Теория вероятностей. Лекция двадцать девятая
Задача об оптимальной остановке

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

27.05.2019

Что разобрали:

- Марковские цепи с дискретным временем
- Марковские цепи с непрерывным временем
- Фильтрация и моменты остановки
- Мартингалы
- Задача об оптимальной остановке

Фильтрация, моменты остановки, мартингалы

Пусть время дискретно $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$, задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, неубывающая последовательность $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ подалгебр алгебры $\mathcal{F}$ называется фильтрацией.

Случайный процесс $(X_t)_{t\in T}$ согласован с $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, если каждый X_t $\mathcal{F}_t$-измерим.

$(X_t)_{t\in T}$ — мартингал при $X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ для $s \le t$,

— субмартингал при $X_s \le \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ для $s \le t$,

— супермартингал при $X_s \ge \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ для $s \le t$.

Случайная величина $\tau : \Omega \to T$ называется моментом остановки, если $\{\tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех t.

Задача об оптимальной остановке

Пусть для каждого момента времени $n \in \mathcal{N} \triangleq \{0, 1, \dots, N\}$ задана $\mathcal{F}_n$-измеримая случайная величина $f_n : \Omega \to [0, +\infty)$. Пусть $\mathfrak{W}_n$ обозначает семейство моментов остановки, принимающих значения из $\{n, \dots, N\}$. Требуется найти

$$V_n \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{W}_0} \mathbb{E} f_\tau, \quad \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{W}_0} \mathbb{E}(f_\tau | \mathcal{F}_0).$$

Пусть

$$v_N \triangleq f_N, \quad v_n \triangleq \max\{f_n, \mathbb{E}(v_{n+1} | \mathcal{F}_n)\}, \tau_n \triangleq \min\{k \in \overline{n, N} : v_k = f_k\}.$$

Теорема об оптимальной остановке.

1. моменты остановки τ_n оптимальны в классе $\mathfrak{W}_n$: $\mathbb{E} f_{\tau_n} = V_n$;
2. "стохастические цены" совпадают с v_n, т.е. $\operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{W}_n} \mathbb{E}(f_\tau | \mathcal{F}_n) = v_n$.

Доказательство теоремы: $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1}) \leq v_{k-1}$ $\mathbb{P}$-п.н

Если $n = N$, то $v_N = f_N$, и все доказано. Пусть теперь теорема доказана для $n = N, N-1, \ldots, k$. Докажем её для $n = k-1$. Пусть $\tau \in \mathfrak{M}_{k-1}$ и $A \in \mathcal{F}_{k-1}$. Положим $\bar\tau \triangleq \max\{\tau, k\}$. Заметим, что $\bar\tau \in \mathfrak{M}_k$. Также отметим, что событие $\{\tau \geq k\}$ лежит в $\mathcal{F}_{k-1}$.
Имеем, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_A f_\tau) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\geq k\}} f_\tau] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\geq k\}} \mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\geq k\}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_{\bar\tau}|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&\leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k-1\}} f_\tau] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\geq k\}} \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&\leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_A v_{k-1}).
\end{aligned}$$

Это означает, что $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1}) \leq v_{k-1}$ для всех $\tau \in \mathfrak{M}_n$.

Доказательство теоремы: $\mathbb{E}(f_{\tau_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}) = v_{k-1}$ $\mathbb{P}$-п.н.

Заметим, что на множестве $\{\tau_{k-1} \geq k\}$ по предположению индукции $\tau_{k-1} = \tau_k$ и $\mathbb{E}(f_{\tau_k}|\mathcal{F}_k) = v_k$ $\mathbb{P}$-п.н.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_A f_{\tau_{k-1}}) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geq k\}} f_{\tau_{k-1}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geq k\}} \mathbb{E}(f_{\tau_k}|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}=k-1\}} f_{k-1}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_{k-1}\geq k\}} \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A v_{k-1}).
\end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу $v_{k-1} = \max\{f_{k-1}, \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})\}$ и равенств $v_{k-1} = f_{k-1}$ при $\tau_{k-1} = k-1$ и $v_{k-1} = \mathbb{E}(v_k|\mathcal{F}_{k-1})$ при $\tau_{k-1} \geq k$. Тем самым показано, что

$$\mathbb{E}(f_{\tau_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}) = v_{k-1} \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

Поскольку для всех моментов остановки τ выполнено $\mathbb{E}(f_\tau|\mathcal{F}_{k-1}) \leq v_{k-1}$ п.в., теорема доказана.

