

? 11884

М.Н.СТЕПНОВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ
МЕХАНИЧЕСКИХ
ИСПЫТАНИЙ

Справочник

ББК 34.4

С79

УДК 620.171.2 : 519.2 (035)

21/1
1884

711458

1985 г. Одесса. ул. Мечникова, 24.

Институт инженеро-

морского флота

Библиотека

Рецензент д-р техн. наук проф. В. П. Когаев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многочисленные исследования, проведенные в последние два-три десятилетия, показали, что рассеяние характеристик механических свойств материалов и несущей способности конструкций является объективным свойством конструкционных материалов и деталей машин, которое должно учитываться при создании современных машин и сооружений.

Одним из резервов повышения ресурса при одновременном снижении материалоемкости машин и сооружений является повышение надежности обоснования расчетных характеристик с учетом указанного рассеяния, необходимых при проектировании и доводке конструкций, что возможно лишь путем широкого внедрения в практику прогрессивных статистических методов планирования механических испытаний и оценки характеристик механических свойств конструкционных материалов, несущей способности и ресурса деталей машин и элементов конструкций.

Другим резервом повышения прочности и снижения материалоемкости машиностроительной продукции является применение статистических методов при оптимизации состава конструкционных материалов, технологии производства полуфабрикатов, деталей машин и элементов конструкций, учитывающих вариацию характеристик механических свойств.

Рассмотренные в настоящем справочнике методы планирования механических испытаний позволяют производить выбор режимов и обосновывать объем испытаний с целью оценки характеристик механических свойств (среднего значения, дисперсии, квантили и т. д.) с требуемой точностью и статистической надежностью при минимальных трудоемкости и материальных затратах.

Рекомендуемые в справочнике статистические процедуры учитывают специфику механических испытаний и могут быть использованы практически для всех видов механических испытаний образцов и элементов конструкций.

Большое внимание уделено планированию усталостных испытаний, являющихся наиболее трудоемкими и дорогостоящими. Приведены методики, разработанные на основании результатов специально поставленных статистических исследований методом Монте-Карло, позволяющие в зависимости от целей исследования производить надлежащий выбор числа испытуемых объектов, числа значений уровней амплитуды напряжений при испытании, рациональное распределение объектов по уровням амплитуды напряжений с учетом планируемой точности и статистической надежности оценки характеристики сопротивления усталости материала, деталей машин и элементов конструкций для различных значений вероятности разрушения или образования трещины заданной протяженности.

Степнов М. Н.

С79 Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справочник. — М.: Машиностроение, 1985. — 232 с., ил.

В пер.: 1 р. 60 к.

В справочнике приведены современные методы планирования основных видов механических испытаний и обработки их результатов, даны рекомендации по оптимизации испытаний для определения механических свойств материалов, несущей способности и ресурса деталей машин и элементов конструкций с требуемой точностью и достоверностью при возможно малой продолжительности и минимальных материальных затратах.

Справочник предназначен для инженерно-технических работников конструкторских и технологических бюро, лабораторий механических испытаний машиностроительных и металлургических предприятий.

270200000-061
С 038 (01)-85 61-85

ББК 34.4
6П5.1

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Событие. Исходом любого опыта (испытания), осуществляемого при вполне определенных условиях, является событие. Событие может иметь качественную или количественную характеристику. Так, при испытаниях на усталость факт разрушения или неразрушения образца за базовое число циклов нагружения является *качественной* характеристикой события. Долговечность же разрушающихся образцов является *количественной* характеристикой.

Событие, которое в результате данного опыта должно непременно произойти, называют *достоверным*. Примером достоверного события является извлечение черного шара из ящика, в котором лежат только черные шары.

Достоверному событию противоположно *невозможное* событие, т. е. такое событие, которое в данных условиях опыта не может произойти, например, извлечение белого шара из ящика с черными шарами.

Событие, которое в результате данного опыта может произойти, а может и не произойти, называют *случайным*. Примером случайного события является извлечение белого шара из ящика, в котором лежат белые и черные шары.

Случайные события называют *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого. Например, образец в результате длительных статических испытаний при заданных условиях либо разрушится, либо не разрушится. Одновременное появление этих двух событий исключается. В тех случаях, когда появление одного события не исключает возможности появления другого, случайные события называют *совместимыми*.

Если в результате данного опыта обязательно произойдет одно из нескольких событий, то такие случайные события называют *единственно возможными*. Так, два события — разрушение или неразрушение образца при длительных статических испытаниях, являются единственно возможными случайными событиями.

Исходом ряда опытов могут быть такие события, каждое из которых не является объективно более возможным, чем другое. Эти события называют *равновозможными* случайными событиями. Например, выпадение герба и цифры при бросании монеты.

Случайные события могут быть зависимыми и независимыми. Два события называют *независимыми*, если возможность реализации любого из этих событий не зависит от наступления или ненаступления другого события. Два события называют *зависимыми*, если возможность реализации одного из них зависит от наступления или ненаступления другого.

События A_1, A_2, \dots, A_n представляют собой *полную систему* случайных событий, если исходом опыта может явиться одно и только одно из этих событий. Каждое событие, которое может наступить в испытании, называют *элементарным случаем*. Все те случаи, при которых наступает интересующее нас событие, называют *благоприятными* этому событию.

Вероятность события. Степенью возможности реализации случайного события является вероятность. Если опыт сводится к схеме случаев, то под вероятностью события A понимают отношение числа случаев, благоприятных данному событию, к общему числу всех несовместимых единственно возможных и равновозможных случаев:

$$P(A) = m/n, \quad (1.1)$$

где $P(A)$ — вероятность события A ; m — число случаев, благоприятных событию A ; n — общее число случаев.

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:
 вероятность достоверного события равна единице, каждый возможный случай является благоприятным ($m = n$);
 вероятность невозможного события равна нулю, т. е. нет ни одного случая, благоприятного событию ($m = 0$);
 вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей ($0 < m < n$).

В большинстве случаев вероятность события не может быть найдена аналитическим путем и оценивается на основании результатов опыта с помощью *накопленной частоты* случайного события, являющейся статистическим аналогом вероятности.

Пусть производится n опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A . В результате указанных опытов событие A появилось i раз (число наблюдений), тогда накопленная частота события A определяется отношением

$$W(A) = i/n. \quad (1.2)$$

Повторяя серию из n опытов многократно, будем получать для накопленной частоты случайного события A различные значения. Однако они будут колебаться около одного и того же числа, являющегося вероятностью события, причем так, что значительные отклонения от этого числа будут редкими. При возрастании числа опытов в соответствии с законом больших чисел указанные отклонения будут встречаться все более и более редко.

Таким образом, можно считать, что при большом объеме испытаний в большинстве случаев накопленная частота и вероятность случайного события приблизительно равны между собой.

Случайные величины и законы их распределения. Случайная величина является количественной характеристикой результата опыта и может принимать различные числовые значения, заранее не известные и зависящие от случайных причин, которые не могут быть учтены. Примерами случайных величин являются долговечность образцов при усталостных и длительных статических испытаниях, пределы текучести и прочности, относительное удлинение, твердость, ударная вязкость и другие характеристики механических свойств материалов.

Случайная величина характеризуется областью возможных значений, которые она может принимать в результате опыта, и вероятностью приобретения этих значений.

Существуют случайные величины двух типов: дискретные (прерывные) и непрерывные. *Дискретная случайная величина* может принимать изолированные одно от другого значения, которые можно заранее перечислить. *Непрерывная случайная величина* может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Например, n образцов испытывают при идентичных условиях на длительную статическую прочность. Испытание образца прекращают, если он не разрушается за базовое время. В этом опыте число неразрушенных образцов m является дискретной случайной величиной, которая может принимать все целые значения от нуля до n . Время до разрушения образцов является непрерывной случайной величиной и может принимать целые и дробные положительные значения в бесконечном или конечном интервале.

Все характеристики механических свойств материалов и деталей являются непрерывными случайными величинами, поэтому в книге им удалено основное внимание.

Наиболее полно случайные величины * могут быть охарактеризованы с помощью функции распределения $F(x)$, представляющей собой вероятность появления значения $X \leq x$:

$$P(X \leq x) = F(x). \quad (1.3)$$

Функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией x (рис. 1.1), т. е. для любых двух чисел x_1 и x_2 при $x_1 < x_2$ удовлетворяется условие $F(x_1) \leq F(x_2)$.

* Случайные величины обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита, а их возможные значения — соответствующими строчными.

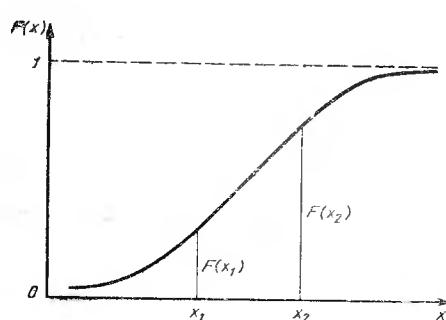


Рис. 1.1. График функции распределения случайной величины

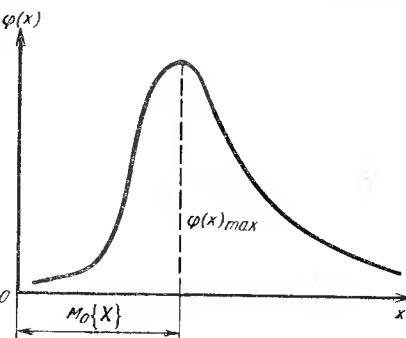


Рис. 1.2. График плотности вероятности, определение моды случайной величины

Вероятность обнаружения случайной величины X в интервале $x_1 < X \leq x_2$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.4)$$

Функция распределения удовлетворяет условиям

$$F(-\infty) = 0 \text{ и } F(\infty) = 1. \quad (1.5)$$

Для непрерывных случайных величин функция распределения имеет производную. Первую производную функции распределения называют **плотностью вероятности**.

$$\varphi(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.6)$$

Плотность вероятности удовлетворяет условию $\varphi(x) \geq 0$ (см. рис. 1.2 и 1.3). Вероятность попадания случайной величины в интервал $x_1 < X \leq x_2$ может быть найдена через плотность вероятности:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx. \quad (1.7)$$

Функция распределения $F(x)$ данной случайной величины связана с ее плотностью вероятности $\varphi(x)$ соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx. \quad (1.8)$$

На основании условий (1.5) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (1.9)$$

Числовые характеристики распределения непрерывных случайных величин. В практических задачах вместо задания функций распределения случайной величины бывает достаточно указать некоторые их **числовые характеристики**, называемые **статистиками**.

Математическое ожидание, или среднее значение случайной величины X , обозначают через $M\{X\}$ или a и определяют по формуле

$$a = M\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx. \quad (1.10)$$

Геометрически математическое ожидание представляет собой абсциссу центра тяжести площади под кривой плотности вероятности.

Модой случайной величины X является такое значение $M_0\{X\}$, в котором плотность вероятности имеет максимальное значение (рис. 1.2).

Медианой случайной величины X служит значение $M_e\{X\}$, которое соответствует условию

$$P(X < M_e\{X\}) = P(X > M_e\{X\}) = 0.5. \quad (1.11)$$

Геометрически медиана представляет абсциссу точек прямой, которая делит площадь, ограниченную кривой плотности вероятности, пополам (рис. 1.3).

В ряде практических задач возникает необходимость определения значения случайной величины x_P , соответствующего заданному уровню вероятности его непревышения P . Это значение случайной величины носит название **квантили**.

Квантиль распределения уровня P определяется из уравнения

$$F(x_P) = P \quad (1.12)$$

или с учетом соотношения (1.3) из уравнения

$$P(X \leq x_P) = P. \quad (1.13)$$

Заметим, что квантиль $x_{0.5}$ в соответствии с (1.11) совпадает с медианой случайной величины.

Одной из основных характеристик рассеяния случайной величины X около центра распределения служит **дисперсия**, которую обозначают через $D\{X\}$ или σ^2 :

$$D\{X\} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \varphi(x) dx. \quad (1.14)$$

Часто вместо дисперсии за меру рассеяния случайной величины принимают положительное значение квадратного корня из дисперсии, которое называют **средним квадратическим отклонением** или **стандартным отклонением**

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (1.15)$$

В практике широко применяют также характеристику рассеяния, называемую **коэффициентом вариации** γ , который представляет отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию:

$$\gamma = \frac{\sigma}{a}. \quad (1.16)$$

Коэффициент вариации показывает, насколько велико рассеяние по сравнению со средним значением случайной величины.

Начальным моментом k -го порядка v_k называют число, определяемое по формуле

$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x) dx. \quad (1.17)$$

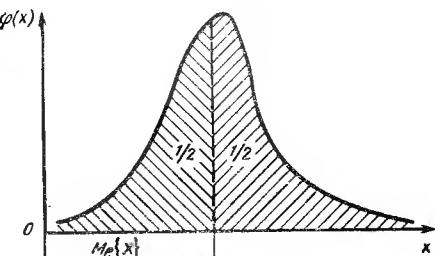


Рис. 1.3. График плотности вероятности, определение медианы случайной величины

Центральный момент k -го порядка μ_k определяют из выражения

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k \varphi(x) dx. \quad (1.18)$$

Для статистической обработки результатов механических испытаний используют моменты первых четырех порядков.

Между начальными и центральными моментами распределения существуют следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= v_2 - v_1^2, \\ \mu_3 &= v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^3, \\ \mu_4 &= v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Первый начальный момент равен математическому ожиданию случайной величины:

$$v_1 = a. \quad (1.20)$$

Первый центральный момент распределения μ_1 равен нулю. Второй центральный момент представляет дисперсию случайной величины:

$$\mu_2 = \sigma^2. \quad (1.21)$$

Третий центральный момент μ_3 используют для вычисления показателя асимметрии распределения:

$$S_h = \mu_3 / \sigma^3. \quad (1.22)$$

Четвертый центральный момент μ_4 применяют для определения показателя эксцесса E_h , являющегося характеристикой крутизны (островершинности) распределения,

$$E_h = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (1.23)$$

Отличные от нуля показатели асимметрии и эксцесса указывают на отклонение рассматриваемого распределения от нормального.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Нормальный закон распределения (закон Гаусса). Нормальный закон распределения имеет фундаментальное значение при обработке результатов механических испытаний и их планировании.

Функция нормального распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (1.24)$$

где a и σ^2 — параметры распределения: математическое ожидание и дисперсия случайной величины X .

Графики функций нормального распределения для различных значений дисперсий и математического ожидания показаны на рис. 1.4.

Нормальная плотность вероятности определяется равенством

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.25)$$

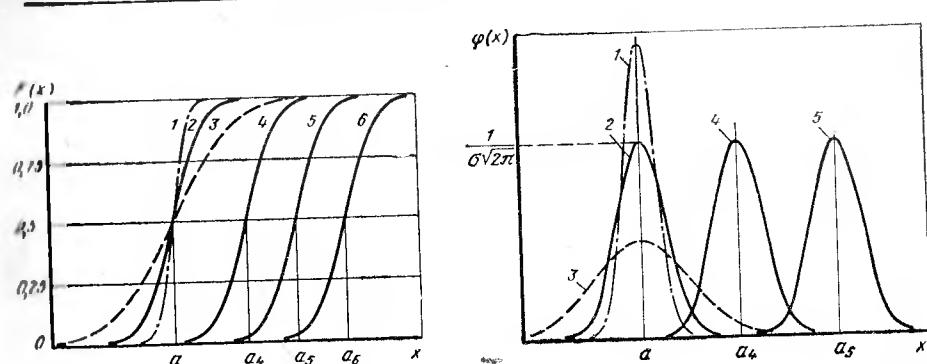


Рис. 1.4. Графики функции нормального распределения:

$$\begin{aligned} 1, 2, 3 - a_1 = a_2 = a_3 = a, \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3; \\ 2, 4, 6 - a_2 < a_4 < a_6, \sigma_2 = \sigma_4 = \\ \text{и } \sigma_6 = \sigma_4 \end{aligned}$$

На рис. 1.5 приведены графики нормальной плотности для различных значений дисперсии и математического ожидания.

График нормальной плотности вероятности имеет максимальную ординату при $x = a$. Через эту же ординату проходит ось симметрии кривой, поэтому у случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения, значения математического ожидания, медианы и моды совпадают, т. е.

$$M\{X\} = M_e\{X\} = M_o\{X\} = a.$$

Для нормально распределенных величин показатели асимметрии распределения (1.22) и эксцесса (1.23) равны нулю.

Если в выражениях (1.24) и (1.25) перейти к новой переменной, называемой нормированной случайной величиной

$$z = \frac{x - a}{\sigma}, \quad (1.26)$$

то

$$\Phi(z) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz; \quad (1.27)$$

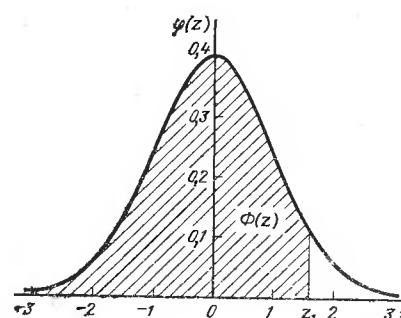
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (1.28)$$

Выражение (1.27) представляет функцию нормального закона распределения нормированной случайной величины (1.26) и называется *нормированной функцией нормального распределения* или *функцией Лапласа*. Геометрически функция Лапласа представляет площадь под кривой $\varphi(z)$ в промежутке от $-\infty$ до z_1 (рис. 1.6). Значения этой функции для различных z приведены в табл. I приложения. Следует иметь в виду, что

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z). \quad (1.29)$$

Функция (1.28) является плотностью вероятности нормированного нормального распределения. Значения этой функции приведены в табл. II приложения. С нормальной плотностью вероятности (1.25) функции (1.28) имеет следующую связь:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi(z). \quad (1.30)$$



Математическое ожидание случайной величины (1.26) $M\{Z\} = 0$, а дисперсия $D\{Z\} = 1$.

Вероятность нахождения в интервале $(-\infty, x_1)$ случайной величины X , следующей нормальному закону распределения, на основании формул (1.3) и (1.27) определяется как

$$P(X \leq x_1) = \Phi(z_1). \quad (1.31)$$

Для интервала (x_1, x_2) соответствующую вероятность можно подсчитать на основании формул (1.4) и (1.27):

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \quad (1.32)$$

где

$$z_1 = (x_1 - a)/\sigma \text{ и } z_2 = (x_2 - a)/\sigma. \quad (1.33)$$

Рис. 1.6. Геометрическое представление функции Лапласа

Пользуясь указанными соотношениями и табл. I приложения, легко можно определить, что вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $a \pm \sigma$ составляет $P \approx 0,68$, в интервал $a \pm 2\sigma P \approx 0,95$ и в интервал $a \pm 3\sigma P \approx 0,997$.

Пример 1.1. Образцы из прессованного дюралюминиевого профиля испытаны на разрыв с целью определения предела прочности σ_B . Требуется определить вероятность попадания значения предела прочности образца в интервал 430–470 МПа, если для случайной величины

Пользуясь формулами (1.33), находим

$$z_1 = \frac{430 - 453}{11,3} = -2,04 \text{ и } z_2 = \frac{470 - 453}{11,3} = 1,50.$$

По табл. I приложения для вычисленных значений z_1 и z_2 определяем

$$\Phi(z_1) = \Phi(-2,04) = 1 - \Phi(2,04) = 1 - 0,97932 = 0,02068;$$

$$\Phi(z_2) = \Phi(1,50) = 0,93319.$$

На основании формулы (1.32) находим

$$P(430 \text{ МПа} < \sigma_B \leq 470 \text{ МПа}) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = 0,93319 - 0,02068 \approx 0,913.$$

Приведенные расчеты показывают, что если испытаниям на разрыв подвергнуть большое число образцов, то около 90 % из них будут иметь напечатания предела прочности, лежащие в указанных интервалах.

Для распределения нормированной случайной величины (1.26) квантиль z_P , соответствующая уровню вероятности P , может быть найдена на основании формулы (1.31) и табл. I приложения. Например, для $P(X \leq x_p) = \Phi(z_p) = 0,9$ из табл. I следует, что $z_p = 1,28$, т. е. вероятности $P = 0,9$ отвечает квантиль нормированного распределения $z_p = z_{0,9} = 1,28$.

Подсчет квантилей для вероятностей, меньших 0,5, производится на основании соотношения

$$z_p + z_{1-P} = 0. \quad (1.34)$$

Так, например, для вероятности $P = 0,1$ квантиль $z_{0,1} = -z_{0,9} = -1,28$. Значения наиболее часто используемых квантилей нормированного нормального распределения приведены в табл. I.1, более подробные — в табл. III приложения.

Квантиль уровня P случайной величины X , подчиняющейся нормальному распределению, определяется в соответствии с (1.26) по формуле

$$x_p = a + z_p \sigma. \quad (1.35)$$

1.1. Значения квантилей нормированного нормального распределения

Вероятность P	Квантиль z_P						
0	$-\infty$	0,05	-1,645	0,5	0	0,975	1,960
0,0001	-3,719	0,1	-1,282	0,6	0,253	0,99	2,326
0,001	-3,090	0,2	-0,842	0,7	0,524	0,995	2,576
0,005	-2,576	0,3	-0,524	0,8	0,842	0,999	3,090
0,01	-2,326	0,4	-0,253	0,9	1,282	0,9999	3,719
0,025	-1,960			0,95	1,645		∞

При использовании нормального распределения для характеристик механических свойств следует иметь в виду отличную от нуля вероятность отрицательных значений характеристик, что накладывает ограничения на использование этого закона. Нормальное распределение не следует применять для тех характеристик механических свойств, коэффициент вариации которых превышает 0,15–0,20. Для металлических конструкционных материалов удовлетворительное соответствие нормальному распределению имеют результаты кратковременных статических и динамических испытаний в случае вязкого разрушения.

Логарифмически нормальное распределение. Нормальное распределение является наиболее хорошо изученным распределением, и к нему часто прибегают даже в том случае, если исследуется случайная величина, не подчиняющаяся нормальному распределению. Такой подход возможен путем соответствующего преобразования исходной случайной величины. Например, для ряда характеристик механических свойств логарифмирование случайной величины приводит к хорошему соответствию результатов испытаний нормальному распределению.

Если логарифм случайной величины X имеет нормальное распределение, то сама случайная величина подчинена логарифмически нормальному распределению.

Функция распределения и плотность вероятности случайной величины $Y = \lg X$ имеют вид, соответствующий (1.24) и (1.25),

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy, \quad (1.36)$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (1.37)$$

где a_y и σ_y^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины $Y = \lg X$.

Все процедуры вычислений и преобразований, изложенные выше, применительно к случайной величине X , действительны и для Y .

Плотность вероятности логарифмически нормального распределения величины X описывается выражением

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{m}{x\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(\lg x - a_y)^2}{2\sigma_y^2}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.38)$$

где $m = \lg e = 0,43429$.

Квантиль уровня P случайной величины X в этом случае определяется из уравнения

$$\lg x_P = a_y + z_P \sigma_y, \quad (1.39)$$

где z_P — квантиль уровня P нормированной случайной величины (см. табл. 1.1).

Медиана, мода, математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации случайной величины X выражаются через параметры распределения величины Y

$$M_\theta \{X\} = x_{0,5} = e^{\frac{a_y}{m}}; \quad (1.40)$$

$$M_0 \{X\} = e^{\frac{a_y}{m} - \frac{\sigma_y^2}{m^2}}; \quad (1.41)$$

$$M \{X\} = e^{\frac{a_y}{m} + \frac{\sigma_y^2}{2m^2}}; \quad (1.42)$$

$$D \{X\} = e^{\frac{2a_y}{m} + \frac{\sigma_y^2}{m^2} \left(e^{\frac{\sigma_y^2}{m^2}} - 1 \right)}; \quad (1.43)$$

$$\gamma \{X\} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{e^{\frac{\sigma_y^2}{m^2}} - 1}}. \quad (1.44)$$

Логарифмически нормальное распределение предусматривает изменение случайной величины от нуля до бесконечности, что также накладывает ограничения на использование этого закона. В ряде случаев полезными являются другие преобразования исходной случайной величины, приводящие к нормальному распределению, например,

$$Y = \lg(X - x_n), \quad Y = \lg \frac{X - x_n}{x_v - X}, \quad (1.45)$$

где x_n и x_v — нижняя и верхняя границы изменения случайной величины X , являющиеся дополнительными параметрами функции распределения.

Удовлетворительное соответствие логарифмически нормальному распределению (1.36)–(1.38) имеют результаты кратковременных статических и динамических испытаний в случае вязкого и смешанного разрушений, а также результаты длительных статических и усталостных испытаний.

Распределение Вейбулла—Гнеденко. Трехпараметрическое распределение Вейбулла—Гнеденко имеет функцию

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_n}{c} \right)^b \right\} & \text{при } x > x_n, \\ 0 & \text{при } x \leq x_n \end{cases} \quad (1.46)$$

и плотность вероятности

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{b}{c} \left(\frac{x - x_n}{c} \right)^{b-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_n}{c} \right)^b \right\} & \text{при } x > x_n, \\ 0 & \text{при } x \leq x_n. \end{cases} \quad (1.47)$$

При этом $c > 0$, $b > 0$ и x_n — нижняя граница изменения случайной величины ($x_n \geq 0$).

Математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации случайной величины X определяются выражениями

$$M \{X\} = c \Gamma \left(1 + \frac{1}{b} \right) + x_n; \quad (1.48)$$

$$D \{X\} = c^2 \left\{ \Gamma \left(1 + \frac{2}{b} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{b} \right) \right\}; \quad (1.49)$$

$$\gamma \{X\} = \frac{c \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{b} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{b} \right)}}{c \Gamma \left(1 + \frac{1}{b} \right) + x_n}, \quad (1.50)$$

где $\Gamma(y)$ — гамма-функция y , $\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$.

Квантиль уровня P случайной величины X

$$x_P = x_n + c [-\ln(1-P)]^{1/b}, \quad (1.51)$$

квантиль уровня $P = 0,632$ $x_{0,632} = c + x_n$, медиана в соответствии с (1.51) определяется выражением

$$x_{0,5} = x_n + c (\ln 2)^{1/b}. \quad (1.52)$$

При $x_n = 0$ имеем двухпараметрическое распределение Вейбулла—Гнеденко с функцией

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x}{c} \right)^b \right\} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

и плотностью вероятности

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{b}{c} \left(\frac{x}{c} \right)^{b-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{c} \right)^b \right\} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.54)$$

В этом случае коэффициент вариации (1.50) определяется только параметром b .

Квантиль уровня P вычисляют по формуле (1.51) для $x_n = 0$, квантиль уровня

$P = 0,632$ $x_{0,632} = c$, медиана определяется выражением (1.52) для случая $x_n = 0$.

Распределение (1.53) при $b = 1$ является экспоненциальным (показательным),

имеющим функцию

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

и плотность вероятности

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Параметр $\lambda > 0$ однозначно определяет математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ,

$$M \{X\} = \frac{1}{\lambda} \text{ и } D \{X\} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (1.57)$$

Распределение Вейбулла—Гнеденко используют для аппроксимации результатов кратковременных статических и динамических испытаний в случае хрупкого разрушения образцов, а также результатов испытаний на многоцикловую усталость.

ГРАФИК ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ВЕРОЯТНОСТНОЙ СЕТКЕ

Построение графиков функции распределения случайной величины в равномерных координатах (см. рис. 1.1 и 1.4) является трудоемким в связи со сложностью соответствующих уравнений. Эта процедура значительно упрощается путем использования вероятностной сетки (вероятностной бумаги), на которой функция распределения изображается прямой линией. Применение вероятностной сетки очень удобно и при сопоставлении функций распределения характеристик механических свойств в связи с вариациями уровней технологических, конструкционных или эксплуатационных факторов.

Правила построения и применения вероятностных сеток регламентируются ГОСТ 11.008—75.

При построении вероятностной сетки для нормального распределения вдоль оси абсцисс в равномерном масштабе наносят шкалу значений случайной величины x , а по оси ординат также в равномерном масштабе — шкалу значений нормированной случайной величины z (1.26). Параллельно со шкалой z строят шкалу функции нормального распределения, значения которой определяются по формуле (1.27) или берут из табл. I приложения для соответствующих значений z . Нормальная вероятностная сетка показана на рис. 1.7, где для удобства представления опытных данных шкала функции распределения имеет более мелкие деления, чем шкала z .

Согласно уравнению (1.35) график функции нормального распределения на вероятностной сетке изображается прямой с угловым коэффициентом $1/\sigma$, проходящей через точку с координатами $x = a$ и $z = 0$ (т. е. $F = 0,5$). Графики функции нормального распределения для различных значений математического ожидания и

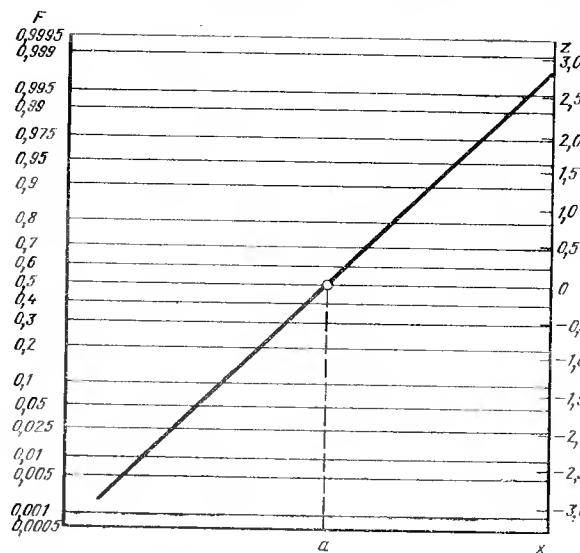


Рис. 1.7. Вероятностная сетка для нормального распределения

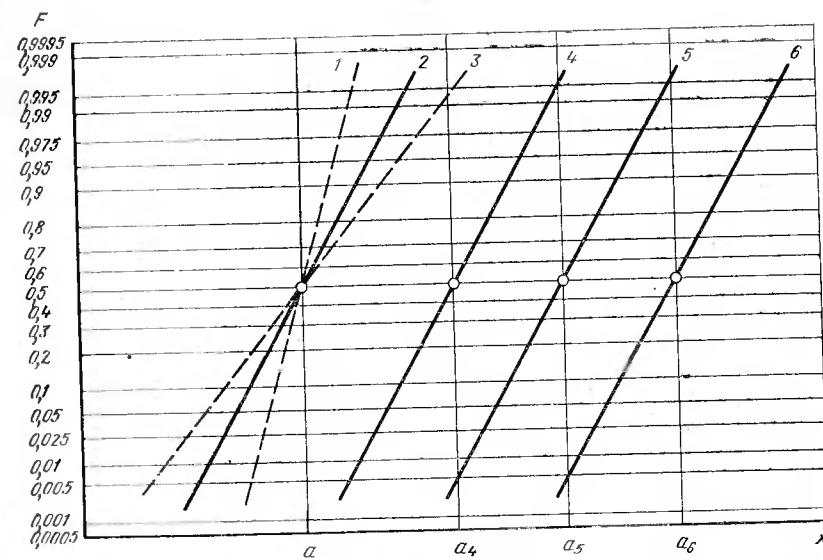


Рис. 1.8. Графики функции нормального распределения на вероятностной сетке: 1, 2, 3 — $a_1 = a_3 = a_5 = a$, $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_5$; 2, 4, 5, 6 — $a_2 < a_4 < a_6 < a_5$, $\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6$. При использовании нормальной вероятностной сетки представляют систему прямых линий, показанных на рис. 1.8.

При испытаниях на усталость число циклов до разрушения N и при длительных статических испытаниях время до разрушения t хорошо согласуются с логарифмически нормальным законом распределения, т. е. в этих случаях нормально распределенными являются случайные величины $x = \lg N$ и $x = \lg t$, и для обработки

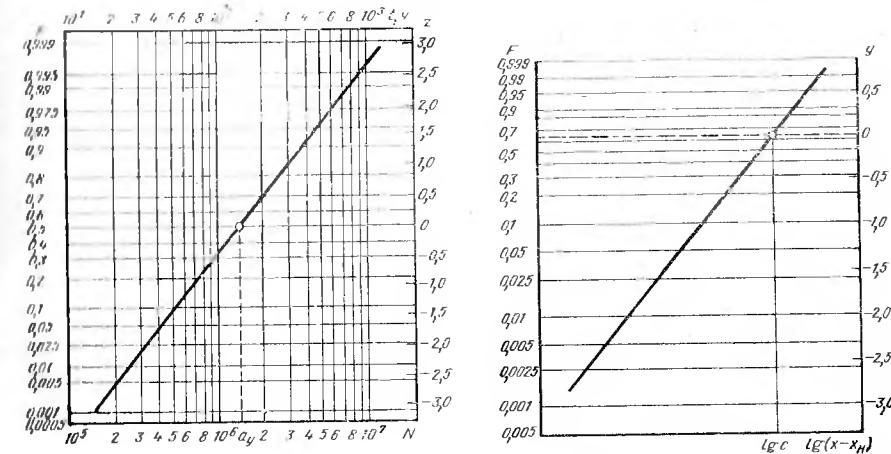


Рис. 1.9. Вероятностная сетка для логарифмически нормального распределения

Рис. 1.10. Вероятностная сетка для трехпараметрического распределения Вейбулла—Гнеденко

результатов используют логарифмическую нормальную вероятностную сетку (рис. 1.9). В отличие от вероятностной сетки для нормального закона эта сетка имеет логарифмический масштаб по оси абсцисс.

При построении вероятностной сетки для трехпараметрического распределения Вейбулла—Гнеденко (1.46) вдоль оси абсцисс в равномерном масштабе располагают шкалу значений величины $\lg(x - x_n)$ или в логарифмическом масштабе — шкалу значений $x - x_n$. Вдоль оси ординат в равномерном масштабе строят шкалу величины y и шкалу соответствующих значений функции распределения F (1.46), связанных с величиной y формулой

$$y = \lg [-\ln(1 - F)]. \quad (1.58)$$

В соответствии с уравнением

$$\lg [-\ln(1 - F)] = b [\lg(x - x_n) - \lg c], \quad (1.59)$$

полученным двойным логарифмированием уравнения (1.46), график функции распределения Вейбулла—Гнеденко на вероятностной сетке изображается прямой с угловым коэффициентом b , проходящей через точку с координатами $x - x_n = c$ и $y = 0$ (т. е. $F = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$). Вероятностная сетка для трехпараметрического распределения Вейбулла—Гнеденко показана на рис. 1.10. Эта же сетка может быть использована и для двухпараметрического распределения (1.53), если принять $x_n = 0$.

Вероятностная сетка для экспоненциального распределения (1.55) имеет равномерную шкалу по оси абсцисс. По оси ординат строят равномерную шкалу для величины y и шкалу соответствующих значений функции распределения F (1.55), связанных с величиной y уравнением

$$y = -\ln(1 - F). \quad (1.60)$$

Часто при использовании вероятностных сеток для построения графиков функции распределения характеристик механических свойств равномерную шкалу по оси ординат опускают, а шкалу значений функции распределения F в соответствии с уравнением (1.3) обозначают буквой P , означающей вероятность непревышения случайной величиной задаваемого значения.

ГЛАВА 2

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Если в результате испытаний измеряют непосредственно изучаемую характеристику механических свойств, то такие испытания называют *прямыми*. К прямым испытаниям относят, например, кратковременные статические и динамические испытания с целью определения характеристик упругости, прочности, сопротивления пластическим деформациям, пластичности, твердости, ударной вязкости и т. д., и также длительные статические испытания и испытания на усталость с целью определения долговечности при фиксированных условиях испытания. К *косвенным* испытаниям относят испытания на усталость с целью построения кривой усталости и определения предела выносливости, длительные статические испытания с целью построения кривой длительной статической прочности и определения предела длительной статической прочности и т. д.

В настоящей главе приведена методика статистической обработки, применяющаяся для анализа результатов прямых механических испытаний. Эта же методика используется и для обработки косвенных испытаний, однако в этом случае обработка носит лишь предварительный характер.

ПОНЯТИЕ О ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ И ВЫБОРКЕ

Механические свойства материала и несущую способность конструкций обычно изучают путем испытаний ограниченного числа образцов. В связи с неоднородностью конструкционных материалов найденные таким образом числовые характеристики механических свойств в большей или меньшей степени отличаются от так называемых *генеральных характеристик*, которые могут быть определены по результатам испытаний бесконечно большого числа образцов. Эту неограниченно большую обобщающую совокупность образцов (результатов испытаний), которые могут быть выделены из исследуемого материала или полуфабриката, называют *генеральной совокупностью*. Ограниченнную совокупность образцов (результатов испытаний), являющуюся частью генеральной совокупности, называют *выборкой*, а значения характеристик, вычисленные по результатам испытания выборки, называют *выборочными характеристиками (статистиками)* или *оценками генеральных характеристик*.

Понятие генеральной совокупности зависит от условий поставленной задачи. Если исследователя интересуют механические свойства материала определенной марки, то под генеральной совокупностью в этом случае следует понимать характеристики механических свойств образцов, которые могли быть выделены и испытаны из всего объема продукции материала этой марки. Часто интересуются свойствами материала плавки. В этом случае генеральная совокупность представляет собой результаты испытаний всех образцов, которые могут быть получены из материала этой плавки.

Генеральные числовые характеристики механических свойств, параметры функций распределения являются детерминированными величинами, а выборочные, т. е. их оценки, — случайными. Отмеченная выше разница в выборочных и генеральных характеристиках зависит от объема испытаний n и используемой методики статистического анализа их результатов.

К оценкам предъявляются следующие требования:

- с увеличением объема выборки n оценка $\hat{\theta}$ должна приближаться, т. е. сходиться по вероятности, к генеральному значению числовых характеристики θ . Иными словами, вероятность события, заключающегося в непревышении разницы между

оценкой и генеральной характеристикой $|\hat{\theta} - \theta|$ сколь угодно малой величины ϵ , при увеличении объема выборки должна неограниченно приближаться к единице, т. е.

$P(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) \rightarrow 1$. Оценку, обладающую этим свойством, называют *состо-
тальной*;

б) оценка не должна давать систематическую ошибку в сторону завышения или занижения числовых характеристик или параметра, т. е. $M\{\hat{\theta}\} = \theta$. Такую оценку называют *несмещенной*;

в) оценка должна быть *эффективной*, т. е. обладать по сравнению с другими ценками наименьшей дисперсией $D\{\hat{\theta}\} = \min$.

Используемые в математической статистике оценки не всегда удовлетворяют одновременно всем этим требованиям.

При первичной обработке статистический материал, полученный в результате испытаний n объектов (образцов),

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(n)}, \quad (2.1)$$

где $x_{(i)}$ — значение характеристики механических свойств образца под номером (i) , взятое в порядке испытания, обычно представляют в виде *вариационного ряда*

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n. \quad (2.2)$$

Каждому наблюденному значению характеристики механических свойств может быть поставлена в соответствие накопленная частота события (1.2), заключающегося в том, что $x \leq x_i$, т. е.

$$W(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < x_1; \\ \frac{i}{n} & \text{для } x_i \leq x < x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1; \\ 1 & \text{для } x \geq x_n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Вариационный ряд (2.2) и соответствующие накопленные частоты (2.3) образуют так называемое *выборочное или эмпирическое распределение*. Выборочное распределение представляют в табличном или графическом виде.

ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вычисление выборочных числовых характеристик при малом объеме выборки ($n < 50$). Выборочное среднее значение характеристики механических свойств

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (2.4)$$

где x_i — значение характеристики отдельных образцов; n — число испытанных образцов (объем выборки).

Выборочная медиана при нечетном объеме выборки $n = 2m - 1$ равна среднему члену вариационного ряда:

при четном объеме $n = 2m$ $x_{0,5} = x_m$, (2.5)

$$x_{0,5} = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}. \quad (2.6)$$

Выборочная дисперсия характеристики механических свойств

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.7)$$

или с учетом соотношений (1.19) и (1.21)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение и выборочный коэффициент вариации определяют по формулам, аналогичным (1.15) и (1.16):

$$s = \sqrt{s^2}, \quad (2.9)$$

$$v = \frac{s}{x}. \quad (2.10)$$

Вычисление выборочных моментов третьего и четвертого порядков при объеме $n < 50$ целесообразно в связи с их большими вероятными отклонениями от генеральных моментов.

Для нормально распределенной генеральной совокупности оценки (2.4), (2.7), (2.8) являются *состо-
тальными, эффективными и несмещенными*. Оценка (2.9) является *эффективной, состоятельной, но смещенной*. Несмещенная оценка среднего квадратического отклонения

$$s_1 = ks, \quad (2.11)$$

где k — поправочный коэффициент, значения которого приведены в табл. 2.1 в зависимости от объема выборки n .

Пример 2.1. В табл. 2.2 приведен вариационный ряд значений предела прочности образцов из дюраломиниевого прессованного профиля. Требуется вычислить значения выборочных среднего \bar{x} , медианы $x_{0,5}$, дисперсии s^2 , среднего квадратического отклонения s и коэффициента вариации v .

В первой графе указан номер образца в вариационном ряду. Результаты вычислений, приведенных в четвертой графе, будут использованы в следующем разделе.

По формуле (2.4) находим выборочное среднее значение предела прочности

$$\bar{x} = \bar{\sigma}_B = \frac{9060}{20} = 453 \text{ МПа.}$$

Выборочная медиана в соответствии с формулой (2.6)

$$x_{0,5} = \frac{1}{2} (451 + 452) = 451,5 \text{ МПа.}$$

2.1. Значения поправочного коэффициента k

n	k	n	k	n	k
2	1,253	11	1,025	20	1,013
3	1,128	12	1,023	25	1,010
4	1,085	13	1,021	30	1,008
5	1,064	14	1,019	35	1,007
6	1,051	15	1,018	40	1,006
7	1,042	16	1,017	45	1,006
8	1,036	17	1,016	50	1,005
9	1,032	18	1,015	55	1,004
10	1,028	19	1,014	60	1,004

2.2. Статистическая обработка результатов испытаний на разрыв образцов из дюралюминиевого прессованного профиля

i	$x_i = \sigma_{bi}$, МПа	x_i^2	$W(x)$	i	$x_i = \sigma_{bi}$, МПа	x_i^2	$W(x)$
1	434	188 356	0,025	14	458	209 764	0,675
2	436	190 096	0,075	15	458	209 764	0,725
3	443	196 249	0,125	16	462	213 444	0,775
4	445	198 025	0,175	17	462	213 444	0,825
5	445	198 025	0,225	18	468	219 024	0,875
6	446	198 916	0,275	19	472	222 784	0,925
7	447	199 809	0,325	20	477	227 529	0,975
8	447	199 809	0,375				
9	448	200 704	0,425				
10	451	203 401	0,475				
11	452	204 304	0,525				
12	453	205 209	0,575				
13	456	207 936	0,625				
				$n=20$	$\sum_{i=1}^n x_i =$ $= 9060$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 =$ $= 4106592$	

Выборочную дисперсию вычисляем по формуле (2.8):

$$s^2 = \frac{1}{19} (410659 - \frac{1}{20} 9060^2) = 126,9.$$

Смещенную оценку среднего квадратического отклонения определяем по формуле (2.9):

$$s = \sqrt{126,9} = 11,26 \text{ МПа.}$$

По формуле (2.11) и табл. 2.1 находим несмещенную оценку среднего квадратического отклонения:

$$s_1 = 1,013 \cdot 11,26 = 11,41 \text{ МПа.}$$

Выборочный коэффициент вариации

$$v = \frac{s_1}{\bar{x}} = \frac{11,41}{453} = 0,0252.$$

Вычисление выборочных числовых характеристик при большом объеме выборки ($n > 50$). В этом случае необходимо предварительно систематизировать исходные данные, что при $n < 50$ является лишь желательным. Систематизация заключается в представлении результатов испытаний в виде вариационного ряда (2.2).

Далее производят группировку результатов испытания, для чего размак *варьирования* рассматриваемой характеристики

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (2.12)$$

или применительно к (2.2)

$$R = x_n - x_1 \quad (2.13)$$

разбивают при $n > 80$ на 7–20 равных интервалов и подсчитывают частоту (число наблюдений), заключенных в каждом интервале.

Выборочное среднее значение характеристики механических свойств

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^e x_j n_j}{n}, \quad (2.14)$$

где x_j — значение характеристики механических свойств в середине j -го интервала; n_j — частота, или число наблюдений, заключенное в j -м интервале; e — число интервалов.

Для этого случая выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^e n_j (x_j - \bar{x})^2, \quad (2.15)$$

однако проще ее вычислять по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^e x_j^2 n_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^e x_j n_j \right)^2 \right]. \quad (2.16)$$

Группировка данных приводит к некоторой неточности расчета \bar{x} и s^2 по формулам (2.14)–(2.16) по сравнению с формулами (2.4), (2.7) и (2.8), однако получаемый при этом погрешность можно пренебречь, если $e \geq 7$.

Выборочное среднее квадратическое отклонение и выборочный коэффициент вариации определяются по формулам (2.9) и (2.10) без поправки на смещение (2.11).

В тех случаях, когда возникает необходимость вычисления показателей асимметрии и эксцесса выборочного распределения, предварительно находят выборочные центральные моменты распределения:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^e x_j n_j; \\ h_2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^e x_j^2 n_j; \\ h_3 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^e x_j^3 n_j; \\ h_4 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^e x_j^4 n_j. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Затем вычисляют выборочные центральные моменты

$$\left. \begin{aligned} m_3 &= h_3 - 3h_2 h_1 + 2h_1^3; \\ m_4 &= h_4 - 4h_3 h_1 + 6h_2 h_1^2 - 3h_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

После этого находят выборочные показатели асимметрии и эксцесса

$$\hat{S}_k = \frac{m_3}{s^3}; \quad (2.19)$$

$$\hat{E}_k = \frac{m_4}{s^4} - 3. \quad (2.20)$$

Пример 2.2. В табл. 2.3 приведен вариационный ряд значений логарифма долговечности образцов диаметром 8 мм из алюминиевого сплава АВ, испытанных на консольный изгиб с приложением при напряжении $\sigma_{\max} = 150$ МПа. Требуется вычислить значение статистик, указанных в примере 2.1, а также выборочные значения показателей асимметрии и эксцесса для случайной величины $x = \lg N$.

Для этого предварительно по табл. 2.3 на основании формулы (2.13) определяем размак варьирования логарифма долговечности образцов:

$$R = 7,4586 - 5,8669 = 1,5917.$$

Размак разбиваем на равные интервалы. Ориентировочную длину интервала определяем как

$$\Delta x \approx \frac{R}{12} = \frac{1,5917}{12} = 0,133.$$

2.3. Вариационный ряд значений логарифма долговечности образцов из алюминиевого сплава АВ

i	$x_i = \lg N_i$						
1	5,8669	26	6,3310	51	6,5224	76	6,7275
2	5,9164	27	6,3688	52	6,5431	77	6,7275
3	6,0216	28	6,3746	53	6,5464	78	6,7392
4	6,0386	29	6,3811	54	6,5578	79	6,7432
5	6,0426	30	6,3829	55	6,5603	80	6,7538
6	6,0445	31	6,3829	56	6,5607	81	6,7809
7	6,0645	32	6,3918	57	6,5654	82	6,7975
8	6,0799	33	6,3967	58	6,5655	83	6,7975
9	6,0821	34	6,4076	59	6,5793	84	6,7988
10	6,1062	35	6,4089	60	6,5823	85	6,8038
11	6,1082	36	6,4094	61	6,5916	86	6,8142
12	6,1183	37	6,4216	62	6,5957	87	6,8169
13	6,1186	38	6,4328	63	6,6096	88	6,8649
14	6,1238	39	6,4342	64	6,6471	89	6,8717
15	6,1605	40	6,4620	65	6,6474	90	6,8977
16	6,1685	41	6,4630	66	6,6739	91	6,9051
17	6,1746	42	6,4646	67	6,6739	92	6,9109
18	6,1801	43	6,4704	68	6,6780	93	6,9189
19	6,1892	44	6,4713	69	6,6896	94	6,9299
20	6,1951	45	6,4842	70	6,6916	95	6,9545
21	6,2071	46	6,4975	71	6,7000	96	7,0824
22	6,2100	47	6,4984	72	6,7086	97	7,1682
23	6,2297	48	6,5179	73	6,7132	98	7,2603
24	6,2608	49	6,5201	74	6,7178	99	7,2775
25	6,3115	50	6,5214	75	6,7197	100	7,4586

За длину интервала принимаем $\Delta x = 0,15$. Границы интервалов, а также число наблюдений приведены в табл. 2.4, составленной на основании данных табл. 2.3. В табл. 2.4 даны вычисления, необходимые для определения указанных статистик. Последовательность вычислений ясна из табл. 2.4. По формуле (2.14) вычисляем выборочное среднее значение логарифма числа циклов до разрушения образцов:

$$\bar{x} = \lg \bar{N} = \frac{651,5}{100} = 6,515.$$

Выборочная медиана в соответствии с формулой (2.6)

$$x_{0,5} = \frac{1}{2} (6,5214 + 6,5224) = 6,5219.$$

Выборочную дисперсию находим по формуле (2.16):

$$s^2 = \frac{1}{99} \left(4254,355 - \frac{1}{100} 651,5^2 \right) = 0,09932.$$

Далее, по формулам (2.9) и (2.10) вычисляем выборочное среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации:

$$s = \sqrt{0,09932} = 0,315;$$

$$v = \frac{0,315}{6,515} = 0,0484.$$

Для вычисления выборочных показателей асимметрии и эксцесса по формулам (2.17) определяем оценки начальных моментов первых четырех порядков: $h_1 = \frac{651,5}{100} = 6,515$; $h_2 = \frac{4254,355}{100} = 42,5435$; $h_3 = \frac{27845,9451}{100} = 278,45945$; $h_4 = \frac{182684,8332}{100} = 1826,848332$ и по формулам (2.18) — оценки центральных моментов третьего и четвертого порядка: $m_3 = 278,45945 - 3 \cdot 42,5435 \cdot 6,515 + 2 \cdot 6,515^3 = 0,00705$; $m_4 = 1826,848332 - 4 \cdot 278,45945 \times 6,515 + 6 \cdot 42,5435 \cdot 6,515^2 - 3 \cdot 6,515^4 = 0,026974$.

Значение выборочных показателей асимметрии и эксцесса вычисляем по формулам (2.19) и (2.20):

$$\hat{s}_h = \frac{0,00705}{0,315^3} = 0,226; \quad \hat{E}_h = \frac{0,026974}{0,315^4} - 3 = -0,260.$$

2.4. Статистическая обработка результатов испытаний на усталость на консольный изгиб с вращением образцов из алюминиевого сплава АВ

№ по пор.	Границы интервала	Средина интервала x_j	Число наблюде- ний n_j	$n_j x_j$	$n_j x_j^2$	$n_j x_j^3$	$n_j x_j^4$
1	5,825—5,975	5,90	2	11,80	69,6200	410,7580	2 423,4722
2	5,975—6,125	6,05	12	72,60	439,2300	2 657,3415	16 076,9161
3	6,125—6,275	6,20	10	62,00	384,4000	2 383,2800	14 776,3360
4	6,275—6,425	6,35	13	82,55	524,1925	3 328,6224	21 136,7522
5	6,425—6,575	6,50	21	136,50	887,2500	5 767,1250	37 486,3125
6	6,575—6,725	6,65	17	113,05	751,7825	4 999,3536	33 245,7014
7	6,725—6,875	6,80	14	95,20	647,3600	4 402,0480	29 933,9264
8	6,875—7,025	6,95	6	41,70	289,8150	2 014,2143	13 998,7894
9	7,025—7,175	7,10	2	14,20	100,8200	715,8220	5 082,3362
10	7,175—7,325	7,25	2	14,50	105,1250	762,1563	5 525,6332
11	7,325—7,475	7,40	1	7,40	54,7600	405,2240	2 998,6576
Сумма			100	651,50	4254,3550	27 845,9451	182 684,8332

Оценка среднего квадратического отклонения по результатам испытаний нескольких выборок. Если из нормально распределенной генеральной совокупности испытано m выборок объемом n каждая, то оценкой генерального среднего квадратического отклонения может служить статистика, вычисляемая по формуле

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m s_i^2}{m n}} \quad (2.21)$$

где s_i — выборочное среднее квадратическое отклонение случайной величины, определяемое по формуле (2.9); α_n — коэффициент, приведенный в табл. 2.5 в зависимости от объема выборки.

Другим методом оценки среднего квадратического отклонения по совокупности малых выборок является метод оценки по размахам варьирования случайной величины в каждой выборке, который применим при постоянном объеме выборки

2.5. Значения коэффициентов для оценки среднего квадратического отклонения

n	α_n	β_n	γ_n	n	α_n	β_n	γ_n
2	0,5642	1,128	0,756	11	0,9300	3,173	0,248
3	0,7236	1,693	0,525	12	0,9359	3,258	0,239
4	0,7979	2,059	0,427	13	0,9410	3,336	0,231
5	0,8407	2,326	0,371	14	0,9453	3,407	0,224
6	0,8686	2,534	0,335	15	0,9490	3,472	0,217
7	0,8882	2,704	0,308	16	0,9523	3,532	0,212
8	0,9027	2,847	0,288	17	0,9551	3,588	0,207
9	0,9139	2,970	0,272	18	0,9576	3,640	0,203
10	0,9227	3,078	0,259	19	0,9599	3,689	0,199
				20	0,9619	3,735	0,195

взятой из нормально распределенной генеральной совокупности. В этом случае оценку подсчитывают по формуле

$$s = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m\beta_n}, \quad (2.22)$$

где R_i — размах вариации случайной величины в i -й выборке; β_n — величина, зависящая от объема выборки (см. табл. 2.5).

Оценка параметров нормального и логарифмически нормального распределений. Правила определения оценок для параметров нормального распределения регламентирует ГОСТ 11.004—74.

Параметры a и σ^2 нормального распределения (1.24) представляют собой соответственно математическое ожидание и дисперсию случайной величины. Оценка параметра a совпадает с величиной \bar{x} ($\hat{a} = \bar{x}$), ее вычисляют по формуле (2.4) или (2.14). Аналогичное соотношение имеет место между оценкой параметра σ^2 и статистикой s^2 ($\hat{\sigma}^2 = s^2$), которую вычисляют по формуле (2.8) или (2.16).

Таким образом, если выборку, приведенную в табл. 2.3, аппроксимировать функцией нормального распределения (1.24), то оценки параметров этой функции будут равны $\hat{a} = \bar{x} = 453$ МПа, $\hat{\sigma}^2 = s^2 = 126,9$ (см. пример 2.1).

Правила определения оценок для параметров логарифмически нормального распределения регламентируют ГОСТ 11.009—79.

Параметры a_y и σ_y^2 логарифмически нормального распределения (1.36) являются соответственно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины $Y = \lg X$. Поэтому оценка параметра a_y совпадает с величиной \hat{y} ($\hat{a}_y = \hat{y}$), ее вычисляют по формуле (2.4) или (2.14) с заменой в указанных формулах величины x_i на y_i . Такое же соотношение имеет место между оценкой параметра σ_y^2 и статистикой s_y^2 ($\hat{\sigma}_y^2 = s_y^2$), которую вычисляют по формуле (2.8) или (2.16) также в заменой величины x_i на y_i .

В соответствии с этим при аппроксимации выборки, приведенной в табл. 2.3, функцией логарифмически нормального закона распределения (1.36) оценки параметров функции будут $\hat{a}_y = \bar{y} = 6,515$ и $\hat{\sigma}_y^2 = s_y^2 = 0,09932$ (см. пример 2.2).

Статистики случайной величины X могут быть рассчитаны по формулам (1.40)—(1.44) путем замены параметров a_y и σ_y^2 на соответствующие оценки \hat{a}_y и $\hat{\sigma}_y^2$.

Для сокращения стоимости и времени испытаний на длительную статическую прочность, малоцикловую и многоцикловую усталость испытания образцов можно прекращать при достижении ими базового значения долговечности (t_b в часах, N_b в циклах). В этих условиях образуется так называемая *цензурированная справа выборка*, содержащая n элементов, m из которых разрушились до базовой долговечности, а $n - m$ сняты с испытания, так как имеют долговечность больше базовой. Вариационный ряд в этом случае имеет вид

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_m, \quad m < n. \quad (2.23)$$

У остальных $n - m$ образцов значения $x > x_b$, т. е. больше базового значения.

Пусть генеральная совокупность, из которой взята выборка, имеет логарифмически нормальное распределение (или нормальное распределение для логарифма случайной величины), тогда оценку параметров функций распределения по результатам выборки производят следующим образом.

Вначале определяют значение степени усечения выборки, представляющей собой отношение числа неразрушившихся до базовой долговечности объектов $n - m$ к общему их числу n , подвергнутых испытаниям,

$$W = (n - m)/n. \quad (2.24)$$

Далее вычисляют значение

$$y = \frac{m \sum_{i=1}^m (x_b - x_i)^2}{2 \left[\sum_{i=1}^m (x_b - x_i) \right]^2}, \quad (2.25)$$

где $x_i = \lg N_i$ (или $x_i = \lg t_i$), $x_b = \lg N_b$ (или $x_b = \lg t_b$), и по табл. 2.6 в соответствии с вычисленными значениями W и y находят величину u , представляющую собой оценку для нормированной точки усечения.

Оценку математического ожидания вычисляют по формуле

$$\bar{x} = a = x_b + us, \quad (2.26)$$

а оценку среднего квадратического отклонения определяют как

$$s = \frac{\sum_{i=1}^m (x_b - x_i)}{(n - m) \varphi_1(u) - mu}, \quad (2.27)$$

где $\varphi_1(u)$ определяют по табл. 2.7 по найденному значению u .

Пример 2.3. По данным примера 2.2 произвести оценку математического ожидания и среднего квадратического отклонения при условии, что испытания образцов на усталость прекращали при достижении базы $N_b = 5 \cdot 10^6$ циклов, т. е. $x_b = \lg N_b = 6,6990$.

По табл. 2.3 находим $m = 70$ и по формуле (2.24) вычисляем

$$W = \frac{100 - 70}{100} = 0,30.$$

Далее по формуле (2.25) вычисляем y . В данном случае

$$y = \frac{70 \cdot 10,64344}{2 \cdot 22,934^2} = 0,7083.$$

По табл. 2.6 для $W = 0,30$ и $y = 0,7083$ путем линейной интерполяции находим

$$u = -0,550 - \frac{(-0,550 + 0,561) (0,710 - 0,7083)}{0,710 - 0,700} = -0,552.$$

По табл. 2.7 для $u = -0,552$ находим значение $\varphi_1(-0,552) = 1,1795$ и по формуле (2.27) производим оценку среднего квадратического отклонения:

$$s = \frac{22,294}{(100 - 70) 1,1795 + 70 \cdot 0,552} = 0,301.$$

По формуле (2.26) производим оценку математического ожидания:

$$\bar{x} = a = 6,6990 - 0,552 \cdot 0,301 = 6,533.$$

Оценка параметров распределения Вейбулла—Гнеденко. Правила определения оценок для параметров распределения Вейбулла—Гнеденко регламентируются ГОСТ 11.007—75.

Вначале вычисляют по формулам (2.4) и (2.9) оценки математического ожидания (\bar{x}) и среднего квадратического отклонения (s) случайной величины X и по ним величину

$$\rho_b = \frac{\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{s^3}. \quad (2.28)$$

Далее по табл. IV приложения находят оценку b параметра в функции (1.46) для вычисленного по (2.28) значения ρ_b .

y	$W = 0.05$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,500		-2,680	-1,985	-1,537	-1,207	-0,943	-0,720	-0,523	-0,345	-0,178
0,505		-2,555	-1,921	-1,499	-1,182	-0,925	-0,707	-0,514	-0,338	-0,173
0,510		-2,445	-1,852	-1,463	-1,158	-0,909	-0,695	-0,505	-0,331	-0,168
0,515		-2,349	-1,809	-1,429	-1,135	-0,883	-0,683	-0,496	-0,325	-0,163
0,520		-2,263	-1,759	-1,398	-1,114	-0,877	-0,672	-0,488	-0,318	-0,158
0,525	-2,922	-2,185	-1,714	-1,368	-1,093	-0,863	-0,661	-0,480	-0,312	-0,154
0,530	-2,786	-2,115	-1,671	-1,340	-1,074	-0,849	-0,651	-0,472	-0,306	-0,149
0,535	-2,667	-2,051	-1,632	-1,314	-1,055	-0,835	-0,641	-0,464	-0,300	-0,144
0,540	-2,562	-1,992	-1,595	-1,289	-1,037	-0,822	-0,631	-0,457	-0,295	-0,140
0,545	-2,468	-1,939	-1,560	-1,265	-1,020	-0,809	-0,621	-0,450	-0,289	-0,136
0,550	-2,384	-1,889	-1,528	-1,242	-1,004	-0,797	-0,612	-0,443	-0,284	-0,132
0,555	-2,308	-1,843	-1,497	-1,221	-0,988	-0,786	-0,603	-0,436	-0,278	-0,128
0,560	-2,239	-1,800	-1,468	-1,200	-0,973	-0,774	-0,595	-0,429	-0,273	-0,124
0,565	-2,175	-1,760	-1,441	-1,180	-0,959	-0,763	-0,587	-0,423	-0,268	-0,120
0,570	-2,117	-1,722	-1,415	-1,162	-0,945	-0,753	-0,579	-0,416	-0,263	-0,116
0,575	-2,063	-1,686	-1,390	-1,144	-0,932	-0,743	-0,571	-0,410	-0,258	-0,112
0,580	-2,013	-1,653	-1,366	-1,127	-0,919	-0,738	-0,563	-0,404	-0,254	-0,108
0,585	-1,966	-1,621	-1,344	-1,110	-0,906	-0,723	-0,555	-0,399	-0,249	-0,105
0,590	-1,923	-1,591	-1,322	-1,094	-0,894	-0,714	-0,548	-0,393	-0,245	-0,101
0,595	-1,882	-1,563	-1,302	-1,079	-0,882	-0,705	-0,541	-0,387	-0,240	-0,098
0,600	-1,844	-1,536	-1,282	-1,064	-0,871	-0,696	-0,534	-0,382	-0,236	-0,094
0,610	-1,773	-1,486	-1,245	-1,036	-0,850	-0,679	-0,521	-0,371	-0,228	-0,087
0,620	-1,710	-1,441	-1,211	-1,010	-0,829	-0,663	-0,508	-0,361	-0,220	-0,081
0,630	-1,654	-1,399	-1,180	-0,986	-0,810	-0,648	-0,496	-0,352	-0,212	-0,075
0,640	-1,602	-1,360	-1,150	-0,963	-0,792	-0,634	-0,485	-0,343	-0,204	-0,069

β	$W = 0.05$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,650	-1,555	-1,325	-1,123	-0,941	-0,775	-0,620	-0,474	-0,334	-0,197	-0,063
0,660	-1,512	-1,292	-1,097	-0,921	-0,759	-0,607	-0,463	-0,325	-0,190	-0,058
0,670	-1,472	-1,261	-1,073	-0,922	-0,744	-0,595	-0,463	-0,317	-0,184	-0,052
0,680	-1,435	-1,233	-1,050	-0,884	-0,729	-0,583	-0,444	-0,309	-0,177	-0,047
0,690	-1,401	-1,206	-1,029	-0,865	-0,715	-0,572	-0,434	-0,301	-0,171	-0,042
0,700	-1,369	-1,180	-1,009	-0,850	-0,702	-0,561	-0,425	-0,294	-0,166	-0,037
0,710	-1,339	-1,156	-0,989	-0,834	-0,689	-0,550	-0,417	-0,287	-0,160	-0,032
0,720	-1,311	-1,134	-0,971	-0,819	-0,677	-0,540	-0,408	-0,280	-0,154	-0,027
0,730	-1,285	-1,113	-0,954	-0,805	-0,665	-0,530	-0,400	-0,273	-0,148	-0,023
0,740	-1,260	-1,092	-0,937	-0,792	-0,654	-0,521	-0,395	-0,267	-0,143	-0,020
0,750	-1,236	-1,073	-0,921	-0,779	-0,643	-0,512	-0,386	-0,261	-0,138	-0,014
0,760	-1,214	-1,055	-0,906	-0,766	-0,632	-0,503	-0,378	-0,255	-0,133	-0,010
0,770	-1,193	-1,038	-0,892	-0,754	-0,622	-0,495	-0,371	-0,249	-0,128	-0,006
0,780	-1,173	-1,021	-0,878	-0,742	-0,613	-0,487	-0,364	-0,243	-0,123	-0,002
0,790	-1,154	-1,005	-0,865	-0,731	-0,603	-0,479	-0,357	-0,238	-0,118	0,002
0,800	-1,135	-0,980	-0,852	-0,721	-0,594	-0,471	-0,351	-0,232	-0,114	0,006
0,850	-1,055	-0,922	-0,795	-0,673	-0,553	-0,437	-0,322	-0,207	-0,093	0,023
0,900	-0,989	-0,866	-0,747	-0,631	-0,518	-0,407	-0,296	-0,186	-0,074	0,039
0,950	-0,934	-0,819	-0,706	-0,596	-0,488	-0,380	-0,273	-0,166	-0,058	0,053
1,000	-0,887	-0,778	-0,671	-0,565	-0,461	-0,357	-0,253	-0,149	-0,043	0,066
1,050	-0,847	-0,742	-0,639	-0,538	-0,437	-0,336	-0,235	-0,133	-0,029	0,077
1,100	-0,811	-0,711	-0,611	-0,513	-0,415	-0,317	-0,219	-0,119	-0,017	0,088
1,150	-0,779	-0,682	-0,586	-0,491	-0,396	-0,300	-0,203	-0,105	-0,005	0,098
1,200	-0,751	-0,657	-0,564	-0,471	-0,378	-0,284	-0,189	-0,093	0,006	0,107
1,250	-0,725	-0,634	-0,544	-0,453	-0,352	-0,270	-0,177	-0,089	0,016	0,116
1,300	-0,702	-0,613	-0,525	-0,436	-0,347	-0,257	-0,166	-0,072	0,025	0,124
1,350	-0,680	-0,594	-0,507	-0,421	-0,333	-0,244	-0,154	-0,062	0,033	0,131
1,400	-0,661	-0,563	-0,477	-0,406	-0,320	-0,233	-0,144	-0,053	0,041	0,138
1,450	-0,643	-0,539	-0,393	-0,320	-0,222	-0,134	-0,044	0,049	0,049	0,145
1,500	-0,626	-0,545	-0,463	-0,381	-0,297	-0,125	-0,036	-0,036	0,056	0,151

2.7. Значения функций для цензурированной выборки

u	$\varphi_1(u)$	$\varphi_2(u)$	$\varphi_3(u)$	u	$\varphi_1(u)$	$\varphi_2(u)$	$\varphi_3(u)$
-3,0	3,2831	1,000	0,5012	-0,4	1,0688	1,189	0,8911
-2,9	3,1903	1,000	0,5016	-0,3	0,99817	1,243	0,9592
-2,8	3,0979	1,000	0,5022	-0,2	0,92942	1,312	1,039
-2,7	3,0058	1,000	0,5030	-0,1	0,86262	1,401	1,132
-2,6	2,9141	1,000	0,5040	0,0	0,79788	1,517	1,241
-2,5	2,8227	1,001	0,5052	0,1	0,73533	1,667	1,370
-2,4	2,7318	1,001	0,5069	0,2	0,67507	1,863	1,523
-2,3	2,6414	1,001	0,5090	0,3	0,61722	2,118	1,704
-2,2	2,5515	1,001	0,5117	0,4	0,56188	2,453	1,919
-2,1	2,4621	1,002	0,5149	0,5	0,50916	2,893	2,178
-2,0	2,3732	1,003	0,5190	0,6	0,45915	3,473	2,488
-1,9	2,2849	1,004	0,5239	0,7	0,41192	4,241	2,863
-1,8	2,1973	1,005	0,5299	0,8	0,36756	5,261	3,319
-1,7	2,1103	1,006	0,5371	0,9	0,32611	6,623	3,876
-1,6	2,0241	1,009	0,5458	1,0	0,28760	8,448	4,561
-1,5	1,9387	1,011	0,5562	1,1	0,25205	10,90	5,408
-1,4	1,8541	1,015	0,5685	1,2	0,21944	14,22	6,462
-1,3	1,7704	1,019	0,5830	1,3	0,18974	18,73	7,780
-1,2	1,6876	1,025	0,6000	1,4	0,16288	24,89	9,442
-1,1	1,6058	1,032	0,6200	1,5	0,13879	33,34	11,55
-1,0	1,5251	1,042	0,6434	1,6	0,11735	44,99	14,24
-0,9	1,4456	1,054	0,6707	1,7	0,098436	61,13	17,71
-0,8	1,3674	1,069	0,7025	1,8	0,081893	83,64	22,19
-0,7	1,2905	1,089	0,7395	1,9	0,067556	116,2	28,05
-0,6	1,2150	1,114	0,7826	2,0	0,055248	159,7	35,74
-0,5	1,1411	1,147	0,8327				

Если $\hat{b} \leq 1$, то в качестве оценки параметра x_n функции (1.46) принимают $\hat{x}_n = x_{\min}$, (2.29)

где x_{\min} — минимальный член вариационного ряда (2.2) выборки. Оценку параметра c находят по формуле

$$\hat{c} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_n) \hat{b}}{n} \right]^{\frac{1}{b}}. \quad (2.30)$$

В случае, если $\hat{b} > 1$, оценку параметра c производят с помощью формулы (1.49) путем использования оценок для дисперсии и параметра b . В этом случае

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{s}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)}} = \frac{s}{gb}. \quad (2.31)$$

Значения знаменателя формулы (2.31) в зависимости от величины оценки \hat{b} приведены в табл. IV приложения*.

Для оценки параметра x_n при $\hat{b} > 1$ вычисляют

$$x' = \bar{x} - \hat{c} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{b}}\right) = \bar{x} - \hat{c} k_b, \quad (2.32)$$

значение k_b при этом берут из табл. IV приложения в зависимости от величины оценки \hat{b} . В качестве оценки параметра x_n принимают наименьшее из двух чисел, одно из которых представляет собой значение минимального члена вариационного ряда (2.2) x_{\min} , а другое — x' .

* Более полные данные приведены в ГОСТ 11.007—75.

Параметры функции (1.53) оценивают аналогичным путем. Вначале также вычисляют по формулам (2.4) и (2.9) оценки математического ожидания (\bar{x}) и среднего квадратического отклонения (s). По формуле (2.10) находят выборочное значение коэффициента вариации v , по значению v из табл. IV приложения определяют оценку b . Если $b \leq 1$, то оценку \hat{c} вычисляют по формуле (2.30), приняв $\hat{x}_n = 0$. При $b > 1$ оценку \hat{c} вычисляют по формуле (2.31).

Пример 2.4. В табл. 2.8 приведен вариационный ряд значений чисел циклов до разрушения образцов днаметром 8 мм из алюминиевого сплава АВ, испытанных на консольный изгиб с вращением при напряжении $\sigma_{\max} = 150$ МПа. Требуется произвести оценку параметров x_n , b и c функции распределения Вейбулла — Гиеденко (1.46).

По формуле (2.4) находим оценку математического ожидания $X = N$

$$\bar{x} = \frac{438,648 \cdot 10^6}{100} = 4,3865 \cdot 10^6.$$

По формуле (2.7) выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{100-1} 1623,223 \cdot 10^{12} = 16,396 \cdot 10^{12},$$

и по формуле (2.9) среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{16,396 \cdot 10^{12}} = 4,049 \cdot 10^6.$$

Вычисляем величину ρ_b по формуле (2.28):

$$\rho_b = \frac{\frac{10}{99,98} 21428,413 \cdot 10^{12}}{4,049 \cdot 10^6} = 3,327.$$

По табл. IV приложения для $\rho_b = 3,327$ находим оценку параметра b , $b = 0,721$. Так как $\hat{b} < 1$, то в качестве оценки нижней границы долговечности берем $\hat{x}_n = x_{\min} = 0,736 \cdot 10^6$ циклов, а оценку параметра c производим по формуле (2.30):

$$\hat{c} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{100} (x_i - 0,736 \cdot 10^6)^{0,721}}{100} \right]^{\frac{1}{0,721}} = 3,235 \cdot 10^6.$$

Пример 2.5. По данным примера 2.4 оценить параметры двухпараметрической функции распределения Вейбулла — Гиеденко (1.53).

Используя вычисленные в примере 2.4 значения оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения \bar{x} и s , по формуле 2.10 находим значение выборочного коэффициента вариации $v = 4,049 \cdot 10^6 / 4,3865 \cdot 10^6 = 0,9231$ и по табл. IV приложения определяем соответствующее значение оценки параметра b , $b = 1,084$. Так как $b > 1$, оценку параметра c производим по формуле (2.31), для этого предварительно по табл. IV приложения по $v = 0,9231$ определяем значение статистики $g_b = 0,8950$. Окончательно имеем

$$\hat{c} = \frac{4,049 \cdot 10^6}{0,8950} = 4,524 \cdot 10^6.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Распределение выборочных среднего, медианы и дисперсии. Выборочное среднее \bar{x} из n независимых испытаний из нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами a и σ^2 само распределено нормально с параметрами a и σ^2/n , т. е. $M\{\bar{x}\} = a_{\bar{x}} = a$ и $D\{\bar{x}\} = \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$.

Очевидно, что в соответствии с (1.26) — (1.28) нормированная случайная величина

$$z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.33)$$

* Здесь и далее значения с помощью справочных таблиц находим методом линейной интерполяции.

2.8. Вариационный ряд чисел циклов до разрушения при консольном изгибе с вращением образцов из алюминиевого сплава АВ

i	$x \cdot 10^{-6}$						
1	0,736	26	2,143	51	3,330	76	5,339
2	0,825	27	2,338	52	3,492	77	5,339
3	1,051	28	2,369	53	3,519	78	5,485
4	1,093	29	2,405	54	3,612	79	5,536
5	1,103	30	2,415	55	3,633	80	5,673
6	1,108	31	2,415	56	3,637	81	6,036
7	1,160	32	2,465	57	3,676	82	6,273
8	1,202	33	2,493	58	3,677	83	6,274
9	1,208	34	2,556	59	3,796	84	6,292
10	1,277	35	2,564	60	3,822	85	6,365
11	1,283	36	2,567	61	3,905	86	6,520
12	1,313	37	2,640	62	3,942	87	6,560
13	1,314	38	2,709	63	4,070	88	7,327
14	1,330	39	2,718	64	4,437	89	7,444
15	1,447	40	2,897	65	4,440	90	7,901
16	1,474	41	2,904	66	4,720	91	8,037
17	1,495	42	2,915	67	4,720	92	8,146
18	1,514	43	2,954	68	4,764	93	8,297
19	1,546	44	2,960	69	4,893	94	8,511
20	1,567	45	3,049	70	4,916	95	9,005
21	1,611	46	3,144	71	5,012	96	12,372
22	1,622	47	3,151	72	5,112	97	14,736
23	1,697	48	3,295	73	5,167	98	18,210
24	1,823	49	3,312	74	5,221	99	18,944
25	2,049	50	3,322	75	5,221	100	28,744

$$\sum_{i=1}^n x_i = 438,648 \cdot 10^6; \quad \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 1623,223 \cdot 10^{12}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 = 21,428,413 \cdot 10^{18}$$

также распределена нормально с $M\{Z\} = 0$ и $D\{Z\} = 1$.

Квантиль уровня P случайной величины \bar{x} определяется аналогично (1.13) из соотношения

$$P\left(\frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}} < z_P\right) = P, \quad (2.34)$$

т. е.

$$\bar{x}_P = a + z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.35)$$

Здесь \bar{x}_P есть P -квантиль выборочного среднего.

Вероятность попадания выборочного среднего в интервал $\bar{x}_{P_1} < \bar{x} < \bar{x}_{P_2}$ будет

$$P\left(a + z_{P_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < a + z_{P_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(z_{P_2}) - \Phi(z_{P_1}) = P_2 - P_1. \quad (2.36)$$

Если исходная генеральная совокупность не является нормально распределенной, то выборочное среднее распределение асимптотически нормально с параметрами a и σ^2/n . Для несильно асимметричных распределений приближение к нормальному закону выборочного среднего можно считать практически достаточным при $n > 4$.

Выборочная медиана n независимых наблюдений над нормально распределенной с параметрами a и σ^2 случайной величиной распределена приближенно нормально с

$M\{\bar{x}_{0,5}\} = a$ и $D\{\bar{x}_{0,5}\} = \frac{\pi}{2n} \sigma^2$. Дисперсия выборочной медианы в $\pi/2 = 1,57$ раз превышает дисперсию выборочного среднего. Таким образом, выборочное среднее является более эффективной оценкой характеристики центра распределения.

Выборочная дисперсия из n независимых испытаний из нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами a и σ^2 распределена асимптотически нормально с параметрами $M\{s^2\} = \sigma^2$ и $D\{s^2\} = \frac{2}{n-1} \sigma^4$.

Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии. Выборочные значения числовых характеристик являются надежными количественными оценками значений генеральных характеристик лишь при большом объеме выборки. При ограниченных объемах испытаний в связи с этим необходимо указать степень точности и надежности оценок генеральных характеристик.

Представление об уровне точности и надежности оценок дают так называемые доверительные интервалы, смысл которых состоит в том, что для любой малой вероятности α можно указать такое значение $\epsilon = |\theta - \hat{\theta}|$, при котором

$$P(|\theta - \hat{\theta}| < \epsilon) = 1 - \alpha, \quad (2.37)$$

где $\hat{\theta}$ является оценкой параметра θ . Если многократно повторять выборки и каждый раз находить доверительные интервалы, то в $P = (1 - \alpha) 100\%$ случаев доверительный интервал широк от истинного значение интересующего нас параметра. Вероятность $P = 1 - \alpha$, которой доверительный интервал при многократном повторении широк от истинного значение параметра, называют доверительной вероятностью или статистической надежностью.

При определении доверительных интервалов уровня доверительной вероятности обычно принимают равными 0,9 или 0,95, реже 0,99.

Если разрешить стоящее под знаком вероятности неравенство (2.36) относительно a , то получим

$$P\left(\bar{x} - z_{P_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z_{P_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P_2 - P_1. \quad (2.38)$$

Таким образом, вероятность того, что выполняется неравенство

$$\bar{x} - z_{P_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z_{P_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.39)$$

будет $P = P_2 - P_1 = 1 - \alpha$.

Если для примера принять $P_1 = 0,025$ и $P_2 = 0,975$ ($\alpha = 0,05$), то $z_{P_1} = -1,96$; $z_{P_2} = 1,96$ (см. табл. 1.1) и

$$P\left(\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95, \quad (2.40)$$

т. е. при многократном извлечении из нормально распределенной с параметрами a и σ^2 генеральной совокупности выборок объемом n каждая можно построить последовательность соответствующих выборкам интервалов (2.40), причем примерно 95 % этих интервалов будут включать в себя истинное значение математического ожидания a .

Интервалы, определяемые соотношениями (2.38) и (2.39), будут являться доверительными интервалами для генерального среднего a , построенными с доверительной вероятностью $P = P_2 - P_1 = 1 - \alpha$. Соответствующие границы интервалов называют доверительными границами.

При построении доверительных интервалов для генерального среднего обычно принимают $P_1 = \alpha/2$ и $P_2 = 1 - P_1 = 1 - \alpha/2$, т. е. рассматривают симметричные границы доверительных интервалов относительно выборочного среднего, причем выбирают $\alpha = 0,1$ или $\alpha = 0,05$, реже $\alpha = 0,01$.

При решении практических задач, связанных со статистическим анализом характеристик механических свойств конструкционных материалов или несущей способности элементов конструкций, как правило, значение генеральной дисперсии исходного распределения случайной величины, входящее в формулы (2.38)–(2.40), оказывается неизвестным. Поэтому при построении доверительных интервалов для генерального среднего используют выборочную дисперсию.

В этом случае нормированная случайная величина, аналогичная (2.33),

$$t = \frac{\bar{x} - a}{s/\sqrt{n}}, \quad (2.41)$$

где s — выборочное среднее квадратическое отклонение, вычисленное по формуле (2.9), имеет распределение, отличное от нормального. Случайная величина t (2.41) имеет функцию распределения вида

$$F(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt. \quad (2.42)$$

где $\Gamma(y)$ — гамма-функция y , k — число степеней свободы, определяемое разностью между объемом выборки n и числом параметров, оцениваемых по выборке; в данном случае $k = n - 1$.

Распределение (2.42), зависящее только от числа степеней свободы, называют распределением Стьюдента или t -распределением. Плотность вероятности распределения Стьюдента выражается формулой

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}. \quad (2.43)$$

График плотности вероятности t -распределения симметричен относительно оси ординат и имеет, как и для нормального распределения, колоколообразный вид.

При большом числе степеней свободы t -распределение сходится к нормальному. Чем меньше число степеней свободы, тем сильнее расхождение между t -распределением и нормальным. Обычно для $k \geq 30$ принимают $t = z$.

В связи с изложенным доверительные интервалы для генерального среднего при неизвестном значении σ^2 находят из выражения

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}, \quad k < a < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}, \quad (2.44)$$

где $t_{\alpha/2}$ — значение квантиля статистики t уровня $P = 1 - \alpha/2$ для числа степеней свободы $k = n - 1$. Значения $t_{\alpha/2}$ приведены в табл. V приложения.

Пример 2.6. По результатам испытаний на разрыв 20 образцов (см. табл. 2.2) определить 90 %-ные доверительные интервалы для генерального среднего значения предела прочности дюралюминия, если выборочные характеристики составляют $\bar{x} = \bar{a} = 453$ МПа и $s = 11,26$ МПа (см. пример 2.1).

По табл. V приложения для $k = 20 - 1 = 19$ и $\alpha = 0,1$ находим $t_{0,1} = 1,73$.

На основании формулы (2.44)

$$453 - \frac{11,26}{\sqrt{20}} 1,73 < a < 453 + \frac{11,26}{\sqrt{20}} 1,73;$$

$$449 \text{ МПа} < a < 457 \text{ МПа}.$$

В случае цензурированной выборки доверительный интервал для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ приближенно определяют из выражения

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\varphi_2(u)} < a < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\varphi_2(u)}, \quad (2.45)$$

где $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ находят по табл. 1.1; $\varphi_2(u)$ определяют по табл. 2.7 по найденному значению u .

Пример 2.7. В условиях примера 2.3 определить 90 %-ные доверительные интервалы для генерального среднего значения логарифма числа циклов до разрушения, если $\bar{x} = 6,533$; $s = 0,301$; $u = -0,552$ (см. пример 2.3).

