_12_941

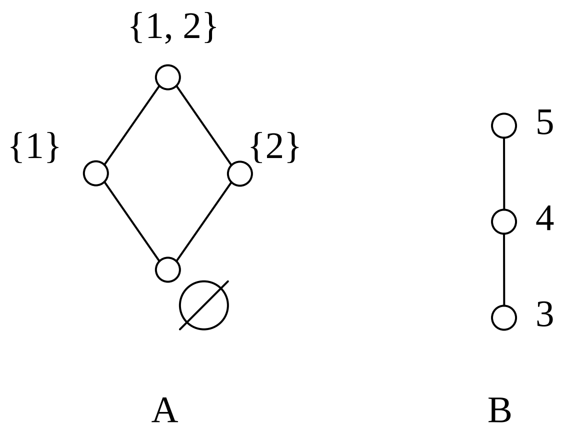
8. *R* рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.



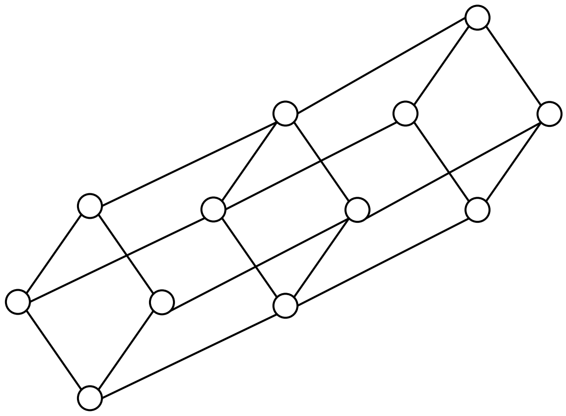
9. *R* рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.



10.



dzdm_kn2015_part1-3_2015_10_13_00_38_12_941



A $\times$ B

Наименьший – ($\varnothing$, 3);
наибольший – ({1, 2}, 5);
минимальный – ($\varnothing$, 3);
максимальный – ({1, 2}, 5).

11. R рефлексивно, симметрично, транзитивно.
Разбиение: $\{K_1 = \{1,5\}, K_2 = \{2,4\}, K_3 = \{3\}\}$.

K1. $\left|A_1\right| = 8^5$; $\left|A_2\right| = A_8^5 = \dfrac{8!}{3!}$; $\left|A_3\right| = C_8^5 = \dfrac{8!}{5!\,3!}$.

K2. а) $P_{12} = 12\,!$.

K2. б) $A_{12}^9 = \dfrac{12\,!}{3!}$.

K2. в) $A_{12}^9 = \dfrac{12\,!}{3!}$.

K3.1. $C_{17}^{10} = \dfrac{17!}{10!\,7!}$.

K3.2. $P_{17}(3,2,5,7) = \dfrac{17!}{3!\,2!\,5!\,7!}$.

K3.3. $4^2 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot P_{11}(2,4,2,3) = 4^2 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot \dfrac{11!}{2!\,4!\,2!\,3!}$.

K4. $\dfrac{16!}{3!\,(2!)^4}$.

dzdm_kn2015_part1-3_2015_10_13_00_38_12_941

K5. $C_{7+5-1}^{7} = \dfrac{11\,!}{7!\,4!}$.

K6. а) $a_n = 6^n$.

K6. б) $a_n = 4 \cdot 3^n + (-2) \cdot 4^n$.

K6. в) $a_n = 2 \cdot 2^n + 1 \cdot n \cdot 2^n$.

K6. г) $a_n = 3 \cdot 2^n \cos\dfrac{\pi n}{2} + 2 \cdot 2^n \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

K7. $a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-1)^n + C_3 \cdot 1^n \cdot \cos\dfrac{\pi n}{2} + C_4 \cdot 1^n \cdot \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

K8. $0 \cdot 1^n + n\left(\dfrac{1}{4}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{4}n\right) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

K10. 3!·S(7,3) = 6·301.

K11. S(5,2) = 15.