Банальные следствия из теоремы

Для

$$v_N \triangleq f_N, \quad v_n \triangleq \max\{f_n, \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)\}, \tau_n \triangleq \min\{k \in \overline{n, N} : v_k = f_k\}$$

также выполнены:

1. $v_n \geq f_n$, то есть v — мажоранта для f;

Банальные следствия из теоремы

Для

$$v_N \triangleq f_N, \quad v_n \triangleq \max\{f_n, \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)\}, \tau_n \triangleq \min\{k \in \overline{n, N} : v_k = f_k\}$$

также выполнены:

1. $v_n \geq f_n$, то есть v — мажоранта для f;
2. $v_n \geq \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, т.е. v_n — супермартингал;

Банальные следствия из теоремы

Для

$$v_N \triangleq f_N, \quad v_n \triangleq \max\{f_n, \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)\}, \tau_n \triangleq \min\{k \in \overline{n,N} : v_k = f_k\}$$

также выполнены:

1. $v_n \geq f_n$, то есть v — мажоранта для f;
2. $v_n \geq \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, т.е. v_n — супермартингал;

$$v_n \geq \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

3. v — наименьшая супермартингальная мажоранта для f, то есть наименьшая последовательность, обладающая предыдущими двумя свойствами.

Итак, v_n — наименьшее решение вариационного неравенства:

$$\gamma_n \geq \max\{f_n, \mathbb{E}(\gamma_{n+1}|\mathcal{F}_n)\}, \quad \gamma_n = f_n.$$

Введем $D_n \triangleq \{\omega \,|\, v_n(\omega) = \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)\}$. Теперь,

$$D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_N = \Omega$$

и оптимальным моментом остановки станет

Введем $D_n \stackrel{\triangle}{=} \{\omega \,|\, v_n(\omega) = \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)\}$. Теперь,

$$D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_N = \Omega$$

и оптимальным моментом остановки станет $\tau(\omega) = \min\{n \,|\, \omega \in D_n\}$.
Если f_n — супермартингал, тогда оптимален $\tau =$

Введем $D_n \triangleq \{\omega \,|\, v_n(\omega) = \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)\}$. Теперь,

$$D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_N = \Omega$$

и оптимальным моментом остановки станет $\tau(\omega) = \min\{n \,|\, \omega \in D_n\}$.
Если f_n — супермартингал, тогда оптимален $\tau = 0$.
Если f_n — субмартингал, тогда оптимален $\tau =$

Введем $D_n \triangleq \{\omega \,|\, v_n(\omega) = \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)\}$. Теперь,

$$D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_N = \Omega$$

и оптимальным моментом остановки станет $\tau(\omega) = \min\{n \,|\, \omega \in D_n\}$.
Если f_n — супермартингал, тогда оптимален $\tau = 0$.
Если f_n — субмартингал, тогда оптимален $\tau = N$.
Если f_n — мартингал, тогда оптимален

Введем $D_n \triangleq \{\omega \,|\, v_n(\omega) = \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)\}$. Теперь,

$$D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_N = \Omega$$

и оптимальным моментом остановки станет $\tau(\omega) = \min\{n \,|\, \omega \in D_n\}$.
Если f_n — супермартингал, тогда оптимален $\tau = 0$.
Если f_n — субмартингал, тогда оптимален $\tau = N$.
Если f_n — мартингал, тогда оптимален любой момент остановки.

Введем $D_n \triangleq \{\omega \,|\, v_n(\omega) = \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)\}$. Теперь,

$$D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_N = \Omega$$

и оптимальным моментом остановки станет $\tau(\omega) = \min\{n \,|\, \omega \in D_n\}$.
Если f_n — супермартингал, тогда оптимален $\tau = 0$.
Если f_n — субмартингал, тогда оптимален $\tau = N$.
Если f_n — мартингал, тогда оптимален любой момент остановки.
Пусть $f_n = f(X_n)$,

Введем $D_n \triangleq \{\omega \,|\, v_n(\omega) = \mathbb{E}(v_{n+1}|\mathcal{F}_n)(\omega)\}$. Теперь,

$$D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_N = \Omega$$

и оптимальным моментом остановки станет $\tau(\omega) = \min\{n \,|\, \omega \in D_n\}$.
Если f_n — супермартингал, тогда оптимален $\tau = 0$.
Если f_n — субмартингал, тогда оптимален $\tau = N$.
Если f_n — мартингал, тогда оптимален любой момент остановки.
Пусть $f_n = f(X_n)$,
и зависимость X_n от $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ сводится к X_{n-1}? Что это даст для алгебр $\mathcal{F}_n$, для множеств D_n...

