Теория вероятностей. Лекция четырнадцатая
Условное математическое ожидание

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

11.12.2018

Переход от дискретного случая к общему

- борелевские множества и мера Лебега
- случайные величины и измеримые отображения
- функции распределения
- абсолютно случайные величины и не только
- математическое ожидание как интеграл
- условное математическое ожидание как интеграл
- совместные функции распределения

Мы определили интеграл по мере (при условии $\mu(\Omega) < \infty$), доказали все свойства матожидания, но интеграл поинтереснее будет, но с интегралами можно делать еще много что...

Техзадание. Итог

Для измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ с мерой μ, $\mu(\Omega) < \infty$, мы задали интеграл для неотрицательных измеримых функций (как предел суммируемых дискретных) так, чтобы для всех неотрицательных измеримых $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$

$\int_\Omega 1_A(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq \mu(A)$ для всех $A \in \mathcal{F}$;

$\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) \geq 0$;

$c\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega cf(\omega)\,\mu(d\omega)$ для всех $c > 0$;

$\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) + \int_\Omega g(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega (f(\omega) + g(\omega))\,\mu(d\omega)$.

После этого по определению приняли

$\int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq \int_\Omega 1_A(\omega) f(\omega)\,\mu(d\omega)$;

$\int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq 0$ в случае $\mu(A) = 0$;

$\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq \int_\Omega f^+(\omega)\,\mu(d\omega) - \int_\Omega (-f^-)(\omega)\,\mu(d\omega)$ для всех измеримых f, для которых $f^- \not\equiv 0$, и интегралы справа не равны одновременно $+\infty$.

Лебеговские пространства $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Пусть даны $p \in [1, \infty]$ и измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с мерой μ. Через $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ обозначают пространство всех $\mathcal{F}$-суммируемых скалярных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $|f|^p$ μ-суммируемо (f ограничено для $p = \infty$).
В $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ можно ввести псевдонорму правилом:

$$||f||_p \triangleq \Big(\int_\Omega |f(\omega)|^p \mu(d\omega) \Big)^{1/p}, \qquad ||f||_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|.$$

Говорят, что последовательность функций f_n сходится к f в $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (в метрике L^p), если $||f_n - f||_p \to 0$ при $n \to \infty$.
Подумать: проверьте, что из сходимости f_n к f в метрике L^p следует сходимость $f_n(\omega)$ к $f(\omega)$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$.
Терминологическое замечание. В хороших книжках вводят также $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, отождествляя μ-почти всюду совпадающие функции. Тогда $||f||_p$ — полная норма, пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ банахово, при $p = 2$ и гильбертово. В совсем плохих книжках L^p и $\mathcal{L}^p$ не различают.

Вспоминаем определение матожидания

Математическим ожиданием $\mathbb{E}\xi$ случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ назовем значение выражения

$$\int_\Omega \xi(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega),$$

если оно существует и конечно.

Замечание. Законно было написать и

$$\int_\mathbb{R} x\, (\xi \# \mathbb{P})(dx),$$

эту эквивалентность докажем чуть позже.

Замечание. $\mathbb{E}\xi$ существует и конечно в точности тогда, когда $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. При этом $\mathbb{E}|\xi| = ||\xi||_1$.

Матожидание предела равно пределу матожиданий, если

Теорема Лебега. Если последовательность случайных величин ξ_n сходится к ξ п.в., и для случайной величины φ имеют место $\mathbb{E}\varphi < +\infty$ и $|\xi_n| \leq \varphi$ при всех натуральных n, то ξ также суммируема, при этом

$$\mathbb{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n < \infty.$$

Теорема Леви. Если последовательность случайных величин ξ_n монотонна, их матожидания $\mathbb{E}\xi_n$ ограничены, то случайная величина $\xi \stackrel{\triangle}{=} \lim_{n\to\infty} \xi_n$ также суммируема, при этом

$$\mathbb{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n < \infty.$$

Лемма Фату. Для всякой последовательности неотрицательных случайных величин ξ_n

$$\mathbb{E}(\liminf_{k\to\infty} \xi_k) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\xi_k.$$

