Теория вероятностей. Лекция семнадцатая
Виды сходимости случайных величин

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

20.02.2019

Что разобрали:

- Неравенства концентрации меры
- Сходимости случайных величин
- Усиленный закон больших чисел
- Слабая сходимость
- Характеристические функции
- Центральная предельная теорема

Неравенства концентрации меры, неравенства вида

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \left|\xi_n(\omega) - r\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \delta,$$

говорят об оценках вероятности уклонения результата на заданную величину от некого эталона, фактически предела. Например, в законе больших чисел пределом функций оказалось матожидание. Но даже в этом случае предел можно понимать по-разному...

Сходимость по вероятности

Зафиксируем отсюда и до конца лекции вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ по вероятности, и записывать $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Сходимость по вероятности генерирует метрику на линейном пространстве

Несколько почти очевидных свойств этой сходимости:

- если ξ_n сходятся к ξ по вероятности, и ζ_n сходятся к ζ по вероятности, то $\xi_n - \zeta_n$ сходятся к $\xi - \zeta$ по вероятности;
- если ξ_n сходятся к ξ по вероятности, и $c \in \mathbb{R}$, то $c\xi_n$ сходятся к $c\xi$ по вероятности;
- если ξ_n сходятся к ξ по вероятности, и ξ_n сходятся к ζ по вероятности, то $\xi = \zeta$ почти всюду.

Эта сходимость задает топологию на линейном пространстве всех случайных величин после отождествления $\mathbb{P}$-почти всюду совпадающих функций. Более того, ее можно ввести в терминах расстояния, которое можно задать

так $d(\xi,\eta) \triangleq \mathbb{E}(1 - \frac{1}{1+|\xi-\eta|})$, или так $d(\xi,\eta) \triangleq \mathbb{E}\,\mathrm{arctg}\,|\xi - \eta|$.

Сходимость почти наверное

Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к случайной величине ξ $\mathbb{P}$-**почти наверное** (синонимы: почти наверное, почти наверняка, с вероятностью 1, почти всюду), и записывать $\xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi$, если вероятность тех ω, для которых $\xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)$, равна 0, т.е.

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = 0.$$

Сходимость почти наверное. Вторая формулировка

Предложение 4. Сходимость случайных величин ξ_n к ξ почти наверное эквивалентна следующему условию: для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \sup_{k\geq n}|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство будет на следующем слайде, а пока получим в силу

$$\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{\omega : \sup_{k\geq n}|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\right\}$$

Следствие 6. Сходимость почти наверное влечет сходимость по вероятности: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$

Сходимость почти наверное. Доказательство

Доказательство. Пусть $A_k^\varepsilon \triangleq \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}$, $A^\varepsilon \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^\varepsilon$.

Заметим, что $\{\omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = \bigcup_{\varepsilon>0} A^\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{1/m}$. Следовательно, $\mathbb{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{1/m}\right) = 0$. Последнее равенство выполнено в том и только в том случае, когда для всех m $\mathbb{P}(A^{1/m}) = 0$, или, что эквивалентно, для всех $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(A^\varepsilon) = 0$. Наконец, равенство $\mathbb{P}(A^\varepsilon) = 0$ эквивалентно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^\varepsilon\right) = 0.$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi, \text{ но } \xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi$$

Пример 2.
Пусть $\Omega = [0,1)$, на нем рассматриваем борелевскую σ-алгебру и равномерную вероятность. Выберем $f_1 = 1$, $f_{2,1}$ положим равной 1 на $[0,1/2)$ и 0 на $[1/2,1)$, $f_{2,2}$ положим равной 0 на $[0,1/2)$ и 1 на $[1/2,1)$, далее примем $f_{i,j} = \mathbf{1}_{[(j-1)/i, j/i)}$ для всех натуральных i,j. Если мы последовательно занумеруем функции $f_{i,j}$, то полученная последовательность будет сходиться по вероятности к $\xi \equiv 0$, а последовательность $\xi_n(\omega)$ содержит бесконечно много 0 и 1 для всех ω.

Теорема Рисса. [0.7 балла] ξ_n сходятся по вероятности к ξ тогда и только тогда, когда из всякой ее подпоследовательности ξ_{n_k} (в том числе из нее самой) можно выделить подподпоследовательность $\xi_{n_{k_l}}$, которая сходится почти наверное к ξ.

