Теория вероятностей. Лекция двадцать седьмая Мартингалы

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

15.05.2019

Что разобрали:

- Марковские цепи с дискретным временем
- Марковские цепи с непрерывным временем
- Фильтрация и моменты остановки
- Мартингалы
- Предельные теоремы
- Примеры процессов

"Условные" свойства условного матожидания

Предполагая, что все нужные условные матожидания существуют...

14^0 $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$ тогда и только тогда, когда ξ $\mathcal{G}$-измерима.

15^0 $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\xi$, если ξ независима относительно $\mathcal{G}$;

в частности, $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\xi$ для $\mathcal{G} = \{\Omega, \varnothing\}$.

16^0 $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{H})$ при $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$;

в частности, $\mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta,\zeta)|\eta)$,

$\mathbb{E}\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\xi$,

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$ для всех $A \in \mathcal{F}$

(формула полной вероятности),

$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\xi|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}))$ (свойство Дуба).

Фильтрация и моменты остановки

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и время пробегает значения из $T = \mathbb{R}_+$ или $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Набор σ-подалгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ алгебры $\mathcal{F}$ называют **фильтрацией** [иногда **потоком алгебр**], если для всех $s \le t$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Случайную величину τ, принимающую значения в $T \cup \{+\infty\}$, называют **моментом остановки** (относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$), если для всех $t \in T$ событие $\{\tau \le t\} = \{\omega \,|\, \tau(\omega) \le t\}$ лежит в $\mathcal{F}_t$.

Пусть τ – момент остановки. Введем σ-алгебру событий, произошедших до τ: $\mathcal{F}_\tau \triangleq \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t\}$.

Мартингал

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ – фильтрация.

Говорят, что согласованный с $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ случайный процесс $(X_t)_{t \in T}$ —

- мартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$

$$X_s = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s);$$

- субмартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$

$$X_s \leq \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s);$$

- супермартингал, если все $\mathbb{E}|X_t|$ существуют и для $s \leq t$

$$X_s \geq \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s).$$

Примеры мартингалов

Пусть Y — $\mathcal{F}$-интегрируемая случайная величина, тогда $X_s \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s)$ является мартингалом в силу $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s)$ при $s \leq t$.

Пусть у Вас есть две возможные плотности f и g, и выборка $x_1, \ldots, x_k, \ldots$. Функция правдоподобия

$$X_n = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \cdot \ldots \cdot \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

является мартингалом.

Мартингалы в важном примере

В важном примере, в справедливой игре, выигрыш игрока за n раундов $X_n = \omega_1 + \ldots + \omega_n$ — мартингал относительно там же заданной фильтрации, а
средний выигрыш игрока за n раундов

$$Y_n = \frac{\omega_1 + \ldots + \omega_n}{n}$$

даже не субмартингал.
Подумать: почему??
Подумать: в случае несправедливой, но стационарной игры, когда именно X_n — субмартингал, супермартингал(?);подберите число $R > 0$ так, чтобы R^{X_n} стало мартингалом.

Свойства мартингалов

Из свойств условного матожидания сразу следует пара свойств.

Предложение. Если X_t, Y_t — мартингалы относительно одной и той же фильтрации, то $aX_t + bY_t$ тоже мартингал для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Подумать: верно ли это предложение для супермартингалов.

Предложение. Если X_t — мартингал, g — выпуклая функция, $\mathbb{E}|g(X_t)| < \infty$ для всех t, то $g(X_t)$ – субмартингал относительно той же фильтрации.

Подумать: как соотносятся эти предложения со средним выигрышем в важном примере.

[С-но; 0,5 баллов] Докажите, что супермартингал X_t является мартингалом, только если $\mathbb{E}X_t$ не зависит от времени.

[С-но; 0,5 баллов] Докажите, что у мартингала X_t $\mathbb{E}X_t$ не зависит от времени.

[С-но; 0,5 баллов] Докажите, что если X_t, Y_t — супермартингалы относительно одной и той же фильтрации, то $X_t \wedge Y_t$ — тоже супермартингал.

