Теория вероятностей. Лекция шестая
Скалярные характеристики случайных величин

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

09.10.2018

Напомним про случайные величины

В заданном измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **дискретной случайной величиной**, если оно принимает не более чем счетное число значений $x_1, \ldots, x_i, \ldots$, и при этом для всякого числа x_i выполнено

$$H_i = \{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}.$$

Пусть вероятность $\mathbb{P}$ также задана. Теперь случайная величина ξ создает свое распределение, дискретное распределение, правилом:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$
$p_1 \triangleq \mathbb{P}(H_1)$	$p_2 \triangleq \mathbb{P}(H_2)$	$p_3 \triangleq \mathbb{P}(H_3)$	$p_4 \triangleq \mathbb{P}(H_4)$	$\ldots$

Упрощение: обычно считается, что все p_i положительны.

Что будет дальше?

- распределение случайных величин
- медиана, математическое ожидание
- независимость случайных величин
- производящие функции
- дисперсия, ковариация и корреляция
- совместное распределение случайных величин, маргинальные распределения
- условное математическое ожидание

Скалярные характеристики дискретной случайной величины: мода

Пусть случайная величина ξ дает дискретное распределение

x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$
p_1	p_2	p_3	p_4	$\dots$

Модой дискретной случайной величины называют те значения x_i, вероятности которых не меньше всех остальных p_i.

Подумать: у дискретной случайной величины мода всегда есть (почему?), но она не обязана быть единственной.

Пример 1. У биномиального распределения любая мода — целое число в отрезке $[np-q, np+p]$.

Скалярные характеристики дискретной случайной величины: медиана

Медианой случайной величины ξ называют любое число μ, для которого $\mathbb{P}(\xi \le \mu) \ge 1/2$ и $\mathbb{P}(\xi \ge \mu) \ge 1/2$.

Подумать: у дискретной случайной величины медиана всегда есть (почему?), более того, она или единственна, или их континуум.
Подумать: какие числа являются медианами для распределения Бернулли.

Скалярные характеристики случайной величины: квантили

Квантилью порядка p, $p \in (0,1)$, случайной величины ξ называют любое число x, для которого $\mathbb{P}(\xi \le x) \ge p$ и $\mathbb{P}(\xi \ge x) \ge 1-p$.

Подумать: квантиль любого порядка всегда существует, но не всегда однозначно восстанавливается.
Частные случаи: квантиль для $p = 1/2$ — медиана, квантиль для $p = 1/4$ и для $p = 3/4$ — первая и третья квартили, еще есть децили и перцентили.

Математическое ожидание

Для всякой дискретной случайной величины ξ значение выражения

$$\mathbb{E}\xi \triangleq \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i x_i$$

назовем математическим ожиданием случайной величины ξ.
Будем говорить, что "математическое ожидание существует", если значение корректно определено и конечно.

Терминологическое замечание 1. Достаточно часто также используют обозначение $\mathbf{M}\xi$.
Терминологическое замечание 2. Иногда в книжках допускают значение матожидания, равное $+\infty$.
Подумать: приведите пример дискретной случайной величины, не имеющей математического ожидания.

Посчитать матожидание: индикаторные функции

Рассмотрим произвольное событие $A \in \mathcal{F}$.

Индикаторной функцией события A называют случайную величину

$$\omega \mapsto 1_A(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A; \\ 0, & \text{если } \omega \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

[С-но]

$$\mathbb{E}1_A = \mathbb{P}(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Подумать: всякая дискретная случайная величина является взвешенной суммой не более чем счетного числа индикаторных функций:

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 1_{H_i}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Посчитать матожидание напрямую: распределение Пуассона

Пример 2. Для равномерного дискретного распределения $\xi \in U\{a,b\}$ выполнено

$$\mathbb{E}\xi = \frac{b+a}{2}.$$

Пример 3. Для распределения Пуассона $\xi \in Pois(\lambda)$ выполнено

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.
\end{aligned}$$

Посчитать матожидание через производные: геометрическое распределение

Пример 4. Пусть $\xi \in Geom^0(\lambda)$. Тогда $\mathbb{E}\xi = q/p$ (или $\mathbb{E}\xi = 1/p$ для $\xi \in Geom^1(\lambda)$). Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \sum_{k\in\mathbb{N}} kq^k p = pq\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dq^k}{dq} = pq\frac{d}{dq}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\Big) \\
&= pq\frac{d}{dq}\Big(\frac{q}{1-q}\Big) = pq\frac{d}{dq}\Big(\frac{1}{1-q}-1\Big) = pq\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}.
\end{aligned}$$

Посчитать матожидание "по частям": геометрическое распределение

Теорема 1 [с-но] Пусть ξ принимает лишь целые неотрицательные значения. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\xi \geq k).$$

Пример 4'. Пусть $\xi \in Geom^0(\lambda)$. Тогда $\mathbb{E}\xi = q/p$ (или $\mathbb{E}\xi = 1/p$ для $\xi \in Geom^1(\lambda)$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\xi \geq k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} q^k \\ &= q + q^2 + \ldots = \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p}.\end{aligned}$$

Свойства матожидания, I: [с-но]

