Теория вероятностей. Лекция девятнадцатая
Характеристические функции

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

07.03.2019

Что разобрали:

- Неравенства концентрации меры
- Сходимости случайных величин
- Усиленный закон больших чисел
- Слабая сходимость
- Характеристические функции
- Центральная предельная теорема

Слабая сходимость предполагает, что изучаемое явление — черный ящик, не пытаясь залезть внутрь, она пытается угадать реакции на раздражители (значения у непрерывных функций). Она не требует знания ω, наоборот, она скорее предполагает, что Вы его не знаете и никогда не узнаете. И дает все остальное. Характеристические функции / преобразование Фурье — лучший (как минимум в вероятности) инструмент работы с ними.

Слабая сходимость

Будем говорить, что ξ_n сходится к ξ по распределению, обозначая её $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если $\mu_{\xi_n} = \xi_n \# \mathbb{P}$ сходится к $\mu_\xi = \xi \# \mathbb{P}$ слабо, то есть для всякой непрерывной ограниченной функции ϕ

$$\int_\Omega \phi(\xi_n(\omega))\mathbb{P}(d\omega) \to \int_\Omega \phi(\xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega).$$

При этом достаточно проверить сходимость для бесконечное число раз дифференцируемых финитных функций ϕ.

Предложение 8. Последовательность случайных величин ξ_n сходится по распределению к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда для всех точек непрерывности функции распределения F_ξ

$$F_{\xi_n}(t) \to F_\xi(t) \text{ при } n \to \infty.$$

Позже докажем: центральная предельная теорема. Условие Ляпунова

Центральная предельная теорема с условием Ляпунова Пусть $\{\xi_n\}$ независимы, их матожидания m_n и дисперсии σ_n^2 конечны. Пусть для $\mathcal{D}_n^2 \triangleq \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ при некотором $\delta > 0$ также выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathcal{D}_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i - m_i)^{2+\delta} = 0.$$

Тогда распределения случайных величин

$$\frac{(\xi_1 - m_1) + \ldots + (\xi_n - m_n)}{D_n}$$

слабо сходятся к нормальному распределению с нулевым средним и единичной дисперсией.

Как следствие: центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема. Пусть $\{\xi_n\}$ независимы и одинаково распределены. Пусть $\mathbb{E}\xi_1 = m$, $D\xi_1 = \sigma^2 > 0$. Тогда распределения случайных величин $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}$ слабо сходятся к нормальному распределению с нулевым средним и единичной дисперсией, в частности, для всех $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, (a < b)$

$$\mathbb{P}\Big(a < \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < b\Big) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Неравенство Берри-Эссена. При этом,

$$\Big| F_{\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}}(b) - \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \Big| < \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbb{E}|\xi_1 - m|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Может докажем: локальная предельная теорема

Пусть $\{\xi_n\}$ независимы и одинаково распределены, $\mathbb{E}\xi_1 = m$, $D\xi_1 = \sigma^2$, а ξ_i принимают целочисленные значения, причем $\text{НОД}(\operatorname{supp}\xi_1) = 1$.
Тогда

$$\sigma\sqrt{n}\mathbb{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n - nm = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(k-nm)^2/2\sigma\sqrt{n}}$$

стремится при $n \uparrow \infty$ к нулю равномерно по всем целым k.

Немного топологии. Теорема Прохорова

Множество вероятностей $\mathcal{K}$ называется плотным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $[a,b]$ такой, что для всех $\nu \in \mathcal{K}$ $\nu([a,b]) \geq 1 - \varepsilon$.

Следующий результат верен в обе стороны в произвольном сепарабельном метрическом пространстве, нам потребуется лишь следующая часть:

Теорема 6.(Теорема Прохорова) Пусть $\{\mu_n\}$ плотна, тогда существуют подпоследовательность μ_{n_k} и вероятность μ такие, что $\mu_{n_k} \xrightarrow{w} \mu$.

