

Ю. И. Д и м и т р и е н к о, А. Ю. Д у б р о в и н а,
А. П. С о к о л о в

**МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА
АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ
И «ХИМИЧЕСКОГО» КРИТЕРИЯ ДЛИТЕЛЬНОЙ
ПРОЧНОСТИ**

Предложен метод расчета усталостных характеристик композиционных материалов, основанный на использовании метода асимптотического осреднения периодических структур, конечно-элементном методе расчета тензоров концентрации микронапряжений в компонентах композита, модели разрушения пучка моноволокон в композите при многоосном нагружении, а также «химического» критерия длительной прочности. Представлены результаты численных расчетов усталостной прочности композитов слоисто-волокнистой структуры.

E-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Ключевые слова: композиционные материалы, сопротивление усталости, метод асимптотического осреднения, химический критерий прочности, слоисто-волокнистые композиты.

Проблема прогнозирования долговечности конструкций из композиционных материалов приобретает все большую актуальность в связи с расширением областей применения этих материалов в последние годы. Применение композитов в конструкциях современных и перспективных самолетов требует тщательного изучения поведения материалов при переменных нагрузках, а также возможности прогнозирования долговечности и остаточного ресурса конструкций из композитов. Однако, в отличие от традиционных конструкционных материалов, существующие методики расчета усталостной прочности композиционных материалов разработаны еще крайне не достаточно. Широко известные критерии длительной прочности изотропных материалов (сплавов, полимеров) [1–4], как правило, могут быть применены лишь для частных процессов нагружения.

В работах [5, 6] был предложен новый критерий длительной прочности композиционных материалов, основанный на термодинамическом подходе к моделированию прочности, при котором в качестве основной меры, «регистрирующей» накопление дисперсных повреждений в материале, было предложено использовать химический потенциал μ (в механике сплошных сред известный как термодинамический потенциал Боуэна [7, 8]), но записанный для вязкоупругих тел.

Физическое обоснование для выбора химического потенциала основано на идее, что разрушение микросвязей между молекулами полимеров, вызванное как механическими, так и чисто химическими процессами, может быть охарактеризовано одной и той же величиной, имеющей некоторый энергетический порог. В физической химии такая величина давно широко используется для описания различного рода предельных переходов (фазовых превращений) — это химический потенциал, скачкообразное изменение которого $\Delta\mu$ и является характеристикой фазового превращения. Используя предложенную химико-механическую аналогию, в [5] был сформулирован критерий механического разрушения полимеров, как достижение химическим потенциалом предельного значения $\Delta\mu^*$, а мерой близости к этому значению выбрано отношение $z(t) = \Delta\mu/\Delta\mu^*$, называемое параметром повреждаемости. Однако для того, чтобы учесть вклад механических факторов в термодинамический химический потенциал μ потребовалось записать его с учетом напряжений и деформаций в рамках модели термовязкоупругого поведения материала (в химии обычно эти «механические» слагаемые не учитывают). Кроме того, поскольку химико-механическая аналогия имеет логическое обоснование только на молекулярном уровне, а на макроскопическом уровне разрушение материала определяется еще и другими факторами (главным образом неоднородным напряженным состоянием в надмолекулярной структуре), то при переходе к интересующему макроуровню, в критерии длительной прочности было предложено ядра функционалов брать не из деформационных вязкоупругих характеристик полимеров, а непосредственно из базовых макроиспытаний на длительную прочность при некоторых фиксированных программах нагружения. Полученный в результате таких положений критерий прочности был назван «химическим» критерием длительной прочности, его апробация на различных материалах и программах нагружения (включая сложные режимы знакопеременного усталостного нагружения — достаточно «неудобные» для функциональных критериев длительной прочности) показала хорошие результаты.

Целью настоящей работы являлось применение «химического» критерия длительной прочности для моделирования усталостных характеристик композиционных материалов, в рамках предложенной ранее концепции: усталостные свойства структурных компонентов композита известны, требуется определить усталостные характеристики композиционного материала в целом. В качестве математического аппарата, позволяющего агрегировать свойства компонентов и получать на выходе искомые свойства композита, применен метод асимптотического осреднения [9–12].

