Теория вероятностей. Лекция двенадцатая
Примеры распределений

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

27.11.2018

Переход от дискретного случая к общему

- борелевские множества и мера Лебега
- случайные величины и измеримые отображения
- функции распределения
- абсолютно случайные величины и не только
- математическое ожидание как интеграл
- совместные функции распределения
- условное математическое ожидание как интеграл

Мы нашли подходящие определения для множеств и отображений, написали часть нужных нам формул для еще одного хорошего случая (абсолютно непрерывные случайные величины), но и в этом случае нам требуется уметь задавать интеграл не только от непрерывных функций. Продолжаем учиться работать с такими объектами...

Равномерное распределение и его характеристики

$\xi \in U[a,b]$: пусть ξ равномерно распределена на отрезке $[a,b](a<b)$, тогда

$$F_\xi(x) = F_{U[a,b]}(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in (a,b]; \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

$$f_\xi(x) = f_{U[a,b]}(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in (a,b]; \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\mu = \mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Экспоненциальное распределение

$\xi \in Exp(\lambda)$: пусть $\lambda > 0$, а ξ задается правилами:

$$F_\xi(x) = F_{Exp(\lambda)}(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

$$f_\xi(x) = f_{Exp(\lambda)}(x) \triangleq \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Подумать: именно это распределение обладает "марковостью": нет истории, нет старения.
Это распределение — базовое в теории надежности и в цепях Маркова.
Моделировать его проще как функцию от равномерного: $\ln U[0, 1/\lambda]$.
Подумать: и при чем здесь логарифм...

Экспоненциальное распределение: числовые характеристики

Легко проверить, что $\mu = 0$; интегрируя по частям, получаем также

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x d(-e^{-\lambda x}) \\
&= x(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x})\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = 1/\lambda, \\
\mathbb{E}\xi^2 &= \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x^2 d(-e^{-\lambda x}) \\
&= x^2(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x})\cdot 2x\,dx \\
&= \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx = 2\mathbb{E}\xi/\lambda = 2/\lambda^2, \\
\mathbb{D}\xi &= 1/\lambda^2.
\end{aligned}$$

Стандартное нормальное распределение (распределение Лапласа)

$\xi \in N(0,1)$: стандартное нормальное распределение задается правилами:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Хотя функция распределения не выражается в элементарных функциях, можно проверить, что $F_\xi(+\infty) = 1$:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\phi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-s} ds = 2\pi. \end{aligned}$$

Стандартное нормальное распределение. Матожидание и дисперсия

Легко проверить, из соображений симметрии например, что $\mu = \mathbb{E}\xi = 0$.
Для подсчета дисперсии снова можно интегрировать по частям:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2/2}\, d(x^2/2) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x\, d(e^{-x^2/2}) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-x^2/2} \Big|_0^{\infty} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1.
\end{aligned}$$

Нормальное распределение

$\xi \in N(m, \sigma^2)$: ξ распределена нормально со средним $m \in \mathbb{R}$ и дисперсией $\sigma^2 > 0$, если задается плотностью:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

При этом, в силу $\frac{\xi - m}{\sigma} \in N(0,1)$, легко видеть:

$$\mu = \mathbb{E}\xi = m, \;\; \mathbb{D}\xi = \sigma^2.$$

В рамках изучения нормального распределения возникают также распределения Фишера, Стьюдента, хи-квадрат (все любимы статистиками), распределения Максвелла и Рэлея (физикам потребовались), распределение Коши (как частное двух нормальных).

Распределение Коши

$\xi \in Cauchy(m, b)$: для $b > 0, m \in \mathbb{R}$ ξ задается правилами:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b^2}{b^2 + (x-m)^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-m}{b}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

При этом, $\mu = m$, матожидание $\mathbb{E}\xi$ не определено, дисперсия тоже, впрочем, про дисперсию иногда пишут $\mathbb{D}\xi = \infty$...
Промоделировать такое распределение проще как $m + b\,\mathrm{tg}\,U[-\pi/2, \pi/2]$.