Стационарная марковская цепь с дискретным временем. Общий случай

Пусть Ω состоит из всевозможных последовательностей $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_n — произвольные элементы некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$,

Стационарная марковская цепь с дискретным временем. Общий случай

Пусть Ω состоит из всевозможных последовательностей $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где x_n — произвольные элементы некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$,
$X_n(\omega)$ — n-я координата у ω,

Стационарная марковская цепь с дискретным временем. Общий случай

Пусть Ω состоит из всевозможных последовательностей $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_n — произвольные элементы некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$,
$X_n(\omega)$ — n-я координата у ω, а $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Тогда $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стационарная марковская цепь, если

Стационарная марковская цепь с дискретным временем. Общий случай

Пусть Ω состоит из всевозможных последовательностей $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где x_n — произвольные элементы некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$,
$X_n(\omega)$ — n-я координата у ω, а $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Тогда $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стационарная марковская цепь, если задана переходная вероятность $P(dy; X_n = x)$.
Подумать: переходная вероятность требует чуть больше, чем условная вероятность, но для хороших $(E, \mathcal{E})$ разницы нет.

Стационарная марковская цепь с дискретным временем. Общий случай

Пусть Ω состоит из всевозможных последовательностей $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где x_n — произвольные элементы некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$,
$X_n(\omega)$ — n-я координата у ω, а $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Тогда $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стационарная марковская цепь, если задана переходная вероятность $P(dy; X_n = x)$.
Подумать: переходная вероятность требует чуть больше, чем условная вероятность, но для хороших $(E, \mathcal{E})$ разницы нет.
Теперь для $\mathcal{E}$-измеримой функции $g : E \to \mathbb{R}$

Стационарная марковская цепь с дискретным временем. Общий случай

Пусть Ω состоит из всевозможных последовательностей $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_n — произвольные элементы некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$,
$X_n(\omega)$ — n-я координата у ω, а $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Тогда $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стационарная марковская цепь, если задана переходная вероятность $P(dy; X_n = x)$.
Подумать: переходная вероятность требует чуть больше, чем условная вероятность, но для хороших $(E, \mathcal{E})$ разницы нет.
Теперь для $\mathcal{E}$-измеримой функции $g : E \to \mathbb{R}$ можно рассмотреть

$$Tg(x) = \mathbb{E}_x g(X_1) =$$

Стационарная марковская цепь с дискретным временем. Общий случай

Пусть Ω состоит из всевозможных последовательностей $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где x_n — произвольные элементы некоторого измеримого пространства $(E, \mathcal{E})$,
$X_n(\omega)$ — n-я координата у ω, а $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Тогда $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — стационарная марковская цепь, если задана переходная вероятность $P(dy; X_n = x)$.
Подумать: переходная вероятность требует чуть больше, чем условная вероятность, но для хороших $(E, \mathcal{E})$ разницы нет.
Теперь для $\mathcal{E}$-измеримой функции $g : E \to \mathbb{R}$ можно рассмотреть

$$Tg(x) = \mathbb{E}_x g(X_1) = \int_E g(y) P(dy; x);$$

для простоты будем считать, что все наши функции суммируемы для всех $x \in E$.

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \leq n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau) | X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \ldots, n\}$.

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \leq n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau) | X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \ldots, n\}$.
Имея ввиду $f_k =$

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \le n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{W}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{W}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x),$$

где $\mathfrak{W}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \dots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N =$

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \le n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau) | X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \dots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N = s_{N-k}$, для
$\tau^n \triangleq \min\{k \in \overline{0, n} |$

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \leq n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{W}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{W}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x),$$

где $\mathfrak{W}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \ldots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N = s_{N-k}$, для
$\tau^n \triangleq \min\{k \in \overline{0, n} \,|\, s_{n-k}(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ получаем:

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \le n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \dots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N = s_{N-k}$, для
$\tau^n \triangleq \min\{k \in \overline{0,n} \,|\, s_{n-k}(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ получаем:

1. моменты остановки τ^n оптимальны в $\mathfrak{M}^n$: $\mathbb{E}_x g(X_{\tau^n}) = s_n(x)$;
2. "цены" s_n могут быть найдены по формуле