Формулировка локальных задач теории упругости.

Метод асимптотического осреднения позволяет сформулировать локальные задачи теории упругости L_{pq} на ячейке периодичности [9, 10]

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha} = 0; \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} = C_{ijkl}^{\alpha} \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha}; x_i \in (\tilde{V}_{\alpha\xi} \cup \Sigma_s' \cup \Sigma_s); \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j}^{\alpha} + U_{j(pq)/i}^{\alpha}), x_i \in \tilde{V}_{\alpha\xi}; U_{i(pq)}^{\alpha} = U_{i(pq)}^N; \\ U_{i(pq)}^{\alpha} = U_{i(pq)}^N; \\ (\sigma_{ij(pq)}^{\alpha} - \sigma_{ij(pq)}^N) n_j = 0; x_i \in \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{\alpha}(pq)$ — псевдонапряжения [9, 10]; $\varepsilon_{ij}^{\alpha}$ — псевдодеформации; $U_i^{\alpha}(pq)$ — псевдоперемещения в компоненте $\tilde{V}_{\alpha\xi}$ композита ($\alpha = 1 \dots N$, индекс N соответствует матрице композита) в рамках $1/8$ ячейки периодичности (ЯП) \tilde{V}_{ξ} ; $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta}$ — поверхность контакта компонентов, координатные плоскости — $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$, а $\Sigma_s' = \{\xi_s = a_p/2\}$, $s = 1, 2, 3$ торцевые поверхности ячейки периодичности; ξ_s — локальные координаты в ЯП; $/j = \partial/\partial\xi_j$; λ^{α} ; μ^{α} — константы Ламе и C_{ijkl}^{α} — модули упругости компонентов. К задаче (1) присоединяются условия на торцевых поверхностях и на координатных плоскостях, которые различны для разных p и q :

Условия на торцевых поверхностях Σ_s' :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i(pq)}^{\alpha} = \frac{a_p}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}; U_{j(pq)/i}^{\alpha} = 0; \\ U_{k(pq)/i}^{\alpha} = 0; \xi_m \in \Sigma_i'; i \neq j \neq k \neq i; p = q; \\ U_{i(pq)}^{\alpha} = \frac{a_p}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}; U_{j(pq)/j}^{\alpha} = 0; \\ U_{k(pq)}^{\alpha} = 0; \xi_m \in \Sigma_i'; i \neq j \neq k \neq i; p \neq q. \end{array} \right. \quad (2)$$

Условия на плоскостях симметрии Σ_s имеют аналогичный вид, но с нулевой правой частью. Здесь $\bar{\varepsilon}_{pq}$ — макродеформации композита, которые заданы для ЯП.

Для численного решения локальных задач (1),(2) применялся метод конечного элемента [11].

Эффективные определяющие соотношения композита. После решения серии задач L_{pq} для всех значений (pq) и нахождения псевдоперемещений $U_{i(pq)}^{\alpha}$ и псевдонапряжений $\sigma_{ij(pq)}^{\alpha}$ в компонентах композиционного материала, используя интегрирование псевдонапряжений по областям, занятым компонентами композиционного материала,

можно вычислить средние напряжения в композиционном материале $\bar{\sigma}_{ij}$ (макронапряжения):

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{p,q}^3 \bar{\sigma}_{ij(pq)}, \quad \bar{\sigma}_{ij(pq)} = \langle \sigma_{ij(pq)}^\alpha \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V(a)} \sigma_{ij(pq)}^\alpha dV, \quad (3)$$

которые связаны с макродеформациями $\bar{\epsilon}_{pq}$ с помощью эффективных определяющих соотношений упругости

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijpq} \bar{\epsilon}_{pq}, \quad (4)$$

где \bar{C}_{ijpq} — компоненты тензора эффективных модулей упругости композиционного материала, которые вычисляются по формулам

$$\bar{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq}^{(0)} \rangle, \quad C_{ijpq}^{(0)}(\xi_l) = \frac{\sigma_{ij(pq)}^\alpha(\xi_l)}{\epsilon_{pq}}, \quad (5)$$

где по p и q суммирование нет.