Простая задачка

Полуэкт Полуэктович пьет чашечку кофе ровно час. Ровно в десять часов кофейня закрывается. Найти среднее время выхода Полуэкта Полуэктовича из кофейни (с кофе или без кофе, как получится), если время прихода Полуэкта Полуэктовича в кофейню распределено равномерно между

а) восемью и девятью часами;
б) девятью и десятью часами;
в) восемью и десятью часами.

Ответ: а) 9 часов 30 минут;
б) 10 часов;
в) 9 часов 45 минут.

Подумать: в случае в) случайная величина не является ни дискретной, ни абсолютно непрерывной.

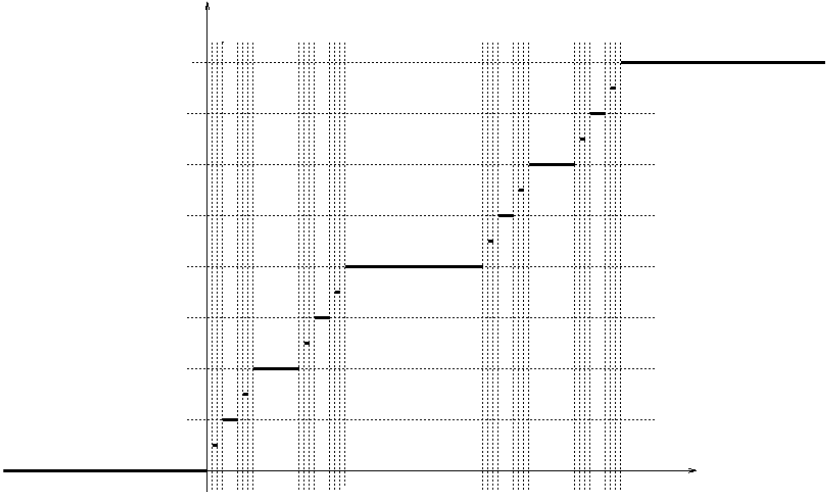
Подумать: здесь случайная величина является суммой дискретной и абсолютно непрерывной.

Случай похуже

Датчик случайных чисел генерирует равномерно распределенное от 0 до 1 число и записывает его в троичной системе счисления в виде бесконечной строки. Беспредельщик-(при)колист Петя заметил, что в сгенерированной так строке нет ни одной единицы.
а) Найдите априорную вероятность такой ситуации.
б) Найдите матожидание этого числа.
в) Нарисуйте график функции распределения.

Подумать: здесь случайная величина ξ сингулярна, то есть не содержит ни дискретной, ни абсолютно непрерывной части. У сингулярной меры $\xi\#\mathbb{P}$ вероятность каждой точки равна нулю (как и в абсолютно непрерывном случае), но есть множество нулевой меры Лебега, вероятность которого равна единице (как и в дискретном случае). Попросту говоря, функция распределения непрерывна, возрастает, но почти всюду её производная равна нулю.

Канторова лестница наглядно



Конструктор мер на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

Любая непрерывная справа монотонно неубывающая ограниченная функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задает меру μ на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ правилом:

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Подумать: проверьте с помощью теоремы Каратеодори, что такое соотношение задает меру однозначно.
Подумать: докажите сие утверждение, воспользовавшись доказательством теоремы Колмогорова.
В частности, любая случайная величина задает меру (а на самом деле вероятность) на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ правилом:

$$\mu((a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Подумать: почему именно вероятность?
Подумать: убедитесь, что $\mu = \xi \# \mathbb{P}$.

Математическое ожидание. Общий случай

Математическим ожиданием $\mathbb{E}\xi$ случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ назовем значение выражения

$$\int_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega),$$

если оно существует и конечно.

Подумать: сколько пар мы будем разбираться в формуле выше...

Терминологическое замечание. Законно было написать и

$$\int_{\mathbb{R}} x\, (\xi \# \mathbb{P})(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_{\xi},$$

формула слева — современная запись, формула справа использует интеграл Стилтьеса (случай частный, но легко обосновывающийся), требует знания лишь качественного курса матана, почему и популярна в старых советских учебниках.

ИНТЕГРАЛ

Итак, распределения — это больше чем просто дискретные, или просто абсолютно непрерывные распределения. Ближайшая задача — понять, что такое математическое ожидание, а заодно ввести интегрирование в общем виде...