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \le n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \ldots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N = s_{N-k}$, для
$\tau^n \triangleq \min\{k \in \overline{0,n} \,|\, s_{n-k}(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ получаем:

1. моменты остановки τ^n оптимальны в $\mathfrak{M}^n$: $\mathbb{E}_x g(X_{\tau^n}) = s_n(x)$;
2. "цены" s_n могут быть найдены по формуле

$$s_n(x) = \max\{g(x), \mathbb{E}_x s_{n-1}(x)\} = \max\{g(x), T s_{n-1}(x)\};$$

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \leq n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \ldots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N = s_{N-k}$, для
$\tau^n \stackrel{\triangle}{=} \min\{k \in \overline{0,n} \,|\, s_{n-k}(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ получаем:

1. моменты остановки τ^n оптимальны в $\mathfrak{M}^n$: $\mathbb{E}_x g(X_{\tau^n}) = s_n(x)$;
2. "цены" s_n могут быть найдены по формуле

$$s_n(x) = \max\{g(x), \mathbb{E}_x s_{n-1}(x)\} = \max\{g(x), T s_{n-1}(x)\};$$

3. для $Q(x) \stackrel{\triangle}{=} \max\{g(x),$

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \leq n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \dots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N = s_{N-k}$, для
$\tau^n \triangleq \min\{k \in \overline{0,n} \,|\, s_{n-k}(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ получаем:

1. моменты остановки τ^n оптимальны в $\mathfrak{M}^n$: $\mathbb{E}_x g(X_{\tau^n}) = s_n(x)$;
2. "цены" s_n могут быть найдены по формуле

$$s_n(x) = \max\{g(x), \mathbb{E}_x s_{n-1}(x)\} = \max\{g(x), Ts_{n-1}(x)\};$$

3. для $Q(x) \triangleq \max\{g(x), \mathbb{E}_x g(X)\} = \max\{g(x), Tg(x)\}$ имеем

$$s_n(x)$$

Оптимальная остановка. Марковский случай с $\tau \le n$

Пусть задана функция $g : E \to \mathbb{R}$, требуется найти

$$s_n(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^n} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x),$$

где $\mathfrak{M}^n$ — моменты остановки, принимающие значения из $\{0, \ldots, n\}$.
Имея ввиду $f_k = g(X_k), v_k^N = s_{N-k}$, для
$\tau^n \triangleq \min\{k \in \overline{0,n} \,|\, s_{n-k}(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ получаем:

1. моменты остановки τ^n оптимальны в $\mathfrak{M}^n$: $\mathbb{E}_x g(X_{\tau^n}) = s_n(x)$;
2. "цены" s_n могут быть найдены по формуле

$$s_n(x) = \max\{g(x), \mathbb{E}_x s_{n-1}(x)\} = \max\{g(x), T s_{n-1}(x)\};$$

3. для $Q(x) \triangleq \max\{g(x), \mathbb{E}_x g(X)\} = \max\{g(x), Tg(x)\}$ имеем

$$s_n(x) = Q(s_{n-1}(x)) = Q^{(n)}(g(x)).$$

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\tau \in \mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname{ess-sup}_{\tau \in \mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{W}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда,

1.
$$s(x) =$$

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \overset{\triangle}{=} \sup\limits_{\tau\in\mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess-sup}\limits_{\tau\in\mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{W}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда,

1. $$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \overset{\triangle}{=} \sup_{\tau\in\mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\tau\in\mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{W}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда,

1. $$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sup_{n\to\infty} Q^n g(x);$$
2. выполнено уравнение Вальда–Беллмана

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname{ess-sup}_{\tau \in \mathfrak{M}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{M}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда,

1. $$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sup_{n\to\infty} Q^n g(x);$$
2. выполнено уравнение Вальда–Беллмана $s(x) = \max\{g(x), Ts(x)\}$;
3. $s(X_n)$ — наименьший супермартингал среди не меньших g;
4. $\tau_0^\infty \triangleq \min\{k \in \overline{n, N} \,|$

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \triangleq \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname{ess-sup}_{\tau\in\mathfrak{M}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{M}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда,

