# Теория вероятностей. Лекция двадцать пятая
# Марковские очереди

Дмитрий Валерьевич Хлопин
*glukanat@mail.ru*

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

24.04.2019

# Стационарные марковские цепи с конечным числом состояний

Пусть у случайного процесса $X_t$ время дискретно ($t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), конечное число значений $\{1, 2, \dots, r\}$ и выполнено свойство Маркова

$$\mathbb{P}(X_{t+1} | X_t, X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_n}) = \mathbb{P}(X_{t+1} | X_t),$$

и вероятности $\mathbb{P}(X_{t+1} | X_t)$ не зависят от $t$.

**Теорема.** Распределения $\mu_t \triangleq (\mathbb{P}(X_t = 1), \dots, \mathbb{P}(X_t = r))$ связаны через матрицу переходов
$Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,r} \triangleq \Big(\mathbb{P}(X_k = j | X_{k-1} = i)\Big)_{i,j=1,\dots,r}$:

$$\mu_1 = \mu_0 Q, \;\; \mu_k = \mu_{k-1} Q, \;\; \mu_k = \mu_0 Q^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

# Эргодичность

**Определение.** Стохастическая матрица $Q = (q_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,r}$ называется эргодической, если все её элементы положительны

**Теорема.** Пусть матрица переходов $Q$ эргодична. Тогда найдется такая строка $\mu_*$, что $\mu_* Q = \mu_*$ и распределения $\mu_0 Q^n$ сходятся к $\mu_*$ для любого начального распределения $\mu_0$; в частности, других стационарных распределений, помимо $\mu_*$, у нее нет.

Для доказательства потребуется почти очевидный:
**Принцип Банаха.** Если в полном метрическом пространстве $\mathbb{Y}$ с метрикой $d$, оператор $A : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ сжимающий (для некоторого $\beta \in (0,1)$ $d(Ax_1, Ax_2) \leq \beta d(x_1, x_2)$), то существует единственный элемент $x_* \in \mathbb{Y}$ такой, что $Ax_* = x_*$, причем $d(A^k x, x_*) \to 0$ при $k \to \infty$, более того $d(A^k x, x_*) \leq \beta^k d(x, x_*)$.

# Доказательство

Обозначим $a^+ \triangleq \max\{a, 0\}$, $a^- \triangleq \min\{a, 0\}$ для всех $a \in \mathbb{R}$. Достаточно доказать, что в некоторой метрике оператор $p \mapsto pQ$ сжимающий.
Введем метрику $d$ на $\{(p_1, \ldots, p_r) \,|\, p_1, \ldots p_r \geq 0, p_1 + \ldots + p_r = 1\}$ по правилу: для всех $p' = (p'_1, \ldots, p'_r)$, $p'' = (p''_1, \ldots, p''_r)$

$$d(p', p'') \triangleq \frac{1}{2}(|p'_1 - p''_1| + \ldots + |p'_r - p''_r|) = \sum_i (p'_i - p''_i)^+.$$

По условию найдется $\alpha > 0$ такое, что $q_{ij} \geq \alpha$ для всех $i$,$j$. Пусть $J$ – множество тех $j$, для которых элемент $(p'Q - p''Q)_j$ положителен.
Заметим, что $J$ не может содержать все индексы. Следовательно, $\sum_{j \in J} q_{ij} \leq 1 - \alpha$.
Имеем, что

$$d(p'Q, p''Q) = \sum_{j \in J} \sum_i q_{ij}(p'_i - p''_i) \leq \sum_i (p'_i - p''_i)^+ \sum_{j \in J} q_{ij} \leq (1 - \alpha) d(p', p'').$$

Осталось сослаться на принцип Банаха.

# Закон больших чисел для конечной марковской цепи

Введем случайные величины:
$\nu_i^n$, равная числу моментов $t \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $X_t = i$, и
$\nu_{ij}^n$, равная числу моментов $t \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $X_{t-1} = i$, $X_t = j$.
**Теорема**. Пусть у марковской цепи переходная матрица $Q = (q_{ij})_{i,j=1,2\dots,r}$ эргодична, а $\pi = (\pi_i)_{i=1,2\dots,r}$ – стационарное распределение, тогда $\frac{\nu_i^n}{n} \xrightarrow{P} \pi_i$, $\frac{\nu_{ij}^n}{n} \xrightarrow{P} \pi_i q_{ij}$, то есть для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\nu_i^n}{n} - \pi_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\nu_{ij}^n}{n} - \pi_i q_{ij}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Подумать: без условия эргодичности теорема, вообще говоря, неверна.
Подумать: единственности стационарного распределения также недостаточно.
Подумать: в последующем доказательстве много арифметики, сумм и т.п., но напрямую конечность матрицы $Q$ (как и эргодичность) нигде не используется, значит условие ослабить можно...