Для $\alpha = 0,1$ по табл. 1.1 находим $z_{0,05} = -1,64$; $z_{0,95} = 1,64$. По найденному в примере 2.3 $u = -0,552$ по табл. 2.7 определяем $\varphi_2(-0,552) = 1,130$.

На основании (2.45) получаем

$$6,533 - 1,64 \frac{0,301}{\sqrt{20}} \sqrt{1,130} < a < 6,533 + 1,64 \frac{0,301}{\sqrt{20}} \sqrt{1,130};$$

$$6,416 < a < 6,650.$$

Случайная величина

$$x = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad (2.46)$$

подчинена распределению Пирсона, или χ^2 -распределению (хи — квадрат—распределение) с параметром $k = n - 1$ (число степеней свободы). С ростом числа степеней свободы χ^2 -распределение также приближается к нормальному, но медленнее, чем t -распределение. Форма графика плотности вероятности χ^2 -распределения зависит только от числа степеней свободы. Чем больше k , тем более пологой и симметричной становится асимметричная одномодальная кривая плотности вероятности.

Плотность вероятности χ^2 -распределения описывается уравнением

$$\varphi(\chi^2) = \frac{1}{\frac{k}{2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}.$$

Вероятность $P(\chi^2 > \chi_1^2)$ получить значение χ^2 , превосходящее некоторое значение χ_1^2 , определяется формулой

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{\chi_1^2}^{\infty} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi^2. \quad (2.47)$$

Для χ^2 -распределения составлены таблицы, дающие возможность найти вероятность (2.47) (см. табл. VI приложения). Для $k > 30$ справедлива аппроксимация

$$\chi_P^2 = \frac{1}{2} (z_{1-P} + \sqrt{2k})^2 \quad (2.48)$$

или, лучше,

$$\chi_P^2 = k \left(1 - \frac{2}{9k} + z_{1-P} \sqrt{\frac{2}{9k}}\right)^3, \quad (2.49)$$

где z — нормированная случайная величина, распределенная по нормальному закону.

Квантили распределения выборочной дисперсии (s_P^2) можно получить из квантилей распределения χ^2 в соответствии с (2.46):

$$s_P^2 = \sigma^2 \frac{\chi_P^2}{n-1}. \quad (2.50)$$

Для построения доверительных интервалов для генеральной дисперсии рассмотрим соотношение

$$P(\chi_{P_2}^2 < \chi^2 < \chi_{P_1}^2) = P_2 - P_1 \quad (2.51)$$

и с учетом (2.46) решим стоящее в скобках неравенство относительно σ^2 :

$$P\left(s^2 \frac{n-1}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < s^2 \frac{n-1}{\chi_{P_2}^2}\right) = P_2 - P_1, \quad (2.52)$$

где

$$s^2 \frac{n-1}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < s^2 \frac{n-1}{\chi_{P_2}^2} \quad (2.53)$$

есть доверительный интервал для генеральной дисперсии σ^2 с доверительной вероятностью $P = P_2 - P_1 = 1 - \alpha$.

Обычно принимают $P_1 = \alpha/2$ и $P_2 = 1 - \alpha/2$, а $P = 1 - \alpha$ выбирают равной 0,9 или 0,95.

Границы доверительных интервалов для генерального среднего квадратического отклонения σ находят путем извлечения квадратного корня из значений доверительных границ для генеральной дисперсии.

Пример 2.8. По результатам испытаний на разрыв 20 образцов, приведенных в табл. 2.2, определить 90 %-ные доверительные интервалы для генеральных дисперсий и среднего квадратического отклонения предела прочности дюралиюминия, если $s^2 = 126,9$ (см. пример 2.1).

По табл. VI для $k = n - 1 = 19$ находим при $P_1 = \alpha/2 = 0,05$ значение $\chi_{0,05}^2 = 30,1$ и при $P_2 = 1 - \alpha/2 = 0,95$ значение $\chi_{0,95}^2 = 10,1$. На основании (2.53) находим

$$126,9 \frac{19}{30,1} < \sigma^2 < 126,9 \frac{19}{10,1};$$

$$80,1 < \sigma^2 < 238,8; \quad 8,95 \text{ МПа} < \sigma < 15,5 \text{ МПа}.$$

В случае цензурированной выборки доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения приближенно находят из соотношения

$$\frac{s}{1 + z_{P_2} \sqrt{\frac{\Phi_3(u)}{n}}} < \sigma < \frac{s}{1 + z_{P_1} \sqrt{\frac{\Phi_3(u)}{n}}}, \quad (2.54)$$

где z_{P_1} и z_{P_2} находят по табл. 1.1, $\Phi_3(u)$ определяют из табл. 2.7 по найденному значению u .

Пример 2.9. Согласно условиям примера 2.3 определить 90 %-ные доверительные интервалы для генерального среднего квадратического отклонения значений логарифма числа циклов до разрушения, если $s = 0,301$ и $u = -0,552$ (см. пример 2.3).

Для $\alpha = 0,1$ по табл. 1.1 находим $z_{0,05} = -1,64$; $z_{0,95} = 1,64$. По найденному в примере 2.3 значению $u = -0,552$ по табл. 2.7 определяем $\Phi_3(-0,552) = 0,8066$.

На основании (2.54) получаем

$$\frac{0,301}{1 + 1,64 \sqrt{\frac{0,8066}{20}}} < \sigma < \frac{0,301}{1 - 1,64 \sqrt{\frac{0,8066}{20}}};$$

$$0,226 < \sigma < 0,449.$$

Если из нормально распределенной генеральной совокупности испытано m выборок объемом n каждая и для каждой выборки подсчитан размах варьирования R_i (2.13), то доверительные интервалы для генерального среднего квадратического отклонения можно подсчитать по формуле

$$\frac{\bar{R}}{\beta_n} \frac{1}{1 + z_{P_2} \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}}} < \sigma < \frac{\bar{R}}{\beta_n} \frac{1}{1 + z_{P_1} \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}}}, \quad (2.55)$$

где $\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m}$ — среднее арифметическое из m размахов; z_{P_1} и z_{P_2} находят по табл. 1.1, β_n и γ_n определяют по табл. 2.6 в зависимости от объема выборки n .

Доверительные границы для генерального среднего квадратического отклонения, вычисленные на основании выборочной дисперсии (2.53), несколько уже, чем вычисленные на основании выборочных размахов (2.55).

ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Для больших выборок экспериментальные данные могут быть представлены в виде гистограммы (рис. 2.1), являющейся графической оценкой плотности вероятности (1.6), т. е. эмпирической плотностью вероятности.

При построении гистограммы размах варьирования выборочных данных разбивают на 7—20 равных интервалов. Для каждого интервала подсчитывают частоту $w_j(x)$, равную отношению частоты (числа наблюдений в интервале) n_j к объему выборки n :

$$w_j(x) = \frac{n_j}{n}. \quad (2.56)$$

Гистограмма состоит из прямоугольников, основанием которых служит интервал значения механической характеристики, а высотой — частота. Если интервалы имеют различную длину (например, при объединении соседних интервалов с малым числом наблюдений), то высота прямоугольников равна отношению частоты к длине этого интервала Δx_j :

$$\frac{w_j(x)}{\Delta x_j}. \quad (2.57)$$

Графической оценкой функции распределения (1.3) является полигон накопленных частостей или эмпирическая функция распределения.

Пусть $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ — значения механической характеристики, найденные в результате испытаний n образцов, взятые в порядке их испытания. Расположим их в порядке возрастания величины:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n, \quad (2.58)$$

тогда накопленная частота значений механических характеристик на основании формулы (1.2) определяется как

$$W(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < x_1; \\ \frac{i}{n} & \text{для } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ 1 & \text{для } x \geq x_n. \end{cases} \quad (2.59)$$

Графически выражение (2.59) и представляет собой полигон накопленных частостей, изображенный на рис. 2.2 в виде ступенчатой линии.

Накопленная частота имеет скачки величиной в $1/n$ в точках $x = x_1, x_2, \dots, x = x_n$ (см. рис. 2.2). Если несколько образцов имеют одну и ту же механическую характеристику, то скачок накопленной частоты равен соответствующему кратному $1/n$. Так, на рис. 2.2 показано, что четвертый и пятый образцы имеют одинаковое значение характеристики ($x_4 = x_5$), поэтому скачок при $x = x_4 = x_5$ равен $2/n$.

При обработке результатов механических испытаний целесообразно вместо ступенчатой кривой вычерчивать плавную кривую (штриховая линия на рис. 2.2),

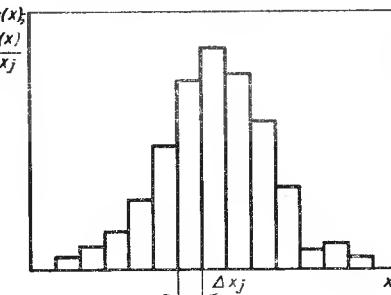


Рис. 2.1. Гистограмма

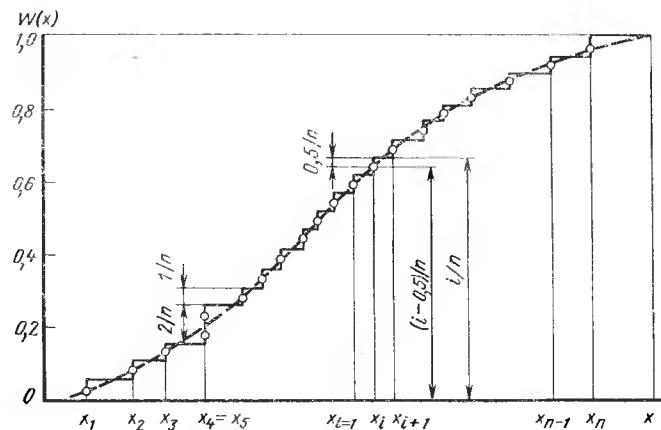


Рис. 2.2. Полигон накопленных частот

которую задают n точками, расположенными посередине вертикальных частей ступенчатой кривой. Абсциссами этих точек служат значения механической характеристики x_i , а ординатами — накопленная частота или эмпирическая функция распределения, характеризующая оценку вероятности события $x \leqslant x_i$:

$$W(x) = \frac{i - 0,5}{n} = \hat{P}(X \leqslant x_i), \quad (2.60)$$

где i — номер образца в вариационном ряду (2.58); $\hat{P}(X \leqslant x_i)$ — оценка вероятности события $X \leqslant x_i$.

Наиболее наглядно результаты механических испытаний могут быть представлены в виде эмпирической функции распределения на вероятностной сетке (см. рис. 1.6—1.10). С этой целью значения механической характеристики распределяют в вариационный ряд (2.58). Для каждого члена вариационного ряда по формуле (2.60) вычисляют оценку соответствующей вероятности P , роль которой играет накопленная частота W . Затем на вероятностную сетку наносят экспериментальные точки, абсциссами которых служат значения механической характеристики, а ординатами — оценка вероятности P (накопленная частота W).

Графической оценкой функции нормального распределения (1.24) является эмпирическая функция распределения, которая на нормальной вероятностной сетке изображена прямой линией с уравнением

$$\hat{x}_P = \bar{x} + z_P s, \quad (2.61)$$

где \hat{x}_P — оценка квантили уровня P случайной величины x ; z_P — квантиль уровня P случайной величины z (1.26).

Пример 2.10. По данным табл. 2.2 построить эмпирическую функцию нормального распределения, если $\bar{x} = 453$ МПа; $s = 11,41$ МПа.

По формуле (2.60) для каждого образца вычисляем накопленную частоту, являющуюся оценкой вероятности P , и записываем ее значение в графе 4 табл. 2.2.

Так, например, для первого образца вариационного ряда $i = 1$ и

$$W(x_1) = \frac{1 - 0,5}{20} = 0,025,$$

для второго образца $i = 2$ и

$$W(x_2) = \frac{2 - 0,5}{20} = 0,075 \text{ и т. д.}$$

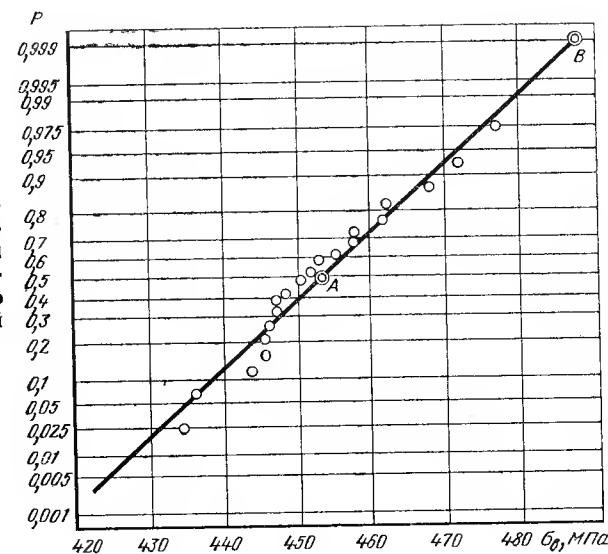


Рис. 2.3. График эмпирической функции распределения предела прочности образцов из дюралюминиевого прессованного профиля на нормальной вероятностной сетке

Затем экспериментальные значения наносим на нормальную вероятностную сетку (рис. 2.3). Первая нижняя точка, соответствующая первому образцу вариационного ряда, имеет координаты $\sigma_{b_1} = 434$ МПа и $\hat{P}_1 = 0,025$. Вторую точку, соответствующую второму образцу вариационного ряда, наносим в координатах $\sigma_{b_2} = 436$ МПа и $\hat{P}_2 = 0,075$ и т. д. Экспериментальные точки аппроксимируем прямой линией на основании уравнения (2.61). Для этого наносим точку A с координатами $x_A = \bar{x} = 453$ МПа и $\hat{P}_A = 0,50$ и точку B , ординату которой задаем (в данном случае $\hat{P}_B = 0,999$), а абсциссу вычисляем по формуле (2.61), где квантиль $z_P = z_{0,999} = 3,09$ определяем по табл. 1.1.

$$x_B = 453 + 3,09 \cdot 11,41 = 488 \text{ МПа.}$$

Через построенные таким образом точки A и B на рис. 2.3 проводим прямую, являющуюся эмпирической функцией нормального распределения предела прочности.

На рис. 2.4 приведен аналогичный график эмпирической функции распределения числа циклов до разрушения образцов из сплава АВ при напряжении $\sigma_{\max} = 150$ МПа, построенный на логарифмической нормальной вероятностной сетке на основании данных табл. 2.10.

На рис. 2.5 эти же данные нанесены на вероятностной сетке, соответствующей распределению Вейбулла—Гнеденко (1.46) и (1.53). Параметры распределений были оценены в примерах 2.6 и 2.7.

При построении аппроксимирующих прямых, представляющих собой эмпирические функции распределения, задавались двумя значениями вероятностей ($P = 0,1$ и $P = 0,99$) и по формуле (1.51) находили соответствующее значение $x_P = x_{0,99}$.

Сопоставляя рис. 2.4 и 2.5, можно заключить, что распределение числа циклов до разрушения удовлетворительно аппроксимируется логарифмически нормальным распределением и менее удовлетворительно распределениями Вейбулла—Гнеденко (1.46) и (1.53). В последнем случае экспериментальные точки имеют существенные отклонения от аппроксимирующих прямых линий.

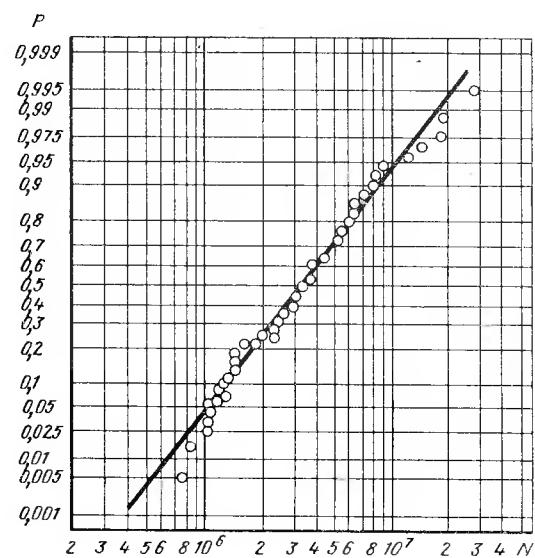


Рис. 2.4. График эмпирической функции распределения числа циклов до разрушения образцов на логарифмической нормальной вероятностной сетке

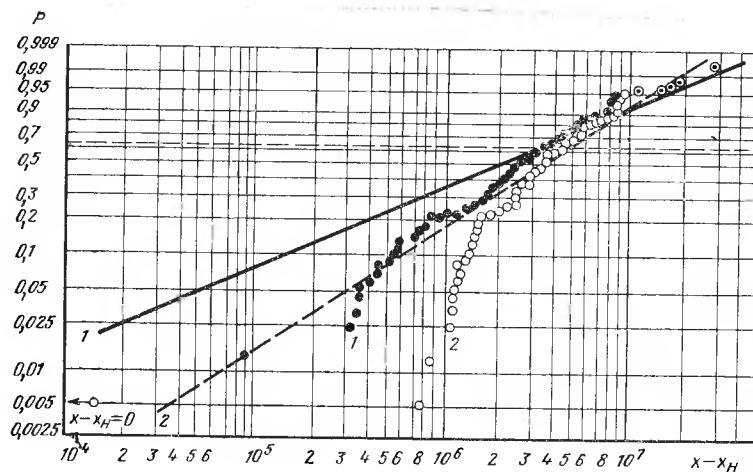


Рис. 2.5. Графики эмпирических функций распределения числа циклов до разрушения образцов на вероятностной сетке распределения Вейбулла—Гнеденко:
1 — трехпараметрического (1.46); 2 — двухпараметрического (1.53)

ОЦЕНКА КВАНТИЛЕЙ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ. ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Оценку квантильных значений случайной величины при нормальном распределении производят по формуле (2.61), а для случая логарифмически нормального распределения определяют из соотношения

$$\hat{x}_P = \lg \hat{x}_P = \hat{a}_y + z_P \hat{\sigma}_y, \quad (2.62)$$

где \hat{a}_y и $\hat{\sigma}_y$ — оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины $Y = \lg X$.

Квантиль случайной величины, распределенной по закону Вейбулла—Гнеденко (1.46), оценивается по формуле

$$\hat{x}_P = \hat{x}_H + \hat{c} [- \ln (1 - P)]^{1/b}, \quad (2.63)$$

где \hat{x}_H , \hat{c} , b — оценки параметров распределения.

Оценивание квантилей по формулам (2.61)–(2.63) является надежным только при большом объеме испытаний. При малом же объеме и особенно при высоких и низких уровнях P возникает потребность построения доверительных границ для квантилей.

Для нормально распределенных характеристик механических свойств верхняя односторонняя доверительная граница квантили уровня P для доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$

$$x_P^{(B)} = \bar{x} + t'_\beta [n - 1; \Delta] \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (2.64)$$

где $t'_\beta [n - 1; \Delta]$ — квантиль уровня β нецентрального распределения Стьюдента [10, 23] с $n - 1$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$\Delta = z_P \sqrt{n}. \quad (2.65)$$

Здесь z_P — квантиль уровня P нормированного нормального распределения (1.27).

Нижняя односторонняя доверительная граница квантили уровня P для доверительной вероятности $1 - \beta = \alpha$

$$x_P^{(N)} = \bar{x} + t'_{1-\beta} [n - 1; \Delta] \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (2.66)$$

причем

$$t'_{1-\beta} [n - 1; -\Delta] = -t'_\beta [n - 1; \Delta]. \quad (2.67)$$

Для $P = 0,5$ границы (2.64) и (2.66) симметричны относительно оценки математического ожидания и совпадают с границами доверительного интервала (2.44) при соответствующих значениях доверительной вероятности.

Значения квантилей $t'_\beta [n - 1; \Delta]$ для величин $\alpha = 0,10$ и $\alpha = 0,05$ определяют с помощью табл. VII приложения [40]. Для этой цели вначале подсчитывают величину параметра

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{2(n - 1) + \Delta^2}}. \quad (2.68)$$

Затем по табл. VII приложения для $k = n - 1$ и вычисленного значения параметра u определяют путем интерполяции величину l и далее подсчитывают значение $t'_\beta [n - 1; \Delta]$:

$$t'_\beta = \frac{\Delta + l \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{2k} - \frac{l^2}{2k}}}{1 - l^2/2k}. \quad (2.69)$$

При больших объемах выборки для определения $t'_\beta [n = 1; \Delta]$ возможно использование аппроксимации [23]

$$t'_\beta = \frac{\left(1 - \frac{1}{4k}\right) \Delta + z_\beta \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4k}\right)^2 - \frac{z_\beta^2}{2k} + \frac{\Delta^2}{2k}}}{\left(1 - \frac{1}{4k}\right)^2 - \frac{z_\beta^2}{2k}}, \quad (2.70)$$

где z_β — квантиль уровня β нормированного нормального распределения (1.27).

Пример 2.11. По данным примера 2.1 произвести оценку квантилей предела прочности для уровней $P = 0,01; 0,1; 0,5; 0,9$ и $0,99$.

По табл. 1.1 находим значения квантилей нормированного нормального распределения для указанных уровней вероятностей:

$$z_{0,01} = -2,326; z_{0,1} = -1,282; z_{0,5} = 0; z_{0,9} = 1,282 \text{ и } z_{0,99} = 2,326.$$

Оценку квантилей предела прочности производим по формуле (2.61):

$$\sigma_{B,0,01} = 453 - 2,326 \cdot 11,26 = 427 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,1} = 453 - 1,282 \cdot 11,26 = 439 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,5} = 453 + 0 \cdot 11,26 = 453 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,9} = 453 + 1,282 \cdot 11,26 = 467 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,99} = 453 + 2,326 \cdot 11,26 = 479 \text{ МПа.}$$

Пример 2.12. В условиях примера 2.1 и 2.11 для $\beta = 0,95$ определить нижние и верхние доверительные границы квантилей предела прочности для $P = 0,99; 0,9; 0,5; 0,1$ и $0,01$.

По формуле (2.65) определяем параметр нецентральности Δ :

$$\Delta_{0,99} = 2,326\sqrt{20} = 10,402; \Delta_{0,9} = 1,282\sqrt{20} = 5,733; \Delta_{0,5} = 0; \Delta_{0,1} = -\Delta_{0,9} = -5,733$$

$$\text{и } \Delta_{0,01} = -\Delta_{0,99} = -10,402.$$

По формуле (2.68) для указанных вероятностей вычисляем соответствующие значения параметра u : $u_{0,99} = 0,860$; $u_{0,9} = 0,681$; $u_{0,5} = 0$; $u_{0,1} = -u_{0,9} = -0,681$ и $u_{0,01} = -u_{0,09} = -0,860$.

По табл. VII приложения с применением линейной интерполяции для $\beta = 0,95$ ($\alpha = 0,05$) находим соответствующие значения параметра t : $t_{0,99} = 1,6719$; $t_{0,9} = 1,6775$; $t_{0,5} = 1,6664$; $t_{0,1} = 1,6050$ и $t_{0,01} = 1,5958$.

По формуле (2.69) вычисляем значения $t'_{0,95}$. Для $P = 0,99; 0,9; 0,5; 0,1$ и $0,01$ они равны соответственно 14,734; 8,616; 1,731; -3,842 и -7,824.

По формуле (2.64) находим верхние односторонние доверительные границы квантилей предела прочности указанных уровней вероятностей:

$$\sigma_{B,0,99}^{(B)} = 453 + 14,734 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 490 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,9}^{(B)} = 453 + 8,616 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 475 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,5}^{(B)} = 453 + 1,731 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 457 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,1}^{(B)} = 453 - 3,842 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 443 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,01}^{(B)} = 453 - 7,824 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 433 \text{ МПа.}$$

С учетом соотношения (2.67) находим значения $t'_{0,05}$, необходимые для определения нижних односторонних доверительных границ квантилей. Для $P = 0,99; 0,9; 0,5; 0,1$ и $0,01$ они равны соответственно 7,824; 3,842; -1,731; -8,616 и -14,734.

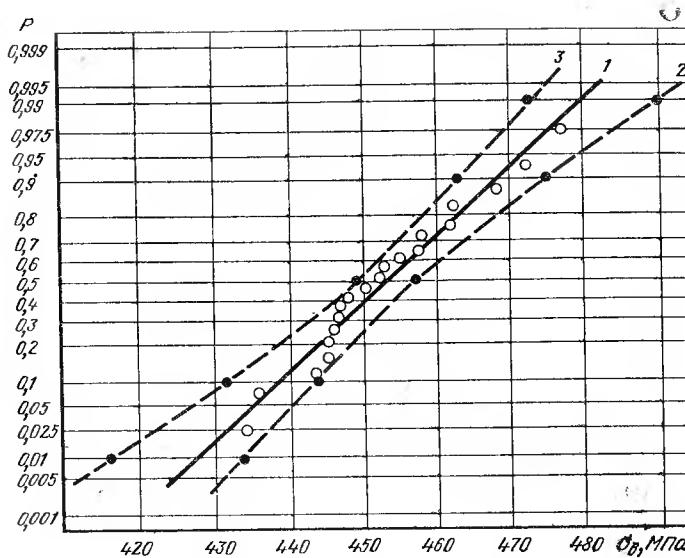


Рис. 2.6. 90-процентная доверительная область распределения предела прочности образцов из дюралюминиевого профиля на нормальной вероятностной сетке:
1 — экспериментальная функция распределения; 2 — правая граница доверительной области;
3 — левая граница доверительной области

По формуле (2.66) находим нижние доверительные границы квантилей предела прочности указанных уровней вероятности:

$$\sigma_{B,0,99}^{(H)} = 453 + 7,824 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 473 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,9}^{(H)} = 453 + 3,842 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 463 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,5}^{(H)} = 453 - 1,731 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 449 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,1}^{(H)} = 453 - 8,616 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 431 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{B,0,01}^{(H)} = 453 - 14,734 \frac{11,26}{\sqrt{20}} = 416 \text{ МПа.}$$

Если для определения t'_β использовать аппроксимацию (2.70), то доверительные границы квантилей предела прочности для всех рассмотренных уровней вероятности, как показали расчеты, совпадают с границами, подсчитанными на основании точного значения t'_β , т. е. формула (2.70) дает вполне удовлетворительные результаты при $n = 20$. Точность аппроксимации по формуле (2.70) будет возрастать с увеличением n .

На рис. 2.6 штриховыми линиями 2 и 3 показаны верхние для $\beta = 0,95$ и нижние для $1 - \beta = 0,05$ односторонние доверительные границы квантилей предела прочности, а область, заключенная между этими линиями, представляет собой 90 %-ную доверительную область функции распределения предела прочности.

В случае логарифмически нормального распределения характеристик механических свойств верхнюю ($x_P^{(B)}$) и нижнюю ($x_P^{(H)}$) одностороннюю границы квантили уровня P вычисляют из соотношений:

$$y_P^{(B)} = \lg x_P^{(B)} = a_y + t_{\beta} [n - 1; \Delta] \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}; \quad (2.71)$$

$$y_P^{(H)} = \lg x_P^{(H)} = a_y + t_{1-\beta} [n - 1; \Delta] \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}. \quad (2.72)$$

Вначале в соответствии с вышеизложенной методикой оценивают доверительные границы квантилей случайной величины $Y = \lg X$, а затем потенцированием определяют оценки квантилей величины X .

Пример 2.13. По данным примера 2.2 и табл. 2.8 произвести оценку квантилей числа циклов до разрушения уровней $P = 0,01; 0,1; 0,5; 0,9$ и $0,99$, для $\alpha = 0,05$ определить верхние и нижние доверительные границы квантилей и построить 90 %-ную доверительную область функции распределения долговечности образцов ($a_y = 6,515; \sigma_y = 0,315; n = 100$).

Оценку квантилей для указанных уровней производим по формуле (2.62):

$$\lg \hat{N}_{0,01} = 6,515 - 2,326 \cdot 0,315 = 5,782; \quad \hat{N}_{0,01} = 6,053 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg \hat{N}_{0,1} = 6,515 - 1,282 \cdot 0,315 = 6,111; \quad \hat{N}_{0,1} = 1,291 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg \hat{N}_{0,5} = 6,515 + 0,0 \cdot 0,315 = 6,515; \quad \hat{N}_{0,5} = 3,273 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg \hat{N}_{0,9} = 6,515 + 1,282 \cdot 0,315 = 6,919; \quad \hat{N}_{0,9} = 8,299 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg \hat{N}_{0,99} = 6,515 + 2,326 \cdot 0,315 = 7,248; \quad \hat{N}_{0,99} = 17,701 \cdot 10^6 \text{ циклов}.$$

В соответствии с формулой (2.65) определяем параметр нецентральности: $\Delta_{0,99} = 2,326 \sqrt{100} = 23,26; \Delta_{0,9} = 1,282 \sqrt{100} = 12,82; \Delta_{0,5} = 0; \Delta_{0,1} = -\Delta_{0,9} = -12,82; \Delta_{0,01} = -\Delta_{0,99} = -23,26$.

Для указанных вероятностей по формуле (2.68) вычисляем соответствующие значения параметра t : $t_{0,99} = 0,856; t_{0,9} = 0,673; t_{0,5} = 0; t_{0,1} = -t_{0,9} = -0,673$ и $t_{0,01} = -t_{0,99} = -0,856$.

По табл. VII приложения с применением линейной интерполяции для $\alpha = 0,05$ находим значения параметра t : $t_{0,99} = 1,6621; t_{0,9} = 1,6639; t_{0,5} = 1,6611; t_{0,1} = 1,6242$ и $t_{0,01} = 1,6217$.

По формуле (2.69) вычисляем значения $t'_{0,95}$. Для $P = 0,99; 0,90; 0,50; 0,1$ и $0,01$ они равны соответственно 26,840; 15,276; 1,663; -10,774 и -20,403.

По формуле (2.71) находим:

$$\lg N_{0,99}^{(B)} = 6,515 + 26,840 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 7,360; \quad N_{0,99}^{(B)} = 22,93 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,9}^{(B)} = 6,515 + 15,276 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 6,996; \quad N_{0,9}^{(B)} = 9,913 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,5}^{(B)} = 6,515 + 1,663 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 6,567; \quad N_{0,5}^{(B)} = 3,688 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,1}^{(B)} = 6,515 - 10,774 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 6,176; \quad N_{0,1}^{(B)} = 1,498 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,01}^{(B)} = 6,515 - 20,403 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 5,872; \quad N_{0,01}^{(B)} = 7,453 \cdot 10^5 \text{ циклов}.$$

С учетом соотношения (2.67) находим значения $t'_{0,05}$. Для $P = 0,99; 0,90; 0,50; 0,1$ и $0,01$ они равны соответственно 20,403; 10,774; -1,663; -15,276 и -26,840.

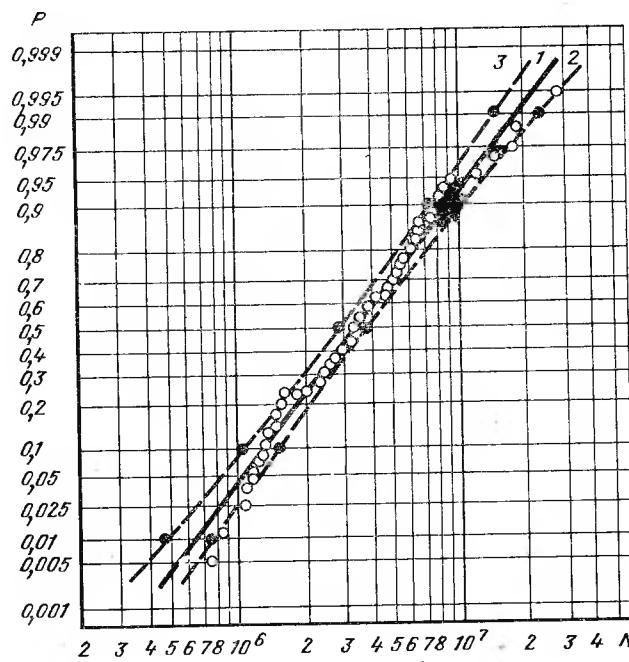


Рис. 2.7. 90-процентная доверительная область распределения долговечности образцов на логарифмически нормальной вероятностной сетке:

1 — эмпирическая функция распределения; 2 — правая граница доверительной области; 3 — левая граница доверительной области

По формуле (2.72) вычисляем

$$\lg N_{0,99}^{(H)} = 6,515 + 20,403 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 7,158; \quad N_{0,99}^{(H)} = 14,378 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,9}^{(H)} = 6,515 + 10,774 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 6,854; \quad N_{0,9}^{(H)} = 7,151 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,5}^{(H)} = 6,515 - 1,663 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 6,463; \quad N_{0,5}^{(H)} = 2,906 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,1}^{(H)} = 6,515 - 15,276 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 6,033; \quad N_{0,1}^{(H)} = 1,079 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$

$$\lg N_{0,01}^{(H)} = 6,515 - 26,840 \frac{0,315}{\sqrt{100}} = 5,670; \quad N_{0,01}^{(H)} = 4,677 \cdot 10^5 \text{ циклов}.$$

Эмпирическая функция распределения долговечности образцов и границы 90-процентной доверительной области теоретической функции показаны на рис. 2.7.

Как показал расчет, для $n = 100$ формула (2.70) дает значения t'_{β} , практически совпадающие со значениями, определенными по формуле (2.69). Это обстоятельство, как и в случае примера 2.12, позволяет использовать аппроксимацию (2.69) для построения границ доверительной области функции распределения характеристик механических свойств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ИСПЫТАНИЙ

В связи с неоднородностью свойств конструкционных материалов и отклонениями в режимах технологии производства деталей характеристики механических свойств образцов и элементов конструкций носят случайный характер и могут принимать существенно различные значения при повторении испытаний с возможно полным соблюдением их условий. Поэтому найденные из опыта характеристики механических свойств дают лишь приближенную оценку фактическим свойствам.

Величина возможной ошибки зависит от объема испытаний (числа образцов), конструктивных особенностей испытуемых элементов, материала, условий испытания и методики обработки их результатов. Повысить точность оценки характеристики механических свойств заданного элемента конструкции при определенных условиях испытаний можно только путем увеличения объема испытаний и применения более рациональной методики статистической обработки результатов, использующей максимум информации, полученной при экспериментах.

Обоснование необходимого объема испытаний и выбор оптимальных режимов с целью определения характеристик механических свойств с наперед заданной степенью точности и статистической надежности является основной задачей планирования испытаний.

Вопросы планирования механических испытаний и статистической обработки их результатов имеют первостепенное значение для рационального выбора материала при проектировании, обоснования расчетных характеристик, установления оптимальных режимов технологии производства полуфабрикатов и деталей, организации статистического контроля качества технологических процессов по механическим свойствам и т. д.

При определении минимально необходимого объема выборки n следует исходить из целей предстоящих испытаний.

Если испытания проводят с целью оценки математического ожидания характеристики механических свойств a , то объем выборки в предположении нормального распределения определяют по формуле

$$n = \frac{\gamma^2}{\Delta_a^2} z_{1-\alpha/2}^2 \quad (2.73)$$

или

$$n = \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{\delta_a^2}, \quad (2.74)$$

где γ — коэффициент вариации определяемой характеристики механических свойств; Δ_a — максимальная относительная ошибка (допуск) при оценке среднего значения в долях среднего значения определяемой характеристики; $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль уровня $P = 1 - \alpha/2$ нормированной нормально распределенной случайной величины (1.26); $P = 1 - \alpha/2$ — статистическая надежность, представляющая собой вероятность непревышения фактической ошибкой при оценке среднего значения характеристики максимальных ошибок Δ_a или δ_a (по модулю); δ_a — максимальная относительная ошибка (допуск) при оценке среднего значения в долях среднего квадратического отклонения изучаемой характеристики механических свойств.

Как правило, генеральный коэффициент вариации γ является неизвестной величиной, поэтому при определении объема выборки его заменяют выборочным коэффициентом v , полученным на основании априорной информации по аналогичным материалам и элементам конструкций. При отсутствии аналога значением выборочного коэффициента вариации задаются и уточняют в процессе эксперимента. В этом случае объем испытаний должен быть скорректирован в соответствии с уточненным значением коэффициента вариации методом подбора по формуле

$$n = \frac{v^2}{\Delta_a^2} t_{\alpha, k}^2 \quad (2.75)$$

где $t_{\alpha, k}$ — значение квантиля статистики t уровня $P = 1 - \alpha/2$ для числа степеней свободы $k = n - 1$ (табл. V приложения).

В связи с возможным увеличением объема испытаний в результате корректировки необходимо предусмотреть некоторый запас при отборе образцов. Значением вероятности $P = 1 - \alpha/2$ при использовании формул (2.73)–(2.75) задаются. Обычно принимают $\alpha = 0,1$ или $\alpha = 0,05$, реже $\alpha = 0,01$.

Формулы (2.73)–(2.75) получены из условия, что вероятность попадания оценки математического ожидания в интервал $a (1 \pm \Delta_a)$ или $a \pm \delta_a$ будет $P = 1 - \alpha$.

Величину максимальных ошибок Δ_a и δ_a следует выбирать в зависимости от требований к точности оценки среднего значения характеристики механических свойств. При низкой точности величину Δ_a принимают равной коэффициенту вариации определяемой характеристики, в этом случае $\delta_a = 1$. При средней точности Δ_a принимают равной $(0,4 \div 0,5) \gamma$ и $\delta_a = 0,4 \div 0,5$, при высокой точности — $\Delta_a = (0,2 \div 0,3) \gamma$ и $\delta_a = 0,2 \div 0,3$.

Пример 2.14. Определить необходимый объем испытаний образцов с целью оценки среднего значения предела прочности алюминиевого сплава, если $\alpha = 0,1$ и $\Delta_a = 0,02$. Данные о коэффициенте вариации предела прочности аналогичных материалов отсутствуют.

Задаемся коэффициентом вариации $\gamma = 0,04$. По табл. I.1 для $\alpha = 0,1$ находим $z_{0,95} = 1,645$ и по формуле (2.73) определяем

$$n = \frac{0,04^2}{0,02^2} 1,645^2 \approx 11.$$

Пусть по результатам испытания 11 образцов выборочный коэффициент вариации составил $v = 0,051$. В этом случае производим корректировку необходимого объема испытаний, для чего формулу (2.75) представляем в виде

$$\Delta_a = \frac{v}{\sqrt{n}} t_{\alpha, k}. \quad (2.76)$$

Так как выборочный коэффициент вариации оказался больше первоначально принятого γ , то при $n = 11$ фактическая ошибка будет больше $\Delta_a = 0,02$.

Задаемся $n = 15$ и определяем по формуле (2.76) ожидаемую ошибку, для чего предварительно по табл. V приложения находим $t_{0,1; 14} = 1,761$,

$$\Delta_a = \frac{0,051}{\sqrt{15}} 1,761 = 0,0282,$$

что больше заданной ошибки $\Delta_a = 0,02$.

В качестве следующего приближения задаемся $n = 20$, по табл. V приложения находим $t_{0,1; 19} = 1,73$. По формуле (2.76) определяем

$$\Delta_a = \frac{0,051}{\sqrt{20}} 1,73 = 0,0197 \approx 0,02.$$

Итак, принимаем $n = 20$, т. е. дополнительно испытываем 9 образцов.

Пусть далее по результатам испытания $n = 11 + 9 = 20$ образцов выборочный коэффициент вариации $v = 0,045$. Определяем по формуле (2.76) ожидаемую с вероятностью $P = 0,9$ максимальную относительную ошибку оценки среднего значения предела прочности

$$\Delta_a = \frac{0,045}{\sqrt{20}} 1,761 = 0,0177.$$

Если после дополнительных испытаний девяти образцов выборочный коэффициент вариации оказался бы существенно выше 0,051, а величина максимальной ошибки, подсчитанная по формуле (2.76), была бы неприемлемо высокой, то следовало бы вновь корректировать объем испытаний с учетом полученного значения после дополнительных испытаний коэффициента вариации и т. д.

В случае логарифмически нормального распределения случайной величины X при определении объема испытаний по формулам (2.73)–(2.76) следует иметь в виду, что γ и v представляют собой коэффициенты вариации величины $Y = \lg X$, а Δ_a и δ_a — максимальные ошибки оценки математического ожидания величины Y .

Если цель планируемых испытаний — оценка среднего квадратического отклонения характеристики механических свойств, то объем выборки определяют методом подбора по формуле [24, 28]

$$(1 + \Delta_0)^2 = \frac{\chi_{\alpha/2}^2}{\frac{2}{\chi_{0,5}^2}}, \quad (2.77)$$

где Δ_0 — максимальная относительная ошибка (допуск) при оценке среднего квадратического отклонения случайной величины X при нормальном или $Y = \lg X$ при логарифмически нормальном законе распределения; $\chi_{\alpha/2}^2$ и $\chi_{0,5}^2$ — квантили уровня $P = \alpha/2$ и $P = 0,5$ статистики χ^2 (табл. VI приложения).

Величину α обычно принимают равной 0,1, реже — 0,05. Значение ошибки Δ_0 следует выбирать в зависимости от требований к точности оценки среднего квадратического отклонения характеристик механических свойств. При низкой точности принимают $\Delta_0 = 0,4 \div 0,5$, при средней точности $\Delta_0 = 0,25 \div 0,35$ и при высокой точности $\Delta_0 = 0,1 \div 0,2$.

При $n \geq 15$ для определения объема выборки вместо (2.77) можно воспользоваться приближенной формулой

$$n = 1,5 + \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{2\Delta_0^2}. \quad (2.78)$$

Пример 2.15. Определить минимально необходимый объем испытаний с целью оценки среднего квадратического отклонения, предела прочности алюминиевого сплава, если $\alpha = 0,1$ и $\Delta_0 = 0,3$.

Подсчитаем левую часть уравнения (2.77) $(1 + \Delta_0^2) = (1 + 0,3)^2 = 1,69$. По табл. VI приложения для различных $k = n - 1$ вычисляем отношения $\chi_{0,05}^2$ и $\chi_{0,5}^2$ и выбираем такое значение $k = n - 1$, при котором отношение указанных величин будет меньше или равно 1,69, т. е. значению левой части уравнения (2.77). Например, для $k = 10 \chi_{0,05}^2 / \chi_{0,5}^2 = 18,3 / 9,34 = 1,96$, для $k = 15 \chi_{0,05}^2 / \chi_{0,5}^2 = 25,0 / 14,3 = 1,75$, для $k = 16$ это отношение равно $26,3 / 15,3 = 1,72$ и для $k = 17$ отношение равно $27,6 / 16,3 = 1,69$. Окончательно принимаем $n = k + 1 = 18$.

При использовании формулы (2.78) получаем

$$n = 1,5 + \frac{1,645^2}{2 \cdot 0,3^2} = 16,5 \approx 17.$$

Если в результате испытаний планируется одновременная оценка и среднего значения и среднего квадратического отклонения контролируемой характеристики механических свойств с заданной точностью и надежностью, то объем испытаний определяют как наибольшее из двух значений n , найденных по формулам (2.73) — (2.75) и (2.77) — (2.78). Для этой цели могут быть также использованы табл. 2.9 и 2.10.

В ряде задач целью испытаний является оценка квантильных значений характеристики механических свойств. В этих случаях минимально необходимый объем испытаний определяют исходя из заданной точности и статистической надежности оценки квантили.

Выражая максимальную ошибку оценки квантили характеристики механических свойств в долях выборочного среднего квадратического отклонения этой характеристики

$$\delta_P = \frac{x_P - x_P^{(h)}}{s} \text{ для } P \leq 0,5; \quad (2.79)$$

$$\delta_P = \frac{x_P^{(b)} - x_P}{s} \text{ для } P \geq 0,5, \quad (2.80)$$

2.9. Минимальное число образцов n для оценки среднего значения, рассчитанное по формуле (2.78)

γ	Δ_0									
	0,01		0,02		0,03		0,04		0,05	
	α									
	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10
0,01	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1
0,02	16	11	4	3	2	1	1	1	1	1
0,03	35	25	9	6	4	3	3	2	2	1
0,04	62	44	16	11	7	5	4	3	3	2
0,05	94	68	24	17	11	8	6	5	4	3
0,06	140	97	35	25	16	11	9	6	6	4
0,07	190	130	47	33	21	15	12	9	8	6
0,08	245	175	62	43	28	20	16	11	10	7
0,09	310	215	78	55	35	25	20	14	13	9
0,10	385	270	94	68	43	30	24	17	16	11

2.10. Минимальное число образцов n для оценки среднего квадратического отклонения, рассчитанное по формуле (2.77)

α	Δ_0				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,05	195	50	25	14	10
0,06	180	46	22	13	10
0,07	165	43	21	13	9
0,08	155	40	19	12	9
0,09	145	38	18	12	8
0,10	135	36	17	11	8

минимально необходимый объем серии образцов в предположении нормального распределения величины X определяют методом подбора из уравнений

$$z_P - t'_{1-\beta} [n - 1; \Delta] \frac{1}{\sqrt{n}} = \delta_P \text{ для } P \leq 0,5; \quad (2.81)$$

$$t'_\beta [n - 1; \Delta] \frac{1}{\sqrt{n}} - z_P = \delta_P \text{ для } P \geq 0,5, \quad (2.82)$$

вытекающих из соотношений (2.64) — (2.67).

Значением доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$ при использовании формул (2.81) и (2.82) задаются. Обычно принимают $\beta = 0,9$, реже 0,95. Величину максимальной относительной ошибки оценки квантили принимают $\delta_P = 0,2 \div 0,3$ при высоких требованиях к точности, $\delta_P = 0,4 \div 0,6$ при средних требованиях и $\delta_P = 0,8 \div 1,0$ при низкой точности.

После проведения испытаний рассчитанного по формулам (2.81) и (2.82) количества образцов и оценки по их результатам среднего квадратического отклонения s может оказаться, что величина максимальной абсолютной ошибки оценки квантили $x_P - x_P^{(h)}$ или $x_P^{(b)} - x_P$, т. е.

$$\Delta_P = \delta_P s, \quad (2.83)$$

слишком велика и не удовлетворяет требованиям решаемой задачи. В этом случае производят корректировку объема испытаний, исходя из требований к максималь-

ной абсолютной ошибке с учетом найденной оценки среднего квадратического отклонения рассматриваемой характеристики механических свойств. Скорректированный объем испытаний находят по формулам (2.81) и (2.82) для $\delta_P = \frac{\Delta_P}{s}$ и т. д.

После проведения полного объема испытаний целесообразно уточнить максимальную абсолютную ошибку по формуле (2.83) с учетом нового значения оценки среднего квадратического отклонения s .

Для логарифмически нормально распределенных характеристик механических свойств объем испытаний с целью надежной оценки квантильных значений определяют аналогично по формулам (2.81) и (2.82) с учетом следующих выражений для максимальных относительных δ_P в долях $\hat{\delta}_y$, максимальных абсолютных Δ_P и максимальных относительных ошибок $\bar{\Delta}_P$ в долях оценки квантили:

$$\delta_P = \frac{\lg \hat{x}_P - \lg \hat{x}_P^{(n)}}{\hat{\delta}_y} \text{ для } P \leq 0,5, \quad (2.84)$$

$$\delta_P = \frac{\lg \hat{x}_P^{(B)} - \lg \hat{x}_P}{\hat{\delta}_y} \text{ для } P \geq 0,5; \quad (2.85)$$

$$\Delta_P = \hat{x}_P - \hat{x}_P^{(n)} \text{ или } \Delta_P = \hat{x}_P^{(B)} - \hat{x}_P; \quad (2.86)$$

$$\bar{\Delta}_P = \frac{\hat{x}_P - \hat{x}_P^{(n)}}{\hat{x}_P} \text{ или } \bar{\Delta}_P = \frac{\hat{x}_P^{(B)} - \hat{x}_P}{\hat{x}_P}, \quad (2.87)$$

где $\hat{\delta}_y$ — оценка среднего квадратического отклонения величины $Y = \lg X$.

Пример 2.16. Определить максимально необходимый объем испытаний образцов из литого алюминиевого сплава с целью оценки квантильного уровня $P = 0,001$ предела прочности с тем, чтобы при доверительной вероятности $\beta = 0,9$ максимальная абсолютная ошибка оценки квантили не превышала $\Delta_{0,001} = 10$ МПа.

Для аналогичного сплава [28] $s = 20$ МПа, поэтому принимаем в соответствии с соотношением (2.83) $\delta_{0,001} = \frac{10}{20} = 0,5$, что соответствует средней точности оценки квантили предела прочности.

По табл. 1.1 находим для $P = 0,001$ $z_{0,001} = -3,090$.

Для определения необходимого числа образцов используем метод подбора, для чего формулу (2.81) приводим к виду

$$t_{1-\beta} [n - 1; z_P \sqrt{n}] = (z_P - \delta_P) \sqrt{n}. \quad (2.88)$$

Далее задаем n и по методике, изложенной на с. 39, вычисляем левую часть уравнения (2.88) и сопоставляем с правой частью.

В нашем случае имеем для:

$$n = 60; t'_{0,1} = -27,526 > -27,808;$$

$$n = 64; t'_{0,1} = -28,243 > 28,720.$$

Разность между левой и правой частью возрастает с увеличением n , поэтому в дальнейшем снижаем число образцов:

$$n = 56; t'_{0,1} = -26,735 > -26,865;$$

$$n = 54; t'_{0,1} = -26,330 > -26,381;$$

$$n = 52; t'_{0,1} = -25,917 < -25,888;$$

$$n = 53; t'_{0,1} = -26,125 > -26,136.$$

В итоге принимаем для испытаний $n_1 = 53$. После испытания этой серии образцов и обработки результатов оказалось, что $s_1 = 25$ МПа. Определяем максимальную абсолютную ошибку оценки квантили предела прочности $\Delta_{0,001} = \hat{x}_{0,001} - \hat{x}_{0,001}^{(n)}$.

В соответствии с (2.83) $\Delta_{0,001} = 0,5 \cdot 25 = 12,5$ МПа, что превышает допустимую по условию ошибку $\Delta_{0,001} = 10$ МПа. Таким образом, первоначальный объем выборки $n_1 = 53$ не обеспечивает требуемой точности оценки квантили предела прочности, и поэтому корректируем объем испытаний.

В качестве следующего приближения принимаем в соответствии с (2.83) и с учетом результатов испытаний первоначальной серии из 53 образцов $\delta_{0,001} = 10/25 = 0,4$ и методом подбора вновь решаем уравнение (2.88) для $\delta_{0,001} = 0,4$.

Для ряда значений n левая и правая части уравнения (2.88) находятся в следующем соотношении:

$$n = 60; t'_{0,1} = -27,526 < -27,033;$$

$$n = 70; t'_{0,1} = -29,400 < -29,199;$$

$$n = 80; t'_{0,1} = -31,154 > -31,216;$$

$$n = 75; t'_{0,1} = -30,290 < -30,224;$$

$$n = 77; t'_{0,1} = -30,638 < -30,625;$$

$$n = 78; t'_{0,1} = -30,810 > -30,822.$$

Принимаем $n_2 = 78$. После испытания дополнительной серии из 25 образцов ($n_2 - n_1$) с учетом первоначальной серии объемом $n_1 = 53$ получили $s_2 = 24$ МПа $< s_1$. Это означает, что объем серии $n_2 = 78$ обеспечивает требуемую точность оценки квантили предела прочности. Величина максимальной ошибки оценки квантили в соответствии с (2.83) составляет $\Delta_{0,001} = 0,4 \cdot 24 = 9,6$ МПа вместо 10 МПа по условию.

Если после первой корректировки объема испытаний максимальная абсолютная ошибка превышает допустимую (10 МПа), а это может быть при условии $s_2 > s_1 = 25$ МПа, то следует аналогичным образом произвести новую корректировку объема серии и дополнительные испытания, и т. д.

Пример 2.17. Определить минимально необходимый объем испытаний с целью оценки квантильных чисел циклов до разрушения N уровня $P = 0,001$ образцов диаметром 8 мм из алюминиевого сплава АВ при консольном изгибе с вращением при напряжении $\sigma_{\max} = 150$ МПа, если максимальная относительная ошибка $\bar{\Delta}_{0,001}$ не должна превышать 0,25, для доверительной вероятности $\beta = 0,9$ (см. пример 2.2).

Принимаем $\delta_{0,001} = 0,4$, что соответствует средней точности оценки квантили. По табл. 1.1 находят для $P = 0,001$ $z_{0,001} = -3,09$. Задаемся n и по методике, изложенной на с. 39, вычисляем левую часть уравнения (2.88), и сопоставляем с правой частью. В рассматриваемом случае имеем для:

$$n = 80; t'_{0,1} = -31,154 > -31,216;$$

$$n = 90; t'_{0,1} = -32,813 > -33,109;$$

$$n = 75; t'_{0,1} = -30,290 < -30,224;$$

$$n = 77; t'_{0,1} = -30,638 < -30,625;$$

$$n = 78; t'_{0,1} = -30,810 > -30,822.$$

Предварительно принимаем $n_1 = 78$.

После испытания этой серии образцов и статистической обработки их результатов оказалось, что $\hat{a}_y = 6,513$; $\hat{\delta}_y = 0,325$ ($Y = \lg N$).

По формуле (2.62) производим оценку квантили уровня $P = 0,001$:

$$\lg \hat{N}_{0,001} = 6,513 - 3,09 \cdot 0,325 = 5,509; \hat{N}_{0,001} = 3,227 \cdot 10^3 \text{ циклов}$$

По формуле (2.66) находим нижнюю границу квантили для доверительной вероятности $1 - \beta = 0,1$:

$$\lg \hat{N}_{0,001}^{(n)} = 6,513 - 30,810 \cdot 0,325 / \sqrt{78} = 5,379; \hat{N}_{0,001}^{(n)} = 2,395 \cdot 10^3 \text{ циклов.}$$

По формуле (2.87) вычисляем максимальную относительную ошибку в долях оценки квантили:

$$\Delta_{0,001} = \frac{3,227 \cdot 10^3 - 2,395 \cdot 10^3}{3,227 \cdot 10^3} = 0,258.$$

Так как вычисленная ошибка больше допускаемой по условию $\Delta_{0,001} = 0,25$, производим корректировку объема испытаний, причем в последующем приближении усилываем тре-

бование к точности. Принимаем $\delta_{0,001} = 0,35$. Вновь задаемся объемом n и сопоставляем левую и правую части уравнения (2.88). Для ряда n имеем:

$$n = 80; t'_{0,1} = -31,154 < -30,768;$$

$$n = 90; t'_{0,1} = -32,813 < -32,635;$$

$$n = 100; t'_{0,1} = -34,359 > -34,400;$$

$$n = 95; t'_{0,1} = -33,591 < -33,529;$$

$$n = 98; t'_{0,1} = -34,056 < -34,054.$$

Принимаем $n_2 = 98$.

После испытания дополнительной серии из 20 образцов ($n_2 - n_1$) и обработки результатов получаем $\delta_y = 6,515$ и $\delta'_y = 0,315$.

По формуле (2.62) вновь оцениваем квантиль уровня $P = 0,001$:

$$\lg \hat{N}_{0,001} = 6,515 - 3,09 \cdot 0,315 = 5,542; \hat{N}_{0,001} = 3,481 \cdot 10^3 \text{ циклов.}$$

По формуле (2.66) находим нижнюю доверительную границу квантили

$$\lg N_{0,001}^{(n)} = 6,515 - 34,056 \frac{0,315}{\sqrt{98}} = 5,431; N_{0,001}^{(n)} = 2,700 \cdot 10^3$$

циклов и по формуле (2.87) вычисляем максимальную относительную ошибку оценки квантили долговечности

$$\bar{\Delta}_{0,001} = \frac{3,481 \cdot 10^3 - 2,700 \cdot 10^3}{3,481 \cdot 10^3} = 0,224,$$

что меньше допустимой по условию ошибки. Таким образом, испытание серии объемом $n = 98$ образцов дает возможность произвести оценку квантили долговечности для уровня $P = 0,001$ с необходимой точностью.

Если после первой корректировки объема испытаний не будет достигнута требуемая по условию точность оценки квантили, необходимо произвести вторую корректировку, и т. д.

Для сокращения вычислительной работы при определении минимально необходимого объема испытаний можно использовать табл. 2.11.

2.11. Минимально необходимый объем испытаний n для оценки квантили уровня P с максимальной относительной ошибкой, не превышающей δ_P , при доверительной вероятности β

β	P	δ_P									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,9	0,5	165	42	19	11	7	5	4	4	3	3
	0,1; 0,9	324	90	42	26	19	14	11	9	8	7
	0,05; 0,95	420	113	55	34	24	18	14	12	10	9
	0,01; 0,99	663	170	86	52	35	26	21	17	14	12
	0,005; 0,995	755	200	92	60	43	28	23	20	16	13
	0,001; 0,999	1100	255	135	73	53	37	29	25	21	17
0,95	0,5	270	68	30	18	12	9	7	6	5	4
	0,1; 0,9	535	140	68	41	29	22	17	14	12	10
	0,05; 0,95	700	182	89	55	37	27	21	18	15	13
	0,01; 0,99	1055	254	135	82	56	41	32	26	22	19
	0,005; 0,995	1250	330	157	94	63	47	36	29	25	21
	0,001; 0,999	1595	421	207	122	83	60	47	37	31	26

ГЛАВА 3

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПРИ АНАЛИЗЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

При использовании статистических критериев подвергается проверке некоторое предположение относительно свойств одной или нескольких генеральных совокупностей. Это предположение носит название *статистической гипотезы*. Гипотезу, имеющую наиболее важное значение в проводимом исследовании, называют *нулевой* и обозначают через H_0 . При рассмотрении, например, свойств продукции разных заводов нулевая гипотеза заключается в предположении о независимости характеристик механических свойств профилей от уровня технологии производства.

Нулевую гипотезу выдвигают и затем проверяют с помощью статистических критериев с целью выявления оснований для ее отклонения и для принятия *альтернативной гипотезы* H_A . Если имеющийся статистический материал не позволяет отвергнуть нулевую гипотезу, то ее принимают и используют в качестве рабочей гипотезы до тех пор, пока новые накопленные результаты испытаний не позволят ее отклонить.

Нулевую гипотезу отвергается тогда, когда на основании выборочных испытаний получается маловероятный результат для случая истинности выдвинутой нулевой гипотезы. Границей между высокой и малой вероятностью служат так называемые *уровни значимости*. Для большинства областей научного исследования в качестве уровней значимости принимают 5%-ный и 1%-ный уровни. Значительно реже используется 0,1%-ный уровень значимости.

Значения статистики, при которых для выбранного уровня значимости отвергается нулевая гипотеза, образуют так называемую *критическую область* критерия, а значения, при которых гипотеза не отвергается, — *область допустимых значений*.

Таким образом, статистическая проверка гипотез заключается в построении критической области критерия для выбранного уровня значимости. Если статистика, подсчитанная на основании выборки, попадает в критическую область, нулевая гипотеза отвергается, что означает несоответствие проверяемой гипотезы опытным данным.

При статистической проверке гипотез возможны четыре исхода (табл. 3.1), из них два ошибочных. *Ошибка первого рода* заключается в отбрасывании нулевой гипотезы в то время, когда она на самом деле верна. *Ошибка второго рода* заключается в принятии нулевой гипотезы в то время, когда она в действительности неверна.

Вероятность совершить ошибку первого рода, т. е. забраковать верную гипотезу, обозначают через α . В практике научных исследований ее величину обычно принимают равной $\alpha = 0,05$. Реже принимают $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,01$. Вероятность совершить ошибку второго рода обозначают через β . Величину

$$\pi = 1 - \beta, \quad (3.1)$$

представляющую собой вероятность отклонить нулевую гипотезу, когда на самом деле верна альтернативная, называют *функцией мощности критерия*. Обычно величину α задаются и стараются добиться возможно большего значения функции мощности π .

Различают *односторонние* и *двусторонние критерии*. Если, например, хотят убедиться в том, что одна случайная величина строго больше другой (или строго меньше другой), то используют односторонний критерий. А если интересуются как положительными, так и отрицательными расхождениями между изучаемыми величинами, то используют двусторонний критерий.

3.1. Возможные исходы при проверке статистических гипотез

Решение по статистическому критерию	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 отвергается	Ошибочное решение (ошибка первого рода)	Правильное решение
H_0 не отвергается	Правильное решение	Ошибочное решение (ошибка второго рода)

Рассмотрим вначале критерии, в основе которых лежит предположение о нормальном или логарифмически нормальном законе распределения изучаемой характеристики механических свойств. Такие критерии называют *параметрическими*. Статистические критерии, которые не используют информацию о виде функции распределения случайной величины, называют *непараметрическими* критериями.

КРИТЕРИИ ДЛЯ ОТБРАСЫВАНИЯ РЕЗКО ВЫДЕЛЯЮЩИХСЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

Рассеяние экспериментальных данных в основном определяется неоднородностью конструкционных материалов, однако в некоторых случаях оно заметно увеличивается вследствие изменения условий испытаний, больших погрешностей при замере диаметра образца и отсчета нагрузки. Если указанные отклонения от нормы отмечаются в процессе испытания, то результаты этих экспериментов следует исключить из дальнейшего анализа.

Иногда причина резких отклонений опытных данных не обнаруживается во время проведения экспериментов, однако значение полученной механической характеристики отдельных образцов вызывает сомнение. В подобных случаях сомнительные результаты исключают путем применения специальных критериев.

Нулевой гипотезой при использовании критериев является предположение о том, что наибольшее значение x_n (или наименьшее x_1) принадлежит той же генеральной совокупности, что и все остальные $n - 1$ наблюдений.

Критерий для отбрасывания при известной генеральной дисперсии. Использование рассматриваемого критерия возможно для нормально распределенной случайной величины при неизвестном математическом ожидании и известном значении генеральной дисперсии. Подобная ситуация встречается для тех характеристик механических свойств материала и деталей, которые контролируются при сдаче и приемке продукции. Гравитационные и технологические колебания при производстве прессованных профилей из алюминиевых сплавов при значимом их влиянии на средний уровень статических и усталостных характеристик материала не влияют на дисперсию свойств. В связи с этим большой накопленный объем результатов приемочных контрольных испытаний позволяет достаточно точно и надежно оценить генеральную дисперсию характеристик механических свойств ряда полуфабрикатов и деталей.

Результаты испытаний анализируемой выборки представляют в виде вариационного ряда (2.2). По формуле (2.4) или (2.14) производят оценку математического ожидания.

Далее, если сомнение вызывает первый член вариационного ряда, вычисляют статистику

$$t_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{\sigma} \quad (3.2)$$

или

$$t_n = \frac{x_n - \bar{x}}{\sigma}, \quad (3.3)$$

если сомнительным является последний член вариационного ряда, и сравнивают с критическим значением критерия t_α , взятым из табл. 3.2 для уровня значимости α и объема выборки n .

Если выполняется неравенство

$$t_1 \leq t_\alpha \text{ или } t_n \leq t_\alpha, \quad (3.4)$$

то нулевая гипотеза не отклоняется, т. е. результат испытания x_1 или x_n не следует считать выбросом, и он должен учитываться, как и остальные $n - 1$ результатов. В противоположном случае при

$$t_1 > t_\alpha \text{ или } t_n > t_\alpha \quad (3.5)$$

нулевая гипотеза отклоняется, т. е. результат x_1 или x_n является ошибочным и должен быть исключен из дальнейшего анализа, а найденная ранее оценка математического ожидания должна быть скорректирована.

Критерий Н. В. Смирнова. Использование критерия Н. В. Смирнова также предполагает нормальное распределение изучаемой случайной величины. Критерий действителен для наиболее широко встречающихся случаев, при которых генеральные параметры неизвестны, а известны лишь их оценки, произведенные на основании анализируемой выборки.

Предварительно результаты испытаний выборки располагают в виде вариационного ряда (2.2). По формуле (2.4) или (2.14) производят оценку математического ожидания и по формуле (2.9) оценивают среднее квадратическое отклонение.

Далее вычисляют статистику

$$u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s}, \quad (3.6)$$

если сомнение вызывает первый член вариационного ряда, или

$$u_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s}, \quad (3.7)$$

если сомнительен максимальный член вариационного ряда, и сопоставляют с критическим значением u_α , взятым из табл. 3.2 для уровня значимости α и объема выборки n . При $n > 25$ рекомендуется принимать $u_\alpha = t_\alpha$ (табл. 3.2).

Если имеет место соотношение

$$u_1 \leq u_\alpha \text{ или } u_n \leq u_\alpha, \quad (3.8)$$

то нулевая гипотеза не отклоняется, т. е. результат испытания первого или последнего образца не следует считать резко выделяющимся, и он должен учитываться, как и остальные $n - 1$ результатов.

В случае, если

$$u_1 > u_\alpha \text{ или } u_n > u_\alpha, \quad (3.9)$$

нулевая гипотеза отклоняется, т. е. выброс x_1 или x_n не случаен, не характерен рассматриваемой совокупности данных, а определяется грубыми ошибками при испытаниях. В этом случае значение характеристики механических свойств x_1 или x_n исключают из рассмотрения, а найденные ранее оценки \bar{x} и s подвергают корректировке с учетом отброшенных результатов.

Пример 3.1. По результатам примера 2.1 проверить нулевую гипотезу о принадлежности последнего образца вариационного ряда, представленного в табл. 2.2, той же генеральной совокупности, как и остальные 19 образцов.

При решении примера 2.1 найдено, что для рассматриваемой выборки $\bar{x} = 453$ МПа, $s = 11,26$ МПа. По формуле (3.7) подсчитываем значение статистики

$$u_{20} = \frac{477 - 453}{11,26} = 2,13.$$

Сопоставление вычисленной статистики с критическими значениями (см. табл. 3.2) показывает, что для всех рассмотренных значений уровней значимости выполняется условие (3.8). Это означает, что нулевая гипотеза не отклоняется, т. е. результат $x_{20} = 477$ МПа не является следствием грубой ошибки эксперимента.

3.2. Критические значения t_α и u_α

n	t_α			u_α		
	$\alpha = 0,10$	$0,05$	$0,01$	$\alpha = 0,10$	$0,05$	$0,01$
3	1,50	1,74	2,22	1,15	1,15	1,15
4	1,70	1,94	2,43	1,42	1,46	1,49
5	1,84	2,08	2,57	1,60	1,67	1,75
6	1,94	2,18	2,68	1,73	1,82	1,94
7	2,02	2,27	2,76	1,83	1,94	2,10
8	2,09	2,33	2,83	1,91	2,03	2,22
9	2,15	2,39	2,88	1,98	2,11	2,32
10	2,20	2,44	2,93	2,03	2,18	2,41
11	2,24	2,48	2,97	2,09	2,23	2,48
12	2,28	2,52	3,01	2,13	2,29	2,55
13	2,32	2,56	3,04	2,17	2,33	2,61
14	2,35	2,59	3,07	2,21	2,37	2,66
15	2,38	2,62	3,10	2,25	2,41	2,70
16	2,41	2,64	3,12	2,28	2,44	2,75
17	2,43	2,67	3,15	2,31	2,48	2,78
18	2,46	2,69	3,17	2,34	2,50	2,82
19	2,48	2,71	3,19	2,36	2,53	2,85
20	2,50	2,73	3,21	2,38	2,56	2,88
21	2,52	2,75	3,22	2,41	2,58	2,91
22	2,54	2,77	3,24	2,43	2,60	2,94
23	2,56	2,78	3,26	2,45	2,62	2,96
24	2,57	2,80	3,27	2,47	2,64	2,99
25	2,59	2,82	3,28	2,49	2,66	3,01
30	2,70	2,93	3,40			
40	2,79	3,02	3,48			
50	2,86	3,08	3,54			
100	3,08	3,29	3,72			
250	3,34	3,53	3,95			
500	3,53	3,70	4,11			

При логарифмически нормальном распределении критерия (3.4), (3.5), (3.8), (3.9) применяют к логарифмам случайной величины. В формулах (3.2), (3.3), (3.6), (3.7) в этом случае вместо x_1 и x_n следует принять $y = \lg x_1$ и $y_n = \lg x_n$, а вместо \bar{x} , s и σ — соответственно \hat{a}_y , b_y и s_y , т. е. статистики для логарифма случайной величины.

Пример 3.2. По результатам примера 2.2 проверить нулевую гипотезу о принадлежности последнего образца вариационного ряда, представленного в табл. 2.3, той же генеральной совокупности, как и остальных 99 образцов.

По формуле (3.7) для $\hat{a}_y = 6,515$ и $b_y = 0,315$ (см. пример 2.2) находим

$$u_{100} = \frac{7,4586 - 6,515}{0,315} = 3,00.$$

Сопоставление вычисленного значения с критическими $u_\alpha = t_\alpha$ (см. табл. 3.2) показывает, что для всех рассмотренных в таблице уровней значимости выполняется условие (3.8), т. е. результат $u_{100} = 7,4586$ принадлежит той же генеральной совокупности, что и остальные 99 результатов, и не является следствием грубой ошибки при испытании.

КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА ДВУХ ДИСПЕРСИЙ НОРМАЛЬНО (ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНО) РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В связи с тем, что выборочные числовые характеристики механических свойств, в том числе и выборочная дисперсия, обладают определенным рассеянием, при исследовании влияния различных факторов на механические свойства материала и деталей, при оптимизации технологии производства, выборе материала и решения других задач возникает необходимость определения значимости или случайности в рас-

хождениях выборочных характеристик между собой, а также выборочных и известных генеральных характеристик.

Сравнение выборочной дисперсии с известной генеральной. В некоторых практических важных случаях имеющийся большой экспериментальный материал позволяет с высокой точностью и статистической надежностью оценить генеральную дисперсию характеристики механических свойств σ_0^2 .

Допустим, что в связи с изменением технологии производства полупроизводства деталей или в связи с изучением влияния воздействия на механические свойства других факторов была испытана серия образцов объемом n , по результатам которой вычислена оценка дисперсии характеристики механических свойств s^2 . Требуется проверить нулевую гипотезу H_0 , заключающуюся в том, что дисперсия σ^2 генеральной совокупности, из которой взята выборка, равна σ_0^2 . Рассмотрим решение этой задачи при трех возможных альтернативных гипотезах H_A .

1. Альтернативная гипотеза $H_A : \sigma^2 > \sigma_0^2$. Если для выбранного уровня значимости α выполняется неравенство

$$\frac{s^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{\chi_{\alpha}^2}{n-1}, \quad (3.10)$$

то нулевую гипотезу $\sigma^2 = \sigma_0^2$ не отклоняют.

Если неравенство (3.10) несправедливо, то нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

2. Альтернативная гипотеза $H_A : \sigma^2 < \sigma_0^2$. Нулевую гипотезу $\sigma^2 = \sigma_0^2$ не отклоняют, если выполняется неравенство

$$\frac{s^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{\chi_{1-\alpha}^2}{n-1}. \quad (3.11)$$

В случае несоблюдения неравенства (3.11) нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную $\sigma^2 < \sigma_0^2$.

3. Альтернативная гипотеза $H_A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. В этом случае для испытания нулевой гипотезы $\sigma^2 = \sigma_0^2$ используют двусторонний критерий. Если неравенства

$$\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2}{n-1} \leq \frac{s^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{\chi_{\alpha/2}^2}{n-1} \quad (3.12)$$

справедливы, то нулевую гипотезу не отклоняют. При невыполнении неравенства (3.12) нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

При использовании критериев значимости (3.10)–(3.12), как и других критериев, важно, задаваясь приемлемой величиной уровня значимости α , обеспечить достаточно низкую вероятность ошибки второго ряда, т. е. иметь достаточно высокую уверенность в браковке нулевой гипотезы в то время, когда верна альтернативная. Цругими словами, при испытании нулевой гипотезы должна быть обеспечена необходимая мощность критерия относительно альтернативной гипотезы (3.1),

Мощность одностороннего критерия (3.10) в зависимости от фактического соотношения генеральных дисперсий

$$\lambda^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = (1 + \Delta_\sigma)^2 \quad (3.13)$$

и принятого уровня значимости α определяется из выражения [33]

$$\lambda^2 = \frac{\chi_{\alpha}^2}{\chi_{1-\beta}^2} = (1 + \Delta_\sigma)^2, \quad (3.14)$$

где Δ_σ — максимальное относительное расхождение (ошибка) в средних квадратических отклонениях при принятии нулевой гипотезы с уровнем значимости α .

Например, при испытании 20 образцов обнаружить при $\alpha = 0,05$ расхождение в средних квадратических отклонениях, равное $\Delta_\sigma = 0,3$, в соответствии с соотно-

шением (3.14) можно лишь с вероятностью $\pi = 1 - \beta = 0,53$, так как при $\lambda^2 = (1 + \Delta_\sigma)^2 = 1,69$ и $\chi_{0,05}^2 = 30,1$ $\chi_{1-\beta}^2 = \frac{30,1}{1,69} = 17,8$ (см. табл. VI приложения), т. е. вероятность совершил ошибку II рода (принять неверную нулевую гипотезу) равна $\beta = 0,47$.

Аналогичное выражение для функции мощности имеет место и для одностороннего критерия (3.11).

Функцией мощности двустороннего критерия (3.12) является

$$\pi = P\left(\chi^2 < \frac{1}{\lambda^2} \chi_{1-\alpha/2}^2\right) + P\left(\chi^2 > \frac{1}{\lambda^2} \chi_{\alpha/2}^2\right). \quad (3.15)$$

Повысить мощность критериев при заданном уровне значимости α и значении отношения дисперсий λ^2 представляется возможным только за счет увеличения объема выборки. При использовании односторонних критериев для обеспечения необходимой мощности π минимальный объем испытаний должен удовлетворять соотношению (3.14).

При значениях $n \geq 15$ минимально необходимый объем выборки можно найти по приближенной формуле

$$n = 1,5 + 0,5 \left[\frac{z_{1-\beta}(1 + \Delta_\sigma) + z_{1-\alpha}}{\Delta_\sigma} \right]^2. \quad (3.16)$$

В случае использования двустороннего критерия (3.12) минимально необходимый объем выборки определяют методом подбора по приближенному соотношению

$$(1 + \Delta_\sigma)^2 = \frac{\chi_{\alpha/2}^2}{\chi_{1-\beta}^2} \quad (3.17)$$

или при $n \geq 15$ по формуле

$$n = 1,5 + 0,5 \left[\frac{z_{1-\beta}(1 + \Delta_\sigma) + z_{1-\alpha/2}}{\Delta_\sigma} \right]^2. \quad (3.18)$$

Для ряда значений α , β и Δ_σ объем выборки, определяемый соотношением (3.17), приведен в табл. 3.3.

3.3. Максимально необходимый объем выборки n при проверке гипотезы $\sigma^2 = \sigma_0^2$

β	α	Δ_σ				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,05	0,05	710	195	94	58	41
	0,06	680	185	91	56	39
	0,07	655	180	88	55	38
	0,08	635	175	86	53	37
	0,09	615	170	84	52	36
	0,10	600	165	82	50	35
0,10	0,05	570	155	75	46	32
	0,06	545	145	71	44	31
	0,07	520	140	69	42	30
	0,08	500	135	67	41	29
	0,09	485	135	64	40	28
	0,10	470	130	62	39	27

Пример 3.3. В примере 2.1 по результатам испытания 20 образцов из дюралюминиевого прессованного профиля произведена оценка дисперсии предела прочности $s^2 = 126,9$. Проверить нулевую гипотезу, заключающуюся в том, что выборка взята из генеральной совокупности с дисперсией $\sigma_0^2 = 100$ против альтернативной $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

Вычисляем левую часть неравенства (3.10):

$$\frac{s^2}{\sigma_0^2} = \frac{126,9}{100} = 1,269.$$

Задаемся $\alpha = 0,05$ и по табл. VI приложения находим для $k = n - 1 = 19$ $\chi_{0,05}^2 = 30,1$. Вычисляем правую часть соотношения (3.10):

$$\frac{\chi_{0,05}^2}{n - 1} = \frac{30,1}{19} = 1,584.$$

Неравенство (3.10) выполняется, следовательно, нулевую гипотезу не бракуем.

Пример 3.4. Определить минимальный объем выборки для проверки нулевой гипотезы о равенстве дисперсий с помощью двустороннего критерия (3.12), если $\alpha = 0,05$; $\beta = 0,1$ и $\Delta_\sigma = 0,3$.

По табл. 1.1 находим $z_{0,975} = 1,960$; $z_{0,9} = 1,282$. На основании формулы (3.18) определяем

$$n = 1,5 + 0,5 \left[\frac{1,282 + 1,960}{0,3} \right]^2 \approx 75.$$

Критерий равенства дисперсий двух совокупностей. Пусть по результатам испытаний двух независимых выборок объемом n_1 и n_2 из нормально распределенных совокупностей подсчитаны оценки дисперсий s_1^2 и s_2^2 , причем $s_1^2 > s_2^2$. Требуется проверить нулевую гипотезу о том, что указанные выборки принадлежат генеральным совокупностям с равными дисперсиями, т. е. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ при альтернативной гипотезе $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. С этой целью используют двусторонний F -критерий (критерий Фишера), для чего находят статистику

$$F = s_1^2/s_2^2 \text{ при } s_1^2 > s_2^2 \quad (3.19)$$

и сопоставляют с критическим значением $F_{1-\alpha/2}$, представленным в табл. VIII приложения * в зависимости от $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ для $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,01$. Если

$$F = s_1^2/s_2^2 \leq F_{1-\alpha/2}, \quad (3.20)$$

то гипотезу о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей, из которых взяты выборки, т. е. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, не отклоняют. В случае невыполнения неравенства (3.20) нулевую гипотезу отвергают.

При альтернативной гипотезе $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ используют односторонний критерий F . Проверяют неравенство

$$F = s_1^2/s_2^2 \leq F_{1-\alpha}, \quad (3.21)$$

если оно выполняется, то нулевую гипотезу не отвергают. В противном случае принимают $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

В случае подтверждения нулевой гипотезы $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ по двум выборочным дисперсиям производят оценку генеральной дисперсии σ^2 :

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

которая может быть использована для построения доверительных интервалов (2.53).

Пример 3.5. В результате испытаний 30 образцов из утяжинного (заднего) конца предсаженного профиля и 20 образцов из выходного (переднего) конца найдены выборочные средние значения и дисперсии предела прочности алюминиевого сплава, которые составляли $\bar{x}_1 = 401 \text{ МПа}$, $s_1^2 = 82$, $\bar{x}_2 = 409 \text{ МПа}$, $s_2^2 = 71$ соответственно для утяжинного и выходного концов. Требуется проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий предела прочности материала двух зон профиля при альтернативной гипотезе $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

* Более полная таблица приведена в работе [1].

В соответствии с соотношением (3.19) $F = \frac{82}{71} = 1,15$. Для принятого уровня значимости $\alpha = 0,1$; $k_1 = n_1 - 1 = 29$ и $k_2 = n_2 - 1 = 19$ по табл. VIII приложения находим $F_{1-\alpha/2} = F_{0,95} = 2,08$ и сопоставляем с вычисленным значением. В рассматриваемом случае $F < F_{0,95}$, значит, можно принять в качестве рабочей гипотезы о том, что исследуемые зоны профиля равнозначны по однородности материала ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).

Функция мощности двустороннего критерия (3.20) имеет вид [33]

$$\pi = P\left(F < \frac{1}{\lambda^2} F_{\alpha/2}\right) + P\left(F > \frac{1}{\lambda^2} F_{1-\alpha/2}\right), \quad (3.22)$$

где $\lambda^2 = \sigma_1^2/\sigma_2^2$.

В случае одностороннего критерия (3.21) функция мощности

$$\pi = P\left(F > \frac{1}{\lambda^2} F_{1-\alpha}\right). \quad (3.23)$$

Задаваясь уровнем значимости α и приемлемыми значениями β и λ , по формулам (3.22) и (3.23) методом подбора можно определить минимально необходимый объем испытаний для проверки гипотезы $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. В этом случае обычно принимают $n_1 = n_2 = n$.

При логарифмически нормальном распределении величины X рассмотренные в данном разделе процедуры проверки гипотез относительно дисперсии могут быть в полной мере использованы применительно к дисперсии случайной величины $Y = \lg X$.

КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА ДИСПЕРСИЙ РЯДА СОВОКУПНОСТЕЙ

Нулевая гипотеза в этом случае заключается в том, что все m генеральных совокупностей, из которых взяты выборки, имеют равные дисперсии, т. е. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma^2$.

Критерий Хартлея. Наиболее простым критерием проверки нулевой гипотезы о равенстве (однородности) ряда дисперсий $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma^2$ при одинаковых объемах выборок $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$ является критерий Хартлея, который предусматривает вычисление статистики

$$F_{\max} = s_{\max}^2 / s_{\min}^2 \quad (3.24)$$

и сопоставление ее с критическим значением F_{\max} для выбранного α , числа партий m и $k = n - 1$ (табл. IX приложения). При выполнении неравенства

$$F_{\max} \leq F_{\max\alpha} \quad (3.25)$$

нулевую гипотезу не отвергают, в противном случае — отвергают и принимают альтернативную гипотезу.

Пример 3.6. Испытано на растяжение пять серий по 20 образцов из алюминиевого сплава различных плавок. Значение выборочных дисперсий предела прочности для отдельных плавок составляют: $s_1^2 = 154$, $s_2^2 = 208$, $s_3^2 = 186$, $s_4^2 = 197$, $s_5^2 = 153$. Требуется оценить значимость влияния плавочных и технологических колебаний на дисперсию предела прочности материала.

По формуле (3.24) находим

$$F_{\max} = s_2^2 / s_5^2 = 208/153 = 1,36.$$

По табл. IX приложения для $\alpha = 0,05$; $m = 5$ и $k = 20 - 1 = 19$ определяем $F_{\max 0,05} = 3,71$, что свидетельствует о выполнении условия (3.25). Таким образом, предположение о том, что генеральные дисперсии предела прочности алюминиевого сплава пяти исследованных плавок равны друг другу, не отвергается, т. е. плавочные и технологические отклонения не оказывают существенного влияния на дисперсию предела прочности алюминиевого сплава.

Критерий Кочрена. Критерий Кочрена используется также при равных объемах отдельных выборок и является предпочтительным по сравнению с критерием Хартлея в случаях, когда одна из выборочных дисперсий значительно больше остальных, а также при $m > 12$. При использовании критерия Кочрена находят статистику

$$G_{\max} = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^m s_i^2} \quad (3.26)$$

и сопоставляют с критическим значением G_α для выбранного уровня значимости α , числа партий m и $k = n - 1$ (табл. X приложения). Если выполняется неравенство

$$G_{\max} \leq G_\alpha, \quad (3.27)$$

то нулевую гипотезу не отвергают. При несоблюдении неравенства (3.27) нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную.