Свойства матожидания, существование через теорему Лебега: [с-но]

8^0 $\mathbb{E}\xi$ существует, и $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$, если $\mathbb{E}|\xi|$ существует, то есть если $\xi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

9^0 $\mathbb{E}\xi$ существует, если $|\xi|$ ограничено некоторой случайной величиной $\varphi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
в частности, $\mathbb{E}\xi$ существует, если $|\xi|$ ограничена, то есть если $\xi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

10^0 $\mathbb{E}|\xi\eta|$ существует, если $\mathbb{E}\xi^2$ и $\mathbb{E}\eta^2$ существуют, то есть если $\xi, \eta \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

11^0 $\mathbb{E}|\xi|, \mathbb{E}\xi$ существуют, если $\mathbb{E}\xi^2$ существует, то есть если $\xi \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

12^0 $g(\mathbb{E}\xi) \le \mathbb{E}g(\xi)$ для любой выпуклой (вниз) скалярной функции g; при этом, если существует матожидание справа, то и слева тоже существует;

13^0 $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^\infty \xi_i)$ существует и равно $\sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}\xi_i$, если конечен ряд $\sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}|\xi_i|$.

Интеграл по мере Лебега

Для всякой неотрицательной борелевской функции $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, для всякой неубывающей последовательности компактов K_n $(\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^m)$ назовем **интегралом от функции f по мере Лебега** значение выражения

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\mu(dx) \triangleq \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f(x)\,\mu(dx),$$

если этот предел не зависит от выбора неубывающей последовательности компактов K_n.

Подумать: почему и всё построено, и все хотелки выполнены.

Подумать: покажите теоремы Лебега, Леви и лемму Фату для такого интеграла, в частности, покажите, что если функция $|f|$ λ-суммируема, то и все измеримые функции g, модуль которых не превосходит $|f|$, также суммируемы.

Интегрирование по заряду [без д-ва]

Пусть дано некоторое измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$.

Теорема Жордана-Хана. Для всякого заряда $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ имеются меры $S_+ : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $S_- : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, что $S = S_+ - S_-$.
При этом для некоторых Ω_+, Ω_- выполнено

$$S_+(A) = S(\Omega_+ \cap A) \geq 0, \quad S_-(A) = -S(\Omega_- \cap A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Под интегралом от функции h по заряду S понимают выражение:

$$\int_\Omega h(\omega)\, S(d\omega) = \int_\Omega h(\omega)\, S_+(d\omega) - \int_\Omega h(\omega)\, S_-(d\omega).$$

В частности, это выражение корректно, если h суммируема относительно меры $S_+ + S_-$.
Неотрицательную счетно-аддитивную функцию $|S| = S_+ + S_-$ называют полной вариацией заряда S (иногда под полной вариацией понимают число $|S|(\Omega)$).

Подмена измеримого пространства

Пусть дано некоторое измеримое отображение $\xi:\Omega\to\tilde\Omega$ из $(\Omega,\mathcal{F})$ в $(\tilde\Omega,\mathcal{H})$. Пусть на $(\Omega,\mathcal{F})$ задана мера μ. Введем образ меры $\xi\#\mu:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ правилом:

$$(\xi\#\mu)(H)=\mu(\xi^{-1}(H))\qquad\forall H\in\mathcal{H}.$$

Теорема 1. Если $\xi:\Omega\to\tilde\Omega$ измеримо, $h:\tilde\Omega\to\mathbb{R}$ $\xi\#\mu$-интегрируемо, то $f\overset{\triangle}{=}h\circ\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ также μ-интегрируемо,

$$\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega)=\int_\Omega h(\xi(\omega))\mu(d\omega)=\int_{\tilde\Omega}h(\tilde\omega)\,(\xi\#\mu)(d\tilde\omega)$$

и $\int_{\xi^{-1}(H)}h(\xi(\omega))\,\mu(d\omega)=\int_H h(\tilde\omega)\,(\xi\#\mu)(d\tilde\omega)$ для всех $H\in\mathcal{H}$.

