Теория вероятностей. Лекция одиннадцатая
Функции распределения и плотность

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

20.11.2018

Переход от дискретного случая к общему

- борелевские множества и мера Лебега
- случайные величины и измеримые отображения
- функции распределения
- абсолютно случайные величины и не только
- математическое ожидание как интеграл
- совместные функции распределения
- условное математическое ожидание как интеграл

Мы нашли подходящую σ-алгебру на $\mathbb{R}$, теперь мы умеем работать хотя бы с геометрической вероятностью. Мы дали определение случайной величине без каких-либо требований на мощность ее значений и нашли какой σ-алгебре она соответствует. Теперь надо научиться работать с такими объектами...

Повтор: два определения борелевских множеств

Определение. [очень умное, пользоваться им мы почти не будем]
Для топологического пространства (Ω, τ), где τ - совокупность всех открытых подмножеств множества Ω, под σ-алгеброй борелевских множеств понимается $\sigma(\tau)$,

$$\mathcal{B}_{\Omega} \stackrel{\triangle}{=} \sigma(\tau).$$

Определение. [рабочее]
Минимальную σ-алгебру, содержащую все n-мерные параллелепипеды $\{[a,b] \times \ldots \times [c,d] \subset \mathbb{R}^n\}$, называют борелевской σ-алгеброй над $\mathbb{R}^n$, а ее элементы — борелевскими множествами множества $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \stackrel{\triangle}{=} \sigma\{[a,b] \times \ldots \times [c,d] \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Повтор: эквивалентные определения случайных величин

Итак, задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определение. Случайной (скалярной) величиной ξ называется такая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, что для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$ выполнено

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \,|\, \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Определение. Случайной (скалярной) величиной ξ называется такая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, что для всех $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ выполнено

$$\xi^{-1}((a, b]) = \{\omega \,|\, a < \xi(\omega) \leq b\} \in \mathcal{F}.$$

Определение. Случайной (скалярной) величиной ξ называется такая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, что для всех $b \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\xi^{-1}((-\infty, b]) = \{\omega \,|\, \xi(\omega) \leq b\} \in \mathcal{F}.$$

Векторные случайные величины

Аналогично имеются три эквивалентных [с-но] определения для векторного случая:

Определение 1.1. Векторной случайной величиной $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ называется такая функция $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, что для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$ выполнено

$$\vec{\xi}^{-1}(B) = \{\omega \,|\, \vec{\xi}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Определение 1.2. Векторной случайной величиной $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ называется такая функция $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, что для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ выполнено

$$\vec{\xi}^{-1}(G) = \{\omega \,|\, \vec{\xi}(\omega) \in G\} \in \mathcal{F}.$$

Определение 1.3. Векторной случайной величиной $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ называется такая функция $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, что для всех $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\vec{\xi}^{-1}((-\infty, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_m]) = \{\omega \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, m\}\ \xi_i(\omega) \le b_i\} \in \mathcal{F}.$$

О случайных величинах [без д-ва]

Факты полезные для расшаривания сознания. Сильно позже они будут полезны и для доказательств...

Теорема Лузина. Пусть $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ограниченная случайная величина. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое множество A, что $\mathbb{P}(A) > 1 - \varepsilon$, и ξ непрерывна на A.

Теорема Егорова. Пусть случайные величины $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ таковы, что для всякого $\omega \in \Omega$ имеется предел $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое множество A со свойством $\mathbb{P}(A) > 1 - \varepsilon$, что ξ_n сходится к ξ равномерно на A.

Эти теоремы можно существенно обобщить, наделяя Ω достаточно хорошей топологией, но излишняя общность нам здесь уж точно не требуется...

Как создавать случайные величины [с-но]

Теорема 1. Пусть Ω снабжено топологией τ, и $\sigma(\tau) \subset \mathcal{F}$. Тогда всякое непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}$ является случайной величиной.

Теорема 2. Суперпозиция случайных величин измерима.

Следствие. Для любых скалярных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ и непрерывной функции $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ суперпозиция $s(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ также является n-мерной случайной величиной.