1. $$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sup_{n\to\infty} Q^n g(x);$$
2. выполнено уравнение Вальда–Беллмана $s(x) = \max\{g(x), Ts(x)\}$;
3. $s(X_n)$ — наименьший супермартингал среди не меньших g;
4. $\tau_0^\infty \triangleq \min\{k \in \overline{n,N} \,|\, s_\infty(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ оптимален в $\mathfrak{M}^\infty$

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \overset{\triangle}{=} \sup_{\tau\in\mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname{ess-sup}_{\tau\in\mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{W}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда,

1. $$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sup_{n\to\infty} Q^n g(x);$$
2. выполнено уравнение Вальда–Беллмана $s(x) = \max\{g(x), Ts(x)\}$;
3. $s(X_n)$ — наименьший супермартингал среди не меньших g;
4. $\tau_0^\infty \overset{\triangle}{=} \min\{k\in\overline{n,N}\,|\,s_\infty(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ оптимален в $\mathfrak{W}^\infty$ при конечном E;
5. момент остановки $\tau_\varepsilon^\infty \overset{\triangle}{=} \min\{k\in\overline{n,N}\,|$

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \triangleq \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname{ess-sup}_{\tau\in\mathfrak{M}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{M}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда,

1. $$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sup_{n\to\infty} Q^n g(x);$$
2. выполнено уравнение Вальда–Беллмана $s(x) = \max\{g(x), Ts(x)\}$;
3. $s(X_n)$ — наименьший супермартингал среди не меньших g;
4. $\tau_0^\infty \triangleq \min\{k \in \overline{n,N} \,|\, s_\infty(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ оптимален в $\mathfrak{M}^\infty$ при конечном E;
5. момент остановки $\tau_\varepsilon^\infty \triangleq \min\{k \in \overline{n,N} \,|\, s_\infty(X_k(\omega)) \leq g(X_k(\omega) + \varepsilon)\}$ ε-оптимален в классе $\mathfrak{M}^\infty$, то есть

Оптимальная остановка с неограниченным τ

Найти $s(x) \overset{\triangle}{=} \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}_x g(X_\tau) = \operatorname*{ess\text{-}sup}\limits_{\tau \in \mathfrak{W}^\infty} \mathbb{E}(g(X_\tau)|X_0 = x)$, где $\mathfrak{W}^\infty$ — моменты остановки, принимающие значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда,

1. $$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \sup_{n \to \infty} Q^n g(x);$$
2. выполнено уравнение Вальда–Беллмана $s(x) = \max\{g(x), Ts(x)\}$;
3. $s(X_n)$ — наименьший супермартингал среди не меньших g;
4. $\tau_0^\infty \overset{\triangle}{=} \min\{k \in \overline{n, N} \,|\, s_\infty(X_k(\omega)) = g(X_k(\omega))\}$ оптимален в $\mathfrak{W}^\infty$ при конечном E;
5. момент остановки $\tau_\varepsilon^\infty \overset{\triangle}{=} \min\{k \in \overline{n, N} \,|\, s_\infty(X_k(\omega)) \leq g(X_k(\omega) + \varepsilon)\}$ ε-оптимален в классе $\mathfrak{W}^\infty$, то есть $\mathbb{E}_x g(X_{\tau_\varepsilon^\infty}) + \varepsilon \geq s_\infty(x)$.

Задача о разборчивой невесте
(о выборе наилучшего объекта, о выборе секретаря)

Имеется *a priori* известное число N кандидатов *a priori* неизвестного качества; предполагается, что приходят на смотрины кандидаты в случайном порядке, не зависящем от свойств каждого кандидата. Качество каждого кандидата измеряется точно, хочется найти наилучшего из них, но поскольку кандидаты обидчивые, решение брать/не брать надо дать сразу после измерения, ну и хотя бы одного кандидата выбрать необходимо.

Задача о разборчивой невесте (о выборе наилучшего объекта, о выборе секретаря)

Имеется *a priori* известное число N кандидатов *a priori* неизвестного качества; предполагается, что приходят на смотрины кандидаты в случайном порядке, не зависящем от свойств каждого кандидата. Качество каждого кандидата измеряется точно, хочется найти наилучшего из них, но поскольку кандидаты обидчивые, решение брать/не брать надо дать сразу после измерения, ну и хотя бы одного кандидата выбрать необходимо.
Нужно подобрать марковскую цепь так, чтобы для каждого состояния мы знали вероятность каждого другого состояния быть следующим.

Размышления вслух...

1. Какая информация наблюдаема?

Размышления вслух...