Доказательство. Зафиксируем ξ. Для $h=1$ последняя формула очевидна. Тогда первая очевидна для всех h вида $h=1_H$, следовательно для их сумм, а значит и для всех $\xi\#\mu$-интегрируемых.

Частный случай: замена переменных

Пусть $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}$.

Следствие 1. Пусть даны измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и борелевская функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тогда

$$\int_\Omega h(\xi(\omega))\mu(d\omega) = \int_\mathbb{R} h(x)\,(\xi\#\mu)(dx).$$

При этом для всех $H \in \mathcal{B}$ имеем

$$\int_{\xi^{-1}(H)} h(\xi(\omega))\,\mu(d\omega) = \int_H h(x)\,(\xi\#\mu)(dx).$$

Подумать: почему исчезло требование о $\xi\#\mu$-измеримости h?

Замена переменных. Матожидание от суперпозиции

Пусть $\mu = \mathbb{P}$ — вероятностная мера.
Следствие 2. Пусть дана случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и борелевская функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h(\xi) &= \int_\Omega h(\xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} h(x)\,(\xi\#\mathbb{P})(dx), \\ \mathbb{E}\xi &= \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} x\,(\xi\#\mathbb{P})(dx), \end{aligned}$$

где матожидания существуют и конечны, если $h(\xi)$ и ξ $\mathbb{P}$-суммируемы. При этом, для $1_{(-\infty,y]}$ имеем $F_\xi(y) = \int_{(-\infty,y]}(\xi\#\mathbb{P})(dx)$ для всех $y \in \mathbb{R}$.

Терминологическое замечание. В старых книжках пишут $F_\xi(y) = \int_{(-\infty,y]} dF_\xi(x)$, эта запись интуитивно понятна (хотя интеграл в этой формуле вполне матанский и не настолько общий как у нас).

Случай абсолютно непрерывного распределения

Следствие 3. Для абсолютно непрерывной случайной величины $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ с плотностью $f_\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и неотрицательного борелевского отображения h имеем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(x)\,(\xi\#\mathbb{P})(dx) &= \int_{\mathbb{R}} h(x)\,f_\xi(x)\,\lambda(dx),\\ \int_{\mathbb{R}} x\,(\xi\#\mathbb{P})(dx) &= \int_{\mathbb{R}} x\,f_\xi(x)\,\lambda(dx),\\ F_\xi(y) &= \int_{(-\infty,y]} f_\xi(x)\,\lambda(dx) \text{ для почти всех } y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Доказательство. Зададим на $\mathcal{B}$ две меры $\mu(B)=\int_B h(x)\,f_\xi(x)\,\lambda(dx)$ и $\nu(B)=\int_B h(x)\,(\xi\#\mathbb{P})(dx)$. По теореме Каратеодори, если они совпадают для всевозможных полуинтервалов $B=(a,b]$, то и на $\mathcal{B}$. Но $\mu((a,b])=\int_{(a,b]} h(x)\,f_\xi(x)\,\lambda(dx)=F(b)-F(a)=\int_{(a,b]} h(x)\,f_\xi(x)\,(\xi\#\mathbb{P})(dx)=\nu((a,b])$. Осталось применить предыдущее следствие.

Случай абсолютно непрерывного распределения. Матожидание

Следствие 4. Для абсолютно непрерывной случайной величины ξ с плотностью f_ξ, для борелевского отображения h имеем

$$\mathbb{E}h(\xi) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,(\xi\#\mathbb{P})(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,f_\xi(x)\,\lambda(dx),$$

причем из конечности любого из интегралов следует существование остальных частей. В частности,

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x\,(\xi\#\mathbb{P})(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\,f_\xi(x)\,\lambda(dx).$$

Доказательство. Если $h \geq 0$ и интеграл конечен, смотрим предыдущее следствие. В общем случае, вновь рассматривая $h = h^+ + h^-$, из суммируемости h по какой-либо мере следует суммируемость h^+ и h^- по этой мере, а следовательно совпадение интегралов и по той, и по другой мере (и от h^+, и от h^-, а следовательно и от h).