Разложение Дуба

Если $(X_n, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ – субмартингал, то существуют два случайных процесса M_n и A_n такие, что

1. $X_n = M_n + A_n$ при $n \geq 1$,
2. $(M_n, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ — мартингал,
3. $A_1 = 0$ и A_n — $\mathcal{F}_{n-1}$ измеримо при $n \geq 2$,
4. A_n не убывает, т.е. $A_n(\omega) \leq A_{n+1}(\omega)$ почти наверное.

Если есть другое такое разложение $\overline{M}_n$, $\overline{A}_n$, то $\overline{M}_n = M_n$, $\overline{A}_n = A_n$ почти всюду.

Подумать: в важном примере в случае справедливой игры есть субмартингал X_n^2 (квадрат выигрыша); найдите его разложение.

Доказательство разложения Дуба

Пусть M_n, A_n уже построены. Для $n \geq 2$ имеем, что

$$X_{n-1} = M_{n-1} + A_{n-1},\ X_n = M_n + A_n.$$

Для $\mathcal{F}_{n-1}$ имеем

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} = A_n - A_{n-1}.$$

Вместе с условием $A_1 = 0$ это показывает, что X_n определяют A_n однозначно. Аналогично, $M_n = X_n - A_n$, что также говорит об однозначности определения M_n.

Теперь докажем существование. Положим $M_1 \triangleq X_1$, $A_1 \triangleq 0$, $A_n \triangleq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} + A_{n-1}$, $M_n \triangleq X_n - A_n$.

Заметим, что свойства 1, 3 выполняются по определению. A_n не убывают, поскольку X_n – субмартингал. Осталось доказать, что $(M_n, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ – мартингал. Имеем, что

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - A_n = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}.$$

Разложение Дуба–Мейера [без д-ва]

Теорема. Пусть $(X_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ — субмартингал с удовлетворяющей обычным условиям фильтрацией, а для каждой ограниченной константы $a > 0$ для множества всех моментов τ остановки, ограниченных этой константой, выполнено

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{\tau} \mathbb{E}(|X_\tau|\,|\,\mathbf{1}_{\{|X_\tau|>\lambda\}}) = 0.$$

Тогда найдутся случайные процессы M_t и A_t с непрерывными траекториями такие, что

1. $X_t = M_t + A_t$ при $t \geq 0$,
2. $(M_t, \{\mathcal{F}_t\})_{t\geq 0}$ — мартингал,
3. $A_0 = 0$, A_t согласован с $\mathcal{F}_t$,
4. A_t не убывает, т.е. $A_s(\omega) \leq A_t(\omega)$ почти наверное для всех $s \leq t$.

Если есть другая пара процессов $\overline{M}_t$, $\overline{A}_t$, то $\overline{M}_t = M_t$, $\overline{A}_n = A_t$ п.в.

Разложение Рисса [без д-ва]

Теорема. Пусть $(X_n, \{\mathcal{F}_n\})$ — супермартингал. Следующие условия эквивалентны:

1. для некоторого субмартингала $(W_n, \{\mathcal{F}_n\})$ почти всюду выполнено $W_n \leq X_n$;
2. для некоторого мартингала $(M_n, \{\mathcal{F}_n\})$ и неотрицательного супермартингала $(A_n, \{\mathcal{F}_n\})$ выполнено $X_n = M_n + A_n$ и $\mathbb{E}A_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Если есть другая пара процессов $\overline{M}_t$, $\overline{A}_t$, то $\overline{M}_n = M_n$, $\overline{A}_n = A_n$ п.в.

В непрерывном случае надо потребовать от фильтрации обычных условий и ограничиться процессами, имеющими лишь cádlág траектории.

Теорема о произвольном выборе

Теорема о произвольном выборе. Пусть τ, σ — некоторые моменты остановки, $\sigma \leq \tau \leq k$, где k – некоторое число.

- Если $(X_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T})$ — субмартингал, то $X_\sigma \leq \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$;
- если $(X_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T})$ — мартингал, то $X_\sigma = \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$;
- если $(X_t, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T})$ — супермартингал, то $X_\sigma \geq \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$.