- борелевские множества и мера Лебега
- случайные величины и измеримые отображения
- функции распределения
- абсолютно случайные величины и не только
- математическое ожидание как интеграл
- совместные функции распределения
- условное математическое ожидание как интеграл

Интеграл. Wish-list

Пусть пока $\int$ — лишь некий абстрактный значок, а f, g — не менее абстрактные функции.

X1 $\int f + \int g = \int (f+g)$;

X2 $\int f - \int g = \int (f-g)$;

X3 $c \int f = \int (cf)$ для всех $c \in \mathbb{R}$;

X4 $\int f \leq \int g$ в случае $f \leq g$;

X5 $\int_A f + \int_B f = \int_{A \cup B} f$ для непересекающихся A, B;

X6 $\int 1_A$ должен быть определен.

Подумать: а вдруг операции не определены?

Подумать: проверьте, что $\int 0 = 0$. А кто сказал, что есть ноль?

Интеграл. Wish-list поскромнее

Видимо, $\int$ — линейное отображение в линейное пространство, а абстрактные функции f, g — также отображения в это линейное пространство.

Теперь достаточно обеспечить

X1 $\int f + \int g = \int (f+g)$;

X3 $c\int f = \int (cf)$ для всех $c \in \mathbb{R}$;

X4' $\int f \geq 0$ в случае $f \geq 0$;

X6 $\int 1_A$ должен быть определен;

и принять по определению: $\int_A f = \int 1_A f$.

Теперь мы получим и

X2 $\int f - \int g = \int (f-g)$;

X4 $\int f \leq \int g$ в случае $f \leq g$;

X5 $\int_A f + \int_B f = \int_{A\cup B} f$ для непересекающихся A, B.

Интеграл. Этап постановки

1. $\int$ — нечто линейное, монотонное, отображает в линейное упорядоченное пространство, а абстрактные функции f, g — также отображения в некоторое линейное упорядоченное пространство.
OK_1. Пусть у нас все эти отображения в $\mathbb{R}$.
Подумать: А как свести к этому случаю, например, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^m$?
2. Из-за парадокса Банаха-Тарского нельзя рассматривать всевозможные A, а значит нельзя подставить и любые f, g.
OK_2. Пусть у нас будут только борелевские множества и измеримые отображения. Следовательно, мы должны задать некоторое измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$.
3. Интеграл должен зависеть от распределения, например зависеть от выбора меры (или вероятности) на Ω, плотности на $\mathbb{R}$ и т.п.
OK_3. Пусть у нас также задана мера μ на $(\Omega, \mathcal{F})$, и $\mu(A) = \int 1_A$.
4. Вспоминая про плотности, требуем, чтобы изменение функции на множестве нулевой меры не изменяло интеграл.

Обходим неизмеримость, что получилось

Дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с мерой μ.
Вместо $\int f$ пишем $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega)$.
Требуем по определению:

$\int_\Omega 1_A(\omega)\,\mu(d\omega) = \mu(A)$ для всех измеримых $A \in \mathcal{F}$;
$\int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega 1_A(\omega) f(\omega)\,\mu(d\omega)$;
$\int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) = 0$ в случае $\mu(A) = 0$.

Осталось обеспечить

X1 $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) + \int_\Omega g(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega (f(\omega) + g(\omega))\,\mu(d\omega)$ для всех измеримых $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$;

X3 $c \int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega c f(\omega)\,\mu(d\omega)$ для всех $c \in \mathbb{R}$ и измеримой функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$;

X4'' $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) \geq 0$ для неотрицательных измеримых f.

Этап постановки. Проблемы с бесконечностью

5. Значение интеграла может оказаться бесконечным.
Например, $\lambda(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}}(x)\,\lambda(dx) = +\infty$.
OK_5. Разрешим это значение, также как разрешено $+\infty$ для счетно-аддитивной функции.
6. Может возникнуть неопределенность $\infty - \infty$. Например,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(dx) - \int_{[0,\infty)} \lambda(dx) = +\infty - \infty.$$

Терминологическое замечание. В том числе и по этой причине, в некоторых книгах для интеграла признают только конечные значения. Впрочем, для матожидания мы сделали также.
OK_6. Ну тогда не все измеримые функции будут иметь интеграл... Но пусть он будет у всех неотрицательных измеримых.