Сходимость в среднем

Пусть $p \geq 1$. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_n сходится к ξ в среднем порядка p, и записывать $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$, если

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0.$$

При $p = 2$ говорят также "в среднеквадратичном".

Этот вид сходимости задает сходимость, метрику и норму в пространстве Лебега $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ всех случайных величин, для которых $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, после отождествления всех $\mathbb{P}$-почти всюду совпадающих случайных величин.

$$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \text{ и } \xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$$

Предложение 5. Сходимость в среднем порядка p влечет сходимость по вероятности.

Доказательство. По неравенству Маркова имеем

$$\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0, \quad n \to \infty.$$

При этом, сходимость почти наверное не влечет сходимость в среднем.

Пример. $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ – мера Лебега.

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 2^n, & \omega \in [0, 1/n], \\ 0, & \omega \notin [0, 1/n]. \end{cases}$$

Хотя $\xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, сами ξ_n не сходятся в среднем к 0.

При каких условиях $\xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

Предложение 6. Пусть ξ_n неотрицательны, $\xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi$ и $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ (в частности, эти матожидания существуют, начиная с некоторого).

Тогда $\mathbb{E}|\xi_n - \xi| \to 0$, то есть $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$.

Доказательство. Можно считать, что $\mathbb{E}\xi_n < \infty$. Имеем

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi| = \mathbb{E}(\xi - \xi_n)\mathbf{1}_{\xi \geq \xi_n} + \mathbb{E}(\xi_n - \xi)\mathbf{1}_{\xi_n > \xi} = 2\mathbb{E}(\xi - \xi_n)\mathbf{1}_{\xi \geq \xi_n} + \mathbb{E}(\xi_n - \xi).$$

Второе слагаемое сходится к 0 по условию. Также $(\xi - \xi_n)\mathbf{1}_{\xi \geq \xi_n}$ поточечно сходится к 0. Используя неотрицательность ξ_n, получаем, что $0 \leq (\xi - \xi_n)\mathbf{1}_{\xi \geq \xi_n} \leq \xi$. Отсюда, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что первое слагаемое тоже сходится к 0.

Подумать: можно ли сформулировать аналог этого предложения для $p > 1$ (ну и доказать/опровергнуть этот аналог).

$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi$

Пример. Пусть ξ_n независимы, $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p_n$, $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - p_n$; тогда

$$\begin{aligned}
\xi_n \xrightarrow{P} 0 \quad &\iff \quad p_n \to 0,\\
\xi_n \xrightarrow{L^p} 0 \quad &\iff \quad p_n \to 0,\\
\xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0 \quad &\iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.
\end{aligned}$$

В частности, при $p_n = 1/n$ получаем, что из $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi$.

Подумать: а откуда здесь взялось условие $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$?

Первая лемма Бореля-Кантелли

Лемма 1. Пусть дана такая последовательность событий $A_n \in \mathcal{F}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$$

Положим

$$A \triangleq \{\omega : \text{ существует последовательность } n_k, \text{ что } \omega \in A_{n_k}\}.$$

Тогда $\mathbb{P}(A) = 0$.

Доказательство.

Ясно, что

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} A_n.$$

Тогда,

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=l}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=l}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \to 0 \text{ при } l \to \infty.$$

Вторая лемма Бореля-Кантелли

Лемма 2. Пусть дана такая последовательность независимых в совокупности событий $A_n \in \mathcal{F}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty.$$

Положим

$$A \triangleq \{\omega : \text{ существует последовательность } n_k, \text{ что } \omega \in A_{n_k}\}.$$

Тогда $\mathbb{P}(A) = 1$.

Доказательство.

Имеем $\Omega \setminus A = \cup_{l=1}^{\infty} \cap_{n=l}^{\infty} (\Omega \setminus A_n)$ и

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = \lim_{l\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=l}^{\infty}(\Omega \setminus A_n)\right) = \lim_{l\to\infty} \prod_{n=l}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(A_n)).$$

Так как $\sum_{n=l}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, логарифмируя $\prod_{n=l}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(A_n))$, получаем требуемое.

Подумать: здесь условие независимости событий A_n существенно.