1. Какая информация наблюдаема? Когда приходит новая информация?
2. Какую, пусть и наблюдаемую, информацию можно заведомо не рассматривать,

Размышления вслух...

1. Какая информация наблюдаема? Когда приходит новая информация?
2. Какую, пусть и наблюдаемую, информацию можно заведомо не рассматривать, и напротив, какой наблюдаемой информации достаточно для принятия решений?
3. В момент прихода новой информации какую часть старой информации можно забыть?
4. Что назвать переходом,

Размышления вслух...

1. Какая информация наблюдаема? Когда приходит новая информация?
2. Какую, пусть и наблюдаемую, информацию можно заведомо не рассматривать, и напротив, какой наблюдаемой информации достаточно для принятия решений?
3. В момент прихода новой информации какую часть старой информации можно забыть?
4. Что назвать переходом, из каких состояний в какие?

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний N

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N+1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) —

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N+1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) — «k-й был "пока лучшим"», состояние 0^* означает, что самый лучший уже ушел.

Теперь X_1 =

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N+1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) — «k-й был "пока лучшим"», состояние 0^* означает, что самый лучший уже ушел.

Теперь $X_1 = 1$, $X_{0^*} =$

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N+1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) — «k-й был "пока лучшим"», состояние 0^* означает, что самый лучший уже ушел.

Теперь $X_1 = 1$, $X_{0^*} = 0$ и $p_{0^*,0^*} =$

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N+1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) — «k-й был "пока лучшим"», состояние 0^* означает, что самый лучший уже ушел.

Теперь $X_1 = 1$, $X_{0^*} = 0$ и $p_{0^*,0^*} = 1$, $p_{i,0^*} =$

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N + 1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) — «k-й был "пока лучшим"», состояние 0^* означает, что самый лучший уже ушел.

Теперь $X_1 = 1$, $X_{0^*} = 0$ и $p_{0^*,0^*} = 1$, $p_{i,0^*} = i/N$,

(состояние 0^* поглощающее, 0^* — устоявшееся обозначение для таких состояний)

$p_{i,j} =$

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N+1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) — «k-й был "пока лучшим"», состояние 0^* означает, что самый лучший уже ушел.

Теперь $X_1 = 1$, $X_{0^*} = 0$ и $p_{0^*,0^*} = 1$, $p_{i,0^*} = i/N$,

(состояние 0^* поглощающее, 0^* — устоявшееся обозначение для таких состояний)

$p_{i,j} = \frac{i}{j(j-1)}$ при $0 < i < j$, $p_{i,j} = 0$ — в остальных случаях.

Мы ищем

$$\sup_\tau \mathbb{P}(\text{"выбран наилучший"})$$

Марковская цепь для невесты

Базовая информация: какой номер у обладателя титула "пока лучший".

Берем марковскую цепь, в которой состояний $N+1$, от 0 до N; где состояние k (от 1 до N) — «k-й был "пока лучшим"», состояние 0^* означает, что самый лучший уже ушел.

Теперь $X_1 = 1$, $X_{0^*} = 0$ и $p_{0^*,0^*} = 1$, $p_{i,0^*} = i/N$,

(состояние 0^* поглощающее, 0^* — устоявшееся обозначение для таких состояний)

$p_{i,j} = \frac{i}{j(j-1)}$ при $0 < i < j$, $p_{i,j} = 0$ — в остальных случаях.

Мы ищем

$$\sup_{\tau} \mathbb{P}(\text{"выбран наилучший"}) = \sup_{\tau} \mathbb{E} p_{X_\tau,0^*} = \sup_{\tau} \frac{\mathbb{E}X_\tau}{N} = \sup_{\tau} \mathbb{E} g(X_\tau),$$

где $g(i) = i/N$.

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Big(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Big),$$

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Big(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Big),$$

или

$$Ns(x)/x = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{Ns(k)/k}{k-1}\Big), \quad s(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\},$$

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Big(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Big),$$

или

$$Ns(x)/x = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{Ns(k)/k}{k-1}\Big), \quad s(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \ldots, N-1\},$$

или

$$\bar{s}(x) = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{\bar{s}(k)}{k-1}\Big), \quad \bar{s}(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \ldots, N-1\}.$$

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Big(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Big),$$

или

$$Ns(x)/x = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{Ns(k)/k}{k-1}\Big), \quad s(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\},$$

или

$$\bar{s}(x) = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{\bar{s}(k)}{k-1}\Big), \quad \bar{s}(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Поскольку $\bar{s}$