Докажем $\frac{\nu_i^n}{n} \xrightarrow{P} \pi_i$, случай $\frac{\nu_{ij}^n}{n} \xrightarrow{P} \pi_i q_{ij}$ аналогичен.

Введем $\chi_i^t \stackrel{\triangle}{=} 1_{X_t=i}$. Теперь $\nu_i^n = \sum_{t=1}^n \chi_i^t$.

Пусть $q_{li}^{(t)}$ — вероятность того, что $X_t = i$ при условии $X_0 = l$.

Тогда $Q^t = (q_{ij}^{(t)})_{i,j=1,\dots,r}$. Согласно предыдущей теореме имеем, что $q_{li}^{(t)} = \pi_i + \beta_{li}^t$, $\mathbb{E}\chi_i^t = \sum_{l=1}^r p_l q_{li}^{(t)} = \pi_i + d_i^t$, где $|\beta_{li}^t|, |d_i^t| \leq c\lambda^t$ для некоторых положительных $\lambda < 1, c > 1$.

Откуда, $\mathbb{E}\chi_i^t \to \pi_i$, $\mathbb{E}\nu_i^t/n \to \pi_i$, и для всех натуральных $t_1, t_2$ $(t_1 < t_2)$

$$\begin{aligned}
q_{li}^{(t_1)} q_{ii}^{(t_2-t_1)} - \mathbb{E}\chi_i^{t_1}\mathbb{E}\chi_i^{t_2} &\leq (\pi_i + \beta_{li}^{t_1})(\pi_i + \beta_{ii}^{t_2-t_1}) - (\pi_i + d_i^{t_1})(\pi_i + d_i^{t_2}) \\
&\leq |\beta_{li}^{t_1}| + |\beta_{ii}^{t_2-t_1}| + |d_i^{t_1}| + |d_i^{t_2}| + |\beta_{li}^{t_1}\beta_{ii}^{t_2-t_1}| + |d_i^{t_1} d_i^{t_2}| \\
&\leq 3c^2(\lambda^{t_1} + \lambda^{t_2-t_1}).
\end{aligned}$$

Оценим $D\nu_i^n$. Имеем, из $\nu_i^n = \sum_{t=1}^n \chi_i^t$, $\mathbb{E}\chi_i^t = \sum_{l=1}^r p_l q_{li}^{(t)}$

$$\begin{aligned}
D\nu_i^n &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^n (\chi_i^t - \mathbb{E}\chi_i^t)\right)^2 \\
&= \sum_{t=1}^n \mathbb{E}(\chi_i^t - \mathbb{E}\chi_i^t)^2 + 2\sum_{t_1<t_2} \mathbb{E}(\chi_i^{t_1} - \mathbb{E}\chi_i^{t_1})(\chi_i^{t_2} - \mathbb{E}\chi_i^{t_2}) \\
&\le n + 2\sum_{t_1<t_2}\sum_{l=1}^r p_l\left(q_{li}^{(t_1)} q_{ii}^{(t_2-t_1)} - \mathbb{E}\chi_i^{t_1}\mathbb{E}\chi_i^{t_2}\right) \\
&\le n + 6c^2 \sum_{t_1<t_2}\sum_{l=1}^r p_l(\lambda^{t_1} + \lambda^{t_2-t_1}) \\
&\le n + 6c^2 \sum_{t_1}\left(n\lambda^{t_1} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right) \le n + \frac{6c^2 n\lambda}{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Теперь для каждого $\varepsilon > 0$ применим неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\nu_i^n}{n} - \pi_i\right| \ge \varepsilon\right) \le \mathbb{P}\left(|\nu_i^n - \mathbb{E}\nu_i^n| \ge \varepsilon n\right) \le \frac{D\nu_i^n}{\varepsilon^2 n^2} \le \frac{1 + \frac{6c^2\lambda}{1-\lambda}}{\varepsilon^2 n} \to 0.$$

# Марковские цепи с непрерывным временем

Пусть $t \in [0, +\infty)$ – непрерывное время, $X_t$ принимает значения в $\{1, \dots, r\}$.