В связи с тем, что критерий Кочрена использует больше информации, он оказывается несколько более чувствительным, чем критерий Хартлея.

Пример 3.7. Проверить нулевую гипотезу $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma^2$ по условию примера 3.6.

По формуле (3.26) находим

$$G_{\max} = \frac{208}{154 + 208 + 186 + 197 + 153} = \frac{208}{898} = 0,232.$$

По табл. X приложения для $\alpha = 0,05$; $m = 5$ и $k = 20 - 1 = 19$ определяем $G_{0,05} = 0,356$. Условие (3.27) выполняется. Таким образом, гипотеза $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma^2$ не отвергается.

Критерий Бартлетта. При неодинаковом числе образцов в отдельных партиях $n_i \geq 5$ однородность дисперсий может быть проверена с помощью критерия Бартлетта. В этом случае вычисляют

$$\chi^2 = \frac{2,3026}{c} \left[\left(\sum_{i=1}^m n_i - m \right) \lg s^2 - \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \lg s_i^2 \right], \quad (3.28)$$

где

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \right); \quad (3.29)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m}, \quad (3.30)$$

и сравнивают с табличным значением, найденным для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы $k = m - 1$ (табл. VI приложения). Если выполняется условие

$$\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2, \quad (3.31)$$

то нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий совокупностей, из которых взяты выборки, не отвергают. При неудовлетворении условия (3.31) нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную.

В случае подтверждения нулевой гипотезы об однородности дисперсий ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_i^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma^2$) по m выборочным дисперсиям на основании выражения (3.30) производят оценку генеральной дисперсии σ^2 , которая может быть использована для построения доверительных интервалов (2.53).

КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА ДВУХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ НОРМАЛЬНО (ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНО) РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ

При принятии решений о кондиционности материала, преимуществе сплава, эффективности новой технологии производства материала и деталей машин и т. д. возникает необходимость по выборочным средним значениям механических характеристик судить о соотношении соответствующих характеристик генеральных совокупностей. Предполагается нормальное (логарифмически нормальное) распределение характеристик механических свойств, однако в данном случае это требование является менее жестким.

Сравнение выборочного среднего с известным генеральным. Пусть при существующей технологии производства материала накоплен большой объем экспериментальных данных, который позволил определить математическое ожидание a и дисперсию σ^2 характеристик механических свойств. Затем в технологию были внесены некоторые изменения. Результаты испытаний серии образцов материала, изготовленного по новой технологии, показали, что выборочные значения среднего \bar{x} и дисперсии s^2 несколько отличаются от генеральных. Требуется выяснить, оказалось ли значимое влияние изменения в технологии производства на среднюю величину характеристик механических свойств, т. е. имеется ли значимое различие между выборочным значением \bar{x} и генеральным средним a .

Рассмотрим решение этой задачи для двух случаев: 1) генеральная дисперсия σ^2 известна, 2) генеральная дисперсия σ^2 неизвестна, но известна ее оценка s^2 .

Примем в качестве нулевой гипотезы предположение о том, что среднее значение a_1 характеристик механических свойств материала, изготовленного по новой технологии, равно среднему значению a для материала, изготовленного по старой технологии, т. е. $a_1 = a$. Генеральная дисперсия σ^2 сохранилась неизменной.

Нулевую гипотезу не отклоняют, если выполняется неравенство:
при альтернативе $a_1 > a$

$$z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma \sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha}, \quad (3.32)$$

при альтернативе $a_1 < a$

$$z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma \sqrt{n}} \geq z_\alpha, \quad (3.33)$$

где $z_{1-\alpha}$ и z_α — критические значения одностороннего критерия для уровня значимости α (табл. 1.1).

При нарушении условий (3.32) и (3.33) нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную.

При альтернативной гипотезе $a_1 \neq a$ используется двусторонний критерий значимости. Если выполняется неравенство

$$z = \frac{|\bar{x} - a|}{\sigma \sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}, \quad (3.34)$$

то нулевую гипотезу не отклоняют. В противном случае нулевую гипотезу отвергают.

Мощность односторонних критериев (3.32) и (3.33) в зависимости от фактического расхождения между двумя генеральными средними

$$\lambda = \frac{a_1 - a}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\Delta_a \sqrt{n}}{\gamma} \quad (3.35)$$

и принятого уровня значимости α определяется соотношением

$$\pi = \Phi(z_\alpha + \lambda), \quad (3.36)$$

где γ — коэффициент вариации; Δ_a — максимальное относительное расхождение (ошибка) в математических ожиданиях,

$$\Delta_a = \frac{|a_1 - a|}{a}. \quad (3.37)$$

Например, при испытании десяти образцов обнаружить при $\alpha = 0,05$ относительное расхождение в средних $\Delta_a = 0,1$ для материала с $\gamma = 0,1$ в соответствии с (3.36) можно с вероятностью $\pi = 1 - \beta = 0,935$, так как $\lambda = 3,162$; $z_{0,05} = -1,645$ (см. табл. 1.1); $\Phi(-1,645 + 3,162) = \Phi(1,517) = 0,935$ (см. табл. I приложения), т. е. вероятность совершить ошибку второго рода равна $\beta = 0,065$.

Задаваясь α и β , на основании формул (3.35) и (3.36) представляется возможным определить минимально необходимый объем выборки, обеспечивающий обнаружение относительного расхождения в генеральных средних Δ_a (3.37):

$$n = \frac{\gamma^2}{\Delta_a^2} (z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2. \quad (3.38)$$

При использовании двустороннего критерия значимости (3.34) мощность критерия определяется соотношением

$$\pi = \Phi(z_{\alpha/2} - \lambda) + \Phi(z_{\alpha/2} + \lambda), \quad (3.39)$$

которое приводит для малых α и β к выражению, позволяющему определять минимально необходимый объем испытаний,

$$n = \frac{\gamma^2}{\Delta_a^2} (z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2. \quad (3.40)$$

В ряде случаев при определении объема испытаний вместо ошибки Δ_a целесообразно использовать ошибку δ_a , выраженную в долях среднего квадратического отклонения, т. е.

$$\delta_a = (a_1 - a)/\sigma. \quad (3.41)$$

Формулы (3.38) и (3.40) при этом принимают вид

$$n = \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2}{\delta_a^2};$$

$$n = \frac{(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2}{\delta_a^2},$$

где δ_a — максимальное относительное расхождение (ошибка) в математических ожиданиях, выраженная в долях среднего квадратического отклонения. При высокой точности принимают $\delta_a = 0,2 \pm 0,3$, при средней $\delta_a = 0,4 \pm 0,5$ и при низкой точности $\delta_a = 1$, что соответствует $\Delta_a = (0,2 \pm 0,3)\gamma$, $\Delta_a = (0,4 \pm 0,5)\gamma$ и $\Delta_a = \gamma$.

При неизвестном значении σ^2 используют выборочную дисперсию s^2 . В этом случае нулевую гипотезу при альтернативе $a_1 > a$ или $a_1 < a$ не отклоняют, если выполняется неравенство

$$\frac{|\bar{x} - a|}{s / \sqrt{n}} \leq t_\alpha, \quad (3.43)$$

где t_α — значение квантиля статистики t (2.41) уровня $P = 1 - \alpha$ для $k = n - 1$ (табл. V приложения). При альтернативной гипотезе $a_1 \neq a$ нулевую гипотезу не бракуют, если

$$\frac{|\bar{x} - a|}{s / \sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}. \quad (3.44)$$

В противном случае нулевую гипотезу $a_1 = a$ отвергают и принимают альтернативную.

Критерий равенства средних двух совокупностей. Пусть из двух нормально распределенных генеральных совокупностей с неизвестными параметрами a_1 , σ_1^2 и a_2 , σ_2^2 испытаны выборки объемом n_1 и n_2 . По результатам испытаний подсчитаны оценки параметров распределения \bar{x}_1 , s_1^2 и \bar{x}_2 , s_2^2 . Требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве средних значений этих совокупностей, т. е. $a_1 = a_2 = a$, при альтернативной гипотезе $a_1 \neq a_2$.

Рассмотрим вначале случай, когда дисперсии генеральных совокупностей равны, т. е. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, что может быть проверено по методике, изложенной ранее (см. с. 57).

Для проверки нулевой гипотезы $a_1 = a_2 = a$ вычисляют оценку дисперсии σ^2 :

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (3.45)$$

и статистику

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (3.46)$$

которую сопоставляют с критическим значением $t_{\alpha/2}$, найденным для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$ (табл. V приложения). Если справедливо неравенство

$$|t| \leq t_{\alpha/2}, \quad (3.47)$$

то нулевую гипотезу не отвергают.

Пример 3.8. Для условия примера 3.5 проверить гипотезу о равенстве средних значений предела прочности образцов, вырезанных из утяжинного и выходного конца прессованного профиля из алюминиевого сплава ($n_1 = 30$; $\bar{x}_1 = 401$ МПа, $s_1^2 = 82$; $n_2 = 20$; $\bar{x}_2 = 409$ МПа; $s_2^2 = 71$).

При решении примера 3.5 было показано, что гипотеза о равенстве генеральных дисперсий ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) не противоречит опытным данным. В связи с этим по формуле (3.45) находим оценку генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения:

$$s^2 = \frac{29.82 + 19.71}{30 + 20 - 2} = 77.6; \quad s = \sqrt{77.6} = 8.81 \text{ МПа.}$$

По формуле (3.46) вычисляем статистику

$$t = \frac{401 - 409}{8.81 \sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{20}}} = -3.15.$$

Задавшись $\alpha = 0.05$ (для $k = 30 + 20 - 2 = 48 > 30$ $t_\alpha \approx z_{1-\alpha/2}$), по табл. 1.1 находим критическое значение $t_{0.05} \approx z_{0.975} = 1.96$. В связи с тем, что условие (3.47) не выполняется, нулевую гипотезу о равенстве средних значений предела прочности отвергаем. Таким образом, расхождения в условиях формирования утяжинного и выходного конца профиля из алюминиевого сплава оказывают значимое влияние на предел прочности материала.

Если $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, равенство двух средних проверяют с помощью приближенного t -критерия:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}. \quad (3.48)$$

Число степеней свободы определяют из выражения

$$\frac{1}{k} = \frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1 - c)^2}{n_2 - 1}, \quad (3.49)$$

где

$$c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}. \quad (3.50)$$

Если выполняется неравенство (3.47), то нулевую гипотезу $a_1 = a_2 = a$ не отвергают. В противном случае $a_1 \neq a_2$.

При цензурированных выборках нулевую гипотезу о равенстве средних проверяют с помощью приближенного критерия [52]. Для этого вычисляют

$$s = \frac{n_1 s_1 + n_2 s_2}{n_1 + n_2}, \quad (3.51)$$

где s_1 и s_2 — оценки, найденные по результатам испытаний цензурированных выборок, и статистика

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \Phi_2(u)}}, \quad (3.52)$$

где \bar{x}_1 и \bar{x}_2 — оценки средних, найденные по результатам испытаний цензурированных выборок; $\Phi_2(u)$ — значение функции, определяемое по табл. 2.8.

Величина Z распределена приближенно нормально с параметром $M\{Z\} = 0$ и $D\{Z\} = 1$, поэтому, если

$$|z| \leq z_{1-\alpha/2}, \quad (3.53)$$

нулевую гипотезу не отклоняют.

В случае принятия нулевой гипотезы $a_1 = a_2 = a$ по двум выборочным средним производят оценку математического ожидания

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}, \quad (3.54)$$

которая и должна быть использована для построения доверительных интервалов (2.44).

Для логарифмически нормального распределения в полной мере могут быть использованы рассмотренные критерии с заменой X на случайную величину $Y = \lg X$.

КРИТЕРИЙ РАВЕНСТВА РЯДА СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ.

ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Равенство (однородность) ряда средних значений, т. е. незначимость влияния различных технологических факторов производства полуфабрикатов и деталей, конструктивных особенностей испытуемых элементов, влияния условий испытания и т. д. на средние значения характеристик механических свойств оценивают с помощью дисперсионного анализа результатов испытаний.

Дисперсионный анализ основан на предположении о нормальности закона распределения характеристики механических свойств и однородности дисперсий. Оценки параметров закона распределения механических характеристик находят на основании указанного анализа.

Результаты испытаний для однофакторного дисперсионного анализа представлены в табл. 3.4, где показана также схема предварительных вычислений.

Первоначально для каждой партии вычисляют оценки среднего значения и дисперсии, после чего проверяют гипотезу об однородности ряда дисперсий (см. с. 58, 59). В случае подтверждения гипотезы определяют оценку общего среднего

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^m n_i}, \quad (3.55)$$

где m — общее число партий; \bar{x}_i — оценка среднего значения характеристик механических свойств для i -й партии; n_i — число образцов i -й партии.

3.4. Схема вычислений при однофакторном дисперсионном анализе

№ партии образцов	Результаты испытаний	n_i	$\sum S_i$	\bar{x}_i	$\sum SS_i$	$s_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \times \left(SS_i - \frac{S_i^2}{n_i} \right)$
			S_i	\bar{x}_i	$\sum n_i$	$\sum s_i^2$
1	$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j}, \dots, x_{1n_1}$	n_1	S_1	\bar{x}_1	SS_1	s_1^2
2	$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2n_2}$	n_2	S_2	\bar{x}_2	SS_2	s_2^2
3	$x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3j}, \dots, x_{3n_3}$	n_3	S_3	\bar{x}_3	SS_3	s_3^2
...
i	$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in_i}$	n_i	S_i	\bar{x}_i	SS_i	s_i^2
...
m	$x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mj}, \dots, x_{mn_m}$	n_m	S_m	\bar{x}_m	SS_m	s_m^2

Ход дальнейших вычислений показан в табл. 3.5.

Дисперсия s_1^2 характеризует рассеяние по факторам, так как она обусловливается влиянием изучаемых факторов. Дисперсия s_2^2 характеризует внутреннее рассеяние, связанное с неоднородностью конструкционных материалов, случайными колеба-

3.5. Схема однофакторного дисперсионного анализа

Компонента дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат (дисперсия)
Межпартийная	$Q_1 = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$k_1 = m - 1$	$s_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$
Внутри партий (остаточная)	$Q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$k_2 = \sum_{i=1}^m n_i - m$	$s_2^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$
Общая	$Q = Q_1 + Q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$	$k = \sum_{i=1}^m n_i - 1$	$s^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i - 1} \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$

ниями условий испытаний и т. д., и носит название внутренней или остаточной дисперсии.

Проверку нулевой гипотезы о равенстве (однородности) средних проверяют с помощью критерия F .

Если дисперсионное отношение $F = s_1^2/s_2^2$ окажется меньше табличного значения $F_{1-\alpha}$, найденного для числа степеней свободы $k_1 = m - 1$; $k_2 = \sum_{i=1}^m n_i - m$

и уровня значимости α (табл. VIII приложения), то исследуемые факторы не оказывают значимого влияния на механические свойства материала или деталей, т. е. нулевая гипотеза не отклоняется. В этом случае все рассматриваемые результаты испытаний принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами σ^2 и a .

Оценкой σ^2 служит выборочная полная (общая) дисперсия s^2 (см. табл. 3.5), а оценкой a — выборочное общее среднее \bar{x} . Доверительные интервалы для a и

σ^2 для $k = \sum_{i=1}^m n_i - 1$ степеней свободы могут быть найдены из выражений (2.44) и (2.53):

$$\bar{x} - \sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^m n_i}} t_{\alpha, k} < a < \bar{x} + \sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^m n_i}} t_{\alpha, k}; \quad (3.56)$$

$$\frac{s^2 \left(\sum_{i=1}^m n_i - 1 \right)}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < \frac{s^2 \left(\sum_{i=1}^m n_i - 1 \right)}{\chi_{P_2}^2}. \quad (3.57)$$

Значения $t_{\alpha, k}$, $\chi_{P_1}^2$, $\chi_{P_2}^2$ находят в табл. V и VI приложения в зависимости от числа степеней свободы k и выборочного уровня доверительной вероятности $P = P_2 - P_1$.

Если справедливо неравенство

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha}, \quad (3.58)$$

то нулевую гипотезу о равенстве средних значений характеристик механических свойств отвергают. Здесь, по крайней мере, одна партия принадлежит генеральной совокупности, среднее значение которой существенно отличается от среднего значения генеральной совокупности, к которой принадлежат остальные $m - 1$ партии. Выпадающие партии можно выявить путем парного сравнения отдельных партий с помощью критерия Стьюдента.

В общем же случае здесь имеется m нормально распределенных генеральных совокупностей с общей дисперсией σ^2 и разными средними значениями a_i . Оценкой генеральной дисперсии σ^2 является величина s^2 , оценками генеральных средних a_i — выборочные средние \bar{x}_i (см. табл. 3.4). Доверительные интервалы для σ^2 и

a_i для $k = \sum_{i=1}^m n_i - m$ степеней свободы определяют на основании выражений, аналогичных формулам (3.56) и (3.57):

$$\bar{x}_i - \sqrt{\frac{s_2^2}{n_i}} t_{\alpha, k} < a_i < \bar{x}_i + \sqrt{\frac{s_2^2}{n_i}} t_{\alpha, k}; \quad (3.59)$$

$$\frac{s_2^2 \left(\sum_{i=1}^m n_i - m \right)}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < \frac{s_2^2 \left(\sum_{i=1}^m n_i - m \right)}{\chi_{P_2}^2}. \quad (3.60)$$

Степень вариации генеральных средних характеристик механических свойств отдельных совокупностей, вызванная влиянием уровня исследуемого фактора, оценивается с помощью статистики

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (a_i - \bar{a})^2, \quad (3.61)$$

называемой дисперсией средних значений. Это название является условным, так как генеральные средние $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$ представляют собой детерминированные величины, а не случайные.

Дисперсия σ_a^2 является количественной характеристикой стабильности технологического процесса производства материала, полуфабрикатов и деталей по механическим свойствам.

Выборочную дисперсию средних значений (оценку s_a^2) для разных объемов отдельных партий вычисляют по формуле

$$s_a^2 = \frac{(m-1) \sum_{i=1}^m n_i}{\left(\sum_{i=1}^m n_i \right)^2 - \sum_{i=1}^m n_i^2} (s_1^2 - s_2^2) \quad (3.62)$$

и при $n_1 = n_2 = \dots = n_i = \dots = n_m = n$ по формуле

$$s_a^2 = (s_1^2 - s_2^2)/n. \quad (3.63)$$

Пример 3.9. По результатам испытаний, приведенных в табл. 3.6, провести дисперсионный анализ с целью проверки равенства средних значений предела прочности алюминиевого сплава.

Учитывая, что число образцов для всех плавок одинаковое ($n = 20$) и $m > 12$, проверку однородности дисперсий производим по критерию Коччена. Самая большая выборочная дисперсия наблюдается у седьмой плавки, $s_7^2 = 46,6$. По формуле (3.26) вычисляем статистику

$$G_{\max} = 46,6/348,2 = 0,1338.$$

В табл. X приложения для $k = n - 1 = 19$ и $m = 15$ находим $G_{0,95} = 0,1386$. Условие (3.27) выполняется, что не дает оснований для браковки нулевой гипотезы об однородности дисперсий для различных плавок.

Оценку генерального среднего производим по формуле (3.55):

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 6060,9}{300} = 404,1 \text{ МПа.}$$

3.6. Результаты статических испытаний на разрыв образцов ($n = 20$)

Номер плавки	\bar{x}_i , МПа	s_i^2	Номер плавки	\bar{x}_i , МПа	s_i^2
1	403,2	20,2	9	402,6	26,7
2	412,2	19,6	10	400,5	43,4
3	403,1	4,7	11	403,8	14,9
4	406,0	21,9	12	399,3	39,4
5	400,0	6,5	13	408,4	18,4
6	407,3	20,1	14	401,4	42,6
7	405,4	46,6	15	406,0	15,6
8	401,7	7,6	Сумма	6060,9	348,2

3.7. Дисперсионный анализ влияния плавочных отклонений на среднее значение предела прочности

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия
Межплавочная	3 464,98	$k_1 = 14$	$s_1^2 = 247,5$
Внутривыборочная (остаточная)	6 615,80	$k_2 = 285$	$s_2^2 = 23,2$
Полная (общая)	10 080,78	$k = 299$	—

Результаты дисперсионного анализа приведены в табл. 3.7.
Дисперсионное отношение

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 10,67$$

при $k_1 = 14$ и $k_2 = 285$ значительно превышает $F_{0,95} = 1,73$ и $F_{0,99} = 2,15$ (табл. VIII приложения). Следовательно, вариация химического состава плавок и колебания в режимах технологии производства полуфабрикатов оказывают значимое влияние на среднее значение предела прочности алюминиевого сплава. Оценку дисперсии средних значений, вызванной этими вариациями и колебаниями, производим по формуле (3.63):

$$s_a^2 = \frac{247,5 - 23,2}{20} = 11,215.$$

Оценка среднего квадратического отклонения

$$s_a = \sqrt{11,215} = 3,35 \text{ МПа.}$$

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Критерии, рассмотренные ранее применительно к проверке различных гипотез (равенство средних значений, равенство дисперсий и т. д.), предусматривают, что исследуемые случайные характеристики механических свойств распределены по нормальному или логарифмическициальному закону. При других же законах распределения эти критерии не корректны, и их использование может привести к ошибочным результатам.

Критерий равенства медиан двух совокупностей. Применение t -критерия Стьюдента для сравнения средних двух совокупностей предполагает нормальность их распределения. При отсутствии сведений о законе распределения случайных величин сравнение характеристик положения двух совокупностей наиболее рационально может быть произведено с помощью критерия знаков. В случае несимметричных распределений этот критерий позволяет сравнивать медианы двух совокупностей, а для симметричных он дает одновременно возможность судить и о равенстве (неравенстве) средних значений совокупностей.

Критерий знаков базируется на биномиальном распределении

$$P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \quad (3.64)$$

выражающем вероятность появления в n независимых опыта k раз интересующего нас события, которое может произойти в каждом отдельном опыте с постоянной вероятностью p и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. В данном случае $p = q = 0,5$.

Предположим, что произведены испытания n образцов первой совокупности и получены значения характеристики механических свойств

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(n)}, \quad (3.65)$$

3.8. Значения левой и правой границ допустимой области критерия знаков

n_1	Уровень значимости α						n_1	Уровень значимости α						
	0,025 (0,05)		0,01 (0,02)		0,005 (0,01)			0,025 (0,05)		0,01 (0,02)		0,005 (0,01)		
	Границы области							Границы области						
	Левая	Правая	Левая	Правая	Левая	Правая		Левая	Правая	Левая	Правая	Левая	Правая	
5	0	5	0	5	0	5	53	19	34	18	35	17	36	
6	1	5	0	6	0	6	54	20	34	19	35	18	36	
7	1	6	1	6	0	7	55	20	35	19	36	18	37	
8	1	7	1	7	1	7	56	21	35	19	37	18	38	
9	2	7	1	8	1	8	57	21	36	20	37	19	38	
10	2	8	1	9	1	9	58	22	36	20	38	19	39	
11	2	9	2	9	2	10	59	22	37	21	38	20	39	
12	3	9	2	10	2	10	60	22	38	21	39	20	40	
13	3	10	2	11	2	11	61	23	38	21	40	21	40	
14	3	11	3	11	2	12	62	23	39	22	40	21	41	
15	4	11	3	12	3	12	63	24	39	22	41	21	42	
16	4	12	3	13	3	13	64	24	40	23	41	22	42	
17	5	12	4	13	3	14	65	25	40	23	42	22	43	
18	5	13	4	14	4	14	66	25	41	24	42	23	43	
19	5	14	5	14	4	15	67	26	41	24	43	23	44	
20	6	14	5	15	4	16	68	26	42	24	44	23	45	
21	6	15	5	16	5	16	69	26	43	25	44	24	45	
22	6	16	6	16	5	17	70	27	43	25	45	24	46	
23	7	16	6	17	5	18	71	27	44	26	45	25	46	
24	7	17	6	18	6	18	72	28	44	26	46	25	47	
25	8	17	7	18	6	19	73	28	45	27	46	26	47	
26	8	18	7	19	7	19	74	29	45	27	47	26	48	
27	8	19	8	19	7	20	75	29	46	27	48	26	49	
28	9	19	8	20	7	21	76	29	47	28	48	27	49	
29	9	20	8	21	8	21	77	30	47	28	49	27	50	
30	10	20	9	21	8	22	78	30	48	29	49	28	51	
31	10	21	9	22	8	23	79	31	48	29	50	28	51	
32	10	22	9	23	9	23	80	31	49	30	50	29	52	
33	11	22	10	23	9	24	81	32	49	30	51	29	53	
34	11	23	10	24	10	24	82	32	50	31	51	29	53	
35	12	23	11	24	10	25	83	33	50	31	52	30	54	
36	12	24	11	25	10	26	84	33	51	31	53	30	54	
37	13	24	11	26	11	26	85	33	52	32	53	31	54	
38	13	25	12	26	11	27	86	34	52	32	54	31	55	
39	13	26	12	27	12	27	87	34	53	33	54	32	55	
40	14	26	13	27	12	28	88	35	53	33	55	32	56	
41	14	27	13	28	12	29	89	35	54	34	55	32	57	
42	15	27	14	28	13	29	90	36	54	34	56	33	57	
43	15	28	14	29	13	30	91	36	55	34	57	33	58	
44	16	28	14	30	14	30	92	37	55	35	57	34	58	
45	16	29	15	30	14	31	93	37	56	35	58	34	59	
46	16	30	15	31	14	32	94	38	56	36	58	35	60	
47	17	30	16	31	15	32	95	38	57	36	59	35	61	
48	17	31	16	32	15	33	96	38	58	37	59	35	61	
49	18	31	16	33	16	33	97	39	58	37	60	36	61	
50	18	32	17	33	16	34	98	39	59	38	60	36	62	
51	19	32	17	34	16	35	99	40	59	38	61	37	62	
52	19	33	18	34	17	35	100	40	60	38	62	37	63	

П р и м е ч а н и е. В скобках указаны уровни значимости для двустороннего критерия.

представленные в порядке испытания. Аналогично записывают результаты испытаний n — образцов другой совокупности:

$$y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(l)}, \dots, y_{(n)}. \quad (3.66)$$

Далее определяют знаки разностей пар результатов испытаний образцов с одинаковым индексом. Нулевые разности при этом не учитывают. Пусть в n пар испытаний получено k положительных разностей, m — отрицательных и l — нулевых, причем $k + m + l = n$ и $n_1 = n - l$. Нулевая гипотеза о равенстве медиан характеристик механических свойств двух совокупностей не отвергается, если число ненулевых разностей n_1 . Границы допустимых значений, определяемые формулой (3.64) для $p = q = 0.5$, приведены в табл. 3.8. В случае нахождения наблюденного количества положительных или отрицательных знаков вне указанных границ нулевую гипотезу отклоняют.

Если в качестве альтернативной гипотезы принимают предположение о том, что медиана второй выборки больше медианы первой выборки или, наоборот, медиана второй выборки меньше медианы первой, то используют односторонний критерий. В случае альтернативной гипотезы, заключающейся в неравенстве медиан без учета того, какая из них больше, применяют двусторонний критерий.

Пример 3.10. На двух машинах одной конструкции при одинаковых режимах было испытано на усталость по 10 идентичных образцов. Значения чисел циклов до разрушения образцов в порядке их испытания и знаки разностей соответствующих пар долговечностей приведены в табл. 3.9. Требуется проверить нулевую гипотезу об отсутствии систематической ошибки в результатах испытаний на одной машине по отношению к другой, т. е. о равенстве медиан двух совокупностей результатов усталостных испытаний.

В условиях рассматриваемого примера $k = 3$, $m = 6$, $l = 1$, $n_1 = 10 - 1 = 9$. По табл. 3.8 для $n_1 = 9$ и $\alpha = 0.05$ (двусторонний критерий) находим допустимые границы для k и m , которые составляют 2—7, что не дает основания для отбрасывания нулевой гипотезы.

Рассмотренный критерий знаков не предполагает принадлежность пар результатов испытаний общей генеральной совокупности. Так, в примере 3.10 результаты испытаний отдельных пар образцов могли бы быть получены при различных уровнях переменных напряжений или при различной температуре окружающей среды и т. д.

Критерий равенства дисперсий двух совокупностей. Критерий F , используемый для сравнения двух дисперсий, оказывается чувствительным к отклонениям от нормального закона. Вместо критерия F при распределениях, отличных от нормального, или при неизвестных распределениях используют непараметрический ранговый критерий рассеяния Сиджела—Тьюки. Этот критерий можно применять в случае равенства характеристик положения сравниваемых генеральных совокупностей, что должно быть предварительно проверено на основании критерия, приведенного на с. 67—69.

При использовании критерия Сиджела—Тьюки две независимые выборки объемом n_1 и n_2 , где $n_1 \leq n_2$, объединяют в единый вариационный ряд с отметкой принадлежности каждого члена ряда к соответствующей выборке. Производят ранжирование членов ряда, причем экстремальные члены вариационного ряда получают

3.9. Долговечность до разрушения образцов, млн. циклов

Машину № 1	Машину № 2	Знак разности долговечностей образцов	Машину № 1	Машину № 2	Знак разности долговечностей образцов
3,18	3,92	—	1,39	6,76	—
2,53	1,65	+	3,91	3,99	—
4,06	5,22	—	2,74	2,07	+
7,92	2,86	+	1,17	3,85	—
1,60	1,60	0	4,47	4,78	—

малые ранговые значения, а средние члены — высокие. Ранг 1 приписывают минимальному члену ряда, ранг 2 — максимальному, ранг 3 — предыдущему наибольшему значению ряда, ранг 4 — следующему по малости члену ряда, ранг 5 — третьему по малости и т. д. Например, для двух выборок объемом $n_1 = 4$ и $n_2 = 6$

$$\text{и } x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)} \\ y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}, y_{(4)}, y_{(5)}, y_{(6)},$$

когда
 $x_{(2)} < y_{(3)} < y_{(2)} < x_{(4)} < y_{(6)} < y_{(1)} < y_{(5)} < x_{(1)} < y_{(4)} < x_{(3)}$,
 будем иметь
 $x_1 < y_4 < y_5 < x_6 < y_9 < y_{10} < y_7 < x_8 < y_3 < x_2$.

В случае равных значений членов общего вариационного ряда, принадлежащих разным выборкам, этим членам присваивают одинаковый ранг, равный среднему арифметическому (см. пример 3.11). В случае принадлежности одинаковых значений одной выборке усреднения рангов производить не обязательно. Во избежание большого числа равных значений членов ряда целесообразно увеличить число значащих цифр при округлении случайной величины до 3 или 4.

Далее подсчитывают сумму рангов каждой выборки R_1 и R_2 , где R_1 — сумма рангов для меньшей выборки. В качестве проверки правильности вычислений используют соотношение

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) (n_1 + n_2 + 1). \quad (3.67)$$

В рассматриваемом примере $R_1 = 1 + 8 + 6 + 2 = 17$ и $R_2 = 4 + 5 + 9 + 10 + 7 + 3 = 38$. Условие (3.67) выполняется: $17 + 38 = 0,5 (4 + 6) (4 + 6 + 1) = 55$.

Случайная величина R обладает симметричным распределением [6] с математическим ожиданием

$$M\{R_1\} = \frac{1}{2} n_1 (n_1 + n_2 + 1) \quad (3.68)$$

и дисперсией

$$D\{R_1\} = \frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1). \quad (3.69)$$

Поэтому распределение нормированной величины

$$z = \frac{\left| R_1 - \frac{1}{2} n_1 (n_1 + n_2 + 1) \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}} \quad (3.70)$$

уже при $n_1 > 9$ и $n_2 > 9$ удовлетворительно аппроксимируется нормальным законом. В связи с этим проверка нулевой гипотезы о равенстве дисперсий двух совокупностей при альтернативной гипотезе (дисперсии неодинаковы) для двустороннего критерия сводится к проверке неравенства

$$z \leq z_{1-\alpha/2}, \quad (3.71)$$

где $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль нормированной нормально распределенной величины (1.26), определяемая по табл. 1.1 для выбранного уровня значимости α .

При выполнении неравенства (3.71) нулевая гипотеза не отвергается.

В случае $n_1 = n_2$ за R_1 принимают наименьшую из двух сумм рангов, т. е. $R_1 \leq R_2$.

Пример 3.11. В условиях примера 3.10 проверить нулевую гипотезу о равенстве случайных ошибок, вносимых в результаты испытаний индивидуальными качествами усталостных машин, т. е. гипотезу о равенстве дисперсий двух совокупностей, приняв уровень значимости двустороннего критерия $\alpha = 0,05$.

8.10. Общий вариационный ряд долговечности

Долговечность, млн. циклов	№ машины	Ранг	Долговечность, млн. циклов	№ машины	Ранг
1,17	1	1	3,85	2	19
1,39	1	4	3,91	1	18
1,60	1	5 (6,5)	3,92	2	15
1,60	2	8 (6,5)	3,99	2	14
1,65	2	9	4,06	1	11
2,07	2	12	4,47	1	10
2,53	1	13	4,78	2	7
2,74	1	16	5,22	2	6
2,86	2	17	6,76	2	3
3,18	1	20	7,92	1	2

Проверка равенства медиан уже выполнена в примере 3.10, поэтому здесь эту операцию опускаем.

На основании табл. 3.9 составляем вариационные ряды долговечностей до разрушения образцов, млн. циклов:

Машин № 1 : : : 1,17 1,39 1,60 2,53 2,74 3,18 3,91 4,06 4,47 7,92
 Машин № 2 : : : 1,60 1,65 2,07 2,86 3,85 3,92 3,99 4,78 5,22 6,76

Далее составляем общий вариационный ряд и каждому его члену присваиваем соответствующий ранг (табл. 3.10).

При вычислении суммы рангов R_1 и R_2 для случаев равных значений членов вариационного ряда, принадлежащих разным выборкам (см. табл. 3.10, значение 1,60), этим членам присваивается одинаковый ранг, равный среднему арифметическому, т. е. $0,5 (5 + 8) = 6,5$.

В соответствии с проведенным в табл. 3.10 ранжированием суммы рангов составят: для первой выборки

$$R' = 1 + 4 + 6,5 + 13 + 16 + 20 + 18 + 11 + 10 + 2 = 101,5$$

и для второй выборки

$$R'' = 6,5 + 9 + 12 + 17 + 19 + 15 + 14 + 7 + 6 + 3 = 108,5.$$

Принимаем $R_1 = 101,5$.

По формуле (3.67) проверяем вычисления

$$101,5 + 108,5 = \frac{1}{2} (10 + 10) (10 + 10 + 1) = 210.$$

В соответствии с (3.70) вычисляем

$$z = \frac{|101,5 - 0,5 \cdot 10 (10 + 10 + 1)| - 0,5}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10 (10 + 10 + 1)}} = 0,227.$$

По табл. 1.1 для $\alpha = 0,05$ находим $z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1,960$.

Неравенство (3.71) выполняется, значит нулевую гипотезу о равенстве дисперсий двух совокупностей (о равенстве случайных ошибок, вносимых индивидуальными особенностями машин для испытаний на усталость) отвергать нет основания.

Критерии принадлежности двух независимых выборок единой генеральной совокупности. При изменении режимов технологического процесса производства материала и элементов конструкций, при изменении условий эксплуатации деталей машин часто возникают вопросы, связанные со значимостью влияния этих изменений на функцию распределения характеристик механических свойств материала и несущей способности элементов конструкций. В случае нормального или логарифмически нормального распределения характеристик эти вопросы решаются путем сравнения средних значений (t -критерий) и дисперсий (F -критерий). В случае равенства средних значений и дисперсий обе выборочные совокупности принадлежат единой генеральной, т. е. изменения в технологии или в условиях эксплуатации не оказывают значимого влияния на поведение функции распределения механических свойств.

Однако использование t - и F -критериев для распределений, отличающихся от нормального, и, тем более, для заранее неизвестных распределений может привести к ошибочным выводам относительно влияния указанных факторов на механические

свойства материала и деталей. Для решения подобных задач в упомянутых случаях используют непараметрические критерии [37], два из которых (наиболее строгие) рассматриваются ниже.

Критерий Колмогорова и Смирнова является наиболее строгим критерием однородности двух распределений при сравнительно больших объемах выборок и включает проверку гипотез о центре распределения, рассеянине, асимметрии и эксцессе.

Пусть имеются две независимые выборки объемом n_1 и n_2 , соответствующие генеральным совокупностям, законы распределения которых представляют собой $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Требуется по данным выборок проверить нулевую гипотезу об их принадлежности единой генеральной совокупности, т. е. тождественности функций распределения $F_1(x) \equiv F_2(x)$ при альтернативной гипотезе $F_1(x) \neq F_2(x)$.

В качестве статистики используется наибольшая по абсолютной величине разность между накопленными частотами (2.3) из всех значений, вычисленных для каждого x при ограниченном объеме испытаний или для каждого интервала значений случайной величины при группировке результатов испытаний, что имеет место при большом объеме опытных данных:

$$D = \max |W_1(x) - W_2(x)|. \quad (3.72)$$

Вычисленная статистика (3.72) сопоставляется с критическим значением D_α , зависящим от уровня значимости α (двусторонний критерий) и объемов выборок n_1 и n_2 . Для $n_1 + n_2 > 35$

$$D_\alpha = \lambda_\alpha \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}, \quad (3.73)$$

причем $\lambda_{0,1} = 1,22$; $\lambda_{0,05} = 1,36$; $\lambda_{0,01} = 1,63$; $\lambda_{0,001} = 1,95$.

Если выполняется условие

$$D \leq D_\alpha, \quad (3.74)$$

то нулевую гипотезу не отвергают. При невыполнении условия (3.74) гипотезу о принадлежности двух выборок единой генеральной совокупности следует отвергнуть.

Пример 3.12. В табл. 3.11 приведены значения относительного сужения Φ_K в момент разрыва образцов из сплава АВ после естественного старения (первая выборка) и искусственного старения (вторая выборка). Проверить нулевую гипотезу о принадлежности двух выборок единой генеральной совокупности, т. е. о независимости функции распределения относительного сужения образцов от вида старения сплава АВ для уровня значимости $\alpha = 0,05$ (двусторонний критерий).

Законы распределения характеристик пластичности материала и, в частности, относительного сужения в момент разрыва образца мало изучены. Принимать нормальный закон распределения для этих характеристик, подверженных весьма большому рассеянию, нет до-

3.11. Вариационные ряды относительного сужения Φ_K , %, для образцов из сплава АВ после естественного (I_B) и искусственного (II_B) старения

i	I_B		II_B		i	I_B		II_B	
	I_B	II_B	I_B	II_B		I_B	II_B	I_B	II_B
1	22,0	24,5	11	30,5	31,2				
2	22,9	26,7	12	30,6	31,4				
3	24,9	27,7	13	30,7	31,5				
4	28,2	28,6	14	31,1	31,6				
5	28,3	28,7	15	31,1	31,8				
6	28,7	29,8	16	31,2	32,1				
7	29,3	30,0	17	32,1	32,3				
8	30,4	30,2	18	32,1	32,8				
9	30,5	30,7	19	34,0	—				
10	30,5	31,1	20	35,6	—				

П р и м е ч а н и е. I_B — первая выборка, II_B — вторая.

статочных оснований. Поэтому для решения поставленной задачи пользуются непараметрическими критериями [37]. В данном случае применяем критерий Колмогорова и Смирнова.

Все предварительные вычисления сводим в таблицу (табл. 3.12), где указываем только те значения, которые принимала случайная величина Φ_K в первой и второй выборках. Накопленные частоты вычисляем для каждого значения Φ_K суммированием всех предыдущих частот. Накопленные частоты вычисляем путем деления соответствующих накопленных частот на объем выборки ($n_1 = 20$, $n_2 = 18$).

В условиях рассматриваемого примера статистика $D = 0,194$ и соответствует значению $\Phi_K = 31,1\%$.

По формуле (3.73) находим значение границы критической области

$$D_{0,05} = 1,36 \sqrt{\frac{20+18}{20 \cdot 18}} = 0,422.$$

Итак, условие (3.74) выполняется, т. е. для отбрасывания нулевой гипотезы оснований нет. Это означает, что вид старения (естественный или искусственный) сплава АВ не оказывает значимого влияния на относительное сужение образцов.

При больших объемах выборок табл. 3.12 оказывается чрезмерно громоздкой. В этом случае прибегают к группировке данных.

Пример 3.13. Решить задачу, сформулированную в примере 3.12, используя группировку данных.

Размах варьирования величины Φ_K разбиваем на равные интервалы. В рассматриваемом примере принимаем интервал шириной 2 %. Все необходимые расчеты сводим в таблицу (табл. 3.13).

Как следует из табл. 3.13, статистика $D = 0,150$, что меньше критического значения $D_{0,05} = 0,422$, рассчитанного в предыдущем примере. Таким образом, нулевую гипотезу не отбрасываем.

3.12. Расчет разностей накопленных частостей для двух выборок

$x = \Phi_K$ %	Частота		Накопленная частота, i		Накопленные частости, $W(x) = \frac{i}{n}$		$\Phi_K^* - \Phi_K$
	I_B	II_B	I_B	II_B	I_B	II_B	
22,0	1	—	1	0	0,050	0,000	0,050
22,9	1	—	2	0	0,100	0,000	0,100
24,5	—	1	2	1	0,100	0,056	0,044
24,9	1	—	3	1	0,150	0,056	0,094
26,7	—	1	3	2	0,150	0,111	0,039
27,7	—	1	3	3	0,150	0,188	0,038
28,2	1	—	4	3	0,200	0,188	0,012
28,3	1	—	5	3	0,250	0,188	0,062
28,6	—	1	5	4	0,250	0,222	0,028
28,7	1	—	6	5	0,300	0,278	0,022
29,3	1	—	7	5	0,350	0,278	0,072
29,8	—	1	7	6	0,350	0,333	0,017
30,0	—	1	7	7	0,350	0,389	0,039
30,2	—	1	7	8	0,350	0,444	0,094
30,4	1	—	8	8	0,400	0,444	0,044
30,5	3	—	11	8	0,550	0,444	0,106
30,6	1	—	12	8	0,600	0,444	0,156
30,7	1	1	13	9	0,650	0,500	0,150
31,1	2	1	15	10	0,750	0,556	0,194
31,2	1	1	16	11	0,800	0,611	0,189
31,4	—	1	16	12	0,800	0,667	0,133
31,5	—	1	16	13	0,800	0,722	0,078
31,6	—	1	16	14	0,800	0,778	0,022
31,8	—	1	16	15	0,800	0,833	0,033
32,1	2	1	18	16	0,900	0,889	0,011
32,3	—	1	18	17	0,900	0,944	0,044
32,8	—	1	18	18	0,900	1,000	0,100
34,0	1	—	19	18	0,950	1,000	0,050
35,6	1	—	20	18	1,000	1,000	0,000

3.18. Расчет разностей накопленных частот

Наблюдения	Номер выборки	Интервал							
		21—23	23—25	25—27	27—29	29—31	31—33	33—35	35—37
Частота	I	2	1	0	3	7	5	1	1
	II	0	1	1	3	4	9	0	0
Накопленная частота	I	2	3	3	6	13	18	19	20
	II	0	1	2	5	9	18	18	18
Накопленная частость	I	0,100	0,150	0,150	0,300	0,650	0,900	0,950	1,000
	II	0,000	0,056	0,111	0,278	0,500	1,000	1,000	1,000
W ₁ (x) — W ₂ (x)		0,100	0,094	0,039	0,022	0,150	0,100	0,050	0,000

Для сравнения двух выборок весьма эффективным является также непараметрический ранговый критерий Уилкоксона, Манна и Уитни. Критерий особенно эффективен при сравнительно малых объемах выборок.

Критерий основан на распределении инверсий. Значения характеристик механических свойств двух выборок располагают в общий вариационный ряд, например:

$$y_1, y_2, x_1, x_2, x_3, y_3, y_4, x_4, y_5, y_6, \quad (3.75)$$

где $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ — вариационный ряд первой выборки; $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq y_5 \leq y_6$ — вариационный ряд второй выборки.

Если в последовательности типа (3.75) некоторому значению x предшествует значение y , то x и y дает инверсию. Так x_1, x_2 и x_3 дают по две инверсии — одну с y_1 и другую с y_2 , а значение x_4 дает четыре инверсии, так как ему предшествуют значения y_1, y_2, y_3 и y_4 .

Всего в последовательности (3.75) имеются $u_1 = 10$ инверсий x с y и $u_2 = 14$ инверсий y с x . Сумма инверсий равна произведению объемов двух выборок, т. е.

$$u_1 + u_2 = mn. \quad (3.76)$$

Последнее выражение используется для контроля правильности подсчета инверсий.

Непосредственный подсчет инверсий на основании ряда типа (3.75) при больших объемах выборок достаточно трудоемкий. В этих случаях последовательность (3.75) переписывают с указанием рангов для каждого члена общей совокупности от единицы до $m+n$, т. е.

$$y_1 \leq y_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq y_6 \leq x_8 \leq y_9 \leq y_{10}, \quad (3.77)$$

и подсчитывают сумму рангов первой R_1 и второй R_2 выборки. В рассматриваемом случае $R_1 = 3 + 4 + 5 + 8 = 20$ и $R_2 = 1 + 2 + 6 + 7 + 9 + 10 = 35$. В случае равных значений членов общего вариационного ряда (3.77) этим членам присваивают одинаковый ранг, равный среднему арифметическому. Правильность подсчета ранговых сумм проверяют по формуле (3.67).

После определения R_1 и R_2 вычисляют соответствующие инверсии:

$$u_1 = mn + \frac{1}{2} n(n+1) - R_2; \quad (3.78)$$

$$u_2 = mn + \frac{1}{2} m(m+1) - R_1 \quad (3.79)$$

с контролем их по формуле (3.76).

В качестве статистики при проверке однородности двух выборок принимают наименьшее из значений u_1 и u_2 .

При $m > 3$ и $m+n \geq 20$ (где m — объем наименьшей выборки) статистика распределена нормально с параметрами [2]

$$M\{U\} = \frac{1}{2} mn; \quad (3.80)$$

$$D\{U\} = \frac{mn}{12} (m+n+1). \quad (3.81)$$

Проверка нулевой гипотезы с учетом (3.80) и (3.81) сводится к вычислению нормированной величины, аналогичной (3.70),

$$z = \frac{\left| u - \frac{1}{2} mn \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12} mn(m+n+1)}} \quad (3.82)$$

и проверке неравенства

$$z \leq z_{1-\alpha/2}, \quad (3.83)$$

где $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль уровня $P = 1 - \alpha/2$ нормированной нормально распределенной случайной величины (1.26), определяемая по табл. 1.1 для выбранного уровня значимости α (обычно используют двусторонний критерий).

В случае выполнения неравенства (3.83) нулевую гипотезу не отвергают. В противном случае принимают альтернативную гипотезу $F_1(x) \neq F_2(x)$, т. е. выборки принадлежат различным генеральным совокупностям.

Пример 3.14. В условиях примера 3.12 проверить нулевую гипотезу о принадлежности двух выборок (табл. 3.11) единой генеральной совокупности с помощью критерия u для уровня значимости $\alpha = 0,05$ при альтернативной гипотезе $F_1(x) \neq F_2(x)$ (двусторонний критерий).

Обе выборки выстраниваем в единый вариационный ряд (табл. 3.14), где каждому значению величины Ψ_K присваивается ранг от единицы до $m+n$ с указанием номера выборки. Для равных значений членов вариационного ряда, принадлежащих разным выборкам, присваиваются одинаковые ранги.

3.14. Общий вариационный ряд двух выборок и его ранжирование

Ранг	$\Psi_K, \%$	Номер выборки	Ранг	$\Psi_K, \%$	Номер выборки	Ранг	$\Psi_K, \%$	Номер выборки
I	22,0	I	14	30,0	II	26,5	31,2	II
2	22,9	I	15	30,2	II	28	31,4	II
3	24,5	II	16	30,4	I	29	31,5	II
4	24,9	I	17	30,5	I	30	31,6	II
5	26,7	II	18	30,5	I	31	31,8	II
6	27,7	II	19	30,5	I	33	32,1	I
7	28,2	I	20	30,6	I	33	32,1	I
8	28,3	I	21,5	30,7	I	33	32,1	II
9	28,6	II	21,5	30,7	II	35	32,3	II
10,5	28,7	I	24	31,1	I	36	32,8	II
10,5	28,7	II	24	31,1	I	37	34,0	I
12	29,3	I	24	31,1	II	38	35,6	I
13	29,8	II	26,5	31,2	I			

ваем одинаковый осредненный ранг, например значение $\Psi_K = 28,7\%$ имел один образец первой выборки и один образец второй, им присваиваем общий ранг, равный $(10 + 11)/2 = 10,5$, и т. д. Если одинаковые значения принадлежат одной выборке (см. $\Psi_K = 30,5\%$), то осреднение рангов производить не обязательно, так как сумма рангов для этой выборки не изменится.

В рассматриваемом примере сумма рангов первой выборки $R_1 = 1 + 2 + \dots + 38 = 371,5$, второй выборки $R_2 = 3 + 5 + 6 + \dots + 36 = 369,5$. По формуле (3.67) контролируем подсчет

$$R_1 + R_2 = 371,5 + 369,5 = 741 \text{ и } \frac{1}{2} (20 + 18)(20 + 18 + 1) = 741.$$

По формулам (3.78) и (3.79) рассчитаем число инверсий для каждой выборки:

$$u_1 = 360 + 0,5 \cdot 18 (18 + 1) = 369,5 = 161,5;$$

$$u_2 = 360 + 0,5 \cdot 20 (20 + 1) = 371,5 = 198,5.$$

По формуле (3.76) проверяем

$$u_2 + u_1 = 198,5 + 161,5 = 360; mn = 20 \cdot 18 = 360.$$

$$z = \frac{\left| 161,5 - \frac{1}{2} 18 \cdot 20 \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12} 18 \cdot 20 (18 + 20 + 1)}} = 0,526.$$

По табл. 1.1 для $P = 1 - \alpha/2 = 0,975$ находим $z_{0,975} = 1,960$.

Итак, условие (3.83) выполняется, значит нулевую гипотезу не отвергаем.

Если в выборках наблюдается значительное количество повторяющихся значений, то выражение (3.82) нуждается в корректировке в соответствии с формулой

$$z = \frac{\left| u - \frac{mn}{2} \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{mn}{12(m+n)(m+n-1)} [(m+n)^3 - (m+n) - \sum(t_r^3 - t_r)]}}. \quad (3.84)$$

В корректирующем члене через t_r обозначено число одинаковых значений в каждой из r групп. Так, например, в табл. 3.14 имеются 6 групп одинаковых значений Ψ_K :

- 1-я группа — $\Psi_K = 28,7\%$; $t_1 = 2$;
- 2-я » — $\Psi_K = 30,5\%$; $t_2 = 3$;
- 3-я » — $\Psi_K = 30,7\%$; $t_3 = 2$;
- 4-я » — $\Psi_K = 31,1\%$; $t_4 = 3$;
- 5-я » — $\Psi_K = 31,2\%$; $t_5 = 2$;
- 6-я » — $\Psi_K = 32,1\%$; $t_6 = 3$.

Пример 3.15. Решить задачу, поставленную в примере 3.14, с учетом повторяющихся значений в общем вариационном ряду.

С учетом вышеизложенного подсчитываем значение коорректирующего члена формулы

$$(3.84) \sum_{r=1}^6 (t_r^3 - t_r) = 6 + 24 + 6 + 24 + 6 + 24 = 90. \text{ По формуле (3.84) находим скоррек-}$$

тированное значение нормированной величины

$$z = \frac{\left| 161,5 - \frac{1}{2} 18 \cdot 20 \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{18 \cdot 20}{12 \cdot 38 \cdot 37} (38^3 - 38 - 90)}} = 0,527.$$

Условие (3.83) также выполняется, что подтверждает нулевую гипотезу о тождественности $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

При малом объеме выборок распределение статистики z отличается от нормального. В этом случае нулевую гипотезу проверяют путем сравнения наименьшей из двух значений инверсий (3.78) и (3.79) с критическим значением, приведенным

3.15. Критические значения u для двустороннего и одностороннего критериев

n	m										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$\alpha_D = 0,10; \alpha_O = 0,05$											
3	—	0	1	4	7	11	15	21	27	34	38
4	—	0	2	4	6	8	10	13	18	24	30
5	0	1	3	5	8	10	13	15	18	24	31
6	0	2	4	6	9	12	15	18	20	27	34
7	0	2	4	7	11	14	17	20	24	27	31
8	1	3	5	8	12	16	19	23	27	31	34
9	1	4	6	9	12	15	18	20	24	27	31
10	1	4	7	11	14	17	20	23	27	31	34
11	1	5	8	12	16	19	23	26	30	34	38
12	2	5	9	13	17	21	24	26	30	34	38
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	41	46
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	44	50
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	48	54
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	57
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	61
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	65
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	69
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	73
21	5	11	19	26	34	41	49	57	65	73	77
22	5	12	20	28	36	44	52	60	68	72	81
23	5	13	21	29	37	46	54	63	72	75	85
24	6	13	22	30	39	48	57	66	75	89	92
25	6	14	23	32	41	50	60	69	79	89	96
26	6	15	24	33	43	53	62	72	82	92	96
27	7	15	25	35	45	55	65	75	86	96	100
28	7	16	26	36	46	57	68	78	89	93	104
29	7	17	27	38	48	59	70	82	93	96	108
30	7	17	28	39	50	61	73	85	96	108	108

n	m										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$\alpha_D = 0,05; \alpha_O = 0,025$											
4	—	0	1	2	5	8	13	17	23	26	30
5	—	0	1	2	3	6	10	15	20	23	26
6	—	1	3	5	6	8	10	12	15	17	22
7	0	2	4	6	7	10	12	15	17	20	23
8	0	2	4	7	10	11	14	17	20	23	26
9	0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	30
10	0	3	6	9	13	16	19	23	26	29	33
11	0	3	6	9	13	16	19	23	26	29	33
12	1	4	7	11	14	18	22	24	28	33	37
13	1	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
14	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	44
15	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	47
16	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	51
17	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	55
18	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	62
19	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65
20	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	65
21	3	8	15	22	29	36	43	50	58	65	69
22	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	73
23	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	76
24	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	80
25	3	10	18	27	35	44	53	62	71	77	87
26	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	94
27	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	90
28	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	94
29	4	13	22	32	42	52	62	73	83	93	98
30	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	98

Продолжение табл. 3.16

n	m									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\alpha_d = 0,01; \alpha_0 = 0,005$										
5	—	—	—	0	1	2	4	7	11	16
6	—	—	—	0	1	3	4	9	13	18
7	—	—	—	1	2	4	6	10	13	16
8	—	—	—	0	2	4	6	9	11	13
9	—	—	—	1	3	5	7	11	13	16
10	—	—	—	0	2	4	6	9	11	13
11	—	—	—	0	2	5	7	10	13	16
12	—	—	—	1	3	6	9	12	15	18
13	—	—	—	1	3	7	10	13	17	20
14	—	—	—	1	4	7	11	15	18	22
15	—	—	—	2	5	8	12	16	20	24
16	—	—	—	2	5	9	13	18	22	27
17	—	—	—	2	6	10	15	19	24	29
18	—	—	—	2	6	11	16	21	26	31
19	—	—	—	3	7	12	17	22	28	33
20	—	—	—	3	8	13	18	24	30	36
21	—	—	—	3	8	14	19	25	32	38
22	—	—	—	4	9	14	21	27	34	40
23	—	—	—	4	9	15	22	29	35	43
24	—	—	—	4	10	16	23	30	37	45
25	—	—	—	5	10	17	24	32	39	47
26	—	—	—	5	11	18	25	33	41	49
27	—	—	—	5	12	19	27	35	43	52
28	—	—	—	5	12	20	28	36	45	54
29	—	—	—	6	13	21	29	38	47	56
30	—	—	—	6	13	22	30	40	49	58

Примечание. α_d — для двустороннего критерия; α_0 — для одностороннего критерия.

в табл. 3.15 для уровней значимости $\alpha = 0,1; 0,05$ и $0,01$ (двусторонний критерий).

Если

$$u > u_\alpha, \quad (3.85)$$

то нулевую гипотезу о тождественности функций распределения не отвергают.

Пример 3.16. Для двух выборок объемом $m = 8$ и $n = 10$ число инверсий составляло $u_1 = 60$ и $u_2 = 20$. Проверить нулевую гипотезу о принадлежности указанных выборок единой генеральной совокупности для уровня значимости $\alpha = 0,05$ при альтернативной гипотезе $F_1(x) \neq F_2(x)$ (двусторонний критерий).

В рассматриваемом примере $m + n < 20$, поэтому гипотезу проверяем на основании неравенства (3.85). Для этого по табл. 3.15 для $\alpha = 0,05$, $m = 8$ и $n = 10$ находим $u_{0,05} = 17$.

Условие (3.85) выполняется ($20 > 17$). Значит нулевую гипотезу о тождественности функций распределения, из которых взяты выборки, не отвергаем.

Критерий принадлежности ряда независимых выборок единой генеральной совокупности. В случае нормального или логарифмически нормального распределения характеристики механических свойств проверка гипотезы о принадлежности нескольких выборок единой генеральной совокупности, т. е. тождественности функций распределения $F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv \dots \equiv F_k(x)$, сводится к проверкам гипотез об однородности ряда дисперсий и об однородности ряда средних значений с помощью однофакторного дисперсионного анализа. При отсутствии теоретических или опытных данных, подтверждающих правомочность использования нормального закона, нулевую гипотезу о принадлежности ряда независимых выборок единой генеральной совокупности проверяют путем непараметрического дисперсионного анализа с помощью иерархического рангового критерия Краскела и Уоллиса.

Общее число результатов испытаний $n = \sum_{i=1}^m n_i$, принадлежащих m независимым выборкам ($1, 2, \dots, i, \dots, m$), располагают в единый вариационный ряд и каждому значению члена ряда присваивают соответствующий ранг от 1 до n с отметкой номера выборки. Для равных значений членов вариационного ряда, принадлежащих разным выборкам, присваиваются одинаковые (средние) ранги.

Статистикой критерия Краскела и Уоллиса служит величина

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \left(\sum_{i=1}^m \frac{R_i^2}{n_i} \right) - 3(n+1), \quad (3.86)$$

где R_i — сумма рангов i -й выборки.

Правильность подсчета ранговых сумм R_i контролируют по формуле

$$\sum_{i=1}^m R_i = \frac{1}{2} n(n+1). \quad (3.87)$$

Величина H при $n_i \geq 5$ и $m \geq 4$ распределена по закону χ^2 с $k = m - 1$ степенями свободы.

Если выполняется неравенство

$$H \leq \chi_{\alpha}^2, \quad (3.88)$$

то нулевую гипотезу о тождественности генеральных распределений, из которых взяты выборки, не отвергают. В противном случае принимают альтернативную гипотезу об исходнородности совокупностей. В дальнейшем путем отбрасывания резко выделяющихся выборок, для которых ранговые суммы чрезмерно малы или велики, на основании условия (3.88) можно выделить однородную группу выборок.

При равных объемах отдельных выборок ($n_1 = n_2 = \dots = n_m = n/m$) статистику H удобнее вычислять по формуле

$$H = \frac{12m}{n^2(n+1)} \left(\sum_{i=1}^m R_i^2 \right) - 3(n+1). \quad (3.89)$$

Пример 3.17. В табл. 3.16 приведены вариационные ряды полного относительного удлинения δ_b образцов из сплава В95 различных плавок. Проверить нулевую гипотезу о принадлежности пяти указанных выборок единой генеральной совокупности, приняв уровень значимости $\alpha = 0,05$.

По данным табл. 3.16 составляем единый вариационный ряд с ранжированием его членов (табл. 3.17).

3.16. Вариационные ряды полного относительного удлинения δ_b , %, образцов из сплава В95

№ по порядку	Номер плавки				
	I	II	III	IV	V
1	6,7	8,4	7,1	6,4	7,2
2	6,9	8,9	7,2	6,8	7,8
3	7,2	9,3	8,4	8,7	7,9
4	7,2	10,1	8,5	9,4	8,4
5	8,0	10,8	8,6	9,6	8,7
6	8,5	11,0	9,3	9,6	9,6
7	8,5	11,2	9,7	9,9	9,8
8	9,4	—	10,1	—	10,1
9	9,8	—	10,4	—	—

3.17. Ранжирование общего вариационного ряда

$\delta_s, \%$	Ранг	Номер плавки	$\delta_s, \%$	Ранг	Номер плавки	$\delta_s, \%$	Ранг	Номер плавки
6,4	1	IV	8,4	14	V	9,6	28	V
6,7	2	I	8,5	17	I	9,7	30	III
6,8	3	IV	8,5	17	I	9,8	31,5	I
6,9	4	I	8,5	17	III	9,8	31,5	V
7,1	5	III	8,6	19	IV	10,1	35	II
7,2	7,5	I	8,7	20,5	V	10,1	35	III
7,2	7,5	III	8,7	20,5	II	10,1	35	V
7,2	7,5	V	8,9	22	II	10,4	37	III
7,2	7,5	V	9,3	23,5	III	10,8	38	II
7,8	10	V	9,3	23,5	III	11,0	39	II
7,9	11	V	9,4	25,5	I	11,2	40	II
8,0	12	I	9,4	25,5	IV			
8,4	14	II	9,6	28	IV			
8,4	14	III	9,6	28	IV			

На основании табл. 3.17 подсчитываем ранговые суммы. Они составляют: $R_1 = 124$; $R_2 = 211,5$; $R_3 = 188$; $R_4 = 139$ и $R_5 = 157,5$.

В соответствии с (3.87) контролируем выполненные подсчеты ранговых сумм:

$$\sum_{i=1}^5 R_i = 124 + 211,5 + 188 + 139 + 157,5 = 820;$$

$$\frac{1}{2} n(n+1) = 0,5 \cdot 40 \cdot 41 = 820.$$

По формуле (3.86) подсчитываем величину H :

$$H = \frac{12}{40 \cdot 41} \left(\frac{124^2}{9} + \frac{211,5^2}{7} + \frac{188^2}{9} + \frac{139^2}{7} + \frac{157,5^2}{8} \right) - 3 \cdot 41 = 7,88.$$

Из табл. VI приложения для $\alpha = 0,05$ и $k = m - 1 = 4$ находим критическое значение $\chi^2_{0,05} = 9,49$. Так как условие (3.88) выполняется, нулевую гипотезу не отвергаем.

Если более четверти значений всех членов вариационного ряда имеют одинаковые ранги, то корректируют величину H по формуле

$$H_k = \frac{H}{1 - \frac{\sum (t_r^3 - t_r)}{n^3 - n}}. \quad (3.90)$$

Здесь через t_r обозначено то же, что и в формуле (3.84).

В табл. 3.17 имеются девять групп членов вариационного ряда с одинаковыми рангами: $t_1 = 4$ для $\delta_s = 7,2\%$; $t_2 = 3$ для $\delta_s = 8,4\%$; $t_3 = 3$ для $\delta_s = 8,5\%$; $t_4 = 2$ для $\delta_s = 8,7\%$; $t_5 = 2$ для $\delta_s = 9,3\%$; $t_6 = 2$ для $\delta_s = 9,4\%$; $t_7 = 3$ для $\delta_s = 9,6\%$; $t_8 = 2$ для $\delta_s = 9,8\%$ и $t_9 = 3$ для $\delta_s = 10,1\%$.

Сумма $\sum_{r=1}^9 (t_r^3 - t_r)$ для рассматриваемого случая составляет 180, а скорректированное значение статистики в соответствии с формулой (3.90)

$$H_k = \frac{7,88}{1 - \frac{180}{40^3 - 40}} = 7,90.$$

Таким образом, с учетом корректировки условие (3.88) выполняется.

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ
О ВИДЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В одних случаях закон распределения может быть установлен теоретически на основании выбранной модели рассматриваемого процесса. В других случаях функцию распределения выбирают априори. Однако для получения надежных решений вероятностных задач в каждом отдельном случае необходима проверка соответствия опытных данных используемому закону распределения.

Наиболее простым, но весьма приближенным методом оценки согласия результатов эксперимента с тем или иным законом распределения является графический метод. Опытные данные наносят на вероятностную бумагу и сравнивают с графиком принятой функции распределения, которая на вероятностной сетке изображается прямой линией. Если экспериментальные точки ложатся вблизи прямой со случайными отклонениями влево и вправо, то опытные данные соответствуют рассмотреваемому закону распределения (см. рис. 2.3 и 2.4). Систематическое и значительное отклонение экспериментальных точек от аппроксимирующей прямой свидетельствует об ошибочности принятой модели для обоснования закона распределения исследуемой случайной величины (см. рис. 2.5).

Графический способ в значительной степени является субъективным и используется на практике лишь в качестве первого приближения при решении этой задачи.

Существует большой ряд достаточно строгих аналитических критериев согласия результатов эксперимента выбранному виду гипотетического распределения. Однако при решении задач, связанных с исследованием характеристик механических свойств, многие из них теряют свою универсальность в связи с тем, что параметры гипотетического распределения заранее не известны, а могут лишь оцениваться по результатам механических испытаний.

Если выбранный критерий согласия не позволяет сделать уверенный, однозначный вывод относительно соответствия опытных данных гипотетическому распределению, то необходимо произвести проверку нулевой гипотезы по другому критерию. Даже при больших объемах выборок ($n = 500$ и более) [21, 28] в ряде случаев нельзя отдать предпочтение какому-то одному закону распределения характеристик механических свойств. В этом случае выбор распределения решается удобством его применения в конкретной задаче.

Критерий согласия Пирсона (χ^2) применяют для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения предполагаемому теоретическому распределению $F(x)$ при большом объеме выборки ($n \geq 100$). Критерий применим для любых видов функции $F(x)$, даже при неизвестных значениях их параметров, что обычно имеет место при анализе результатов механических испытаний. В этом заключается его универсальность.

Использование критерия χ^2 предусматривает разбиение размаха вариации выборки на интервалы и определение числа наблюдений (частоты) n_j для каждого из e интервалов. Для удобства оценок параметров распределения интервалы выбирают одинаковой длины.

Число интервалов зависит от объема выборки. Обычно принимают: при $n = 100$ $e = 10 \div 15$, при $n = 200$ $e = 15 \div 20$, при $n = 400$ $e = 25 \div 30$, при $n = 1000$ $e = 35 \div 40$.

Интервалы, содержащие менее пяти наблюдений, объединяют с соседними. Однако, если число таких интервалов составляет менее 20 % от их общего количества, допускаются интервалы с частотой $n_j \geq 2$.

Статистикой критерия Пирсона служит величина

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^e \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}, \quad (3.91)$$

где p_j — вероятность попадания изучаемой случайной величины в j -й интервал, вычисляемая в соответствии с гипотетическим законом распределением $F(x)$. При вычислении вероятности p_j нужно иметь в виду, что левая граница первого интер-

вала и правая последнего должны совпадать с границами области возможных значений случайной величины. Например, при нормальном распределении первый интервал простирается до $-\infty$, а последний — до $+\infty$.

Нулевую гипотезу о соответствии выборочного распределения теоретическому закону $F(x)$ проверяют путем сравнения вычисленной по формуле (3.91) величины с критическим значением χ^2_α , найденным по табл. VI приложения для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = e_1 - m - 1$. Здесь e_1 — число интервалов после объединения; m — число параметров, оцениваемых по рассматриваемой выборке. Если выполняется неравенство

$$\chi^2 \leq \chi^2_\alpha, \quad (3.92)$$

то нулевую гипотезу не отвергают. При несоблюдении указанного неравенства принимают альтернативную гипотезу о принадлежности выборки неизвестному распределению.

Недостатком критерия согласия Пирсона является потеря части первоначальной информации, связанная с необходимостью группировки результатов наблюдений в интервалы и объединения отдельных интервалов с малым числом наблюдений. В связи с этим рекомендуется дополнять проверку соответствия распределений по критерию χ^2 другими критериями. Особенно это необходимо при сравнительно малом объеме выборки ($n \approx 100$).

Пример 3.18. Проверить с помощью критерия согласия χ^2 гипотезу о нормальном распределении логарифма числа циклов до разрушения при усталостных испытаниях по данным табл. 2.3 и 2.4. Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Все результаты вычислений приведены в табл. 3.18, данные первых трех граф которой заимствованы из табл. 2.4. В связи с малым числом наблюдений объединяют интервалы 1-й со 2-м и 9-й с 10-м и 11-м.

В 4-й графике приводим границы интервалов, выраженные через нормированную случайную величину

$$z_j = \frac{x_j - \bar{x}}{s}.$$

где \bar{x} и s — соответственно выборочное среднее значение и среднее квадратическое отклонение логарифма числа циклов до разрушения образцов. Значения этих оценок были найдены в при-

3.18. Проверка гипотезы о нормальности распределения логарифма числа циклов до разрушения

j	Границы интервалов x_j	Число наблюдений в интервале n_j	Координаты границ интервалов	Значение функции Лапласа на границах интервала $\Phi(z_j)$	Оценка вероятности попадания в интервал p_j	np_j	$n_j - np_j$	$\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$	
1	5,825; 5,975	2	3	—∞; —1,71	0,0000; 0,0436	0,1075	10,75	3,25	0,984
2	5,975; 6,125	12	14	—1,71; —1,24	0,0436; 0,1075				
3	6,125; 6,275	10		—1,24; —0,76	0,1075; 0,2236	0,1161	11,61	—1,61	0,223
4	6,275; 6,425	13		—0,76; —0,29	0,2236; 0,3859	0,1623	16,23	—3,23	0,643
5	6,425; 6,575	21		—0,29; 0,19	0,3859; 0,5753	0,1894	18,94	2,06	0,224
6	6,575; 6,725	17		0,19; 0,67	0,5753; 0,7486	0,1733	17,33	—0,33	0,006
7	6,725; 6,875	14		0,67; 1,14	0,7486; 0,8729	0,1243	12,43	1,57	0,198
8	6,875; 7,025	6		1,14; 1,61	0,8729; 0,9463	0,0734	7,34	—1,34	0,244
9	7,025; 7,175	2		1,61; 2,09	0,9463; 0,9817				
10	7,175; 7,325	2	5	2,09; 2,57	0,9817; 0,9949	0,0537	5,37	—0,37	0,025
11	7,325; 7,475	1		2,57; ∞	0,9949; 1,0000				
Сумма		$n = 100$				1,0000	100	$\chi^2 = 2,547$	

мере 2.2, $\bar{x} = \lg N = 6,515$ и $s = 0,315$. С помощью табл. I приложения с учетом (1.29) находим значения функции Лапласа (1.27) для границ интервалов и заносим их в 5-ю графу. Оценка вероятности попадания значений механической характеристики в интервалы (6-я графа) представляет собой разность значений функции Лапласа на правой и левой границе интервала. Если интервалы объединяются, вычисляют разность значений функции на границах объединенного интервала. Сумма чисел p_j в графе 6 всегда будет равна единице. В 7-ю графу заносят оценки математических ожиданий числа наблюдений по интервалам, которые определяются умножением оценки вероятности p_j на общее число образцов в выборке $n = 100$. Итог 7-й графы должен равняться итогу 3-й графы.

Сумма 9-й графы дает значение статистики χ^2 . В данном случае $\chi^2 = 2,547$.

По табл. VI приложения для $\alpha = 0,05$ и $k = 8 - 2 - 1 = 5$ (8 — число интервалов после объединения, 2 — число параметров, оцениваемых по выборке, (\bar{x}, s)) находим критическое значение критерия $\chi^2_{0,05} = 11,1$. Условие (3.92) выполняется, значит опытные данные не противоречат нормальному закону распределения, т. е. нулевую гипотезу не отбрасываем. К аналогичному выводу приходим и на основании графического метода (см. рис. 2.4).

Наблюденная в данном случае величина $\chi^2 = 2,547$ соответствует фактическому уровню значимости $\alpha \approx 0,75$ (табл. VI приложения). Это означает, что если бы многократно повторять выборки по $n = 100$ из генеральной заведомо нормально распределенной совокупности, то значение $\chi^2 \geq 2,547$ встречалось бы примерно в 75 %.

Пример 3.19. Проверить с помощью критерия Пирсона нулевую гипотезу о распределении числа циклов до разрушения при усталостных испытаниях по закону Вейбулла — Гнеденко (1.46) для уровня значимости $\alpha = 0,05$ по данным табл. 2.3 и 2.8.

Оценки параметров функции (1.46) были произведены в примере 2.4 ($b = 0,721$; $\hat{x}_n = 0,736 \cdot 10^6$ циклов и $\delta = 3,235 \cdot 10^6$ циклов). Вычисление статистики χ^2 показано в табл. 3.19. В условиях рассматриваемого примера $\chi^2 = 35,091$.

По табл. VI приложения для $\alpha = 0,05$ и $k = 11 - 3 - 1 = 7$ (11 — число интервалов после объединения, 3 — число оцениваемых по выборке параметров) находим критическое значение критерия Пирсона $\chi^2_{0,05} = 14,1$. Условие (3.92) не выполняется, значит опытные данные противоречат трехпараметрическому распределению Вейбулла — Гнеденко (1.46), т. е. нулевую гипотезу отвергаем. Нулевую гипотезу отбрасываем даже при уровне значимости $\alpha = 0,001$, для которого критическое значение критерия $\chi^2_{0,001} = 24,3$.

К аналогичному выводу приходим и на основании графического анализа (см. рис. 2.5).

Критерий согласия Колмогорова — Смирнова в своем классическом виде является более мощным, чем критерий χ^2 , и может быть использован для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения любому теоретическому непрерывному распределению $F(x)$ с заранее известными параметрами. Последнее обстоятельство накладывает ограничения на возможность широкого практического приложения этого критерия при анализе результатов механических испытаний, так как па-

3.19. Проверка гипотезы о соответствии распределения числа циклов до разрушения трехпараметрическому распределению Вейбулла — Гнеденко

I	Границы интервалов, млн. циклов	Частота n_j	Значение функции (1.46) на границах интервала	Оценка вероятности попадания в интервал, p_j	np_j	$n_j - np_j$	$\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$
1	0,736; 1,4	14	0,0000; 0,2733	0,2733	27,33	—13,33	6,502
2	1,4; 2,1	11	0,2733; 0,4152	0,4149	14,19	—3,19	0,717
3	2,1; 2,8	14	0,4152; 0,5148	0,0996	9,96	+3,04	0,928
4	2,8; 3,5	13	0,5148; 0,5905	0,0757	7,57	+5,43	3,895
5	3,5; 4,2	11	0,5905; 0,6503	0,0598	5,98	+6,02	6,060
6	4,2; 4,9	6	0,6503; 0,6987	0,0484	4,84	+1,16	0,278
7	4,9; 5,6	10	0,6987; 0,7386	0,0399	3,99	+6,01	9,053
8	5,6; 6,3	5	0,7386; 0,7720	0,0334	3,34	+1,66	0,822
9	6,3; 7,0	3	0,7720; 0,8242	0,0522	5,22	—0,25	0,012
10	7,0; 7,7	2					
11	7,7; 8,4	4	0,8242; 0,8624	0,0382	3,82	+2,18	1,244
12	8,4; 9,1	2					
13	9,1; +∞	5	0,8624; 1,0000	0,1376	13,76	—8,76	5,574
Сумма		100			1,0000	100	
							$\chi^2 = 35,091$

метры функции распределения характеристик механических свойств, как правило, оценивают по данным самой выборки.

Критерий Колмогорова—Смирнова применяют для негруппированных данных или для группированных в случае малой ширины интервала (например, равной цене деления шкалы силометра, счетчика циклов нагружения и т. д.). Пусть результатом испытаний серии из n образцов является вариационный ряд характеристики механических свойств

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n. \quad (3.93)$$

Требуется проверить нулевую гипотезу о принадлежности выборочного распределения (3.93) теоретическому закону $F(x)$.

Критерий Колмогорова—Смирнова базируется на распределении максимального отклонения накопленной частоты от значения функции распределения. При его использовании вычисляют статистики [32]

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F(x_i) \right]; \quad (3.94)$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left[F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right]; \quad (3.95)$$

и

$$D_n = \max [D_n^+, D_n^-], \quad (3.96)$$

являющуюся статистикой критерия Колмогорова.

Если выполняется неравенство

$$D_n V_n \leq \lambda_\alpha \quad (3.97)$$

для больших объемов выборки ($n > 35$) или

$$D_n (V_n + 0,12 + 0,11/V_n) \leq \lambda_\alpha \quad (3.98)$$

для $n < 35$, то нулевую гипотезу не отвергают.

При невыполнении неравенств (3.97) и (3.98) принимают альтернативную гипотезу о принадлежности выборки (3.93) неизвестному распределению.

Критические значения λ_α составляют: $\lambda_{0,1} = 1,22$; $\lambda_{0,05} = 1,36$; $\lambda_{0,01} = 1,63$.

Если параметры функции $F(x)$ заранее не известны, а оцениваются по данным выборки, критерий Колмогорова—Смирнова теряет свою универсальность и может быть использован только для проверки соответствия опытных данных лишь некоторым конкретным функциям распределения [32, 40].

При использовании в качестве нулевой гипотезы принадлежность опытных данных нормальному или логарифмически нормальному распределению вычисляют статистики:

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - \Phi(\hat{z}_i) \right]; \quad (3.99)$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\Phi(\hat{z}_i) - \frac{i-1}{n} \right]; \quad (3.100)$$

$$D_n = \max [D_n^+, D_n^-], \quad (3.101)$$

где $\Phi(\hat{z}_i)$ — значение функции Лапласа для $\hat{z}_i = (x_i - \bar{x})/s$ (см. табл. I приложения). Критерий Колмогорова—Смирнова для любых объемов выборки n записывают в виде

$$D_n \left(V_n - 0,01 + \frac{0,85}{V_n} \right) \leq \lambda_\alpha. \quad (3.102)$$

Критические значения λ_α в этом случае составляют: $\lambda_{0,1} = 0,82$; $\lambda_{0,05} = 0,89$; $\lambda_{0,01} = 1,04$.

