Теория вероятностей. Лекция двадцать восьмая
Мартингалы-2

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

22.05.2019

Что разобрали:

- Марковские цепи с дискретным временем
- Марковские цепи с непрерывным временем
- Фильтрация и моменты остановки
- Мартингалы
- ?Эргодические теоремы?
- ??Введение в финансовую математику??

Фильтрация и моменты остановки

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и время пробегает значения из $T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Набор σ-подалгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ алгебры $\mathcal{F}$ называют фильтрацией [иногда потоком алгебр], если для всех $s \leq t$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Случайную величину τ, принимающую значения в $T \cup \{+\infty\}$, называют моментом остановки (относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$), если для всех $t \in T$ событие $\{\tau \leq t\} = \{\omega \,|\, \tau(\omega) \leq t\}$ лежит в $\mathcal{F}_t$.

Пусть τ — момент остановки. Введем σ-алгебру событий, произошедших до τ: $\mathcal{F}_\tau \overset{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для всех } t\}$.

Мартингал

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ — фильтрация.

Говорят, что согласованный с $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ случайный процесс $(X_t)_{t\in T}$ —

- мартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$
$$X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s);$$
- субмартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$
$$X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s);$$
- супермартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$
$$X_s \geq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s).$$

Теорема о произвольном выборе

Пусть τ, σ — некоторые моменты остановки, $\sigma \le \tau \le k$, где k — некоторое число.

- Если $(X_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ — субмартингал, то $X_\sigma \le \mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)$;
- если $(X_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ — мартингал, то $X_\sigma = \mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)$;
- если $(X_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ — супермартингал, то $X_\sigma \ge \mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)$.

Неравенство Дуба

Если $(X_n, \mathcal{F}_n)$ — субмартингал, то для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \mathbb{P}(A_{\lambda,n}) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{A_{\lambda,n}}) \leq \mathbb{E}\max\{X_n, 0\},$$

где $A_{\lambda,n} \triangleq \left\{\omega : \max\limits_{i=\overline{1,n}} X_i(\omega) \geq \lambda\right\}$.

Подумать: как доказать то же неравенство в непрерывном случае для имеющих лишь cádlág траектории мартингалов.

Простое следствие: неравенство Колмогорова

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — суммируемые с квадратом независимые случайные величины, тогда для всех положительных λ

$$\mathbb{P}\left(\max_{i=1,\ldots,n}\left|\xi_1+\ldots+\xi_i-\mathbb{E}\xi_1-\ldots-\mathbb{E}\xi_i\right|\geq\lambda\right)\leq\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i.$$

Для доказательства заметим, что $X_n \overset{\triangle}{=} \xi_1+\ldots+\xi_n$ — мартингал относительно естественной фильтрации, тогда X_n^2 — субмартингал относительно естественной фильтрации, к которому можно применить неравенство Дуба.

Замкнутые справа мартингалы

Будем говорить, что $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — замкнутый справа мартингал, если для некоторой суммируемой случайной величины X_∞ выполнено при всех $n \in \mathbb{N}$
$$X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n).$$

Теорема Дуба о замкнутых мартингалах. Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)$ — замкнутый справа мартингал, тогда
$$X_n \xrightarrow{\text{п.в.}} X_\infty, \qquad X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty.$$

Подумать: а что такое тогда $\mathcal{F}_\infty$?

Подумать: чем такая теорема может быть полезна для $X_n = Y_{1-1/n}$,или в случае $\Omega = \mathbb{R}$ для
$$X_n(\omega) = \frac{f\left(2^{-n}[\omega 2^n] + 2^{-n}\right) - f\left(2^{-n}[\omega 2^n]\right)}{2^{-n}}.$$

Полезный факт

Прежде чем доказывать теорему, докажем факт попроще.

Предложение. Если мартингал замыкаем, то последовательность случайных величин X_n равномерно интегрируема.

Замечание. Обратный факт тоже верен, но доказывается сложно.