Доказательство теоремы Прохорова

Доказательство. Используя диагональный процесс Кантора, строим последовательность $F_{\mu_{n_k}}$ такую, что $F_{\mu_{n_k}}(t)$ сходятся для рациональных точек t. Предельную функцию $F(t)$ пока определили лишь для рациональных t.

Можно продлить функцию F на все $\mathbb{R}$. Заметим, что $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$ (это следует из плотности μ_n). Также для всех точек непрерывности F $F_{\mu_n}(t) \to F(t)$. В самом деле, если t — точка непрерывности, то существуют такие рациональные t_1 и t_2, что $t_1 < t < t_2$ и $F(t_2) - F(t_1) < \varepsilon$. Выберем N так, чтобы для всех $n > N$ $|F_{\mu_n}(t_1) - F(t_1)|, |F_{\mu_n}(t_2) - F(t_2)| < \varepsilon$. Отсюда получаем, что $|F_{\mu_n}(t) - F(t)| < 3\varepsilon$.

Остается изменить функцию F во всех точках разрыва (а их не более чем счетное число) так, чтобы она стала непрерывной справа. Во всех остальных точках сходимость $F_{\mu_n}(t)$ к $F(t)$ сохраняется.

Определенная функция F есть функция распределения для некоторой вероятности μ.

Характеристические функции. Определение

Каждой вероятности μ (над $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$) сопоставим функцию по правилу

$$\tilde{\mu}(y) \triangleq \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \mu(dx) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Функцию $\tilde{\mu}$ назовем характеристической функцией вероятности μ; (здесь $e^{it} = \cos t + i \sin t$).
При этом, каждой случайной величине ξ можно вслед за $\mu_\xi = \xi \# \mathbb{P}$ рассмотреть характеристическую функцию случайной величины ξ:

$$\tilde{\xi} = \widetilde{\mu_\xi} = \mathbb{E} e^{iy\xi} \Big(= \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f_\xi(x) dx \Big).$$

Простейшие свойства характеристических функций-1

0^0 $\tilde{\mu}(y)$ всегда существует и непрерывна (на самом деле даже равномерно непрерывна).

1^0 $\widetilde{\mu}(0) = 1$ для любого распределения μ.

2^0 При сложении и умножении на $c \in \mathbb{R}$ случайной величины ее характеристическая функция меняется по правилам:

$$\widetilde{c+\xi}(t) = e^{itc}\widetilde{\xi}(t), \quad \widetilde{c\xi}(t) = \widetilde{\xi}(ct).$$

Простейшие свойства характеристических функций-2

3^0 Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций:

$$\widetilde{\xi_1 + \ldots + \xi_n} = \widetilde{\xi_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{\xi_n}, \qquad \widetilde{\mu_{\xi_1+\ldots+\xi_n}} = \widetilde{\mu_{\xi_1}} \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu_{\xi_n}}.$$

Подумать: выразить $\widetilde{a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n}$.

4^0 [С-но] Если конечен интеграл $\int_{\mathbb{R}} |x|^k \mu(dx)$, то характеристическая функция $\tilde{\mu}$ имеет k-ю производную; в частности $\mathbb{E}\xi = i\frac{d\tilde{\xi}(0)}{dt}$.

Подумать: обратное верно только для четных k.

Подумать: найти пример, в котором $\mathbb{E}\xi$ нет, а $\frac{d\tilde{\xi}(0)}{dt}$ есть.

Примеры

Случайная величина, почти всюду равная константе m, имеет характеристическую функцию $\tilde{m}(y) = e^{imy}$.

Гауссова вероятность $\gamma_{m,\sigma}$, распределенная по $N(m, \sigma^2)$, имеет характеристическую функцию $\widetilde{\gamma_{m,\sigma}}(y) = e^{imy - \frac{\sigma^2 y^2}{2}}$.
Действительно, пусть $z(y) = \sqrt{2\pi}\widetilde{\gamma_{0,1}}(y)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dy}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{ixy-x^2/2}dx = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}de^{-x^2/2} \\
&= i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}d(e^{ixy}) = -yz(y).
\end{aligned}$$

Решая $z' = -yz$, имеем $z(y) = Ce^{-y^2/2}$. Осталось заметить, что $\widetilde{\gamma_{0,1}}(0) = 1$.