Измеримость и суммируемость, еще до интеграла

Введем $f^+ \triangleq \max\{f,0\}$, $f^- \triangleq \min\{f,0\}$ для всякой скалярной функции f. Теперь, $f \equiv f^+ + f^-$, $|f| \equiv f^+ - f^-$.

Измеримую функцию f назовем μ-суммируемой, если $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega)$ существует и конечен.
Измеримую функцию f назовем μ-интегрируемой, если интегралы $\int_\Omega f^+(\omega)\,\mu(d\omega)$, $\int_\Omega f^-(\omega)\,\mu(d\omega)$ существуют, и конечен хотя бы один из них.

Терминологическое замечание. Аккуратно проверяйте слова “интегрируемость” и “суммируемость” в книжках. Например, в западной литературе до последнего времени понятия “суммируемости” не было, а “измеримость” вводили как попало...

Подумать: очевидно, что из μ-суммируемости $|f|$ следует ее μ-интегрируемость. Гораздо интереснее, что из μ-суммируемости $|f|$ следует μ-интегрируемость f. Мы доказали свойство 8^0 матожидания, еще не введя общее определение!!

Обходим бесконечность, что получилось

Дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с мерой μ.
Требуем по определению:

$\int_\Omega 1_A(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq \mu(A)$ для всех измеримых $A \in \mathcal{F}$;

$\int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq \int_\Omega 1_A(\omega) f(\omega)\,\mu(d\omega)$;

$\int_A f(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq 0$ в случае $\mu(A) = 0$;

$\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) \triangleq \int_\Omega f^+(\omega)\,\mu(d\omega) - \int_\Omega (-f^-)(\omega)\,\mu(d\omega)$ для всех измеримых f, для которых $f^- \not\equiv 0$, и интегралы справа не равны одновременно $+\infty$.

Осталось задать $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega)$ для неотрицательных измеримых функций f и обеспечить линейность и монотонность, то есть для всех μ-интегрируемых неотрицательных $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ проверить:

X1 $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) + \int_\Omega g(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega (f(\omega) + g(\omega))\,\mu(d\omega)$;

X3 $c \int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega c f(\omega)\,\mu(d\omega)$ для всех $c > 0$;

X4'' $\int_\Omega f(\omega)\,\mu(d\omega) \geq 0$.

Интеграл как абстракция. Теорема Рисса [без д-ва]

Пусть Ω — метрический компакт, $\mathcal{B}$ — его борелевская σ-алгебра, $C(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Для всякого непрерывного линейного функционала I над $C(\Omega)$ со свойством $\xi\geq 0\Rightarrow I\,\xi\geq 0$ найдется единственная мера μ над $(\Omega,\mathcal{B})$ со свойством

$$I\,\xi=\int_\Omega \xi(\omega)\,\mu(d\omega)\qquad \forall\xi\in C(\Omega).$$

Замечание. Если дополнительно потребовать $I1=1$, то получим вероятностную меру.

Замечание. Если свойство неотрицательности ($f\geq 0\Rightarrow I\,f\geq 0$) убрать, то слово "мера" надо заменить на слово "заряд".

Интеграл как абстракция. Теорема Даниэля [без д-ва]

Пусть имеется векторное пространство $\mathcal{S}$ функций $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, содержащее константы (в частности содержащее 1) и замкнутое относительно операции $\sup$. Пусть имеется неотрицательный линейный функционал I над $\mathcal{S}$, для которого $I\,1 = 1$. Тогда для существования на $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}))$ вероятности μ со свойством: каждая $\xi \in \mathcal{S}$ μ-интегрируема, и

$$I\,\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,\mu(d\omega) \qquad \forall \xi \in \mathcal{S},$$

необходимо и достаточно, чтобы для всякой убывающей к нулю последовательности $\xi_n \in \mathcal{S}$ было выполнено $\lim_{n\to\infty} I\,\xi_n = 0$.

Более того, обладающая таким свойством мера — единственна.

Подумать: получите в качестве следствия этой теоремы теорему Каратеодори.