Доказательство теоремы о выборе

Докажем теорему лишь для дискретного времени. Пусть $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Для всех m, n $(1 \le m \le n \le k)$ положим $A_m \triangleq A \cap \{\sigma = m\}$,

$$A_{m,n} \triangleq A_m \cap \{\tau = n\}, \quad B_{m,n} \triangleq A_m \cap \{\tau > n\}, \quad C_{m,n} \triangleq A_m \cap \{\tau \ge n\}.$$

Теперь $B_{m,n} \in \mathcal{F}_n$ из $\{\tau > n\} = \Omega \setminus \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$.
Для субмартингала $(X_n, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ имеем $\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{B_{m,n}}) \le \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbf{1}_{B_{m,n}})$.
Из $C_{m,n} = A_{m,n} \cup B_{m,n}$ и $B_{m,n} = C_{m,n+1}$ следует

$$\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{A_{m,n}}) \ge \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{C_{m,n}}) - \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbf{1}_{B_{m,n}}) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{C_{m,n}}) - \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbf{1}_{C_{m,n+1}}).$$

Суммируя по n от m до k и воспользовавшись $A_m = C_{m,m}$, получаем, что $\mathbb{E}(X_\tau \mathbf{1}_{A_m}) \ge \mathbb{E}(X_m \mathbf{1}_{A_m})$. Суммируя по m от 1 до k, получаем, что

$$\mathbb{E}(X_\tau \mathbf{1}_A) \ge \mathbb{E}(X_\sigma \mathbf{1}_A).$$

Неравенство Дуба

Если $(X_n, \mathcal{F}_n)$ — субмартингал, то для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \mathbb{P}(A_{\lambda,n}) \le \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{A_{\lambda,n}}) \le \mathbb{E}\max\{X_n, 0\},$$

где $A_{\lambda,n} \triangleq \left\{\omega : \max\limits_{i=\overline{1,n}} X_i(\omega) \ge \lambda\right\}$.

Подумать: как доказать то же неравенство в непрерывном случае для имеющих лишь cádlág траектории мартингалов.

Доказательство неравенства

Определим момент остановки σ по правилу

$$\sigma(\omega) \triangleq \begin{cases} i, & X_i \geq \lambda, \\ n, & \max_{i=1,\ldots,n} X_i < \lambda. \end{cases}$$

Также $\tau \equiv n$. Имеем, что $A_{\lambda,n} \in \mathcal{F}_\sigma$, так как для всех m

$$A_{\lambda,n} \cap \{\sigma \leq m\} = \{\max_{i=1,\ldots,m} X_i \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_m.$$

Поскольку $X_\sigma \geq \lambda$ на $A_{\lambda,n}$, из теоремы о произвольном выборе следует

$$\lambda \mathbb{P}(A_{\lambda,n}) \leq \mathbb{E}(X_\sigma \mathbf{1}_{A_{\lambda,n}}) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{A_{\lambda,n}}) \leq \mathbb{E} \max\{X_n, 0\}.$$

На пять минут...

1. Вы решили эмулировать цепь Маркова X_t с непрерывным временем, имеющую инфинитезимальную матрицу переходных вероятностей Q, с помощью цепи Маркова $Y_n^{(\delta)}$ с дискретным временем. Вы выбрали малый шаг $\delta > 0$ и желаете обеспечить $Y_n^{(\delta)} \approx X_{\delta n}$ (на самом деле даже $Y_{\lfloor t/\delta \rfloor}^{(\delta)} \xrightarrow{d} X_t$ при $\delta \downarrow 0$ для всех положительных t). Подберите переходную матрицу для $Y_n^{(\delta)}$.
Все банально, если помнить формулу $e^t \approx (1 + t/n)^n$
2. Всегда ли не является моментом остановки

$$\sigma'(\omega) = \min\{n : \omega_{n+1} = -1\}$$

в "важном примере"?
Будет моментом остановки, если Вы всегда можете предсказать следующий бросок, например если всегда после первого броска выпадает то же, что и в первом броске, ну или если Вы вскрыли датчик случайных чисел. Про вероятность и независимость в том примере ничего не обещалось...