Случайный процесс $X_t$ называется марковской цепью с непрерывным временем (марковской очередью), если для всех $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \tau$ и всех $i_1, \dots, i_n, j \in \{1, \dots, r\}$

$$\mathbb{P}(X_\tau = j | X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(X_\tau = j | X_{t_n} = i_n).$$

Пусть $P(t_1, t_2) = (p_{ij}(t_1, t_2))_{i,j=1,\dots,r}$ при $t_2 > t_1$, где $p_{ij}(t_2, t_1) = \mathbb{P}(X_{t_2} = j | X_{t_1} = i)$. Тогда $P(t_1, t_3) = P(t_1, t_2) P(t_2, t_3)$ при $t_3 > t_2 > t_1$ в силу

$$p_{ij}(t_1, t_3) = \mathbb{P}(X_{t_3} = j | X_{t_1} = i) = \sum_{l=1}^{r} p_{il}(t_1, t_2) p_{lj}(t_2, t_3).$$

# Однородные марковские цепи

В дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на однородных марковских цепях.

Марковская цепь называется однородной, если $P(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности $t_2 - t_1$.

Всюду далее рассматриваем однородные цепи. Потому переобозначим $P$, всюду вместо $P(t_1, t_2)$ будем писать $P(t_2 - t_1)$. Тогда получим полугруппу $\{P(t) | t \in [0, \infty)\}$ в силу

$$P(\tau_1 + \tau_2) = P(\tau_1) P(\tau_2), \ P(0) = I;$$

здесь $I = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{r}$, где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, и $0$ в противном случае.
Подумать: отображение $P$ может оказаться разрывным, может оказаться непрерывным, но недифференцируемым (1 балл за каждый).

# Стационарное распределение

Также, как и в случае дискретного времени, можно ввести понятие стационарного распределения.

Распределение вероятностей $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r)$ называется стационарным, если $\pi P(t) = \pi$ для всех $t$.

**Теорема** Стационарное распределение у однородной цепи с непрерывной (по $t$) матрицей $P$ всегда существует.

Доказательство первое. Свести к случаю дискретного времени с шагом $1/n$ и перейти к пределу.

Доказательство второе. [С-но; 0,5 баллов] Заметить, что сумма элементов матрицы $P(t) - I$ равна нулю, она вырождена, то есть для собственного числа, равного $1$, матрица $P(t)$ имеет собственный вектор-строку $\pi(t)$. Осталось убедиться, что эта строка — распределение, и устремить $t = 1/n \downarrow 0$.

# Генератор полугруппы

Положим $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$, где $q_{ij} = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$. Матрицу $Q$ называют матрицей Колмогорова или инфинитезимальной матрицей переходных вероятностей.

Отметим свойства матрицы Колмогорова (если эти пределы существуют).

**Предложение.** Пусть матрица $Q$ — матрица Колмогорова. Тогда

1. $q_{ij} \geq 0$ для $i \neq j$;
   [следует из $\frac{p_{ij}(t)}{t} \to q_{ij}$ для $i \neq j$ и неравенства $p_{ij}(t) \geq 0$.]
2. $\sum_j q_{ij} = 0$;
   [достаточно продифференцировать равенство $p_{i1}(t) + \ldots + p_{ir}(t) = 1$].
3. [С-но; 0,5 баллов] распределение $\pi$ стационарно тогда и только тогда, когда $\pi Q = 0$.

# Уравнение Колмогорова

**Предложение.** Если все пределы в определении $Q$ существуют, то $P(t)$ дифференцируема во всех точках и выполнены равенства

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q \text{ (прямое уравнение Колмогорова)},$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = QP(t) \text{ (обратное уравнение Колмогорова)}.$$

Подумать: оказалось, что мы можем найти все вероятности (и в прошлом тоже!), решая линейное дифуравнение, простейший объект. Более того,
решение уравнения Колмогорова может быть найдено как $P(t) = \exp(tQ)$, где $\exp(A)$ – матричная экспонента:

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

Подумать: подставьте, заодно проверите почему ряд сходится...

# Доказательство предложения

Для дифференцируемости $P(t)$ справа заметим, что из $P(t+h) - P(t) = P(t)(P(h) - I)$ следует

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t) \lim_{h\downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = P(t)Q,$$

Переходя к пределу при $h \downarrow 0$ в $P(t-h) - P(t) = -P(t-h)(P(h) - I) \to 0$, помимо $P(t-h) \to P(t)$, имеем дифференцируемость слева:

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{P(t-h) - P(t)}{-h} = \lim_{h\downarrow 0} P(t-h) \lim_{h\downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = P(t)Q.$$

Прямое уравнение Колмогорова показано.