Доказательство. Нам нужно лишь доказать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}1_{\{|X_n|>\lambda\}}|X_n| = 0.$$

По неравенству Йенсена $|X_n| = |\mathbb{E}(X_\infty\,|\,\mathcal{F}_n)| \le \mathbb{E}(|X_\infty|\,|\,\mathcal{F}_n)$, в частности $\mathbb{E}1_{\{|X_n|>\lambda\}}|X_n| \le \mathbb{E}1_{\{|X_n|>\lambda\}}|X_\infty|$, и осталось заметить

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\{|X_n|>\lambda\} \le \lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}|X_n|/\lambda \le \lim_{\lambda\to\infty}\mathbb{E}|X_\infty|/\lambda = 0.$$

Доказательство теоремы Дуба. Построение

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{i=1}^\infty \mathcal{F}_i)$. Для каждого $A \in \mathcal{F}_\infty$ найдутся $N \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathcal{F}_N$, для которых $\mathbb{E}(|1_A - 1_B|) < \varepsilon$.
Всевозможные индикаторы элементов $\mathcal{F}_n$ и их конечные суммы всюду плотны в множестве всех суммируемых $\mathcal{F}_n$-измеримых функций.
Значит индикаторы элементов $\cup_{i=1}^\infty \mathcal{F}_i$ и их конечные суммы всюду плотны в множестве всех суммируемых $\mathcal{F}_\infty$-измеримых функций.
Тогда объединение конечных сумм индикаторов элементов $\mathcal{F}_n$ (по всем n) всюду плотно в множестве всех суммируемых $\mathcal{F}_\infty$-измеримых функций.
В частности, $\mathbb{E}(|X_\infty - Y_\infty|) < \varepsilon^2$ для некоторой $\mathcal{F}_N$-измеримой функции Y_∞.

Доказательство теоремы Дуба. Оценки

Примем $Y_n = \mathbb{E}(Y_\infty | \mathcal{F}_n)$, тогда по неравенству Чебышева $\mathbb{P}(|X_\infty - Y_\infty| > \varepsilon) \leq \varepsilon$.
Теперь $Y_n = \mathbb{E}(Y_\infty|\mathcal{F}_n)$ — мартингал, $X_n - Y_n = \mathbb{E}(X_\infty - Y_\infty|\mathcal{F}_n)$ — мартингал, $(X_n - Y_n)^2 = \mathbb{E}((X_\infty - Y_\infty)^2|\mathcal{F}_n)$ — субмартингал.
По неравенству Дуба, для $n > N$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\limsup_{n\in\mathbb{N}} |X_n - Y_\infty| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n - Y_n| > \varepsilon) &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n - Y_n|/\varepsilon \\ &\leq \mathbb{E}|X_\infty - Y_\infty|/\varepsilon \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbb{P}(\limsup_{n\in\mathbb{N}} |X_n - X_\infty| > 2\varepsilon) \leq 2\varepsilon$, и сходимость почти всюду показана. Для сходимости в L_1 достаточно заметить сходимость матожиданий в силу $\mathbb{E}|X_n - Y_n| \leq \mathbb{E}|X_\infty - Y_\infty| \leq \varepsilon^2$.

Подумать: а зачем нам предыдущее предложение, вроде обошлись без него?

Сходимость мартингалов [без д-ва]

Теорема. Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)$ — супермартингал, причем $\mathbb{E}|X_n|$ ограничены, тогда

$$X_n \xrightarrow{\text{п.в.}} Y$$

для некоторой суммируемой случайной величины Y. Если X_n равномерно интегрируемы, то имеет место сходимость и в L_1.

Замечание. В принципе можно обойтись ограниченностью $\mathbb{E}\max(X_n, 0)$, аккуратно поправляя все формулировки о суммируемости. Тогда достаточно потребовать неположительность $\mathbb{E}X_n$.

Замечание. В непрерывном случае все вышесказанное работает, если предположить для фильтрации обычные условия и ограничиться имеющими лишь cádlág траектории мартингалами.

Задача об оптимальной остановке

Пусть набор моментов времени конечен $n \in \mathcal{N} \triangleq \{0, 1, \ldots, N\}$, фиксировано вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathcal{N}}, \mathbb{P})$, и для каждого момента времени задана случайная величина, описывающая качество остановки $f_n : \Omega \to [0, +\infty)$. Естественно предполагать, что f_n $\mathcal{F}_n$-измеримо. Пусть $\mathfrak{W}_n$ обозначает семейство моментов остановки, принимающих значение во множестве $\{n, \ldots, N\}$. Требуется найти

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{W}_0} \mathbb{E} f_\tau, \quad \operatorname*{ess-sup}_{\tau\in\mathfrak{W}_0} \mathbb{E}(f_\tau | \mathcal{F}_0).$$

О терминологии

Будем говорить, что расширенная (т.е. принимающая значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) случайная величина ξ есть существенный супремум ξ_α и писать

$$\xi = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \xi_\alpha,$$

если

1. для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ $\xi \geq \xi_\alpha$ $\mathbb{P}$-п.н.
2. если расширенная случайная величина η такова, что для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ $\eta \geq \xi_\alpha$ $\mathbb{P}$-п.н., то
$$\eta \geq \xi \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

Это определение необходимо в силу неизмеримости (в общем случае) обычного супремума при несчетном $\mathfrak{A}$.