3.20. Проверка гипотезы о нормальности распределения логарифма числа циклов до разрушения по критерию Колмогорова—Смирнова (3.102)

i	$x_i = \lg N_i$	$\frac{\bar{x}}{s}$	$\Phi(\hat{z}_i)$	$\frac{i}{n}$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n} - \Phi(\hat{z}_i)$	$\frac{i}{n}$
1	5,8669	-2,06	0,0197	0,01	0,00	-0,0097	0,0197
2	5,9164	-1,90	0,0287	0,02	0,01	-0,0087	0,0187
3	6,0216	-1,57	0,0582	0,03	0,02	-0,0282	0,0382
4	6,0386	-1,51	0,0635	0,04	0,03	-0,0255	0,0355
5	6,0426	-1,50	0,0668	0,05	0,04	-0,0168	0,0268
6	6,0445	-1,49	0,0681	0,06	0,05	-0,0081	0,0181
7	6,0645	-1,43	0,0764	0,07	0,06	-0,0064	0,0164
8	6,0799	-1,38	0,0838	0,08	0,07	-0,0038	0,0138
9	6,0821	-1,37	0,0853	0,09	0,08	0,0047	0,0053
10	6,1062	-1,30	0,0968	0,10	0,09	0,0032	0,0068
11	6,1082	-1,29	0,0985	0,11	0,10	0,0115	-0,0015
12	6,1183	-1,26	0,1038	0,12	0,11	0,0162	-0,0062
13	6,1186	-1,26	0,1038	0,13	0,12	0,0262	-0,0162
14	6,1238	-1,24	0,1075	0,14	0,13	0,0325	-0,0265
15	6,1605	-1,16	0,1230	0,15	0,14	0,0270	-0,0170
16	6,1685	-1,10	0,1357	0,16	0,15	0,0243	-0,0143
17	6,1746	-1,08	0,1401	0,17	0,16	0,0299	-0,0199
18	6,1801	-1,06	0,1446	0,18	0,17	0,0354	-0,0254
19	6,1892	-1,03	0,1515	0,19	0,18	0,0385	-0,0285
20	6,1951	-1,02	0,1539	0,20	0,19	0,0461	-0,0361
21	6,2071	-0,98	0,1636	0,21	0,20	0,0464	-0,0364
22	6,2100	-0,97	0,1670	0,22	0,21	0,0530	-0,0430
23	6,2297	-0,91	0,1814	0,23	0,22	0,0486	-0,0386
24	6,2608	-0,81	0,2090	0,24	0,23	0,0310	-0,0210
25	6,3115	-0,65	0,2578	0,25	0,24	-0,0078	0,0178
26	6,3310	-0,58	0,2810	0,26	0,25	-0,0210	0,0310
27	6,3688	-0,46	0,3228	0,27	0,26	-0,0528	0,0628
28	6,3747	-0,45	0,3264	0,28	0,27	-0,0464	0,0564
29	6,3811	-0,43	0,3336	0,29	0,28	-0,0436	0,0536
30	6,3829	-0,42	0,3372	0,30	0,29	-0,0372	0,0472
31	6,3829	-0,42	0,3372	0,31	0,30	-0,0272	0,0372
32	6,3918	-0,39	0,3483	0,32	0,31	-0,0283	0,0383
33	6,3967	-0,38	0,3520	0,33	0,32	-0,0220	0,0320
34	6,4076	-0,34	0,3669	0,34	0,33	-0,0269	0,0369
35	6,4089	-0,34	0,3669	0,35	0,34	-0,0169	0,0269
36	6,4094	-0,34	0,3669	0,36	0,35	-0,0069	0,0169
37	6,4216	-0,30	0,3821	0,37	0,36	-0,0121	0,0221
38	6,4328	-0,26	0,3974	0,38	0,37	-0,0174	0,0274
39	6,4342	-0,26	0,3974	0,39	0,38	-0,0074	0,0174
40	6,4620	-0,17	0,4325	0,40	0,39	-0,0325	0,0425
41	6,4630	-0,17	0,4325	0,41	0,40	-0,0225	0,0325
42	6,4646	-0,16	0,4364	0,42	0,41	-0,0164	0,0264
43	6,4704	-0,14	0,4443	0,43	0,42	-0,0143	0,0243
44	6,4713	-0,14	0,4443	0,44	0,43	-0,0043	0,0143
45	6,4842	-0,10	0,4602	0,45	0,44	-0,0102	0,0202
46	6,4975	-0,06	0,4761	0,46	0,45	-0,0161	0,0261
47	6,4984	-0,05	0,4801	0,47	0,46	-0,0101	0,0201
48	6,5179	0,01	0,5040	0,48	0,47	-0,0240	0,0340
49	6,5201	0,02	0,5080	0,49	0,48	-0,0180	0,0280
50	6,5214	0,02	0,5080	0,50	0,49	-0,0080	0,0180
51	6,5224	0,02	0,5080	0,51	0,50	0,0020	0,0080
52	6,5431	0,09	0,5359	0,52	0,51	-0,0159	0,0259
53	6,5464	0,10	0,5398	0,53	0,52	-0,0098	0,0198
54	6,5578	0,14	0,5557	0,54	0,53	-0,0157	0,0257
55	6,5603	0,14	0,5557	0,55	0,54	-0,0057	0,0157
56	6,5607	0,15	0,5596	0,56	0,55	0,0004	0,0096
57	6,5654	0,16	0,5636	0,57	0,56	0,0064	0,0036
58	6,5655	0,16	0,5636	0,58	0,57	0,0164	-0,0064
59	6,5793	0,20	0,5793	0,59	0,58	0,0107	-0,0007
60	6,5823	0,21	0,5832	0,60	0,59	0,0168	-0,0068
61	6,5916	0,24	0,5948	0,61	0,60	0,0152	-0,0052
62	6,5957	0,26	0,6026	0,62	0,61	0,0174	-0,0074
63	6,6096	0,30	0,6179	0,63	0,62	0,0121	-0,0021

Продолжение табл. 3.20

i	$x_i = \lg N_i$	$\frac{x_i}{s} = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	$\Phi(z_i)$	$\frac{i}{n}$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{(z_i)}{\theta}$	$\frac{1}{\theta} \frac{1}{n}$
64	6,6471	0,42	0,6628	0,64	0,63	-0,0228	0,0328
65	6,6474	0,42	0,6628	0,65	0,64	-0,0128	0,0228
66	6,6739	0,50	0,6915	0,66	0,65	-0,0315	0,0415
67	6,6739	0,50	0,6915	0,67	0,66	-0,0215	0,0315
68	6,6780	0,52	0,6985	0,68	0,67	-0,0185	0,0285
69	6,6896	0,55	0,7088	0,69	0,68	-0,0188	0,0288
70	6,6916	0,56	0,7123	0,70	0,69	-0,0123	0,0223
71	6,7000	0,59	0,7224	0,71	0,70	-0,0124	0,0224
72	6,7086	0,62	0,7324	0,72	0,71	-0,0124	0,0224
73	6,7132	0,63	0,7357	0,73	0,72	-0,0057	0,0157
74	6,7178	0,64	0,7389	0,74	0,73	0,0011	0,0089
75	6,7197	0,65	0,7422	0,75	0,74	0,0078	0,0022
76	6,7275	0,67	0,7486	0,76	0,75	0,0114	-0,0014
77	6,7275	0,67	0,7486	0,77	0,76	0,0214	-0,0114
78	6,7392	0,71	0,7611	0,78	0,77	0,0189	-0,0089
79	6,7432	0,72	0,7642	0,79	0,78	0,0258	-0,0158
80	6,7538	0,76	0,7764	0,80	0,79	0,0236	-0,0136
81	6,7809	0,84	0,7996	0,81	0,80	0,0104	-0,0004
82	6,7975	0,90	0,8133	0,82	0,81	0,0067	0,0033
83	6,7975	0,90	0,8133	0,83	0,82	0,0167	-0,0067
84	6,7988	0,90	0,8133	0,84	0,83	0,0267	-0,0167
85	6,8038	0,92	0,8212	0,85	0,84	0,0288	-0,0188
86	6,8142	0,95	0,8289	0,86	0,85	0,0311	-0,0211
87	6,8169	0,96	0,8315	0,87	0,86	0,0385	-0,0285
88	6,8649	1,11	0,8665	0,88	0,87	0,0135	-0,0035
89	6,8717	1,13	0,8708	0,89	0,88	0,0192	-0,0092
90	6,8977	1,21	0,8869	0,90	0,89	0,0131	-0,0031
91	6,9051	1,24	0,8925	0,91	0,90	0,0175	-0,0075
92	6,9109	1,26	0,8962	0,92	0,91	0,0238	-0,0138
93	6,9189	1,28	0,8997	0,93	0,92	0,0303	-0,0203
94	6,9299	1,32	0,9066	0,94	0,93	0,0334	-0,0234
95	6,9545	1,40	0,9192	0,95	0,94	0,0308	-0,0208
96	7,0824	1,80	0,9641	0,96	0,95	-0,0041	0,0141
97	7,1682	2,07	0,9808	0,97	0,96	-0,0108	0,0208
98	7,2603	2,37	0,9911	0,98	0,97	-0,0111	0,0211
99	7,2775	2,42	0,9922	0,99	0,98	-0,0022	0,0122
100	7,4586	3,00	0,9986	1,00	0,99	0,0014	0,0086

Если проверяют гипотезу о соответствии выборки экспоненциальному распределению (1.55), параметр которого оценивают по опытным данным, вычисляют аналогичные статистики:

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - 1 + \exp(-x_i/\bar{x}) \right]; \quad (3.103)$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left[1 - \exp(-x_i/\bar{x}) - \frac{i-1}{n} \right]; \quad (3.104)$$

$$D_n = \max [D_n^+; D_n^-] \quad (3.105)$$

и составляют критерий Колмогорова—Смирнова

$$\left(D_n - \frac{0,2}{n} \right) \left(V_n + 0,26 + \frac{0,5}{V_n} \right) \leq \lambda_\alpha. \quad (3.106)$$

Критические значения λ_α для этого случая:

$$\lambda_{0,1} = 0,99; \quad \lambda_{0,05} = 1,09 \text{ и } \lambda_{0,01} = 1,31.$$

Пример 3.20. Проверить с помощью критерия согласия Колмогорова—Смирнова (3.102) гипотезу о нормальном распределении логарифма числа циклов до разрушения при усталостных испытаниях по данным табл. 2.3. Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Значения оценок параметров распределения были найдены в примере 2.2 ($\bar{x} = \lg N = 6,515$ и $s = 0,315$).

Результаты вычислены в табл. 3.20. Значения функции Лапласа $\Phi(z_i)$ находятся по табл. I приложения.

В рассматриваемом примере $D_n^+ = 0,0530$ соответствует образцу № 22 и $D_n^- = 0,0628$ соответствует образцу № 27 вариационного ряда, представленного во второй графе табл. 3.20. а статистика (3.101) $D_n = 0,0628$.

В соответствии с (3.102) проверяем нулевую гипотезу:

$$0,0628 \left(\sqrt{100} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{100}} \right) = 0,633 < \lambda_{0,05} = 0,89.$$

Таким образом, условие (3.102) выполняется, это означает, что опытные данные не противоречат предположению о нормальном распределении логарифма числа циклов до разрушения при усталостных испытаниях.

Критерий согласия ω^2 используется при объемах выборки $50 \leq n \leq 200$ и является более мощным, чем критерий χ^2 , однако при его применении требуется больший объем вычислений. Поэтому при $n > 200$ этот критерий целесообразно использовать только в тех случаях, когда проверка гипотезы по другим критериям не приводит к безусловному выводу.

Критерий ω^2 базируется на распределении статистики, представляющей собой извешенную сумму квадратов разностей между эмпирической и теоретической функцией распределения:

$$\omega^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [W(x) - F(x)]^2 \psi[F(x)] dF(x), \quad (3.107)$$

где $W(x)$ — накопленная частость (2.60); $F(x)$ — теоретическая (гипотетическая) функция распределения; $\psi[F(x)]$ — весовая функция.

Обычно используют весовую функцию двух видов:

$$\psi = 1; \quad (3.108)$$

$$\psi[F(x)] = \frac{1}{F(x)[1-F(x)]}. \quad (3.109)$$

Функцию (3.109) применяют в тех случаях, когда наибольшее значение имеет соответствие эмпирической функции распределения теоретической в области крайних значений случайной величины (на «хвостах» распределения).

При использовании весовой функции (3.108) статистику (3.107) называют статистикой Смирнова, а при (3.109) — статистикой Андерсона—Дарлинга [15].

Критерий ω^2 применим для любых видов функций $F(x)$, если известны значения их параметров. В этом случае статистику Смирнова в соответствии с (3.107) и (3.108) вычисляют по формуле

$$\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n [W(x_i) - F(x_i)]^2. \quad (3.110)$$

Нулевую гипотезу о соответствии выборки функции распределения $F(x)$ не отбрасывают, если выполняется неравенство [40]

$$\left(\omega^2 - \frac{0,4}{n} + \frac{0,6}{n^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq W_\alpha^2, \quad (3.111)$$

где W_α^2 — критическое значение критерия Смирнова, $W_{0,1}^2 = 0,347$; $W_{0,05}^2 = 0,461$; $W_{0,01}^2 = 0,743$.

Статистика Андерсона—Дарлинга при известных параметрах функции распределения в соответствии с (3.107) и (3.109) определяется формулой

$$\omega^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \{W(x_i) \ln F(x_i) + [1 - W(x_i)] \ln [1 - F(x_i)]\}. \quad (3.112)$$

Нулевую гипотезу проверяют с помощью неравенства

$$\omega^2 \leq A_\alpha, \quad (3.113)$$

где A_α — критическое значение критерия Андерсона—Дарлинга, $A_{0,1} = 1,933$; $A_{0,05} = 2,492$; $A_{0,01} = 3,857$.

Если неравенство (3.113) выполняется, то нулевую гипотезу о соответствии выборки функции распределения $F(x)$ не отклоняют.

Как правило, при анализе результатов механических испытаний параметры гипотетической функции распределения заранее неизвестны и оцениваются по выборке, поэтому критерий Смирнова и Андерсона—Дарлинга в виде (3.110)—(3.113) не корректны для произвольного вида функции распределения $F(x)$. Эти критерии могут быть использованы только для функций некоторых видов [15, 32, 40].

В случае проверки гипотезы о нормальном или логарифмически нормальном распределении, параметры которого оценивают по данным самой выборки, статистику Смирнова определяют по формуле

$$\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n [W(x_i) - \Phi(z_i)]^2, \quad (3.114)$$

а условие соответствия опытных данных нормальному или логарифмически нормальному распределению выражается неравенством

$$\omega^2 \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \leq W_\alpha^2, \quad (3.115)$$

где $\Phi(z_i)$ — значение функции Лапласа для $z_i = (x_i - \bar{x})/s$; W_α^2 — критические значения критерия Смирнова, $W_{0,1}^2 = 0,104$; $W_{0,05}^2 = 0,126$; $W_{0,01}^2 = 0,178$.

Критерий Андерсона—Дарлинга для этих условий записывают в виде

$$\omega^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \{W(x_i) \ln \Phi(z_i) + [1 - W(x_i)] \ln [1 - \Phi(z_i)]\}; \quad (3.116)$$

$$\left(\omega^2 - \frac{0,7}{n} \right) \left(1 + \frac{3,6}{n} - \frac{8,0}{n^2} \right) \leq A_\alpha, \quad (3.117)$$

где $A_{0,1} = 0,656$; $A_{0,05} = 0,787$; $A_{0,01} = 1,092$.

При проверке нулевой гипотезы о соответствии эмпирического распределения экспоненциальному (1.55), параметр которого оценивают по данным самой выборки, критерий Смирнова имеет вид

$$\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n [W(x_i) - 1 + \exp(-x_i/\bar{x})]^2; \quad (3.118)$$

$$\omega^2 \left(1 + \frac{0,16}{n} \right) \leq W_\alpha^2, \quad (3.119)$$

где $W_{0,1}^2 = 0,177$; $W_{0,05}^2 = 0,224$; $W_{0,01}^2 = 0,337$, а критерий Андерсона—Дарлинга

$$\omega^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ W(x_i) \ln [1 - \exp(-x_i/\bar{x})] + [1 - W(x_i)] \ln \left[\exp \left(-\frac{x_i}{\bar{x}} \right) \right] \right\}; \quad (3.120)$$

$$\omega^2 \left(1 + \frac{1,5}{n} - \frac{5,0}{n^2} \right) \leq A_\alpha, \quad (3.121)$$

где $A_{0,1} = 1,078$; $A_{0,05} = 1,341$; $A_{0,01} = 1,957$.

8.21. Последовательность вычислений при проверке гипотезы о нормальном распределении логарифма числа циклов до разрушения по критерию согласия Смирнова (3.115)

i	$x_i = \lg N_i$	$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	$\Phi(z_i)$	$W(x_i) = \frac{i-0,5}{n}$	$W(x_i) - \Phi(z_i)$	$[W(x_i) - \Phi(z_i)]^2$
1	5,8669	-2,06	0,0197	0,005	-0,0147	0,0002161
..
35	6,4089	-0,34	0,3669	0,345	-0,0219	0,0004796
..
70	6,6916	0,56	0,7123	0,695	-0,0173	0,0002992
..
100	7,4586	3,00	0,9986	0,995	-0,0036	0,0000129
Сумма						0,05354

Пример 3.21. В условиях примера 3.20 проверить с помощью критерия согласия Смирнова (3.115) гипотезу о нормальном распределении логарифма числа циклов до разрушения при усталостных испытаниях.

Последовательность вычислений показана в табл. 3.21. Значения функции Лапласа находим по табл. I приложения.

По формуле (3.114) вычисляем статистику Смирнова

$$\omega^2 = \frac{1}{12 \cdot 100} + 0,05354 = 0,05437$$

и на основании (3.115) проверяем нулевую гипотезу.

Неравенство (3.115) выполняется, значит предположение о нормальном законе распределения логарифма числа циклов до разрушения не противоречит опытным данным (табл. 2.3).

Пример 3.22. В условиях примера 3.20 проверить с помощью критерия согласия Андерсона—Дарлинга (3.117) гипотезу о нормальном распределении логарифма числа циклов до разрушения при усталостных испытаниях.

Последовательность вычислений показана в табл. 3.22.

По формуле (3.116) вычисляем статистику Андерсона—Дарлинга:

$$\omega^2 = -100 - 2(-50,21463) = 0,42926$$

и на основании критерия (3.117) проверяем нулевую гипотезу

$$\left(0,42926 - \frac{0,7}{100} \right) \left(1 + \frac{3,6}{100} - \frac{8,0}{100^2} \right) = 0,437 < A_{0,05} = 0,787.$$

Таким образом, неравенство (3.117) выполняется, т. е. опытные данные (табл. 2.3) соответствуют нормальному закону распределения.

Критерий согласия Шапиро—Уилка W [34] предназначен для проверки гипотезы о нормальном или логарифмически нормальном распределении при ограниченном объеме выборки ($n \leq 50$) и является более мощным, чем другие критерии.

Результаты испытаний располагают в вариационный ряд (2.2).

Для вычисления статистики критерия

$$W = b^2/S^2 \quad (3.122),$$

определяют величины

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n}, \quad (3.123)$$

i	$i_N \delta_1 = i_x$	$\frac{u}{u-1} = (i_x) M$	$\frac{s}{x - i_x} = i_z$	$(i_z) \Phi$	$(i_z) \Phi u_1$	$x \times (i_x) M$	$(i_x) M - 1$	$(i_x) \Phi - 1$	$[(i_x) \Phi - 1] u_1$	$(i_x) \Phi - 1$	$(i_x) \Phi - 1$	$\bullet (i_x) + (i_z)$	$\bullet (i_x) + (i_z)$
1	5,8669	0,005	-2,06	0,0197	-3,92714	-0,01964	0,995	0,9803	-0,01990	-0,01980	-0,03944	-0,03944	-0,03944
2
3
35	6,4089	0,345	-0,34	0,3669	-1,00267	-0,34592	0,655	0,6331	-0,45713	-0,29942	-0,6434	-0,6434	-0,6434
70	6,6916	0,695	0,56	0,7123	-0,33926	-0,23578	0,395	0,2877	-1,24584	-0,37998	-0,61576	-0,61576	-0,61576
100	7,4586	0,995	3,00

* Цифры в скобках означают формулы соответствующих граф.

где \bar{x} — выборочное среднее, и

$$b = \sum_{i=1}^k a_{n-i+1} (x_{n-i+1} - \bar{x}), \quad (3.124)$$

где значения a_{n-i+1} для $i = 1, 2, 3, \dots, k$ берут из табл. XI приложения, причем если n — четное число, то $k = n/2$, если n — нечетное число, $k = (n - 1)/2$.

Гипотезу проверяют на основании неравенства

$$W \geq W_\alpha, \quad (3.125)$$

где W_α — критическое значение критерия Шапиро—Уилка (см. табл. XII приложения).

Если выполняется неравенство (3.125), то нулевую гипотезу не бракуют.

Пример 3.23. По результатам испытания, приведенных в табл. 3.23, проверить с помощью критерия Шапиро—Уилка (3.125) гипотезу о нормальном распределении значений относительного сужения Φ_K образцов из алюминиевого сплава АВ. Принять $\alpha = 0,05$.

По формуле (3.123) вычисляем $S^2 = 0,0436$. Для $n = 20$ и $k = n/2 = 10$ из табл. XI приложения находим значения a_{n-i+1} для $i = 1, 2, \dots, 10$ ($a_{20} = 0,4734$; $a_{19} = 0,3211$; ...; $a_{11} = 0,0140$) и по формуле (3.124) вычисляем $b = 0,1922$.

На основании (3.122) вычисляем статистику критерия

$$W = \frac{0,1922^2}{0,0436} = 0,847$$

и сопоставляем с критическим значением, взятым из табл. XII приложения для $n = 20$ и $\alpha = 0,05$, $W_{0,05} = 0,905$. Условие (3.125) не выполняется, т. е. эмпирическое распределение (табл. 3.23) не соответствует нормальному распределению (нулевую гипотезу бракуют).

Приближенный критерий нормальности распределения. Для приближенной проверки гипотезы о нормальности распределения могут быть использованы выборочные показатели асимметрии и эксцесса. В этом случае по формулам (2.19) и (2.20) вычисляют указанные статистики, а также их средние квадратические отклонения

$$\sigma_{S_K} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}; \quad (3.126)$$

$$\sigma_{E_K} = \sqrt{\frac{24(n-2)(n-3)n}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}. \quad (3.127)$$

Если абсолютные величины статистик \hat{S}_K и \hat{E}_K равны или меньше своих средних квадратических отклонений σ_{S_K} и σ_{E_K} , то гипотезу нормальности распределения не отвергают. Если абсолютные величины указанных статистик заметно больше своих средних квадратических отклонений, гипотезу нормальности распределения бракуют.

Возможен и более объективный подход к проверке гипотезы нормальности

3.23. Результаты статических испытаний на растяжение образцов из сплава АВ

i	Ψ_K	i	Ψ_K	i	Ψ_K
1	0,275	8	0,305	15	0,340
2	0,280	9	0,308	16	0,360
3	0,285	10	0,310	17	0,390
4	0,290	11	0,313	18	0,409
5	0,292	12	0,315	19	0,420
6	0,298	13	0,320	20	0,430
7	0,299	14	0,327		

распределения с помощью показателей асимметрии и эксцесса. В этом случае оба показателя объединяют в общую статистику [8]

$$\chi^2 = \frac{\hat{S}_k^2}{\sigma_{S_k}^2} + \frac{\hat{E}_k^2}{\sigma_{E_k}^2}, \quad (3.128)$$

которую сопоставляют с табличным значением (табл. VI приложения) для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = 2$.

Если выполняется неравенство

$$\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2, \quad (3.129)$$

то нулевую гипотезу не отвергают.

Пример 3.24. Проверить гипотезу о нормальности распределения логарифма числа циклов до разрушения при усталостных испытаниях с помощью показателей асимметрии и эксцесса на основании данных, приведенных в табл. 2.3, если выборочные значения указанных статистик составляют $\hat{S}_k = 0,226$ и $\hat{E}_k = -0,260$ (см. пример 2.2).

По формулам (3.126) и (3.127) вычисляем средние квадратические отклонения показателей асимметрии и эксцесса:

$$\sigma_{S_k} = \sqrt{\frac{6(100-1)}{(100+1)(100+3)}} = 0,239;$$

$$\sigma_{E_k} = \sqrt{\frac{24(100-2)(100-3)100}{(100-1)^2(100+3)(100+5)}} = 0,464.$$

Сопоставление результатов вычислений с абсолютными значениями показателей асимметрии и эксцесса свидетельствует о том, что гипотеза нормальности распределения логарифма долговечности при усталостных испытаниях не противоречит опытным данным.

К аналогичному выводу приходим и на основании критерия (3.129).

В условиях рассматриваемого примера имеем

$$\chi^2 = \frac{0,226^2}{0,239^2} + \frac{(-0,260)^2}{0,464^2} = 1,198.$$

По табл. VI приложения для $k = 2$ находим $\chi_{0,5}^2 = 1,386$. Таким образом, гипотезу нормальности распределения логарифма числа циклов до разрушения не отвергаем даже при уровне значимости $\alpha = 0,5$.

Критерий нормальности распределения по совокупности малых выборок. При приемочном контроле качества конструкционного материала по механическим свойствам, а также при натуральных испытаниях деталей и изделий на прочность объемы выборок (серий) обычно малы, что исключает возможность надежной проверки гипотезы о виде функции распределения характеристик механических свойств материала и несущей способности деталей и изделий по результатам испытаний отдельных серий.

Однако, если имеются результаты испытаний достаточно большого числа независимых между собой выборок одного и того же объема n , можно проверить гипотезу нормальности генеральных совокупностей, из которых взяты выборки, не прибегая к предположению о равенстве параметров функций распределения этих совокупностей.

Проверка гипотезы нормальности по совокупности малых серий базируется на том основании, что распределение отклонения

$$\tau = \frac{x_t^{(k)} - \bar{x}^{(k)}}{s^{(k)}} \quad (3.130)$$

не зависит от параметров исходной нормальной совокупности, а зависит только от объема выборки n [14].

В формуле (3.130) $x_t^{(k)}$ представляют собой взятый случайным образом результат из k -й выборки, а $\bar{x}^{(k)}$ и $s^{(k)}$ — выборочные среднее значение и среднее квадратическое отклонение, подсчитанные по результатам испытаний k -й выборки.

Проверка гипотезы нормальности особенно проста при $n = 4$. В этом случае, если исходные совокупности нормальны, эмпирические отклонения подчиняются равномерному распределению с функцией

$$F(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\tau + \sqrt{3}) \text{ при } |\tau| < \sqrt{3}. \quad (3.131)$$

При $n \neq 4$ вычисляют величину

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1-\tau^2}}, \quad (3.132)$$

при исходных нормальных распределениях подчиняющуюся распределению Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы, значения функций которой приведены в табл. XIII приложения (более подробные таблицы приведены в работе [1]).

Проверка гипотезы о нормальности распределения по совокупности выборок малого объема сводится к вычислению для каждой выборки по случайно взятому $x_t^{(k)}$ статистики τ и η (для $n \neq 4$) по формулам (3.130) и (3.132), построению вариационных рядов для указанных величин и проверке гипотезы о соответствии эмпирического распределения τ (для $n = 4$) равномерному распределению (3.131) или распределения η (для $n \neq 4$) распределению Стьюдента (табл. XIII приложения) с помощью критерия Колмогорова—Смирнова (3.98) или Смирнова (3.111).

ГЛАВА 4

МНОГОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Производство конструкционных материалов и деталей машин осуществляется с использованием большого ряда металлургических и технологических процессов. Как показывает практика, механические свойства материала и деталей зависят как от большинства отдельных режимов технологических операций, так и от их сочетаний (взаимодействий). Поэтому для оптимизации технологического процесса, а также для целей контроля стабильности процессов необходимо выявить значимость влияния отдельных факторов и их совместного воздействия на уровень характеристик механических свойств материала и элементов конструкций. Подобные задачи решают с помощью многофакторного дисперсионного анализа, в результате которого выявляют оптимальные уровни основных факторов и их взаимодействия, обеспечивающие требуемые значения характеристик механических свойств, и отсеиваются факторы, практически не влияющие на свойства. В результате дисперсионного анализа проводят также оценку генеральных средних и дисперсии характеристик свойств.

Многофакторный дисперсионный анализ, как и однофакторный анализ основан на предположении о нормальности распределения характеристик механических свойств внутри одной системы испытаний и однородности внутренней дисперсии свойств. В связи с этим каждая из указанных гипотез подлежит предварительной проверке на основании экспериментального материала достаточного объема.

ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Результаты испытаний для двухфакторного дисперсионного анализа * представляют в виде таблицы (табл. 4.1).

4.1. Результаты механических испытаний для двухфакторного дисперсионного анализа

Строка	Графа					
	1	2	...	<i>j</i>	...	<i>k</i>
1	$x_{111}; x_{112}; \dots;$ $x_{11v}; \dots; x_{11n}$	$x_{121}; x_{122}; \dots;$ $x_{12v}; \dots; x_{12n}$...	$x_{1j1}; x_{1j2}; \dots;$ $x_{1jv}; \dots; x_{1jn}$...	$x_{1h1}; x_{1h2}; \dots;$ $x_{1hv}; \dots; x_{1hn}$
2	$x_{211}; x_{212}; \dots;$ $x_{21v}; \dots; x_{21n}$	$x_{221}; x_{222}; \dots;$ $x_{22v}; \dots; x_{22n}$...	$x_{2j1}; x_{2j2}; \dots;$ $x_{2jv}; \dots; x_{2jn}$...	$x_{2h1}; x_{2h2}; \dots;$ $x_{2hv}; \dots; x_{2hn}$
...
<i>i</i>	$x_{i11}; x_{i12}; \dots;$ $x_{i1v}; \dots; x_{i1n}$	$x_{i21}; x_{i22}; \dots;$ $x_{i2v}; \dots; x_{i2n}$...	$x_{ij1}; x_{ij2}; \dots;$ $x_{ijv}; \dots; x_{ijn}$...	$x_{ih1}; x_{ih2}; \dots;$ $x_{ihv}; \dots; x_{ihn}$
...
<i>m</i>	$x_{m11}; x_{m12}; \dots;$ $x_{m1v}; \dots; x_{min}$	$x_{m21}; x_{m22}; \dots;$ $x_{m2v}; \dots; x_{m2n}$...	$x_{mj1}; x_{mj2}; \dots;$ $x_{mjv}; \dots; x_{mjn}$...	$x_{mh1}; x_{mh2}; \dots;$ $x_{mhv}; \dots; x_{mhn}$

* Здесь и далее для удобства вычислений для каждой комбинации факторов используется одинаковое число испытаний.

На основании этих результатов подсчитывают средние значения для каждой системы наблюдений:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{\sum_{v=1}^n x_{ijv}}{n}, \quad (4.1)$$

и средние по графикам $\bar{x}_{.j}$, по строкам $\bar{x}_{i.}$, а также общее среднее значение наблюдений $\bar{x}_{..}$:

$$\bar{x}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij}}{m}; \quad (4.2)$$

$$\bar{x}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_{ij}}{k}; \quad (4.3)$$

$$\bar{x}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{i.}}{k}; \quad (4.4)$$

или

$$\bar{x}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{i.}}{m}. \quad (4.5)$$

Результаты расчетов сведены в табл. 4.2. Ход дальнейших вычислений показан в табл. 4.3.

4.2. Средние значения наблюдений для двухфакторного дисперсионного анализа

Строка	Графа						Среднее по строкам
	1	2	...	<i>j</i>	...	<i>k</i>	
1	\bar{x}_{11}	\bar{x}_{12}	...	\bar{x}_{1j}	...	\bar{x}_{1k}	$\bar{x}_{1.}$
2	\bar{x}_{21}	\bar{x}_{22}	...	\bar{x}_{2j}	...	\bar{x}_{2k}	$\bar{x}_{2.}$
...
<i>i</i>	\bar{x}_{i1}	\bar{x}_{i2}	...	\bar{x}_{ij}	...	\bar{x}_{ik}	$\bar{x}_{i.}$
...
<i>m</i>	\bar{x}_{m1}	\bar{x}_{m2}	...	\bar{x}_{mj}	...	\bar{x}_{mk}	$\bar{x}_{m.}$
Среднее по графикам	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$...	$\bar{x}_{.j}$...	$\bar{x}_{.k}$	$\bar{x}_{..}$

4.3. Схема двухфакторного дисперсионного анализа

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия
Междуд средними по графикам	$Q_1 = nm \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2$	$k_1 = k - 1$	$s_1^2 = \frac{Q_1}{k_1}$
Междуд средними по строкам	$Q_2 = nk \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2$	$k_2 = m - 1$	$s_2^2 = \frac{Q_2}{k_2}$
Взаимодействие	$Q_3 = n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i.} \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$	$k_3 = (k-1)(m-1)$	$s_3^2 = \frac{Q_3}{k_3}$
Внутри системы (остаточная)	$Q_4 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n (\bar{x}_{ijv} - \bar{x}_{ij})^2$	$k_4 = km(n-1)$	$s_4^2 = \frac{Q_4}{k_4}$
Полная (общая)	$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n (\bar{x}_{ijv} - \bar{x}_{..})^2$	$k' = kmn - 1$	$s^2 = \frac{Q}{k'}$

Суммы Q_1 , Q_2 , Q_4 и Q удобнее вычислять по формулам

$$Q_1 = \frac{1}{mn} \left[\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^n x_{ijv} \right)^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n x_{ijv} \right)^2 \right]; \quad (4.6)$$

$$Q_2 = \frac{1}{kn} \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n x_{ijv} \right)^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n x_{ijv} \right)^2 \right]; \quad (4.7)$$

$$Q_4 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n x_{ijv}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \left(\sum_{v=1}^n x_{ijv} \right)^2; \quad (4.8)$$

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n x_{ijv}^2 - \frac{1}{kmn} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^n x_{ijv} \right)^2. \quad (4.9)$$

Сумму квадратов Q_3 вычисляют как разность полной суммы квадратов и трех других сумм:

$$Q_3 = Q - Q_1 - Q_2 - Q_4. \quad (4.10)$$

Вначале проверяют гипотезу об отсутствии взаимодействия между исследуемыми факторами, т. е. об отсутствии усиления влияния одного фактора на механические свойства при изменении другого. Указанную гипотезу проверяют с помощью критерия F . Для этого вычисляют дисперсионное отношение

$$F = s_3^2/s_4^2 \quad (4.11)$$

и сопоставляют с табличным значением $F_{1-\alpha}$, найденным для уровня значимости α и числа степеней свободы $k_3 = (k-1)(m-1)$ и $k_4 = km(n-1)$ (табл. VIII приложения).

Если выполняется неравенство

$$F = s_3^2/s_4^2 > F_{1-\alpha},$$

то нулевую гипотезу отвергают, и далее нельзя использовать обычные методы дисперсионного анализа.

Если

$$F = s_3^2/s_4^2 \leq F_{1-\alpha},$$

то гипотеза об отсутствии взаимодействия между факторами подтверждается, и представляется возможность проверить значимость влияния на механические свойства изучаемых факторов. Для этого целесообразно предварительно объединить оценки дисперсий s_3^2 и s_4^2 в общую оценку:

$$s_0^2 = \frac{Q_3 + Q_4}{k_3 + k_4}. \quad (4.12)$$

Далее вычисляют дисперсионные отношения

$$F_1 = s_1^2/s_0^2; \quad (4.13)$$

$$F_2 = s_2^2/s_0^2, \quad (4.14)$$

которые сопоставляют с табличными значениями $F_{1-\alpha}$, соответствующими уровню значимости α и числу степеней свободы $k_1 = k - 1$ и $k_0 = k_3 + k_4$ для условия (4.13) и $k_2 = m - 1$ и $k_0 = k_3 + k_4$ для условия (4.14). Исследуемые факторы оказывают значимое влияние на характеристики механических свойств, если выполняются неравенства

$$F_1 = s_1^2/s_0^2 > F_{1-\alpha}; \quad (4.15)$$

$$F_2 = s_2^2/s_0^2 > F_{1-\alpha}. \quad (4.16)$$

Это означает, что имеет место km нормально распределенных генеральных совокупностей с общей дисперсией и различными средними значениями a_{ij} , оценками которых служат выборочная дисперсия s_0^2 и выборочные средние для каждой комбинации рассматриваемых факторов \bar{x}_{ij} (см. табл. 4.2).

Доверительные интервалы для указанных параметров распределения для $k = k_3 + k_4$ степеней свободы определяют по формулам

$$\bar{x}_{ij} - \frac{s_0}{\sqrt{n}} t_{\alpha, k} < a_{ij} < \bar{x}_{ij} + \frac{s_0}{\sqrt{n}} t_{\alpha, k}; \quad (4.17)$$

$$s_0^2 \frac{k_3 + k_4}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < s_0^2 \frac{k_3 + k_4}{\chi_{P_2}^2}. \quad (4.18)$$

При одновременном несоблюдении неравенств (4.15) и (4.16) подтверждается нулевая гипотеза, т. е. исследуемые факторы не оказывают значимого влияния на характеристики механических свойств. Здесь имеется одна генеральная совокупность результатов испытаний, распределенная по нормальному закону с параметрами σ^2 и a . Оценкой генерального среднего a служит общее выборочное среднее по строкам и графикам $\bar{x}_{..}$ (см. табл. 4.2), а оценкой дисперсии σ^2 — полная (общая) выборочная дисперсия s^2 (см. табл. 4.3). Доверительные интервалы для a и σ^2 в этом случае для $kmn - 1$ степеней свободы вычисляют по формулам

$$\bar{x}_{..} - \frac{s}{\sqrt{kmn}} t_{\alpha, k} < a < \bar{x}_{..} + \frac{s}{\sqrt{kmn}} t_{\alpha, k}; \quad (4.19)$$

$$s^2 \frac{kmn - 1}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < s^2 \frac{kmn - 1}{\chi_{P_2}^2}. \quad (4.20)$$

При решении практических задач возможны и другие случаи. Например, выполняется лишь одно из неравенств (4.15) и (4.16). Допустим, что $F_1 = s_1^2/s_0^2 \leq F_{1-\alpha}$, а $F_2 = s_2^2/s_0^2 > F_{1-\alpha}$, тогда эффект по графикам отсутствует, и имеется m нормально распределенных совокупностей со средними a_i и одинаковой дисперсией σ^2 .

Оценками средних a_i являются выборочные средние по строкам \bar{x}_i . (см. табл. 4.2), а оценкой дисперсии σ^2 — объединенная выборочная дисперсия

$$s_{01}^2 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_4}{k_1 + k_2 + k_4} = \frac{Q_1 + Q_3 + Q_4}{kmn - m}. \quad (4.21)$$

Границы доверительных интервалов генеральных характеристик для $kmn - m$ степеней свободы определяют из выражений

$$\bar{x}_i - \frac{s_{01}}{\sqrt{kn}} t_{\alpha, k} < a_i < \bar{x}_i + \frac{s_{01}}{\sqrt{kn}} t_{\alpha, k}; \quad (4.22)$$

$$s_{01}^2 \frac{kmn - m}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < s_{01}^2 \frac{kmn - m}{\chi_{P_2}^2}. \quad (4.23)$$

Может оказаться, что $F_1 > F_{1-\alpha}$, а $F_2 \leq F_{1-\alpha}$. В этом случае отсутствует эффект по строкам и имеется k нормально распределенных генеральных совокупностей с общей дисперсией σ^2 и разными средними a_j . Оценками средних a_j служат выборочные средние по графикам \bar{x}_j (см. табл. 4.2), а оценкой дисперсии σ^2 — объединенная выборочная дисперсия

$$s_{02}^2 = \frac{Q_2 + Q_3 + Q_4}{k_2 + k_3 + k_4} = \frac{Q_2 + Q_3 + Q_4}{kmn - k}. \quad (4.24)$$

Доверительные интервалы для указанных характеристик для $kmn - k$ степеней свободы вычисляют по формулам, аналогичным (4.22) и (4.23):

$$\bar{x}_j - \frac{s_{02}}{\sqrt{mn}} t_{\alpha, k} < a_j < \bar{x}_j + \frac{s_{02}}{\sqrt{mn}} t_{\alpha, k}; \quad (4.25)$$

$$s_{02}^2 \frac{kmn - k}{\chi_{P_1}^2} < \sigma^2 < s_{02}^2 \frac{kmn - k}{\chi_{P_2}^2}. \quad (4.26)$$

В ряде практических задач априори можно считать, что взаимодействие между рассматриваемыми факторами отсутствует. Например, исследуется влияние концентрации меди в алюминиевом сплаве на статическую прочность образцов. Образцы вырезают из полуфабрикатов различных типоразмеров (штамповки, прутки, профили, листы и т. д.). Естественно предположить, что влияние концентрации меди на прочность образцов будет проявляться примерно в одинаковой степени для полуфабрикатов различных видов. В подобных задачах каждая система наблюдений может состоять из одного результата испытания ($n = 1$).

В этом случае выборочная дисперсия внутри системы s_4^2 равна нулю, а оценкой генеральной внутренней дисперсии σ^2 может служить выборочная дисперсия s_3^2 , соответствующая взаимодействию факторов, которую и используют для вычисления отношений (4.13) и (4.14) и для последующего анализа.

Двухфакторный дисперсионный анализ при одном наблюдении в системе выполняют аналогичным путем, принимая в формулах (4.6)–(4.26) $n = v = 1$ и заменяя в табл. 4.2 \bar{x}_{ij} на x_{ij} . Оценку дисперсии внутри системы (s_4^2) не производят.

Как при одноФакторном, так и при двухфакторном дисперсионном анализе, когда исследуемые факторы имеют количественные выражения и оказывают значимое влияние на механические свойства, для дальнейшего анализа результатов механических испытаний используют регрессионный и корреляционный методы анализа с целью установления вида зависимости характеристик механических свойств от исследуемых факторов и оценки ее параметров (см. гл. V).

4.4. Средние значения предела прочности болтов

Давление, МПа	Предел прочности, МПа, при температуре, °С				Среднее по давлению
	135	145	155	165	
20	106,34	79,80	87,56	72,34	86,51
30	131,26	90,52	99,24	49,68	92,67
40	96,20	79,80	78,74	76,82	82,89
50	92,40	97,00	69,80	65,70	81,22
Среднее по температуре	106,55	86,78	83,84	66,14	85,82

Пример 4.1. Оценить значимость влияния давления и температуры при прессовании на предел прочности болтов диаметром 14 мм из стекловолокниста. Время выдержки в пресс-форме составляло 1 мин. Испытаниям подвергались болты, которые прессовались при температурах 135, 145, 155 и 165 °С под давлением 20, 30, 40 и 50 МПа. Для каждой комбинации значений указанных факторов испытывалось пять болтов ($n = 5$).

Средние значения предела прочности болтов для каждой системы наблюдений, средние значения по факторам и общее среднее, подсчитанные на основании формул (4.1)–(4.5), приведены в табл. 4.4.

Суммы квадратов Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q вычисляем с помощью табл. 4.5 по формулам (4.6)–(4.10):

$$Q_1 = \frac{12079714}{5 \cdot 4} - \frac{6856,0^2}{5 \cdot 4 \cdot 4} = 16427;$$

$$Q_2 = \frac{11781851}{5 \cdot 4} - \frac{6856,0^2}{5 \cdot 4 \cdot 4} = 1534;$$

$$Q_4 = 639824 - \frac{3072101}{5} = 25404;$$

$$Q = 639824 - \frac{6856,0^2}{5 \cdot 4 \cdot 4} = 52263;$$

$$Q_8 = 52263 - 1534 - 16427 - 25404 = 8898.$$

Результаты дисперсионного анализа представлены в табл. 4.6.

Дисперсионное отношение (4.11) для оценки значимости взаимодействия рассматриваемых факторов в данном примере составляет $F = 989/397 = 2,49$ при табличных значениях для $k_3 = 9$ и $k_4 = 64$ и уровней значимости $\alpha = 0,01$ и $\alpha = 0,05$, равных соответственно $F_{0,99} = 2,70$ и $F_{0,95} = 2,02$ (табл. VIII приложения). Сопоставляя расчетные значения дисперсионного отношения с табличными, мы не получаем однозначного решения относительно проверяемой гипотезы об отсутствии взаимодействия между температурой при прессовании болтов и давлением. Окончательное решение может быть принято на основании анализа результатов более полных испытаний.

Если предварительно принять, что взаимодействие между исследуемыми факторами отсутствует, то можно проверить гипотезы о влиянии отдельных факторов на предел прочности болтов. Для этого по формуле (4.12) вычисляем объединенную оценку s_0^2 и по (4.13) и (4.14) находим дисперсионные отношения F_1 и F_2 .

В рассматриваемом примере

$$s_0^2 = \frac{8898 + 25404}{9 + 64} = \frac{34302}{73} = 485,$$

$$F_1 = 5476/485 = 11,29; F_2 = 511/485 = 1,05.$$

Критические значения дисперсионных отношений для $\alpha = 0,01$ и $\alpha = 0,05$ приведены в табл. 4.6. Сопоставление F_1 и F_2 с табличными значениями показывает, что изменение давления при прессовании в исследуемом интервале (от 20 до 50 МПа) не оказывает заметного влияния на предел прочности болтов, в то время как температура при прессовании оказывает весьма сильное влияние на прочность; причем, как следует из табл. 4.4, с увеличением температуры со 135 до 165 °С предел прочности снижается.

4.5. Вычисление суммы квадратов

Давление, МПа	Сумма	Температура, °C			$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \left(\sum_{j=1}^5 x_{ij} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} \right)$	
		135	145	155		
20	$\sum_{v=1}^5 x_{1jv}$	531,7	389,0	437,8	361,7	1720,2
	$\left(\sum_{v=1}^5 x_{1jv} \right)^2$	282 705	151 321	191 669	130 827	2 959 088
30	$\sum_{v=1}^5 x_{2jv}^2$	60 565	31 499	40 256	26 745	756 522
	$\left(\sum_{v=1}^5 x_{2jv} \right)^2$	656,3	452,6	496,2	248,4	1883,5
40	$\sum_{v=1}^5 x_{3jv}$	430 730	204 847	246 814	61 702	159 065
	$\left(\sum_{v=1}^5 x_{3jv} \right)^2$	87 824	42 460	49 610	13 553	944 093
	$\sum_{v=1}^5 x_{4jv}$	481,0	399,0	393,7	384,1	1657,8
	$\left(\sum_{v=1}^5 x_{4jv} \right)^2$	231 361	159 201	155 009	147 533	2 748 301
	$\sum_{v=1}^5 x_{5jv}^2$	47 537	32 841	31 368	30 353	6 931,04
	$\left(\sum_{v=1}^5 x_{5jv} \right)^2$					142 099

Давление, МПа	Сумма	Температура, °C			$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \left(\sum_{j=1}^5 x_{ij} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} \right)$	$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \left(\sum_{j=1}^5 x_{ij} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 x_{ij} \right)$	
		135	145	155			
50	$\sum_{v=1}^5 x_{1jv}$	462,0	485,0	349,0	328,5	1624,5	2 639 000
	$\left(\sum_{v=1}^5 x_{1jv} \right)^2$	213 444	235 225	121 801	107 912		
	$\sum_{v=1}^5 x_{2jv}^2$	46 562	49 375	26 467	22 809		678 382
	$\sum_{i=1}^4 \sum_{v=1}^5 x_{ijv}$	2 131,0	1 725,6	1 676,7	1 322,7	6856,0	145 213
	$\left(\sum_{i=1}^4 \sum_{v=1}^5 x_{ijv} \right)^2$	4 541 161	2 977 695	2 811 323	1 749 535	$\frac{11 781 851}{12 079 714}$ *	
	$\sum_{i=1}^4 \sum_{v=1}^5 x_{ijv}^2$	242 486	156 175	147 701	93 460		639 824
	$\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{v=1}^5 x_{ijv} \right)^2$	1 158 240	750 594	715 293	447 974		3 072 101

* В числителе — сумма значений в градусе, в знаменателе — в строке.

4.6. Результаты двухфакторного дисперсионного анализа

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия	F	F _{1-α}	
					α = 0,01	α = 0,05
Между температурами прессования	$Q_1 = 16427$	3	$s_1^2 = 5476$	$F_1 = 11,29$	4,10	2,75
Между давлениями	$Q_2 = 1534$	3	$s_2^2 = 511$	$F_2 = 1,05$	4,10	2,75
Взаимодействие	$Q_3 = 8898$	9	$s_3^2 = 989$	$F = 2,49$	2,70	2,02
Внутри системы (остаточная)	$Q_4 = 25404$	64	$s_4^2 = 397$	—	—	—
Полная (общая)	$Q = 52263$	79	$s^2 = 662$	—	—	—

4.7. Границы 99 %-ных доверительных интервалов для среднего значения предела прочности болтов из стекловолокнистов

Температура при прессовании, °C	Выборочное среднее, МПа	Левая граница		Правая граница	
		МПа			
135	106,6	94,1		109,1	
145	86,3	73,8		98,8	
155	83,8	71,3		96,3	
165	66,1	53,6		78,6	

Таким образом, дисперсионный анализ опытных данных, приведенных в табл. 4.4, показывает, что каждой из рассмотренных температур соответствует свое распределение предела прочности болтов с одинаковой дисперсией σ^2 и разными средними значениями a_{ij} .

Оценкой дисперсии σ^2 служит объединенная выборочная дисперсия s_0^2 , которую вычисляют по формуле (4.24). В рассматриваемом примере

$$s_0^2 = \frac{1534 + 8898 + 25404}{3 + 9 + 64} = \frac{35836}{76} = 472.$$

Оценками средних a_{ij} являются выборочные средние по температуре \bar{x}_{ij} , которые приведены в нижней строке табл. 4.2 и 4.4.

Границы доверительных интервалов для дисперсии σ^2 и средних a_{ij} определяем из выражений (4.25) и (4.26) для $kmp - k = 76$ степеней свободы.

Задаваясь в условиях данного примера доверительной вероятностью для дисперсии $P = 1 - \alpha = 0,95$; $P_1 = 0,025$ и $P_2 = 0,975$, по табл. III приложения находим $z_{0,025} = -1,96$ и $z_{0,975} = 1,96$. По формуле (2.48) для $k = 76$ вычисляем $x_{0,025}^2 = 102,1$ и $x_{0,975}^2 = 53,8$.

Далее на основании (4.26) определяем доверительные интервалы

$$472 - \frac{76}{102,1} < \sigma^2 < 472 - \frac{76}{53,8}; \quad 351 < \sigma^2 < 667.$$

Доверительные интервалы для средних при доверительной вероятности $P = 1 - \alpha = 0,99$ для $k = 76$ и $t_{0,01/76} = 2,576$ приведены в табл. 4.7.

ТРЕХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Трехфакторный дисперсионный анализ (табл. 4.8) по своей структуре аналогичен двухфакторному.

4.8. Схема трехфакторного дисперсионного анализа

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия
Междуд факторами A средними для фактора B	$Q_1 = nqm \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...})^2$	$k_1 = k - 1$	$s_1^2 = \frac{Q_1}{k_1}$
Междуд факторами B средними для фактора C	$Q_2 = nkq \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{..j} - \bar{x}_{...})^2$	$k_2 = m - 1$	$s_2^2 = \frac{Q_2}{k_2}$
Междуд факторами C средними для факторами A и B	$Q_3 = nkm \sum_{r=1}^q (\bar{x}_{...r} - \bar{x}_{...})^2$	$k_3 = q - 1$	$s_3^2 = \frac{Q_3}{k_3}$
Взаимодействие между факторами A и C	$Q_4 = nq \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^q (\bar{x}_{ijr} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..r} + \bar{x}_{...})^2$	$= (k - 1)(m - 1)$	$s_4^2 = \frac{Q_4}{k_4}$
Взаимодействие между факторами B и C	$Q_5 = nm \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q (\bar{x}_{ijr} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..r} + \bar{x}_{...})^2$	$k_5 = (k - 1)(q - 1)$	$s_5^2 = \frac{Q_5}{k_5}$
Взаимодействие между факторами A, B и C	$Q_6 = n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q (\bar{x}_{ijr} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..r} + \bar{x}_{...})^2$	$= (m - 1)(q - 1)$	$s_6^2 = \frac{Q_6}{k_6}$
Внутри системы (остаточная)	$Q_8 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q \sum_{v=1}^n (x_{ijrv} - \bar{x}_{ijr})^2$	$k_8 = kmq(n - 1)$	$s_8^2 = \frac{Q_8}{k_8}$
Полная (общая)	$Q = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q \sum_{v=1}^n (x_{ijrv} - \bar{x}_{...})^2$	$k' = kmqn - 1$	$s^2 = \frac{Q}{k'}$

Приняты следующие обозначения сумм:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \quad SS = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q \sum_{v=1}^n x_{ijrv}^2; \\
 S_i &= \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \quad S_j = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^q \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \\
 S_r &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \quad S_{ij} = \sum_{r=1}^q \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \\
 S_{ir} &= \sum_{j=1}^m \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \quad S_{jr} = \sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \\
 S_{tjr} &= \sum_{v=1}^n x_{ijrv}; \quad SS_{tjr} = \sum_{v=1}^n x_{ijrv}^2.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Суммы квадратов отклонений удобнее подсчитывать по формулам

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{nmq} - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q_2 &= \sum_{j=1}^m \frac{S_j^2}{nkq} - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q_3 &= \sum_{r=1}^q \frac{S_r^2}{nkm} - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q_4 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{S_{ij}^2}{nq} - Q_1 - Q_2 - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q_5 &= \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^q \frac{S_{ir}^2}{nm} - Q_1 - Q_3 - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q_6 &= \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q \frac{S_{jr}^2}{nk} - Q_2 - Q_3 - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q_7 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^q \frac{S_{tjr}^2}{n} - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q_8 &= SS - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7) - \frac{S^2}{nkmq}; \\
 Q &= SS - \frac{S^2}{nkmq}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

4.9. Суммы для трехфакторного дисперсионного анализа

r	Суммы	i = 1			Вариант времени выдержки j			i = 2			i = 3		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	S_{ijr}	531,7	484,0	416,4	151 321	121 104	144 552	389,0	348,0	380,0	1117,2	191 669	378,1
	S_{ijr}^2	282 705	234 256	173 389	35 350	32 499	25 024	29 478	25 024	29 478	40 256	142 960	28 752
	SS_{ijr}	60 565	52 148	35 350									
2	S_{ijr}	656,3	413,8	390,0	1460,1	204 847	157 768	232 131	232 131	232 131	246 214	1331,6	496,2
	S_{ijr}^2	430 730	171 230	152 100	30 710	24 260	31 920	46 636	46 636	46 636	49 610	167 117	408,8
	SS_{ijr}	87 824	36 316	30 710									34 038
3	S_{ijr}	481,0	497,0	460,0	1438,0	159 201	134 689	29 181	29 181	29 181	110 224	1098,0	393,7
	S_{ijr}^2	231 361	247 009	211 600	43 572	32 841	29 181				23 442		430,8
	SS_{ijr}	47 537	52 805	43 572									185 589
4	S_{ijr}	462,0	434,2	456,3	1352,5	235 225	108 241	174 724	174 724	174 724	1232,0	121 801	372,5
	S_{ijr}^2	213 444	188 530	208 210	41 840	49 375	22 257	35 888	35 888	35 888	26 467	26 467	138 756
	SS_{ijr}	46 562	38 850	41 840									28 390
	$S_{ijr} = \sum_{r=1}^q S_{ijr}$	2 131,0	1 829,0	1 722,7				1 725,6	1 441,2	1 612,0		1 676,7	1 590,2
	$\sum_{r=1}^q S_{ijr}^2$	1 158 240	841 025	745 299				750 594	521 802	661 631		714 684	634 422
	$\sum_{r=1}^q SS_{ijr}$	242 488	180 119	151 481				156 175	108 382	135 444		147 701	128 734

Продолжение табл. 4.9

Проверка табл. 4.9

4.10. Средние значения предела прочности

Давление, МПа	$t = 1; t = 135^\circ\text{C}$				$t = 2; t = 145^\circ\text{C}$			
	$\bar{x}_{1,r}$	$\bar{x}_{2,r}$	$\bar{x}_{3,r}$	$\bar{x}_{4,r}$	$\bar{x}_{1,r}$	$\bar{x}_{2,r}$	$\bar{x}_{3,r}$	$\bar{x}_{4,r}$
$p = 20$ при $r = 1$	106,34	96,80	83,28	95,47	79,80	69,60	76,04	75,15
$p = 30$ при $r = 2$	131,26	82,76	78,00	97,34	90,52	79,44	96,36	88,77
$p = 40$ при $r = 3$	96,20	98,40	92,00	95,53	79,80	73,40	66,40	73,20
$p = 50$ при $r = q = 4$	92,40	86,84	91,26	90,17	97,00	65,80	83,60	82,13
$\bar{x}_{ij.}$	106,55	91,20	86,14		86,78	72,06	80,60	
$\bar{x}_{i..}$	94,63				79,81			

Нулевые гипотезы о незначимости влияния взаимодействия отдельных пар исследуемых факторов и их общего взаимодействия (взаимодействие второго порядка) на характеристики механических свойств проверяют вычислением дисперсионных отношений F_4 , F_5 , F_6 и F_7 , в числителе которых дисперсия для соответствующего взаимодействия (s_4^2 , s_5^2 , s_6^2 и s_7^2), а в знаменателе — внутренняя дисперсия s_8^2 , являющаяся оценкой генеральной дисперсии. Вычисленные дисперсионные отношения сравнивают с табличными критическими значениями, найденными для чисел степеней свободы, указанных в табл. 4.8.

При принятии нулевых гипотез относительно взаимодействия факторов дисперсии s_4^2 , s_5^2 , s_6^2 , s_7^2 и s_8^2 объединяют в общую оценку

$$s_0^2 = \frac{Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8}{k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8}, \quad (4.29)$$

которая будет являться оценкой генеральной внутренней дисперсии.

Это объединение целесообразно лишь в том случае, когда число испытаний $k_8 = kmq$ ($n = 1$) сравнительно невелико.

Далее с помощью отношений дисперсий s_1^2 , s_2^2 и s_3^2 к s_0^2 проверяют нулевые гипотезы относительно незначимости влияния каждого из рассматриваемых факторов на механические свойства. При принятии нулевых гипотез для всех или отдельных факторов возможно дальнейшее объединение дисперсий так, как это производилось при двухфакторном дисперсионном анализе.

Доверительные интервалы для генеральной внутренней дисперсии и для средних значений механических свойств определяют, как и при двухфакторном дисперсионном анализе.

Пример 4.2. Оценить значимость влияния давления, температуры при прессовании и времени выдержки в пресс-форме на предел прочности болтов диаметром 14 мм из стекловолокнистого материала.

Время выдержки в пресс-форме составляло 1, 3 и 6 мин. Остальные технологические факторы принимали значения, указанные в условиях к примеру 4.1. Для каждой комбинации факторов испытывалось по 5 образцов ($n = 5$).

Средние значения предела прочности болтов для каждой системы из 5 наблюдений приведены в табл. 4.10. Там же представлены значения выборочных средних по факторам и общее среднее.

Суммы (4.27) и суммы квадратов отклонений (4.28) вычисляем с помощью табл. 4.9.

Болтов, МПа (τ — в мин)

$t = 3; t = 155^\circ\text{C}$				$t = k = 4; t = 165^\circ\text{C}$				\bar{x}_{ijr}			
$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
87,56	75,62	77,46	76,88	72,34	67,44	53,22	64,33	78,62	86,51	77,37	72,50
99,24	81,76	82,68	87,89	49,68	75,06	73,66	63,13	85,03	92,65	79,75	82,67
78,74	86,16	80,80	81,90	76,82	76,22	80,68	77,91	82,22	82,89	83,54	79,97
69,80	74,50	70,20	71,50	65,70	54,06	64,58	61,45	76,31	81,22	70,30	77,41
83,84	79,51	77,78		66,14	68,19	68,04		\bar{x}_{ijr}	85,82	77,74	78,14
80,38				67,46				$\bar{x}... = 80,57$			

Например,

$$Q_1 = \frac{1}{60} (32\ 293\ 079 + 22\ 836\ 929 + 23\ 257\ 471 + 16\ 380\ 637) =$$

$$-\frac{1}{240} 373\ 703\ 026 = 22\ 373;$$

$$Q_2 = \frac{1}{80} (47\ 004\ 736 + 38\ 741\ 910 + 39\ 076\ 251) - \frac{1}{240} 373\ 703\ 026 = 3190;$$

$$Q_4 = \frac{1}{20} (2\ 131,0^2 + 1\ 829,0^2 + 1722,7^2 + 1725,6^2 + \dots + 1360,7^2) - 22\ 373 - \\ - 3190 - \frac{1}{240} 373\ 703\ 026 = 3787$$

и т. д.

Вычисленные значения сумм квадратов отклонений, а также выборочных дисперсий и дисперсионных отношений представлены в табл. 4.11. Там же приведены табличные критические значения дисперсионных отношений для уровней значимости 0,01 и 0,05 и соответствующего числа степеней свободы (табл. VIII приложения). Эмпирические значения дисперсионных отношений F_4 , F_5 и F_6 заметно меньше критических для уровня значимости $\alpha = 0,05$. В связи с этим можно считать, что взаимодействие всех возможных пар изучаемых факторов (A с B , A с C , B с C) на предел прочности болтов не влияет.

Нулевая гипотеза об отсутствии взаимодействия второго порядка подтверждается лишь для уровня значимости $\alpha \approx 0,03$. В случае принятия нулевой гипотезы об отсутствии взаимодействия второго порядка оценки дисперсий s_4^2 , s_5^2 , s_6^2 и s_7^2 в соответствии с (4.29) объединяются в общую оценку

$$s_0^2 = \frac{3787 + 4551 + 1909 + 10\ 279 + 59\ 792}{6 + 9 + 6 + 18 + 192} = \frac{80318}{231} = 348.$$

Дисперсионные отношения F_1 , F_2 и F_8 (см. табл. 4.11) вычисляем путем деления соответствующих дисперсий (s_1^2 , s_2^2 и s_8^2) на объединенную оценку s_0^2 . Сопоставление эмпирических значений дисперсионных отношений с критическими (таблицами) значениями показывает, что основным фактором, влияющим на предел прочности прессованных болтов из стекловолокнистого материала, является температура прессования. Значимое, но менее сильное влияние на прочность оказывает время выдержки при прессовании. Изменение давления в исследуемом интервале не оказывает ощутимого влияния на прочность болтов (см. также пример 4.1).

Таким образом, если учитывать влияние времени выдержки на предел прочности, то в рассматриваемом примере мы имеем $km = 12$ совокупностей болтов со средними значениями

4.11. Результаты дисперсионного анализа для пределов прочности болтов

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия	F	$F_{1-\alpha}$	
					$\frac{1}{\delta^2}$	$\frac{0.05}{\delta^2}$
Между температурами прессования, A	$Q_1 = 22373$	$k_1 = 3$	$s_{11}^2 = 7458$	$F_1 = 21.43$	3,88	2,65
Между временем выдержки, B	$Q_2 = 3190$	$k_2 = 2$	$s_{22}^2 = 1595$	$F_2 = 4.59$	4,71	3,04
Между давлениями прессования, C	$Q_3 = 2674$	$k_3 = 3$	$s_{33}^2 = 891$	$F_3 = 2.56$	3,88	2,65
Взаимодействие между температурой и временем выдержки, A с B	$Q_4 = 3787$	$k_4 = 6$	$s_{44}^2 = 631$	$F_4 = 2.03$	2,90	2,14
Взаимодействие между температурой и давлением, A с C	$Q_5 = 4551$	$k_5 = 9$	$s_{55}^2 = 506$	$F_5 = 1.63$	2,50	1,92
Взаимодействие между временем выдержки и давлением, B с C	$Q_6 = 1909$	$k_6 = 6$	$s_{66}^2 = 318$	$F_6 = 1.02$	2,90	2,14
Взаимодействие между температурой, временем и давлением, A, B и C	$Q_7 = 10279$	$k_7 = 18$	$s_{77}^2 = 571$	$F_7 = 1.84$	2,03	1,66
Внутри системы (остаточная)	$Q_8 = 59792$	$k_8 = 192$	$s_{88}^2 = 311$	—	—	—
Полная (общая)	$Q = 108555$	$k' = 239$	$s^2 = 454$	—	—	—

предел прочности a_{ij} и дисперсией σ^2 . Оценками средних значений служат величины \bar{x}_{ij} (см. табл. 4.10), а оценкой дисперсии — сводная выборочная дисперсия s_{01}^2 .

$$s_{01}^2 = \frac{Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8}{k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8} = \\ = \frac{2674 + 3787 + 4551 + 1909 + 10279 + 59792}{3 + 6 + 9 + 6 + 18 + 192} = \frac{82992}{234} = 355.$$

Если пренебречь влиянием времени выдержки при прессовании на прочность, то будем иметь $k = 4$ совокупности болтов со средними, оценками которых служат величины \bar{x}_{ij} (см. табл. 4.10), и общей дисперсией с оценкой

$$s_{02}^2 = \frac{Q - Q_1}{k' - k_1} = \frac{108555 - 22373}{239 - 3} = \frac{86182}{236} = 365.$$

Как для первого, так и для второго случая представляется возможность определить доверительные интервалы для генеральных средних значений и генеральной дисперсии.

Таким образом, для производства болтов диаметром 14 мм из стекловолокниста с целью обеспечения их наибольшей прочности и производительности процесса из исследуемых в примере режимов оптимальными режимами являются: температура при прессовании 135°C, время выдержки в пресс-форме 1 мин, давление при прессовании 20 МПа. В процессе производства большое внимание следует уделять контролю температуры прессования и времени выдержки и меньшее — контролю давления.

ГЛАВА 5

РЕГРЕССИОННЫЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗЫ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Для оптимизации технологического процесса производства конструкционных материалов и деталей машин и оценки несущей способности конструкций в эксплуатационных условиях возникает необходимость установления количественной зависимости характеристик механических свойств от различных факторов.

При изучении этих зависимостей исследователь, варьируя уровнями одних факторов, стремится зафиксировать уровни других. Однако, как показывает практика, далеко не всегда удается достичь строгого обеспечения запланированных уровней, что приводит к «размытию» исследуемых зависимостей и «смазыванию» эффектов изучаемых факторов. Так, при исследовании влияния концентрации какого-либо элемента на механические свойства сплава производят несколько плавок с различной концентрацией изучаемого элемента. Концентрацию остальных элементов в разных плавках стремятся сохранить на постоянном уровне, что практически обеспечить не удается. Это создает определенный фон, затрудняющий обнаружение зависимостей и установление ее количественных параметров.

При решении большинства задач уровень рассматриваемого фактора оказывается случайной величиной, обычно подчиняющейся нормальному закону распределения. Характеристики механических свойств материалов и элементов конструкций также являются случайными величинами как из-за колебаний уровня основных (изучаемых) факторов, так и из-за изменчивости большого ряда неучтенных факторов.

В ряде случаев возникает необходимость оперативной косвенной оценки характеристик механических свойств материала и элементов конструкций, непосредственное определение которых связано с большой трудоемкостью и стоимостью испытаний. Возможность косвенной оценки одних характеристик через другие связана с тем, что они оказываются зависимыми от ряда общих факторов.

Таким образом, большой класс задач, связанных с анализом результатов механических испытаний материалов и элементов конструкций, предусматривает изучение зависимостей между случайными величинами. Подобные задачи решают на основании регрессионного и корреляционного анализов, являющихся развитием дисперсионного анализа, рассмотренного в гл. 3 и 4. Регрессионный и корреляционный методы дают возможность не только оценить значимость влияния исследуемых факторов на механические свойства, но и в случае их количественного выражения установить вид зависимости между характеристиками механических свойств и уровнем рассматриваемых факторов, а также оценить параметры установленных зависимостей.

СВЯЗЬ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ.
КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ НОРМАЛЬНОМ
РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕЛИЧИН

При функциональной зависимости между переменными величинами каждому допустимому значению независимого переменного (аргумента) x соответствует определенное значение другой переменной y . Очевидно, что для случайных величин такого соответствия нет. В этом случае существуют связи особого вида, называемые стochастическими (вероятностными), при которых одна случайная величина реагирует на изменение другой изменением своего распределения.

Изменение случайной величины Y в связи с изменением другой случайной величины X может быть представлено в виде двух составляющих. Первая составляющая называемая стochастической, связана с зависимостью рассматриваемых случайных величин и определяется действием общих факторов. Вторая составляющая, называ-

мая случайной, обусловливается действием индивидуальных случайных факторов, влияющих на какую-нибудь одну из рассматриваемых величин. Если стохастическая составляющая равна нулю, то случайные величины X и Y являются независимыми. Если же эта составляющая отлична от нуля, то между указанными величинами существует стохастическая связь.

При отсутствии случайной составляющей между величинами X и Y существует функциональная зависимость.

В практических задачах отличны от нуля обычно обе составляющие. В этом случае их соотношение характеризует *тесноту (силу)* связи между рассматриваемыми случайными величинами.

Большинство задач при анализе результатов механических испытаний может быть решено в рамках линейной зависимости между нормально распределенными случайными величинами. При этом в качестве количественной оценки тесноты связи между случайными величинами используют коэффициент корреляции

$$\rho = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (5.1)$$

где σ_x и σ_y — генеральные средние квадратические отклонения случайных величин X и Y , определяемые по формулам (1.14) и (1.15); $\mu_{1/1}$ — генеральный смешанный центральный момент второго порядка, определяемый для непрерывных распределений по формуле

$$\mu_{1/1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_x)(y - a_y) \varphi(x, y) dx dy. \quad (5.2)$$

В формуле (5.2) a_x и a_y — математические ожидания случайных величин X и Y , а $\varphi(x, y)$ — плотность двухмерного распределения указанных величин.

Коэффициент корреляции изменяется в пределах $-1 \leq \rho \leq 1$, для независимых случайных величин он равен нулю. Однако равенство нулю коэффициента корреляции не всегда означает независимость рассматриваемых случайных величин. Если, например, изменение одной величины приводит лишь к изменению дисперсии другой, а математическое ожидание при этом постоянно, то коэффициент корреляции равен нулю, хотя случайные величины оказываются зависимыми. Такие величины называют *некоррелированными*.

Коэффициент корреляции может быть близок к нулю также и для случая *коррелированных* случайных величин, если связь между ними нелинейная. Близость значения коэффициента корреляции к единице свидетельствует о существовании между исследуемыми случайными величинами почти строгой функциональной линейной зависимости и о малом влиянии случайных индивидуальных факторов.

При положительном значении коэффициента корреляции с возрастанием одной случайной величины в среднем возрастает и другая. При $\rho < 0$ с возрастанием одной величины другая убывает. Принято считать [38], что при значении коэффициента корреляции $0 < |\rho| < 0,2$ между исследуемыми величинами практически нет связи, при $0,2 < |\rho| < 0,5$ существует слабая связь, при $0,5 < |\rho| < 0,75$ — средняя связь, при $0,75 < |\rho| < 0,95$ — сильная связь и при $0,95 < |\rho| \leq 1,00$ — практически функциональная связь.

Выборочный коэффициент корреляции r между нормально распределенными случайными величинами вычисляют по формуле, аналогичной выражению (5.1), только в этом случае используют выборочные значения смешанного центрального момента второго порядка и средних квадратических отклонений:

$$r = \frac{m_{1/1}}{s_x s_y}. \quad (5.3)$$

Выборочный смешанный центральный момент

$$m_{1/1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad (5.4)$$

где \bar{x} и \bar{y} — выборочные средние случайных величин X и Y , вычисляемых по формуле (2.4) или (2.14).

Момент (5.4) удобно определять с учетом соотношения

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i. \quad (5.5)$$

Выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2 вычисляют по формулам (2.7) и (2.8) или (2.15) и (2.16).

При большом объеме испытаний ($n > 50$) использование формул (5.4) и (5.5) сопряжено с громоздкими вычислениями. Поэтому опытные данные целесообразнее группировать по интервалам и представлять в виде корреляционной таблицы (табл. 5.1), а выборочный смешанный центральный момент второго порядка вычислять по формуле

$$m_{1/1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \quad (5.6)$$

или более удобно на основании выражения

$$m_{1/1} = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k n_{ij} x_i y_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_{i.} x_{i.} \sum_{j=1}^k n_{.j} y_{.j} \right]. \quad (5.7)$$

5.1. Корреляционная таблица для двухмерного распределения случайных величин

Номер интервала для x	Номер интервала для y							Сумма	\bar{y}_i
	1	2	3	...	j	...	k		
1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1j}	...	n_{1k}	$n_{1.}$	\bar{y}_1
2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2j}	...	n_{2k}	$n_{2.}$	\bar{y}_2
3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3j}	...	n_{3k}	$n_{3.}$	\bar{y}_3
...
i	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	...	n_{ij}	...	n_{ik}	$n_{i.}$	\bar{y}_i
...
m	n_{m1}	n_{m2}	n_{m3}	...	n_{mj}	...	n_{mk}	$n_{m.}$	\bar{y}_m
Сумма	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$...	$n_{.j}$...	$n_{.k}$	n	\bar{y}
\bar{x}_j	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	...	\bar{x}_j	...	\bar{x}_k	\bar{x}	

В этом случае выборочные средние квадратические отклонения величин X и Y находят по формулам, аналогичным (2.16):

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^m n_i x_i \right)^2 \right]}; \quad (5.8)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^k n_j y_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k n_j y_j \right)^2 \right]}. \quad (5.9)$$

В формулах (5.6)–(5.9) и табл. 5.1 приняты следующие обозначения: m и k — число интервалов для величин соответственно X и Y ; x_i и y_j — значения величин X и Y в серединах соответствующих интервалов; n_{ij} — число совместных наблюдений значений X и Y ; $n_{\cdot j}$ — суммарное число наблюдений величины Y при фиксированном значении $X = x_i$; $n_{\cdot i}$ — суммарное число наблюдений величины X при фиксированном значении $Y = y_j$; n — общее число наблюдений; \bar{x}_j — выборочное условное среднее значение величины X при фиксированном значении $Y = y_j$; \bar{y}_i — выборочное условное среднее значение Y при фиксированном значении $X = x_i$; \bar{x} и \bar{y} — выборочные общие средние соответственно X и Y .

Оценки условных средних и общих средних вычисляют по формулам, аналогичным (2.14):

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^m n_{ij} x_i}{n_{\cdot j}}; \quad (5.10)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j}{n_{\cdot i}}; \quad (5.11)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m n_{ij} x_i}{n}; \quad (5.12)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k n_{ij} y_j}{n}; \quad (5.13)$$

или

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k n_{\cdot j} \bar{x}_j}{n}; \quad (5.14)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m n_{\cdot i} \bar{y}_i}{n}. \quad (5.15)$$

Совокупность значений $n_{1j}, n_{2j}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{mj}$ случайной величины X при фиксированном значении другой случайной величины $Y = y_j$ представляет собой *условное распределение* величины X при $Y = y_j$. Таким образом, табл. 5.1 содержит k условных распределений величины X при $Y = y_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, k$) и m условных распределений величины Y при $X = x_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$). Параметрами условных распределений служат условные средние и условные дисперсии. Оценками услов-

ных средних являются величины \bar{x}_j и \bar{y}_i , а оценками условных дисперсий — выборочные

$$s_{x/y_j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m n_{ij} (x_i - \bar{x}_j)^2}{n_{\cdot j} - 1}; \quad (5.16)$$

$$s_{y/x_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k n_{ij} (y_j - \bar{y}_i)^2}{n_{\cdot i} - 1}, \quad (5.17)$$

вычисление которых удобнее производить по формулам

$$s_{x/y_j}^2 = \frac{1}{n_{\cdot j} - 1} \left[\sum_{i=1}^m n_{ij} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^m n_{ij} x_i \right)^2}{n_{\cdot j}} \right], \quad (5.18)$$

$$s_{y/x_i}^2 = \frac{1}{n_{\cdot i} - 1} \left[\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j \right)^2}{n_{\cdot i}} \right]. \quad (5.19)$$

Предпоследняя графа и предпоследняя строка табл. 5.1 есть *частные распределения* случайных величин соответственно X и Y , оценками параметров которых являются величины \bar{x} , \bar{y} , s_x^2 и s_y^2 [см. формулы (5.8), (5.9), (5.12)–(5.15)].

При малом объеме выборки n значение оценки коэффициента корреляции, вычисленное по формуле (5.3), целесообразно корректировать [8] по формуле

$$r' = r \left[1 + \frac{1 - r^2}{2(n-3)} \right]. \quad (5.20)$$

Выборочный коэффициент корреляции, как и другие выборочные характеристики, является случайной величиной и может принимать различные значения при повторении испытаний. При анализе независимых величин, для которых генеральный коэффициент корреляции ρ равен нулю, выборочный коэффициент r может заметно отличаться от нуля. В связи с этим возникает важная практическая задача, заключающаяся в проверке гипотезы об отсутствии корреляции между исследуемыми случайными величинами X и Y , т. е. в проверке нулевой гипотезы о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции на основании данных выборки. Для решения такой задачи необходимо установить закон распределения выборочного коэффициента корреляции.

Точное распределение выборочного коэффициента корреляции достаточно сложно [2] и зависит от неизвестного значения генерального коэффициента корреляции ρ . Однако при больших объемах выборки ($n \geq 100$) из нормально распределенных совокупностей и небольших $|r|$ ($|r| < 0,5$) распределение выборочного коэффициента корреляции приближается к нормальному с математическим ожиданием

$$M\{r\} = \rho - \frac{\rho}{2(n-1)} (1-\rho^2) \quad (5.21)$$

и средним квадратическим отклонением

$$\sigma_r = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{n-1}}. \quad (5.22)$$

Второе слагаемое в формуле (5.21) при больших n мало, и им обычно пренебрегают.

Проверка нулевой гипотезы $\rho = 0$ при альтернативной $\rho \neq 0$ в этом случае заключается в вычислении статистики

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}, \quad (5.23)$$

имеющей t -распределение (Стьюдента) с $k = n - 2$ степенями свободы, и в сопоставлении вычисленного значения с критическим $t_{\alpha/2, k}$, найденным по табл. V приложения для выбранного уровня значимости α .

Если $|t| \leq t_{\alpha/2, k}$, то нулевую гипотезу $\rho = 0$ принимают. В случае $|t| > t_{\alpha/2, k}$ нулевую гипотезу отвергают. При альтернативной гипотезе $\rho \neq 0$ используют двусторонний критерий, при $\rho > 0$ или $\rho < 0$ — односторонний.

Границы доверительного интервала для генерального коэффициента корреляции при большом n и значении ρ , не близком к единице, для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ могут быть найдены из выражения

$$r - t_{\alpha/2, k} s_r < \rho < r + t_{\alpha/2, k} s_r, \quad (5.24)$$

где s_r — выборочное среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции, вычисляемое по формуле (5.22) с заменой ρ на r .

Если доверительный интервал (5.24) включает значение $\rho = 0$, то нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

При ограниченных объемах выборки распределение коэффициента корреляции существенно отличается от нормального закона. Для проверки гипотезы об отсутствии корреляции между исследуемыми величинами X и Y и построения доверительных интервалов для коэффициента корреляции в этом случае используют преобразование Фишера, который показал, что распределение случайной величины

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (5.25)$$

хорошо аппроксимируется нормальным законом с математическим ожиданием

$$M\{U\} = a_u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)} \quad (5.26)$$

и дисперсией

$$D\{U\} = \sigma_u^2 = \frac{1}{n-3}. \quad (5.27)$$

Второе слагаемое (5.26) всегда мало по сравнению со средним квадратическим отклонением σ_u , и поэтому им обычно пренебрегают.

Проверка нулевой гипотезы $\rho = 0$ при альтернативной $\rho \neq 0$ заключается в вычислении по формулам (5.25) и (5.27) значений u и σ_u и сопоставлении выборочного значения u с критическим, найденным с помощью табл. III приложения для вероятности $P = 1 - \alpha/2$. Если выполняется условие

$$|u| \leq z_{1-\alpha/2} \sigma_u, \quad (5.28)$$

то нулевую гипотезу $\rho = 0$ принимают. В случае $|u| > z_{1-\alpha/2} \sigma_u$ нулевую гипотезу отвергают.

Проверку гипотезы $\rho = 0$ удобно производить также с помощью табл. 5.2, где приведены нижние границы доверительной области для абсолютного значения коэффициента корреляции. Если $|r| \leq r_{1-\alpha/2}$, то нулевую гипотезу $\rho = 0$ принимают. При $|r| > r_{1-\alpha/2}$ нулевую гипотезу бракуют.

5.2. Критические значения выборочного коэффициента вариации $|r|_{1-\alpha/2}$ для двустороннего критерия (при одностороннем критерии критические значения соответствуют уровню зависимости $\alpha/2$)

Число степеней свободы $k = n - 2$	Уровни значимости α			Число степеней свободы $k = n - 2$	Уровни значимости α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	0,988	0,997	0,9999	17	0,389	0,456	0,575
2	0,900	0,950	0,990	18	0,378	0,444	0,561
3	0,805	0,878	0,959	19	0,369	0,433	0,549
4	0,729	0,811	0,917	20	0,360	0,423	0,537
5	0,669	0,754	0,875	25	0,323	0,381	0,487
6	0,621	0,707	0,834	30	0,296	0,349	0,449
7	0,582	0,666	0,798	35	0,275	0,325	0,418
8	0,549	0,632	0,765	40	0,257	0,304	0,393
9	0,521	0,602	0,735	45	0,243	0,287	0,372
10	0,497	0,576	0,708	50	0,231	0,273	0,354
11	0,476	0,553	0,684	60	0,211	0,250	0,325
12	0,457	0,532	0,661	70	0,195	0,232	0,302
13	0,441	0,514	0,641	80	0,183	0,217	0,283
14	0,426	0,497	0,623	90	0,173	0,205	0,267
15	0,412	0,482	0,606	100	0,164	0,195	0,254
16	0,400	0,468	0,590	200	0,109	0,138	0,181

Границы доверительного интервала для коэффициента корреляции при ограниченном объеме выборки определяют с помощью преобразования (5.25). Вначале строят доверительные интервалы для a_u :

$$u - z_{1-\alpha/2} \sigma_u < a_u < u + z_{1-\alpha/2} \sigma_u \quad (5.29)$$

или

$$u_1 < a_u < u_2, \quad (5.30)$$

где $u_1 = u - z_{1-\alpha/2} \sigma_u$; $u_2 = u + z_{1-\alpha/2} \sigma_u$. Далее для значений u_1 и u_2 по формуле

$$r = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}, \quad (5.31)$$

полученной на основании выражения (5.25), определяют соответствующие значения границ доверительных интервалов для генерального коэффициента корреляции

$$r_1 < \rho < r_2. \quad (5.32)$$

Иногда необходимо сравнить два выборочных коэффициента корреляции с целью проверки гипотезы о незначимости различия между ними, т. е. общности генерального коэффициента корреляции для двух рассматриваемых выборок.

Для этого по формуле (5.25) находят значения u_1 и u_2 , соответствующие выборочным коэффициентам корреляции r_1 и r_2 , и вычисляют

$$z = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}. \quad (5.33)$$

Если $|z|$ при альтернативной гипотезе $\rho_1 \neq \rho_2$ меньше теоретического значения $z_{1-\alpha/2}$, найденного по табл. III приложения для вероятности $P = 1 - \alpha/2$, то гипотезу о равенстве коэффициентов корреляции принимают (двусторонний критерий). В этом случае можно считать, что выборки взяты из общей совокупности.

При альтернативной гипотезе $\rho_1 > \rho_2$ или $\rho_1 < \rho_2$ используется односторонний критерий, для этого величину $|z|$ сопоставляют с табличным значением $z_{1-\alpha}$, найденным по табл. III для $P = 1 - \alpha$.

5.3. Результаты вычислений коэффициента корреляции между пределом выносливости и пределом прочности алюминиевых сплавов (выборка малого объема, $n = 16$)

$x_i = \sigma_{\text{вн}}$ МПа	$y_i = \sigma_{\text{вн}}$ МПа	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	3	4	5
293	130	85 849	16 900	38 090
311	136	96 721	18 496	42 296
329	135	108 241	18 225	44 415
333	130	110 889	16 900	43 290
342	135	116 964	18 225	46 170
352	142	123 904	20 164	49 984
367	150	134 689	22 500	55 050
393	150	154 449	22 500	58 950
456	165	207 936	27 225	75 240
490	192	240 100	36 864	94 080
529	171	279 941	29 241	90 459
566	209	320 356	43 681	118 294
581	170	337 561	28 900	98 770
599	182	358 801	33 124	109 018
623	190	388 129	36 100	118 370
628	213	394 384	45 369	133 764
$\sum_{i=1}^n x_i = 7192$		$\sum_{i=1}^n y_i = 2600$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 3458914$	$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 434387$
				$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1216240$

Пример 5.1. Произвести оценку значимости коэффициента корреляции между пределом ограниченной выносливости при изгибе с вращением образцов на базе 10^7 циклов ($Y = \sigma_{\text{вн}}$) и пределом прочности ($X = \sigma_{\text{вн}}$) по результатам испытаний 16 деформируемых алюминиевых сплавов при альтернативной гипотезе $\rho \neq 0$. Найти границы 90-процентного доверительного интервала для коэффициента корреляции.

Результаты испытаний приведены в табл. 5.3. Здесь же показана последовательность необходимых вычислений для малых выборок.

По итогам 1-й и 3-й граф на основании формулы (2.4) находим выборочные средние значения \bar{x} и \bar{y} :

$$\bar{x} = \frac{7192}{16} = 449,5 \text{ МПа}; \quad \bar{y} = \frac{2600}{16} = 162,5 \text{ МПа}.$$

В соответствии с формулой (2.8) по итогам 1-й и 3-й, 2-й и 4-й вычисляем оценки дисперсии и средних квадратических отклонений величин X и Y :

$$s_x^2 = \frac{1}{16-1} \left(3458914 - \frac{7192^2}{16} \right) = 15074;$$

$$s_x = \sqrt{15074} = 122,8 \text{ МПа};$$

$$s_y^2 = \frac{1}{16-1} \left(434387 - \frac{2600^2}{16} \right) = 792,5;$$

$$s_y = \sqrt{792,5} = 28,2 \text{ МПа}.$$

Пользуясь итогами 1-й, 2-й и 5-й граф, по формулам (5.4) и (5.5) находим выборочный смешанный центральный момент второго порядка

$$m_{1/1} = \frac{1}{16-1} \left(1216240 - \frac{7192 \cdot 2600}{16} \right) = 3169.$$

Выборочный коэффициент корреляции вычисляем по формуле (5.3):

$$r = \frac{3169}{128,8 \cdot 28,2} = 0,915.$$

Для проверки нулевой гипотезы о равенстве генерального коэффициента корреляции пулю по формуле (5.25) находим

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,915}{1-0,915} = 1,537.$$

По формуле (5.27) вычисляем среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{16-3}} = 0,2774.$$

Задавшись уровнем значимости $\alpha = 0,05$ по табл. III приложения для вероятности $P = 1 - \alpha/2 = 0,975$ находим $z_{0,975} = 1,96$ и вычисляем $z_{0,975} \sigma_u = 1,96 \cdot 0,2774 = 0,5437$. В условиях рассматриваемого примера неравенство (5.28) не выполняется, так как $u = 1,537 > z_{0,975} \sigma_u = 0,5437$, т. е. нулевую гипотезу отбрасывают, что свидетельствует о наличии тесной корреляционной связи между пределом ограниченной выносливости и пределом прочности деформируемых алюминиевых сплавов.