Абсолютная непрерывность мер

Пусть есть некоторое измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с мерой μ и заряд S, определенный на некоторой σ-алгебре $\mathcal{G}$, содержащей $\mathcal{F}$.

Определение. Заряд S называют абсолютно непрерывным относительно меры μ (и пишут $S \ll \mu$), если для всякого $A \in \mathcal{F}$ из $\mu(A) = 0$ следует $S(A) = 0$.

Подумать: переформулируйте фразу: “мера $\xi\#\mathbb{P}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега”.
Подумать: проверьте, что заряд S абсолютно непрерывен относительно меры μ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого $A \in \mathcal{F}$ из $\mu(A) < \delta$ следует $|S(A)| < \varepsilon$.
Подумать: убедитесь, что для всякой μ-суммируемой $f : \Omega \to \mathbb{R}$ правило $A \mapsto S(A) = \int_A f(\omega)\,\mu(d\omega)$ всегда задает заряд, абсолютно непрерывный относительно μ.

Абсолютная непрерывность мер. Плотность

Определение. Измеримое отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется плотностью (производной) заряда S относительно меры μ (и иногда обозначается $f = \frac{dS}{d\mu}$), если

$$S(A) = \int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Подумать: когда имеется и чему равно $\frac{d(\xi\#\mathbb{P})}{d\lambda}$?

Подумать: определим для некоторого множества $B \in \mathcal{F}$ $(\mathbb{P}(B) \neq 0)$ меру S правилом:

$$S(A) \triangleq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B) \qquad \forall A \in \mathcal{F};$$

убедитесь, что $S \ll \mathbb{P}$ и $\frac{dS}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} 1_B$.

Теорема Радона-Никодима

Пусть заданы $(\Omega, \mathcal{F})$ с мерой μ, причем или $\mu(\Omega) < +\infty$, или μ — мера Лебега на некотором борелевском подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема Радона-Никодима [без д-ва]. Если заряд S абсолютно непрерывен относительно μ, то найдется такая μ-измеримая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$, что функция f^- μ-суммируема и

$$S(A) = \int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{F},$$

то есть f — плотность заряда S относительно вероятности μ. При этом любые такие функции μ-почти всюду совпадают; f μ-почти всюду неотрицательна, если S — мера; f суммируема, если $|S|(\Omega)$ конечно.

Замечание. Можно было ввести понятие σ-конечной меры и сформулировать соответствующую теорему, но тогда надо было вводить и интеграл по такой мере.

Существование плотности

Следствие 5. Для вероятности η (на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$) следующие условия эквивалентны:

1. вероятность η абсолютно непрерывна относительно μ;
2. для некоторой μ-суммируемой $f : \Omega \to \mathbb{R}$ при всех $A \in \mathcal{F}$ выполнено $\eta(A) = \int_A f(\omega)\,\mu(d\omega)$;
3. для некоторой μ-суммируемой $f : \Omega \to \mathbb{R}$ при всех η-интегрируемых $h : \Omega \to \mathbb{R}$ выполнено
$$\int_\Omega h(\omega) f(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega h(\omega)\,\eta(d\omega).$$

При этом так полученная функция f почти всюду неотрицательна, единственна μ-почти всюду, при этом $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) = 1$.

Свойства плотности

Следствие 6. Для ξ следующие условия эквивалентны:

1. $\xi\#\mathbb{P}$ абсолютно непрерывна относительно меры λ;

1'. ξ абсолютно непрерывна с плотностью $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

2. для некоторой λ-суммируемой $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при всех $A \in \mathcal{B}$ $(\xi\#\mathbb{P})(A) = \int_A f_\xi(x)\,\lambda(dx)$;

2'. для некоторой λ-суммируемой $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при всех $y \in \mathbb{R}$ выполнено $F_\xi(y) = \int_{(-\infty,y]} f_\xi(x)\,\lambda(dx)$;

3. для некоторой λ-суммируемой $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при всех η-суммируемых $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) f_\xi(x)\,\lambda(d\omega) = \mathbb{E}h(\xi).$$

При этом любые так полученные функции f_ξ почти всюду совпадают, почти всюду неотрицательны и $\int_\Omega f_\xi(\omega)\,\mu(d\omega) = 1$.

