Теория вероятностей. Лекция двадцать шестая
Моменты остановки и фильтрация

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

08.05.2019

Что разобрали:

- Марковские цепи с дискретным временем
- Марковские цепи с непрерывным временем
- Фильтрация и моменты остановки
- Мартингалы
- Предельные теоремы для стационарных процессов
- Примеры процессов

Однородные марковские цепи с непрерывным временем

Пусть $t \in [0, +\infty)$ – непрерывное время, X_t принимает значения в $\{1, \dots, r\}$.

Случайный процесс X_t называется однородной марковской цепью с непрерывным временем (марковской очередью), если для всех $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < \tau$ и всех $i_1, \dots, i_n, j \in \{1, \dots, r\}$

$$p_{i_n j}(\tau - t_n) = \mathbb{P}(X_\tau = j | X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1)$$

для некоторой, зависящей от лишь от промежутка времени, матрицы $P(t) = (p_{kj}(t))_{k,j=1,\dots,r}$.

Пусть также корректно заданы $q_{ij} = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$. Тогда для $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$ имеем $P(t) = e^{tQ}$, то есть

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q, \qquad \frac{dP(t)}{dt} = QP(t)$$ (уравнения Колмогорова).

Создать марковскую цепь из уравнения. Доппостроения

Пусть даны $P(t) = e^{tQ}$ и некоторое начальное распределение p^0.
Определим случайные величины ξ, τ_i^n и η_i^n, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $n \in \mathbb{N}$ правилами:

1. ξ принимает значения $\{1, \ldots, r\}$ в силу p^0;
2. τ_i^n — случайная величина на $[0, \infty)$ с распределением $Exp(-q_{ii})$;
3. η_i^n принимает значения $\{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$ с вероятностями $\mathbb{P}(\eta_i^n = j) = -q_{ij}/q_{ii}$;
4. все случайные величины ξ, τ_i^n и η_i^n независимы.

Здесь ξ определяет начальное состояние,
τ_i^n и η_i^n — время от $(n-1)$-го до n-го прыжка и состояние после n-го прыжка, если после $(n-1)$-го прыжка было состояние i,

Создать марковскую цепь из уравнения. Результат

Положим $\xi^0 \triangleq \xi$, $\theta^0 \triangleq 0$, а затем, если ξ^{n-1} и θ^{n-1} построены, примем:

$$\theta^n \triangleq \theta^{n-1} + \tau^n_{\xi^{n-1}}, \ \xi^n = \eta^n_{\xi^{n-1}}.$$

Теперь случайный процесс X_t, заданный правилами $X_t \triangleq \xi^{n-1}$ при $t \in [\theta^{n-1}, \theta^n)$, является однородной марковской цепью с непрерывным временем с начальным распределением p^0 и матрицей переходов $P(t) = e^{tQ}$.

Пример цепи с непрерывным временем

Предположим, что у нас есть r устройств (серверов), каждый из которых может обработать не более одного запроса. Если все серверы загружены, отправляется отказ, а запрос не обрабатывается. Запросы поступают независимо; вероятность поступления каждого следующего запроса определяется экспоненциальным распределением с параметром λ, время ответа (обработки запроса) также случайно и распределено экспоненциально с параметром μ. Серверы также независимы. Найдите вероятность того, что очередной запрос не будет обработан.

В качестве моделирующей марковской цепи выберем цепь, в которой X_t равно количеству занятых серверов, т.е. $X_t \in \{0, 1, \dots, r\}$. Заметим, что если все серверы свободны, то вероятность того, что придет запрос, распределена экспоненциально с параметром λ, если i серверов заняты, то вероятность того, что хоть один сервер освободится, распределена также экспоненциально с параметром $i\mu$.

Пример. Матрица Колмогорова

Получаем матрицу Колмогорова $Q = (q_{ij})_{i,j=0,\dots,r}$

$$Q = \begin{pmatrix} -\gamma(0) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\gamma(1) & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -\gamma(2) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (r-1)\mu & -\gamma(r-1) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r\mu & -\gamma(r) \end{pmatrix}$$

с еще не найденными $\gamma(i)$. Воспользовавшись $\sum_j q_{ij} = 0$, имеем

Пример. Стационарное распределение

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu-\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (r-1)\mu & -(r-1)\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r\mu & -r\mu \end{pmatrix},$$

решая $\pi Q = 0$, находим единственное стационарное распределение $\pi = C(1, \lambda/\mu, \lambda^2/2\mu^2, \lambda^3/6\mu^3, \dots, , \lambda^{r-1}/(r-1)!\mu^{r-1}, \lambda^r/r!\mu^r)$, откуда вероятность отказа равна $\pi_r = \dfrac{(\lambda/\mu)^r}{r!\sum_{j=0}^{r}(\lambda/\mu)^j/j!}$.