- 0^0 $\mathbb{E}1_A = \mathbb{P}(A)$;
- 1^0 $\mathbb{E}\xi \geq 0$, если $\xi \geq 0$ для всех $\omega \in \Omega$, и $\mathbb{E}\xi$ существует;
- 2^0 $\mathbb{E}\xi_1 \geq \mathbb{E}\xi_2$, если $\xi_1(\omega) \geq \xi_2(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, и все матожидания существуют;
- 3^0 $\mathbb{E}c = c$ для случайной величины, тождественно равной константе $c \in \mathbb{R}$;
- 4^0 $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}\xi$ для любого $c \in \mathbb{R}$; в случае $c \neq 0$, если существует одно, то имеется и другое;
- 5^0 $\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2 = \mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2)$; при этом, если существуют два из них, то существует и третье;
- 6^0 $a\mathbb{E}\xi_1 + b\mathbb{E}\xi_2 = \mathbb{E}(a\xi_1 + b\xi_2)$ при любых $a, b \in \mathbb{R}$; в случае $ab \neq 0$, если существуют два из них, то существует и третье;

Свойства матожидания, произведение

7^0 $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$ для независимых случайных величин ξ, η; при этом, если матожидания существуют справа, то и слева оно тоже существует.

Подумать: верно ли аналогичное свойство для произведения трех и более дискретных случайных величин?

Дискретные случайные величины $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ назовем независимыми, если $\mathbb{P}(\xi = x, \eta = y) = \mathbb{P}(\xi = x)\mathbb{P}(\eta = y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Как и для набора событий, для набора случайных величин вводятся понятия "независимые попарно","независимые в совокупности".

Свойства матожидания, произведение

7^0 $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$ для независимых случайных величин ξ, η; при этом, если матожидания существуют справа, то и слева оно тоже существует.

Доказательство. Можно положить $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 1_{H_i}$ и $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} y_j 1_{K_j}$ для некоторых наборов x_i, y_j, H_i $\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega\right)$ и K_j, $\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega\right)$. Отсюда,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta &= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(H_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbb{P}(K_j)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \mathbb{P}(K_j)\mathbb{P}(H_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \mathbb{P}(K_j \cap H_i) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \mathbb{P}(K_j \cap H_i)\Big) = \mathbb{E}(\xi\eta).
\end{aligned}$$

Подумать: где использовалось свойство независимости, почему можно менять порядок суммирования?

Подумать: как доказать последнее равенство выкладки?

Свойства матожидания, существование: [с-но]

8^0 $\mathbb{E}\xi$ существует, и $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$, если $\mathbb{E}|\xi|$ существует;

9^0 $\mathbb{E}\xi$ существует, если ξ ограничена или принимает конечное число значений;

10^0 $\mathbb{E}|\xi\eta|$ существует, если $\mathbb{E}\xi^2$ и $\mathbb{E}\eta^2$ существуют;

11^0 $\mathbb{E}|\xi|, \mathbb{E}\xi$ существуют, если $\mathbb{E}\xi^2$ существует;

12^0 $g(\mathbb{E}\xi) \le \mathbb{E}g(\xi)$ для любой выпуклой (вниз) скалярной функции g; при этом, если существует матожидание справа, то и слева тоже существует;
[доказательство сводится или к неравенству Йенсена, или замечанию, что надграфик выпуклой функции тоже выпуклый]

13^0 [1 балл] $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i)$ существует и равно $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\xi_i$, если конечен ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}|\xi_i|$.

Функции потерь для медианы и матожидания

Задача [0,4 балла] Показать, что для любой дискретной случайной величины ξ и любой её медианы μ выполнено

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}|\xi - a| = \mathbb{E}|\xi - \mu|.$$

Задача [0,3 балла] Показать, что для любой дискретной случайной величины ξ, для которой существует $\mathbb{E}(\xi^2)$, выполнено

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}|\xi - a|^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

Задача [0,8 баллов] Показать, что для любой дискретной случайной величины ξ $(\mathbb{E}(\xi^2) < +\infty)$ и любой её медианы μ выполнено

$$(\mathbb{E}\xi - \mu)^2 \leq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

Моменты случайной величины

Моментом k-го порядка $(k \in \mathbb{N})$ случайной величины ξ называют значение выражения

$$\mathbb{E}\xi^k.$$

Для любого $r > 0$ **абсолютным моментом** r-го порядка случайной величины ξ называют значение выражения

$$\mathbb{E}|\xi|^r,$$

а **центральным моментом** r-го порядка случайной величины ξ называют значение выражения

$$\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^r.$$

Дисперсия

Дисперсией называют центральный момент второго порядка

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\Big((\xi - \mathbb{E}\xi)^2\Big).$$

Корень из нее называют среднеквадратичным отклонением:

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}.$$

Грубо говоря, дисперсия охарактеризует разбросанность распределения, среднеквадратичное отклонение — типичный размах вокруг матожидания.

Терминологическое замечание 3. В зарубежных книжках обычно дисперсию обозначают $Var\,\xi$, встречалось и обозначение σ^2.

Что будет дальше?

- распределение случайных величин
- медиана, математическое ожидание
- независимость случайных величин
- производящие функции
- дисперсия, ковариация и корреляция
- совместное распределение случайных величин, маргинальные распределения
- условное математическое ожидание

На пять минут...

1. Сопоставьте светофору цепь Маркова. Найдите соответствующее стационарное распределение.

2. Даны две случайные величины, распределенные по Бернулли. Чему может быть равно матожидание их произведения?

3. Напишите отображение $1_A \# \mathbb{P}$ для события A.