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Bigl(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Bigr),$$

или

$$Ns(x)/x = \max\Bigl(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{Ns(k)/k}{k-1}\Bigr), \quad s(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\},$$

или

$$\bar{s}(x) = \max\Bigl(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{\bar{s}(k)}{k-1}\Bigr), \quad \bar{s}(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Поскольку $\bar{s}$ не возрастает, то τ_0^∞ —

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Big(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Big),$$

или

$$Ns(x)/x = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{Ns(k)/k}{k-1}\Big), \quad s(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\},$$

или

$$\bar{s}(x) = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{\bar{s}(k)}{k-1}\Big), \quad \bar{s}(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Поскольку $\bar{s}$ не возрастает, то τ_0^∞ — последний момент, когда $\bar{s} = 1$:

$$\tau_0^\infty \triangleq \max\Big\{k \,\Big|\, \frac{1}{X_k - 1} + \dots + \frac{1}{N-1} \le 1\Big\}$$

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Big(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Big),$$

или

$$Ns(x)/x = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{Ns(k)/k}{k-1}\Big), \quad s(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\},$$

или

$$\bar{s}(x) = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{\bar{s}(k)}{k-1}\Big), \quad \bar{s}(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Поскольку $\bar{s}$ не возрастает, то τ_0^∞ — последний момент, когда $\bar{s} = 1$:

$$\tau_0^\infty \triangleq \max\Big\{k \,\Big|\, \frac{1}{X_k - 1} + \dots + \frac{1}{N-1} \leq 1\Big\} \qquad P_{best} = \frac{\tau_0^\infty}{N}$$

Решение задачи о разборчивой невесте

Раз уж τ можно считать неограниченным, достаточно для $g(i) = i/N$ решить

$$s(x) = \max(g(x), Tv(x)) = \max\Big(\frac{x}{N}, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{x}{k(k-1)} s(k)\Big),$$

или

$$Ns(x)/x = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{Ns(k)/k}{k-1}\Big), \quad s(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \ldots, N-1\},$$

или

$$\bar{s}(x) = \max\Big(1, \sum_{k=x+1}^{N} \frac{\bar{s}(k)}{k-1}\Big), \quad \bar{s}(N) = 1 \qquad \forall x \in \{1, \ldots, N-1\}.$$

Поскольку $\bar{s}$ не возрастает, то τ_0^∞ — последний момент, когда $\bar{s} = 1$:

$$\tau_0^\infty \triangleq \max\Big\{k \,\Big|\, \frac{1}{X_k - 1} + \cdots + \frac{1}{N-1} \leq 1\Big\} \qquad P_{best} = \frac{\tau_0^\infty}{N} \to \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}.$$

Задача о разорении страховой компании

Пусть u — начальный капитал страховой компании, пусть страховые поступления идут постоянно, со скоростью $c > 0$, а в случайные моменты времени $T_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (T_i возрастают) происходят выплаты страховки ξ_i. Тогда $(X_t)_{t\geq 0}$ — эволюция капитала страховой компании — случайный процесс:

$$X_t = u + ct - S_t, \qquad S_t = \sum_{i\in\mathbb{N}} \xi_i 1_{T_i \leq t}.$$

Как обычно, $\mathcal{F}_s$ — всё события, что произошли к моменту s.
Нас интересуют $T \triangleq \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \leq 0\} \cup \{+\infty\}$ и $\mathbb{P}(T < +\infty)$

Модель Крамера– Лундеберга

Предположим, что

1. $T_i - T_{i-1}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $Exp(\lambda)$;
2. ξ_i — независимые неотрицательные случайные величины с общей функцией распределения F_ξ и $\mathbb{E}\xi_i = \mu$;
3. последовательности $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ независимы.

В рамках такой модели, например через характеристические функции, легко показывается, что для всякого $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathbb{P}(T_k < t, T_{k+1} > t) =$$

Модель Крамера– Лундеберга

Предположим, что

1. $T_i - T_{i-1}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $Exp(\lambda)$;
2. ξ_i — независимые неотрицательные случайные величины с общей функцией распределения F_ξ и $\mathbb{E}\xi_i = \mu$;
3. последовательности $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ независимы.