Пример. Обратная задача

Пусть, начиная с некоторого момента, Вы наблюдаете некоторую часть запросов, время поступления каждого, время обработки, знаете процент отказов по ним. Можете ли Вы найти λ, μ и, самое главное, количество серверов r, предполагая, что наблюдаемые Вами запросы имеют те же характеристики, что и остальные...

1. Как оценить μ?
2. Как, предполагая известным λ, оценить r?
3. Какие события надо уметь отслеживать по ходу дела, чтобы все-таки оценить λ?
4. В какой момент нужно остановиться, если Вам достаточно знать r лишь с вероятностью 90%...

Фильтрация

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и время пробегает значения из $T \subset \mathbb{R}_+$, например $T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Никакого процесса еще нет...

Чтобы описать события, произошедшие до момента $t \in T$ включительно, рассмотрим понятие "фильтрация".

Набор σ-подалгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ алгебры $\mathcal{F}$ называют фильтрацией [иногда потоком алгебр], если для всех $s \le t$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

При этом, четверку $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ называют также фильтрованным вероятностным пространством.

Подумать: будет ли являться фильтрацией $(\mathcal{F}_{t+} \triangleq \cap_{\tau > t} \mathcal{F}_\tau)_{t\in T}$?

В качестве "обычных условий" на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ дополнительно также предполагают, что $\mathcal{F}_0$ содержит все $\mathbb{P}$-пренебрежимые множества, а $\mathcal{F}_{t+} \equiv \mathcal{F}_t$.

Естественная фильтрация

Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – фильтрация, $(X_t)_{t\in T}$ – случайный процесс.

Будем говорить, что $(X_t)_{t\in T}$ согласовано с $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, если для каждого $t\in T$ $\mathcal{F}_t$-измерима случайная величина $\omega\mapsto X_t(\omega)$.
Говорят, что процесс $(X_t)_{t\in T}$ прогрессивно измерим, если для всех $t\in T$ $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-измеримы отображения $[0,t]\times\Omega\ni(s,\omega)\mapsto X_s(\omega)$.

Говорят, что $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – естественная фильтрация для процесса $(X_t)_{t\in T}$, если $\mathcal{F}_t$ – наименьшая σ-алгебра, относительно которой для всех $s\le t$ измеримы случайные величины X_s.

Подумать: В случае дискретного времени естественной фильтрацией для процесса X_t является $(\sigma(X_0,X_1,\ldots,X_t))_{t\in T}$.

Момент остановки

Случайную величину τ, принимающую значения в $T \cup \{+\infty\}$, называют **моментом остановки** (относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$), если для всех $t \in T$ событие $\{\tau \leq t\} = \{\omega \,|\, \tau(\omega) \leq t\}$ лежит в $\mathcal{F}_t$.

Подумать: докажите, что все неотрицательные константы — моменты остановки.

Подумать: перевернется ли мир, если в качестве определения момента остановки взять "$\{\tau < t\}$ лежит в $\mathcal{F}_t$"?

Важный пример

Пусть $T = \mathbb{N}$, Ω – множество функций $\omega : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$,
$\mathcal{F}_n$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая множества

$$\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) : \omega_1 = a_1, \dots, \omega_n = a_n\}$$

для всех наборов a.

Подумать: что здесь можно взять за $\mathcal{F}$?

Подумать: пока мы не задавали $\mathbb{P}$, принципиально ли это?

Здесь моментами остановки являются

$$\tau(\omega) \triangleq \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 3\right\}, \; \sigma(\omega) = \min\{n : \omega_n = -1\}.$$

Подумать: всегда ли (не) является моментом остановки

$$\sigma'(\omega) = \min\{n : \omega_{n+1} = -1\}?$$

Если момента остановки уже два...

Напомним $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

Лемма 4. Если σ и τ – моменты остановки, то $\sigma \wedge \tau$ — тоже момент остановки.

Для доказательства достаточно увидеть
$\{\sigma \wedge \tau \le t\} = \{\sigma \le t\} \cup \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

Подумать: будет ли верен аналогичный факт для $\sigma \vee \tau$, $\sigma + 1$, $\sigma + \tau$?