К такому же выводу можно прийти, сопоставляя значения выборочного коэффициента корреляции $r = 0,915$ с табличным $r_{0,975} = 0,497$ для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $k = n - 2 = 14$ (табл. 5.2). В данном случае табличное значение меньше выборочного, значит нулевую гипотезу об отсутствии корреляции между пределом выносливости и пределом прочности отбрасывают.

Для построения доверительного интервала для коэффициента корреляции с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha = 0,9$ по табл. III приложения находим $z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,64$ и по формуле (5.29) вычисляем границы интервала для статистики a_u (5.26)

$$1,537 - 1,64 \cdot 0,2774 < a_u < 1,537 + 1,64 \cdot 0,2774$$

или

$$1,082 < a_u < 1,992.$$

Таким образом, в соответствии с обозначениями, принятыми в (5.30), $a_1 = 1,082$ и $a_2 = 1,992$, на основании которых по формуле (5.31) находим границы интервала для коэффициента корреляции. В условиях рассматриваемого примера $r_1 = 0,794$ и $r_2 = 0,963$, т. е. $0,794 < r < 0,963$.

Пример 5.2. Произвести оценку коэффициента корреляции между пределом ограниченной выносливости при изгибе с вращением образцов на базе 10^7 циклов ($Y = \sigma_{\text{вн}}$) и пределом прочности ($X = \sigma_{\text{вн}}$) по результатам испытаний 100 деформируемых алюминиевых сплавов при альтернативной гипотезе $\rho \neq 0$. Построить 90 %-ный доверительный интервал для коэффициента корреляции.

Результаты испытаний приведены в корреляционной табл. 5.4, часть из которых использована в примере 5.1.

Диапазон изменения X разбит на 10 равных интервалов длиной $\Delta x = 40$ МПа. Диапазон изменения Y разбит также на 10 равных интервалов длиной $\Delta y = 10$ МПа. Последовательность необходимых вычислений показана в табл. 5.5, где x_i и y_j представляют значения соответствующей характеристики в серединах интервалов.

В рассматриваемом примере в соответствии с формулой (5.7) смешанный центральный момент второго порядка

$$m_{1/1} = \frac{1}{99} \left(711600 - \frac{43800 \cdot 15840}{100} \right) = 1887.$$

Средние квадратические отклонения пределов прочности и выносливости в соответствии с формулами (5.8) и (5.9) составляют:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{99} \left(20206400 - \frac{43800^2}{100} \right)} = 101,6 \text{ МПа};$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{99} \left(2543500 - \frac{15840^2}{100} \right)} = 21,1 \text{ МПа}.$$

Тогда в соответствии с формулой (5.3) выборочный коэффициент корреляции

$$r = \frac{1887}{101,6 \cdot 21,1} = 0,880.$$

Для проверки нулевой гипотезы $\rho = 0$ по формуле (5.25) находим

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0,880}{1-0,880} = 1,376.$$

По формуле (5.27) вычисляем среднее квадратическое отклонение статистики u :

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{100-3}} = 0,1015.$$

5.4. Корреляционная таблица предела выносливости $y = \sigma_{-1}$ и предела прочности $x = \sigma_B$ (выборка большого объема)

Границы интервалов для y , МПа	Середина интервалов y_j , МПа	Границы интервалов для x , МПа									
		Середина интервалов x_i , МПа					$\sum_{i=1}^m n_i x_i$				
		260	320	360	400	440	480	520	560	600	640
115—125	120	1	1	3	2						2
125—135	130	2	6	5	4						13
135—145	140	1	10	4	3	2	3	4	3	1	20
145—155	150		1	2	1	6	4	5	3	1	10
155—165	160			1	1	2	4	5	1	1	16
165—175	170				1	1	1	5	1	1	17
175—185	180					1	1	1	5	1	10
185—195	190						1	1	5	1	9
195—205	200							1	1	1	5
205—215	210								1	1	2
$n_i = \sum_{j=1}^k n_{ij}$		4	18	15	11	9	15	5	8	4	100
$\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j$		520	2450	2180	1600	1780	1530	2580	880	510	780
$n_i = \sum_{j=1}^k n_{ij}$											43 800

Связь между случайными величинами

Задавшись уровнем значимости $\alpha = 0,05$ по табл. III приложения для вероятности $P = 1 - \alpha/2 = 0,975$ находим $z_{0,975} = 1,96$ и вычисляем $z_{0,975} \sigma_u = 1,96 \cdot 0,1015 = 0,1989$. В условиях рассматриваемого примера неравенство (5.28) не выполняется в связи с тем, что $u = 1,376 > z_{0,975} \sigma_u = 0,1989$, т. е. нулевую гипотезу отвергаем.

К аналогичному выводу приходят при сопоставлении значения выборочного коэффициента корреляции $r = 0,880$ с табличным значением $r_{0,975} = 0,197$ для принятого уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $k = 98$ (см. табл. 5.2).

При построении доверительного интервала для коэффициента корреляции с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha = 0,9$ по табл. III приложения определяем $z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,64$ и по формуле (5.29) находим границы интервала для статистики a_u (5.26):

$$1,376 - 1,64 \cdot 0,1015 < a_u < 1,376 + 1,64 \cdot 0,1015$$

или

$$1,210 < a_u < 1,542.$$

В соответствии с принятыми в формуле (5.30) обозначениями имеем $u_1 = 1,210$ и $u_2 = 1,542$. По этим величинам на основании формулы (5.31) находим доверительные границы для коэффициента корреляции.

5.5. Результаты вычислений коэффициента корреляции (выборка большого объема)

i	y_j	n_{ij}	$\sum_{i=1}^m n_i x_i$	$n_{ij} y_j$	$n_{ij} y_j^2$	$y_j \sum_{i=1}^m n_i x_i$	$\left(\sum_{i=1}^m n_i x_i \right)^2$	$\frac{\left(\sum_{i=1}^m n_i x_i \right)^2}{n_{ij}}$
$k = 10$	120	2	600	240	28 800	72 000	360 000	180 000
	130	13	4 360	1 690	219 700	566 800	19 009 600	1 462 277
	140	20	6 880	2 800	392 000	963 200	47 334 400	2 366 720
	150	10	3 840	1 500	225 000	576 000	14 745 600	1 474 560
	160	16	7 280	2 560	409 600	1 164 800	52 998 400	3 312 400
	170	17	8 440	2 890	491 300	1 434 800	71 233 600	4 190 212
	180	10	5 320	1 800	324 000	957 600	28 408 900	2 840 890
	190	9	5 200	1 710	324 900	988 000	27 040 000	3 004 444
	200	1	640	200	40 000	128 000	409 600	409 600
	210	2	1 240	420	88 200	260 400	1 537 600	768 800
Сумма		100	43 800	15 810	2 543 500	7 111 600		20 009 903
i	x_i	n_i	$\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$x_i \sum_{j=1}^k n_{ij} y_j$	$\left(\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j \right)^2$	$\frac{\left(\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j \right)^2}{n_i}$
$m = 10$	280	4	520	1 120	313 600	145 600	270 400	67 600
	320	18	2 450	5 760	1 843 200	784 000	6 002 500	333 472
	360	15	2 180	5 400	1 944 000	784 800	4 752 400	316 827
	400	11	1 600	4 400	1 760 000	640 000	2 560 000	232 727
	440	11	1 780	4 840	2 129 600	783 200	3 168 400	288 036
	480	9	1 530	4 320	2 073 600	734 400	2 340 900	260 100
	520	15	2 580	7 800	4 056 000	1 341 600	6 656 400	443 760
	560	5	880	2 800	1 568 000	492 800	774 400	154 880
	600	8	510	4 800	2 880 000	906 000	2 280 100	285 012
	640	4	780	2 560	1 638 400	499 200	608 400	152 100
Сумма		100	15 810	43 800	20 206 400	7 111 600		2 534 514

В рассматриваемом примере $r_1 = 0,837$ и $r_2 = 0,912$, т. е. $0,837 < \rho < 0,912$.

Пример 5.3. Проверить нулевую гипотезу о незначимости различия между коэффициентами корреляции, вычисленными по данным примеров 5.1 и 5.2 при альтернативной гипотезе $\rho_1 \neq \rho_2$.

По формуле (5.25) находим $u_1 = 1,537$ для $r_1 = 0,915$ и $u_2 = 1,376$ для $r_2 = 0,880$.

По формуле (5.33) определяем величину

$$z = \frac{1,537 - 1,376}{\sqrt{\frac{1}{16-3} + \frac{1}{100-3}}} = 0,545,$$

которая оказывается меньше теоретического значения $z_{1-\alpha/2} = 1,96$, найденного по табл. 111 приложения для уровня значимости $\alpha = 0,05$. Это значит, что оба коэффициента корреляции характеризуют выборки, взятые из общей совокупности.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МЕРА СВЯЗИ. КОЭФФИЦИЕНТ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СПИРМЕНА

В ряде практических задач возникает потребность исследования тесноты связи между двумя случайными величинами (характеристики механических свойств, уровни конструкционных, технологических, эксплуатационных факторов и т. д.), одна либо обе из которых не имеют нормального распределения или о законе распределения отсутствует сколько-нибудь надежная информация. Используемая в этих случаях методика, базирующаяся на нормальному распределении исследуемых величин, содержит в себе неопределенность и может привести к неправильным решениям.

Решение подобных задач может быть осуществлено с помощью непараметрического коэффициента ранговой корреляции Спирмена. При вычислении коэффициента ранговой корреляции каждую из двух совокупностей располагают в виде вариационного ряда (2.58) с присвоением каждому члену ряда соответствующего порядкового номера (ранга). Одинаковым значениям ряда присваивают среднее ранговое число. Затем находят разность в рангах d_i для каждой пары из n наблюдений над случайными величинами и вычисляют коэффициент ранговой корреляции Спирмена

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n}. \quad (5.34)$$

Диапазон изменения рангового коэффициента корреляции составляет $-1 \leq r_S \leq 1$. С увеличением объема выборки r_S стремится к ρ_S , причем всегда $\rho_S \leq \rho$, но разность между ними не превышает 0,018 [8].

Проверка нулевой гипотезы $\rho_S = 0$ при альтернативной $\rho_S \neq 0$ осуществляется с помощью двустороннего критерия путем сравнения вычисленного по формуле (5.34) коэффициента r_S с критическим значением, взятым из табл. 5.6 для выбранного уровня значимости α и числа пар наблюдений n .

При выполнении неравенства

$$|r_S| \leq r_{S(1-\alpha/2)} \quad (5.35)$$

нулевую гипотезу не отвергают. В противном случае нулевую гипотезу бракуют.

При альтернативной гипотезе $\rho_S > 0$ или $\rho_S < 0$ используют односторонний критерий. В этом случае критические значения, приведенные в табл. 5.6, соответствуют уровню значимости $\alpha/2$.

При $n > 30$ нулевую гипотезу проверяют с помощью t -распределения (2.42). В этом случае вычисляют статистику

$$t = \frac{r_S}{\sqrt{1 - r_S^2}} \sqrt{n - 2}, \quad (5.36)$$

имеющую распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы, и сравнивают с критическим значением $t_{\alpha/2}$, взятым из табл. V приложения.

5.6. Критические значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена

n	Уровень значимости *			n	Уровень значимости *		
	0,1/0,05	0,05/0,025	0,01/0,005		0,1/0,05	0,05/0,025	0,01/0,005
5	0,800	0,900	—	18	0,399	0,472	0,598
6	0,771	0,829	0,943	19	0,389	0,458	0,582
7	0,679	0,745	0,893	20	0,379	0,445	0,568
8	0,595	0,690	0,857	21	0,369	0,435	0,555
9	0,583	0,663	0,817	22	0,360	0,424	0,543
10	0,552	0,636	0,782	23	0,352	0,415	0,531
11	0,527	0,609	0,754	24	0,344	0,406	0,520
12	0,496	0,580	0,727	25	0,336	0,398	0,510
13	0,478	0,555	0,698	26	0,330	0,389	0,500
14	0,459	0,534	0,675	27	0,324	0,383	0,491
15	0,443	0,518	0,654	28	0,317	0,375	0,483
16	0,427	0,500	0,632	29	0,311	0,368	0,474
17	0,412	0,485	0,615	30	0,306	0,362	0,466

* В числителе — для двустороннего критерия, в знаменателе — для одностороннего.

Если выполняется условие $|t| \leq t_{\alpha/2}$, то нулевую гипотезу $\rho_S = 0$ принимают. Как и в случае (5.35), при альтернативной гипотезе $\rho_S \neq 0$ используют двусторонний критерий, а при $\rho_S > 0$ или $\rho_S < 0$ — односторонний.

Преобразование (5.36) дает удовлетворительные результаты для $n \geq 10$.

Если в вариационных рядах изучаемых случайных величин встречаются члены ряда с одинаковыми ранговыми числами, то формулу (5.34) следует скорректировать:

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{(n^3 - n) - (T_x + T_y)}, \quad (5.37)$$

$$T_x = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (t_{xj}^3 - t_{xj}), \quad T_y = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m (t_{yv}^3 - t_{yv}),$$

где k и m — число групп с одинаковыми ранговыми числами в вариационных рядах величин соответственно x и y ; t_{xj} и t_{yv} — число членов вариационного ряда в каждой из k и m группах.

Ранговый критерий может быть использован и применительно к нормально распределенным величинам, однако его эффективность в этом случае несколько ниже чем у критерия (5.23) и (5.28).

Пример 5.4. По условиям примера 5.1 проверить нулевую гипотезу о наличии зависимости предела выносливости алюминиевых сплавов от их предела прочности, использовать двусторонний критерий (5.35) для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

Последовательность вычисления рангового коэффициента корреляции показана в табл. 5.7. 3-я графа, где приведены ранги величины x , полностью совпадают с 1-й графикой, в вариационном ряду значений предела прочности сплавов отсутствуют одинаковые числа. В 5-й графике приведены ранговые числа величины y , причем для одинаковых значений предела выносливости сплавов присваивались одинаковые ранговые числа, равные средним арифметическим. Например, сплавы № 1 и № 4 имели наименьший предел выносливости, равный $\sigma_{-1} = 130$ МПа. В вариационном ряду (2.58) эти значения предела выносливости имели номера 1 и 2, в 5-й графике указанным значениям присвоен одинаковый ранг $\frac{1+2}{2} = 1,5$.

В связи с отсутствием в 3-й графике одинаковых значений величина $k = 0$ и, следовательно, $T_x = 0$.

В 5-й графике три группы сплавов (№ 1 и № 4, № 3 и № 5, № 7 и № 8) имеют равные ранговые числа, значит $m = 3$ и $t_{y1} = t_{y2} = t_{y3} = 2$.

5.7. Результаты вычислений рангового коэффициента корреляции Спирмена между пределом выносливости и пределом прочности алюминиевых сплавов ($n = 16$)

№ по пор.	$x_i = \sigma_{B_i}$, МПа	r_x	$y_i = \sigma_{-1_i}$, МПа	r_y	$d = r_x - r_y$	d^2
1	2	3	4	5	6	7
1	293	1	130	1,5	-0,5	0,25
2	311	2	136	5	-3	9
3	329	3	135	3,5	-0,5	0,25
4	333	4	130	1,5	+2,5	6,25
5	342	5	135	3,5	+1,5	2,25
6	352	6	142	6	0	0
7	367	7	150	7,5	-0,5	0,25
8	393	8	150	7,5	+0,5	0,25
9	456	9	165	9	0	0
10	490	10	192	14	-4	16
11	529	11	171	11	0	0
12	566	12	209	15	-3	9
13	581	13	170	10	+3	9
14	599	14	182	12	+2	4
15	623	15	190	13	+2	4
16	628	16	213	16	0	0
$n = 16$		Сумма		0	60,5	

В соответствии с формулой (5.37)

$$T_y = \frac{1}{2} [(2^8 - 2) + (2^8 - 2) + (2^8 - 2)] = 9.$$

Значение рангового коэффициента корреляции в рассматриваемом случае подсчитываем по скорректированной формуле (5.37):

$$r_S = 1 - \frac{6 \cdot 60,5}{(16^8 - 16)} = 0,911.$$

По табл. 5.6 находим для $n = 16$ и $\alpha = 0,05$ критическое значение коэффициента ($r_{S,0,975} = 0,500$) и сравниваем с вычисленным r_S . Неравенство (5.35) не выполняется, значит, нулевую гипотезу об отсутствии зависимости предела выносливости сплава от его предела прочности отвергаем.

К аналогичному выводу приходим и при использовании критерия (5.28) (см. примеры 5.1 и 5.2).

ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Большинство задач, связанных с анализом характеристик механических свойств материала и элементов конструкции, решают в рамках линейной зависимости между изучаемыми величинами. При этом предполагают, что Y является случайной величиной, имеющей нормальное распределение, а X может быть и случайной и неслучайной величиной.

Если рассматриваемые величины являются зависимыми, то с изменением величины X в общем случае могут меняться оба параметра нормального распределения случайной величины Y , т. е.

$$a_{y/x} = f_1(x); \quad (5.38)$$

$$\sigma_{y/x}^2 = f_2(x). \quad (5.39)$$

Первую зависимость называют *уравнением линии регрессии*, а вторую — *скедастической зависимостью*.

Регрессионный анализ результатов испытаний предусматривает оценку параметров уравнения линии регрессии с учетом скедастической зависимости, а также

проверку гипотезы о соответствии выбранной функции (5.38) данным наблюдения, т. е. проверку гипотезы об адекватности выбранной математической модели.

Существуют две схемы регрессионного анализа: 1) обе переменных (и X и Y) являются случайными величинами, подчиняющимися двумерному нормальному закону распределения; 2) зависимая переменная Y является случайной нормально распределенной величиной, а значения независимой переменной X (аргумента) заданы точно, т. е. являются детерминированными величинами.

Схема анализа для случайной независимой величины. Если обе изучаемые величины являются случайными, то обычно регрессионному анализу предшествует корреляционный, на основании которого производят оценку средних значений, дисперсий и коэффициента корреляции ($\bar{x}, \bar{y}, s_x^2, s_y^2, r$). В этом случае уравнение *теоретической линии регрессии* обычно записывают в виде

$$M(Y/x) = a_{y/x} = \alpha + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}), \quad (5.40)$$

где $M(Y/x)$ — условное математическое ожидание величины Y при фиксированном значении $X = x$.

Оценкой теоретической линии является *эмпирическая линия регрессии*, уравнение которой имеет вид

$$Y = \bar{y} + r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) \quad (5.41)$$

или

$$y = a + bx, \quad (5.42)$$

где

$$b = r \frac{s_y}{s_x}; \quad (5.43)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (5.44)$$

Параметр b обычно называют *коэффициентом регрессии*.

Для большинства задач можно принять, что условная дисперсия величины Y не зависит от x , т. е. уравнение (5.39) имеет вид

$$\sigma_{y/x}^2 = f_2(x) = \text{const}. \quad (5.45)$$

В этом случае параметры \bar{x} и \bar{y} уравнения (5.41) могут быть определены по формулам (5.12)–(5.15). В качестве оценки условной дисперсии (5.45) используют выборочную дисперсию s_{xy}^2 , которую вычисляют путем осреднения выборочных условных дисперсий (5.17):

$$s_{y/x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) s_{y/x_i}^2}{n - m}, \quad (5.46)$$

где $n = \sum_{i=1}^m n_i$ — общее число испытаний.

Принятию условия (5.45) и, следовательно, использованию формул (5.46) должна предшествовать проверка однородности условных дисперсий (5.17). Для этого целесообразно применять критерий Бартлетта (с. 59).

Величина $s_{y/x} = \sqrt{s_{y/x}^2}$ используется также в качестве меры индивидуального рассеяния результатов наблюдений вокруг линии регрессии, т. е. в качестве основной ошибки определения случайной величины по уравнению эмпирической линии регрессии. Эту ошибку обычно обозначают через $\delta_y = s_{y/x}$ [см. формулу (5.64)].

В общем случае при анализе зависимости между двумя случайными величинами имеют место две линии регрессии — регрессия Y по X (5.38) и регрессия X по Y ,

$$a_{x/y} = f(y), \quad (5.47)$$

хотя практическое значение имеет, как правило, одна из них.

Уравнение эмпирической линии регрессии X по Y аналогично выражению (5.41):

$$X = \bar{x} + r \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y}) \quad (5.48)$$

или

$$X = a_1 + b_1 y, \quad (5.49)$$

где $b_1 = r \frac{s_x}{s_y}$; $a_1 = \bar{x} - b_1 \bar{y}$.

Оценку условной дисперсии вычисляют путем осреднения выборочных условных дисперсий (5.16):

$$s_{x/y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_{ij} - 1) s_{x/y_i}^2}{n - k}. \quad (5.50)$$

Предварительно необходимо произвести проверку однородности условных дисперсий с помощью критерия Бартлетта.

В общем случае линия регрессии Y на X не совпадает с линией регрессии X на Y . Обе линии пересекаются в точке с координатами \bar{x} и \bar{y} , а угол между ними тем больше, чем больше абсолютное значение коэффициента корреляции отличается от единицы. Когда $|r| = 1$, линии регрессии совпадают.

Важным элементом регрессионного анализа является проверка линейности зависимости между изучаемыми величинами. Это особенно актуально в тех случаях, когда возникает необходимость экстраполяции линии регрессии за область экспериментальных значений.

Критерий линейности при анализе зависимости между двумя случайными величинами строят с помощью корреляционных отношений

$$\eta_{Y/x} = \frac{\sigma_{\bar{y}/x}}{\sigma_y} \quad (5.51)$$

и

$$\eta_{X/y} = \frac{\sigma_{\bar{x}/y}}{\sigma_x}, \quad (5.52)$$

где σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения относительно общих средних значений; $\sigma_{\bar{x}/y}$ и $\sigma_{\bar{y}/x}$ — средние квадратические отклонения условных средних относительно общих средних.

Корреляционное отношение при криволинейной регрессии, как и коэффициент корреляции при линейной регрессии, характеризует тесноту группировки данных вокруг линии регрессии. Корреляционное отношение находится в пределах от нуля до единицы. Для некоррелированных величин $\eta_{X/y} = \eta_{Y/x} = 0$, в случае функциональной зависимости $\eta_{X/y} = \eta_{Y/x} = 1$.

Если корреляционная зависимость между двумя случайными величинами линейна, то корреляционные отношения равны абсолютному значению коэффициента корреляции:

$$\eta_{Y/x} = \eta_{X/y} = |\rho|. \quad (5.53)$$

Условие (5.53) используют в качестве критерия линейности корреляционной зависимости.

Критерий линейности по данным выборки проверяют путем сравнения эмпирических корреляционных отношений с выборочным коэффициентом корреляции. Если доверительный интервал для абсолютного значения коэффициента корреляции включает эмпирическое значение корреляционных отношений, то линейность регрессии подтверждается. Линейность корреляционной зависимости между двумя случайными величинами подтверждается в том случае, если разность между эмпирическими корреляционными отношениями и абсолютным значением выборочного коэффициента корреляции не превышает двух-трех величин среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции, т. е.

$$\hat{\eta}_{Y/x} - |r| \leq (2 - 3) s_r \quad (5.54)$$

или

$$\hat{\eta}_{X/y} - |r| \leq (2 - 3) s_r. \quad (5.55)$$

Эмпирические корреляционные отношения вычисляют по формулам

$$\hat{\eta}_{Y/x} = \frac{s_{\bar{y}/x}}{s_y}; \quad (5.56)$$

$$\hat{\eta}_{X/y} = \frac{s_{\bar{x}/y}}{s_x}, \quad (5.57)$$

где s_x и s_y — выборочные средние квадратические отклонения величин X и Y относительно общих средних, вычисляют по формулам (5.8) и (5.9); $s_{\bar{x}/y}$ и $s_{\bar{y}/x}$ — выборочные средние квадратические отклонения условных средних относительно общих средних, вычисляют по формулам

$$s_{\bar{x}/y} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_{ij} (\bar{x}_i - \bar{x})^2}; \quad (5.58)$$

$$s_{\bar{y}/x} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m n_{ti} (\bar{y}_i - \bar{y})^2} \quad (5.59)$$

или более удобно по формулам

$$s_{\bar{x}/y} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^k \frac{\left(\sum_{i=1}^m n_{ij} x_i \right)^2}{n_{ij}} - \frac{\left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m n_{ij} x_i \right)^2}{n} \right]}, \quad (5.60)$$

$$s_{\bar{y}/x} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\left(\sum_{j=1}^k n_{ij} y_j \right)^2}{n_{i.}} - \frac{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k n_{ij} y_j \right)^2}{n} \right]}. \quad (5.61)$$

Для оценки теоретической линии регрессии (5.40) можно построить доверительную область. С этой целью для ряда значений x по формулам (5.41) и (5.42) находят Y , а также оценку ее дисперсии

$$s_{Y/x}^2 = s_{y/x}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{(n-1) s_x^2} \right]. \quad (5.62)$$

5.8. Значения выборочных условных дисперсий предела выносливости деформированных алюминиевых сплавов

x_i , МПа	i	s_y^2/x_i	n_i	x_i , МПа	i	s_y^2/x_i	n_i
280	1	66,67	3	480	6	100,00	8
320	2	48,71	17	520	7	88,57	14
360	3	140,93	14	560	8	80,00	4
400	4	147,30	10	600	9	126,86	7
440	5	76,40	10	640	10	166,67	3

Далее, аналогично формуле (2.44) составляют доверительный интервал для a_y :

$$Y - s_{Y/x} t_{\alpha/2} < a_y < Y + s_{Y/x} t_{\alpha/2}, \quad (5.63)$$

где $k = n - 2$.

Мера индивидуального рассеяния вокруг линии регрессии, т. е. основная ошибка определения Y по уравнению (5.41),

$$\delta_y = \sqrt{s_y^2/x} = s_y \sqrt{(1-r)^2 \frac{n-1}{n-2}}. \quad (5.64)$$

Пример 5.5. Провести регрессионный анализ зависимости между пределом ограниченной выносливости Y и пределом прочности X деформируемых алюминиевых сплавов по данному примеру 5.2.

Решение начинаем с проверки однородности условных дисперсий величины Y , т. е. обоснования соотношения (5.45). Для этого по формуле (5.19) с помощью результатов вычислений, представленных в табл. 5.5, определяем значения выборочных условных дисперсий для каждого значения величины X (табл. 5.8).

Однородность условных дисперсий проверяем на основании критерия Бартлетта, т. е. по формуле (3.28) вычисляем значение χ^2 . В данном случае $\chi^2 = 6,35$. Критическое значение для $k = m - 1 = 9$ и уровня значимости $\alpha = 0,05$ составляет $\chi^2_{0,05} = 16,9$ (табл. VI приложения). Таким образом, $\chi^2 < \chi^2_{0,05}$, что дает основание принять нулевую гипотезу об однородности условных дисперсий предела выносливости в качестве рабочей. Осредненная выборочная условная дисперсия в соответствии с формулой (5.46) в рассматриваемом примере $s_y^2/x = 99,84$.

Далее вычисляем эмпирические корреляционные отношения, для этого по формулам (5.60) и (5.61) на основании результатов, приведенных в 4-й и 9-й графах табл. 5.5, определяем выборочные средние квадратические отклонения условных средних:

$$s_{\bar{x}/y} = \sqrt{\frac{1}{99} [20009903 - \frac{1}{100} 43800^2]} = 91,3 \text{ МПа};$$

$$s_{\bar{y}/x} = \sqrt{\frac{1}{99} [2534514 - \frac{1}{100} 15810^2]} = 18,8 \text{ МПа}.$$

Значения s_x и s_y вычислены в примере 5.2 ($s_x = 101,6$ МПа; $s_y = 21,1$ МПа). Тогда на основании формул (5.56) и (5.57)

$$\hat{r}_{X/Y} = 91,3/101,6 = 0,899; \hat{r}_{Y/X} = 18,8/21,1 = 0,891.$$

Эмпирические корреляционные отношения превышают выборочный коэффициент корреляции $r = 0,880$ на величину, меньшую среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции $s_r = 0,023$ (см. пример 5.2), т. е. выполняются условия (5.54) и (5.55) о линейности зависимости между пределом выносливости и пределом прочности для деформированных алюминиевых сплавов.

Проведенный анализ линейности дает возможность использовать в качестве уравнения эмпирической линии регрессии выражение (5.41), параметры которого частично определены в примере 5.2 ($r = 0,880$; $s_x = 101,6$; $s_y = 21,1$). Оставшиеся два параметра \bar{x} и \bar{y} вычисляем по формулам (5.12) и (5.13) по итогам 4-й графы табл. 5.6:

$$\bar{x} = \frac{43800}{100} = 438,0 \text{ МПа}, \bar{y} = \frac{15810}{100} = 158,1 \text{ МПа}$$

Уравнение эмпирической линии регрессии имеет вид

$$Y = 158,1 + 0,880 \frac{21,1}{101,6} (x - 438,0),$$

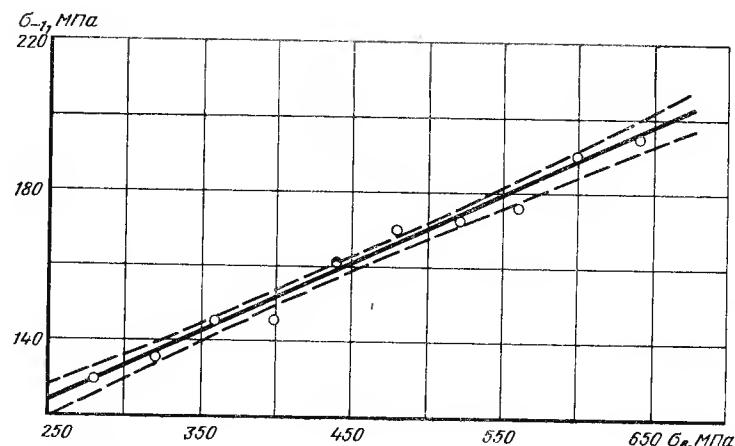


Рис. 5.1. Эмпирическая линия регрессии предела выносливости по пределу прочности деформированных алюминиевых сплавов и границы 95 %-ной доверительной области (штриховые линии)

5.9. Результаты расчета границ 95 %-ной доверительной области для линии регрессии, $(n-1) s_x^2 = 1022000$, $t_{\alpha/2} = 1,98$ для $\alpha = 0,05$ и $k = 98$

№ по пор.	x , МПа	$0,183x$	$Y + \frac{78,1}{0,183x}$	\bar{x}	$\bar{x} - x$	$(\bar{x} - x)^2$	$(\bar{x} - x)(\bar{x} - x - 1)$	$\frac{1}{(n-1)} s_x^2$	s_y/x	$s_{Y/X} t_{\alpha/2}$, к	$Y - s_{Y/X} t_{\alpha/2}$, к	$Y + s_{Y/X} t_{\alpha/2}$, к
1	250	45,75	123,85	-188	35 344	0,0356	4,45	2,11	4,18	119,7	128,0	
2	300	54,90	133,00	-138	19 044	0,0186	2,86	1,69	3,35	129,7	136,3	
3	350	64,05	142,15	-88	7 744	0,0076	1,75	1,32	2,62	139,5	144,8	
4	400	73,20	151,30	-38	1 444	0,0014	1,14	1,07	2,11	149,2	153,4	
5	$\bar{x} = 438$	80,15	158,25	0	0	0	0	1,0	1,98	156,3	160,2	
6	450	82,35	160,45	12	144	0,0001	1,01	1,01	1,98	158,5	162,4	
7	500	91,50	169,60	62	3 844	0,0038	1,37	1,17	2,32	167,3	171,9	
8	550	100,65	178,75	112	12 544	0,0123	2,22	1,49	2,95	175,8	181,7	
9	600	109,80	187,90	162	26 244	0,0257	3,56	1,89	3,74	184,2	191,6	
10	650	118,95	197,05	212	44 944	0,0440	5,39	2,32	4,60	192,5	201,6	

или окончательно

$$Y = 78,1 + 0,183x.$$

График этой зависимости приведен на рис. 5.1. Штриховой линией указаны границы 95 %-ной доверительной области для линии регрессии, точками — значения выборочных условных средних предела выносливости. Последовательность расчета границ доверительной области показана в табл. 5.9.

Итак, корреляционный и регрессионный анализ характеристик сопротивления усталостному и статическому разрушению деформированных алюминиевых сплавов показал, что между пределом выносливости при переменном изгибе на базе 10^7 циклов и пределом прочности существует линейная корреляционная зависимость ($0,837 < r < 0,912$)

$$\sigma_{-1} = 78,1 + 0,183\sigma_B.$$

Средняя квадратическая ошибка оценки предела выносливости на основании этого соотношения, вычисленная по формуле (5.63), составляет 15 МПа для всего диапазона изменения предела прочности. В связи с этим относительная средняя квадратическая ошибка оценки предела выносливости составляет 7–15 %.

При определении предела выносливости алюминиевых сплавов путем непосредственных усталостных испытаний указанная выше точность может быть обеспечена путем испытания 5–8 образцов.

Более полный статистический анализ показывает лучшее соответствие опытным данным степенного уравнения

$$\sigma_{-1} = 3,49\sigma_B^{0,630},$$

которое позволяет оценить предел выносливости со средней квадратической ошибкой, равной 8 %.

Существуют аналогичные формулы для сталей. Однако они не могут быть использованы для легких сплавов, так как приводят к дополнительным ошибкам в сторону завышения предела выносливости на 10–30 %.

При малом объеме экспериментальных данных, не позволяющем их группировать, линейность кривой регрессии проверяют графически. В связи с тем, что в этом случае каждому значению независимой случайной величины соответствует только одно значение зависимой величины, проверка постоянства условных дисперсий (5.45) при малом объеме наблюдений невозможна.

В качестве оценки условной дисперсии случайной величины Y , когда имеется n пар наблюдений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ и n невелико, может быть использована дисперсия наблюдения вокруг линии регрессии

$$s_{y/x}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2,$$

что равносильно соотношению

$$s_{y/x}^2 = s_y^2 (1 - r^2) \frac{n-1}{n-2}. \quad (5.65)$$

Пример 5.6. Провести регрессионный анализ результатов усталостных и статических испытаний по условиям примера 5.1.

В связи с малым объемом опытных данных проверку возможности использования линейной корреляционной зависимости производят графически, т. е. путем нанесения экспериментальных точек на график в координатах $x = \sigma_B$ и $y = \sigma_{-1}$ (рис. 5.2). Экспериментальные точки группируются около прямой. Следовательно, в качестве уравнения линии регрессии можно использовать уравнение (5.41).

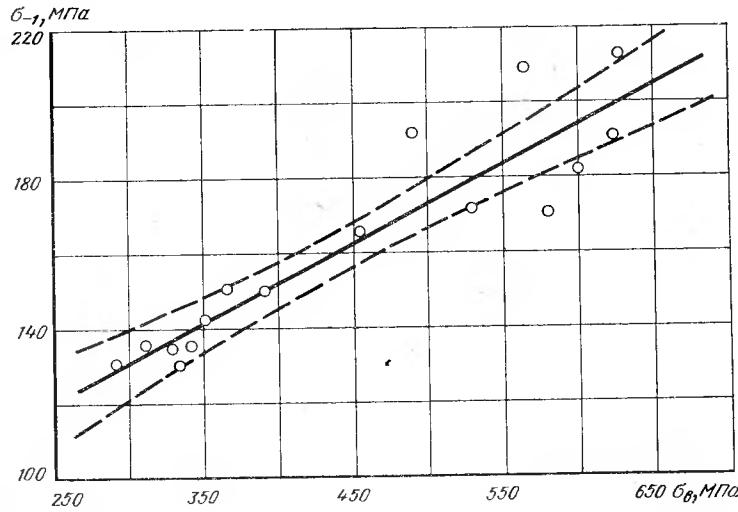


Рис. 5.2. Эмпирическая линия регрессии и границы 95 %-ной доверительной области для теоретической линии регрессии (штриховые линии)

Все параметры эмпирической линии регрессии определены в примере 5.1: $\bar{x} = 449,5$ МПа; $\bar{y} = 162,5$ МПа; $s_x = 122,8$ МПа; $s_y = 28,2$ МПа и $r = 0,915$. В связи с этим уравнение (5.41) принимает вид

$$Y = 162,0 + 0,915 \frac{28,2}{122,8} (x - 449,5)$$

или

$$Y = 67,6 + 0,210x.$$

Дисперсию оцениваем на основании формулы (5.65):

$$s_{y/x}^2 = \frac{16-1}{16-2} 792,5 (1 - 0,915^2) = 138,2,$$

а меру индивидуального рассеяния по формуле (5.64):

$$\delta_{\sigma_{-1}} = \sqrt{s_{y/x}^2} = \sqrt{138,2} = 11,8 \text{ МПа.}$$

Расчет границ 95 %-ной доверительной области для линии регрессии проводим аналогичным образом на основании формул (5.62) и (5.63) (см. рис. 5.2).

Схема анализа для детерминированной независимой величины. В большинстве случаев с помощью регрессионного анализа устанавливают связь между нормально распределенной случайной величиной и неслучайной, значения которой варьируются при планировании эксперимента.

При этом уравнение теоретической линии регрессии имеет вид

$$\eta = \alpha + \beta (x - \bar{x}). \quad (5.66)$$

Его оценкой является эмпирическая линия регрессии

$$Y = a + b (x - \bar{x}) \quad (5.67)$$

При оценке параметров уравнения линии регрессии учитывают возможность изменения условной дисперсии случайной величины Y с изменением уровня неслучайной величины. Предполагается, что условная дисперсия (5.39) величины Y , соответствующая данному значению x , обратно пропорциональна функции $\omega(x)$:

$$s_{y/x}^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{\omega(x)}, \quad (5.68)$$

которая устанавливается на основании опытных данных и может быть представлена как в аналитической, так и в графической форме.

Оценку параметров уравнения линии регрессии производят по формулам, вытекающим из метода наименьших квадратов:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i x_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}, \quad (5.69)$$

$$a = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}, \quad (5.70)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x}) \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.71)$$

где $\omega_i n_i$ — «веса» точек; m — число уровней неслучайной величины x ; n_i — число испытаний при данном значении x , $i = 1, 2, 3, \dots, m$; \bar{y}_i — выборочное условное среднее значение случайной величины Y :

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} \quad (5.72)$$

(здесь $j = 1, 2, 3, \dots, n_i$).

Линейность кривой регрессии проверяют с помощью дисперсионного отношения

$$F = s_1^2 / s_2^2, \quad (5.73)$$

где s_1^2 — дисперсия внутри системы (осредненная выборочная условная дисперсия),

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \omega_i (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m}; \quad (5.74)$$

s_2^2 — дисперсия вокруг эмпирической линии регрессии,

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (\bar{y}_i - Y_i)^2}{m - 2}. \quad (5.75)$$

Если дисперсионное отношение не превышает критического значения для уровня значимости α и чисел степеней свободы $k_1 = \sum_{i=1}^m n_i - m$ и $k_2 = m - 2$ (табл. VIII приложения), то наличие линейной зависимости (5.66) и (5.67) подтверждается.

В этом случае дисперсии объединяются в общую оценку

$$s^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^m n_i - m \right) s_1^2 + (m - 2) s_2^2}{\left(\sum_{i=1}^m n_i - m \right) + (m - 2)} \quad (5.76)$$

или

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \omega_j (y_{ij} - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^m n_i - 2}, \quad (5.77)$$

с помощью которой определяются оценки дисперсии параметров уравнения эмпирической линии регрессии a и b , а также величины Y . Указанные величины рассчитываются по формулам

$$s_a^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}; \quad (5.78)$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x})^2}; \quad (5.79)$$

$$s_Y^2 = s_a^2 + s_b^2 (x - \bar{x})^2. \quad (5.80)$$

Нулевую гипотезу о наличии связи между исследуемыми величинами проверяют с помощью критерия Стьюдента, для этого вычисляют

$$t = b / s_b \quad (5.81)$$

и сопоставляют с табличным значением $t_{\alpha/2, k}$ (табл. V приложения), найденным для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = \sum_{i=1}^m n_i - 2$. Если $|t| \geq t_{\alpha/2, k}$, то нулевую гипотезу принимают.

Доверительные границы для параметров уравнения теоретической линии регрессии и генерального среднего значения вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} a - t_{\alpha/2, k} s_a &< a < a + t_{\alpha/2, k} s_a, \\ b - t_{\alpha/2, k} s_b &< b < b + t_{\alpha/2, k} s_b, \\ Y - t_{\alpha/2, k} s_Y &< Y < Y + t_{\alpha/2, k} s_Y. \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

В случае независимости условных дисперсий случайной величины от уровня неслучайной величины, что можно обнаружить с помощью критериев Кохрена, Хартлея или Бартлетта, в формулах (5.69)–(5.71) и (5.74)–(5.79) принимают $\omega_i = 1$.

В ряде экспериментов при каждом значении неслучайной величины производят лишь одно испытание ($n_i = 1$). В этих случаях линейность кривой регрессии проверяют графически. Оценку параметров линии регрессии производят по формулам (5.69)–(5.71) для $\omega_i n_i = 1$.

В качестве оценки для дисперсии используют дисперсию вокруг эмпирической линии регрессии:

$$s^2 = s_2^2 = \frac{1}{m - 2} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{Y}_i)^2. \quad (5.83)$$

Дальнейший анализ производят с помощью соотношений (5.78)–(5.82) аналогично изложенному.

Пример 5.7. Установить зависимость предела прочности болтов из стекловолокниста от температуры при прессовании (см. пример 4.1). Результаты испытаний после предварительной обработки приведены в табл. 5.10.

5.10. Результаты механических испытаний болтов $\varnothing 14$ мм из стекловолокниста

i	$x_i = t^\circ C$	n_i	$\bar{y}_i = \sigma_B$, МПа	$s_{1i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n_i - 1}$
$m = 4$	135	20	106,6	801
	145	20	86,3	398
	155	20	83,8	382
	165	20	66,1	320
Сумма	600	80	342,8	1901

5.11. Регрессионный анализ результатов испытаний на прочность болтов $\varnothing 14$ мм из стекловолокниста ($t_{\alpha/2} = 1,99$ для $\alpha = 0,05$ и $k = 78$)

Вначале проверяем гипотезу об однородности условных дисперсий, оценки которых приведены в последней графе табл. 5.10. В связи с постоянством объема испытаний при каждом значении проверку производим с помощью критерия Кочреана.

$$G_{\max} = 801/1901 = 0,421$$

что лишь несколько ниже критического значения $G_{0,05} = 0,422$ (табл. X приложения). В этом сомнительном случае целесообразно проверить нулевую гипотезу и по другому критерию.

В соответствии с формулой (3.24) $F = 801/320 = 2,50$ при критическом значении $F_{\max, 0,05} = 3,43$ (см. табл. IX приложения). Так как неравенство (3.25) выполняется, то нулевую гипотезу об однородности дисперсий не отвергают.

В связи с принятием гипотезы об однородности условных дисперсий принимаем $\omega_i = 1$. Тогда на основании формулы (5.74) для $n_1 = n_2 = 20$ получаем

$$s_1^2 = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^m s_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m} = \frac{19 \cdot 1901}{76} = 475,2.$$

Последовательность дальнейших вычислений показана в табл. 5.11. Уравнение эмпирической линии регрессии имеет вид

$$Y = 85,7 - 1,24(x - 150)$$

$$Y = 271,2 - 1,24x$$

Для проверки возможности использования линейной зависимости предела прочности от температуры при прессовании болтов вычисляем дисперсионное отношение (5.73)

$$F = 561,4 / 475,2 = 1,18.$$

Критическое значение этого отношения для $\alpha = 0,05$, $k_1 = 2$ и $k_2 = 76$ составляет 3.12 (табл. VIII приложения), что подтверждает существование линейной зависимости (5.66). Объединяя дисперсии s_1^2 и s_2^2 по формуле (5.76), находим общую оценку условной дисперсии

$$s^2 = \frac{76 \cdot 475,2 + 2 \cdot 561,4}{76 + 2} = 477,4.$$

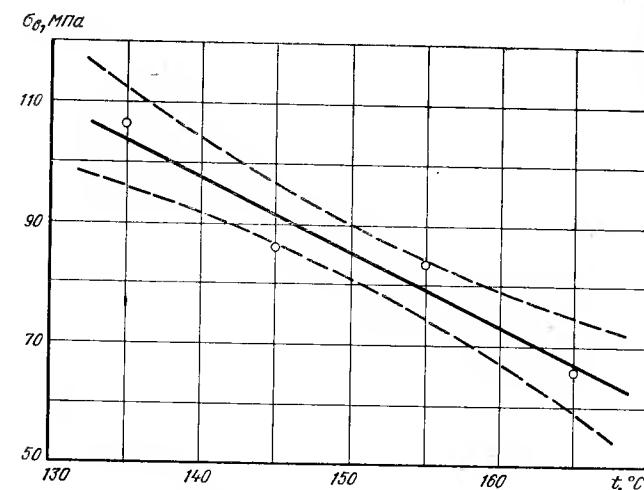


Рис. 5.3. Эмпирическая линия регрессии предела прочности болтов из стекловолокнистого композита и границы 95 %-ной доверительной области (штриховые линии)

По формулам (5.78) и (5.79) производим оценку дисперсий параметров линии первоэлемента

$$s_a^2 = \frac{477,4}{80} = 5,968;$$

$$s_b^2 = \frac{477,4}{20\cdot 500} = 0,04774.$$

Проверяем нулевую гипотезу о наличии зависимости предела прочности болтов от температуры при прессовании, для чего вычисляем по формуле (5.81)

$$t = \frac{-1,24}{\sqrt{0,04774}} = -5,68.$$

Сопоставив вычисленное значение с табличным для $k = 78$ (табл. V приложения), можно сделать заключение о значимом влиянии температуры прессования на прочность болтов из стекловолокнистого.

Эмпирическая линия регрессии и границы 95 %-ной доверительной области приведены на рис. 5.3.

Пример линейного регрессионного анализа для случая переменной условной дисперсии (5.39) и (5.68) рассмотрен в главе 6.

Часто при анализе результатов механических испытаний линейная зависимость между исследуемыми величинами не подтверждается, так как не выполняются условия (5.54) и (5.55), хотя корреляционная связь и имеет место, о чем, в частности, свидетельствуют высокие значения эмпирических корреляционных отношений. В таких случаях между величинами существует *нелинейная корреляционная зависимость*.

Подобные ситуации встречаются при анализе результатов усталостных, длительных статических испытаний, статических испытаний в широком интервале температур и т. д.

Во многих случаях представляется возможным путем простых преобразований представить уравнение кривой регрессии как линейное соотношение между преобразованными величинами, к которым применим изложенный аппарат линейного корреляционного и регрессионного анализа.

5.12. Приведение к линейному виду функций одной переменной

Вид функции	Замена переменных		Выражение для параметров	
	y	x	a	b
$u = \alpha + \frac{\beta}{v}$	u	$\frac{1}{v}$	α	β
$u = \frac{\alpha}{\beta + v}$	$\frac{1}{u}$	v	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$
$u = \frac{\alpha v}{\beta + v}$	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{v}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$
$u = \frac{v}{\alpha + \beta v}$	$\frac{v}{u}$	v	α	β
$u = \alpha \cdot \beta^v$	$\lg u$	v	$\lg \alpha$	$\lg \beta$
$u = \alpha v^\beta$	$\lg u$	$\lg v$	$\lg \alpha$	β
$u = \alpha v^\beta + \gamma$	$\lg(u - \gamma)$	$\lg v$	$\lg \alpha$	β
$u = \alpha e^{\beta v}$	$\ln u$	v	$\ln \alpha$	β
$u = \alpha e^{\frac{\beta}{v}}$	$\ln u$	$\frac{1}{v}$	$\ln \alpha$	β
$u = \alpha + \beta v^n$ где n известно	u	v^n	α	β

Например, зависимость между исследуемыми величинами описывается степенной функцией $u = \beta v^\alpha$, тогда путем логарифмирования и замены переменных $y = \lg u$ и $x = \lg v$ приходят к линейной функции $y = a + bx$, где $a = \lg \beta$, $b = \alpha$.

После определения параметров y (x) путем обратных преобразований получают уравнение кривой регрессии u (v). Аналогичным путем строят границы доверительной области для теоретической кривой регрессии. С целью подтверждения правильности выбора вида функциональной зависимости u от v производят проверку гипотезы линейности регрессии y (x) путем вычисления корреляционных отношений и составления условий (5.54) и (5.55) или с помощью дисперсионного отношения (5.73).

Вид функции, описывающей зависимость между рассматриваемыми величинами, устанавливается на основании графического анализа опытных данных с учетом профессиональных сведений относительно физической сущности изучаемых процессов.

В табл. 5.12 приведен ряд нелинейных функций и их линеаризирующие преобразования, приводящие к уравнению $y = a + bx$.

ГЛАВА 6

ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ
И МЕТОДИКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Испытания на усталость относят к прямым испытаниям, если их конечной целью является определение долговечности. В случае же построения кривой усталости и дальнейшего определения на ее основании предела выносливости эти испытания являются косвенными.

Испытания на усталость характерен повышенный разброс результатов, что обусловлено большим числом различных факторов, влияющих на сопротивление усталостному разрушению. Основными факторами, определяющими рассеяние результатов испытаний на усталость, являются макро- и микронеоднородность структуры конструкционных материалов, неоднородность качества поверхности образцов и элементов конструкций, колебания в условиях испытаний (среда, температура и пр.). Разброс характеристик сопротивления усталостному разрушению зависит также от состояния испытательного оборудования и квалификации обслуживающего персонала, однако при соблюдении основных требований к постановке и проведению испытаний влияние последних факторов на рассеяние результатов оказывается не значительным.

В связи с большой длительностью и высокой стоимостью испытаний на усталость вопросы планирования приобретают большую актуальность. При косвенных испытаниях планирование предусматривает не только определение необходимого объема серии образцов или элементов конструкций для оценки усталостных свойств с заданной степенью точности, но и оптимальное распределение этой серии на отдельные группы, испытываемые при различных уровнях нагрузки, и определение рационального числа групп. В качестве критериев при планировании испытаний на усталость, помимо точности оценки характеристик сопротивления усталости, можно принимать также стоимость и полное время испытаний. Часто возникает необходимость одновременного использования нескольких критериев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ
ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА УСТАЛОСТЬ

Статистическая обработка по долговечности может иметь первичный характер при последующем построении кривых усталости равной вероятности и определении соответствующих значений предела выносливости. Однако при испытании на одном-двух уровнях напряжения для обоснования расчетных и нормативных характеристик по ресурсу, для оценки влияния технологических и других факторов обработка по долговечности носит окончательный характер.

Рассмотренная ниже методика статистической обработки по долговечности предусматривает либо окончательное разрушение образцов или элементов конструкций, либо появление макротрешины усталости определенного размера.

Функции распределения долговечности при действии переменных нагрузок. Исследования закономерностей рассеяния характеристик сопротивления усталостному разрушению легких сплавов показали, что долговечность при постоянном уровне максимального напряжения цикла и предел ограниченной выносливости на заданной базе испытания имеют как нижнюю, так и верхнюю границы [28]. Верхняя граница долговечности легких сплавов, определяемая как параметр распределения, на несколько порядков превышает наблюдаемое при испытании число циклов до разрушения. Нижняя граница долговечности существенно отличается от нуля. Поэтому можно считать, что долговечность при испытаниях на усталость легких сплавов имеет

непрерывное распределение в интервале от нижней границы N_0 до бесконечности (параметр N_0 называют обычно порогом чувствительности по циклам).

Анализ результатов массовых испытаний показал, что случайная величина $x = \lg(N - N_0)$ распределится по нормальному закону [28].

Основным затруднением при использовании нормального закона распределения величины $x = \lg(N - N_0)$ для оценки ресурса натурных элементов конструкций является сложность определения порога чувствительности N_0 . Оценка N_0 по результатам натурных испытаний затруднена вследствие большого объема испытаний. Определение порога чувствительности по результатам массовых испытаний лабораторных образцов реально лишь при сравнительно высоких напряжениях. При относительно низких напряжениях, характерных для работы натурных элементов конструкций, подобная оценка затруднительна из-за большой длительности испытаний образцов.

В связи с этим возникает необходимость применения более простых распределений, для которых легче оцениваются параметры. В качестве такого распределения широко используют нормальный закон для случайной величины $x = \lg N$, который также называют логарифмически нормальным распределением. Дисперсия величины $x = \lg N$ для образцов и элементов конструкций, как показали результаты многочисленных исследований, увеличивается с ростом средней долговечности или со снижением уровня максимального напряжения цикла.

Для алюминиевых и титановых сплавов при использовании гипотезы о независимости коэффициента вариации предела ограниченной выносливости $\gamma_{\sigma-1}$ от базового числа циклов и уравнений кривых усталости для вероятности разрушения $P = 0,5$ в виде

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a(\lg N)^{-\alpha} \quad (6.1)$$

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + bN^{-\beta}, \quad (6.2)$$

зависимости среднего квадратического отклонения $\sigma_{\lg N}$ величины $\lg N$ от среднего значения логарифма долговечности $a_{\lg N}$ и амплитуды напряжений σ_a при симметричном цикле выражаются следующими формулами:

$$\sigma_{\lg N} = \frac{\gamma_{\sigma-1}}{\alpha} \left(a_{\lg N} + \frac{\sigma_{-1}}{a} a_{\lg N}^{\alpha+1} \right); \quad (6.3)$$

$$\sigma_{\lg N} = \frac{\gamma_{\sigma-1} a^{1/\alpha} \sigma_a}{\alpha (\sigma_a - \sigma_{-1})^{1+1/\alpha}} \quad (6.4)$$

или

$$\sigma_{\lg N} = \frac{\gamma_{\sigma-1}}{2,3\beta} \left(1 + \frac{\sigma_{-1}}{b} e^{2,3\beta a_{\lg N}} \right), \quad (6.5)$$

$$\sigma_{\lg N} = \frac{\gamma_{\sigma-1}}{2,3\beta} \frac{\sigma_a}{\sigma_a - \sigma_{-1}} \quad (6.6)$$

соответственно для уравнений кривых усталости (6.1) или (6.2).

В формулах (6.1)–(6.6) σ_{-1} представляет собой предел неограниченной выносливости при симметричном цикле, а α , β , a , b — параметры уравнений кривых усталости.

На рис. 6.1 и 6.2 сопоставлены опытные значения среднего квадратического отклонения логарифма долговечности с результатами вычислений по формулам (6.3)–(6.6). Опытные значения $\sigma_{\lg N}$ определяли по результатам испытаний на каждом уровне амплитуды цикла напряжений от 15 до 600 образцов. Всего было испытано 3480 образцов 44 технологических вариантов сплава типа АВ. Как следует из приведенных графиков, уравнения (6.3)–(6.6) достаточно хорошо отображают зависимость рассеяния долговечности от уровня амплитуды напряжения и среднего значения логарифма долговечности и практически совпадают с кривой 4 (см. рис. 6.2), параметры которой определялись методом наименьших квадратов.

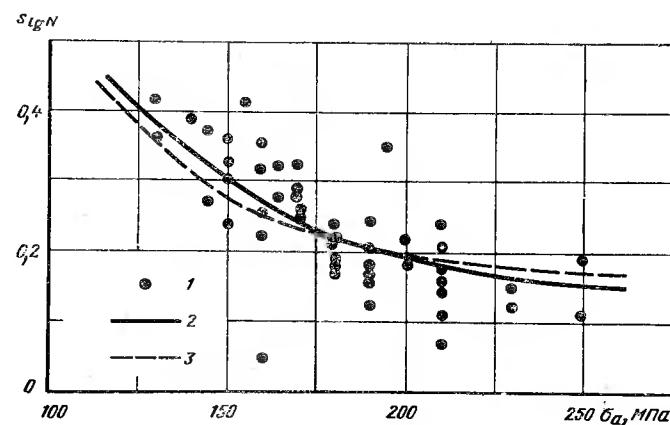


Рис. 6.1. Зависимости среднего квадратического отклонения логарифма долговечности образцов из сплавов типа АВ от уровня напряжения:

1 — эксперимент; 2 — расчет по уравнению (6.4); 3 — расчет по уравнению (6.6)

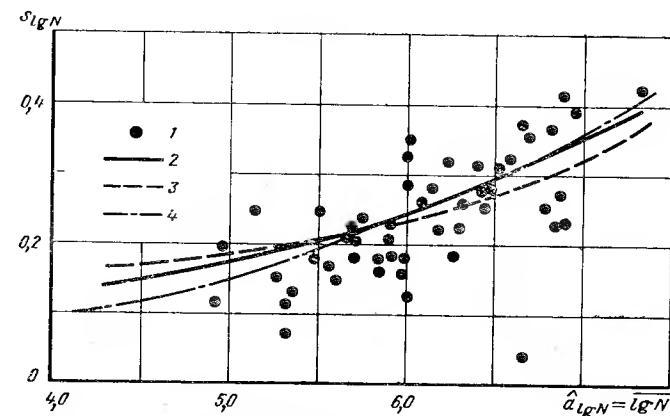


Рис. 6.2. Зависимость среднего квадратического отклонения логарифма долговечности образцов из сплавов типа АВ от среднего значения логарифма числа циклов до разрушения:

1 — эксперимент; 2 — расчет по уравнению (6.3); 3 — расчет по уравнению (6.5); 4 — расчет методом наименьших квадратов

Приведенные выше зависимости подвергали экспериментальной проверке и для других марок алюминиевых сплавов (АД33, В95, Д16 и др.). Для всех случаев соответствие опытным данным вполне удовлетворительно. Несколько лучшее соответствие имеют уравнения (6.3) и (6.4).

Методика статистической обработки и определение объема испытаний. Результаты испытаний серии из n образцов при уровне амплитуды напряжения σ_a располагаются в вариационный ряд в порядке возрастания долговечности. Подобные ряды для образцов из алюминиевого сплава В95, испытанных на усталость при шести уровнях напряжения, приведены в табл. 6.1.

6.1. Вариационные ряды числа циклов до разрушения образцов из сплава В95

i	σ_a , МПа					
	330	285	254	228	210	190
	Число циклов до разрушения					
	$N \cdot 10^{-4}$	$N \cdot 10^{-6}$	$N \cdot 10^{-5}$	$N \cdot 10^{-6}$	$N \cdot 10^{-6}$	$N \cdot 10^{-6}$
1	2,18	0,701	1,63	3,44	0,982	4,63
2	2,29	0,740	2,07	4,58	1,97	6,90
3	2,58	0,809	2,15	4,61	2,20	9,57
4	2,80	0,910	2,27	5,06	2,35	10,0 *
5	2,81	1,03	2,30	6,21	3,19	10,0 *
6	2,91	1,09	2,54	8,40	3,66	10,0 *
7	2,97	1,17	2,56	8,98	4,76	10,0 *
8	3,05	1,18	2,62	9,47	4,98	10,0 *
9	3,05	1,35	2,64	10,4	5,40	10,0 *
10	3,27	1,42	2,69	15,4	6,53	10,0 *
11	3,39	1,43	2,87	18,5	8,28	10,0 *
12	3,48	1,54	3,02	18,8	9,04	10,0 *
13	3,63	1,54	3,41	23,2	10,0 *	10,0 *
14	3,82	1,57	3,72	23,7	10,0 *	10,0 *
15	3,84	1,58	3,74	24,8	10,0 *	10,0 *
16	4,10	1,80	4,25	27,6	10,0 *	10,0 *
17	4,12	2,02	5,23	33,0	10,0 *	10,0 *
18	4,39	2,15	5,52	33,9	10,0 *	10,0 *
19	5,21	2,22	6,63	37,4	10,0 *	10,0 *
20	5,72	2,35	7,06	39,6	10,0 *	10,0 *
21	—	—	7,93	41,8	10,0 *	10,0 *
22	—	—	8,00	47,6	10,0 *	10,0 *
23	—	—	8,07	55,5	10,0 *	10,0 *
24	—	—	8,64	55,6	10,0 *	10,0 *
25	—	—	10,2	67,3	10,0 *	10,0 *
26	—	—	10,3	—	—	—

* Образцы не разрушились.

Для уровней напряжения, на которых разрушились все образцы серии, выборочные средние, дисперсии, средние квадратические отклонения логарифма долговечности, доверительные интервалы для математического ожидания и генеральной дисперсии определяют по формулам (2.4)–(2.9), (2.44) и (2.53), где $x = \lg N$.

В табл. 6.2 приведен пример вычисления выборочного среднего и дисперсии логарифма числа циклов до разрушения образцов из сплава В95 при амплитуде цикла напряжений $\sigma_a = 285$ МПа по данным табл. 6.1.

Эмпирические функции распределения долговечности $P - N$ строят на вероятностной бумаге, соответствующей логарифмически нормальному закону распределения. По оси абсцисс откладывают значения логарифма долговечности образцов, а по оси ординат — значение вероятности разрушения образцов P , оцениваемое по накопленной частотости, вычисляемой по формуле (2.60). На рис. 6.3 показано семейство кривых распределения долговечности, построенных по данным табл. 6.1.

Оценку квантильных значений долговечности \hat{N}_P осуществляют на основании выражения

$$\lg \hat{N}_P = \hat{a} + z_P \hat{\sigma}, \quad (6.7)$$

где \hat{a} и $\hat{\sigma}$ — оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения величины $X = \lg N$; z_P — квантиль уровня P нормированной случайной величины (1.26) (табл. III приложения).

Определение границ доверительного интервала для квантильного значения долговечности производят по формулам (2.71) и (2.72) (см. пример 2.13).

6.2. Статистическая обработка результатов испытаний на усталость образцов из сплава В95 ($n = 20$)

$N \cdot 10^{-6}$	$\lg N$	$N \cdot 10^{-5}$	$\lg N$	$N \cdot 10^{-6}$	$\lg N$
0,701	4,8457	1,18	5,0719	1,58	5,1987
0,740	4,8692	1,35	5,1303	1,80	5,2553
0,809	4,9079	1,42	5,1523	2,02	5,3054
0,910	4,9590	1,43	5,1553	2,15	5,3324
1,03	5,0128	1,54	5,1875	2,22	5,3464
1,09	5,0374	1,54	5,1875	2,35	5,3711
1,17	5,0682	1,57	5,1959		

$$\sum \lg N = 102,5902; (\sum \lg N)^2 = 10524,74914; \sum (\lg N)^2 = 526,703972;$$

$$\bar{x} = \overline{\lg N} = \frac{102,5902}{20} = 5,1295;$$

$$s^2 = \frac{1}{19} \left[\left(526,703972 - \frac{1}{20} 10524,74914 \right) \right] = 0,024553.$$

Необходимый объем испытаний определяют по методике, изложенной в гл. 2. Оценка параметров логарифмически нормального распределения по цензурированной выборке. В случае усталостных испытаний при сравнительно низком уровне амплитуды цикла напряжений часть образцов серии не разрушается за базовое число циклов и обычно снимается с дальнейших испытаний. Таким образом получается цензурированная справа выборка. В табл. 6.1 приведены ряды распределения цензурированных выборок, образовавшихся при амплитудах цикла напряжений $\sigma_a = 210$ МПа и $\sigma_a = 190$ МПа. Оценку математического ожидания, среднего квадратического отклонения, границы доверительных интервалов для этих числовых характеристик находят по формулам (2.26), (2.27), (2.45) и (2.54).

Цензурирование в значительной степени сокращает время испытания серии образцов, однако точность оценок параметров распределения при этом заметно сни-

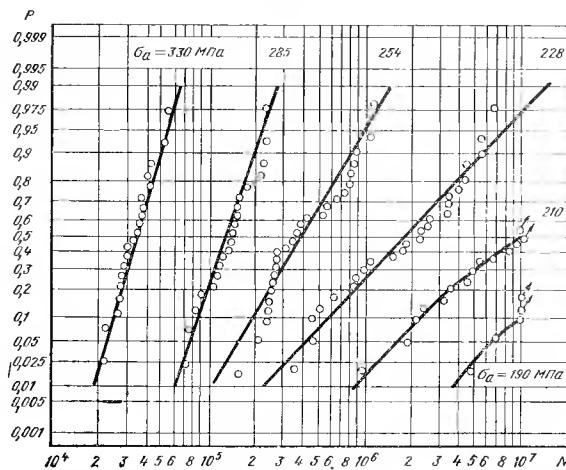


Рис. 6.3. Кривые распределения долговечности образцов из алюминиевого сплава В95

жается. Для достижения одинаковой точности оценок числовых характеристик при полностью определенной выборке (испытание всех образцов серии до разрушения) и цензурированной в последнем случае возникает необходимость увеличения объема серии образцов и, следовательно, времени испытаний. В итоге выигрыш во времени при цензурировании выборки исчезает.

В практике лабораторий заводов при проведении контрольных испытаний на усталость образуются так называемые многократно цензурированные выборки. Инженерная методика оценки параметров логарифмически нормального распределения при трехкратном цензурировании рассмотрена в работе [26].

Оценка порога чувствительности по циклам. Рассмотренные ниже методы оценки порога чувствительности по циклам основаны на предположении о нормальности закона распределения случайной величины $X = \lg(N - N_0)$. Для случая распределения долговечности по закону Вейбулла—Гнеденко методика оценки нижней границы разрушающего числа циклов рассмотрена в гл. 2 (см. пример 2).

В качестве первого приближения при оценке N_0 используют графический способ. На основании вариационного ряда (табл. 6.3) на логарифмически нормальной вероятностной сетке строят эмпирическую кривую распределения долговечностей (рис. 6.4). Признаком проявления порога чувствительности N_0 является искривление кривой $P - \lg N$ выпуклостью вверх. Методом проб подбирают такую величину \hat{N}_0 , при которой экспериментальные точки в координатах $P - \lg(N - \hat{N}_0)$ расположатся вблизи прямой линии. Согласно данным табл. 6.3 и рис. 6.4 порог чувствительности оказывается равным $\hat{N}_0 = 6 \cdot 10^5$ циклов.

6.3. Значения долговечности образцов из сплава В95 при амплитуде цикла напряжений $\sigma_a = 210$ МПа

i	$\hat{P} = \frac{i-0,5}{n}$	$N \cdot 10^{-5}$	i	$\hat{P} = \frac{i-0,5}{n}$	$N \cdot 10^{-5}$
1	0,023	6,46	12	0,523	19,6
2	0,068	7,13	13	0,568	24,9
3	0,114	7,88	14	0,614	30,2
4	0,159	8,60	15	0,659	38,2
5	0,205	9,51	16	0,705	48,2
6	0,250	10,6	17	0,750	59,9
7	0,295	12,1	18	0,795	78,3
8	0,341	12,5	19	0,841	97,1
9	0,386	13,1	20	0,886	163,0
10	0,432	15,9	21	0,932	278,0
11	0,477	17,1	22	0,977	367,0

Также в качестве приближенной оценки нижней границы случайной величины при логарифмически нормальном распределении служит величина

$$\hat{N}_0 = \frac{N_{\min}N_{\max} - N_{0,5}^2}{N_{\max} + N_{\min} - 2N_{0,5}}, \quad (6.8)$$

где N_{\min} , N_{\max} и $N_{0,5}$ представляют собой соответственно минимальное, максимальное и медианное наблюденные значения долговечности. Эту оценку применяют при $n > 20$ и при $(N_{\max} - N_{\min}) > 5N_{0,5}$.

Применительно к данным, представленным в табл. 6.3, оценка порога чувствительности по циклам составит

$$\hat{N}_0 = \frac{6,46 \cdot 10^5 \cdot 367 \cdot 10^5 - 18,35^2 \cdot 10^{10}}{6,46 \cdot 10^5 + 367 \cdot 10^5 - 2 \cdot 18,35 \cdot 10^5} = 6,04 \cdot 10^5 \text{ циклов},$$

т. е. практически совпадает с графической оценкой.

При большом объеме испытаний для оценки порога чувствительности по циклам может быть использован метод приведения выборочного распределения к симметрич-

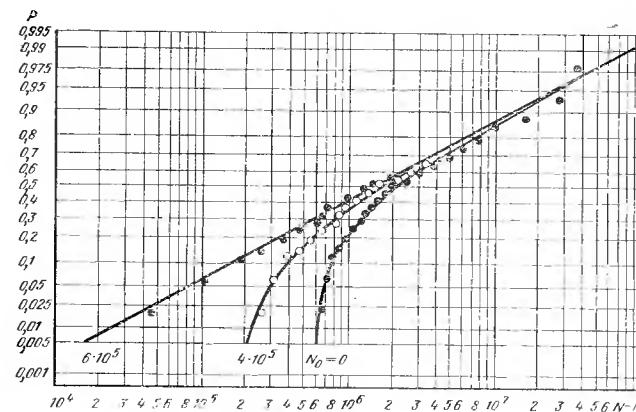


Рис. 6.4. Кривые распределения долговечности образцов из сплава В95 для различных значений порога чувствительности по циклам

ному виду, т. е. подбор такого значения \hat{N}_0 , при котором выборочный центральный момент третьего порядка m_3 случайной величины $x = \lg(N - \hat{N}_0)$ обращается в нуль.

Задавшись величиной \hat{N}_0 , полученной, например, при графической оценке порога чувствительности, находят разность крайних членов вариационного ряда $R = x_n - x_1$ (размах варьирования) случайной величины $x = \lg(N - \hat{N}_0)$. Найденный размах разбивают на 9–15 равных интервалов и подсчитывают число значений x , заключенных в каждом интервале. После этого по формулам (2.17) вычисляют первые три выборочных начальных момента h_1 , h_2 и h_3 и по формуле (2.18) — третий выборочный центральный момент распределения m_3 . При $m_3 \neq 0$ указанные вычисления повторяют для нового значения \hat{N}_0 . Если $m_3 > 0$, то при следующем приближении нужно увеличить значение \hat{N}_0 . В случае $m_3 < 0$ значение \hat{N}_0 следует снизить. За порог чувствительности принимают такое значение \hat{N}_0 , при котором $m_3 = 0$. Для ускорения вычислений целесообразно сопровождать их построением графика в координатах $\hat{N}_0 - m_3$.

При использовании ЭВМ необходимость разбиения размаха варьирования величины $x = \lg(N - \hat{N}_0)$ на интервалы отпадает.

Применительно к данным, приведенным в табл. 2.8, оценка порога чувствительности, вычисленная на ЭВМ Минск-32, составляет $\hat{N}_0 = 5,84 \cdot 10^5$ циклов.

Для оценки порога чувствительности используют также метод наименьших квадратов. График функции нормального распределения случайной величины x на нормальной вероятностной бумаге изображается прямой, уравнение которой в соответствии с (1.35) имеет вид

$$x = a + bz, \quad (6.9)$$

где z — значение нормированной случайной величины (1.26).

При правильно подобранном \hat{N}_0 сумма квадратов отклонений экспериментальных значений $x_i = \lg(N_i - \hat{N}_0)$ от расчетных, вычисленных на основании формулы (6.9), минимальная:

$$Q = \sum_{i=1}^n [\lg(N_i - \hat{N}_0) - a - bz_i]^2 = Q_{\min}. \quad (6.10)$$

Оценки параметров распределения N_0 , a и b в связи с этим могут быть найдены из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n [\lg(N_i - \hat{N}_0) - \hat{a} - \hat{b}z_i] = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n [\lg(N_i - \hat{N}_0) - \hat{a} - \hat{b}z_i] z_i = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial N_0} &= -\frac{2}{2,3} \sum_{i=1}^n [\lg(N_i - \hat{N}_0) - \hat{a} - \hat{b}z_i] \frac{1}{N_i - \hat{N}_0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Имея в виду, что для нормального распределения в соответствии с формулой (1.34) $\sum_{i=1}^n z_i = 0$, оценки параметров a и b определяются следующими выражениями, вытекающими из первых двух уравнений системы (6.11):

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg(N_i - \hat{N}_0); \quad (6.12)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot \lg(N_i - \hat{N}_0)}{\sum_{i=1}^n z_i^2}. \quad (6.13)$$

Оценку параметра N_0 находят методом последовательных приближений из третьего уравнения системы (6.11). С учетом выражений (6.12) и (6.13) это уравнение принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \left[\lg(N_i - \hat{N}_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg(N_i - \hat{N}_0) - \frac{z_i \sum_{i=1}^n z_i \lg(N_i - \hat{N}_0)}{\sum_{i=1}^n z_i^2} \right] \frac{1}{N_i - \hat{N}_0} = 0. \quad (6.14)$$

Значение z для решения уравнения (6.14) берут из табл. III приложения соответственно вероятностям P , величину которых оценивают по формуле (2.60).

Использование метода максимума правдоподобия [20] для оценки параметров нормального распределения случайной величины $X = \lg(N - N_0)$ привело к следующему уравнению:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln(N_i - N_0)}{N_i - N_0} - \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \ln(N_i - N_0) - \sum_{i=1}^n [\ln(N_i - N_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(N_i - N_0)]^2 \right\} \sum_{i=1}^n \frac{1}{N_i - N_0} = 0, \quad (6.15)$$

решение которого целесообразно производить с помощью ЭВМ.

Большим преимуществом рассматриваемого метода является возможность построения доверительного интервала для порога чувствительности [20].

ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ УСТАЛОСТИ

Уравнения кривых усталости. В зависимости от назначения кривые усталости могут быть представлены в графическом или аналитическом виде.

Графические кривые усталости изображают в полулогарифмических ($\sigma_a - \lg N$) или логарифмических ($\lg \sigma_a - \lg N$) координатах.

При оценке прочности и ресурса элементов конструкций важное место занимает обоснование уравнения кривой усталости и оценка ее параметров.

Применительно к сплавам на железной основе хорошее соответствие экспериментальных данных при симметричном цикле нагружения в широком диапазоне долговечности имеет уравнение Вейбулла [3]

$$\sigma_a - \sigma_{-1} = c_1 (N + B)^{-\alpha} \quad (6.16)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = c - \alpha \lg(N + B), \quad (6.17)$$

где σ_{-1} , α , B и $c = \lg c_1$ — параметры.

Значение параметра B для многих материалов, как показывает анализ, лежит в пределах от 0 до $5 \cdot 10^4$ циклов, поэтому его можно не учитывать при обработке результатов усталостных испытаний, если минимальная долговечность образцов превышает 10^5 циклов. В этом случае уравнение Вейбулла принимает вид

$$\sigma_a - \sigma_{-1} = c_1 N^{-\alpha} \quad (6.18)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = c - \alpha \lg N. \quad (6.19)$$

Для аналитического описания левой ветви кривой усталости для указанных материалов используют также экспоненциальное уравнение

$$N = e^{c_1 - b_1 \sigma_a} \quad (6.20)$$

или

$$\lg N = c - b \sigma_a \quad (6.21)$$

и степенное

$$N = a_1 \sigma_a^{-m} \quad (6.22)$$

или

$$\lg N = a - m \lg \sigma_a, \quad (6.23)$$

являющееся частным случаем уравнения Вейбулла (6.19) для $\sigma_{-1} = 0$, $m = 1/\alpha$ и $a = \frac{c}{\alpha}$.

Для описания сопротивления усталости легких сплавов использовали уравнения кривых усталости, которые достаточно хорошо обоснованы для сталей. Однако большинство этих уравнений не отражает особенностей формы кривой усталости легких сплавов и в связи с этим не обеспечивает необходимой точности при экстраполяции кривых в область высокой долговечности.

Графический и статистический анализ показали, что для деформируемых титановых, алюминиевых и магниевых сплавов удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными имеет уравнение Вейбулла, а также уравнение [28]

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a_1 [\lg(N + N_1)]^{-\alpha}. \quad (6.24)$$

Параметр N_1 оказывает влияние лишь на форму левой ветви кривой усталости при $N < 10^5$ ($N_1 \approx 10^3 \div 5 \cdot 10^3$). При долговечностях $N > 10^5$ можно принимать, как и для уравнения Вейбулла, $N_1 = 0$.

В этом случае уравнение (6.24) может быть представлено в виде

$$\lg N = b(\sigma_a - \sigma_{-1})^{-\beta}. \quad (6.25)$$

Для гладких и надрезанных образцов различных типоразмеров из деформированных алюминиевых сплавов, а также для натурных элементов конструкций (лонжерон лопасти несущего винта вертолета, лопасть винта самолета, бурильные трубы) параметр α уравнения (6.24) оказывается постоянным и равным $\alpha = 2$, а параметр β уравнения (6.25) равным $\beta = 0,5$.

Для аналитического описания левой ветви кривой усталости при отсутствии необходимости экстраполяции опытных данных в область малых ($N \leq 10^5$) и больших ($N \geq 10^8$) долговечностей представляется возможным использовать уравнения

$$\sigma_a = a(\lg N)^{-\alpha}, \quad (6.26)$$

или

$$\lg N = b\sigma_a^{-\beta}, \quad (6.27)$$

полученные из выражений (6.24) и (6.25) для $N_1 = 0$ и $\sigma_{-1} = 0$.

Если испытания на усталость проводятся при асимметричном цикле напряжений с постоянным коэффициентом асимметрии R (при изменяющемся среднем значении напряжения цикла σ_m), то в формулах (6.16)–(6.27) вместо σ_a следует подставить максимальное напряжение цикла σ_{max} и вместо σ_{-1} — предел выносливости σ_R . В случае испытаний при $\sigma_m = \text{const}$ в указанных формулах вместо σ_{-1} нужно подставить предельную амплитуду цикла σ_a' , соответствующую неограниченной долговечности.

Линейный регрессионный анализ результатов испытаний на усталость. В процессе испытаний на усталость устанавливается связь между амплитудой напряжений и долговечностью образца или элемента конструкции. Первая величина является независимой, и ее значениями обычно задаются при планировании испытаний. Вторая величина является случайной, подчиняющейся логарифмически нормальному закону распределения. Для установления количественных связей между указанными величинами используют регрессионный анализ, схема которого для аналогичного случая рассмотрена в гл. 5.

При линейном регрессионном анализе для установления связи между напряжением и долговечностью необходимо преобразовать указанные величины с тем, чтобы представить уравнение кривой усталости как линейное соотношение между преобразованными величинами.

За случайную величину обычно принимают $y = \lg N$ или $y = (\lg N)^{-2}$, так как именно в этом случае удовлетворительно проходит нормальный закон распределения, лежащий в основе регрессионного анализа. В качестве независимой величины выбирают преобразованную величину $x = F(\sigma_a)$. Вид функции $x = F(\sigma_a)$ устанавливается с таким расчетом, чтобы зависимость $y = f(x)$ была линейной.

Уравнение эмпирической линии регрессии, являющейся оценкой теоретической линии (5.66), имеет вид

$$Y = a + b(x - \bar{x}), \quad (6.28)$$

где Y — оценка условного математического ожидания величины $y = \lg N$ для заданного значения x .

При малом объеме испытаний на усталость ($n < 15 \div 20$) на основании регрессионного анализа определяют параметры уравнения (6.28), т. е. устанавливают уравнение средней кривой усталости, соответствующей вероятности разрушения $P = 0,50$. При большом объеме испытаний можно построить семейство кривых для ряда фиксированных уровней вероятностей разрушения.

Функцию $\omega(x)$ для учета изменения условной дисперсии величины $y = \lg N$ по формуле (5.68) подбирают на основании анализа опытных данных. С этой целью строят график зависимости выборочной дисперсии величины $y = \lg N$ от амплитуды цикла напряжений σ_a и аппроксимируют степенной функцией

$$s^2 = a\sigma_a^{-\alpha}, \quad (6.29)$$

графически оценивая ее параметры. Для этого график целесообразно строить в двойных логарифмических координатах $\lg s^2 — \lg \sigma_a$. В качестве функции $\omega(x)$ принимают

$$\omega(x) = k\sigma_a^\alpha. \quad (6.30)$$

Величину коэффициента k из удобства последующих вычислений выбирают с таким расчетом, чтобы функция $\omega(x)$ не принимала значений, выходящих за пределы 0,1—100.

Функцию $\omega(x)$ можно задать также выражением

$$\omega(x) = 1/s_0^2, \quad (6.31)$$

где s_0^2 — оценка условной дисперсии (5.68), определяемая по графику $s^2 — \sigma_a$. Причем, если экспериментальные точки совпадают с этим графиком, принимают $s_0^2 = s^2$.

Для регрессионного анализа результатов испытаний на усталость образцов и элементов конструкций из деформированных алюминиевых сплавов в соответствии с формулой (6.4) для $\alpha = 2$ функцию $\omega(x)$ можно принять также в виде

$$\omega(x) = (\sigma_a - \sigma_{-1})^3/s_0^2, \quad (6.32)$$

где σ_{-1} — предел неограниченной выносливости, оцениваемой графическим путем.

Пример 6.1. Произвести линейный регрессионный анализ результатов испытаний на усталость образцов из хромоникелевой стали по данным табл. 6.4 с целью подбора уравнения левой ветви кривой усталости и оценки ее параметров.

Экспериментальные точки, занесенные в полулогарифмических координатах, группируются вокруг кривой (рис. 6.5), и поэтому исключается возможность использования в качестве уравнения кривой усталости экспоненциальные уравнения (6.20) и (6.21). В логарифмических координатах (рис. 6.6) экспериментальные точки группируются вблизи прямой, поэтому в качестве уравнения левой ветви кривой принимаем степенное уравнение (6.22) или (6.23). Таким образом, за независимую величину в уравнении эмпирической линии регрессии (6.28) принимаем $x = \lg \sigma_a$.