В рамках такой модели, например через характеристические функции, легко показывается, что для всякого $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathbb{P}(T_k < t, T_{k+1} > t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

В силу

$$\mathbb{E}(X_t - X_0) = ct - \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\xi_i 1_{T_i \leq t}) = ct - \mu \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T_i \leq t) = t(c - \lambda\mu),$$

далее считаем, что $c > \lambda\mu$ (средняя прибыль компании положительна).

Теорема Крамера–Лундберга

Введем $h(z) \triangleq \int_0^\infty (e^{zx} - 1)dF_\xi(x)$ и $g(z) = \lambda h(z) - cz$ для всех неотрицательных z.

Теорема. В модели Крамера–Лундберга при $\lambda\mu < c$ вероятность разорения не превосходит e^{-Ru}, где R — единственный корень уравнения $\lambda g(R) = 0$.

Пока матожидания

Для $h(z) \triangleq \int_0^\infty (e^{zx}-1)dF_\xi(x)$ и $g(z)=\lambda h(z)-cz$ при $z\geq 0$ имеем $\mathbb{E}e^{r\xi_1}=1+h(r)$ и

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-r(X_t-X_0)}) &= e^{-rct}\mathbb{E}e^{r\sum_{T_i\leq t}\xi_i} \\
&= e^{-rct}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}e^{r\sum_{i=1}^k\xi_i}\mathbb{P}(T_k<t,T_{k+1}>t) \\
&= e^{-rct}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(1+h(r))^k\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{-rct}e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Пока матожидания

Для $h(z) \triangleq \int_0^\infty (e^{zx}-1)dF_\xi(x)$ и $g(z)=\lambda h(z)-cz$ при $z\geq 0$ имеем $\mathbb{E}e^{r\xi_1}=1+h(r)$ и

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-r(X_t-X_0)}) &= e^{-rct}\mathbb{E}e^{r\sum_{T_i\leq t}\xi_i}\\
&= e^{-rct}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}e^{r\sum_{i=1}^k\xi_i}\mathbb{P}(T_k<t,T_{k+1}>t)\\
&= e^{-rct}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(1+h(r))^k\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\\
&= e^{-rct}e^{-\lambda t}e^{\lambda t(1+h(r))}=e^{tg(r)}.
\end{aligned}$$

Ну тогда $\mathbb{E}(e^{-r(X_t-X_s)})=\mathbb{E}(e^{-r(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s)=e^{(t-s)g(r)}$

А теперь — мартингалы

$e^{-rX_t - tg(r)}$ — мартингал, поскольку при $s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-rX_t - tg(r)}|\mathcal{F}_s) &= e^{-tg(r)}\mathbb{E}(e^{-r(X_t - X_s)}e^{rX_s}|\mathcal{F}_s) \\ &= e^{-tg(r)}e^{(t-s)g(r)}e^{rX_s} = e^{-rX_t - sg(r)}, \end{aligned}$$

следовательно для момента остановки $\tau = \min(t, T)$

$$\begin{aligned} e^{-ru} &= \mathbb{E}e^{-rX_t - tg(r)} = \mathbb{E}e^{-rX_\tau - \tau g(r)} \geq \mathbb{E}(e^{-rX_\tau - \tau g(r)}|T \leq t)\mathbb{P}(T \leq t) \\ &= \mathbb{E}(e^{-rX_T - Tg(r)}|T \leq t)\mathbb{P}(T \leq t) \\ &\geq \mathbb{E}(e^{-Tg(r)}|T \leq t)\mathbb{P}(T \leq t) \\ &\geq \min_{s \in [0,T]} \mathbb{E}(e^{-sg(r)}|s \leq t)\mathbb{P}(T \leq t) \\ \mathbb{P}(T \leq t) &\leq \max_{s \in [0,T]} e^{sg(r) - ru}. \end{aligned}$$

Если взять $r = R$ такое, что $g(R) = 0$, то $\mathbb{P}(T \leq t) \leq e^{-Ru}$.

На пять минут...

1. Пусть X_n, Y_n — мартингалы относительно некоторой фильтрации. Когда и при каких условиях мартингалами будут
$X_n \wedge Y_n, X_n + Y_n, X_n Y_n$.

2. Докажите или опровергните, что в "важном примере" средний выигрыш $\frac{\omega_1+\dots+\omega_n}{n}$ является мартингалом, субмартингалом, супермартингалом.

Пятиминутка не состоялась. Эти вопросы ушли в теоретические задачи.

Торопитесь, акция РЕШИ ЗАДАЧУ — ПОЛУЧИ +50% уже началась!