Следствие. Для случайных величин ξ_1, ξ_2 случайными величинами также являются $\min(\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \xi_2$, $|\xi_1|$, $-\xi_1$.

Следствие. Для ограниченных в совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ случайными величинами также являются $\inf(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $\sup(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $\liminf_{n\to\infty} \xi_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$.

Следствие. Пусть для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ их предел $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ существует и конечен для всякого $\omega \in \Omega$. Тогда ξ — случайная величина.

Общее определение измеримости

Даны измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{G})$. Пусть имеется некоторое отображение $f : \Omega \to \Omega'$. Тогда имеются и всевозможные его прообразы

$$f^{-1}(G) = \{\omega \mid f(\omega) \in G\} \ \forall G \in \mathcal{G},$$

и порожденная ими σ-алгебра

$$\sigma(f) = \sigma\{f^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{G}\}.$$

Определение 2. Говорят, что отображение f из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\Omega', \mathcal{G})$ — измеримо, если $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

Подумать: Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — борелевское (случайная величина) тогда и только тогда, когда f — измеримое отображение из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Подумать: предыдущий слайд верен с минимальными и очевидными уточнениями и для произвольных измеримых отображений между топологическими пространствами.

Замечания к тому же определению

Определение 2. Говорят, что отображение f из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\Omega', \mathcal{G})$ — измеримо, если $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

Терминологическое замечание 1. Обычно по умолчанию в разных книжках под измеримыми отображениями в $\mathbb{R}^n$ понимают или борелевские, или лебеговские отображения. У нас — борелевские.

Терминологическое замечание 2. Поскольку для числовых отображений алгебра образа — алгебра или лебеговских, или борелевских множеств — обычно уже задана, зачастую, для краткости, определяют $\mathcal{H}$-измеримые отображения $f : \Omega \to \mathbb{R}$ как измеримые отображения из $(\Omega, \mathcal{H})$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{H}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{F}$.

Теорема 3. [1,5 балла] Пусть задана случайная величина $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Случайная величина $g : \Omega \to \mathbb{R}$ является $\sigma(f)$-измеримой тогда и только тогда, когда для некоторой измеримой $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено $g(\omega) = h(f(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.

Концепция “почти всюду”

Пусть даны измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с некоторой мерой μ и измеримое пространство $(\Omega', \mathcal{G})$.

Определение 3. Говорят, что отображения $f, g : \Omega \to \Omega'$ равны “почти всюду” (“μ-почти всюду”, “почти наверняка”, “с вероятностью 1”), если

$$\mu\{\omega \in \Omega \,|\, f(\omega) \neq g(\omega)\} = 0.$$

Аналогично говорят о функции, определенной “почти всюду” (“μ-почти всюду”, “почти наверняка”, “на множестве полной меры”), о сходимости “почти всюду” и т.д.

Отметим, что когда мы будем говорить о случайных величинах, мы также будем их различать с точностью до множества нулевой меры; в частности, теперь мы можем не беспокоиться о дополнительном требовании к дискретным случайным величинам: $\mathbb{P}(H_i) > 0$.

Образ меры

Дадим конструкцию-определение еще раз.
Пусть имеются измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с некоторой мерой μ и измеримое пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$. Пусть $\xi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ измеримо.
Введем индуцированную меру (образ меры, push-forward) $\tilde{\mu} = \mu \circ \xi^{-1} = \xi \# \mu$:

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \mu(\xi^{-1}(\tilde{A})) \qquad \forall \tilde{A} \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

Таким образом, измеримые отображения, и только они, могут перенести меру с одного измеримого пространства на другое.

Замечание. Можно сделать еще хитрее. Если мы потребуем $\tilde{\mathcal{F}} \triangleq \sigma(\xi)$, то сразу гарантируем измеримость ξ, а значит и перенос меры на $\tilde{\Omega}$.