Снова примеры

Пример 1. Пусть g — суммируемая случайная величина. Рассмотрим отображение $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, заданное правилом

$$S(A) = \int_A g(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{F},$$

тогда этот заряд (мера при $g \geq 0$) абсолютно непрерывен относительно $\mathbb{P}$, а g — плотность этого заряда.

Пример 2. Пусть также на $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ задана вероятностная мера $\mu_0 = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_0}$. Тогда плотность введенного выше заряда S относительно μ_0 равна (как $\mathcal{F}_0$-измеримая функция) константе, то есть $\mathbb{E}g$.

И снова примеры

Пример 3. Теперь для некоторой полной группы не более чем счетного числа событий $H_1, \ldots, H_n, \ldots$ рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{H} \triangleq \sigma(H_1, \ldots, H_n, \ldots)$ и определенную на этой σ-алгебре вероятностную меру $\mu_1 = \mathbb{P}|_{\mathcal{H}}$. Тогда плотность h введенного выше заряда S относительно μ_1 является $\mathcal{H}$-измеримой функцией, константой на каждом H_i, а именно

$$h|_{H_i} \triangleq \frac{\int_{H_i} g(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)}{\int_{H_i} \mathbb{P}(d\omega)} = \frac{\int_{H_i} g(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)}{\mathbb{P}(H_i)}.$$

В частности, для всякого множества $B \in \mathcal{F}$, для $g \triangleq 1_B$ имеем плотность f, заданную правилом:

$$h|_{H_i} \triangleq \frac{\int_{H_i \cap B} \mathbb{P}(d\omega)}{\int_{H_i} \mathbb{P}(d\omega)} = \mathbb{P}(B \mid H_i) = \mathbb{P}(B|\mathcal{H})|_{H_i}.$$

Собственно определение условного матожидания

Действительную $\mathcal{H}$-измеримую $\mathbb{P}$-интегрируемую случайную величину $h : \Omega \to \mathbb{R}$ будем называть (и обозначать $\mathbb{E}(g|\mathcal{H})$) условным математическим ожиданием действительной случайной величины g относительно $\mathcal{H}$, если имеет место

$$\int_H g(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_H h(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall H \in \mathcal{H}.$$

Условное матожидание индикаторной функции 1_A (для $A \in \mathcal{F}$) будем также называть условной вероятностью и обозначать как $\mathbb{P}(A|\mathcal{H})$.
Применяя теорему Радона–Никодима для заряда, введенного правилом $\mathcal{H} \ni H \mapsto \int_H \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$, получаем
Следствие 7. Если матожидание $\mathbb{E}|\xi|$ конечно, то существует и условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно σ-подалгебры $\mathcal{H}$. Более того, оно единственно с точностью до $\mathbb{P}$-почти всюду.

Те же примеры снова

Пример 1. $\mathbb{E}(g|\mathcal{F}) = g$.
Пример 2. Пусть $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$. Тогда $\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}g$.
Пример 3. Для полной группы не более чем счетного числа событий $H_1, \dots, H_n, \dots$ и $\mathcal{H} \triangleq \sigma(H_1, \dots, H_n, \dots)$ имеем $\mathcal{H}$- измеримую функцию

$$\mathbb{E}(g|\mathcal{H})|_{H_i} = \frac{\int_{H_i} g(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)}{\mathbb{P}(H_i)}.$$

В частности, для всякого множества $B \in \mathcal{F}$, для $g \triangleq 1_B$ имеем

$$\mathbb{P}(B\,|\mathcal{H})|_{H_i} \triangleq \mathbb{E}(1_B|\mathcal{H})|_{H_i} = \mathbb{P}(B\,|\,H_i).$$

Для не более чем счетного набора $B_i \in \mathcal{F}$, для $g \triangleq \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k 1_{B_k}$ имеем

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k 1_{B_k}|\mathcal{H}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \mathbb{P}(B_k\,|\,\mathcal{H}).$$