Пусть время непрерывно. Введем момент первого после s попадания процесса в $A \subset \mathbb{R}$: $\tau_A^s(\omega) \overset{\triangle}{=} \inf\{t \geq s \,|\, \exists t > s\, X_t(\omega) \in A\}$

Предложение 23. Пусть согласованный с $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ случайный процесс $(X_t)_{t\in T}$ для почти всех ω имеет траектории $t \mapsto X_t(\omega)$, имеющие предел слева и непрерывные справа. Предположим, что X_t принимает лишь натуральные значения. Тогда $\tau_{\{i\}}^s$ является моментом остановки для всех $s \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\{\tau_{\{i\}}^s \leq t\} = \bigcup_{u\in\{t\}\cup(\mathbb{Q}\cap(s,t))} \{X_u = i\} \in \mathcal{F}_t. \qquad \forall s,t \in T, s < t.$$

Подумать: где в доказательстве использовались cádlág траектории (имеют предел слева и непрерывны справа *"continue á droite, limite á gauche"*)?

Подумать: пройдет ли это доказательство для момента первого попадания в некоторое множество A без предположения дискретности ($X_t \in \mathbb{N}$)? А если это множество A открыто, или замкнуто?

Легко видеть, что любой момент остановки можно представить в виде

$$\bar{\tau}_B(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \inf\{t \,|\, \exists t \in T \ (t,\omega) \in B\}$$

подходящим выбором $B \subset T \times \Omega$.

Предложение 23'.[без д-ва] Пусть выполнены обычные условия на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$, а некоторое множество $B \subset T \times \Omega$ прогрессивно измеримо (то есть для всех $t \in T$ $\mathcal{F}_t$-измеримы функции $\omega \to 1_B(t,\omega)$). Тогда $\bar{\tau}_B$ является моментом остановки.

Подумать: для любого прогрессивно измеримого процесса $(X_t)_{t\in S}$ и множества $A \in \mathcal{F}_s$, τ_A^s является моментом остановки в силу Предложения 23'.

Создай σ-алгебру по моменту остановки

Пусть τ – момент остановки. Введем σ-алгебру событий, произошедших до τ: $\mathcal{F}_\tau \triangleq \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t\}$.

- $\mathcal{F}_\tau$ – σ-алгебра.
- τ измеримо относительно $\mathcal{F}_\tau$.
  Действительно, $\{\tau \le c\} \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le c \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \in T$ и любого $c \in \mathbb{R}$. Отсюда $\{\tau \le c\} \in \mathcal{F}_\tau$.
- Если σ, τ – моменты остановки и $\sigma \le \tau$, то $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
  Для всех $t \in T$, $A \in \mathcal{F}_\sigma$ достаточно убедиться, что
  $A \cap \{\tau \le t\} = B \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_\tau$ для
  $B = (A \cap \{\sigma \le t\}) \cap \{\sigma \wedge t \le \tau \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$.
- [без д-ва] для всякого прогрессивно измеримого процесса X_t и конечного момента остановки τ случайная величина X_τ $\mathcal{F}_\tau$-измерима.

Мартингал

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ – фильтрация.

Говорят, что согласованный с $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ случайный процесс $(X_t)_{t\in T}$ —

- мартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$
$$X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s);$$
- субмартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$
$$X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s);$$
- супермартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$
$$X_s \geq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s).$$

Примеры мартингалов

Пусть Y — $\mathcal{F}$-интегрируемая случайная величина, тогда $X_s \overset{\triangle}{=} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s)$ является мартингалом в силу $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s)$ при $s \leq t$.

В случае дискретного времени, для процесса $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ иногда берут по умолчанию его естественную фильтрацию $(\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$. В этом случае определение мартингала можно переписать до

$$X_{n-1} = \mathbb{E}(X_n|X_0, \ldots, X_{n-1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

На пять минут...

1. Убедитесь, для любых квадратных матриц A матрицы A и e^A коммутируют.
2. Вы решили эмулировать цепь Маркова X_t с непрерывным временем, имеющую инфинитезимальную матрицу переходных вероятностей Q, с помощью цепи Маркова $Y_n^{(\delta)}$ с дискретным временем. Вы выбрали малый шаг $\delta > 0$ и желаете обеспечить $Y_n^{(\delta)} \approx X_{\delta n}$ (на самом деле даже $Y_{\lfloor t/\delta \rfloor}^{(\delta)} \xrightarrow{d} X_t$ при $\delta \downarrow 0$ для всех положительных t).
Подберите переходную матрицу для $Y_n^{(\delta)}$.