С другой стороны, в силу теоремы Каратеодори, для случайных величин нам не требуется восстанавливать меру на всех борелевских подмножествах множества. Можно взять любое семейство, их генерирующее.

Функция распределения

Пусть с нами снова вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определение 4. Функцией распределения (скалярной) случайной величины ξ называют отображение $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$, заданное по правилу:

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\omega \,|\, \xi(\omega) \leq x\}.$$

Терминологическое замечание 3. Общее определение полностью повторяет то же определение для дискретных случайных величин. Как там уже было отмечено, в разных книжках используют разный знак в определении: иногда "$\leq$", иногда "$<$". Выбор знака определяет и формулировки, впрочем пока переделать их несложно...

Функция распределения задает всю вероятность...

Теперь при любых $x, y \in \mathbb{R}$, $(x > y)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\omega \,|\, \xi(\omega) \le x\} &= F_\xi(x), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, \xi(\omega) > x\} &= 1 - F_\xi(x), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, \xi(\omega) < x\} &= F_\xi(x-0), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, \xi(\omega) = x\} &= F_\xi(x) - F_\xi(x-0), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, \xi(\omega) \ge x\} &= 1 - F_\xi(x-0), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, y \le \xi(\omega) \le x\} &= F_\xi(x) - F_\xi(y-0), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, y < \xi(\omega) \le x\} &= F_\xi(x) - F_\xi(y), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, y \le \xi(\omega) < x\} &= F_\xi(x-0) - F_\xi(y-0), \\
\mathbb{P}\{\omega \,|\, y < \xi(\omega) < x\} &= F_\xi(x-0) - F_\xi(y).
\end{aligned}
$$

Свойства функции распределения [с-но]

Для всякой скалярной случайной величины ξ

1. F_ξ не убывает;
2. $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$;
3. $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$;
4. для любого $y \in \mathbb{R}$ существуют односторонние пределы

$$F_\xi(y+0) = \lim_{x\to y+0} F_\xi(x), \quad F_\xi(y-0) = \lim_{x\to y-0} F_\xi(x);$$

5. функция F_ξ непрерывна справа: для любого $y \in \mathbb{R}$ $F_\xi(y+0) = F_\xi(y)$;
6. F_ξ имеет не более чем счетное число точек разрыва.

Свойства сии доказаны где угодно (в любом учебнике выше уровня ПТУ) и сводятся к стандартному матану первого семестра.

Теорема Колмогорова

Теорема 4. Для всякой функции $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей свойствам 1,2,3,5, найдутся такие измеримое пространство Ω и случайная величина $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$, что $F=F_\xi$.

Эскиз доказательства. Принимается $\Omega=\mathbb{R},\mathcal{F}=\mathcal{B}$. Для всякого непустого интервала $(a,b]$ принимается $\mathbb{P}((a,b])=F(b)-F(a)$. Остается доказать, что это отображение имеет счетно-аддитивное продолжение на $\mathcal{B}$, то есть задает вероятность. В силу теоремы Каратеодори для этого достаточно доказать, что оно имеет счетно-аддитивное продолжение на алгебре $\mathcal{A}$ всевозможных не более чем конечных объединений промежутков вида $(a,b]$, поскольку аддитивное продолжение оно заведомо имеет, то нужно лишь показать его счетно-адитивность, то есть доказать

$$\mathbb{P}(\cup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,b_i])=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}((a_i,b_i])$$

в случае, если $\cup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,b_i]=(a,b]$, и все промежутки $(a_i,b_i]$ попарно не пересекаются.