Формула обращения

Предложение 11. Для всех $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ справедливо равенство

$$\mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{iy} \tilde{\mu}(y)dy.$$

Доказательство начнется со следующего слайда, а теперь, собственно, зачем эта страшная формула нужна...

Следствие 7. Вероятности равны тогда и только тогда, когда равны их характеристические функции. Распределения случайных величин равны тогда и только тогда, когда равны их характеристические функции.

Доказательство формулы обращения

Убедимся сначала, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2} \qquad (*).$$

Заметим, что $1/z = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$. Отсюда,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin z e^{-zt} dt dz = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin z e^{-zt} dz dt.$$

Дважды взяв внутренний интеграл по частям, мы имеем

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin z dz = e^{-zt}(-\cos z + t \sin z)\Big|_0^{+\infty} - t^2 \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin z dz;$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} \sin z e^{-zt} dz = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Имеем, что

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{+R} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{iy} \tilde{\mu}(y)dy &= \int_{-R}^{+R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{iy} e^{iyx} \mu(dx)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{iy} e^{iyx} dy \, \mu(dx);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{+R} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{iy} e^{iyx} dy &= \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iy(x-a)} - e^{iy(x-b)}}{iy} dy \\
&= \int_{-R}^{+R} \frac{\sin y(x-a) - \sin y(x-b)}{y} dy \\
&= 2 \int_{0}^{+R} \Big[\frac{\sin y(x-a)}{y} - \frac{\sin y(x-b)}{y} \Big] dy \\
&= 2 \int_{R(x-b)}^{R(x-a)} \frac{\sin z}{z} dz.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой Лебега при $R \to \infty$ в

$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{-iya} - e^{-iyb}}{iy} \tilde{\mu}(y) dy = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{R(x-b)}^{R(x-a)} \frac{\sin z}{z} dz \mu(dx),$$

из $(*)$ мы получим

- если $x \notin [a, b]$, то $2 \int_{R(x-b)}^{R(x-a)} \frac{\sin z}{z} dz \to 0;$
- если $x \in (a, b)$, то $2 \int_{R(x-b)}^{R(x-a)} \frac{\sin z}{z} dz \to 2\pi;$
- если $x = a$, то $2 \int_{R(x-b)}^{R(x-a)} \frac{\sin z}{z} dz \to \pi;$
- если $x = b$, то $2 \int_{R(x-b)}^{R(x-a)} \frac{\sin z}{z} dz \to \pi.$

Осталось все сложить.

Что разобрали:

- Неравенства концентрации меры
- Сходимости случайных величин
- Усиленный закон больших чисел
- Слабая сходимость
- Характеристические функции пройдя до половины...
- Центральная предельная теорема

Характеристические функции — это функанский способ (фактически преобразование Фурье) работы с вероятностными распределениями. Вы засекаете у каждой случайной величины ξ матожидания всех ее гармоник $\mathbb{E}e^{i\xi t}$ и работаете только с ними вместо всех непрерывных функций. Это не только позволяет восстановить распределение (формула обращения), но и сохраняет сходимости, переводя близкие распределения в близкие гармоники и наоборот. Об этом в следующий раз...

На пять минут...

1. Пусть $X_n (n > 3)$ — последовательность независимых случайных величин, $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}$.
Опровергнуть или доказать: сходится ли эта последовательность по вероятности, в среднем $(p = 2)$, почти всюду, слабо?
По вероятности, а значит и слабо, сходится, в среднеквадратичном и почти всюду не сходится
2. Где ошибка? Берем вероятность μ на $\mathbb{R}$ с функцией распределения $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\, x$ и плотностью $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Тогда для $\phi(x) = x$

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\mu(dx) \neq -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x) F_\mu(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\, x\right] dx < 0.
\end{aligned}
$$

Проблема лишь в том, что $\phi(x) = x$ не является финитной функцией.