Снова закон больших чисел

Теорема 1. Пусть дана последовательность случайных величин ξ_n с математическим ожиданием $\mathbb{E}\xi_i = m_i$ и равномерно ограниченными дисперсиями. Предположим, что ξ_i попарно некоррелированы ($\mathbb{E}(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j) = 0$ для $i \neq j$). Тогда

$$\mathbb{E}\left|\frac{(\xi_1 - m_1) + \ldots + (\xi_n - m_n)}{n}\right|^2 \to 0,$$

т.е. последовательность $\big(\xi_1 - m_1 + \ldots + \xi_n - m_n\big)/n$ сходится к 0 в среднем квадратическом. Отсюда следует сходимость по вероятности.

Доказательство. Можно считать, что $m_i = 0$. Тогда нам требуется доказать, что $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ сходится к нулю. Но

$$\mathbb{E}\frac{(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \frac{D\xi_1 + \ldots + D\xi_n}{n^2} \to 0$$

в силу равномерной ограниченности $D\xi_i$.

Усиленный закон больших чисел (в форме Колмогорова)

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со средним m и конечной дисперсией. Тогда

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.в.}} m \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство этой теоремы проведем в более сильном предположении: $\mathbb{E}|\xi_n|^4 = \mathbb{E}|\xi_1|^4 < \infty$.
В принципе можно отказаться от требования одинаковой распределенности, предполагая лишь существование конечных дисперсий и

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n/n^2 < \infty.$$

Усиленный закон больших чисел. Доказательство

Без ограничения общности считаем, что $m = 0$. Пользуясь независимостью ξ_i и предположением существования $\mathbb{E}|\xi_n|^4 = \mathbb{E}|\xi_1|^4 < \infty$, получаем

$$\mathbb{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^4 = n\mathbb{E}|\xi_1|^4 + C_4^2 C_n^2 (\mathbb{E}|\xi_1|^2)^2 \leq Kn^2,$$

где K – константа, не зависящая от n.
Пусть $A_n^k \triangleq \{\omega : |\xi_1 + \ldots + \xi_n|/n \geq 1/k\}$. Теперь, по неравенству Маркова

$$\mathbb{P}(A_n^k) = \mathbb{P}\{\omega : |\xi_1 + \ldots + \xi_n|^4 \geq n^4/k^4\} \leq \frac{\mathbb{E}|\xi_1 + \ldots + \xi_n|^4}{n^4/k^4} \leq Ck^4/n^2.$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^k) < \infty$, по первой лемме Бореля-Кантелли имеем $\mathbb{P}(B_k) = 0$, где B_k — множество тех ω, что $|\xi_1 + \ldots + \xi_n|/n \geq 1/k$ для бесконечного количества чисел n.
Тогда, для $B \triangleq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ — множества тех точек ω, где $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n \nrightarrow 0$, — имеем $\mathbb{P}(B) = 0$.

Закон повторного логарифма

Теорема 3. [без д-ва] Пусть дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 > 0$. Тогда

$$\sup_{n>k} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sigma\sqrt{2n \ln\ln n}} \xrightarrow{\text{п.в.}} 0 \text{ при } k \uparrow \infty,$$

и для всех положительных ε

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n > (1+\varepsilon)\sigma\sqrt{2n \ln\ln n} \text{ бесконечно много раз }) = 0$$
$$\mathbb{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n < (1-\varepsilon)\sigma\sqrt{2n \ln\ln n} \text{ бесконечно много раз }) = 1.$$

Что разобрали:

- Неравенства концентрации меры
- Сходимости случайных величин
- Усиленный закон больших чисел
- Слабая сходимость
- Характеристические функции
- Центральная предельная теорема

Различные виды сходимости отвечают за разные типы надежности: начиная с некоторого момента все будет хорошо, отклонения больше заданного достаточно редки, ущерб будет мал в среднем и т. п. Все эти сходимости имеют дело со случайной величиной, понимаемой с точностью почти всюду. Слабая сходимость ведет себя гораздо интереснее.

На пять минут...

1. ЗАПОЛНИТЕ ПРОПУСК

Предложение 1''. Для случайной величины ξ, принимающей значения из промежутка $[0,1]$, и любого числа $a > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbb{P}(\xi \leq a) \leq \text{ПРОПУСК}.$$

2. ЗАПОЛНИТЕ ПРОПУСК

Следствие 5''. Пусть дана последовательность независимых в совокупности, одинаково распределенных случайных величин X_i, принимающих значения из отрезка $[-K,K]$. Тогда, для всех натуральных n и $\delta \in (0,1)$ имеем

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mathbb{E}X_1\Big| \geq \delta\mathbb{E}X_1\Big) \leq \text{ПРОПУСК}.$$