Обход трудности

Предложение Случайная величина $\xi = \operatorname{ess\text{-}sup}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \xi_\alpha$ существует. Более того, найдется счетное множество $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ такое, что

$$\xi(\omega) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}_0} \xi_\alpha(\omega).$$

Доказательство. Поскольку всегда можно перейти к $\tilde{\xi}_\alpha \triangleq \operatorname{arctg}(\xi_\alpha)$, будем считать, что все ξ_α ограничены. Пусть S есть супремум значений $\mathbb{E}\max_{\alpha\in A} \xi_\alpha$ по всем конечным множествам $A \subset \mathfrak{A}$. Найдется A_n, для которого $\mathbb{E}\max_{\alpha\in A_n} \xi_\alpha \geq S - \frac{1}{n}$; примем

$$\mathfrak{A}_\infty \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad \xi(\omega) \triangleq \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}_\infty} \xi_\alpha(\omega).$$

По построению ξ — случайная величина и $\xi = \operatorname{ess\text{-}sup}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \xi_\alpha$; действительно, всегда $\mathbb{E}\max\{\xi, \eta\} = \mathbb{E}\xi$, откуда $\xi \geq \eta$ п.в.

Теорема об оптимальной остановке

Для

$$v_N \triangleq f_N, \quad v_n \triangleq \max\{f_n, \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)\}, \tau_n \triangleq \min\{k \in \overline{n,N} : v_k = f_k\}$$

имеют место утверждения:

1. моменты остановки τ_n оптимальны в классе $\mathfrak{W}_n$:

$$\mathbb{E} f_{\tau_n} = V_n \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{W}_n} \mathbb{E} f_\tau;$$

2. "стохастические цены" совпадают с v_n, т.е.

$$\operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{W}_n} \mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_n) = v_n.$$

Подумать: свяжите числа V_n и случайные величины v_n; можно ли утверждать, что $V_0 = v_0$ и $V_N = \mathbb{E} f_N$?

Доказательство теоремы: $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1}) \le v_{k-1}$ $\mathbb{P}$-п.н

Если $n = N$, то $v_N = f_N$, и все доказано. Пусть теперь теорема доказана для $n = N, N-1, \dots, k$. Докажем её для $n = k-1$. Пусть $\tau \in \mathfrak{W}_{k-1}$ и $A \in \mathcal{F}_{k-1}$. Положим $\bar\tau \triangleq \max\{\tau, k\}$. Заметим, что $\bar\tau \in \mathfrak{W}_k$. Также отметим, что событие $\{\tau \ge k\}$ лежит в $\mathcal{F}_{k-1}$.
Имеем, что

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_A f_\tau) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\ge k\}} f_\tau] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\ge k\}} \mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\ge k\}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_{\bar\tau}|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&\le \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\ge k\}} \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&\le \mathbb{E}(\mathbf{1}_A v_{k-1}).
\end{aligned}
$$

Это означает, что $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1}) \le v_{k-1}$ для всех $\tau \in \mathfrak{W}_n$.

Доказательство теоремы: $\mathbb{E}(f_{\tau_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}) = v_{k-1}$ $\mathbb{P}$-п.н.

Заметим, что на множестве $\{\tau_{k-1} \geq k\}$ по предположению индукции $\tau_{k-1} = \tau_k$ и $\mathbb{E}(f_{\tau_k}|\mathcal{F}_k) = v_k$ $\mathbb{P}$-п.н.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_A f_{\tau_{k-1}}) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geq k\}} f_{\tau_{k-1}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geq k\}} \mathbb{E}(f_{\tau_k}|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geq k\}} \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A v_{k-1}).
\end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу $v_{k-1} = \max\{f_{k-1}, \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})\}$ и равенств $v_{k-1} = f_{k-1}$ при $\tau_{k-1} = k-1$ и $v_{k-1} = \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})$ при $\tau_{k-1} \geq k$. Тем самым показано, что

$$\mathbb{E}(f_{\tau_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}) = v_{k-1} \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

Поскольку для всех моментов остановки τ выполнено $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1}) \leq v_{k-1}$ п.в., теорема доказана.