Теорема Колмогорова. Собственно доказательство

Для доказательства “$\geq$” достаточно перейти к пределу в очевидном

$$\mathbb{P}((a,b]) = \mathbb{P}(\cup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,b_i]) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((a_i,b_i]).$$

Для доказательства “$\leq$” заметим, что можно найти конечные $a^\varepsilon > a$ и $b_i^\varepsilon > b_i$ так, что $\mathbb{P}((a^\varepsilon,b]) \geq \mathbb{P}((a,b]) - \varepsilon$, $\mathbb{P}((a_i,b_i^\varepsilon)) \leq \mathbb{P}((a_i,b_i]) + \varepsilon 2^{-i}$. Теперь $(a^\varepsilon,b] \subset \cup_{i\in\mathbb{N}}(a_i,b_i^\varepsilon)$, из этого открытого покрытия найдется конечное подпокрытие $(a^\varepsilon,b] \subset \cup_{k=1}^{n}(a_{i_k},b_{i_k}^\varepsilon)$. Тогда

$$\mathbb{P}((a,b]) - \varepsilon \leq \mathbb{P}((a^\varepsilon,b]) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((a_{i_k},b_{i_k}^\varepsilon)) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((a_{i_k},b_{i_k})).$$

Переходя к пределу при $n \uparrow \infty, \varepsilon \downarrow 0$, получаем требуемое.
Подумать: где использовалась монотонность? А понятие “компакт”?
Подумать: а где использовались свойства 2,3?

Важный класс:
абсолютно непрерывные случайные величины

Определение 4. Действительная случайная величина ξ называется абсолютно непрерывной, если найдется такая измеримая борелевская функция $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (называемая плотностью), что

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)\,dx \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}(a < b).$$

Легко проверить, что при этом

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Терминологическое замечание 4. Как интегрировать борелевскую функцию мы пока не обсуждаем, при работе с плотностями фактически лишь предполагая, что все привычные свойства интегралов выполнены, тем более, что все рассматриваемые нами плотности можно считать кусочно-непрерывными.

Вопросы о плотности

Подумать: верно ли, что всякая абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения?

Подумать: верно ли, что плотность всегда неотрицательна?

Подумать: верно ли, что плотность однозначно восстанавливается по функции распределения абсолютно непрерывной случайной величины?

Подумать: верно ли, что

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}?$$

Подумать: верно ли, что если случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения, то она абсолютно непрерывна?

Пример плотности

$\xi \in U[0,1]$: ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$, если

$$F_\xi(x) = F_{U[0,1]}(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \in [0,1]; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Подумать: можно ли было принять $x \le 0, x \in (0,1), x \ge 1$?

Теперь,

$$f_\xi(x) = f_{U[0,1]}(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x \in [0,1]; \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Подумать: можно ли было взять другую функцию в качестве f_ξ?

Подумать: найдите $F'_\xi(0)$.

Свойства плотности [пока без д-ва]

Для всякой абсолютно непрерывной случайной величины ξ

1. плотность f_ξ определена и единственна с точностью до множества меры “ноль”;
2. плотность f_ξ неотрицательна с точностью до множества меры “ноль”;
3. если плотность f_ξ непрерывна в точке $x \in \mathbb{R}$, то $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$;
4. [0,4 балла] плотность f_ξ всегда можно выбрать так, чтобы она была непрерывной всюду, кроме, быть может, множества любой наперед заданной положительной меры Лебега.

Формула замены переменных: доказательство

Для абсолютно непрерывной сл.в. ξ и строго возрастающей дифференцируемой функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ рассмотрим сл.в. $\eta = g(\xi)$. Она также абсолютно непрерывна: действительно, для всех $b'\in\mathbb{R}$ примем $b = g^{-1}(b')$, теперь, поскольку g^{-1} не убывает, имеем

$$\begin{aligned}
F_\eta(b') &= F_{g(\xi)}(g(b)) = \mathbb{P}\{\omega | g(\xi(\omega)) \le g(b)\} \\
&= \mathbb{P}\{\omega | \xi(\omega) \le b\} = F_\xi(b) \\
&= \int_{-\infty}^{b} f_\xi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{g^{-1}(b')} f_\xi(g^{-1}(x))\,dg^{-1}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{b'} \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}\,dx.
\end{aligned}$$

Итак, в случае строго монотонных функций g получены формулы:

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|},\quad f_{g(\xi)}(g(y)) = \frac{f_\xi(y)}{|g'(y)|}.$$

Формула замены переменных: примеры и вопросы

Итак, для строго монотонных функций g плотность преобразуется по правилу:

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|}, \; f_{g(\xi)}(g(y)) = \frac{f_\xi(y)}{|g'(y)|}.$$

В частности,

$$f_{a\xi+b}(x) = \frac{f_\xi(\frac{x-b}{a})}{|a|}, \quad f_{\xi^2}(x^2) = \frac{f_\xi(x)}{|2x|} + \frac{f_\xi(-x)}{|2x|} \qquad \forall a, b, x \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Подумать: откуда взялся модуль?