Аналогично,

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} \cdot P(t) = QP(t),$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{P(t-h) - P(t)}{-h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} \lim_{h\downarrow 0} P(t-h) = QP(t).$$

# Стационарная марковская цепь из уравнения Колмогорова. Доппостроения

Пусть даны $P(t) = \exp(tQ)$, $p^0$ – некоторое начальное распределение. Определим случайные величины $\xi$, $\tau_i^n$ и $\eta_i^n$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $n \in \mathbb{N}$ правилами.

1. $\xi$ принимает значения $\{1, \dots, r\}$ в силу $p^0$;
2. $\tau_i^n$ — случайная величина на $[0, \infty)$ с распределением $Exp(-q_{ii})$;
3. $\eta_i^n$ имеет значения $\{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$ с вероятностями $\mathbb{P}(\eta_i^n = j) = -q_{ij}/q_{ii}$;
4. все случайные величины $\xi$, $\tau_i^n$ и $\eta_i^n$ независимы.

Здесь $\xi$ определяет начальное состояние,
$\tau_i^n$ и $\eta_i^n$ — время от $(n-1)$-го до $n$-го прыжка и состояние после $n$-го прыжка, если после $(n-1)$-го прыжка было состояние $i$,

# Стационарная марковская цепь из уравнения Колмогорова. Формулировка

Положим $\xi^0 \triangleq \xi$, $\theta^0 \triangleq 0$, а затем, если $\xi^{n-1}$ и $\theta^{n-1}$ построены, примем:

$$\theta^n \triangleq \theta^{n-1} + \tau^n_{\xi^{n-1}}, \ \xi^n = \eta^n_{\xi^{n-1}}.$$

**Предложение** [1 балл] Случайный процесс $X_t$, заданный правилами $X_t \triangleq \xi^{n-1}$ при $t \in [\theta^{n-1}, \theta^n)$, является однородной марковской цепью с непрерывным временем с начальным распределением $p^0$ и матрицей переходов $P(t) = \exp(tQ)$.

# Пример. Постановка

Предположим, что у нас есть $r$ устройств (серверов), каждый из которых может обработать не более одного запроса. Если все серверы загружены, запрос не обрабатывается (никогда), запросы поступают независимо. Вероятность поступления каждого запроса определяется экспоненциальным распределением с параметром $\lambda$, время обработки запроса также случайно и распределено экспоненциально с параметром $\mu$. Серверы также независимы.

В качестве моделирующей марковской цепи выберем цепь, в которой $X_t$ равно количеству занятых серверов, т.е. $X_t \in \{0, 1, \dots, r\}$. Заметим, что если все серверы свободны, то вероятность того, что придет запрос, распределена экспоненциально с параметром $\lambda$, если $i$ серверов заняты, то вероятность того, что хоть один сервер освободится, распределена также экспоненциально с параметром $i\mu$.

# Пример. Матрица Колмогорова

Получаем матрицу Колмогорова ($Q = (q_{ij})_{i,j=0,\dots,r}$)

$$Q = \begin{pmatrix} -\gamma(0) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\gamma(1) & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -\gamma(2) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (r-1)\mu & -\gamma(r-1) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r\mu & -\gamma(r) \end{pmatrix}$$

с еще не найденными $\gamma(i)$. Воспользовавшись $\sum_j q_{ij} = 0$, имеем

# Пример. Стационарное распределение

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu-\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (r-1)\mu & -(r-1)\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r\mu & -r\mu \end{pmatrix},$$

решая $\pi Q = 0$, имеем

$\pi = C(1, \lambda/\mu, \lambda^2/2\mu^2, \lambda^3/6\mu^3, \dots,, \lambda^{r-1}/(r-1)!\mu^{r-1}, \lambda^r/r!\mu^r)$. Тогда для единственного стационарного распределения $\pi_i = \dfrac{(\lambda/\mu)^i/i!}{\sum_{j=0}^{r}(\lambda/\mu)^j/j!}$.

# На пять минут...

1. Привести пример регулярного и нерегулярного семейства распределений (см. формулировку неравенства Рао-Крамера).
2. Пусть $X_k$ независимы и принимают значения $1, -1$ с вероятностью $1/2$ каждое. Можно ли утверждать, что последовательность случайных величин $X_0, \frac{X_1+X_0}{2}, \frac{X_2+X_1}{2}, \frac{X_3+X_2}{2}, \ldots$ — марковская? Аналогичный вопрос про $X_0, X_1X_0, X_2X_1X_0, X_3X_2X_1X_0, \ldots$