6.4. Результаты испытаний на усталость при изгибе с вращением образцов из хромоникелевой стали

№ по пор.	σ_a , МПа	$N \cdot 10^{-3}$ циклов	№ по пор.	σ_a , МПа	$N \cdot 10^{-3}$ циклов
1	40	946	9	60	27
2	42	540	10	62	53
3	45	957	11	65	13
4	47	451	12	70	25
5	50	131	13	75	14
6	52	72	14	80	7
7	55	150	15	85	7,5
8	57	64			

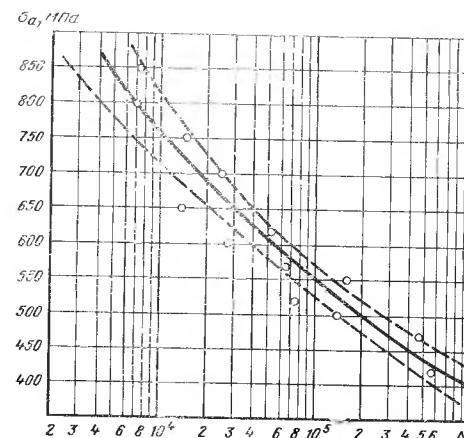


Рис. 6.5. Эмпирическая линия регрессии и границы 95 %-ной доверительной области (штриховые линии)

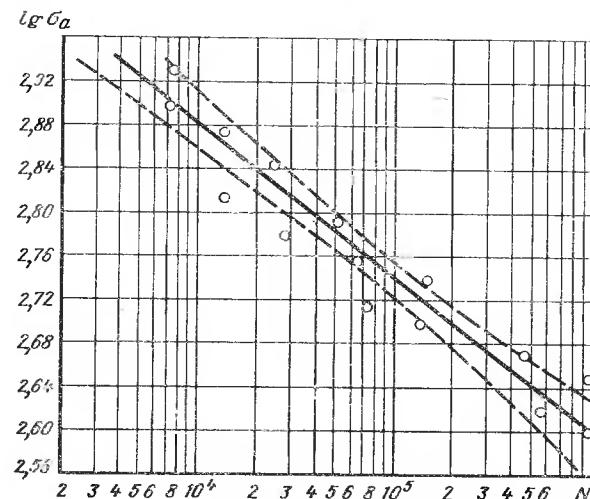


Рис. 6.6. Эмпирическая линия регрессии и границы 95 %-ной доверительной области (штриховые линии)

Оценку параметров уравнения линии регрессии производим по формулам, вытекающим из выражений (5.69)–(5.71), для случая $\omega_i n_i = 1$:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / m; \quad a = \bar{y} = \sum_{i=1}^m y_i / m;$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2},$$

где m — число уровней напряжения.

Последовательность необходимых вычислений приведена в табл. 6.5. В данном случае

$$\bar{x} = 41,396 / 15 = 2,760; \quad a = \bar{y} = 72,832 / 15 = 4,855; \quad b = -1,0113 / 0,1424 = -7,102.$$

6.5. Регрессионный анализ результатов испытаний на усталость образцов из хромоникелевой стали ($m = 15$)

σ_a , МПа	$N \cdot 10^{-3}$	$x_i = \lg \sigma_a$	$y_i = \lg N$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x}) y_i$	Y_i	$y_i - Y_i$
400	946	2,602	5,976	-0,158	-0,9442	5,978	-0,002
420	540	2,623	5,732	-0,137	-0,7853	5,828	-0,096
450	957	2,653	5,981	-0,107	-0,6400	5,615	0,366
470	451	2,672	5,654	-0,088	-0,4976	5,480	0,174
500	131	2,699	5,117	-0,061	-0,3121	5,289	-0,172
520	72	2,716	4,857	-0,044	-0,2137	5,168	-0,311
550	150	2,740	5,176	-0,020	-0,1035	4,998	0,178
570	64	2,756	4,806	-0,004	-0,0192	4,884	0,078
600	27	2,778	4,431	0,018	0,0798	4,728	-0,297
620	53	2,792	4,724	0,032	0,1512	4,628	0,096
650	13	2,813	4,114	0,053	0,2180	4,479	-0,365
700	25	2,845	4,398	0,085	0,3738	4,252	0,146
750	14	2,875	4,146	0,115	0,4768	4,039	0,107
800	7	2,903	3,845	0,143	0,5498	3,840	0,005
850	7,5	2,929	3,875	1,169	0,6549	3,655	0,220

Сумма 41,396 72,832 -1,0113

$$\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = 0,1424; \quad \sum_{i=1}^m (y_i - Y_i)^2 = 0,6493.$$

Уравнение эмпирической линии регрессии имеет вид

$$Y = 4,855 - 7,102 (x - 2,760)$$

или

$$Y = 14,747 - 7,102x.$$

Линии регрессии, соответствующие полученному уравнению, показаны на рис. 6.5 и 6.6.

С целью построения доверительной области для теоретической линии регрессии на основании формулы (5.83) производим оценку дисперсии вокруг эмпирической линии регрессии

$$s^2 = \frac{1}{13} 0,6493 = 0,0499;$$

тогда в соответствии с выражениями (5.78) и (5.79) для $\omega_i n_i = 1$

$$s_a^2 = \frac{s^2}{m} = \frac{0,0499}{15} = 0,00333;$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} = \frac{0,0499}{0,1424} = 0,3504.$$

Дисперсию оценки математического ожидания определяем по формуле (5.80):

$$s_Y^2 = 0,00333 + 0,3504(x - 2,76)^2.$$

Границы доверительной области для теоретической линии регрессии рассчитываем по формуле (5.82). Последовательность соответствующих вычислений для доверительной вероятности $P = 0,95$ приведена в табл. 6.6.

На рис. 6.5 и 6.6 штриховыми линиями показаны границы доверительной области межданный кривой усталости.

В рассмотренном примере не учтена изменчивость условной дисперсии случайной величины $y = \lg N$ с изменением уровня напряжения. Как показал анализ,

6.6. Результаты расчета границ 95 %-ной доверительной области для кривой усталости $t_{\alpha}, k = 2,16$ для $\alpha = 0,05$ и $k = 13$ (табл. V приложения)

№ по пор.	x_i	σ_a , МПа	y_i	$s_{Y_i}^2$	s_{Y_i}	$t_{\alpha}, k s_{Y_i}$	$y_i - t_{\alpha}, k s_{Y_i}$	$y_i + t_{\alpha}, k s_{Y_i}$
1	2,60	399	5,992	0,0123	0,1109	0,2395	5,752	6,232
2	2,65	447	5,637	0,0075	0,0866	0,1871	5,450	5,824
3	2,70	502	5,282	0,0046	0,0678	0,1464	5,136	5,428
4	2,76	575	4,855	0,0033	0,0574	0,1240	4,731	4,979
5	2,80	631	4,571	0,0039	0,0624	0,1348	4,436	4,706
6	2,85	708	4,216	0,0061	0,0781	0,1687	4,047	4,385
7	2,90	794	3,861	0,0102	0,1010	0,2182	3,643	4,079

это не оказывает заметного влияния на точность построения осредненной кривой усталости.

Пример 6.2. Произвести регрессионный анализ результатов испытаний на усталость образцов из алюминиевого сплава В95, представленных в табл. 6.1 и 6.7*. Значения выборочных средних и дисперсий величины $y = \lg N$ для образцов из сплава В95

Статистические характеристики	σ_a , МПа			
	228	254	285	330
\bar{y}_i	6,2547	5,6037	5,1295	4,5282
s_i^2	0,1521	0,0508	0,0246	0,0119

Выборочное условное среднее, приведенное в табл. 6.7, найдено по формуле (5.72), а условная дисперсия

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n_i - 1}. \quad (6.33)$$

Путем предварительного графического анализа устанавливаем, что зависимость $y = f(x)$ будет линейной, если в качестве независимой преобразованной величины $x = F(\sigma_a)$ принять

$$x = \lg (\sigma_a - \sigma_{-1}), \quad (6.34)$$

т. е. используют уравнение кривой усталости Вейбулла (6.19). Из этого же анализа следует, что наиболее подходящей оценкой предела неограниченной выносливости является $\sigma_a = 160$ МПа **.

График зависимости s^2 от σ_a (см. рис. 6.7), построенный по данным табл. 6.7, изображается монотонной кривой, причем экспериментальные точки практически совпадают с этим графиком. Поэтому в рассматриваемом примере принимаем $\omega(x_i) = 1/s_i^2$.

* При регрессионном анализе результатов испытаний на усталость не учитывают те уровни напряжения, на которых разрушились не все образцы серни.

** Более строгую оценку σ_{-1} см. с. 183.

Оценку параметров уравнения линии регрессии (6.28) производим по формулам (5.69)–(5.71). Последовательность вычислений указанных параметров и их доверительных интервалов приведена в табл. 6.8. По итогам граф 6, 7, 8, 11 и 12

$$\bar{x} = \frac{6764,4184}{3169,855} = 2,1340;$$

$$a = \bar{y} = \frac{15676,827}{3169,855} = 4,9456;$$

$$b = - \frac{192,49893}{44,926626} = -4,2845.$$

Уравнение эмпирической линии регрессии будет иметь вид

$$Y = 4,9456 - 4,2845(x - 2,1340)$$

или

$$Y = 14,0887 - 4,2845x. \quad (6.35)$$

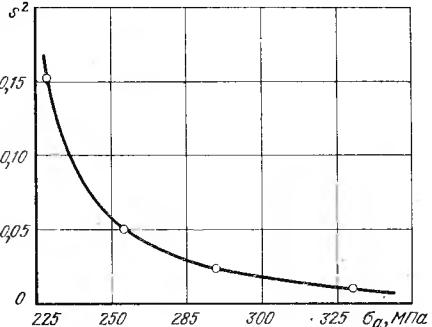


Рис. 6.7. Зависимость выборочной дисперсии величины $y = \lg N$ от уровня амплитуды цикла напряжений

Для оценки дисперсии внутри системы (5.74) используем итог графы 14, отдельные значения которого подсчитываем с учетом оценок условных дисперсий, приведенных в табл. 6.7, по формуле

$$\sum_{i=1}^{n_i} \omega_i (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = s_i^2 (n_i - 1) \omega_i = n_i - 1.$$

В рассматриваемом примере

$$s_1^2 = \frac{87}{91 - 4} = 1.$$

Дисперсию вокруг эмпирической линии регрессии (5.75) вычисляем по итогу графы 15

$$s_2^2 = \frac{1,091114}{4 - 2} = 0,5456.$$

Дисперсионное отношение по условию (5.73) $F = 0,5456/1 = 0,5456$, т. е. меньше табличного значения $F_{1-\alpha} = 3,10$, найденного для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $n - 2 = 2$ и $\Sigma n_i - m = 87$ по табл. VIII приложения. Этим подтверждаем гипотезу о линейности принятой функции $y = f(x)$.

Близость значений дисперсий s_1^2 и s_2^2 дает возможность объединить их в соответствии с (5.76) в общую оценку

$$s^2 = \frac{(91 - 4)1 + (4 - 2)0,5456}{91 - 4 + 4 - 2} = 0,9898.$$

По формулам (5.78)–(5.80) производим оценку дисперсии для параметров линии регрессии и условного математического ожидания случайной величины $y = \lg N$:

$$s_a^2 = \frac{0,9898}{3169,855} = 0,0003122;$$

$$s_b^2 = \frac{0,9898}{44,926626} = 0,02203;$$

$$s_Y^2 = 0,0003122 + 0,02203(x - 2,1340)^2.$$

Полученное уравнение эмпирической линии регрессии (6.35), а также график (см. рис. 6.7), выраждающий зависимость дисперсии величины $y = \lg N$ от уровня амплитуды цикла напряжений, позволяют построить семейство квантильных кривых усталости для различных вероятностей разрушения. Долговечность при амплитуде σ_a для заданной вероятности разрушения P определяем по формуле

$$N_{P_i} = 10^{2P} s_i^{-1} Y_i.$$

На рис. 6.8 показаны кривые усталости образцов из сплава В95 для вероятностей разрушения $P = 0,5; 0,1$ и $0,01$ (сплошные линии) и обозначены границы 90 %-ной доверительной области кривой усталости для $P = 0,5$ (штриховые линии).

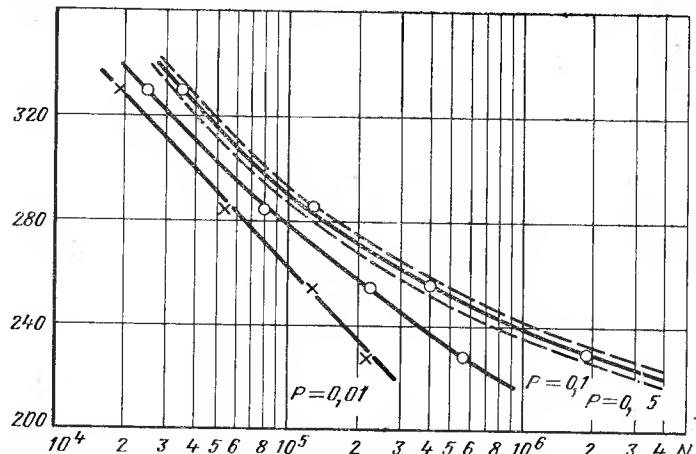
$\sigma_a, \text{МПа}$ 

Рис. 6.8. Кривые усталости для сплава В95

6.8. Регрессионный анализ результатов испытаний на усталость

$\sigma_{a_i}, \text{МПа}$	n_i	$x_i^2 = \lg(\sigma_{a_i})$	ω_i	$\bar{N}_i = \lg \frac{\sigma_{a_i}}{\sigma_{a_{\text{крит}}}}$	$\omega_i n_i$	$\omega_i n_i x_i$	$\omega_i n_i \bar{x}_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
228	25	1,8325	6,5746	6,2547	164,365	301,1989	1028,054	-0,3015	0,0909022
254	26	1,9731	5,6350	5,6037	511,810	1009,8523	2868,030	-0,1609	0,0258888
285	20	2,0969	40,6504	5,1295	813,008	1704,7964	4170,324	-0,0371	0,0013764
330	20	2,2304	84,0336	4,5282	1680,672	3748,5708	7610,419	+0,0964	0,0092929
Сумма	91				3169,855	6764,4184	15676,827		
\bar{x}									
$\omega_i n_i (x_i - \bar{x})$									
$\omega_i n_i (x_i - \bar{x})^2$									
y_i									
$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum y_i$									
\bar{y}_i^2									
s_y^2									
s_Y									
$\eta_{0,90}$									
11	12	13	14	15	16	17	18		
-309,95828	14,941140	6,2374	24	0,049178	0,002328	0,04825	6,1580 - 6,3168		
-461,46602	13,250146	5,6350	25	0,501369	0,000883	0,02971	5,5861 - 5,6839		
-154,71902	1,119024	5,1045	19	0,508130	0,000343	0,01851	5,0741 - 5,1349		
+733,64439	15,618316	4,5326	19	0,032437	0,000517	0,02274	4,4952 - 4,5700		
-192,49893	44,928626		87	1,091114					

Статистический анализ результатов испытаний на усталость, не учитывающий переменность дисперсии логарифма числа циклов до разрушения с изменением уровня амплитуды цикла напряжений, не дает достоверных кривых усталости для низких значений вероятностей разрушения и практически не отражается на медианной кривой усталости [24].

Доверительные области квантильных кривых усталости для доверительной вероятности $2\beta - 1$ определяются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} y_P^{(b)} &= Y + t'_\beta [n - 2; \Delta] s_Y; \\ y_P^{(u)} &= Y + t'_{1-\beta} [n - 2; \Delta] s_Y, \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

где t'_β — квантиль уровня β нецентрального t -распределения, вычисленная по аппроксимирующей формуле (2.70) для $k = n - 2$ степеней свободы; s_Y — средняя квадратическая ошибка оценки математического ожидания зависимой случайной величины y ,

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \omega_i n_i + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}}; \quad (6.37)$$

ω_i — весовая функция, определяемая формулой (6.31), соответствующая i -му уровню амплитуды цикла напряжений; Δ — параметр нецентральности t -распределения, в данном случае вычисляемый по формуле [18]

$$\Delta = z_P \frac{s_y}{s_{Y_i}}; \quad (6.38)$$

s_{Y_i} — выборочное среднее квадратическое отклонение зависимой случайной величины y , определяемое формулой (6.29) или графически путем интерполяции или экстраполяции опытных данных (см. рис. 6.7).

Пример 6.3. По данным примера 6.2 построить 90 %-ную доверительную область для квантильной кривой усталости, соответствующей уровню $P = 0,01$.

Порядок расчета границ доверительной области показан в табл. 6.9. Величины x , σ_a , Y , s_y , s_Y взяты из табл. 6.8. Значения Δ подсчитываются по формуле (6.38) для $z_P = z_{0,01} = -2,326$ (см. табл. 1.1). Вычисление $t'_{0,95}$ и $t'_{0,05}$ производится по формуле (2.70) для $k = n - 2 = 89$ и $z_\beta = z_{0,05} = 1,645$, $z_{1-\beta} = z_{0,05} = -1,645$ (см. табл. 1.1).

6.9. Результаты расчета границ 90 %-ной доверительной области квантильной кривой усталости для вероятности разрушения $P = 0,01$

x	$\sigma_a, \text{МПа}$	Y	s_y	s_Y	Δ	$t'_{0,95}$
1,8325	228	6,2374	0,3900	0,04825	-18,801	-16,119
1,9731	254	5,6350	0,2254	0,02971	-17,647	-15,069
2,0969	285	5,1045	0,1568	0,01851	-19,704	-16,911
2,1340	296,1	4,9456	0,1378	0,01767	-18,139	-15,517
2,2304	330	4,5326	0,1091	0,02274	-11,159	-9,108
$t'_{0,05}$	$y_{0,01}^{(b)}$	$N_{0,01}^{(b)}$	$y_{0,01}^{(u)}$	$N_{0,01}^{(u)}$	$\hat{y}_{0,01}$	$\hat{N}_{0,01}$
-21,812	5,4596	$2,88 \cdot 10^5$	5,1850	$1,53 \cdot 10^5$	5,3303	$2,14 \cdot 10^6$
-20,582	5,1873	$1,54 \cdot 10^5$	5,0235	$1,06 \cdot 10^5$	5,1107	$1,29 \cdot 10^6$
-22,870	4,7915	$6,19 \cdot 10^4$	4,6812	$4,80 \cdot 10^4$	4,7398	$5,49 \cdot 10^4$
-21,129	4,6716	$4,69 \cdot 10^4$	4,5723	$3,74 \cdot 10^4$	4,6251	$4,22 \cdot 10^4$
-13,436	4,3254	$2,12 \cdot 10^4$	4,2271	$1,69 \cdot 10^4$	4,2788	$1,90 \cdot 10^4$

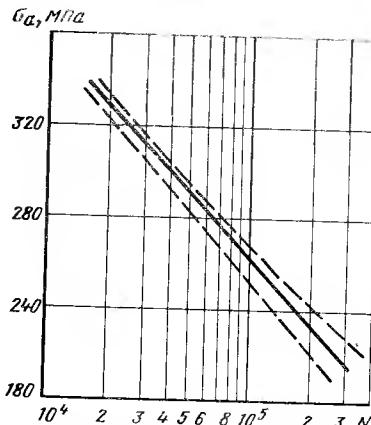


Рис. 6.9. Квантильная кривая усталости уровня $P = 0,01$ для сплава B95 (сплошная линия) и границы 90 %-ной доверительной области (штриховые линии)

соответствующие квантильные кривые усталости для принятых уровней P в координатах $\sigma_a - \lg N$ или $\lg \sigma_a - \lg N$.

На рис. 6.10 представлены квантильные кривые усталости образцов из сплава B95 уровней вероятностей $P = 0,5; 0,1$ и $0,01$, построенные по данным рис. 6.3.

Экстраполяция кривой усталости, не имеющей горизонтального участка, в область больших долговечностей не должна превышать достигнутого числа циклов на нижнем уровне амплитуды напряжений для соответствующей вероятности разрушения более чем в 2–5 раз. В противном случае возможны не приемлемые по величине погрешности определения предела выносливости при этих долговечностях.

Экстраполяция кривых, имеющих горизонтальный участок (углеродистые стали), не должна превышать долговечность, соответствующую точке перелома кривой усталости.

Планирование испытаний при построении медианной кривой усталости. При графическом способе построения кривой усталости для вероятности разрушения

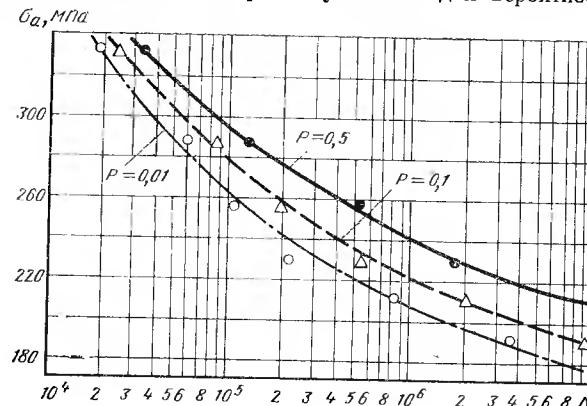


Рис. 6.10. Кривые усталости образцов из сплава B95

$P = 0,5$ объем серии из n образцов или элементов конструкций целесообразно разделить в зависимости от планируемой протяженности кривой на 3–5 приблизительно равных групп, каждую из которых испытывают при постоянном уровне переменных напряжений. Объем серии n выбирают из условия оценки предела выносливости с заданной точностью на основании приближенного выражения, полученного в результате анализа и обобщения данных статистического моделирования испытаний на усталость,

$$\delta_{\sigma_{-1}} = k \frac{\gamma_{\sigma_{-1}}}{\sqrt{n}}, \quad (6.39)$$

где $\delta_{\sigma_{-1}}$ — относительная средняя квадратическая ошибка в определении предела выносливости σ_{-1} ; k — коэффициент, зависящий от протяженности кривой усталости; для диапазона медиан долговечности кривой усталости отличающихся на один порядок, принимают $k = 1,8$, при отличии медиан на два порядка — $k = 2,1$ и в случае трех порядков — $k = 2,4$; $\gamma_{\sigma_{-1}}$ — коэффициент вариации предела выносливости.

Величину $\delta_{\sigma_{-1}}$ при низкой точности оценки предела выносливости принимают равной $0,4 \div 0,5$ от коэффициента вариации $\gamma_{\sigma_{-1}}$, при средней точности $\delta_{\sigma_{-1}} = (0,25 \div 0,35) \gamma_{\sigma_{-1}}$ и при высокой точности $\delta_{\sigma_{-1}} = (0,1 \div 0,2) \gamma_{\sigma_{-1}}$. Величиной коэффициента вариации предела выносливости задаются на основании априорной информации по аналогичным материалам и элементам конструкции.

При асимметричном нагружении с постоянным средним напряжением циклов ($\sigma_m = \text{const}$) в формуле (6.39) $\delta_{\sigma_{-1}}$ заменяют на относительную среднюю квадратическую ошибку в определении предельной амплитуды цикла для принятой базы испытания (δ_{σ_a}), а $\gamma_{\sigma_{-1}}$ — на коэффициент вариации предельной амплитуды для этой базы (γ_{σ_a}). При асимметричном нагружении с постоянным коэффициентом асимметрии R ($\sigma_m = \text{var}$) в указанной формуле $\delta_{\sigma_{-1}}$ заменяют на δ_{σ_R} , а $\gamma_{\sigma_{-1}}$ — на γ_{σ_R} , где σ_R — предел выносливости.

При построении кривой усталости число уровней амплитуд напряжений при испытаниях должно превышать на единицу число оцениваемых параметров уравнения кривой усталости или, в крайнем случае, совпадать с числом параметров, если вид уравнения кривой усталости не вызывает сомнений. Так при испытании углеродистых сталей при нормальной температуре число уровней должно составлять $m = 2 \div 3$, для сплавов на алюминиевой, магниевой и титановой основах и легированных сталей $m = 3 \div 4$.

С увеличением числа уровней амплитуд напряжений сверх указанного ошибки в определении предела выносливости возрастает. Так, для алюминиевых сплавов, как показано методом статистического моделирования испытаний на усталость, при увеличении числа уровней с 3 до 6 средняя квадратическая ошибка определения предела выносливости на базе 10^7 циклов возрастает на 2 %, а на базе 10^9 циклов — на 10 %.

Величина средней квадратической ошибки определения предела выносливости зависит от характера распределения объема серии объектов усталостных испытаний n на отдельные группы по числу принятых уровней напряжений при испытаниях m . Наименьшая ошибка достигается в том случае, когда преобладающая часть объема серии испытывается на самом нижнем уровне переменных напряжений, однако этот вариант распределения не является целесообразным из-за резкого увеличения машинного времени при испытаниях. Если себестоимость объекта испытаний сравнительно невелика, то наиболее оптимальным с точки зрения минимума ошибки в определении предела выносливости и без резкого возрастания машинного времени является максимально возможный неравномерный вариант распределения образцов по уровням напряжения, симметричный относительно середины диапазона амплитуд цикла напряжений [18]. Например, при $m = 4$ на двух крайних уровнях напряжения целесообразно испытывать по 40 % от n , а при двух средних — по 10 %.

При $m = 3$ на среднем уровне желательно испытать 10 % образцов, а на крайних — по 45 %. Большой асимметрии при $n \leq 10$ добиться практически невозможно.

Точного решения задачи, связанной с определением объема серии образцов при косвенных испытаниях, к которым относят испытания на усталость с целью построения кривой усталости и оценки предела выносливости с заданной точностью, не существует. Ниже приводится приближенное решение этой задачи, удовлетворительно согласующееся с результатами экспериментов, полученных методом статистического моделирования испытаний на усталость.

В случае симметричного цикла нагружения относительная средняя квадратическая ошибка определения предела ограниченной выносливости в зависимости от объема серии объектов испытания, количества и величины принятых уровней амплитуд напряжения, характера распределения серии объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений, степени экстраполяции кривой усталости от достигнутой при испытании до базовой долговечности, однородности усталостных свойств испытуемых объектов выражается формулой

$$\delta_{\sigma_{-1}} = \frac{\gamma_{\sigma_{-1}}}{\sigma_{-1} V n} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{(\sigma_{-1} - \bar{\sigma}_a)^2}{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{a_i}^2}}}, \quad (6.40)$$

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{a_i}}}{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{a_i}^2}}. \quad (6.41)$$

В формуле (6.40) приняты следующие обозначения: $\gamma_{\sigma_{-1}}$ — коэффициент вариации предела ограниченной выносливости; σ_{-1} — оценка медианы предела выносливости для выбранной базы испытания; n — объем серии объектов испытания; m — число принятых уровней амплитуд цикла напряжений; $v_i = \frac{n_i}{n}$ — доля объема серии объектов n , испытуемая при амплитуде цикла σ_{a_i} .

Формула (6.40) соответствует уравнениям кривой усталости (6.22), (6.24) и (6.26) в предположении независимости коэффициента вариации предела выносливости от базовой долговечности, а также при использовании весовой функции, входящей в формулы (5.69), (5.74), (5.78)–(5.80), в виде $\omega_i = \frac{1}{s_{y_i}^2}$.

Формула (6.40) применима и для степенных уравнений кривой усталости (6.18) и (6.23). Таким образом, необходимый объем испытаний на усталость в случае применения регрессионного анализа их результатов находят по формуле

$$n = \frac{\gamma_{\sigma_{-1}}^2}{\delta_{\sigma_{-1}}^2 \sigma_{-1}^2} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{a_i}^2}} + \frac{(\sigma_{-1} - \bar{\sigma}_a)^2}{\sum_{i=1}^m v_i \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_a}{\sigma_{a_i}}\right)^2} \right]. \quad (6.42)$$

Как в случае использования формулы (6.39), так и при применении уравнений (6.40) и (6.42) величину $\delta_{\sigma_{-1}}$ при низкой точности оценки предела выносливости принимают равной $0,4 \div 0,5$ от $\gamma_{\sigma_{-1}}$, при средней точности берут $\delta_{\sigma_{-1}} = (0,25 \div 0,35) \gamma_{\sigma_{-1}}$, и при высокой точности $\delta_{\sigma_{-1}} = (0,1 \div 0,2) \gamma_{\sigma_{-1}}$.

При асимметричном цикле нагружения с постоянным значением среднего напряжения ($\sigma_m = \text{const}$) в формулах (6.40) и (6.42) следует заменить величину σ_{-1} на оценку медианы предельной амплитуды цикла напряжений для принятой базы (σ_a), а величину $\delta_{\sigma_{-1}}$ на относительную среднюю квадратическую ошибку определения медианы предельной амплитуды (δ_{σ_a}).

При асимметричном цикле нагружения с постоянным коэффициентом асимметрии цикла ($R = \text{const}$, $\sigma_m = \text{var}$) в формулах (6.40) и (6.42) σ_{-1} заменяют на σ_R , σ_a на максимальное напряжение цикла σ_{\max} , $\bar{\sigma}_a$ на $\bar{\sigma}_{\max}$ и $\delta_{\sigma_{-1}}$ на δ_{σ_R} .

Средняя квадратическая ошибка в определении предела ограниченной выносливости непостоянна для разных базовых долговечностей. Она будет наименьшей при среднем из достигнутых при испытании значений чисел циклов для разрушения и увеличивается по мере перемещения влево или вправо вдоль кривой усталости. В формуле (6.40) эту зависимость определяет величина $(\sigma_{-1} - \bar{\sigma}_a)^2$, входящая в подкоренное выражение. Относительная погрешность определения предела ограниченной выносливости максимальна на правой границе кривой усталости.

В зависимости от целей последующего использования кривой усталости могут регламентироваться требования к точности определения предела выносливости не для одной базы, а для нескольких фиксированных долговечностей. В этом случае объем серии испытаний n определяется как максимальное значение из всех величин, полученных по формуле (6.42), для указанных базовых долговечностей.

Эффективность планирования испытаний на усталость в значительной степени зависит от степени достоверности предварительного построения медианной кривой усталости по справочной информации, на основании которой назначают уровни амплитуд цикла напряжений для испытания элементов на усталость, а также предварительно оценивают величину медианы предела ограниченной выносливости, входящую в формулы (6.40) и (6.42).

Для деформированных алюминиевых сплавов применительно к гладким лабораторным образцам диаметром 7,5–10 мм априорная кривая усталости для симметричного цикла нагружения может быть построена на основании следующих уравнений [28]:

для переменного изгиба

$$\sigma_a = \sigma_b^{0,63} [1,57 + 94,1 (\lg N)^{-2}] \quad (6.43)$$

и для переменного растяжения-сжатия

$$\sigma_{a_p} = \sigma_b^{0,63} [1,43 + 85,7 (\lg N)^{-2}]. \quad (6.44)$$

В случае асимметричного цикла нагружения с $\sigma_m = \text{const}$ уравнения кривых усталости принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_a &= (\sigma_b - \sigma_m)^{0,63} [1,57 + 94,1 (\lg N)^{-2}]; \\ \sigma_{a_p} &= (\sigma_b - \sigma_m)^{0,63} [1,43 + 85,7 (\lg N)^{-2}]; \end{aligned} \quad (6.45)$$

соответственно для переменного изгиба и растяжения-сжатия.

В формулах (6.43)–(6.45) σ_a — ордината точек медианной кривой усталости, МПа; σ_b — условный предел прочности, МПа.

Применительно к образцам большого диаметра при наличии концентрации напряжений, а также для натурных элементов конструкций априорную кривую усталости для деформированных алюминиевых сплавов строят с использованием уравнения обобщенной кривой усталости

$$\frac{\sigma_{a_D}}{\sigma'_{a_D}} = 0,45 + 26,95 (\lg N)^{-2}, \quad (6.46)$$

где σ_{a_D} — предельная амплитуда цикла напряжений кривой усталости элемента конструкции, соответствующая долговечности N (ордината точек кривой усталости); σ'_{a_D} — предельная амплитуда элемента конструкции для базы $N_0 = 10^7$ циклов.

Величину σ'_{a_d} для базы 10^7 циклов оценивают на основании формулы

$$\sigma'_{a_d} = \frac{\sigma'_a}{\alpha_\sigma \exp \left[2,3q_\sigma \left(\lg \frac{L}{\bar{G}} - 2 \right) \right]}, \quad (6.47)$$

где σ'_a — предельная амплитуда цикла напряжений (предел ограниченной выносливости) гладкого лабораторного образца диаметром 7,5–10 мм, вычисляемая для $N = 10^7$ циклов по формулам (6.43)–(6.45) или по формулам для переменного изгиба

$$\sigma'_a = \sigma_{-1} = 3,49\sigma_b^{0,63}; \quad (6.48)$$

для растяжения-сжатия

$$\sigma'_p = \sigma_{-1p} = 3,18\sigma_b^{0,63}; \quad (6.49)$$

α_σ — теоретический коэффициент концентрации напряжений; q_σ — коэффициент, являющийся характеристикой материала, отражающей его чувствительность к напрягаемому объему, определяемому абсолютными размерами элемента конструкции и степенью неравномерности распределения напряжений по сечению (для деформированных алюминиевых и магниевых сплавов $q_\sigma = 0,04 \div 0,08$); L — часть períметра, мм, опасного поперечного сечения элемента конструкции или образца, в точках которого действуют максимальные напряжения [12, 21]; \bar{G} — относительный максимальный градиент напряжений в зоне концентрации, мм^{-1} , формулы расчета которого для элементов конструкций (рис. 6.11) приведены в табл. 6.10.

Построение априорной кривой усталости для стальных образцов и элементов конструкций осуществляют также на основании информации о соотношениях параметров кривых усталости, статической прочности материала, геометрических особенностей элементов и т. д.

Пределы выносливости (МПа) гладких лабораторных образцов диаметром 7,5–10 мм при переменном изгибе оцениваются на основании выражений

$$\sigma_{-1} = 1,23\sigma_b^{0,850}; \quad (6.50)$$

$$\sigma_{-1} = 2,21\sigma_b^{0,777} \quad (6.51)$$

соответственно для углеродистых и легированных сталей. Пределы выносливости в случае переменного растяжения-сжатия в среднем составляют 0,75–0,95 от предела выносливости при переменном изгибе.

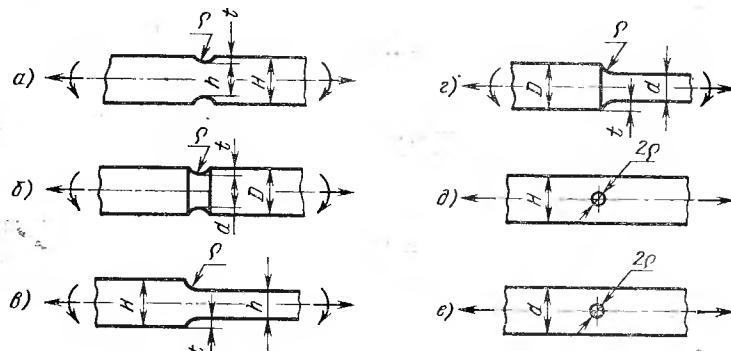


Рис. 6.11. Эскизы рабочей части элемента конструкции или образца для испытаний на усталость

6.10. Формулы для вычисления L и \bar{G} [12, 21]

Эскиз элемента на рис. 6.11	Относительные размеры	Растяжение-сжатие		Изгиб	
		L	\bar{G}	L	\bar{G}
<i>a</i>	$\frac{H}{h} \geq 1,5$	2δ	$\frac{2}{\rho}$	2δ	$\frac{2}{\rho} + \frac{2}{h}$
	$\frac{H}{h} < 1,5$	2δ	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho}$	2δ	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$
<i>b</i>	$\frac{D}{d} \geq 1,5$	πd	$\frac{2}{\rho}$	πd	$\frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$\frac{D}{d} < 1,5$	πd	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho}$	πd	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$
<i>c</i>	$\frac{H}{h} \geq 1,5$	2δ	$\frac{2,3}{\rho}$	2δ	$\frac{2,3}{\rho} + \frac{2}{h}$
	$\frac{H}{h} < 1,5$	2δ	$\frac{2,3(1+\varphi)}{\rho}$	2δ	$\frac{2,3(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$
<i>d</i>	$\frac{D}{d} \geq 1,5$	πd	$\frac{2,3}{\rho}$	πd	$\frac{2,3}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$\frac{D}{d} < 1,5$	πd	$\frac{2,3(1+\varphi)}{\rho}$	πd	$\frac{2,3(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$
<i>e</i>	—	2δ	$\frac{2,3}{\rho}$	—	—
<i>e</i>	—	$2d$	$\frac{2,3}{\rho}$	—	—

Примечания. 1. δ — толщина плоских элементов конструкции в опасном сечении.

$$2. \varphi = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{t}{\rho} + 2}.$$

Для целей планирования испытаний на усталость предел выносливости при переменном изгибе стальных гладких полированных образцов можно оценить ориентировочно также по формуле, рекомендуемой ГОСТ 25.504–82,

$$\sigma_{-1} = (0,55 - 0,0001\sigma_b) \sigma_b.$$

Для образцов больших поперечных сечений, при наличии концентраторов напряжений, а также для натурных элементов конструкции медиану предела выносливости σ_{-1d} оценивают по выражению [12, 21]

$$\sigma_{-1d} = \frac{\sigma_{-1} \left[1 + \left(0,0113 \frac{L}{\bar{G}} \right)^{-v_\sigma} \right]}{2\alpha_\sigma}, \quad (6.52)$$

где σ_{-1} — предел выносливости гладкого лабораторного образца диаметром 7,5—10 мм; v_σ — параметр уравнения подобия усталостного разрушения, равный 0,10—0,18 для углеродистых сталей и 0,04—0,12 — для легированных сталей [12, 21]; остальные обозначения те же, что и в формуле (6.47).

Левую наклонную ветвь априорной кривой усталости проводят через точку с координатами (N_0, σ_{-1D}) , где N_0 — абсцисса точки перелома кривой усталости, значение которой обычно принимают в пределах от 10^6 до $3 \cdot 10^6$ циклов [12] или рассчитывают по формуле [17]

$$N_0 = 10^4 \sigma_{-1D}^{0.997-0.003m}, \quad (6.53)$$

где m — параметр уравнения кривой усталости (6.23), определяемый на основании корреляционного соотношения [17]

$$m = 0,027\sigma_{-1D} + 1,4 \quad (6.54)$$

или приближенно [12]

$$m = c\sigma_{-1D}/\sigma_{-1}. \quad (6.55)$$

Здесь $c = 12$ для сварных соединений, $c = 12 \div 20$ для элементов из углеродистой стали и $c = 20 \div 30$ для элементов конструкций из легированной стали [12, 21].

При расчёте на прочность ГОСТ 25.504—82 рекомендуется формулу для оценки величины c : $c = 5 + \frac{\sigma_B}{80}$. Наклон левой ветви априорной кривой усталости в этом случае определяется параметром m .

При наличии упрочняющей обработки элементов конструкций, действии агрессивных сред или повышенных температур в формулы (6.46), (6.47), (6.52) вводят поправочные коэффициенты, учитывающие влияние указанных факторов на предел выносливости [12, 21].

По построенной таким образом априорной кривой усталости объекта будущих испытаний на усталость устанавливают уровни амплитуд цикла напряжений, входящих в формулы (6.40) и (6.42). Верхний уровень выбирают с учетом требования на протяженность кривой усталости в зону низкой долговечности, однако при этом напряжении медиана числа циклов до разрушения не должна быть ниже $5 \cdot 10^4 \div 10^5$ циклов, т. е. долговечность при испытании должна определяться областью многоцикловой усталости.

Нижний уровень амплитуды цикла напряжений для объектов испытаний, имеющих горизонтальный участок на кривой усталости, выбирают равным расчетному значению предельной амплитуды по формуле (6.52). Для элементов из магниевых, алюминиевых, титановых и других сплавов, у которых отсутствует горизонтальный участок на кривой усталости, нижний уровень амплитуды цикла напряжений выбирают из диапазона 1,0—1,2 от оценки предельной амплитуды для принятой базы испытания по формуле (6.46). В случае выбора левой границы указанного диапазона отпадает необходимость экстраполяции кривой усталости в область базовой долговечности, что при принятом уровне ошибки определения предела выносливости приводит к снижению общего числа испытуемых объектов и к увеличению машинного времени испытаний на нижнем уровне напряжений. И наоборот, выбор правой границы диапазона для нижнего уровня амплитуды цикла вызовет потребность экстраполяции кривой, что при заданном уровне ошибки приведет к увеличению числа объектов испытаний и снижению машинного времени, которое в основном определяется временем испытания на нижнем уровне напряжения.

Остальные уровни амплитуд цикла напряжений при испытании выбирают в диапазоне между максимальным и минимальным уровнями через равные интервалы.

Начинать испытания следует с промежуточных уровней и при необходимости производить их корректировку. Для уточнения предела неограниченной выносливости объектов, имеющих горизонтальный участок на кривой усталости, при амплитуде цикла напряжений 0,95—1,05 величины предела выносливости необходимо испытать до базовой долговечности дополнительную группу образцов объемом 10—20 % от n , но не менее трех.

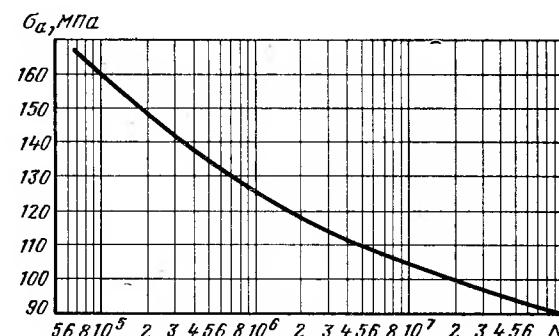


Рис. 6.12. Априорная кривая усталости для элемента конструкции из сплава Д16

Пример 6.4. Определить необходимый объем серии n для построения медианной кривой усталости в диапазоне долговечности от 10^6 до 10^8 циклов и оценки медианы предела выносливости ($\sigma_{-1} = 0,5\sigma_{-1D}$) для элемента конструкции из алюминиевого сплава Д16 с $\sigma_B = 500$ МПа. Форма элемента конструкции приведена на рис. 6.11, б, причем $D = 60$ мм, $d = 30$ мм, $\rho = 6$ мм. Предусмотрен регрессионный анализ результатов испытаний.

По диаграмме [12, 21] для $d/D = 0,5$ и $\rho/D = 0,1$ находим теоретический коэффициент концентрации напряжений $\sigma_\sigma = 1,58$. На основании табл. 6.10 вычисляем:

$$L = \pi d = 94,2; \quad \bar{G} = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{d} = \frac{2}{6} + \frac{2}{30} = 0,4 \frac{1}{\text{мм}} \quad \text{и} \quad \frac{L}{\bar{G}} = 235,5 \text{ мм}^2.$$

По формуле (6.48) вычисляем предел выносливости гладкого образца диаметром 7,5—10 мм для базы 10^7 циклов $\sigma_a = \sigma_{-1} = 3,49 \cdot 500^{0,63} = 175$ МПа и по формуле (6.47) для $\sigma_\sigma = 0,06$ находим предварительную оценку предела выносливости исследуемого элемента для базы 10^7 циклов:

$$\sigma'_{aD} = \sigma_{-1D} = \frac{175}{1,58 \cdot \exp \{2,3 \cdot 0,06 (\lg 235,5 - 2)\}} = 105 \text{ МПа},$$

на основании которой и уравнения (6.46) строим априорную кривую усталости для заданного элемента в диапазоне $10^6 \div 10^8$ циклов. Эта кривая приведена на рис. 6.12, причем предел выносливости для базы 10^8 циклов $\sigma_{-1D} = 91$ МПа.

Задаемся четырьмя уровнями напряжения. Верхний уровень $\sigma_{a1} = 160$ МПа, что соответствует по априорной кривой усталости медианной долговечности $N_1 = 10^5$ циклов, нижний уровень $\sigma_{a4} = 95$ МПа ($N_4 = 5 \cdot 10^7$ циклов) и промежуточные уровни $\sigma_{a2} = 140$ и $\sigma_{a3} = 120$ МПа.

Распределяем общий объем серии из n элементов по уровням амплитуды с максимальной неравномерностью и симметрично относительно средних уровней: $v_1 = v_4 = 0,4$; $v_2 = v_3 = 0,1$.

По формуле (6.41) вычисляем значения средней из планируемых амплитуд цикла напряжений при испытании:

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\frac{0,4}{160} + \frac{0,1}{140} + \frac{0,1}{120} + \frac{0,4}{95}}{\frac{0,4}{160^2} + \frac{0,1}{140^2} + \frac{0,1}{120^2} + \frac{0,4}{95^2}} = 114,7 \text{ МПа};$$

а также вычисляем величины, входящие в формулу (6.42),

$$\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{ai}^2} = \frac{0,4}{160^2} + \frac{0,1}{140^2} + \frac{0,1}{120^2} + \frac{0,4}{95^2} = 7,199 \cdot 10^{-8};$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_a}{\sigma_{ai}}\right)^2 = 0,05273.$$

Объем серии объектов испытания вычисляют по формуле (6.42)

$$n = \frac{2^2}{91^2} \left[\frac{10^8}{7,199} + \frac{(91 - 114,7)^2}{0,05273} \right] = 12.$$

Чтобы обеспечить принятую неравномерность распределения по уровням амплитуд напряжений, принимают $n_1 = n_4 = 0,4 \cdot n \approx 5$ и $n_2 = n_3 = 0,1 \cdot n \approx 1$.

В случае равномерного распределения, т. е. при $v = \text{const}$, в условиях рассматриваемой задачи при соблюдении той же точности оценки предела выносливости потребовалось бы испытать серию из 18, а в случае только графической обработки опытных данных — 22 объектов.

Пример 6.5. Определим необходимый объем серии n для построения медианной кривой усталости, начиная с долговечности $5 \cdot 10^4$ циклов, и оценки предела выносливости при симметричном изгибе с вращением элемента конструкции из стали 45 с $\sigma_{\text{B}} = 660$ МПа. Форма и размеры элемента конструкции такие же, как и в условиях примера 6.4. В данном случае также предусмотрен регрессионный анализ результатов испытаний на усталость $\delta_{\sigma_{-1}} = 0,5v_{\sigma_{-1}}$.

В соответствии с вычислениями, проведенными в примере 6.3, имеем $\alpha_{\sigma} = 1,58$ и $\frac{\Delta}{G} = 235,5 \text{ мм}^2$.

По формуле (6.50) вычисляем оценку предела выносливости гладкого лабораторного образца:

$$\sigma_{-1} = 1,23 \cdot 660^{0,85} = 307 \text{ МПа.}$$

Для $v_{\sigma} = 0,1$ [12] по формуле (6.52) оцениваем предел выносливости объекта испытания

$$\sigma_{-1D} = \frac{307 [1 + (0,0113 \cdot 235,5)^{-0,1}]}{2 \cdot 1,58} = 185 \text{ МПа.}$$

На основании формулы (6.54) производим оценку параметра уравнения кривой усталости (6.23), $m = 0,027 \cdot 185 + 1,4 = 6,4$.

По формуле (6.53) находим абсциссу точки перелома кривой усталости

$$N_0 = 10^4 \cdot 185^{0,997 - 0,003 \cdot 6,4} = 1,65 \cdot 10^6 \text{ циклов.}$$

На основании уравнения (6.23) и найденных оценок σ_{-1D} , N_0 и m строим априорную кривую усталости, которая показана на рис. 6.13.

Задаемся тремя уровнями амплитуд цикла напряжений при испытании. Верхний уровень $\sigma_a = 300$ МПа, что соответствует долговечности $7,5 \cdot 10^4$ циклов по априорной кривой усталости, нижний уровень принимаем равным оценке предела выносливости $\sigma_{-1} = 185$ МПа, средний уровень $\sigma_{a2} = 240$ МПа.

Распределяем объем серии по уровням амплитуд также с максимально возможной не- равномерностью и симметрично относительно среднего уровня: $v_1 = v_3 = 0,45$, $v_2 = 0,1$.

По формуле (6.41) вычисляем δ_a :

$$\delta_a = \frac{0,45}{300} + \frac{0,1}{240} + \frac{0,45}{185} = 218,7 \text{ МПа.}$$

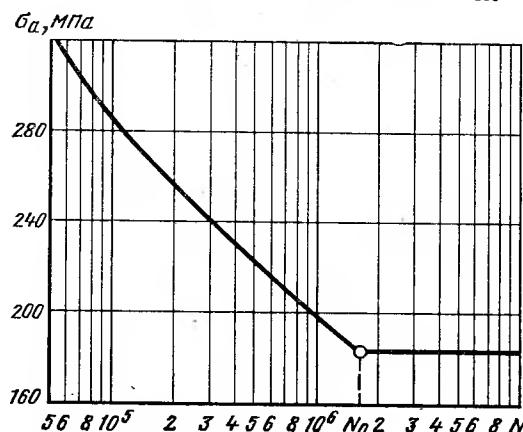


Рис. 6.13. Априорная кривая усталости для элемента конструкции из стали 45

и величины, входящие в формулу (6.42),

$$\sum_{i=1}^m v_i \left(1 - \frac{\delta_a}{\sigma_{a_i}} \right)^2 = 0,04877;$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{a_i}^2} = \frac{0,45}{300^2} + \frac{0,1}{240^2} + \frac{0,45}{185^2} = 1,988 \cdot 10^{-8}.$$

По формуле (6.42) находим планируемый объем серии

$$n = \frac{2^8}{1,988} \left[\frac{10^8}{1,988} + \frac{(185 - 218,7)^2}{0,04877} \right] = 9$$

и распределяем по группам $n_1 = n_3 = 4$ и $n_2 = 1$.

Как отмечалось ранее, необходимо предусмотреть дополнительную группу объемом $n_0 = 3$ для уточнения величины предела выносливости.

Планирование испытаний при построении квантильных кривых усталости. При построении семейства кривых усталости для достаточно широкого диапазона вероятностей разрушения ($0,01 \leq P \leq 0,99$) испытания целесообразно проводить на пяти уровнях амплитуды напряжений. Минимальный уровень амплитуды выбирают с таким расчетом, чтобы до базового числа циклов разрушилось 5—15 % объектов, испытуемых на этом уровне амплитуды цикла напряжений. На следующем (в порядке возрастания) уровне должно разрушаться около 40—60 % объектов испытаний, т. е. этот уровень примерно соответствует медиане предела выносливости для принятого базового числа циклов.

Максимальный уровень амплитуды напряжений выбирают с учетом требования на протяженность левой ветви кривой усталости. Оставшиеся два уровня распределяют равномерно между последними указанными значениями амплитуды цикла напряжений.

При ограничении общего времени испытаний используют равномерное распределение объектов по уровням амплитуд, однако большая точность оценок квантилей предела выносливости соответствует неравномерному симметричному распределению со смещением основной части объектов на крайние уровни амплитуд цикла напряжений.

Точность построения кривых усталости зависит от объема испытаний, характера распределения объектов по уровням амплитуд напряжений и требований к протяженности кривой усталости.

Определение общего объема серии объектов испытаний производят исходя из необходимой точности оценки квантили предела выносливости для заданной долговечности.

Нижние и верхние доверительные границы квантили уровня P для независимой величины уравнения линии регрессии (6.28) с учетом формулы (2.70) определяются уравнениями [18]:

$$x_P^{(n)} = \hat{x}_P + \frac{z_{1-\beta}}{b \sqrt{c} (1 - \sqrt{\mu})} \sqrt{\frac{1 - \mu}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i} + \frac{(\hat{x}_P - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x})^2}}; \quad (6.56)$$

$$x_P^{(B)} = \hat{x}_P + \frac{z_\beta}{b \sqrt{c} (1 - \sqrt{\mu})} \sqrt{\frac{1 - \mu}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i} + \frac{(\hat{x}_P - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (6.57)$$

где

$$c = \left[1 - \frac{1}{4(n-2)} \right]^2 - \frac{z_{\beta}^2}{2(n-2)}; \quad (6.58)$$

$$\mu = \frac{z_{\beta}^2}{b^2 c \sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x})^2}; \quad (6.59)$$

$$\omega_i = 1/s_{y_i}^2; \quad (6.60)$$

$$\hat{x}_P = \hat{x}_{0,5} (1 + z_P v_x), \quad (6.61)$$

где $\hat{x}_{0,5}$ — оценка медианы величины x , определяемая уравнением эмпирической линии регрессии (6.28) для заданного значения Y ; v_x — выборочный коэффициент вариации независимой величины x .

Выражая максимальную ошибку оценки квантили предела выносливости (предельной амплитуды цикла) в долях выборочного среднего квадратического отклонения этой характеристики:

$$\delta_P = \frac{\hat{\sigma}_{a_P} - \sigma_{a_P}^{(n)}}{s_{\sigma_a}} \text{ для } P \leq 0,5, \quad (6.62)$$

и

$$\delta_P = \frac{\sigma_{a_P}^{(B)} - \hat{\sigma}_{a_P}}{s_{\sigma_a}} \text{ для } P \geq 0,5, \quad (6.63)$$

в предположении независимости коэффициента вариации предела выносливости от базовой долговечности минимально необходимый общий объем серии испытаний определяют методом подбора из приближенного уравнения [18]:

$$\delta_P = \frac{z_{\beta}}{(1 - V\mu) \sigma_{a_{0,5}} \sqrt{n}} \sqrt{\frac{1 - \mu}{\sum_{i=1}^m v_i / \sigma_{a_i}^2} + \frac{(\sigma_{a_P} - \bar{\sigma}_a)^2}{\sum_{i=1}^m v_i (1 - \bar{\sigma}_a / \sigma_{a_i})^2}}, \quad (6.64)$$

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{a_i}}}{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{a_i}^2}}; \quad (6.65)$$

$$\mu = \frac{z_{\beta}^2 \gamma_{\sigma_{-1}}^2}{c n \sum_{i=1}^m v_i (1 - \bar{\sigma}_a / \sigma_{a_i})^2}; \quad (6.66)$$

$$c = \left[1 - \frac{1}{4(n-2)} \right]^2 - \frac{z_{\beta}^2}{2(n-2)}. \quad (6.67)$$

Для решения уравнения (6.64) предварительно по описанной выше методике строят априорную медианную кривую усталости и на основании анализа результатов

испытаний аналогичных материалов и элементов конструкций задаются значением коэффициента вариации предела выносливости $\gamma_{\sigma_{-1}}$. Далее по уравнению

$$\sigma_{a_P} = \sigma_{a_{0,5}} (1 + z_P \gamma_{\sigma_{-1}}) \quad (6.68)$$

строят априорную квантильную кривую усталости для принятого уровня вероятности P , снимая величину $\sigma_{a_{0,5}}$ для ряда долговечностей с медианной кривой.

Верхний уровень амплитуды напряжений $\sigma_{a(1)}$ должен соответствовать наименьшей требуемой долговечности, задаваемой по априорной квантильной кривой усталости.

Нижний уровень амплитуды напряжений $\sigma_{a(5)}$ вычисляют для базовой долговечности по формуле (6.68) при $P = 0,05 \div 0,15$, $\sigma_{a(4)}$ берут равным $\sigma_{a_{0,5}}$ по априорной медианной кривой усталости для базового числа циклов, а $\sigma_{a(2)}$ и $\sigma_{a(3)}$ назначают через равные промежутки внутри интервала $\sigma_{a(1)} \div \sigma_{a(4)}$.

Как в случае использования формул (6.39), (6.40) и (6.42), так и в случае применения формул (6.62) — (6.64) производят изменения в индексах при напряжениях и коэффициенте вариации в зависимости от симметричного или асимметричного цикла нагружения при испытании объектов.

Величину максимальной относительной ошибки оценки квантили предела выносливости принимают: $\delta_P = 0,2 \div 0,3$ при высоких требованиях к точности, $\delta_P = 0,4 \div 0,6$ при средних требованиях и $\delta_P = 0,8 \div 1,0$ при низкой точности.

Максимальная ошибка оценки квантили предела выносливости, выраженная в долях самой оценки,

$$\Delta_P = \frac{\hat{\sigma}_{a_P} - \sigma_{a_P}^{(n)}}{\hat{\sigma}_{a_P}} \text{ для } P \leq 0,5, \quad (6.69)$$

или

$$\Delta_P = \frac{\sigma_{a_P}^{(B)} - \hat{\sigma}_{a_P}}{\hat{\sigma}_{a_P}} \text{ для } P \geq 0,5 \quad (6.70)$$

связана с ошибкой δ_P [см. формулы (6.62) — (6.64)] следующим соотношением:

$$\Delta_P = \delta_P \frac{\gamma_{\sigma_{-1}}}{1 + z_P \gamma_{\sigma_{-1}}}. \quad (6.71)$$

Пример 6.6. Определить необходимый объем серии n для построения квантильной кривой усталости уровня $P = 0,01$ в диапазоне долговечности от 10^6 до 10^8 циклов и оценки предела выносливости для вероятности разрушения $P = 0,01$ на базе 10^8 циклов со средней точностью ($\delta_{0,01} = 0,4$) при симметричном изгибе с вращением для элемента конструкции, рассмотренного в примере 6.4, признак доверительной вероятность $\beta = 0,9$.

Принимаем $m = 5$, причем $v_1 = v_5 = 0,3$; $v_2 = v_4 = 0,15$ и $v_3 = 0,1$.

На основании анализа результатов испытаний на усталость аналогичных элементов из сплава Д16 принимаем $\gamma_{\sigma_{-1}} = 0,1$ [12, 21, 28].

По уравнению (6.68) для $P = 0,01$ ($z_P = -2,326$, табл. 1.1) и на основании рис. 6.11 для ряда долговечностей $10^6, 5 \cdot 10^6, 10^6, 5 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^8$ и 10^8 циклов вычисляем соответствующие ординаты априорной квантильной кривой усталости: так, например, для $N = 10^8$ $\sigma_a = 160(1 - 2,326 \cdot 0,1) = 123$ МПа, и т. д. Квантильная кривая усталости показана на рис. 6.14, где нанесена также априорная медианная кривая, рассчитанная в примере 6.4. Для базы 10^8 циклов $\sigma_{a_{0,5}} = 91$ МПа и $\sigma_{a_{0,01}} = 69,8$ МПа.

Верхний уровень амплитуды напряжений выбираем $\sigma_{a(1)} = 120$ МПа, что соответствует долговечности для $P = 0,01$ около 10^6 циклов. Нижний уровень рассчитываем по формуле (6.68) для $P = 0,1$ ($z_P = -1,282$, табл. 1.1) и $\sigma_{a_{0,5}} = 91$ МПа (см. пример 6.4).

$$\sigma_{a_{(5)}} = 91(1 - 1,282 \cdot 0,1) = 79 \approx 80 \text{ МПа.}$$

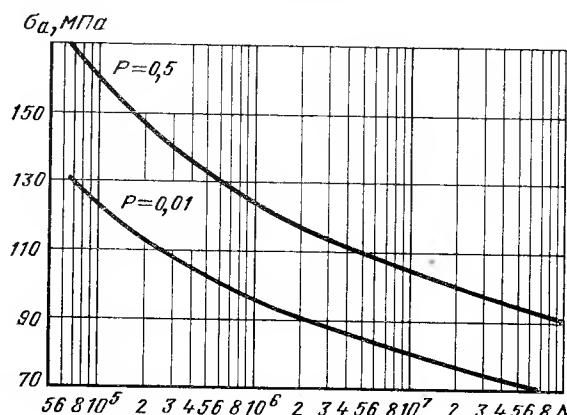


Рис. 6.14. Априорные кривые усталости для $P = 0,5$ и $P = 0,01$

Амплитуду $\sigma_{a(4)}$ принимаем примерно равной медиане предела выносливости для $N = 10^8$ циклов, т. е. $\sigma_{a(4)} = 90$ МПа. Остальные уровни амплитуд цикла напряжений принимаем $\sigma_{a(3)} = 100$ МПа и $\sigma_{a(2)} = 110$ МПа. Для $\beta = 0,9$ по табл. 1.1 находим $z_\beta = z_{0,9} = 1,282$.

По формуле (6.65) вычисляем среднее значение уровня планируемых амплитуд цикла напряжений при испытаниях:

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\frac{0,3}{120} + \frac{0,15}{110} + \frac{0,1}{100} + \frac{0,15}{90} + \frac{0,3}{80}}{\frac{0,3}{120^2} + \frac{0,15}{110^2} + \frac{0,1}{100^2} + \frac{0,15}{90^2} + \frac{0,3}{80^2}} = 94,64 \text{ МПа.}$$

Задаваясь значением $n = 100$, по формуле (6.67) вычисляем величину c :

$$c = \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 98}\right)^2 - \frac{1,282^2}{2 \cdot 98} = 0,987.$$

По формуле (6.66) находим величину μ , в данном случае

$$\mu = \frac{1,282^2 \cdot 0,1^2}{0,987 \cdot 100 \cdot 0,02706} = 0,00615.$$

Вычисляем правую часть уравнения (6.64), т. е. фактическую ошибку

$$\delta_{0,01} = \frac{1,282}{(1 - \sqrt{0,00615}) 91 \sqrt{100}} \sqrt{\frac{1 - 0,00615}{0,0001086} + \frac{(69,8 - 94,64)^2}{0,02706}} = 0,273,$$

которая меньше запланированной $[\delta_{0,01}] = 0,4$. Поэтому в следующем приближении снижаем объем серии.

Принимаем $n = 80$, в этом случае $\delta_{0,01} = 0,327$. В следующем приближении берем $n = 60$ и получаем $\delta_{0,01} = 0,383$; при $n = 50$ $\delta_{0,01} = 0,424$, что больше запланированной ошибки. Поэтому в дальнейшем увеличиваем объем и принимаем $n = 56$. В этом случае ошибка $\delta_{0,01} = 0,398$. Дальнейшее уточнение объема серии нецелесообразно вследствие приближенного характера расчетных формул и использования априорной информации о кривой усталости и характеристиках рассеяния предела выносливости.

С учетом принятого характера распределения серии объектов испытаний по группам принимаем $n_1 = n_5 = 17$, $n_2 = n_4 = 8$ и $n_3 = 6$.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ

Одним из вариантов графического представления характеристик сопротивления усталости материала и конструктивных элементов являются кривые функций распределения предела выносливости.

Анализ опытных данных показал, что для легких сплавов распределение случайной величины

$$X = \lg \frac{\sigma_{-1} - \sigma_n}{\sigma_b - \sigma_{-1}} \quad (6.72)$$

хорошо согласуется с нормальным законом [24, 28]. Здесь σ_n и σ_b представляют собой соответственно значения нижней и верхней границы (порогов) предела выносливости.

Для сталей широко используется распределение Вейбулла (1.46).

Отсутствие достаточно полных данных относительно пороговых значений предела выносливости для элементов конструкций ограничивает применение указанных распределений в практике расчета прочности.

Для расчета элементов конструкций, планирования испытаний и статистического анализа их результатов может быть рекомендован нормальный закон распределения величины предела выносливости ($X = \sigma_{-1}$), который достаточно удовлетворительно согласуется с опытными данными. В работе [11] для тех же целей используется нормальное распределение величины $X = \lg(\sigma_{-1} \sigma_b - u)$, где u — нижняя граница величины $\sigma_{-1} \sigma_b$, принимаемая равной пределу выносливости гладкого образца диаметром $d \rightarrow \infty$ или 0,5 от предела выносливости гладкого образца диаметром 7,5—10 мм.

Дисперсия предела выносливости убывает с увеличением базы испытания. Практически независимой характеристикой рассеяния предела выносливости от базы испытания является коэффициент вариации [24, 28].

Метод пробитов. Метод пробитов применяют для построения эмпирической функции распределения предела выносливости материала и деталей или предельной амплитуды при испытании с $\sigma_m = \text{const}$. Серию объектов испытания делят на $m = 4 \div 5$ групп. Объекты одной группы испытывают до базового значения числа циклов на определенном уровне амплитуды цикла напряжений.

В результате испытаний получают 4—5 пар координат точек выборочного распределения предела выносливости. Одной координатой служит накопленная частость (1.2), определяемая в данном случае отношением числа разрушившихся объектов n_{P_i} к общему числу объектов n_i , подвергнутых усталостным испытаниям на i -м уровне амплитуды цикла напряжений,

$$W_i = \frac{n_{P_i}}{n_i} = \hat{P}_i. \quad (6.73)$$

Это отношение является оценкой вероятности разрушения на i -м уровне напряжения \hat{P}_i .

В качестве второй координаты принимают амплитуду напряжений при испытании σ_{a_i} , которая при симметричном цикле нагружения является оценкой квантили предела выносливости $(\sigma_{-1})_{P_i}$ уровня P_i .

По точкам с указанными координатами на нормальной вероятностной бумаге строят линию, дающую графическую оценку функции распределения предела выносливости или предельных амплитуд (для асимметричного цикла напряжений).

Применяя метод пробитов, необходимо обосновывать выбор уровней амплитуд цикла напряжений при испытании и распределение объектов по группам. Уровни амплитуд выбирают в достаточно широком диапазоне; причем на двух низких уровнях амплитуд напряжений должно разрушаться менее 50 %, а на двух высоких — более 50 % испытанных объектов каждой группы. Пятый уровень является желательным. На этом уровне амплитуды цикла напряжений должно разрушиться около 50 % объектов группы. Например, можно выбрать такие уровни амплитуд напряжений, при которых наступит разрушение 5, 20, 50, 80 и 95 % объектов или 10, 30, 50, 70 и 90 % и т. д.

Наименьший и наибольший уровни напряжений устанавливают в зависимости от требований к полноте эмпирической функции распределения. Если, например,

требуется построить функцию распределения предела выносливости в интервале вероятности от 0,01 до 0,99, то уровни амплитуд выбирают с таким расчетом, чтобы при минимальной амплитуде разрушилось около 5 % объектов группы, а при максимальной — 95 %, так как большая экстраполяция функции распределения в область малой и большой вероятностей разрушения приводит к дополнительным погрешностям оценки квантилей предела выносливости на этих уровнях вероятности.

Выбор уровней амплитуд напряжений в соответствии с планируемой вероятностью разрушения производят на основании анализа и обобщения результатов испытаний на усталость аналогичных материалов и элементов конструкций. При назначении среднего уровня амплитуды (для вероятности разрушения $P \approx 0,5$) можно воспользоваться априорными кривыми усталости.

Уровни амплитуд цикла напряжений σ_{ap} для $P \neq 0,5$, ориентировочно устанавливают по формуле

$$\sigma_{ap} = \sigma_{a0,5} (1 + \gamma_{\sigma-1} z_P), \quad (6.74)$$

где $\sigma_{a0,5}$ — медиана предельной амплитуды напряжений, определяемая по априорной кривой усталости; $\gamma_{\sigma-1}$ — коэффициент вариации предела выносливости, устанавливаемый на основании априорной информации по аналогичным материалам и испытуемым объектам.

Относительный объем группы для получения равновесных результатов выбирают в зависимости от ожидаемой вероятности разрушения объектов:

Ожидаемая вероятность разрушения	0,25—0,75;	0,15—0,20	0,10	0,05	0,02
		или	или	или	или
Относительный размер группы	1	0,80—0,85;	0,90;	0,95;	0,98
		1,5	2	3	5

Испытание образцов или элементов конструкций рекомендуется начинать со среднего уровня амплитуды напряжения. При каждом уровне предварительно испытывают 50—70 % объектов данной группы. Затем оценивают вероятность разрушения до базового числа циклов по формуле (6.73) и производят перераспределение оставшейся части в соответствии с найденной оценкой вероятности разрушения и необходимым относительным размером группы. После испытания всего объема серии объектов для каждого уровня амплитуды напряжения вычисляют окончательную оценку вероятности разрушения по формуле (6.73).

Результаты испытаний наносят на нормальную вероятностную бумагу. Если точки со случайными отклонениями расположены вблизи прямой, то функция распределения предела выносливости соответствует нормальному закону.

Эмпирическая функция распределения на нормальной вероятностной бумаге в этих условиях описывается уравнением

$$z_P = a + b (\sigma_{ap} - \bar{\sigma}), \quad (6.75)$$

где z_P — квантиль нормально распределенной нормированной случайной величины (1.26) уровня P ; σ_{ap} — квантиль предельной амплитуды или предела выносливости (при симметричном цикле напряжений) уровня P .

Для определения параметров уравнения линий регрессии (6.75) вначале по формуле (6.73) производят оценку вероятности разрушения для каждого из m уровней амплитуд напряжений и по табл. III приложения находят оценки квантили \hat{z}_P . Затем по формулам, аналогичным (5.69)—(5.71), производят оценку самих параметров:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i \sigma_{ai}}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}; \quad (6.76)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i \hat{z}_{P_i}}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}; \quad (6.77)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (\sigma_{ai} - \bar{\sigma}) (\hat{z}_{P_i} - a)}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (\sigma_{ai} - \bar{\sigma})^2}; \quad (6.78)$$

$$\omega_i = \frac{\varphi^2(\hat{z}_{P_i})}{\hat{P}_i (1 - \hat{P}_i)}, \quad (6.79)$$

где $\varphi(z)$ — функция плотности вероятности нормированного нормального распределения (1.28), определяемая по табл. II приложения.

В случае, если распределение общего числа объектов испытаний n по группам производили в соответствии с ожидаемой вероятностью разрушения (см. с. 168), то в формулах (6.76)–(6.78) следует принять $\omega_i n_i = 1$.

Оценку математического ожидания предельной амплитуды или предела выносливости при симметричном цикле производят по формуле

$$\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma} - \frac{a}{b}, \quad (6.80)$$

а среднего квадратического отклонения на основании соотношения

$$\sigma_{\sigma_a} = 1/b. \quad (6.81)$$

Доверительные интервалы для генеральных параметров и границ доверительной области теоретической линии регрессии определяют по формулам (5.82) путем замены величины σ_{ap} на x_i и величины z_{P_i} на Y_i для числа степеней свободы $k = m - 2$.

Нижние и верхние границы доверительных интервалов квantiли предела выносливости уровня P при симметричном цикле нагружения или предельной амплитуды при испытании на усталость методом пробитов с постоянным средним напряжением цикла ($\sigma_m = \text{const}$) для доверительной вероятности β определяют из следующих уравнений:

$$\sigma_{ap}^{(H)} = \bar{\sigma}_{ap} + \frac{\mu}{1-\mu} (\hat{\sigma}_{ap} - \bar{\sigma}) - \left. - \frac{t_{\alpha, k} s_{\sigma_a}}{1-\mu} \sqrt{\frac{1-\mu}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i} + \frac{(\hat{\sigma}_{ap} - \bar{\sigma})^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (\sigma_{ai} - \bar{\sigma})^2}} \right\}; \quad (6.82)$$

$$\sigma_{ap}^{(B)} = \bar{\sigma}_{ap} + \frac{\mu}{1-\mu} (\hat{\sigma}_{ap} - \bar{\sigma}) + \left. + \frac{t_{\alpha, k} s_{\sigma_a}}{1-\mu} \sqrt{\frac{1-\mu}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i} + \frac{(\hat{\sigma}_{ap} - \bar{\sigma})^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (\sigma_{ai} - \bar{\sigma})^2}} \right\} \\ \mu = \frac{t_{\alpha, k}^2 s_{\sigma_a}^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (\sigma_{ai} - \bar{\sigma})^2}, \quad (6.83)$$

6.11. Результаты вычислений оценок параметров распределения предела выносливости образцов из стали 30ХГСА

№ по пор.	Планируемый процент разрушения	Относительный размер группы образцов	Размер группы образцов n_i	σ_{a_i} , МПа	Число разрушающихся образцов n_{P_i}	$\hat{P}_i = \frac{n_{P_i}}{n_i}$	\hat{z}_i	$\varphi(\hat{z}_i)$	ω_i
1	5	3	33	550	2	0,061	-1,55	0,1200	0,251
2	25	1	11	580	5	0,455	-0,11	0,3965	0,634
3	50	1	11	600	7	0,636	0,35	0,3752	0,608
4	75	1	12	620	10	0,833	0,97	0,2492	0,446
5	95	3	33	650	31	0,939	1,55	0,1200	0,251
Сумма		$n = 100$							

где $t_{\alpha, k}$ — значение квантили статистики центрального распределения Стьюдента [см. формулу (2.41)] уровня $P = 1 - \alpha/2$ для числа степеней свободы $k = m - 2$ (табл. V приложения); $s_{\sigma_a}^2$ — оценка дисперсии предельной амплитуды или предела выносливости.

Для проверки нулевой гипотезы о линейности линии регрессии (6.75), т. е. соответствия опытных данных нормальному закону распределения, вычисляют статистику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_{P_i} - n_i P'_i)^2}{n_i P'_i (1 - P'_i)}, \quad (6.84)$$

где P'_i — оценка вероятности разрушения, определяемая формулой (6.75), и сравнивают с критическим значением χ_{α}^2 , найденным по табл. VI приложения для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = m - 2$.

Если $\chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2$, то нулевую гипотезу не отвергают.

Пример 6.7. Произвести оценку параметров функции нормального распределения предела выносливости стали 30ХГСА по результатам испытания методом пробитов 100 образцов. Проверить нулевую гипотезу о нормальном распределении предела выносливости для уровня значимости $\alpha = 0,05$. Результаты испытаний и последовательность необходимых вычислений приведены в табл. 6.11.

Значения \hat{z}_i находят по табл. I приложения с учетом соотношения (1.34). Величину плотности вероятности $\varphi(z)$ (графа 9) определяют по табл. II приложения.

В условиях рассматриваемого примера на основании формул (6.76) — (6.79) получим

$$\bar{\sigma} = \frac{21315,56}{35,580} = 599 \text{ МПа};$$

$$a = \frac{6,7651}{35,580} = 0,190;$$

$$b = \frac{1407,066}{46316,1} = 0,0304.$$

Оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения предела выносливости вычисляем по формулам соответственно (6.80) и (6.81):

$$\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_{-1} = 599 - \frac{0,19}{0,0304} = 593 \text{ МПа};$$

$$s_{\sigma_a} = s_{\sigma_{-1}} = \frac{1}{0,0304} = 32,9 \text{ МПа}.$$

График эмпирической функции распределения предела выносливости образцов из стали 30ХГСА в соответствии с полученными оценками ее параметров показан на рис. 6.15 сплошной линией.

зов из стали 30ХГСА

$\omega_i n_i$	$\omega_i n_i \sigma_{a_i}$	$\omega_i n_i \hat{z}_i$	$\sigma_{a_i} - \bar{\sigma}$	$\hat{z}_i - a$	$\omega_i n_i (\sigma_{a_i} - \bar{\sigma}) (\hat{z}_i - a)$	$(\sigma_{a_i} - \bar{\sigma})^2$	$\omega_i n_i (\sigma_{a_i} - \bar{\sigma})^2$
6,283	4555,65	-12,83865	-49	-1,74	706,209	2401	19887,5
6,974	4044,92	-0,76714	-19	-0,30	39,752	361	2517,6
6,688	4012,80	2,34080	-1	0,16	-1,070	1	6,7
5,352	3318,24	5,19144	21	0,78	87,666	441	2360,2
8,283	5383,95	12,83865	51	1,36	574,509	2601	21544,1
35,580	21315,56	6,76510			1407,066	5805	46316,1

Для проверки нулевой гипотезы о нормальности распределения предела выносливости для указанных в табл. 6.11 уровней амплитуд напряжений по формуле (6.75) вычисляем значения z_{P_i} . Они составили -1,30; -0,39; 0,22; 0,83 и 1,74 для σ_{a_i} , равной соответственно 550, 580, 600, 620 и 650 МПа.

По табл. I приложения для найденных значений z_{P_i} определяем вероятности P_i . Они оказались равными 0,0968; 0,3483; 0,5871; 0,7967 и 0,9591 соответственно для указанных значений z_{P_i} .

По формуле (6.84) с учетом данных табл. 6.11 вычисляем статистику

$$\chi^2 = \frac{(2 - 33 \cdot 0,0968)^2}{33 \cdot 0,0968 \cdot 0,9032} + \frac{(5 - 11 \cdot 0,3483)^2}{11 \cdot 0,3483 \cdot 0,6517} + \frac{(7 - 11 \cdot 0,5871)^2}{11 \cdot 0,5871 \cdot 0,4129} + \frac{(10 - 12 \cdot 0,7967)^2}{12 \cdot 0,7967 \cdot 0,2033} + \frac{(31 - 33 \cdot 0,9591)^2}{33 \cdot 0,9591 \cdot 0,0409} = 2,26.$$

По табл. VI приложения для $\alpha = 0,05$ и $k = 3$ находим $\chi_{0,05}^2 = 7,82$. Неравенство $\chi^2 < \chi_{\alpha}^2$ выполняется, значит опытные данные не противоречат гипотезе о нормальном законе распределения предела выносливости.

Пример 6.8. В условиях примера 6.7 построить 90 %-ную доверительную область для теоретической функции распределения предела выносливости образцов из стали 30ХГСА.

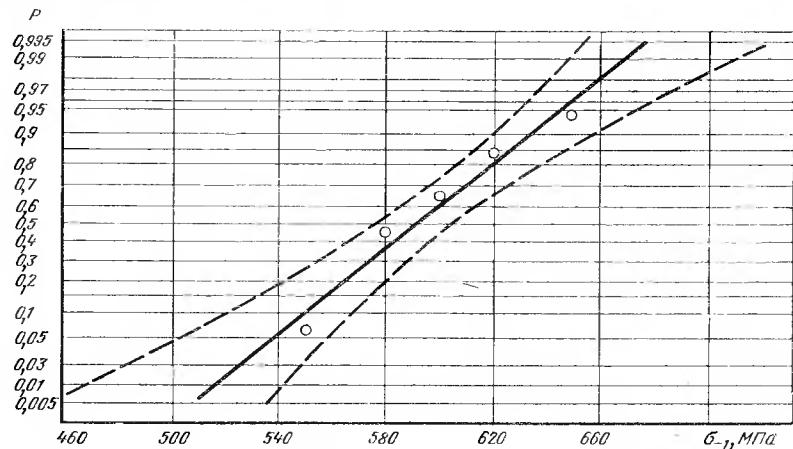


Рис. 6.15. График эмпирической функции распределения предела выносливости образцов из стали 30ХГСА и 90 %-ные доверительные области

6.12. Последовательность вычислений доверительных границ квантили предела выносливости

P	z _P	σ̂ _{ap} , МПа	σ _{ap} ⁽ⁿ⁾ , МПа	σ _{ap} ^(v) , МПа
0,01	-2,326	516	467	541
0,1	-1,282	551	520	568
0,3	-0,524	576	556	589
0,5	0	593	578	606
0,7	0,524	610	597	626
0,9	1,282	635	620	661
0,99	2,326	670	648	713

По табл. V приложения для α = 0,1 и k = m - 2 = 3 определяем t_{0,1}; 3 = 2,353 и по формуле (6.83) с использованием итога последней графы табл. 6.11 подсчитываем

$$\mu = \frac{2,353^2 \cdot 32,9}{46316,1} = 0,129.$$

Задаемся рядом значений уровней вероятности: P = 0,01; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 0,99, для которых по табл. 1.1 находим значения квантили нормированной нормально распределенной случайной величины (1.26). Эти значения приведены в третьей графе табл. 6.12. По формуле (2.61) для заданных уровней вероятности производим оценку квантилей предела выносливости. Например, для P = 0,1 σ_{a_{0,01}} = σ_a + z_{0,01}s_{σ_a} = 593 - 2,326 · 32,9 = 516 МПа.

Значения оценок квантилей предела выносливости для остальных уровней вероятности приведены в 4-й графе табл. 6.12.

По формулам (6.82) с учетом табл. 6.11 вычисляем нижние и верхние доверительные границы для квантили предела выносливости. Например, для P = 0,01

$$\begin{aligned} \sigma_{a_{0,01}}^{(n)} &= 516 + \frac{0,129}{0,871} (516 - 599) - \frac{2,353 \cdot 32,9}{0,871} \sqrt{\frac{0,871}{35,58} + \frac{(516 - 599)^2}{46316,1}} = \\ &= 516 - 12,29 - 36,99 = 467 \text{ МПа}; \quad \sigma_{a_{0,01}}^{(v)} = 516 - 12,29 + 36,99 = 541 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Для остальных уровней вероятности значения доверительных границ квантилей предела выносливости приведены в табл. 6.12.

На рис. 6.16 по данным табл. 6.12 штриховыми линиями нанесены нижняя и верхняя границы 90 %-ной доверительной области функции распределения предела выносливости образцов из стали 30ХГСА.

Минимально необходимый объем серии объектов испытаний для определения квантили предельной амплитуды или предела выносливости с максимальной ошибкой, выраженной в долях выборочного среднего квадратического отклонения этой характеристики [см. формулы (6.62) и (6.63)], при доверительной вероятности p определяют методом подбора по формуле, полученной путем совместного решения уравнений (6.62), (6.63), (6.82) и (6.83):

$$\delta_P = \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{|\hat{\sigma}_{ap} - \bar{\sigma}|}{s_{\sigma_a}} + \frac{t_{\alpha, k}}{\sqrt{n(1 - \mu)}} \sqrt{\frac{1 - \mu}{\sum_{i=1}^m v_i \omega_i} + \frac{(\hat{\sigma}_{ap} - \bar{\sigma})^2}{\sum_{i=1}^m v_i \omega_i (\sigma_{a_i} - \bar{\sigma})^2}}, \quad (6.85)$$

$$\mu = \frac{t_{\alpha, k}^2 s_{\sigma_a}^2}{n \sum_{i=1}^m v_i \omega_i (\sigma_{a_i} - \bar{\sigma})^2}; \quad (6.86)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i \omega_i \sigma_{a_i}}{\sum_{i=1}^m v_i \omega_i}, \quad (6.87)$$

где v_i — доля общего объема серии объектов, испытуемых при амплитуде цикла напряжений σ_{a_i}.

Максимальная относительная ошибка оценки квантили предела выносливости, выраженная в долях самой оценки, связана с ошибкой δ_P формулой (6.71).

При определении объема серии в связи с отсутствием оценок параметров распределения предела выносливости их заменяют на ожидаемые значения, которые устанавливают на основании априорной информации по аналогичным материалам и элементам конструкции.

Пример 6.9. Определить необходимый объем серии n для построения эмпирической функции распределения предела выносливости для базы 10⁶ циклов при симметричном изгибе с вращением и оценить квантиль предела выносливости уровня P = 0,01 с ошибкой δ_{0,01} = 1,0 для элемента конструкции, рассмотренного в примерах 6.4 и 6.5, приняв β = 0,9.

При решении примеров 6.4 и 6.5 априори установили, что медиана предела выносливости указанного элемента конструкции на базе 10⁶ циклов (σ₋₁)_{0,5} = δ₋₁ = 91 МПа, а коэффициент вариации предела выносливости γ_{σ₋₁} = 0,1. В соответствии с этим ожидаемая оценка среднего квадратического отклонения предела выносливости для задания базы σ_{σ₋₁} = 91 · 0,1 = 9,1 МПа.