Подумать: где именно применялась строгая монотонность?

Подумать: привести пример монотонной функции g, для которой $g(\xi)$ заведомо не имеет плотности.

Подумать: можно ли потребовать строгую монотонность лишь на отрезке?

Скалярные характеристики случайных величин

Определения следующих характеристик в общем случае те же, что и в дискретном случае:

Медианой случайной величины ξ называют любое число μ, для которого $\mathbb{P}(\xi \le \mu) \ge 1/2$ и $\mathbb{P}(\xi \ge \mu) \ge 1/2$.

Квантилью порядка p, $p \in (0,1)$, случайной величины ξ называют любое число x, для которого $\mathbb{P}(\xi \le x) \ge p$ и $\mathbb{P}(\xi \ge x) \ge 1 - p$.

Подумать: верно ли, что в случае абсолютно непрерывной случайной величины всякая квантиль порядка p восстанавливается однозначно равенством: $F_\xi(x_p) = p$.

Пример. Для равномерного на $[0,1]$ распределения имеем: $\mu = \frac{1}{2}$.

Мода и энтропия в абсолютно непрерывном случае

Модой распределения с плотностью f_ξ называют любую точку глобального максимума плотности f_ξ, иногда вводят понятие локальной моды. Распределение называется **унимодальным**, если мода, даже с учетом локальных, одна.

Дифференциальной энтропией распределения с плотностью f_ξ называют значение выражения

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\log\big(f_\xi(x)\big)\,dx.$$

Пример. У равномерного на $[0,1]$ распределения любая точка на интервале $(0,1)$ — мода, а дифференциальная энтропия равна нулю.
Предупреждение: свойства и того, и другого понятия схожи с их аналогами для дискретных случайных величин, но смешивать их не нужно. Например, эта энтропия может быть отрицательной, принимать значение $\pm\infty$, а может и не существовать.

Матожидание в абсолютно непрерывном случае

Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины ξ можно считать по формуле:

$$\mathbb{E}\xi \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx,$$

если этот интеграл корректен и сходится, в противном случае — математическое ожидание $\mathbb{E}\xi$ не существует.

Если значения случайной величины ξ лежат в отрезке $[a, b]$, то

$$\mathbb{E}\xi = \int_a^b x f_\xi(x)\, dx,$$

при этом математическое ожидание заведомо существует.

Подумать: даже если ξ ограничена, интеграл в $\mathbb{E}\xi$ может оказаться несобственным (почему?), тем не менее он заведомо сходится.

Все отмеченные ранее свойства матожидания остаются верными.

Дисперсия в абсолютно непрерывном случае

Дисперсию абсолютно непрерывной случайной величины ξ можно считать по любой из формул:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\xi \;&\triangleq\; \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}\xi)^2 f_\xi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

Подумать: чтобы все указанные формулы давали одно и то же, достаточно проверить

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx.$$

Подумать: [1 балл] хотя бы для гладких $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ докажите

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)\,dx.$$

Переход от дискретного случая к общему

- борелевские множества и мера Лебега
- случайные величины и измеримые отображения
- функции распределения
- абсолютно случайные величины и не только
- математическое ожидание как интеграл
- совместные функции распределения
- условное математическое ожидание как интеграл

Мы нашли подходящие определения для множеств и отображений, написали часть нужных нам формул для еще одного хорошего случая (абсолютно непрерывные случайные величины), но и в этом случае нам требуется уметь задавать интеграл не только от непрерывных функций. Продолжаем учиться работать с такими объектами...