Принимаем m = 5, причем задаемся ожидаемыми вероятностями разрушения P = 10, 30, 50, 70 и 90 % на каждом из пяти уровней амплитуды напряжений, для которых по табл. 1.1 находим значения z_{0,1} = -1,282; z_{0,3} = -0,524; z_{0,5} = 0; z_{0,7} = 0,524 и z_{0,9} = 1,282. В соответствии с формулой (6.74) принимаем следующие значения уровней амплитуд напряжений:

$$\sigma_{a_1} = (\sigma_{-1})_{0,05} (1 + \gamma_{\sigma_{-1}} z_{0,1}) = 91 (1 + 0,1 \cdot 1,282) \approx 103 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{a_2} = 91 (1 + 0,1 \cdot 0,524) \approx 96 \text{ МПа}; \quad \sigma_{a_3} = 91 \text{ МПа}; \quad \sigma_{a_4} = 91 (1 - 0,1 \cdot 0,524) \approx 86 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{a_5} = 91 (1 - 0,1 \cdot 1,282) \approx 79 \text{ МПа}.$$

Значение ожидаемой оценки квантили предела выносливости для вероятности P = 0,01 составит δ_{0,01} = (σ₋₁)_{0,05} (1 + γ_{σ₋₁} z_{0,01}) = 91 (1 - 0,1 · 2,326) ≈ 70 МПа.

Выбираем размеры групп v₁ = v₆ = 0,3; v₂ = v₄ = 0,15; v₃ = 0,1. Для принятых уровней вероятностей разрушения по табл. II приложения находим Φ(z_{0,1}) = Φ(z_{0,9}) = 0,1754; Φ(z_{0,3}) = Φ(z_{0,7}) = 0,3478; Φ(z_{0,5}) = 0,3989.

По формуле (6.79) для принятых уровней вероятностей P вычисляем весовую функцию. В условиях рассматриваемого примера

$$\omega_1 = \omega_6 = \frac{0,1754^2}{0,1 \cdot 0,9} = 0,3418; \quad \omega_2 = \omega_4 = \frac{0,3478^2}{0,3 \cdot 0,7} = 0,5760$$

и

$$\omega_3 = \frac{0,3989^2}{0,5 \cdot 0,5} = 0,6365.$$

В соответствии с формулой (6.87) при симметрично выбранных значениях v_i относительно объема группы для среднего уровня амплитуды напряжения, а также при симметричных значениях весовой функции ω_i величина δ оказывается равной амплитуде цикла напряжения, соответствующей среднему уровню амплитуды, т. е. δ = σ_{σ₋₁} = (σ₋₁)_{0,05} = 91 МПа.

По табл. V приложения для α = 0,1 и k = 3 определяем t_{0,1}; 3 = 2,353.

Далее задаемся рядом значений n и по формуле (6.85) вычисляем фактическую ошибку δ_{0,01}. Например, задавшись n = 100, по формуле (6.86) вычисляем μ:

$$\mu = \frac{2,353^2 \cdot 9,1^2}{100 \cdot 33,852} = 0,1354,$$

и по формуле (6.85) находим

$$\delta_{0,01} = \frac{0,1354 \cdot |70 - 91|}{(1 - 0,1354) \cdot 9,1} + \frac{2,353}{\sqrt{100 (1 - 0,1354)}} \sqrt{\frac{1 - 0,1354}{0,44153} + \frac{(70 - 91)^2}{33,852}} = 1,41,$$

что больше запланированной ошибки [δ_{0,01}] = 1,0. Для n = 150 δ_{0,01} = 1,05; для n = 160 δ_{0,01} = 1,00. Таким образом определяем окончательно n = 160 и в соответствии с принятыми относительными объемами групп v_i получаем n₁ = n₆ = 48, n₂ = n₄ = 24 и n₃ = 16.

При испытании по методу пробитов для оценки квантили предела выносливости при равной точности требуется существенно больший объем объектов испытаний, чем по методу построения квантильных кривых усталости, рассмотренному ранее.

Причиной этого является игнорирование в методе пробитов количественной информацией о долговечности разрушившихся до базового числа циклов объектов испытания.

Модифицированный метод пробитов является графоаналитическим и применяется для повышения точности построения эмпирической функции распределения предела выносливости за счет использования опытных данных о долговечности разрушившейся части объектов испытаний. Квантильные значения пределов выносливости определяются на основании построенных графическим путем по результатам усталостных испытаний соответствующих квантильных кривых усталости.

Объекты испытывают на шести уровнях амплитуды цикла напряжений. Самый высокий уровень выбирают с таким расчетом, чтобы все образцы разрушились до базового числа циклов. Величина максимального напряжения должна приниматься на 30–50 % выше априорного значения медианы предела выносливости.

Остальные пять уровней распределяются таким образом, чтобы на среднем уровне разрушилось около 50 % объектов, на двух высоких 70–80 % и 80–90 % и на двух низких 20–30 % и 10–20 %.

Для более надежной оценки параметров функции распределения предела выносливости уровни амплитуд напряжения следует выбирать в достаточно широком диапазоне. Однако необходимо учитывать, что снижение уровня амплитуды цикла напряжений увеличивает машинное время для испытания.

Наименьший уровень амплитуды напряжения выбирают с учетом возможности надежной экстраполяции до базового числа циклов кривой усталости, построенной для малой вероятности разрушения.

Величину амплитуды напряжения в соответствии с заданной вероятностью разрушения выбирают на основании анализа имеющихся данных для аналогичных материалов и элементов конструкции или с помощью предварительных испытаний. Снижение числа уровней напряжения и повышение величины минимального уровня при постоянном объеме серий объектов испытания увеличивают погрешность определения предела выносливости для малых вероятностей разрушения.

При распределении общего объема n серий объектов на группы по уровням амплитуд напряжения может быть использована следующая методика.

Объем группы объектов, испытуемых на уровне амплитуды напряжения, где вероятность разрушения составляет около 50 %, принимают за единицу. Такой же объем составляет группа объектов, испытуемая на самом высоком уровне напряжения. Объемы остальных четырех групп см. с. 168.

Рекомендуется предварительно испытывать на каждом уровне амплитуды напряжения 50–70 % объектов и по полученным результатам уточнять вероятности разрушения за базовое число циклов при выбранных уровнях напряжения. Затем производят перераспределение оставшихся объектов в соответствии с уточненными вероятностями разрушения.

После испытания всего объема объектов по вариационным рядам строят кривые эмпирического распределения долговечности, которые используют для построения квантильных кривых усталости. Для этого целесообразнее принимать фиксированные значения вероятностей, равные 0,01; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9 и 0,99.

Пределы выносливости для определенной вероятности находят по соответствующим квантильным кривым усталости. Предел выносливости для малой вероятности разрушения, например $P = 0,01$, определяют путем графической экстраполяции соответствующей квантильной кривой усталости до базового числа циклов.

Найденные значения оценок квантилей пределов выносливости наносят на график координатами которого являются вероятность разрушения P в масштабе, соответствующем нормальному закону распределения, и соответствующая квантиль предела выносливости. Линия, аппроксимирующая построенные таким образом точки, представляет собой графическую оценку функции распределения предела выносливости.

Если экспериментальные точки располагаются рядом с прямой линией, то оценки ее параметров, а также оценки среднего значения и среднего квадратического отклонения предела выносливости определяют по формулам (6.76)–(6.81). В случае систематического отклонения экспериментальных точек от прямой оценки среднего

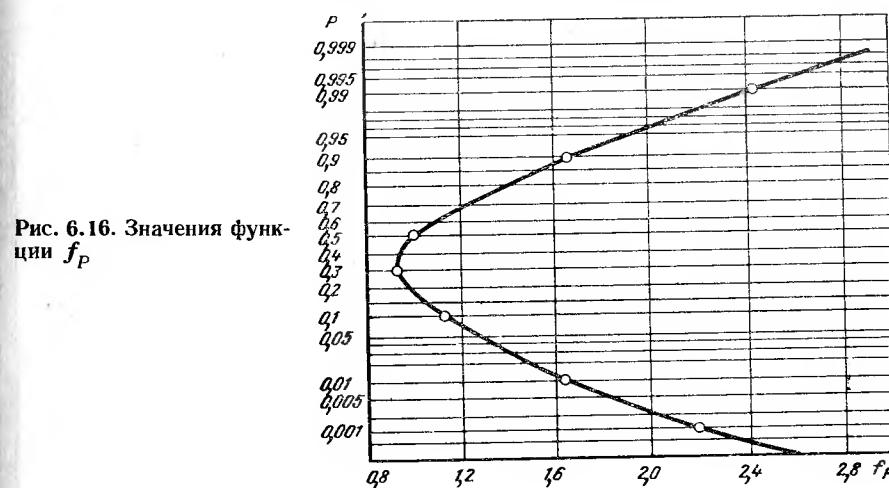


Рис. 6.16. Значения функции f_P

значения предела выносливости и среднего квадратического отклонения определяют, разбив размах варьирования предела выносливости на 8–12 интервалов, по формулам

$$\bar{\sigma}_{-1} = \sum_{i=1}^e p_i (\sigma_{-1})_i; \quad (6.88)$$

$$s_{\sigma_{-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^e p_i [(\sigma_{-1})_i - \bar{\sigma}_{-1}]^2}, \quad (6.89)$$

где e — число интервалов; p_i — приращение вероятности внутри i -го интервала; $(\sigma_{-1})_i$ — значение предела выносливости для середины i -го интервала.

При использовании модифицированного метода пробитов минимальный объем серии n для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ определяют по приближенной формуле

$$n = kz_{1-\alpha/2}^2 \frac{f_P^2}{\delta_P^2}, \quad (6.90)$$

где k — коэффициент, зависящий от числа параметров уравнения кривой усталости; в первом приближении можно принять $k = 3$; f_P — функция, зависящая от уровня вероятности, для которого определяется квантиль предела выносливости. Значение этой функции находят по графику (рис. 6.16), который построен путем статистического моделирования испытаний на усталость для ряда сплавов на магниевой, алюминиевой и железной основах [24].

Для построения эмпирической функции распределения предела выносливости модифицированным методом пробитов при одинаковой точности требуется в 2–3 раза меньше объектов, чем при использовании метода пробитов. Основным недостатком модифицированного метода пробитов является отсутствие возможности построения доверительной области для кривой распределения предела выносливости.

Пример 6.10. По результатам испытаний на усталость 100 образцов из алюминиевого сплава АВ (табл. 6.13) построить функцию распределения предела ограниченной выносливости для базы $5 \cdot 10^7$ циклов и оценить среднее значение предела выносливости и его среднее квадратическое отклонение.

По вариационным рядам (табл. 6.13) строим кривые распределения долговечности (рис. 6.17). Производим горизонтальные «разрезы» кривых распределения долговечности для различных уровней вероятности, находим соответствующие долговечности при заданных

6.13. Значения долговечности образцов из сплава АВ

№ по пор.	$\sigma_a =$ 110 МПа	$\sigma_a =$ 115 МПа	$\sigma_a =$ 120 МПа	$\sigma_a =$ 125 МПа	$\sigma_a =$ 135 МПа	$\sigma_a =$ 160 МПа
	$N \cdot 10^{-7}$			$N \cdot 10^{-6}$		
1	3,02	2,05	1,26	0,594	3,28	5,83
2	4,49	2,57	1,33	1,00	3,75	11,0
3	4,77	3,81	2,12	1,12	4,23	12,2
4	4,90	4,53	2,74	1,54	6,75	12,9
5	5,00 *	5,00 *	3,01	1,73	8,01	18,1
6	5,00 *	5,00 *	3,69	2,30	8,17	21,8
7	5,00 *	5,00 *	5,00 *	2,31	9,26	22,3
8	5,00 *	5,00 *	5,00 *	2,67	10,3	26,5
9	5,00 *	5,00 *	5,00 *	5,00 *	12,4	26,5
10	5,00 *	5,00 *	5,00 *	5,00 *	14,6	33,6
11	5,00 *	5,00 *	5,00 *	5,00 *	16,5	38,4
12	5,00 *	5,00 *	5,00 *	5,00 *	18,2	62,4
13	5,00 *	5,00 *	5,00 *	5,00 *	23,9	75,9
14	5,00 *	5,00 *	—	—	24,0	—
15	5,00 *	5,00 *	—	—	32,1	—
16	5,00 *	—	—	—	45,9	—
17	5,00 *	—	—	—	47,7	—
18	5,00 *	—	—	—	50,0 *	—
19	5,00 *	—	—	—	—	—
20	5,00 *	—	—	—	—	—
21	5,00 *	—	—	—	—	—
22	5,00 *	—	—	—	—	—
23	5,00 *	—	—	—	—	—
24	5,00 *	—	—	—	—	—
25	5,00 *	—	—	—	—	—
26	5,00 *	—	—	—	—	—
27	5,00 *	—	—	—	—	—
28	5,00 *	—	—	—	—	—

* Образцы не разрушились.

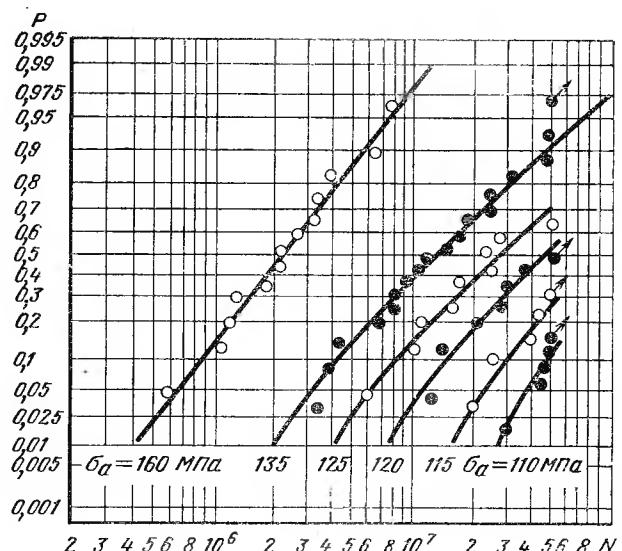


Рис. 6.17. Кривые эмпирического распределения долговечности образцов из сплава АВ

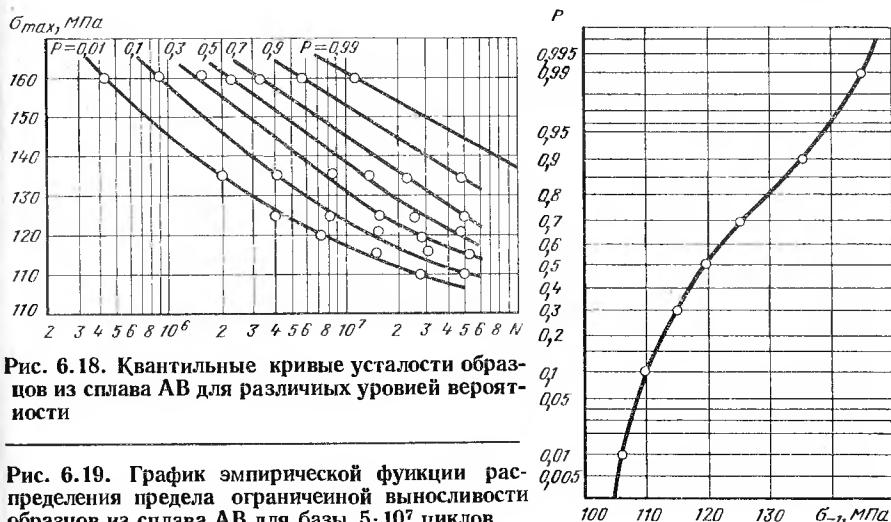


Рис. 6.18. Квантильные кривые усталости образцов из сплава АВ для различных уровней вероятности

Рис. 6.19. График эмпирической функции распределения предела ограниченной выносливости образцов из сплава АВ для базы 5 · 10⁷ циклов

амплитудах напряжений. По полученным долговечностям и заданным амплитудам напряжений строим семейство квантильных кривых усталости для указанных уровней вероятности P (рис. 6.18). По графикам находим значения пределов ограниченной выносливости для базы 50 млн. циклов:

Уровень квантили P 0,01; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 0,99
Квантиль σ_{-1} , МПа 106; 110; 115; 120; 125; 135; 145.

По этим результатам строим эмпирическую функцию распределения пределов ограниченной выносливости (рис. 6.19). Для вычисления оценки математического ожидания предела выносливости и его среднего квадратического отклонения размах варьирования предела ограниченной выносливости делим на 10 интервалов по 5 МПа.

Результаты вычисления указанных характеристик в соответствии с приведенными формулами представлены в табл. 6.14.

Метод ступенчатого изменения нагружки. Одним из эффективных методов испытаний на усталость с целью нахождения оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения предела выносливости является метод ступенчатого изменения нагружки (метод «вверх-вниз»).

Основным достоинством этого метода является сокращение количества испытуемых объектов при заданной точности оценок указанных характеристик по сравнению с испытаниями на усталость других видов, что особенно важно при испытаниях натуральных элементов конструкций.

Испытание объектов проводят на нескольких уровнях напряжения. Первый объект испытывают при переменном напряжении, равном ожидаемому пределу выносливости σ_R , предварительную оценку которого можно произвести на основании априорной информации. Если первый объект не разрушается до базового числа циклов, то второй объект испытывают при более высоком уровне напряжения, а если первый объект разрушается, то второй объект испытывают при более низком уровне напряжения. Уровень напряжения для испытания третьего объекта выбирают в зависимости от результата испытаний второго объекта. Таким образом, уровень напряжения для каждого последующего объекта повышается по сравнению с предыдущим, если предыдущий объект не разрушился, и понижается, если он разрушился. Переход между уровнями напряжений выбирают постоянным.

Известный способ статистического анализа результатов испытаний на усталость методом ступенчатого изменения нагрузки [3] базируется на двух условиях: 1) интервал между уровнями напряжений d не должен превышать двух значений среднего квадратического отклонения предела выносливости; 2) объем испытаний

6.14. Результаты вычислений оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения АВ

Границы интервала, МПа	Середина интервала $(\sigma_{-1})_i$, МПа	Значение вероятностей на границах интервала P	p_i	$p_i (\sigma_{-1})_i$	$(\sigma_{-1})_i - \bar{\sigma}_{-1}$	$[(\sigma_{-1})_i - \bar{\sigma}_{-1}]^2$
100–105	102,5	0–0,004	0,004	0,410	-18,56	34,45
105–110	107,5	0,004–0,08	0,076	8,170	-13,56	18,39
110–115	112,5	0,08–0,30	0,220	24,750	-8,56	7,33
115–120	117,5	0,30–0,52	0,220	25,850	-3,56	1,27
120–125	122,5	0,52–0,70	0,180	22,050	1,44	0,21
125–130	127,5	0,70–0,82	0,120	15,300	6,44	4,15
130–135	132,5	0,82–0,91	0,090	11,925	11,44	13,09
135–140	137,5	0,91–0,963	0,053	7,283	16,44	27,03
140–145	142,5	0,963–0,99	0,027	3,847	21,44	45,97
145–150	147,5	0,99–1,00	0,010	1,475	26,44	69,91
Сумма		1,000	121,06			

$\bar{\sigma}_{-1} = 121$ МПа; $\sum_{i=1}^{10} p_i [(\sigma_{-1})_i - \bar{\sigma}_{-1}]^2 = 85,1$;

$s_{\sigma_{-1}} = \sqrt{85,1} = 9,22$ МПа.

должен быть достаточно большим. Несоблюдение указанных условий существенно усложняет статистический анализ.

Для получения оценок и статистического анализа результатов испытаний в основном используют метод максимального правдоподобия. В соответствии с этим методом оценки параметров $M\{\sigma_R\}$ и $D\{\sigma_R\}$ определяют по уравнениям

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} n_i \left[\frac{\varphi(z_{i-1})}{q_{i-1}} - \frac{\varphi(z_i)}{P_i} \right] = 0; \quad (6.91)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} n_i \left[\frac{z_{i-1}\varphi(z_{i-1})}{q_{i-1}} - \frac{z_i\varphi(z_i)}{P_i} \right] = 0, \quad (6.92)$$

где n_i — число испытуемых объектов, разрушившихся на i -м уровне напряжения [при выводе формул (6.91) и (6.92) предполагалось, что число разрушений меньше числа неразрушений]; $z_i = \frac{\sigma_i - M\{\sigma_R\}}{\sqrt{D\{\sigma_R\}}}$ — нормированная и нормально распределенная величина; σ_i — уровень напряжения при испытании (амплитуда цикла при симметричном нагружении или максимальное напряжение цикла при асимметричном); $P_i = 1 - q_i$ — вероятность разрушения на i -м уровне, подсчитывают по формуле (1.31).

Непосредственное решение уравнений (6.91) и (6.92) весьма сложно, и поэтому используют линейную аппроксимацию этих уравнений, справедливую при

$d < 2 \sqrt{D\{\sigma_R\}}$ и приводящую к выражениям для определения оценок $\bar{\sigma}_R$ и s_{σ_R} :

$$\bar{\sigma}_R = \sigma_0 + d \left(\frac{\sum_{i=0}^k i n_i}{N} \pm 0,5 \right); \quad (6.93)$$

$$s_{\sigma_R} = 1,62 d \left[\frac{N \sum_{i=0}^k i^2 n_i - \left(\sum_{i=0}^k i n_i \right)^2}{N^2} - 0,029 \right]. \quad (6.94)$$

Здесь σ_0 — самый низкий уровень напряжения; $N = \sum_{i=0}^k n_i$ — наименьшее количество из общего числа разрушений и из общего числа неразрушений. Знак плюс в формуле (6.93) ставят в том случае, когда общее число разрушений больше числа неразрушений (расчет ведут по неразрушенным объектам), а знак минус — когда общее число разрушений меньше числа неразрушений (в этом случае расчет ведут по разрушенным объектам).

Указанная аппроксимация уравнения (6.94) справедлива, если первое слагаемое, стоящее в квадратных скобках, больше 0,3, что соответствует требованию $d < 2 \sqrt{D\{\sigma_R\}}$; в противном случае уравнение (6.94) приводит к существенным погрешностям в определении оценки s_{σ_R} .

Средние квадратические ошибки оценок параметров $a = M\{\sigma_R\}$ и $\sigma_{\sigma_R} = \sqrt{D\{\sigma_R\}}$ вычисляют из уравнений

$$\bar{\delta}_a = \frac{\sigma_{\sigma_R}}{\sqrt{N}} G; \quad (6.95)$$

$$\bar{\delta}_{\sigma} = \frac{\sigma_{\sigma_R}}{\sqrt{N}} H; \quad (6.96)$$

$$G = \frac{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_i}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_i \left[\frac{\varphi^2(z_{i-1})}{q_{i-1}^2} + \frac{\varphi^2(z_i)}{P_i^2} \right]}; \quad (6.97)$$

$$H = \frac{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_i}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_i \left[\frac{z_{i-1}^2 \varphi^2(z_{i-1})}{q_{i-1}^2} + \frac{z_i^2 \varphi^2(z_i)}{P_i^2} \right]}, \quad (6.98)$$

где $\frac{\omega_i}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_i}$ — относительный объем испытаний на i -м уровне (для разрушенных объектов).

Функции G и H зависят от отношения d/σ_{σ_R} и положения среднего значения предела выносливости относительно выбранных уровней напряжения. При малых

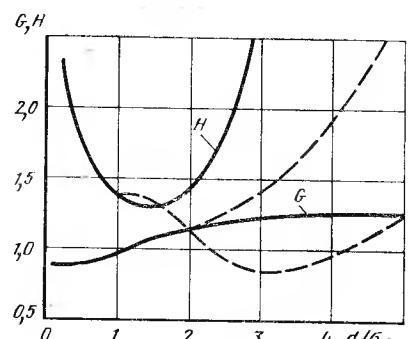


Рис. 6.20. Зависимость функций G и H от отношения $d/\sigma_0 R$

положения среднего от значения, совпадающего с одним из выбранных уровней напряжений, до значения, соответствующего середине между двумя уровнями.

Точность оценки σ_R уменьшается при значениях $d/\sigma_0 R$, больших или меньших 1–2, и увеличивается при смещении положения среднего от значения, совпадающего с одним из использованных при испытании уровней (сплошная линия для функции H), к значению, соответствующему середине между двумя уровнями (штриховая линия). Таким образом, отношение $d/\sigma_0 R$ должно находиться в диапазоне 1–2.

В общем случае этот вывод не всегда справедлив по двум причинам. Во-первых, оценки для $M\{\sigma_R\}$ и σ_R являются асимптотическими, т. е. распределены нормально при $n \rightarrow \infty$. Во-вторых, так как величина σ_R обычно неизвестна, точность

6.15. Значения функций G и H в зависимости от величин d и B

$B =$	$d/\sigma_0 R$										
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
0	0,9389 1,7450	0,9963 1,3709	1,0758 1,2760	1,1522 1,3805	1,2105 1,7926	1,2400 2,2625	1,2502 4,9929	1,2527 —	1,2532 —	1,2533 —	1,2533 —
0,1	0,9411 1,7520	1,0040 1,3838	1,0754 1,2745	1,1516 1,3481	1,2142 1,6300	1,2535 2,1196	1,2752 2,6694	1,2888 2,9256	1,3002 2,8296	1,3118 2,6144	1,3247 2,4073
0,2	0,9411 1,7520	1,0040 1,3843	1,0743 1,2705	1,1502 1,2729	1,2242 1,3510	1,2943 1,4643	1,2909 1,5669	1,3493 1,6045	1,4018 1,5680	1,4535 1,4761	1,4878 1,4261
0,3	0,9411 1,7520	1,0040 1,3849	1,0780 1,2655	1,1484 1,1952	1,2367 1,1461	1,3423 1,1347	1,4639 1,1571	1,5987 1,1929	1,7478 1,2242	1,9171 1,2473	2,1160 1,2707
0,4	0,9411 1,7520	1,0040 1,3854	1,0719 1,2616	1,1469 1,1417	1,2344 1,0261	1,3888 0,9830	1,5840 0,9854	1,8442 1,0080	2,1840 1,1166	2,6244 1,2385	3,1976 1,4003
0,5	0,9411 1,7520	1,0040 1,3850	1,0715 1,2601	1,1277 1,1061	1,2510 0,9991	1,4079 0,9385	1,6390 0,9366	1,9748 0,9874	2,4630 1,0946	3,1788 1,2715	4,2446 1,5435

При мечания: 1. Для каждой величины B верхняя строка — значения G , нижняя — значения H .
2. σ_i — значение уровня напряжения при испытании, ближайшего к среднему значению.

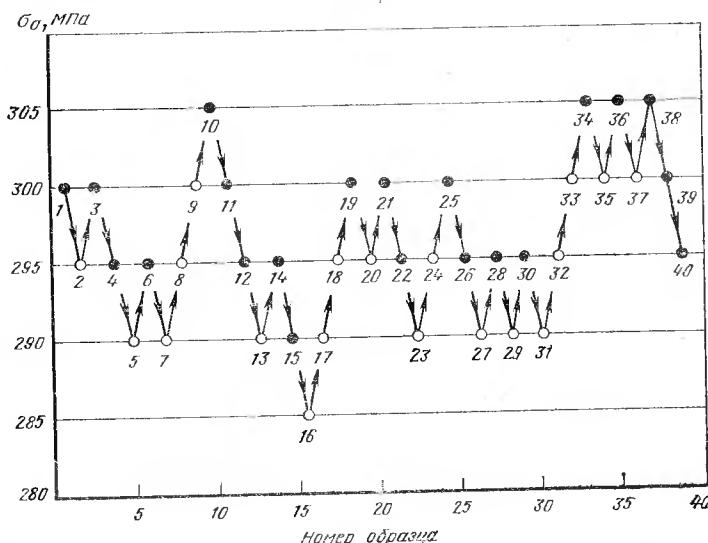


Рис. 6.21. Последовательность испытания образцов методом ступенчатого изменения нагрузки:

○ — образец не разрушился; ● — образец разрушился

оценки среднего в действительности определяется оценкой $\sigma_{\bar{R}}$, а ее точность весьма низка при малых отношениях $d/\sigma_0 R$ (рис. 6.20).

Как свидетельствуют результаты статистического моделирования, теоретические зависимости для G и H (6.97) и (6.98) достаточно хорошо описывают экспериментальные данные при объеме испытаний $n > 20$ и $d/\sigma_0 R < 2$. Для $n \leq 10$ и $d/\sigma_0 R > 2$ экспериментальные данные существенно отличаются от теоретических.

Минимально необходимый объем серии объектов испытаний $n \approx 2N$ определяют с помощью уравнений (6.95)–(6.98), задавшись значениями относительных средних квадратических ошибок оценки предела выносливости $\delta_a = \bar{\delta}_a/\sigma_{\bar{R}}$ и среднего квадратического отклонения $\delta_\sigma = \delta_\sigma/\sigma_{\bar{R}}$. При высоких требованиях к точности принимают $\delta_a = (0,1 \div 0,2) \gamma_{\bar{R}}$ и $\delta_\sigma = 0,1 \div 0,2$, при средних требованиях к точности $\delta_a = (0,25 \div 0,35) \gamma_{\bar{R}}$ и $\delta_\sigma = 0,25 \div 0,35$ и при низких требованиях $\delta_a = (0,4 \div 0,5) \gamma_{\bar{R}}$ и $\delta_\sigma = 0,4 \div 0,5$.

Пример 6.11. Определить режим и необходимый объем испытаний методом ступенчатого изменения нагрузки лонжерона лопасти несущего винта вертолета из сплава АВ на базе 10^3 циклов при симметричном нагружении с целью оценки среднего значения предела ограниченной выносливости и среднего квадратического отклонения при средних требованиях к точности ($\delta_a = 0,3\gamma_{\bar{R}}$, $\delta_\sigma = 0,3$).

На основании спаренных данных [12, 21, 28] оценивают ожидаемые значения $\sigma_{\bar{R}} = 130$ МПа и $\gamma_{\bar{R}} = 0,1$, тогда ожидаемое значение среднего квадратического отклонения $\sigma_{\bar{\sigma}_{-1}} = 13$ МПа.

Задаемся $d/\sigma_{\bar{R}} = 1$ и по табл. 6.17 для наиболее неблагоприятного значения $B = 0,5$ находим $G = 1,004$ и $H = 1,385$.

По формулам (6.95) и (6.96) для $\bar{\delta}_a = 0,3\gamma_{\bar{R}}$ и $\delta_\sigma = 0,3\sigma_{\bar{\sigma}_{-1}}$ вычисляем

$$\bar{\delta}_a = \frac{\sigma_{\bar{\sigma}_{-1}}^2}{0,3^2 \sigma_{\bar{R}}^2} G^2 = \frac{1,004^2}{0,3^2} = 11,2, \text{ т. е. } n_a = 23;$$

$$\bar{\delta}_\sigma = \frac{\sigma_{\bar{\sigma}_{-1}}^2}{0,3^2 \sigma_{\bar{R}}^2} H^2 = \frac{1,385^2}{0,3^2} = 21,3, \text{ т. е. } n_\sigma = 43.$$

6.16. Результаты испытания образцов

σ_a' МПа	Число образцов		
	разрушенных	неразрушенных	общее
285	0	1	1
290	1	8	9
295	9	6	15
300	7	4	11
305	4	0	4
Сумма	21	19	40

Окончательно принимаем $n = 43$, $d = 13$ МПа, испытания первого образца проводим при напряжении $\sigma_a' = 130$ МПа.

Пример 6.12. На рис. 6.21 дан порядок и результаты испытаний на усталость при симметричном нагружении для базы 10^7 циклов методом ступенчатого изменения нагрузки 40 образцов из углеродистой стали с $\sigma_B = 600$ МПа при $d = 5$ МПа. Требуется оценить среднее значение и среднее квадратическое отклонение предела выносливости.

На основании приведенных результатов составлена табл. 6.16, в которой указано для каждого уровня амплитуды цикла напряжения при испытании число разрушенных и неразрушенных образцов.

Число неразрушенных образцов меньше числа разрушенных, поэтому оценки указанных характеристик (табл. 6.17) вычисляем по неразрушенным образцам ($N = \sum n_i = 19$). В результате расчета по формулам (6.93) и (6.94) получаем $\sigma_{-1} = 296$ МПа и $s_{\sigma_{-1}} = 6,25$ МПа.

УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА УСТАЛОСТЬ

Форсированные испытания на усталость. Форсирование может осуществляться применением высокочастотных испытательных установок, а также путем создания при испытании образцов и элементов конструкций переменных напряжений, существенно превышающих эксплуатационные значения.

Применение высокочастотных испытательных установок (с частотой 1000 Гц и более) ограничено, так как в процессе испытания на указанных частотах происходит интенсивный разогрев образцов, и в связи с этим возникает необходимость их охлаждения, что искаляет результаты испытаний. Рассматриваемый метод форсирования испытаний оказывается малопригодным для образцов с концентратором напряжений и конструктивных элементов больших сечений: в первом случае — из-за локального разогрева материала в зоне концентратора, во втором — из-за чрезмерного возрастания мощности испытательных установок и наличия заметного градиента температуры по сечению элемента.

Таким образом, основным способом форсирования испытаний на усталость является испытание образцов и элементов конструкций при высоких уровнях амплитуд цикла напряжений, соответствующих левой части кривой многоцикловой усталости ($N = 5 \cdot 10^4 \div 5 \cdot 10^6$ циклов) с последующей экстраполяцией кривой усталости в область высокой долговечности ($N = 10^7 \div 10^{10}$ циклов) или оценкой этой долговечности по соответствующим зависимостям.

Этот способ может быть использован для определения как характеристик со- противления образованию усталостной трещины заданного размера, так и характеристик сопротивления усталостному разрушению.

Для сталей в качестве уравнения медианной кривой усталости целесообразно использовать уравнение Вейбулла (6.17). Кривая усталости, соответствующая этому

6.17. Результаты вычисления оценок среднего значения и среднего квадратического отклонения предела выносливости

i	i^2	n_i	$i \cdot n_i$	$i^2 \cdot n_i$
0	0	1	0	0
1	1	8	8	8
2	4	6	12	24
3	9	4	12	36
4	16	0	0	0
Сумма	$N = 19$	32	68	

уравнению, построенная в координатах $y = \lg(N + B)$ и $x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1})$, представляет собой прямую, уравнение которой

$$Y = a + bx, \quad (6.99)$$

где $a = \frac{c}{\alpha}$ и $b = -\frac{1}{\alpha}$.

Параметры σ_{-1} и B оценивают методом последовательных приближений. Подбирают такие значения σ_{-1} и B , при которых рассеяние экспериментальных данных вокруг прямой линии (6.99) минимально.

Параметры a и b при выбранных значениях σ_{-1} и B оцениваются способом наименьших квадратов. В этом случае функция

$$Q = \sum_{i=1}^m n_i (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^m n_i (y_i - a - bx_i)^2 \quad (6.100)$$

должна иметь минимальное значение, т. е.

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^m n_i (y_i - a - bx_i) = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^m n_i (y_i - a - bx_i) x_i = 0.$$

Отсюда

$$a = \bar{y} - b \bar{x}; \quad (6.101)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m n_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^m n_i (x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.102)$$

где m — число уровней амплитуд цикла напряжений; n_i — число объектов, испытанных на i -м уровне амплитуды; x_i — величина, соответствующая уровню амплитуды цикла напряжения при испытании σ_{ai} ; y_i — величина, соответствующая медиане числа циклов до разрушения при заданном уровне амплитуды напряжения;

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i x_i}{\sum_{i=1}^m n_i}, \quad (6.103)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i y_i}{\sum_{i=1}^m n_i}, \quad (6.104)$$

При испытаниях число уровней напряжений берут не менее четырех-пяти.

Для оценки параметра B достаточно одного приближения по пределу выносливости. При этом в качестве медианы предела выносливости σ_{-1} используют его графическую оценку, полученную экстраполяцией медианной кривой усталости до долговечности $5 \cdot 10^6 \div 10^7$ циклов.

Мерой рассеяния экспериментальных данных вокруг линии регрессии (6.99) является величина

$$Q = \sum_{i=1}^m n_i (y_i - Y_i)^2. \quad (6.105)$$

В качестве оценки параметра B берут такую величину, которая при принятом значении оценки σ_{-1} соответствует минимуму Q . Для многих материалов значение параметра $B = 0 \div 5 \cdot 10^4$ циклов. После оценки параметра B находят уточненное значение медианы предела выносливости, соответствующее минимуму отклонений результатов опыта от прямой (6.99) при найденной оценке B .

Точность этого метода тем выше, чем ближе нижний уровень амплитуды напряжений, на котором проводят испытания образцов, к значению медианы предела выносливости. Для получения большей точности нужно, чтобы нижний уровень амплитуды напряжений не превышал значения медианы предела выносливости более чем на 10 %. В случае выполнения последнего условия можно принять $B = 0$, а испытания проводить на трех-четырех уровнях напряжений.

Оценку медианы предела выносливости рассмотренным методом проводят в такой последовательности:

1) долговечность образцов, испытанных на одном уровне амплитуды цикла напряжений, располагают в порядке возрастания;

2) определяют медиану долговечности для каждого уровня амплитуды напряжений, причем в случае нечетного числа образцов, испытанных на одном уровне амплитуды напряжений, в качестве медианы числа циклов берут долговечность среднего образца в вариационном ряду, а при четном числе образцов медиана соответствует среднему арифметическому логарифму числа циклов до разрушения двух средних образцов;

3) построением кривой усталости в координатах «амплитуда напряжения — логарифм медианы числа циклов до разрушения» и ее экстраполяции до долговечности $5 \cdot 10^6 \div 10^7$ циклов производят графическую оценку медианы предела выносливости;

4) для ряда значений параметра B и предварительной оценки σ_{-1} вычисляют параметры прямой a и b по формулам (6.101) — (6.104);

5) для каждого принятого значения B определяют меру рассеяния экспериментальных точек вокруг прямой линии по формуле (6.105);

6) находят оценку параметра B как величины, соответствующей минимальному отклонению экспериментальных точек от прямой;

7) для ряда значений медианы предела выносливости σ_{-1} и найденной оценки B вычисляют параметры a и b по формулам (6.101) — (6.104);

8) для каждого принятого значения медианы предела выносливости подсчитывают меру рассеяния экспериментальных точек вокруг прямой по формуле (6.105);

9) в качестве окончательной оценки медианы предела выносливости берут величину σ_{-1} , соответствующую минимуму отклонений экспериментальных точек от прямой.

Уточнение оценки параметра B путем дальнейших последовательных приближений практически не оказывается на величине оценки медианы предела выносливости.

Пример 6.13. По результатам испытаний образцов из стали 30ХГСА ($\sigma_B = 1250$ МПа) на высоких уровнях амплитуды напряжений (табл. 6.18) оценить параметры уравнения (6.17) и значение предела выносливости.

Экстраполяцией кривой усталости в координатах $\sigma_a - \lg N_{0,5}$ до базы 10^7 циклов получено значение медианы предела выносливости $\sigma_{-1} = 580$ МПа.

В табл. 6.19 для $\sigma_{-1} = 580$ МПа и $B = 0$ приведена последовательность вычисления параметров a и b и меры рассеяния Q . В рассматриваемых условиях $Q = 0,0426$. Для значений B , равных нулю, $5 \cdot 10^4$; 10^4 ; $5 \cdot 10^4 \div 10^5$, величина Q соответственно равна $0,0426$; $0,0386$; $0,0358$; $0,0319$ и $0,0357$. На основании этого принимаем оценку параметра $B = 5 \cdot 10^4$ циклов.

Для $B = 5 \cdot 10^4$ циклов и значений σ_{-1} , равных 580 , 590 , 600 и 610 МПа, мера рассеяния вокруг линии регрессии Q соответственно принимает величины $0,0319$; $0,0238$; $0,0186$ и $0,0265$. Поэтому принимаем в качестве оценки предела выносливости $\sigma_{-1} = 600$ МПа.

6.18. Результаты испытаний на усталость образцов из стали 30ХГСА

i	σ_{a_i} , МПа	j	$N \cdot 10^{-6}$	$\lg N$	$(\lg N)_{0,5}$	$N_{0,5} \cdot 10^{-5}$
1	620	1	2,21	5,344	5,880	7,59
		2	6,03	5,780		
		3	7,59	5,880		
		4	16,7	6,223		
		5	22,8	6,358		
2	650	1	0,899	4,954	5,400	2,51
		2	1,28	5,107		
		3	2,51	5,400		
		4	3,42	5,534		
		5	7,04	5,848		
3	670	1	1,24	5,093	5,336	2,17
		2	2,17	5,336		
		3	4,46	5,649		
4	700	1	0,366	4,563	5,108	1,28
		2	0,879	4,944		
		3	1,870	5,272		
		4	5,010	5,700		
5	760	1	0,332	4,521	4,764	0,581
		2	0,581	4,764		
		3	0,808	4,907		

Для образцов и элементов конструкций из деформированных алюминиевых сплавов при форсированных испытаниях на усталость в качестве уравнения медианной кривой усталости целесообразно использовать уравнение (6.24) для $\alpha = 2$ и $N_1 = 0$. Значение параметра $\alpha = 2$ оказалось одинаковым для сплавов различных типов, разных степеней концентрации напряжений и поперечных размеров образцов и элементов конструкций как по окончательному разрушению, так и по образованию усталостной макротрешины. Это позволяет использовать рассматриваемый метод форсированных испытаний для различных стадий процесса усталостного разрушения.

Кривую усталости в этом случае представляют в координатах $x = (\lg N)^{-2}$ и $y = \sigma_a$, в которых она изображается прямой,

$$Y = a + bx, \quad (6.106)$$

где в соответствии с уравнением (6.24) $a = \sigma_{-1}$, $b = a_1$.

На рис. 6.22—6.24 для образцов и элементов конструкции из деформируемых алюминиевых сплавов показаны кривые многоцикловой усталости, построенные в указанных координатах по окончательному разрушению (чтобы сохранить привычную ориентацию кривых усталости, ось x направлена справа налево). Каждая экспериментальная точка кривой усталости для образцов (рис. 6.22 и 6.23) построена по результатам испытаний на одном уровне амплитуды напряжений от 20 до нескольких сотен идентичных образцов, а для натурных элементов конструкций — от 10 до 100 экземпляров. Экспериментальные точки, нанесенные в указанных координатах, ложатся вблизи прямой с уравнением (6.106). Для гладких и надрезанных образцов с полированной поверхностью прямая отсекает на оси ординат (при $x = 0$) отрезок, соответствующий величине предела неограниченной выносливости. Для натурных элементов конструкций, финишной операцией для которых было шлифование с последующим анодированием, предельная амплитуда, соответ-

6.19. Результаты вычисления оценок параметров a и b и меры рассеяния при $B = 0$ и $\sigma_{-1} = 580$ МПа

i	σ_{a_i} , МПа	n_i	$n_i x_i$	$n_i y_i$	$x_i - \bar{x}$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x}) y_i$	y_i	$y_i - Y_i$	$n_i (y_i - Y_i)^2$			
	$(\Gamma_0 - \Gamma_D) \frac{B}{B_1} = \frac{\sigma_0 - \sigma_D}{\sigma_0} = \frac{t_0 - t_D}{t_0}$												
1	620	1,602	5	8,010	7,59	5,880	29,400	-0,30315	0,45950	-8,91261	5,869	0,010584	0,00056
2	650	1,845	5	9,225	2,51	5,400	27,000	-0,06015	0,01809	-1,62405	5,458	-0,058260	0,01697
3	670	1,954	3	5,862	2,17	5,336	16,008	0,04885	0,00716	0,78199	5,274	0,062168	0,01159
4	700	2,079	4	8,316	1,28	5,107	20,428	0,17385	0,12090	3,55141	5,062	0,044668	0,00798
5	750	2,230	3	6,690	0,581	4,764	14,292	0,32485	0,31658	4,64276	4,807	-0,04284	0,00551
Сумма		20	38,103		107,128								$Q = 0,04261$

$$m = 5; \bar{x} = \frac{38,103}{20} = 1,90515; \bar{y} = \frac{107,128}{20} = 5,3564; b = -\frac{1,56051}{0,92223} = -1,692;$$

$$a = 5,3564 + 1,692 \cdot 1,90515 = 8,580.$$

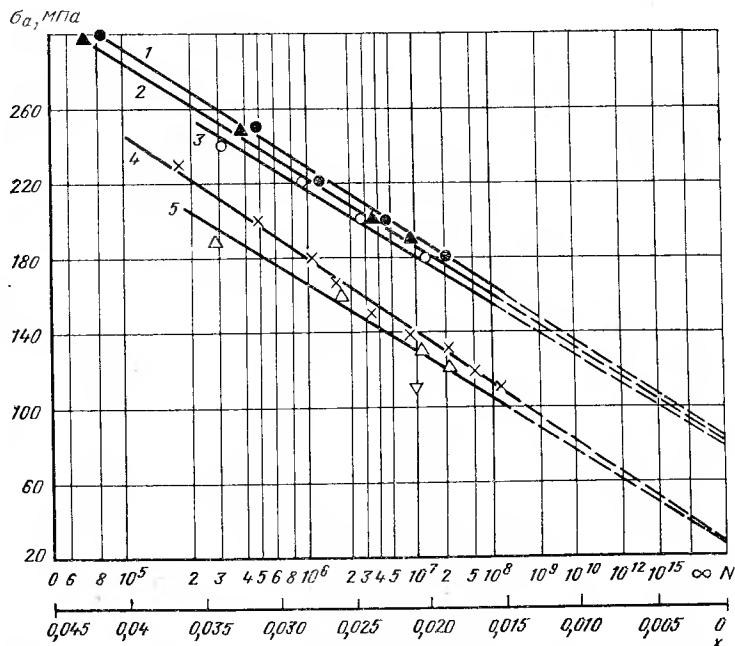


Рис. 6.22. Медианные кривые усталости при изгибе с вращением гладких полированных образцов диаметром 8 мм:
 1 — сплав B95; 2 — сплав D16; 3 — сплав B91; 4 — сплав AB; 5 — сплав AD33

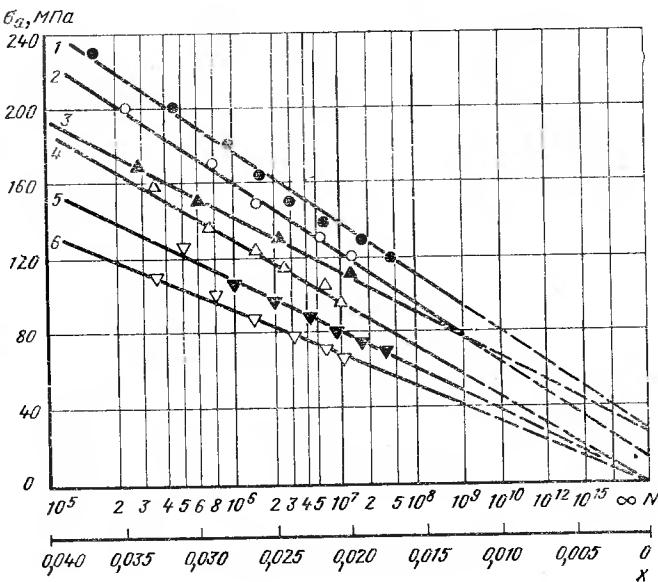


Рис. 6.23. Кривые усталости образцов и элементов конструкций с полированной поверхностью из сплава AB:

1 и 2 — изгиб с вращением гладких образцов диаметром 8 и 40 мм соответственно; 3 — плоский изгиб лонжерона лопаты несущего винта вертолета; 4—6 — изгиб с вращением надрезанных образцов диаметром 8 мм при α_0 , равном 1,45; 1,86 и 2,27 соответственно

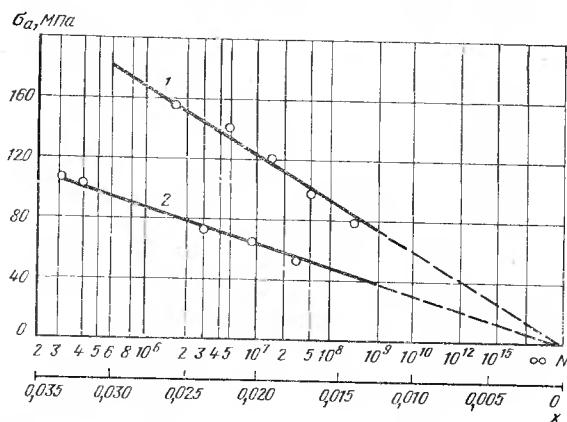


Рис. 6.24. Кривые усталости элементов конструкций с натурной поверхностью для $P = 0,5$:

1 — плоский изгиб лопасти винта самолета, сплав D1; 2 — плоский изгиб со статическим растяжением ($\sigma_m = 50$ МПа) лонжерона лопасти несущего винта вертолета, сплав АВ

ствующая неограниченной долговечности, оказывается близкой к нулю (рис. 6.24).

При использовании линейного регрессионного анализа экспериментальных данных с целью оценки параметров уравнения (6.106) необходимо, чтобы случайная величина $x = (\lg N)^{-2}$ подчинялась нормальному закону распределения. Проведенная статистическая проверка критерия нормальности распределения величины $x = (\lg N)^{-2}$ показала, что опытные данные не противоречат нормальному закону распределения рассматриваемой случайной величины с достаточно высоким уровнем значимости. Нормальность распределения величины $x = (\lg N)^{-2}$ и величины $y = \sigma_a$ не противоречит факту существования между ними линейной зависимости.

С учетом вышеизложенного план форсированной оценки характеристик выносливости на больших базах заключается в испытании образцов и элементов конструкций на одном — трех относительно высоких уровнях амплитуды напряжения, соответствующих долговечностям $N = 5 \cdot 10^4 \div 5 \cdot 10^8$ циклов, с последующей графической или аналитической экстраполяцией кривых усталости в указанных координатах в область требуемой долговечности ($N = 10^8 \div 10^{10}$ циклов). При оценке свойств лабораторных образцов с полированной поверхностью кривую усталости для симметричного цикла целесообразно проводить через точку с координатами

$$x = 0 \quad \text{и} \quad y \approx \frac{0.7\sigma_b^{0.6}}{\alpha_\sigma}, \quad (6.107)$$

где σ_b — условный предел прочности при растяжении; α_σ — теоретический коэффициент концентрации напряжений в образцах.

При оценке усталостных свойств элементов конструкций с неполированной поверхностью испытания можно ограничивать одним уровнем напряжения, так как в этом случае кривая усталости выражается уравнением (6.106) при $a = \sigma_{-1} = 0$.

Действительно, прямая, проведенная через любую экспериментальную точку и точку с координатами $x = 0$ и $y = 0$ (см. рис. 6.24), дает вполне удовлетворительные значения предельных амплитуд цикла для широкого интервала исследованных долговечностей. Однако число объектов испытания на выбранном уровне напряжения для обеспечения необходимой точности оценки предельных амплитуд должно удовлетворять выражению (2.73).

Для построения семейства квантильных кривых усталости для разных уровней вероятности пользуются инвариантностью коэффициента вариации предела выносливости к базовой долговечности, установленной для гладких и надрезанных образ-

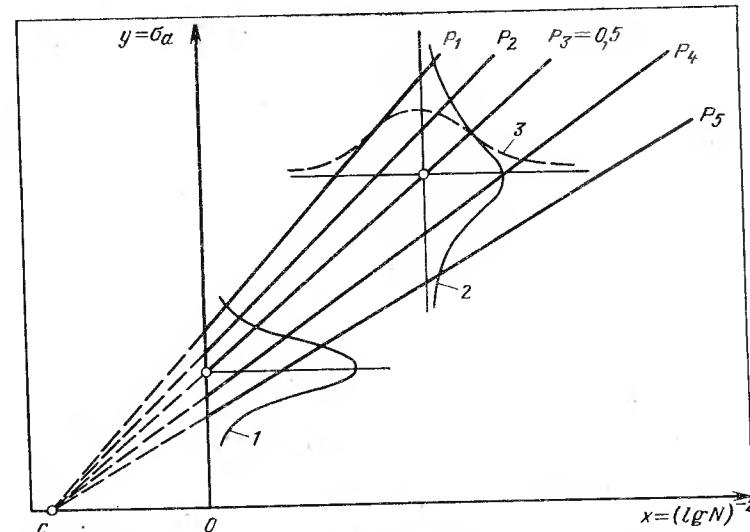


Рис. 6.25. Лучевая диаграмма квантильных кривых усталости уровней $P_1 > P_2 > P_3 = 0,5 > P_4 > P_5$:

1, 2 — кривые плотности вероятностей для предельной амплитуды в случае соответственно неограниченной и ограниченной долговечности; 3 — кривая плотности вероятности для случайной величины $x = (\lg N)^{-2}$

зов различных размеров из алюминиевых и магниевых сплавов. В этом случае семейство кривых усталости может быть представлено системой лучей, выходящих из общей точки C , как это схематично показано на рис. 6.25 (ось x направлена слева направо), а уравнение квантильной кривой имеет вид

$$\sigma_{ap} = y_P = b_P(x - x_c), \quad (6.108)$$

где b_P — квантильное значение параметра, подчиняющегося нормальному закону распределения, соответствующему уровню вероятности P ; x_c — отрезок, отсекаемый кривой усталости на оси абсцисс (для натурных элементов конструкций с неполированной поверхностью можно принять $x_c = 0$).

Обработку результатов испытаний и построение кривых усталости равной вероятности проводят в указанной ниже последовательности.

1. Для каждого из m уровней амплитуды напряжения определяют оценки среднего значения и дисперсии величины $x = (\lg N)^{-2}$ по формулам

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j}; \quad (6.109)$$

$$s_{xj}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n_j - 1}, \quad (6.110)$$

где \bar{x}_j и s_{xj}^2 — оценки среднего значения и дисперсии указанной случайной величины для j -го уровня амплитуды напряжений ($j = 1, 2, \dots, m$); n_j — число образцов, испытанных на j -м уровне амплитуды напряжений.

2. Через точки с координатами $\sigma_{aj} - \bar{x}_j$ проводят кривую усталости (кривая соответствует вероятности разрушения $P = 0,5$) и по уравнению

$$\bar{y} = \bar{\sigma}_a = b(x - x_c) \quad (6.111)$$

производят оценку параметра b (оценка параметра b может производиться графически или с помощью линейного регрессионного анализа).

3. Производят осредненную оценку коэффициента вариации предельной амплитуды

$$v_{\sigma_a} = b \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{j=1}^m \frac{s_{x_j}^2 (n_j - 1)}{\sigma_{aj}^2}}, \quad (6.112)$$

где $n = \sum_{j=1}^m n_j$ — общее число испытанных объектов.

В случае испытаний всех элементов на одном уровне напряжения коэффициент вариации предельной амплитуды оценивают по формуле

$$v_{\sigma_a} = b \frac{s_x}{\sigma_a}. \quad (6.113)$$

4. Квантильную кривую усталости уровня P проводят через точку C (рис. 6.25) и точку с произвольно выбранной абсциссой x_1 и ординатой y_P , соответствующей этой абсциссе и вероятности P ,

$$y_P = \sigma_{ap} = \bar{\sigma}_a (1 + z_P v_{\sigma_a}), \quad (6.114)$$

где $\bar{\sigma}_a$ — значение ординаты точки кривой усталости для вероятности $P = 0,5$ с абсциссой x_1 ; z_P — P -квантиль нормально распределенной нормированной случайной величины.

Использование предлагаемого метода форсированных испытаний с целью определения предела выносливости образцов и элементов конструкций из деформируемых алюминиевых сплавов для баз 10^8 — 10^9 циклов при удовлетворительной точности приводит к сокращению времени испытаний примерно в 20—200 раз соответственно.

В ряде случаев (при поверхностном упрочнении наклепом, действии повышенных температур, коррозионной среды и т. д.) параметр α уравнения кривой усталости (6.24) не равен двум. Оценку этого параметра производят по результатам форсированных испытаний, причем число уровней амплитуд напряжений в этом случае необходимо увеличить на единицу.

Принимают $x = (\lg N)^{-\alpha}$ и $y = \sigma_a$, по формулам (6.101)—(6.104) для ряда значений α оценивают параметры уравнения (6.106) и по формуле (6.105) подсчитывают меру рассеяния вокруг линии регрессии. За оценку параметра α принимают значение, соответствующее минимуму рассеяния Q .

Ускоренный метод оценки медианы предела выносливости Про. Ускоренный метод испытаний на усталость Про предусматривает испытание объектов до разрушения при линейной возрастающей амплитуде цикла напряжений [3]. В зависимости от конструкции испытательной машины возрастание напряжений может быть ступенчатым или непрерывным.

Для определения предела выносливости методом Про необходимо испытывать не менее трех-четырех серий объектов. Скорость возрастания амплитуды напряжений для каждой серии объектов принимают различной.

Максимальную скорость нагружения выбирают с таким расчетом, чтобы напряжение в момент разрушения не превышало предела текучести материала. Минимальную скорость назначают по возможности низкой. Однако необходимо учитывать, что длительность испытаний по методу Про определяется в основном испытаниями при минимальной скорости нагружения, т. е. эффективность рассматриваемого метода во многом зависит от уровня минимальной скорости возрастания напряжений.

Обычно скорости возрастания амплитуды напряжений выбирают в диапазоне $5 \cdot 10^{-5}$ — $5 \cdot 10^{-4}$ МПа/цикл.

Испытания всех серий производят при одинаковой начальной амплитуде цикла напряжений, величину которой для чугунов и сталей выбирают на 10—15 % выше предполагаемой величины предела выносливости. Для легких сплавов начальную амплитуду напряжений принимают равной ожидаемой величине предела выносливости для базы 10^7 циклов. По мере увеличения уровня начальной амплитуды напряжения до указанных значений увеличивается эффективность ускоренных испытаний.

Предел выносливости при ускоренных испытаниях по методу Про определяют из уравнения

$$\sigma_p = \sigma_{-1} + k\alpha^c, \quad (6.115)$$

где σ_p — медиана разрушающей амплитуды цикла напряжений при испытании с данной скоростью возрастания напряжений; k и c — параметры; α — скорость возрастания амплитуды напряжения.

Зависимость, построенная по уравнению (6.115) в координатах $y = \sigma_p$ и $x = \alpha^c$, изображается прямой, уравнение которой

$$Y = a + bx, \quad (6.116)$$

где $a = \sigma_{-1}$, $b = k$.

Для оценки предела выносливости методом последовательных приближений подбирают такое значение c , при котором отклонение экспериментальных точек от прямой (6.116) будет минимальным.

Оценки параметров a и b при заданном значении c вычисляют методом наименьших квадратов по формулам (6.101)—(6.104), в которых для данного случая нужно использовать следующие обозначения: $x_i = \alpha_i^c$; y_i — медиана разрушающей амплитуды напряжений; $y_i = \sigma_{pi}$; m — число скоростей возрастания амплитуды напряжений; n_i — число испытанных объектов на i -й скорости нагружения.

За медиану разрушающей амплитуды цикла напряжений при нечетном числе объектов, испытанных при одной скорости возрастания нагрузок, принимают разрушающую амплитуду среднего объекта в вариационном ряду. При четном числе объектов медиану разрушающей амплитуды определяют как полусумму разрушающих амплитуд двух средних объектов вариационного ряда.

Мерой рассеяния экспериментальных точек вокруг линии регрессии (6.116) является величина Q , определяемая выражением (6.105).

Для большинства материалов значение параметра c находится в диапазоне 0,3—0,5.

Для легких сплавов, сталей и чугунов систематическая ошибка при оценке предела выносливости ускоренным методом Про, как правило, не превышает 4—6 %. Случайная относительная средняя квадратическая ошибка зависит от объема испытаний и определяется из уравнения

$$\delta_{\sigma_{-1}} = \frac{\gamma_{\sigma_{-1}}}{\sqrt{Vn}} \sqrt{1 + \frac{(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (6.117)$$

где v_i — относительный объем испытаний на i -м уровне скорости нагружения.

Случайная относительная средняя квадратическая ошибка оценки предела выносливости принимает минимальное значение при равномерном распределении объектов испытаний по уровням скоростей нагружения, т. е. при $v_i = n/m = \text{const}$.

Анализ результатов ускоренных испытаний методом Про показал, что для объектов с коэффициентом вариации предела выносливости $\gamma_{\sigma_{-1}} \leq 0,1$ число объектов для надежной оценки медианы предела выносливости должно составлять 8—12, для $\gamma_{\sigma_{-1}} \geq 0,15$ $n = 12 \div 20$.

Для легких сплавов величина предела выносливости, найденная по уравнению (6.115), соответствует базе 10^7 циклов [28]. Определение предела выносливости для образцов и элементов конструкции из легких деформируемых сплавов для других баз по результатам испытаний с возрастающей амплитудой цикла напряжений можно производить по формуле

$$(\sigma_{-1})_N = d (\sigma_{-1})_{10^7}, \quad (6.118)$$

где d — коэффициент, связанный с базой N_b выражением;

$$d = 0,45 + 26,95 (\lg N_b)^{-2}. \quad (6.119)$$

Метод Про при оценке медианы предела выносливости дает экономию во времени примерно в 10 раз и не дает экономии в числе объектов испытания по сравнению с обычным методом.

Оценка медианы предела выносливости по методу Про производится в такой последовательности:

1) разрушающие напряжения для объектов, испытанных при одном уровне скорости возрастания амплитуды напряжений, располагают в вариационный ряд в порядке возрастания;

2) определяют медиану разрушающих напряжений для каждого уровня скорости возрастания амплитуды;

3) задаются рядом значений параметра c и вычисляют параметры a и b по формулам (6.101)–(6.104) и меру рассеяния экспериментальных данных вокруг прямой линии регрессии по формуле (6.105);

4) определяют значение параметра c , дающее минимум отклонения экспериментальных точек от прямой (6.116);

5) оценивают предел выносливости ($\sigma_{-1} = a$) для установленного значения параметра c .

Пример 6.14. По результатам ускоренных испытаний, приведенных в табл. 6.20, определить предел выносливости гладких полированых образцов из алюминиевого сплава типа АВ при симметричном изгибе с вращением на базе 10^8 циклов. При каждой из пяти скоростей нагружения испытывали по четыре образца, причем в табл. 6.20 приведены оценки медиан и средних квадратических отклонений разрушающих амплитуд напряжений.

Задаемся рядом значений параметра $c = 0,3; 0,4; 0,5$. Так как при каждой скорости возрастания напряжений было испытано одинаковое число образцов, то меру рассеяния вычисляем по формуле

$$Q = \sum_{i=1}^m (y_i - Y_i)^2. \quad (6.120)$$

Последовательность вычисления параметров a и b и меры рассеяния Q для $c = 0,3$ приведена в табл. 6.21.

Для $n_i = \text{const} = 4$ оценки параметров

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} = \frac{0,35439}{5} = 0,070878;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m} = \frac{998}{5} = 199,6 \text{ МПа};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1,382036}{0,0013054} = 1059;$$

$$a = 199,6 - 1059 \cdot 0,070878 = 124,5 \text{ МПа};$$

$$Q = 16,41.$$

6.20. Значения медиан и средних квадратических отклонений разрушающих амплитуд напряжений для различных скоростей нагружения

$\alpha \cdot 10^4$, МПа/цикл	σ_p , МПа	$s_{\sigma_p}^2$	$\alpha \cdot 10^4$, МПа/цикл	σ_p , МПа	$s_{\sigma_p}^2$
0,34	173	101,4	2,56	211	96,7
0,87	190	84,8	3,34	223	95,0
1,70	201	110,6			
Сумма					488,5

6.21. Результаты вычисления оценок параметров a и b и меры рассеяния Q при $c = 0,3$

$\alpha \cdot 10^4$, МПа/цикл	$x_i = \alpha_i^c$	$y_i = \sigma_{pi}$, МПа	bx_i	Y_i	$y_i - Y_i$	$(y_i - Y_i)^2$
0,34	0,04565	173	48,3	172,8	0,2	0,04
0,87	0,06051	190	64,1	188,6	1,4	1,96
1,70	0,07398	201	78,3	202,8	-1,8	3,24
2,56	0,08365	211	88,6	213,1	-2,1	4,41
3,34	0,09060	223	95,9	220,4	2,6	6,76
Сумма	0,35439	998				16,41

6.22. Значения оценок параметров a и b и меры рассеяния Q для разных c

c	$a = \sigma_{-1}$, МПа	b	Q
0,3	124,5	1059	16,41
0,4	141,7	1950	14,35
0,5	150,5	3931	14,74

В табл. 6.22 приведены значения оценок параметров a и b и меры рассеяния Q для при-
нятых значений c ($c = 0,3; 0,4; 0,5$). Минимальное рассеяние соответствует значению па-
раметра c , лежащему внутри интервала 0,4–0,5.

Для значения $c = 0,45$ подсчитываем меру рассеяния Q , которая составляет 13,66. Па-

раметры прямой в этом случае: $a = \sigma_{-1} = 147,3$ МПа; $b = 2718$.
Дальнейшее уточнение параметра c , как показал анализ полученных результатов, мо-
жет привести к изменению определяемого значения предела выносливости на 1–3 %, что
не превышает систематическую ошибку метода.

Таким образом, за медиану предела выносливости сплава на базе 10^8 циклов по данным
ускоренных испытаний методом Про следует принять величину $(\sigma_{-1})_{10^8} = 147,3$ МПа.

По формулам (6.118) и (6.119) находим оценку медианы предела выносливости для базы
 10^8 циклов

$$(\sigma_{-1})_{10^8} = [0,45 + 26,95 (\lg 10^8)^{-2}] 147,3 = 128,3 \text{ МПа}.$$

Объем испытаний методом Про можно сократить в 1,5–2 раза при использовании
априорного значения параметра c уравнения (6.115). В этом случае испытания целе-
образно проводить при двух скоростях возрастания амплитуды напряжений.

Оценка параметра c может быть произведена по результатам уже проведенных
ускоренных испытаний аналогичных материалов и элементов конструкций. Так,
например, при переменном изгибе образцов из сталей 45 и 30ХГСА и переменном
кручении образцов из высокопрочного чугуна параметр c принимает значения,

ближкие к 0,3 [25]. Для алюминиевых сплавов средней прочности при испытании на переменный изгиб можно принять $c = 0,33$, для высокопрочных сплавов $c = 0,37$. Абсолютные размеры поперечного сечения образцов не оказывают заметного влияния на параметр c , концентрация напряжений приводит к некоторому снижению значения параметра [25].

Погрешность в оценке параметра c , равная 0,1, т. е. примерно 30 %, приводит к ошибке определения предела выносливости в среднем на 8–10 %.

Опыт использования ускоренного метода ПРО свидетельствует о возможности его применения для оценки предела выносливости образцов и натурных элементов конструкций, причем в качестве критерия разрушения можно принимать как образование усталостной макротрещины определенного размера, так и окончательное разрушение.

Модифицированный метод ПРО. Статистический анализ результатов массовых испытаний с возрастающей амплитудой цикла напряжений показал, что дисперсия разрушающих амплитуд напряжений не зависит от скорости возрастания амплитуды и уровня начального значения амплитуды цикла напряжений [28]. В связи с этим оценку дисперсии разрушающих амплитуд напряжений для каждого объекта испытаний можно определять, объединяя дисперсии для различных скоростей нагружения и начальных уровней амплитуд:

$$s_{\sigma_p}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) (s_{\sigma_p}^2)_i}{\sum_{i=1}^m n_i - m}, \quad (6.121)$$

где $(s_{\sigma_p}^2)_i$ — дисперсия разрушающих амплитуд цикла напряжений при скорости возрастания α_i .

Из уравнения (6.115) следует, что дисперсия предела выносливости равна дисперсии разрушающих амплитуд цикла напряжений. Поэтому оценка среднего квадратического отклонения предела выносливости может быть найдена по формуле

$$s_{\sigma_{-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) (s_{\sigma_p}^2)_i}{\sum_{i=1}^m n_i - m}}. \quad (6.122)$$

Для легких сплавов формула (6.122) определяет среднее квадратическое отклонение предела выносливости для базы 10^7 циклов. Дисперсия предела выносливости для других баз может быть выражена через дисперсию разрушающих амплитуд напряжений:

$$s_{\sigma_{-1}}^2 = d^2 s_{\sigma_p}^2, \quad (6.123)$$

где d — коэффициент, зависящий от базового числа циклов, определяется уравнением (6.119).

Так, в условиях примера 6.14 (см. табл. 6.24) оценка среднего квадратического отклонения предела выносливости для базы 10^7 циклов в соответствии с формулой (6.122) составит

$$s_{\sigma_{-1}} = \sqrt{\frac{3488,5}{15}} = 9,88 \text{ МПа.}$$

и для базы 10^8 циклов в соответствии с формулами (6.119) и (6.123)

$$s_{\sigma_{-1}} = \sqrt{[0,45 + 26,95 (\lg 10^8)^{-2}]^2 9,88^2} = 8,61 \text{ МПа.}$$

Анализ опытных данных показал, что приведенная методика ускоренной оценки дисперсии предела выносливости дает вполне удовлетворительные результаты как для образцов, так и для натурных деталей.

Относительная средняя квадратическая ошибка оценки среднего квадратического отклонения предела выносливости волях среднего квадратического отклонения предела выносливости определяется из приближенного асимптотического уравнения

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad (6.124)$$

которое может быть использовано для определения необходимого объема испытаний

$$n = 1 + \frac{1}{2\delta^2}. \quad (6.125)$$

Пример 6.15. Определить объем серии объектов, необходимый для оценки среднего квадратического отклонения предела выносливости модифицированным методом ПРО с относительной средней квадратической ошибкой $\delta = 0,1$.

По формуле (6.125) находим

$$n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 0,1^2} = 51.$$

Анализ кривых распределения разрушающих амплитуд напряжений, приведенных в качестве примера на рис. 6.26 для сплавов АВ и МЛ5 (для других легких сплавов и сталей они имеют аналогичный вид), показал, что для каждого материала и типа объекта испытания при различных скоростях возрастания амплитуды цикла напряжений форма и наклон кривых распределения одинаковы, а различаются лишь медианные значения разрушающих амплитуд. Это позволяет по результатам ускоренных испытаний оценивать не только медиану предела выносливости и его дисперсию, а и производить оценку квантильных значений предела выносливости и строить эмпирическую функцию его распределения.

Для этого все результаты ускоренных испытаний для рассматриваемого объекта (m выборок) объединяют в одну общую совокупность путем введения случайной величины

$$x_{ij} = \sigma_{pij} - \hat{\sigma}_{pi}, \quad (6.126)$$

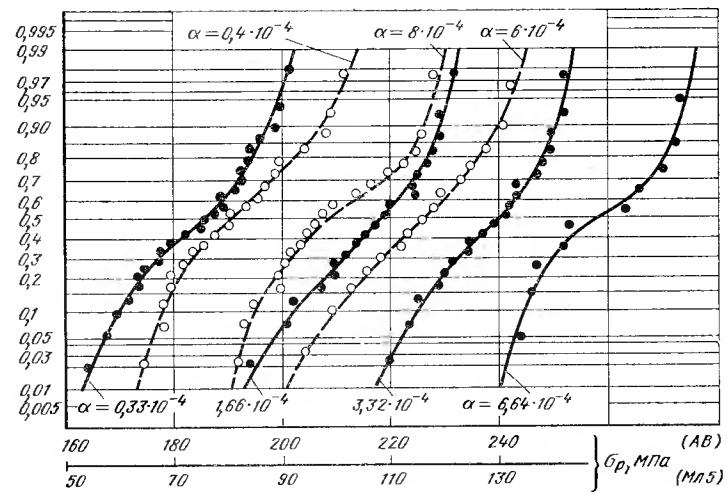


Рис. 6.26. Кривые эмпирических распределений разрушающих амплитуд напряжений для сплавов АВ (сплошные линии, верхняя шкала σ_0) и МЛ5 (штриховые линии, нижняя шкала σ_0)

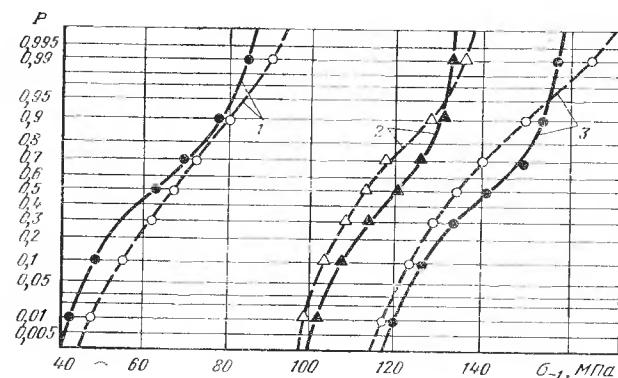


Рис. 6.27. Сопоставление кривых эмпирических распределений пределов ограниченной выносливости, найденных ускоренным (сплошные линии) и обычным (штриховые линии) методами:

1 — сплав МЛ5; $N_b = 10^7$ циклов; 2 — сплав АВ, $N_b = 10^8$ циклов; 3 — сплав АВ, $N_b = 10^7$ циклов

где $\sigma_{p_{ij}}$ — j -й член вариационного ряда разрушающей амплитуды напряжений при i -й скорости нагружения; $\hat{\sigma}_{p_i}$ — оценка медианы разрушающей амплитуды напряжений при i -й скорости нагружения.

Далее строят общий вариационный ряд из $n = \sum_{i=1}^m n_i$ значений x_{ij} и наносят на нормальной вероятностной сетке график эмпирической функции распределения величины x_{ij} .

Квантили предела выносливости $(\hat{\sigma}_{-1})_P$ для уровня вероятности P находят из выражения

$$(\hat{\sigma}_{-1})_P = (\hat{\sigma}_{-1})_{0,5} + \hat{x}_P, \quad (6.127)$$

где $(\hat{\sigma}_{-1})_{0,5}$ — оценка медианы предела выносливости, определяемая по формуле (6.115); \hat{x}_P — оценка квантили величины x_{ij} , определяемая по графику эмпирической функции распределения.

Произведя вычисления по формуле (6.127) для нескольких уровней вероятностей P , строят эмпирическую функцию распределения предела выносливости. Расчет значений предела выносливости элементов из алюминиевых сплавов для базы, отличной от 10^7 циклов, производят с помощью уравнений (6.118) и (6.119).

На рис. 6.27 в качестве примера сопоставлены эмпирические кривые распределения пределов ограниченной выносливости сплавов АВ и МЛ5, построенные по результатам обычных и ускоренных испытаний. Приведенные данные показывают удовлетворительное соответствие характеристик сопротивления усталости, найденных указанными методами. Расхождения в пределах выносливости не превышают 5—8 МПа. Аналогичные результаты получены и для других марок алюминиевых и магниевых сплавов, а также для углеродистой и легированной сталей.

Как уже отмечалось, при использовании метода Про требуется такое же число объектов для оценки медианы предела выносливости, как и при обычных испытаниях. Однако при построении кривой распределения предела выносливости ускоренным методом в связи с возможностью объединения отдельных выборок в единую совокупность для сплавов со стабильными усталостными свойствами число объектов должно составлять лишь 30—40, а для сплавов с повышенной дисперсией усталостных свойств 40—60. Случайная ошибка оценки квантили предела выносливости для малых уровней вероятностей будет такой же, как и при обычном методе испытаний 100—150

объектов. Таким образом, при построении кривой распределения предела выносливости наряду с 10—50-кратным сокращением машинного времени достигается двух-, трехкратная экономия объектов испытаний.

Рассмотренная модификация метода Про [28] позволяет производить оценку характеристик рассеяния усталостных свойств как по окончательному разрушению, так и по образованию макротрешины усталости определенного размера.

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПЛАНИРОВАНИЯ ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

Вследствие высокой относительной стоимости испытаний на усталость, особенно испытаний натурных элементов конструкций, наряду с учетом точности оценок характеристик усталостных свойств и длительности испытаний при планировании эксперимента требуется учет стоимости его подготовки и проведения. Основная цель планирования испытаний считается достигнутой, если требуемая точность и длительность реализованы при таких значениях уровней основных факторов, при которых себестоимость эксперимента становится минимальной.

Вследствие анализа нормативных, справочных и опытных данных [9, 16, 19, 27] получена формула для определения средней себестоимости испытаний на усталость образцов и элементов конструкции:

$$C = n (C_1 + C_2 T), \quad (6.128)$$

где n — общий объем серии объектов испытаний; $C_1 = gC_3 + \frac{2,11 + C_4}{60} [1,11 (t_0 +$

$+ t_B) + 0,065t_0]$; $C_2 = \frac{1,575 + Ak}{60ks}$; g — масса заготовки, кг; C_3 — стоимость 1 кг материала заготовки, руб/кг; C_4 — произведенные затраты за 1 ч работы металлоизделия оборудования, руб/ч; t_0 — основное (технологическое) время на изготовление объекта; t_B — вспомогательное время, ч; A — амортизационные отчисления за 1 ч испытаний, руб.; k — число испытательных установок, одновременно участвующих в испытаниях; s — частота испытаний, циклы/мин; T — функция длительности испытаний, определяемая формулой

$$T = F(N)f + ts \cdot 60; \quad (6.129)$$

где $F(N)$ — функция средней долговечности испытаний, представленная в табл. 6.23; f — функция, учитывающая степень неравномерности распределения объектов испытаний по уровням амплитуд цикла напряжений, представленная в табл. 6.23; t — время на демонтаж разрушенного и установку нового объекта испытаний, ч.

Для сокращения общей длительности испытаний стремится к уменьшению значений функции f , т. е. к смещению основного объема объектов испытаний в сторону высоких значений амплитуд цикла напряжений. Так, снижение значения этой функции с 1,81 до 0,51 (для диапазона средних долговечностей от 10^5 до 10^7 циклов) приводит к сокращению длительности испытаний в 3,6 раза.

При низкой стоимости единицы объекта испытаний (C_1) и высокой стоимости единицы длительности испытаний (C_2) планирование осуществляют так, чтобы требуемая точность обеспечивалась изменением общего объема серии испытаний.

При высокой стоимости единицы объекта испытаний и относительно низкой стоимости самих испытаний требуемая точность обеспечивается понижением наименьшего уровня амплитуды цикла напряжений при испытании, что сокращает степень необходимой экстраполяции кривой усталости или кривой распределения предела выносливости, т. е. увеличением общей длительности испытания.

При соизмеримой стоимости объектов и затрат на 1 ч испытаний наиболее целесообразным является неравномерный симметричный характер распределения объектов по уровням амплитуд напряжений.

6.23. Функции $F(N)$ и f различных видов для испытаний на усталость

Испытания	$F(N)$	f
На нескольких уровнях амплитуд цикла напряжений до разрушения образцов всех серий	$\frac{\sum_{i=1}^m N_i}{m}$	$m \frac{\sum_{i=1}^m v_i N_i}{\sum_{i=1}^m N_i}$
Серии образцов до базовой долговечности	$(1-h) N^* + h N_b$	1
Методом ступенчатого изменения нагрузки	$(N_0 + N^*) 0,5$	1
Методом пробитов и модифицированным методом пробитов	$\frac{N_0 \left(1 - \sum_{i=1}^m v_i P_i\right)}{f} + \frac{\sum_{i=1}^m P_i N_i^*}{\sum_{i=1}^m P_i N_i^*}$	$m \frac{\sum_{i=1}^m v_i P_i N_i^*}{\sum_{i=1}^m P_i N_i^*}$
Методом Про	$\frac{\sum_{i=1}^m N_{pi}}{m}$	$m \frac{\sum_{i=1}^m v_i N_{pi}}{\sum_{i=1}^m N_{pi}}$

Обозначения: N_i — ожидаемая средняя долговечность, соответствующая i -му уровню амплитуды цикла напряжений, определяемая по апрорной кривой усталости; m — планируемое число уровней амплитуд цикла напряжений; $v_i = \frac{n_i}{n}$ — планируемый относительный объем испытаний на i -м уровне; $h = \frac{a}{n}$ — ожидаемая степень усечения выборки; a — количество неразрушившихся образцов до базового числа циклов N_b ; $N^* = \sum_{i=1}^{n-a} N_i / (n - a)$ — ожидаемая средняя долговечность разрушенной части образцов; N_p — ожидаемая средняя долговечность при ускоренных испытаниях, соответствующая уровню амплитуды разрушающего напряжения σ_p .

6.24. Значения объема, времени и стоимости испытаний

Вариант распределения	Распределение образцов	$v_i = n_i/n$				f	$T, ч$	n	$C, руб.$
		$\sigma_{(1)}$	$\sigma_{(2)}$	$\sigma_{(3)}$	$\sigma_{(4)}$				
1	Равномерное	0,25	0,25	0,25	0,25	1	1010	30	14 370
2	Неравномерное симметричное	0,3	0,2	0,2	0,3	1,12	1014	27	13 188
3	То же	0,4	0,1	0,1	0,4	1,36	1116	23	11 671
4	Неравномерное несимметричное	0,5	0,3	0,1	0,1	0,44	1008	61	26 520
5	То же	0,1	0,1	0,3	0,5	1,79	756	13	7 038

Решение задачи оптимального планирования испытаний на усталость вытекает из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 \leq [\delta]_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \delta_r \leq [\delta]_r, \\ T \leq [T], \\ C = C_{\min}, \end{array} \right\} \quad (6.130)$$

где $[\delta]$ — планируемая ошибка определения предела выносливости для заданной базы и заданного уровня вероятности; r — число сочетаний долговечностей и уровней вероятностей, для которых регламентированы требования к точности оценок предела выносливости; $[T]$ — планируемое время испытаний; C_{\min} — минимальная общая стоимость испытаний.

Пример 6.16. Требуется построить кривую усталости для элемента конструкции из алюминиевого сплава в диапазоне долговечности от 10^5 до 10^7 циклов и определить медиану предела выносливости на базе 10^7 циклов с $\delta = 0,4\sigma_{-1}$.

Испытания проводим на одном стенде ($k = 1$) с частотой $s = 2000$ циклов в минуту при четырех уровнях амплитуд цикла напряжений, соответствующих ожидаемым средним долговечностям 10^5 ; $5 \cdot 10^5$; $2 \cdot 10^6$ и 10^7 циклов, значения которых определены на основании предварительно построенной априорной кривой усталости.

Значения необходимого объема испытаний, найденные по формуле (6.42), а также общего времени проведения испытаний для $t = 3$ ч и общей стоимости для $C_1 = 400$ руб. и $C_2 = 25 \cdot 10^{-6}$ руб./цикл приведены в табл. 6.24.

Из табл. 6.24 следует, что оптимальным при поставленных условиях является 5-й вариант, в котором основная часть объектов испытаний смешается в сторону малых амплитуд. Общий объем испытаний должен быть не меньше 13 объектов. На первом наибольшем по величине и втором уровнях амплитуд напряжений испытывают по одному объекту, на третьем и четвертом соответственно по 4 и 7 объектов.

Задача оптимального планирования испытаний на усталость эффективно может быть решена методом последовательных приближений с применением ЭВМ.

ГЛАВА 7

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛИТЕЛЬНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Испытания на длительную статическую прочность (ползучесть) являются прямыми испытаниями, если их конечной целью является определение времени до разрушения (накопления заданной деформации). В случае же построения кривой длительной прочности и дальнейшего определения на ее основании предела длительной прочности (условного предела ползучести) эти испытания имеют косвенный характер.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ОДНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Многочисленные исследования закономерностей рассеяния результатов длительных статических испытаний показали, что долговечность до разрушения или накопления заданной деформации подчиняется логарифмически нормальному закону распределения. Поэтому методика статистической обработки результатов длительных статических испытаний на долговечность подобна методике обработки результатов испытаний на усталость, изложенной на с. 139—141. Необходимый объем испытаний на длительную прочность при одном постоянном уровне напряжения и температуры определяется по методике, изложенной на с. 44—50.

Кривые длительной прочности при постоянной температуре испытаний обычно строят в логарифмических координатах. Они представляют собой прямую с переломом (рис. 7.1). Иногда перелом не четко выражен, и на кривой имеется переходный криволинейный участок. Перелом кривой длительной прочности связан с изменением характера разрушения при различных длительностях испытаний и происходит при неодинаковой долговечности (от минут до тысяч часов) в зависимости от вида материала, уровня напряжения и температуры испытаний. Для ряда материалов (алюминиевые сплавы) не обнаруживается переломов кривой длительной прочности, в то время как для других можно наблюдать несколько таких переломов.

Кривая длительной прочности при постоянной температуре испытания в обеих частях (до и после перелома) достаточно хорошо описывается степенным уравнением

$$t = A_1 \sigma^{-\alpha} \quad (7.1)$$

или

$$\lg t = A - \alpha \lg \sigma, \quad (7.2)$$

где t — время до разрушения или накопления заданной деформации ε ; A и α — константы материала, зависящие от температуры испытаний.

Оценку параметров уравнения кривой длительной прочности (7.2) находят на основании линейного регрессионного анализа для случая детерминированной независимой величины, основные требования которого удовлетворяются, если в качестве случайной величины взять $y = \lg t$, а в качестве независимой $x = \lg \sigma$.

При ограниченном объеме испытаний на длительную статическую прочность на основании линейного регрессионного анализа определяют параметры эмпирической линии регрессии для каждого участка кривой:

$$Y = a + b(x - \bar{x}), \quad (7.3)$$

т. е. устанавливают уравнение отдельных участков кривой длительной статической прочности, соответствующей вероятности $P = 0,5$.

Параметры уравнения кривой длительной прочности (7.2) связаны с параметрами уравнения эмпирической линии регрессии (7.3) соотношениями $A = a - b\bar{x}$ и $\alpha = -b$.

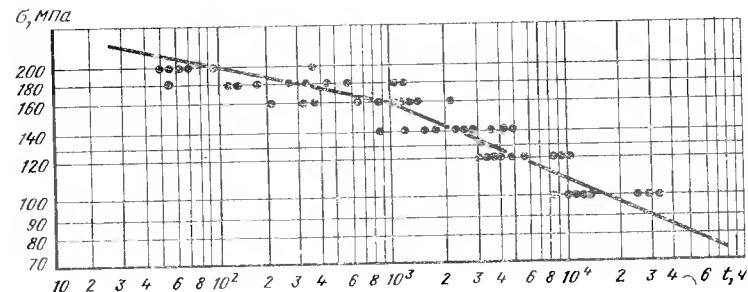


Рис. 7.1. Кривая длительной прочности стали (0,12% C; 0,5% Cr; 0,25% V) при температуре $T = 800$ K

Планирование испытаний при построении каждого участка медианной кривой длительной прочности при постоянной температуре испытаний производят по методике, изложенной на с. 154—156.

При большом объеме испытаний строят семейства квантильных кривых длительной прочности для фиксированных уровней вероятностей. Для этой цели может быть использован графический метод, а также линейный регрессионный анализ.

Планирование испытаний при построении квантильной кривой длительной статической прочности для вероятности P и постоянной температуры производят по методике, представленной на с. 163—165, для каждого из его участков в отдельности. При одном типе разрушения образцов следует проводить испытания на трех-четырех уровнях напряжения.

Для статистического описания рассеяния предела длительной прочности (условного предела ползучести) используют нормальный закон распределения.

График эмпирической функции распределения предела длительной прочности (условного предела ползучести) при постоянной температуре испытания можно получить методом пробитов, модифицированным методом пробитов, методом ступенчатого изменения нагрузки, а также графическим путем. Первые три метода изложены в гл. 6 применительно к построению графика эмпирической функции распределения предела выносливости. В этом виде они могут быть использованы для оценки параметров и построения графика эмпирической функции распределения предела длительной статической прочности или условного предела ползучести, а также для планирования испытаний.

Графический метод предусматривает предварительное построение семейства квантильных кривых длительной прочности для достаточно широкого интервала вероятностей (желательно от 0,01 до 0,99). По кривым длительной прочности для выбранной базы и уровней вероятностей определяют пределы длительной прочности (условные предела ползучести). На основании этих данных в нормальных вероятностных координатах строят график указанной функции.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

При определении сопротивления длительному статическому разрушению в диапазоне температур, характерном условиям эксплуатации элементов конструкций, возникает необходимость интерполяции характеристик механических свойств внутри интервала температуры при испытаниях, а также экстраполяции за указанный интервал. Для этой цели используют параметрические уравнения длительной прочности.

Применительно к алюминиевым сплавам, жаропрочным сталим и никелевым сплавам удовлетворительное соответствие опытным данным при отсутствии переломов кривой длительной прочности имеет уравнение Ларсона—Миллера

$$V = f(\sigma) = T(c + \lg t), \quad (7.4)$$

где V — температурно-временной параметр Ларсона—Миллера, зависящий от напряжения при испытании; T — температура испытаний, К; c — постоянная материала; t — время до разрушения (накопления заданной деформации).

Для большинства жаропрочных сплавов величина постоянной c колеблется в диапазоне 15–30.

Оценку постоянной c для конкретного материала производят на основании результатов испытаний на длительную прочность, причем на одном уровне напряжений должны быть определены долговечности образцов как минимум при двух температурах. Исследования показали, что величина напряжения при испытании не оказывает замкнутого влияния на уровень постоянной c .

В случае испытания на одном уровне напряжения при двух температурах T_1 и T_2 оценку постоянной c производят по формуле

$$\hat{c} = \frac{T_2 \lg t_2 - T_1 \lg t_1}{T_1 - T_2}, \quad (7.5)$$

где t_1 и t_2 — долговечности образцов при испытании при температуре соответственно T_1 и T_2 .

Если при каждой из указанных температур испытывают по несколько образцов, то в формулу (7.5) следует подставить значения средних арифметических логарифмов долговечностей, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \overline{\lg t_1} &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \lg t_{1i}}{n_1}; \\ \overline{\lg t_2} &= \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \lg t_{2i}}{n_2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

где n_1 и n_2 — число испытанных образцов при температуре соответственно T_1 и T_2 .

При испытаниях на одном уровне напряжения при более чем двух температурах оценку постоянной c производят с помощью линейного регрессионного анализа. Уравнение эмпирической линии регрессии записывают в виде (5.67) для $x = 1/T$ и $y = \lg t$. Параметры этого уравнения оценивают по формулам (5.69)–(5.71), где для рассматриваемого случая m — число уровней температур испытания, n_i — числа испытанных образцов при i -й температуре, ω_i — величина, учитывающая зависимость дисперсии логарифма долговечности от температуры испытания. Эту величину принимают обратной значению выборочной дисперсии логарифма долговечности или прямо пропорциональной квадрату температуры испытаний [18], т. е.

$$\omega_i = AT_i^2,$$

где A — произвольная постоянная, величину которой выбирают из удобства расчета ω_i .

Оценка постоянной c связана с параметрами уравнения (5.67) зависимостью $c = -a + b\bar{x}$. Если испытания проводились на нескольких уровнях напряжения, при каждом из которых найдены оценки \hat{c}_j , то вычисляют осредненную оценку постоянной c :

$$\hat{c} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j \hat{c}_j}{\sum_{j=1}^k n_j},$$

где k — число уровней напряжения при испытаниях, по результатам которых оценивалась величина постоянной c ; n_j — общее число испытаний на j -м уровне напряжения; \hat{c}_j — оценка постоянной c по результатам испытаний на j -м уровне напряжения.

Для построения кривой длительной прочности, соответствующей температуре T^* , при которой непосредственные испытания не проводились, вначале по экспериментальным значениям долговечностей по формуле (7.4) для всех уровней напряжения вычисляют значения температурно-временного параметра V и строят зависимость значения этого параметра от уровня напряжения $V = f(\sigma)$. Если при одинаковых условиях испытания (напряжение, температура) испытано несколько образцов, то в формулу (7.4) следует подставить среднее арифметическое логарифмов, то в формулу (7.4) следует подставить среднее арифметическое логарифмов, определяемое по формуле (7.6). Далее, по графику $V = f(\sigma)$ для ряда значений напряжения определяют величины параметра V и на основании формулы

$$\lg t = \frac{V}{T^*} - \hat{c} \quad (7.7)$$

вычисляют соответствующие значения долговечности. Выбранные уровни напряжения и вычисленные значения долговечности позволяют построить кривую длительной статической прочности для температуры T^* . Аналогичным путем можно построить семейство кривых длительной прочности для ряда значений температур.

Вместо графика функции $V = f(\sigma)$ используют также аналитические выражения вида [20]

$$\lg \sigma = a_0 + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 V^3$$

или типа

$$V = \alpha + \beta \lg \sigma + \gamma \lg^2 \sigma,$$

параметры которых определяют методом наименьших квадратов.

При больших объемах испытаний на длительную прочность на каждом из уровней напряжения, позволяющих производить надежную оценку квантилей долговечности $\lg \hat{t}_P$, оценивают квантили температурно-временного параметра $V_P = T(\hat{c} + \lg \hat{t}_P)$ и строят квантильные кривые $V_P = f(\sigma)$, на основании которых по изложенному выше методике строят семейство квантильных кривых длительной прочности для заданной температуры T^* . Соответствующие квантили долговечности рассчитывают по формуле (7.7) с заменой V на V_P . Постоянная c сохраняется неизменной. На основании квантильных кривых длительной статической прочности для выбранной базовой долговечности определяют квантили предела длительной прочности (условного предела ползучести).

Если в зависимости от длительности испытаний меняется характер разрушения образцов и на кривых длительной прочности появляются переломы, то рассмотренную методику следует применять отдельно для левых и отдельно для правых участков кривых, характерных для одного типа разрушения образцов. В этом состоит главный недостаток рассмотренной методики.

В работах [18, 30, 31] приведены более сложные уравнения кривой длительной статической прочности, описывающие поведение кривой на всех ее участках. В указанных работах обосновывается следующая зависимость математического ожидания логарифма долговечности от температуры и напряжения при испытаниях:

$$M(\lg t) = \frac{b - c\sigma - d \lg \sigma}{T} + f \lg T - a, \quad (7.8)$$

где a, b, c, d, f — коэффициенты, постоянные для данной партии материала; для большинства известных марок сталей и сплавов $d = 2400$ и $f = 2$. Оценку остальных параметров находят на основании линейного регрессионного анализа.

В работе [18] принято, что дисперсия величины $y = \lg t$ обратно пропорциональна квадрату температуры испытаний и не зависит от напряжения

$$D \{\lg t\} = \frac{\sigma_z^2}{T^2}, \quad (7.9)$$

где σ_z — постоянная величина для данного материала.

Оценку квантили долговечности уровня P в зависимости от напряжения и температуры испытаний в этом случае находят по формуле

$$\lg \bar{t}_P = f \lg T - a + \frac{b - \hat{c}\sigma - d \lg \sigma + z_P \hat{\sigma}_z}{T}, \quad (7.10)$$

где z_P — квантиль уровня P случайной величины z (1.26).

Оценку квантили предела длительной прочности (условного предела ползучести) σ_P для заданной температуры испытаний и базовой долговечности находят методом последовательных приближений по формуле

$$T (\lg \bar{t} - f \lg T + a) = b - \hat{c}\hat{\sigma}_P - d \lg \hat{\sigma}_P + z_P \hat{\sigma}_z. \quad (7.11)$$

Методика планирования испытаний на длительную статическую прочность с использованием уравнений (7.8)–(7.11) и статистическая обработка результатов подробно изложены в методических указаниях [18] и поэтому в настоящем справочнике не рассматриваются.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. ЗНАЧЕНИЯ НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

z	Сотые доли z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000 *	50 399	50 798	51 197	51 595	51 994	52 392	52 790	53 188	53 586
0,1	53 983	54 380	54 776	55 172	55 567	55 962	56 356	56 749	57 142	57 535
0,2	57 926	58 317	58 706	59 095	59 484	59 871	60 257	60 642	61 026	61 409
0,3	61 791	62 172	62 552	62 930	63 307	63 683	64 058	64 431	64 803	65 173
0,4	65 542	65 910	66 276	66 640	67 003	67 365	67 724	68 082	68 439	68 793
0,5	69 146	69 497	69 847	70 194	70 540	70 884	71 226	71 566	71 904	72 240
0,6	72 575	72 907	73 237	73 565	73 891	74 215	74 537	74 857	75 175	75 490
0,7	75 804	76 115	76 424	76 731	77 035	77 337	77 637	77 935	78 231	78 524
0,8	78 815	79 103	79 389	79 673	79 955	80 234	80 511	80 785	81 057	81 327
0,9	81 594	81 859	82 121	82 381	82 639	82 894	83 147	83 398	83 646	83 891
1,0	84 135	84 375	84 614	84 850	85 083	85 314	85 543	85 769	85 993	86 214
1,1	86 433	86 650	86 864	87 076	87 286	87 493	87 698	87 900	88 100	88 298
1,2	88 493	88 686	88 877	89 065	89 251	89 435	89 617	89 796	89 973	90 147
1,3	90 320	90 490	90 658	90 824	90 988	91 149	91 309	91 466	91 621	91 774
1,4	91 924	92 073	92 220	92 364	92 507	92 647	92 786	92 922	93 056	93 189
1,5	93 319	93 448	93 574	93 699	93 822	93 943	94 062	94 179	94 295	94 408
1,6	94 520	94 630	94 738	94 845	94 950	95 053	95 154	95 254	95 352	95 449
1,7	95 543	95 637	95 728	95 818	95 907	95 994	96 080	96 164	96 246	96 327
1,8	96 407	96 485	96 562	96 638	96 712	96 784	96 856	96 926	96 995	97 062
1,9	97 128	97 193	97 257	97 320	97 381	97 441	97 500	97 558	97 615	97 670
2,0	97 725	97 778	97 831	97 882	97 932	97 982	98 030	98 077	98 124	98 169
2,1	98 214	98 257	98 300	98 341	98 382	98 422	98 461	98 500	98 537	98 574
2,2	98 610	98 645	98 679	98 713	98 745	98 778	98 809	98 840	98 870	98 899
2,3	98 928	98 956	98 983	99 010	99 036	99 061	99 086	99 111	99 134	99 158
2,4	99 180	99 202	99 224	99 245	99 266	99 286	99 305	99 324	99 343	99 361
2,5	99 379	99 396	99 413	99 430	99 446	99 461	99 477	99 492	99 506	99 520
2,6	99 534	99 547	99 560	99 573	99 585	99 598	99 609	99 621	99 632	99 643
2,7	99 653	99 664	99 674	99 683	99 693	99 702	99 711	99 720	99 728	99 736
2,8	99 744	99 752	99 760	99 767	99 774	99 781	99 788	99 795	99 801	99 807
2,9	99 813	99 819	99 825	99 831	99 836	99 841	99 846	99 851	99 856	99 861
3,0	99 865	99 869	99 874	99 878	99 882	99 886	99 889	99 893	99 896	99 900
3,1	99 903	99 906	99 910	99 913	99 916	99 918	99 921	99 924	99 926	99 929
3,2	99 931	99 934	99 936	99 938	99 940	99 942	99 944	99 946	99 948	99 950
3,3	99 952	99 953	99 955	99 957	99 958	99 960	99 961	99 962	99 964	99 965
3,4	99 966	99 968	99 969	99 970	99 971	99 972	99 973	99 974	99 975	99 976
3,5	99 977	99 978	99 978	99 979	99 980	99 981	99 982	99 983	99 984	99 985
3,6	99 984	99 985	99 985	99 986	99 986	99 987	99 987	99 988	99 988	99 989
3,7	99 989	99 990	99 990	99 990	99 991	99 991	99 992	99 992	99 992	99 992
3,8	99 993	99 993	99 993	99 994	99 994	99 994	99 994	99 994	99 995	99 995
3,9	99 995	99 995	99 996	99 996	99 996	99 996	99 996	99 996	99 997	99 997
4,0	99 997	99 998	99 999	99 999	99 999	—	—	—	—	—

Примечание. $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

* У всех остальных значений функции Лапласа разряд целых также равен нулю, и поэтому в таблице приведены только десятичные знаки.

II. ЗНАЧЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ НОРМИРОВАННОГО

$$\text{НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ } \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

z	Сотые доли z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39 894	39 892	39 886	39 876	39 862	39 844	39 822	39 797	39 767	39 733
0,1	39 695	39 654	39 608	39 559	39 505	39 448	39 387	39 322	39 253	39 181
0,2	39 104	39 024	38 940	38 853	38 762	38 667	38 568	38 466	38 361	38 251
0,3	38 139	38 023	37 903	37 780	37 654	37 524	37 391	37 255	37 115	36 973
0,4	36 827	36 678	36 526	36 371	36 213	36 053	35 889	35 723	35 553	35 381
0,5	35 207	35 029	34 849	34 667	34 482	34 294	34 105	33 912	33 718	33 521
0,6	33 322	33 121	32 918	32 713	32 506	32 297	32 086	31 874	31 659	31 443
0,7	31 225	31 006	30 785	30 563	30 339	30 114	29 887	29 659	29 430	29 200
0,8	28 969	28 737	28 504	28 269	28 034	27 798	27 562	27 324	27 086	26 848
0,9	26 609	26 369	26 129	25 888	25 647	25 406	25 164	24 923	24 681	24 439
1,0	24 197	23 955	23 713	23 471	23 230	22 988	22 747	22 506	22 265	22 025
1,1	21 785	21 546	21 307	21 069	20 831	20 594	20 357	20 121	19 886	19 652
1,2	19 419	19 186	18 954	18 724	18 494	18 265	18 037	17 810	17 585	17 360
1,3	17 137	16 915	16 694	16 474	16 256	16 038	15 822	15 608	15 395	15 183
1,4	14 973	14 764	14 556	14 350	14 146	13 943	13 742	13 542	13 344	13 147
1,5	12 952	12 758	12 566	12 376	12 188	12 001	11 816	11 632	11 450	11 270
1,6	11 092	10 915	10 741	10 567	10 396	10 226	10 059	09 893	09 728	09 566
1,7	09 405	09 246	09 089	08 933	08 780	08 628	08 478	08 329	08 183	08 038
1,8	07 895	07 754	07 614	07 477	07 341	07 206	07 074	06 943	06 814	06 687
1,9	06 562	06 438	06 316	06 195	06 077	05 960	05 844	05 730	05 618	05 508
2,0	05 399	05 292	05 186	05 082	04 980	04 879	04 780	04 682	04 586	04 491
2,1	04 398	04 307	04 217	04 128	04 041	03 955	03 871	03 788	03 706	03 626
2,2	03 547	03 470	03 394	03 319	03 246	03 174	03 103	03 034	02 965	02 898
2,3	02 833	02 768	02 705	02 643	02 582	02 522	02 463	02 406	02 349	02 294
2,4	02 239	02 186	02 134	02 083	02 033	01 984	01 936	01 888	01 842	01 797
2,5	01 753	01 709	01 667	01 625	01 585	01 545	01 506	01 468	01 431	01 394
2,6	01 358	01 323	01 289	01 256	01 223	01 191	01 160	01 130	01 100	01 071
2,7	01 042	01 014	00 987	00 961	00 935	00 909	00 885	00 861	00 837	00 814
2,8	00 792	00 770	00 748	00 727	00 707	00 687	00 668	00 649	00 631	00 613
2,9	00 595	00 578	00 562	00 545	00 530	00 514	00 499	00 485	00 470	00 457
3,0	00 443	00 430	00 417	00 405	00 393	00 381	00 370	00 358	00 348	00 337
3,1	00 327	00 317	00 307	00 298	00 288	00 279	00 271	00 262	00 254	00 246
3,2	00 238	00 231	00 224	00 216	00 210	00 203	00 196	00 190	00 184	00 178
3,3	00 172	00 167	00 161	00 156	00 151	00 146	00 141	00 136	00 132	00 127
3,4	00 123	00 119	00 115	00 111	00 107	00 104	00 100	00 097	00 094	00 090
3,5	00 087	00 084	00 081	00 079	00 076	00 073	00 071	00 068	00 066	00 063
3,6	00 061	00 059	00 057	00 055	00 053	00 051	00 049	00 047	00 046	00 044
3,7	00 042	00 041	00 039	00 038	00 037	00 035	00 034	00 033	00 031	00 030
3,8	00 029	00 028	00 027	00 026	00 025	00 024	00 023	00 022	00 021	00 021
3,9	00 020	00 019	00 018	00 018	00 017	00 016	00 016	00 015	00 014	00 014
4,0	00 013	00 013	00 012	00 012	00 011	00 011	00 011	00 010	00 010	00 009

П р и м е ч а н и я. 1. У всех значений плотности вероятности разряд целых равен нулю, и поэтому приведены только десятичные знаки.
2. $\varphi(-z) = \varphi(z)$.

III. ЗНАЧЕНИЯ КВАНТИЛей НОРМИРОВАННОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ z_p УРОВНЯ P

P	Тысячные доли P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	0,000	0,003	0,005	0,008	0,010	0,013	0,015	0,018	0,020	0,023
0,51	0,025	0,028	0,030	0,033	0,035	0,038	0,040	0,043	0,045	0,048
0,52	0,050	0,053	0,055	0,058	0,060	0,063	0,065	0,068	0,070	0,073
0,53	0,075	0,078	0,080	0,083	0,085	0,088	0,090	0,093	0,095	0,098
0,54	0,100	0,103	0,105	0,108	0,111	0,113	0,116	0,118	0,121	0,123
0,55	0,126	0,128	0,131	0,133	0,136	0,138	0,141	0,143	0,146	0,148
0,56	0,151	0,154	0,156	0,159	0,161	0,164	0,166	0,169	0,171	0,174
0,57	0,176	0,179	0,181	0,184	0,187	0,189	0,192	0,194	0,197	0,199

Продолжение табл. III

P	Тысячные доли P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,58	0,202	0,204	0,207	0,210	0,212	0,215	0,217	0,220	0,224	0,225
0,59	0,228	0,230	0,235	0,238	0,240	0,243	0,246	0,248	0,251	0,253
0,60	0,253	0,256	0,259	0,261	0,264	0,266	0,272	0,274	0,277	0,277
0,61	0,279	0,282	0,285	0,287	0,290	0,292	0,295	0,298	0,300	0,303
0,62	0,305	0,308	0,311	0,313	0,316	0,319	0,321	0,324	0,327	0,329
0,63	0,332	0,334	0,337	0,340	0,342	0,345	0,348	0,350	0,353	0,356
0,64	0,358	0,361	0,364	0,366	0,369	0,372	0,375	0,377	0,380	0,383
0,65	0,385	0,388	0,391	0,393	0,396	0,399	0,402	0,404	0,407	0,410
0,66	0,412	0,415	0,418	0,421	0,423	0,426	0,429	0,432	0,434	0,437
0,67	0,440	0,443	0,445	0,448	0,451	0,454	0,457	0,459	0,462	0,465
0,68	0,468	0,470	0,473	0,476	0,479	0,482	0,485	0,487	0,490	0,493
0,69	0,496	0,499	0,502	0,504	0,507	0,510	0,513	0,516	0,519	0,522
0,70	0,524	0,527	0,530	0,533	0,536	0,539	0,542	0,545	0,548	0,550
0,71	0,553	0,556	0,559	0,562	0,565	0,568	0,571	0,574	0,577	0,580
0,72	0,583	0,586	0,589	0,592	0,595	0,598	0,601	0,604	0,607	0,610
0,73	0,613	0,616	0,619	0,622	0,625	0,628	0,631	0,634	0,637	0,640
0,74	0,643	0,646	0,650	0,653	0,656	0,659	0,662	0,665	0,668	0,671
0,75	0,674	0,678	0,681	0,684	0,687	0,690	0,693	0,697	0,700	0,703
0,76	0,706	0,710	0,713	0,716	0,719	0,722	0,726	0,729	0,732	0,736
0,77	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755	0,759	0,762	0,765	0,769
0,78	0,772	0,776	0,779	0,782	0,786	0,789	0,793	0,796	0,800	0,803
0,79	0,806	0,810	0,813	0,817	0,820	0,824	0,827	0,831	0,834	0,838
0,80	0,842	0,845	0,849	0,852	0,856	0,860	0,863	0,867	0,871	0,874
0,81	0,879	0,882	0,885	0,889	0,893	0,896	0,900	0,904	0,908	0,912
0,82	0,915	0,919	0,923	0,927	0,931	0,935	0,938	0,942	0,946	0,950
0,83	0,954	0,958	0,962	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982	0,986	0,990
0,84	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	1,058	1,063	1,067	1,071	1,076
0,85	1,080	1,085	1,089	1,094	1,098	1,103	1,108	1,112	1,117	1,122
0,86	1,126	1,131	1,136	1,141	1,146	1,150	1,155	1,160	1,165	1,170
0,87	1,175	1,180	1,185	1,190	1,195	1,200	1,206	1,211	1,216	1,221
0,88	1,227									

**V. ЗНАЧЕНИЯ α -ПРЕДЕЛОВ $t_{\alpha, k}$ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЮДЕНТА
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ k .**

k	α					
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	6,314	12,706	25,452	63,657	127,3	636,5
2	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089	31,600
3	2,353	3,182	4,177	5,841	7,453	12,922
4	2,132	2,776	3,495	4,604	5,597	8,610
5	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317	5,959
7	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029	5,408
8	1,860	2,306	2,752	3,355	3,833	5,041
9	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690	4,781
10	1,812	2,228	2,634	3,169	3,581	4,587
12	1,782	2,179	2,560	3,055	3,428	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,977	3,326	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,921	3,252	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,878	3,193	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,845	3,153	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,819	3,119	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,797	3,092	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,779	3,067	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,763	3,047	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,750	3,030	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807	3,291

Примечание. При $k > 30$ $t_{\alpha, k} = z_{1-\alpha/2}$ (см. табл. 111 приложения).

**VI. ЗНАЧЕНИЯ КВАНТИЛИ χ_{α}^2 В ЗАВИСИМОСТИ
ОТ УРОВНЯ ВЕРОЯТНОСТИ И ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ k**

k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2)$						
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,75	0,50
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,016	0,101	0,455
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,39
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,46	5,35
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,26	6,35
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34
9	1,74	2,09	2,70	3,32	4,17	5,90	8,34
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,86	6,74	9,34
11	2,60	3,05	3,82	4,58	5,58	7,58	10,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3
13	3,56	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3
14	4,08	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3

Продолжение табл. VI

k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2)$						
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,75	0,50
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3
18	6,26	7,02	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,6	14,6	18,3
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,4	19,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,8	26,3
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3

k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2)$					
	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,32	2,71	3,48	5,02	6,64	7,88
2	2,77	4,60	5,99	7,38	9,21	10,6
3	4,11	6,25	7,82	9,35	11,3	12,8
4	5,38	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,6
7	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	12,6	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	14,8	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	18,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	19,4	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	22,7	27,2	30,1	32,8	36,2	38,6
20	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	31,5	36,7	40,1	43,9	47,0	49,6
28	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	33,7	39,1	42,6	45,7	49,5	52,3
30	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7

Примечание. Для $k > 30$ χ_{α}^2 вычисляют по формуле (2.48) или (2.49).

VII. ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА t ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КВАНТИЛИ t_{β}

u	k					
	2	3	4	5	6	7

 $\alpha = 0,1$

-1,00	1,0348	1,0864	1,1160	1,1357	1,1499	1,1608
-0,95	1,0549	1,1001	1,1265	1,1442	1,1572	1,1672
-0,90	1,0797	1,1165	1,1389	1,1544	1,1658	1,1747
-0,85	1,1081	1,1351	1,1530	1,1658	1,1755	1,1831
-0,80	1,1386	1,1551	1,1681	1,1781	1,1859	1,1923
-0,70	1,1993	1,1962	1,1997	1,2040	1,2081	1,2117
-0,60	1,2535	1,2354	1,2307	1,2299	1,2304	1,2315
-0,50	1,2977	1,2702	1,2593	1,2543	1,2519	1,2508
-0,40	1,3304	1,2995	1,2846	1,2765	1,2718	1,2689
-0,30	1,3523	1,3228	1,3060	1,2960	1,2897	1,2853
-0,20	1,3650	1,3405	1,3236	1,3126	1,3052	1,3000
-0,10	1,3709	1,3531	1,3374	1,3264	1,3185	1,3127
0,00	1,3720	1,3615	1,3479	1,3374	1,3295	1,3235
0,10	1,3701	1,3665	1,3555	1,3460	1,3384	1,3324
0,20	1,3666	1,3692	1,3608	1,3524	1,3454	1,3396
0,30	1,3625	1,3701	1,3642	1,3571	1,3507	1,3453
0,40	1,3583	1,3699	1,3662	1,3604	1,3547	1,3498
0,50	1,3546	1,3691	1,3673	1,3626	1,3576	1,3531
0,60	1,3516	1,3682	1,3678	1,3640	1,3597	1,3556
0,70	1,3498	1,3674	1,3681	1,3650	1,3612	1,3574
0,80	1,3491	1,3672	1,3684	1,3658	1,3623	1,3588
0,90	1,3496	1,3675	1,3690	1,3666	1,3634	1,3601
1,00	1,3508	1,3684	1,3699	1,3677	1,3645	1,3613

 $\alpha = 0,05$

-1,00	1,4616	1,5039	1,5277	1,5431	1,5542	1,5625
-0,95	1,4648	1,5037	1,5262	1,5411	1,5519	1,5601
-0,90	1,4798	1,5108	1,5302	1,5435	1,5534	1,5610
-0,85	1,5047	1,5242	1,5388	1,5497	1,5580	1,5646
-0,80	1,5362	1,5422	1,5511	1,5588	1,5651	1,5704
-0,75	1,5707	1,5631	1,5658	1,5700	1,5742	1,5779
-0,70	1,6049	1,5853	1,5819	1,5826	1,5845	1,5867
-0,65	1,6364	1,6075	1,5986	1,5960	1,5957	1,5963
-0,60	1,6631	1,6285	1,6152	1,6096	1,6072	1,6063
-0,5	1,6984	1,6641	1,6456	1,6357	1,6300	1,6265
-0,4	1,7101	1,6888	1,6701	1,6582	1,6505	1,6453
-0,3	1,7045	1,7023	1,6874	1,6758	1,6675	1,6614
-0,2	1,6892	1,7065	1,6979	1,6883	1,6805	1,6744
-0,1	1,6700	1,7040	1,7025	1,6959	1,6894	1,6839
0,00	1,6501	1,6970	1,7024	1,6994	1,6947	1,6902
0,1	1,6312	1,6876	1,6991	1,6995	1,6969	1,6937
0,2	1,6141	1,6769	1,6934	1,6970	1,6965	1,6947
0,3	1,5990	1,6660	1,6864	1,6927	1,6941	1,6936
0,4	1,5861	1,6553	1,6785	1,6872	1,6902	1,6909
0,5	1,5751	1,6452	1,6705	1,6808	1,6853	1,6870
0,6	1,5661	1,6361	1,6625	1,6741	1,6796	1,6823
0,7	1,5590	1,6280	1,6549	1,6673	1,6736	1,6769
0,8	1,5536	1,6210	1,6479	1,6607	1,6674	1,6712
0,9	1,5497	1,6153	1,6416	1,6544	1,6613	1,6654
1,0	1,5470	1,6106	1,6362	1,6487	1,6556	1,6597

Продолжение табл. VII

u	k				
	8	9	16	36	144

 $\alpha = 0,1$

-1,00	1,1694	1,1765	1,2049	1,2319	1,2575
-0,95	1,1751	1,1817	1,2082	1,2337	1,2583
-0,90	1,1818	1,1878	1,2120	1,2358	1,2591
-0,85	1,1894	1,1946	1,2163	1,2382	1,2601
-0,80	1,1975	1,2020	1,2209	1,2408	1,2611
-0,70	1,2149	1,2178	1,2310	1,2464	1,2634
-0,60	1,2328	1,2341	1,2418	1,2526	1,2660
-0,50	1,2504	1,2503	1,2527	1,2590	1,2688
-0,40	1,2670	1,2657	1,2634	1,2656	1,2718
-0,30	1,2823	1,2801	1,2738	1,2744	1,2784
-0,20	1,2961	1,2931	1,2835	1,2778	1,2778
-0,10	1,3082	1,3048	1,2926	1,2845	1,2808
0,00	1,3167	1,3149	1,3009	1,2903	1,2838
0,10	1,3276	1,3236	1,3084	1,2957	1,2866
0,20	1,3349	1,3309	1,3150	1,3007	1,2894
0,30	1,3408	1,3369	1,3207	1,3053	1,2919
0,40	1,3455	1,3417	1,3256	1,3093	1,2943
0,50	1,3491	1,3456	1,3297	1,3129	1,2965
0,60	1,3518	1,3485	1,3331	1,3159	1,2984
0,70	1,3539	1,3508	1,3358	1,3185	1,3002
0,80	1,3556	1,3526	1,3207	1,3016	1,3016
0,90	1,3569	1,3540	1,3398	1,3224	1,3028
1,00	1,3582	1,3554	1,3412	1,3238	1,3038

 $\alpha = 0,05$

-1,00	1,5691	1,5744	1,5952	1,6141	1,6307
-0,95	1,5666	1,5720	1,5930	1,6124	1,6298
-0,90	1,5671	1,5721	1,5924	1,6116	1,6293
-0,85	1,5700	1,5745	1,5931	1,6115	1,6290
-0,80	1,5749	1,5786	1,5951	1,6121	1,6293
-0,75	1,5813	1,5843	1,5980	1,6133	1,6293
-0,70	1,5889	1,5910	1,6017	1,6149	1,6297
-0,65	1,5973	1,5985	1,6060	1,6170	1,6304
-0,60	1,6062	1,6065	1,6108	1,6194	1,6312
-0,5	1,6244	1,6230	1,6213	1,6251	1,6333
-0,4	1,6417	1,6390	1,6322	1,6313	1,6359
-0,3	1,6569	1,6535	1,6427	1,6378	1,6387
-0,2	1,6696	1,6658	1,6525	1,6442	1,6417
-0,1	1,6793	1,6755	1,6611	1,6503	1,6447
0,00	1,6862	1,6828	1,6682	1,6558	1,6477
0,1	1,6905	1,6875	1,6739	1,6607	1,6504
0,2	1,6924	1,6901	1,6780	1,6647	1,6529
0,3	1,6923	1,6907	1,6807	1,6678	1,6551
0,4	1,6906	1,6897	1,6819	1,6699	1,6568
0,5	1,6875	1,6873	1,6818	1,6711	1,6581
0,6	1,6834	1,6838	1,6805	1,6714	1,6588
0,7	1,6786	1,6795	1,6782	1,6707	1,6590
0,8	1,6734	1,6746	1,6750	1,6692	1,6586
0,9	1,6678	1,6693	1,6710	1,6667	1,6576
1,0	1,6622	1,6638	1,664	1,6635	1,6560

Приложение

		k_1 — степени свободы для большей дисперсии																								
k_2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	250	250	250	250	250	250	250	
	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106	6142	6169	6208	6234	6258	6258	6258	6258	6258	6258	6258	6258	6258	
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	
	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42	99,43	99,44	99,45	99,46	99,46	99,46	99,46	99,46	99,46	99,46	99,46	99,46	99,46	
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,62	8,62	8,62	8,62	8,62	8,62	8,62	8,62	
	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,92	26,83	26,69	26,60	26,60	26,60	26,60	26,60	26,60	26,60	26,60	26,60	26,60	
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,87	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71	
	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37	14,24	14,15	14,02	13,93	13,83	13,83	13,83	13,83	13,83	13,83	13,83	13,83		
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	
	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,38	9,38	9,38	9,38	9,38	9,38	9,38		
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,81	3,81	3,81	3,81	3,81	3,81	3,81	3,81	
	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,52	7,39	7,31	7,23	7,23	7,23	7,23	7,23	7,23	7,23	7,23		
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,95	3,79	3,64	3,59	3,53	3,49	3,44	3,40	3,36	3,32	3,28	3,23	3,20	3,15	3,12	3,08	3,08	3,08	3,08	3,08	3,08	
	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,94	6,70	6,48	6,21	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,20	5,20	5,20	5,20	5,20	
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28	3,23	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,02	3,00	2,96	2,90	2,86	2,86	2,86	
	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,00	4,92	4,80	4,73	4,73	4,73	4,73	4,73	4,73	
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,70	2,70	2,70	2,70	2,70	
	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71	4,60	4,52	4,41	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,14	3,02	2,97	2,91	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,64	2,61	2,58	2,55	2,52	2,52	2,52	2,52	2,52	2,52	
	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,22	5,14	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71	4,60	4,52	4,41	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	

		Приложение табл. VII																						
k_2		k_1 — степени свободы для большей дисперсии																						
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69	2,64	2,60	2,55	2,50	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46
	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,05	3,98	3,92	3,86	3,78	3,70	3,70	3,70	3,70	3,70	3,70	3,70
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,48	2,44	2,40	2,35	2,30	2,35	2,35	2,35	2,35	2,35	2,35	2,35
	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55	3,45	3,37	3,31	3,34	3,34	3,34	3,34	3,34	3,34	3,34
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,30	2,27	2,22	2,20	2,24	2,24	2,24	2,24	2,24	2,24	2,24
	8,53	6,23	4,77	4,44	4,01	3,85	3,65	3,51	3,37	3,26	3,18	3,12	3,05	3,00	2,93	2,86	2,77	2,70	2,70	2,70	2,70	2,70	2,70	2,70
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,30	2,26	2,22	2,18	2,13	2,07	2,05	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04
	8,28	6,01	4,59	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,56	3,45	3,37	3,30	3,23	3,18	3,12	3,05	2,98	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,30	2,26	2,22	2,18	2,13	2,09	2,05	2,04	2,03	2,03	2,03	2,03	2,03	2,03
	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,67	3,59	3,50	3,36	3,25	3,17	3,09	3,03	2,96	2,86	2,77	2,70	2,67	2,67	2,67	2,67	2,67	2,67
22	4,30	3,44	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,06	2,02	1,98	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94
	7,94	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,17	3,09	3,02	2,95	2,91	2,86	2,80	2,74	2,66	2,58	2,55	2,55	2,55	2,55	2,55	2,55
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,06	2,02	1,98	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94
	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,35	3,25	3,17	3,09	3,02	2,95	2,91	2,86	2,80	2,74	2,66	2,58	2,55	2,55	2,55	2,55	2,55
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,06	2,02	1,98	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94
	7,72	5,53	4,64	4,14	3,76	3,47	3,26	3,06	2,93	2,81	2,71	2,64	2,58	2,51	2,45	2,38	2,31	2,25	2,22	2,22	2,22	2,22	2,22	2,22
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,05	2,02	1,98	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94
	7,64	5,45	4,67	4,07	3,76	3,53	3,36	3,23	3,11	3,03	2,98	2,91	2,86	2,80	2,74	2,66	2,58	2,52	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,04	2,00	1,96	1,91	1,86	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82	1,82
	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,91	2,84	2,74	2,66	2,58	2,52	2,47	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44

Приложение

Продолжение табл. VII

k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30
32	4,15 7,50	3,30 5,34	2,90 4,46	2,67 3,97	2,51 3,66	2,40 3,42	2,32 3,25	2,19 3,01	2,14 2,94	2,10 2,86	2,07 2,80	2,00 2,70	1,97 2,62	1,91 2,51	1,86 2,42	1,82 2,42	1,82 2,34
34	4,13 7,44	3,28 5,29	2,88 4,42	2,65 3,93	2,49 3,61	2,38 3,38	2,30 3,21	2,23 3,08	2,17 2,97	2,12 2,79	2,08 2,82	2,05 2,75	2,00 2,62	1,95 1,98	1,89 2,54	1,84 2,43	1,84 2,35
36	4,11 7,39	3,26 5,25	2,86 4,38	2,63 3,89	2,48 3,58	2,36 3,35	2,28 3,18	2,21 3,04	2,15 2,94	2,10 2,86	2,06 2,78	2,03 2,72	1,98 1,96	1,93 2,54	1,87 2,43	1,82 2,40	1,82 2,38
38	4,10 7,35	3,25 5,21	2,85 4,34	2,65 3,86	2,46 3,54	2,35 3,32	2,26 3,15	2,19 3,02	2,14 2,91	2,09 2,82	2,05 2,75	2,00 2,73	1,96 2,69	1,92 2,59	1,85 2,51	1,84 2,47	1,84 2,38
40	4,08 7,31	3,23 5,18	2,84 4,31	2,61 3,83	2,45 3,51	2,34 3,29	2,25 3,12	2,18 2,99	2,12 2,88	2,07 2,80	2,04 2,73	2,00 2,66	1,95 1,96	1,93 2,54	1,87 2,49	1,82 2,35	1,82 2,35
42	4,07 7,27	3,22 5,15	2,83 4,29	2,59 3,80	2,44 3,49	2,32 3,26	2,24 3,10	2,17 2,96	2,11 2,86	2,06 2,77	2,04 2,70	2,00 2,64	1,95 1,96	1,93 2,54	1,85 2,46	1,85 2,46	1,84 2,35
44	4,06 7,24	3,21 5,12	2,82 4,26	2,58 3,78	2,43 3,46	2,31 3,24	2,23 3,07	2,16 2,94	2,10 2,84	2,05 2,75	2,04 2,68	2,00 2,62	1,97 1,92	1,91 2,52	1,88 2,44	1,87 2,44	1,84 2,35
46	4,05 7,21	3,20 5,10	2,81 4,24	2,57 3,76	2,42 3,44	2,30 3,22	2,22 3,05	2,14 2,92	2,09 2,82	2,04 2,73	2,00 2,66	1,97 1,92	1,91 2,50	1,89 2,44	1,87 2,42	1,86 2,42	1,85 2,35
48	4,04 7,19	3,19 5,08	2,80 4,22	2,56 3,74	2,41 3,42	2,30 3,20	2,21 3,04	2,14 2,90	2,08 2,80	2,03 2,71	1,99 2,64	1,96 2,58	1,90 2,48	1,86 2,40	1,86 2,40	1,85 2,38	1,85 2,38
50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,40 3,41	2,39 3,18	2,20 3,02	2,13 2,88	2,07 2,78	2,02 2,70	1,98 2,62	1,95 2,56	1,90 2,46	1,85 2,39	1,78 2,39	1,74 2,35	1,69 2,18

Д

Продолжение табл. VIII

k_2	k_4 — степени свободы для большей дисперсии																
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30
55	4,02 7,12	3,17 5,01	2,78 4,16	2,54 3,68	2,38 3,37	2,27 3,15	2,18 2,98	2,11 2,85	2,05 2,75	2,00 2,66	1,97 2,59	1,93 2,53	1,88 2,43	1,83 2,35	1,76 2,23	1,72 2,15	1,67 2,06
60	4,00 7,08	3,15 4,98	2,76 4,13	2,52 3,65	2,37 3,34	2,25 3,12	2,17 2,95	2,10 2,82	2,04 2,72	2,00 2,63	1,99 2,56	1,95 2,50	1,86 2,40	1,86 2,32	1,75 2,20	1,70 2,12	1,65 2,03
65	3,99 7,04	3,14 4,95	2,75 4,10	2,51 3,62	2,36 3,31	2,24 3,09	2,15 2,93	2,05 2,79	2,02 2,70	1,98 2,61	1,94 2,54	1,90 2,47	1,85 2,37	1,80 2,30	1,73 2,18	1,68 2,09	1,63 2,00
70	3,98 7,01	3,13 4,92	2,74 4,08	2,50 3,60	2,35 3,29	2,23 3,07	2,14 2,91	2,07 2,77	2,01 2,67	1,97 2,59	1,93 2,51	1,89 2,45	1,84 2,35	1,79 2,28	1,72 2,15	1,67 2,07	1,62 1,98
80	3,96 6,96	3,11 4,88	2,72 4,04	2,48 3,56	2,33 3,25	2,21 3,04	2,12 2,87	2,05 2,74	1,99 2,64	1,95 2,55	1,91 2,48	1,89 2,41	1,82 2,32	1,77 2,24	1,71 2,11	1,65 2,03	1,60 1,94
100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,58	2,46 3,61	2,30 3,20	2,19 2,99	2,10 2,82	2,03 2,69	1,97 2,59	1,92 2,51	1,88 2,43	1,85 2,36	1,79 2,33	1,75 2,23	1,68 2,19	1,63 2,06	1,57 1,89
125	3,92 6,84	3,07 4,78	2,68 3,54	2,44 3,47	2,29 3,17	2,17 2,95	2,08 2,79	2,01 2,65	1,95 2,56	1,90 2,47	1,86 2,40	1,83 2,37	1,77 2,30	1,75 2,20	1,71 2,12	1,66 2,00	1,60 1,94
150	3,91 6,81	3,06 4,75	2,67 3,51	2,43 3,44	2,27 3,14	2,16 2,92	2,07 2,76	2,00 2,62	1,94 2,53	1,89 2,44	1,85 2,37	1,82 2,30	1,76 2,23	1,72 2,15	1,66 2,03	1,64 2,00	1,55 1,83
200	3,89 6,76	3,04 4,71	2,65 3,58	2,41 3,41	2,26 3,11	2,14 2,90	2,05 2,73	1,98 2,60	1,92 2,50	1,87 2,41	1,83 2,34	1,80 2,28	1,74 2,17	1,69 2,09	1,62 1,97	1,57 1,88	1,52 1,79
400	3,86 6,70	3,02 4,66	2,62 3,53	2,39 3,36	2,23 3,06	2,12 2,85	2,03 2,69	1,96 2,55	1,90 2,46	1,85 2,37	1,81 2,29	1,78 2,23	1,72 2,12	1,67 2,04	1,60 1,92	1,54 1,84	1,49 1,74

Приложение

IX. КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ХАРТЛЯ $F_{\max \alpha}$

$k = n - 1$	m											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2	39,0 199	87,5 448	142 729	202 1036	266 1362	333 1705	403 2063	475 2432	550 2813	626 3204	704 3605	
3	15,4 47,5	27,8 85	39,2 120	50,7 151	62,0 184	72,9 216	83,5 249	93,9 281	104 310	114 337	124 361	
4	9,60 23,2	15,5 37,0	20,6 49	25,2 59	29,5 69	33,6 79	37,5 89	41,1 97	44,6 106	48,0 113	51,4 120	
5	7,15 14,9	10,8 22	13,7 28	16,3 33	18,7 38	20,8 42	22,9 46	24,7 50	26,5 54	28,2 57	29,9 60	
6	5,82 11,1	8,38 15,5	10,4 19,1	21,1 22	13,7 25	15,0 27	16,3 30	17,5 32	18,6 34	19,7 36	20,7 37	
7	4,99 8,89	6,94 12,1	8,44 14,5	9,70 16,5	10,8 18,4	11,8 20	12,7 22	13,5 23	14,3 24	15,1 26	15,8 27	
8	4,43 7,50	6,00 9,9	7,18 11,7	8,12 13,2	9,03 14,5	9,78 15,8	10,5 16,9	11,1 17,9	11,7 18,9	12,2 19,8	12,7 21	
9	4,03 6,54	5,34 8,5	6,31 9,9	7,11 11,1	7,80 12,1	8,41 13,1	8,95 13,9	9,45 14,7	9,91 15,3	10,3 16,0	10,7 16,6	
10	3,72 5,85	4,85 7,4	5,67 8,6	6,34 9,6	6,92 10,4	7,42 11,1	7,87 11,8	8,28 12,4	8,66 12,9	9,01 13,4	9,34 13,9	
12	3,28 4,91	4,16 6,1	4,79 6,9	5,30 7,6	5,72 8,2	6,09 8,7	6,42 9,1	6,72 9,5	7,00 9,9	7,25 10,2	7,48 10,6	
15	2,86 4,07	3,54 4,9	4,01 5,5	4,37 6,0	4,68 6,4	4,95 6,7	5,19 7,1	5,40 7,3	5,59 7,5	5,77 7,8	5,93 8,0	
20	2,46 3,32	2,95 3,8	3,29 4,3	3,54 4,6	3,76 4,9	3,94 5,1	4,10 5,3	4,24 5,5	4,37 5,6	4,49 5,8	4,59 5,9	
30	2,07 2,63	2,40 3,0	2,61 3,3	2,78 3,4	2,91 3,6	3,02 3,7	3,12 3,8	3,21 3,9	3,29 4,0	3,36 4,1	3,39 4,2	
60	1,67 1,96	1,85 2,2	1,96 2,3	2,04 2,4	2,11 2,4	2,17 2,5	2,22 2,5	2,26 2,6	2,30 2,6	2,33 2,7	2,36 2,7	

Приложение. Верхняя строка в каждой графе для $\alpha = 0,05$; нижняя строка — для $\alpha = 0,01$.

X. КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КОЧРЕНА G_α

m	$k = n - 1$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0,9985 0,999	0,9750 0,9950	0,9392 0,9794	0,9057 0,9586	0,8772 0,9172	0,8534 0,8898	0,8159 0,8823	0,8010 0,8674	0,7880 0,8539	0,7341 0,7949	0,6602 0,7767	0,5813 0,6062
3	0,9669 0,9933	0,8709 0,9423	0,7977 0,8831	0,7457 0,8335	0,7071 0,7933	0,6771 0,7606	0,6530 0,7335	0,6333 0,7107	0,6167 0,6912	0,6025 0,6743	0,5466 0,6059	0,4748 0,5153
4	0,9065 0,9676	0,7679 0,8643	0,6841 0,7814	0,6287 0,7212	0,5598 0,6761	0,5365 0,6410	0,5175 0,6129	0,5175 0,5897	0,5017 0,5702	0,4884 0,5536	0,4366 0,4884	0,3720 0,4057
5	0,8412 0,9279	0,6833 0,7885	0,5981 0,6957	0,5441 0,6329	0,5065 0,5575	0,4783 0,5531	0,4564 0,5259	0,4387 0,5037	0,4241 0,4854	0,4118 0,4697	0,3645 0,4094	0,3066 0,3351
6	0,7808 0,8828	0,6161 0,7218	0,5321 0,6258	0,4803 0,5635	0,4447 0,5195	0,4184 0,4866	0,3980 0,4608	0,3817 0,4401	0,3682 0,4229	0,3568 0,4084	0,3135 0,3529	0,2612 0,2858
7	0,7271 0,8376	0,5612 0,6644	0,4800 0,5685	0,4307 0,5080	0,3974 0,4695	0,3726 0,4347	0,3535 0,4105	0,3384 0,3911	0,3259 0,3751	0,3154 0,3616	0,2756 0,3105	0,2278 0,2494
8	0,6798 0,7945	0,5157 0,6152	0,4377 0,5209	0,3910 0,4627	0,3595 0,4226	0,3362 0,3932	0,3185 0,3704	0,3043 0,3522	0,2926 0,3373	0,2829 0,3248	0,2462 0,2779	0,2022 0,2214
9	0,6385 0,7544	0,4775 0,5727	0,4027 0,4810	0,3584 0,4211	0,3286 0,3870	0,3067 0,3592	0,2901 0,3378	0,2768 0,3207	0,2659 0,3067	0,2568 0,2950	0,2226 0,2514	0,1616 0,1929
10	0,6000 0,7145	0,4477 0,5420	0,3777 0,4553	0,3374 0,4038	0,3074 0,3691	0,2875 0,3482	0,2675 0,3291	0,2475 0,3008	0,2275 0,2829	0,2075 0,2644	0,1667 0,2000	0,1429 0,1750

m	$k = n - 1$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0,6020 0,7175	0,4450 0,5358	0,3783 0,4469	0,3311 0,3572	0,3029 0,3308	0,2883 0,2945	0,2666 0,2945	0,2439 0,2535	0,2187 0,2419	0,2098 0,2704
12	0,5410 0,6528	0,3924 0,4751	0,3264 0,3919	0,2880 0,3328	0,2624 0,2861	0,2439 0,2680	0,2299 0,2535	0,2034 0,2104	0,1911 0,2002	0,1737 0,1961
15	0,4799 0,5747	0,3346 0,4069	0,2768 0,3317	0,2449 0,2582	0,2195 0,2583	0,2034 0,2386	0,1911 0,2228	0,1815 0,2104	0,1736 0,1918	0,1429 0,1612
20	0,3894 0,4759	0,2705 0,3297	0,2205 0,2654	0,1921 0,2288	0,1602 0,2048	0,1501 0,1748	0,1422 0,1646	0,1357 0,1567	0,1303 0,1501	0,1108 0,1248
24	0,3424 0,4247	0,2354 0,2871	0,1907 0,2295	0,1656 0,1970	0,1493 0,1759	0,1374 0,1608	0,1286 0,1495	0,1160 0,1338	0,1113 0,1283	0,0942 0,1060
30	0,2929 0,3532	0,1980 0,2412	0,1593 0,1933	0,1377 0,1635	0,1237 0,1454	0,1137 0,1327	0,1061 0,1232	0,0958 0,1157	0,0921 0,1100	0,0771 0,0867
40	0,2370 0,2940	0,1576 0,1915	0,1259 0,1508	0,1082 0,1281	0,0968 0,1135	0,0887 0,1033	0,0827 0,0957	0,0780 0,0898	0,0745 0,0853	0,0595 0,0668
60	0,1737 0,2151	0,1131 0,1371	0,0895 0,1059	0,0765 0,0902	0,0682 0,0796	0,0523 0,0722	0,0583 0,0668	0,0552 0,0625	0,0520 0,0594	0,0497 0,0557
120	0,0998 0,1225	0,0632 0,0759	0,0495 0,0585	0,0419 0,0469	0,0371 0,0429	0,0337 0,0387	0,0312 0,0357	0,0292 0,0334	0,0279 0,0316	0,0266 0,0302

П р и м е ч а н и е. Верхняя строка в каждой графе — для $\alpha = 0,05$; нижняя строка — для $\alpha = 0,01$.

XI. КОЭФФИЦИЕНТЫ $a_n - i+1$, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗЫ О НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИЯ W

i	n						
	3		4		5		
	1	2	3	4	5	6	
n							
i	9	10	11	12	13	14	
1	0,5888 0,3244 0,1976 0,0947	0,5739 0,3291 0,2141 0,1224	0,5601 0,3315 0,2260 0,1429	0,5475 0,3325 0,2347 0,1586	0,5359 0,3325 0,2412 0,1707	0,5251 0,3318 0,2460 0,1802	
2							
3							
4							
5							
6							
7							
n							
i	15	16	17	18	19	20	
1	0,5150 0,3306 0,2495 0,1878 0,1353 0,0880 0,0433	0,5056 0,3290 0,2521 0,1939 0,1447 0,1005 0,0593	0,4968 0,3273 0,2540 0,1988 0,1524 0,1109 0,0725	0,4886 0,3253 0,2553 0,2027 0,1587 0,1197 0,0837	0,4808 0,3232 0,2561 0,2059 0,1641 0,1271 0,0932	0,4734 0,3211 0,2565 0,2085 0,1686 0,1334 0,1013	0,4734 0,3211 0,2565 0,2085 0,1686 0,1334 0,1013
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
n							
i	21	22	23	24	25	26	
1	0,4643 0,3185 0,2578 0,2119 0,1736 0,1399 0,1092 0,0804 0,0530 0,0263	0,4590 0,3156 0,2571 0,2131 0,1764 0,1443 0,1150 0,0878 0,0618 0,0368	0,4542 0,3126 0,2563 0,2139 0,1787 0,1480 0,1201 0,0941 0,0696 0,0459	0,4493 0,3098 0,2554 0,2145 0,1807 0,1512 0,1245 0,0997 0,0764 0,0539	0,4450 0,3069 0,2543 0,2148 0,1822 0,1539 0,1283 0,1046 0,0823 0,0610	0,4407 0,3043 0,2533 0,2151 0,1836 0,1563 0,1316 0,1089 0,0876 0,0672	0,4407 0,3043 0,2533 0,2151 0,1836 0,1563 0,1316 0,1089 0,0876 0,0672
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							

Продолжение табл. XI

t	n					
	27	28	29	30	31	32
1	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254	0,4220	0,4188
2	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944	0,2921	0,2898
3	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487	0,2475	0,2463
4	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148	0,2145	0,2141
5	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870	0,1874	0,1878
6	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630	0,1641	0,1651
7	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415	0,1433	0,1449
8	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219	0,1243	0,1265
9	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036	0,1066	0,1093
10	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862	0,0899	0,0931
11	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697	0,0739	0,0777
12	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537	0,0585	0,0629
13	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381	0,0435	0,0485
14		0,0084	0,0159	0,0227	0,0289	0,0344
15				0,0076	0,0144	0,0206
16						0,0068

t	n					
	33	34	35	36	37	38
1	0,4156	0,4127	0,4096	0,4068	0,4040	0,4015
2	0,2876	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774
3	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391
4	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,2110
5	0,1880	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881
6	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686
7	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513
8	0,1284	0,1301	0,1317	0,1331	0,1344	0,1356
9	0,1118	0,1140	0,1160	0,1179	0,1196	0,1211
10	0,0961	0,0988	0,1013	0,1036	0,1056	0,1075
11	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947
12	0,0669	0,0706	0,0739	0,0770	0,0798	0,0824
13	0,0530	0,0572	0,0610	0,0645	0,0677	0,0706
14	0,0395	0,0441	0,0484	0,0523	0,0559	0,0592
15	0,0262	0,0314	0,0361	0,0404	0,0444	0,0481
16	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372
17		0,0062	0,0119	0,0172	0,0220	0,0264
18				0,0057	0,0110	0,0158
19						0,0053

t	n					
	39	40	41	42	43	44
1	0,3989	0,3964	0,3940	0,3917	0,3894	0,3872
2	0,2755	0,2737	0,2719	0,2701	0,2684	0,2667
3	0,2380	0,2368	0,2357	0,2345	0,2334	0,2323
4	0,2104	0,2098	0,2091	0,2085	0,2078	0,2072
5	0,1880	0,1878	0,1876	0,1874	0,1871	0,1868
6	0,1689	0,1691	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695
7	0,1520	0,1526	0,1531	0,1535	0,1539	0,1542
8	0,1366	0,1376	0,1384	0,1392	0,1398	0,1405
9	0,1225	0,1237	0,1249	0,1259	0,1269	0,1278
10	0,1092	0,1108	0,1123	0,1136	0,1149	0,1160

Продолжение табл. XI

t	n					
	39	40	41	42	43	44
11	0,0967	0,0986	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049
12	0,0848	0,0870	0,0891	0,0909	0,0927	0,0943
13	0,0733	0,0759	0,0782	0,0804	0,0824	0,0842
14	0,0622	0,0651	0,0677	0,0701	0,0724	0,0745
15	0,0515	0,0546	0,0575	0,0602	0,0628	0,0651
16	0,0409	0,0444	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560
17	0,0305	0,0343	0,0379	0,0411	0,0442	0,0471
18	0,0203	0,0244	0,0283	0,0318	0,0352	0,0383
19	0,0101	0,0146	0,0188	0,0227	0,0263	0,0296
20		0,0049	0,0094	0,0136	0,0175	0,0211
21				0,0045	0,0087	0,0126
22						0,0042

t	n					
	45	46	47	48	49	50
1	0,3850	0,3830	0,3808	0,3787	0,3770	0,3751
2	0,2651	0,2635	0,2620	0,2604	0,2589	0,2574
3	0,2313	0,2302	0,2291	0,2281	0,2271	0,2260
4	0,2065	0,2058	0,2052	0,2045	0,2038	0,2032
5	0,1865	0,1862	0,1859	0,1855	0,1851	0,1847
6	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	0,1545	0,1548	0,1550	0,1551	0,1553	0,1554
8	0,1410	0,1415	0,1420	0,1423	0,1427	0,1430
9	0,1286	0,1293	0,1300	0,1306	0,1312	0,1317
10	0,1170	0,1180	0,1189	0,1197	0,1205	0,1212
11	0,1062	0,1073	0,1085	0,1095	0,1105	0,1113
12	0,0959	0,0972	0,0986	0,0998	0,1010	0,1020
13	0,0860	0,0876	0,0892	0,0906	0,0919	0,0932
14	0,0765	0,0783	0,0801	0,0817	0,0832	0,0846
15	0,0673	0,0694	0,0713	0,0731	0,0748	0,0764
16	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	0,0497	0,0522	0,0546	0,0568	0,0588	0,0608
18	0,0412	0,0439	0,0465	0,0489	0,0511	0,0532
19	0,0328	0,0357	0,0385	0,0411	0,0436	0,0459
20	0,0245	0,0277	0,0307	0,0335	0,0361	0,0386
21	0,0163	0,0197	0,0229	0,0259	0,0288	0,0314
22	0,0081	0,0118	0,0153	0,0185	0,0215	0,0244
23		0,0039	0,0076	0,0111	0,0143	0,0174
24				0,0037	0,0071	0,0104
25						0,0035

XII. КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ШАПИРО-УИЛКА W_α

n	α			n	α		
	0,01	0,05	0,10		0,01	0,05	0,10
3	0,753	0,767	0,789	13	0,814	0,866	0,889
4	0,687	0,748	0,792	14	0,825	0,874	0,895
5	0,686	0,762	0,806	15	0,835	0,881	0,901
6	0,713	0,788	0,826	16	0,844	0,887	0,906
7	0,730	0,803	0,838	17	0,951	0,892	0,910
8	0,749	0,818	0,851	18	0,858	0,897	0,914
9	0,764	0,829	0,859	19	0,863	0,901	0,917
10	0,781	0,842	0,869	20	0,868	0,905	0,920
11	0,792	0,850	0,876	21	0,873	0,908	0,923
12	0,805	0,859	0,883	22	0,878	0,911	0,926

Продолжение табл. XII

n	α			n	α		
	0,01	0,05	0,10		0,01	0,05	0,10
23	0,881	0,914	0,928	37	0,914	0,936	0,946
24	0,884	0,916	0,930	38	0,916	0,938	0,947
25	0,888	0,918	0,931	39	0,917	0,939	0,948
26	0,891	0,920	0,933	40	0,919	0,940	0,949
27	0,894	0,923	0,935	41	0,920	0,941	0,950
28	0,896	0,924	0,936	42	0,922	0,942	0,951
29	0,898	0,926	0,937	43	0,923	0,943	0,951
30	0,900	0,927	0,939	44	0,924	0,944	0,952
31	0,902	0,929	0,940	45	0,926	0,945	0,953
32	0,904	0,930	0,941	46	0,927	0,945	0,953
33	0,906	0,931	0,942	47	0,928	0,946	0,954
34	0,908	0,933	0,943	48	0,929	0,947	0,954
35	0,910	0,934	0,944	49	0,929	0,947	0,955
36	0,912	0,935	0,945	50	0,930	0,947	0,955

XIII. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЮДЕНТА $F(t)$ (2.42)
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ t И ЧИСЛА СТЕПЕней СВОБОДЫ k ; $F(-t) = 1 - F(t)$

t	k									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
0,1	532	535	537	537	538	538	538	539	539	539
0,2	563	570	573	574	575	576	576	577	577	577
0,3	593	604	608	610	612	613	614	614	614	615
0,4	621	636	642	645	647	648	650	650	651	651
0,5	648	667	674	678	681	683	684	685	686	686
0,6	672	695	705	710	713	715	716	717	718	719
0,7	694	722	733	739	742	745	747	748	749	750
0,8	715	746	759	766	770	773	775	777	778	779
0,9	733	768	783	790	795	799	801	803	804	805
1,0	750	789	804	813	818	822	825	827	828	830
1,1	765	807	824	834	839	843	846	848	850	851
1,2	779	824	842	852	858	862	865	868	870	871
1,3	791	838	858	868	875	879	883	885	887	889
1,4	803	852	872	883	890	894	898	900	902	904
1,5	813	864	885	896	903	908	911	914	916	918
1,6	822	875	896	908	915	920	923	926	928	930
1,7	831	884	906	918	925	930	934	936	938	940
1,8	839	893	915	927	934	939	943	945	947	949
1,9	846	901	923	935	942	947	950	953	955	957
2,0	852	908	930	942	949	954	957	960	962	963
2,2	864	921	942	954	960	965	968	970	972	974
2,4	874	931	952	963	969	973	976	978	980	981
2,6	883	938	960	970	976	980	982	984	986	987
2,8	891	946	966	976	981	984	987	988	990	991
3,0	898	952	971	980	985	988	990	992	992	993

Примечание. У всех значений функции Стюдента разряд целых равен нулю, и поэтому в таблице приведены только десятичные знаки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.
- Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика; Пер. с нем./Под ред. Н. В. Смирнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 434 с.
- Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов; Пер. с англ. Под ред. С. В. Серенсена. М.: Машиностроение, 1964. 275 с.
- Вероятностные характеристики прочности авиационных материалов и размеров сортамента/А. А. Кузнецков, О. М. Алифанов В. И. Ветров и др. М.: Машиностроение, 1970. 568 с.
- Гребеник В. М. Усталостная прочность и долговечность металлургического оборудования. М.: Машиностроение, 1969. 256 с.
- Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных; Пер. с англ./Под ред. Э. К. Лецкого. М.: Мир, 1980. 610 с.
- Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента; Пер. с англ./Под ред. Э. К. Лецкого, Е. В. Марковой. М.: Мир, 1981. 516 с.
- Закс Л. Статистическое оценивание; Пер. с нем./Под ред. Ю. П. Адлера, В. Г. Горского. М.: Статистика, 1976. 598 с.
- Ипатов М. И. Расчеты себестоимости проектируемых машин. М.: Машиностроение, 1968. 179 с.
- Кендалл М. Дж., Стюарт А. Статистические выводы и связи; Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 899 с.
- Когаев В. П. Методы статистической обработки результатов усталостных испытаний. — Заводская лаборатория, 1957, № 5, с. 612—620.
- Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. 232 с.
- Коновалов Л. В. Нагружаемость, усталость, надежность деталей metallургических машин. М.: Металлургия, 1981. 280 с.
- Крамер Г. Математические методы статистики; Пер. с англ./Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Мир, 1975. 648 с.
- Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. 80 с.
- Общемашиностроительные нормативы вспомогательного времени на обслуживание рабочего места на работы, выполняемые на металлорежущих станках. М.: Машиностроение, 1974. 136 с.
- Олейник Н. В. Выносливость деталей машин. Киев: Техніка, 1979. 200 с.
- Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний. Планирование механических испытаний и статистическая обработка результатов: Методические указания РД 50—398—83. М.: Изд-во стандартов, 1984. 198 с.
- Расчеты экономической эффективности новой техники: Справочник/Под ред. К. М. Великанова. Л.: Машиностроение, 1975. 430 с.
- Селихов А. Ф., Хлебников И. Г. Методика статистической оценки порога чувствительности усталостной долговечности. — В кн.: Механическая усталость в статистическом аспекте. М.: Наука, 1969, с. 41—51.
- Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.
- Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1965. 511 с.

23. Справочник по специальным функциям; Пер. с англ./ Под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.
24. Степнов М. Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний. М.: Машиностроение, 1972. 232 с.
25. Степнов М. Н. Ускоренные испытания на усталость. М.: Машиностроение, 1975. 57 с.
26. Степнов М. Н., Агамиров Л. В., Иноземцева И. А. О статистической обработке многократно цензурированной выборки при испытаниях на усталость. — Заводская лаборатория, 1984, № 7, с. 145—148.
27. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Экономический аспект планирования усталостных испытаний образцов и элементов конструкций из легких сплавов. — Заводская лаборатория, 1981, № 2, с. 73—75.
28. Степнов М. Н., Гиацинтов Е. В. Усталость легких конструкционных сплавов. М.: Машиностроение, 1973. 318 с.
29. Стреляев В. С., Тимофеев А. Ф. Статистическая оценка влияния технологии прессования на механические свойства стеклопластиков. Вестник машиностроения, 1970, № 2, с. 42—47.
30. Трунин И. И., Левицкий Ю. В., Шабан Г. А. Прогнозирование характеристик прочности и пластиичности и построение обобщенной диаграммы жаропрочности. — Заводская лаборатория, 1978, № 10, с. 1260—1264.
31. Трунин И. И., Фридман Я. Ф., Перец И. М. Параметрический метод определения пределов длительной прочности и ползучести партии металла. — Проблемы прочности, 1979, № 10, с. 97—100.
32. Тюриин Ю. Н. Непараметрические методы статистики. М.: Знание, 1978. 64 с.
33. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями; Пер. с англ./Под ред. Ю. В. Линника. М.: Изд-во иностр. лит. 1956. 664 с.
34. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах; Пер. с англ./Под ред. В. В. Налимова. М.: Мир, 1969. 395 с.
35. Хейвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости; Пер. с англ./Под ред. И. Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1969. 504 с.
36. Химмельблau Д. Анализ процессов статистическими методами; Пер. с англ./Под ред. В. Г. Горского. М.: Мир, 1973. 957 с.
37. Холлендер М., Вульф Д. Непараметрические методы статистики; Пер. с англ./Под ред. Ю. П. Адлера и Ю. Н. Тюрина. М.: Финансы и статистика, 1983. 519 с.
38. Шиндовский Э., Шорц О. Статистические методы управления качеством. Контрольные карты и планы контроля; Пер. с нем. Мир, 1976. 597 с.
39. Школьник Л. М. Методика усталостных испытаний. М.: Металлургия, 1978. 303 с.
40. Pearson E. S., Hartley H. O. Biometrika tables for statisticians. Volume 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1972. 385 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

- Анализ дисперсионный двухфакторный 94—102 — Схема 96
 — трехфакторный 102—110 — Обозначения сумм 104 — Схема 103
 — однофакторный 63—67 — Схема 64
Анализ корреляционный — Понятие 111
 — линейный регрессионный для случая одной независимой величины 124—136
 — регрессионный — Понятие 111

Б

- Бартлетта критерий 59

В

- Вейбулла — Гнеденко распределение — Оценка параметров 25, 28, 29
 Величина детерминированная независимая — Схема анализа 131—136
 Величина случайная дискретная — Понятие 5
 — независимая — Схема анализа 125—131
 — непрерывная — Понятие 5
Величины случайные — Корреляционная таблица для двухмерного распределения их 113
 — коррелированные — Понятие 112
 — некоррелированные — Понятие 112
 — непрерывные — Числовые характеристики распределения 6—8
Вероятность доверительная — Понятие 31
 — события — Понятие 4
Выборка — Понятие 17
 — цензурированная справа — Понятие 24 — Значения функций 28 — Значения оценки для нормированной точки усечения 26—28

Г

- Гаусса закон** 8—11
Гистограмма — Понятие 35
Гипотеза альтернативная — Понятие 51
 — и улевая — Понятие 51
 — о виде функции распределения — Проверка 81
 — о дисперсиях — Сравнение выборочной дисперсии с известной генеральной 55—57
 — о нормальности распределения с помощью критерия W — Коэффициенты, используемые при проверке 219—221
 — о средних значениях — Сравнение выборочного среднего с известным генеральным 60—62
 — статистическая — Понятие 51 — Возможные исходы при проверке 52
ГОСТ 11.004—74 24
 11.008—75 14
 11.009—79 24
 25.504—82 159, 160
Границы доверительные — Понятие 31

Д

Диаграмма лучевая квантильных кривых усталости 189
 Дисперсии условные — Понятие 115
 Дисперсия — Формула 7
 — выборочная — Распределение 31
 Долговечность — Определение при испытаниях на усталость 136—145

З

Зависимость нелинейная корреляционная — Понятие 135
 скадастическая — Формула 124
 Закон распределения нормальный 8—11

И

Интервалы доверительные для математического ожидания и дисперсии 31—35
 Испытания длительные статистические — Обработка результатов при нескольких температурах 201—204 — Обработка результатов при одной температуре 200, 201
 — механические — Графическое представление результатов 35—38 — Определение объема 44—50
 Испытания на усталость — Линейный регрессионный анализ результатов 146—156
 — Методика статистической обработки и определение объема испытаний 139—141
 — Обработка результатов графическим способом 156
 — Оценка параметров логарифмически нормального распределения по цензурированной выборке 141, 142
 — Оценка порога чувствительности по циклам 142—145
 — Планирование испытаний при построении квантильных кривых усталости 163—166
 — Планирование испытаний при построении медианной кривой усталости 156—163
 — Функции распределения долговечности при действии переменных нагрузок 137—139
 Испытания на усталость ускоренные 182—197
 — форсированные 182—190

К

Квантиль — Понятие 7
 — нецентрального распределения Стьюдента — Значения параметра t для определения квантилей 210, 211
 — нормированного нормального распределения — Значения 11, 206, 207
 — хи-квадрат распределения в зависимости от уровня вероятности и числа степеней свободы — Значения 208, 209
 Квантити характеристики механических свойств — Оценка 39—43
 Колмогорова и Смирнова критерий — Понятие 72 — Проверка гипотезы о виде функции распределения 83—87
 Кохрена критерий 59 — Критические значения 217, 218
 Коэффициент вариации 7
 — корреляции выборочный 115
 — корреляции при нормальном распределении величин — Формула 112
 — ранговой корреляции Спирмена — Критические значения 123 — Формула 122
 — регрессии — Формула 125
 Краскела и Уоллиса критерий — Понятие 78
 Кривые усталости — Построение 145—166 — Уравнения 145, 146
 — квантильные 163
 — медианные 187
 Критерии двусторонние — Понятие 51
 — непараметрические — Понятие 52
 — непараметрические для проверки статистических гипотез 67—80
 — параметрические 52—67

— принадлежности двух независимых выборок единой генеральной совокупности 71—78
 — принадлежности ряда независимых выборок единой генеральной совокупности 78
 Критерий для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний при известной генеральной дисперсии 52, 53
 — нормальности распределения по совокупности малых выборок 91, 93
 — нормальности распределения приближенный 91, 92
 Критерий равенства дисперсий двух совокупностей 57, 58, 69—71, 212—215
 — медиан двух совокупностей 67—69
 — ряда средних значений 63—67
 — средних двух совокупностей 62, 63
 Критерий согласия Колмогорова — Смирнова 83—87
 — нормальности распределения по совокупности малых выборок 92, 93
 — омега-квадрат для проверки гипотезы о виде функции распределения 87—90
 — Пирсона 81—83
 — приближенный 91, 92
 — Шапиро — Уилка 89—91

Л

Лапласа функция — Геометрическое представление 10 — Понятие 9
 Ларсона — Миллера уравнение 202
 Линия регрессии теоретическая — График 130 — Уравнение 125
 — эмпирическая — График 129 — Уравнение 125

М

Медиана выборочная — Распределение 30, 31
 — случайной величины — Понятие 7
 Метод модифицированный 174—177
 — оценка медианы предела выносливости ускоренный Про 190—194
 — пробитов 167—174
 — Про модифицированный 194—197
 — ступенчатого изменения нагрузки 177—182
 Мода случайной величины — Понятие 7
 Момент второго порядка генеральный смешанный центральный — Формула 112
 — к-го порядка начальный — Формула 7
 — центральный — Формула 8

Н

Надежность статистическая — Понятие 31

О

Область доверительная для функции распределения 39—43
 — допустимых значений — Понятие 51
 — критическая критерия — Понятие 51
 Объем испытаний — Определение 44—50
 Ожидание математическое — Формула 6
 Отклонение среднее квадратическое (стандартное) — Понятие 7
 Отношение корреляционное 126
 Оценка несмещенная 18
 — состоятельная 18
 — эффективная 18
 Оценка генеральных характеристик 17
 Ошибка второго рода — Понятие 51
 — первого рода — Понятие 51

П

Параметр нецентральности — Формула 39
 Пирсона критерий согласия 81—83
 Пирсона распределение 33
 Планирование испытаний на усталость — Экономический аспект 197—199
 Плотность вероятности — Понятие 6
 — нормированного нормального распределения — Значения 206
 Показатель асимметрии распределения — Формула 8
 — эксцесса — Формула 8
 Полигон накопленных частот — Понятие 35, 36

Р

Размах варьирования — Формула 20
 Распределение Вейбулла — Гиеденко 12—14
 — выборочное 18
 — логарифмически нормальное 11, 12 — Оценка параметров 24, 25
 — нормальное — Оценка параметров 24, 25
 Стьюдента в зависимости от числа степеней свободы — Значения функций распределения 208
 — условные величины — Понятие 114
 — эмпирическое 18
 Распределения частные случайных величин — Понятие 115

С

Сетка вероятностная 14, 15
 Сиджела — Тьюки критерий рассеяния — Понятие 69
 Сила связи между случайными величинами 112
 Система случайных событий полная 4
 Случай, благоприятный событию
 — элементарный 4
 Смирнова Н. В. критерий 53, 54
 Событие — Понятие 4
 — достоверное — Понятие 4
 — невозможное — Понятие 4
 — случайное — Понятие 4
 События единственно возможные 4
 — зависимые 4
 — независимые 4
 — несовместимые 4
 — равновозможные 4
 — совместимые 4
 Совокупность генеральная — Понятие 17
 Составляющая случайная — Понятие 111, 112
 — стохастическая — Понятие 111
 Среднее выборочное — Распределение 29, 30
 Среднее квадратическое отклонение — Оценка по результатам испытаний нескольких выборок 23, 24
 Статистика Андерсона — Дарлинга — Понятие 87, 88
 — Дарлинга — Понятие 87
 Статистики — Понятие 17
 — для оценки параметров распределения Вейбулла — Гиеденко — Значения 207
 — непрерывных случайных величин — Понятие 6
 Стьюдента распределение — Понятие 32

Т

Теснота связи между случайными величинами 112

У

Уилкоксона, Манна и Уитни критерий 74
 Уравнение линии регрессии 124
 Уровни значимости — Понятие 51

Ф

Фишера преобразование — Формула 116
 Функция мощности критерия — Понятие 51
 Функция нормального распределения 8, 9 — Графики на вероятностной сетке 14, 15
 — нормированная — Понятие 9 — Значения 205
 Функция одной переменной — Приведение к линейному виду 136
 Функция распределения — Доверительная область 39—43
 — предела выносимости — Построения 166—182
 — случайной величины — График 6 — Понятие 5
 — Стьюдента — Значения в зависимости от случайной величины и числа степеней свободы 222
 — эмпирическая — Понятие 35

Х

Характеристики выборочные 17 — Распределение 29—31
 — числовые — Вычисление при большом объеме выборки 20—23 — Вычисление при малом объеме выборки
 Характеристики генеральные 17
 Хартлея критерий 58 — Критические значения 216

Ч

Частость — Понятие 35
 — накопленная — Понятие 5
 Число наблюдений в j -м интервале — Понятие 20
 — степеней свободы — Понятие 32

Ш

Шапиро — Уилка критерий — Критические значения 221, 222
 — согласия W 89, 91

Предисловие	3
Г л а в а 1. Вероятностное представление механических характеристик	4
Основные понятия и определения	4
Законы распределения характеристик механических свойств	8
График функции распределения на вероятностной сетке	14
Г л а в а 2. Статистическая обработка результатов прямых механических испытаний	17
Понятие о генеральной совокупности и выборке	17
Оценка числовых характеристик и параметров распределения	18
Распределение выборочных характеристик. Доверительные интервалы	29
Графическое представление результатов механических испытаний	35
Оценка квантилей характеристик механических свойств. Доверительная область для функции распределения	39
Определение объема испытаний	44
Г л а в а 3. Проверка статистических гипотез при анализе результатов механических испытаний	51
Критерии для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний	52
Критерий равенства двух дисперсий нормально (логарифмически нормально) распределенных случайных величин	54
Критерий равенства дисперсий ряда совокупностей	58
Критерий равенства двух средних значений нормально (логарифмически нормально) распределенных совокупностей	60
Критерий равенства ряда средних значений. Однофакторный дисперсионный анализ	63
Непараметрические критерии для проверки статистических гипотез	67
Критерии согласия. Проверка гипотез о виде функции распределения	81
Г л а в а 4. Многофакторный дисперсионный анализ результатов механических испытаний	94
Двухфакторный дисперсионный анализ	94
Трехфакторный дисперсионный анализ	102
Г л а в а 5. Регрессионный и корреляционный анализы результатов механических испытаний	111
Связь между случайными величинами. Коэффициент корреляции при нормальном распределении величин	111
Непараметрическая мера связи. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена	122
Линейный регрессионный анализ для случая одной независимой величины	124

Г л а в а 6. Планирование испытаний на усталость и методика статистической обработки их результатов	137
--	-----

Определение долговечности при испытаниях на усталость	137
Построение кривых усталости	145
Построение функции распределения предела выносливости	166
Ускоренные испытания на усталость	182
Экономический аспект планирования испытаний на усталость	197

Г л а в а 7. Статистическая обработка результатов длительных статических испытаний	200
---	-----

Обработка результатов испытаний при одной температуре	200
Обработка результатов испытаний при нескольких температурах	201
Приложение	205
Список литературы	223

Предметный указатель	225
--------------------------------	-----

Михаил Никитович Степнов

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ**

Редактор Т. С. Грачева

Художественный редактор С. С. Водчиц

Оформление художника В. П. Григорьева

Технический редактор Т. С. Старых

Корректоры О. Е. Мишина и А. П. Озерова

ИБ № 4501

Сдано в набор 11.04.84. Подписано в печать 09.10.84. Т-20213. Формат 60×90^{1/16}.

Бумага типографская № 2. Гарнitura литературная. Печать высокая.

Усл. печ. л. 14,5. Усл. кр.-отт. 14,5. Уч.-изд. л. 21,08.

Тираж 10 500 экз. Заказ 98. Цена 1 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение», 107076, Москва,
Стромынский пер., 4

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Монсейко, 10.