Тензоры концентрации напряжений в компонентах композита. Тензор концентраций напряжений $B_{ijkl}^\alpha(\xi_m)$, связывающий напряжения в компонентах композиционного материала $\sigma_{ij}^\alpha(\xi_m) = \sum_{p,q} \sigma_{ij(pq)}^\alpha$ (микронапряжения) и макронапряжения $\bar{\sigma}_{ij}$,

$$\sigma_{ij}^\alpha(\xi_m) = B_{ijkl}^\alpha(\xi_m) \bar{\sigma}_{kl}$$

определяем с помощью следующих соотношений [10]:

$$B_{ijkl}^\alpha(\xi_m) = \sum_{p,q} C_{ijpq}^{(0)}(\xi_m) \bar{\Pi}_{pqkl}, \quad (6)$$

где $\bar{\Pi}_{pqsn} = \bar{C}_{ijpq}^{-1}$ — тензор упругих податливостей, тензор $C_{ijpq}^{(0)}(\xi_l)$ определяется формулой (6).

«Химический» критерий длительной прочности. Моделирование усталостной прочности композита основано на поиске допустимых предельных значений микронапряжений $\sigma_{ij}^\alpha(\xi_m)$ в компонентах композита. Согласно химическому критерию длительной прочности разрушение компонента композита в некоторой точке ξ_m^* в момент времени $t^*(\xi_m^*)$ происходит, если в этот момент достигает значения 1 параметр повреждаемости $z_\alpha(t)$:

$$z_\alpha(t^*(\xi_m^*)) = 1. \quad (7)$$

Параметр повреждаемости $z_\alpha(t)$ состоит из двух частей: обратимых и необратимых повреждений [5]

$$z_\alpha(t) = z_{\alpha r}(t_*) + z_{\alpha d}(t_*). \quad (8)$$

Параметр обратимых повреждений $z_{\alpha r}$ для изотропных сред имеет вид

$$z_{\infty r}(t) = A_{\infty+}\sigma_{\infty+}^2 + A_{\infty-}\sigma_{\infty-}^2 + A_{\infty}\sigma_{\infty u}^2 + K_{\infty 0} \int_0^t \frac{\sigma_{\infty u+}^2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\gamma} - \Gamma_{\infty 0}^2 \left(\int_0^t \frac{\sigma_{\infty u+}^2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta} \right)^2, \quad (9)$$

где $A_{\alpha+}$, $A_{\alpha-}$, A_{α} , $K_{\alpha 0}$, $\Gamma_{\alpha 0}$, γ , β — набор констант модели; $\sigma_{\alpha} = \sigma_{ii}^{\alpha}$ — среднее напряжение; $\sigma_{\alpha u}$ — интенсивность напряжений; $\sigma_{\alpha u+}$ являются комбинацией $\sigma_{\alpha u}$ и σ_{α} :

$$\sigma_{\alpha u+} = \frac{1}{2} (|\sigma_{\alpha u}^2 - \zeta \sigma_{\alpha-}^2| + \sigma_{\alpha u}^2 - \zeta \sigma_{\alpha-}^2); \quad \sigma_{\alpha \pm} = \frac{1}{2} (|\sigma_{\alpha}| \pm \sigma_{\alpha}); \quad (10)$$

ζ — константа модели; $\sigma_{\alpha \pm}$ — знакопостоянные инварианты. Константы $A_{\alpha+}$, $A_{\alpha-}$, A_{α} можно выразить через пределы статической прочности компонентов композита на растяжение $\sigma_{\alpha T}$, сжатие $\sigma_{\alpha C}$ и сдвиг $\sigma_{\alpha S}$:

$$A_{\alpha+} = \frac{1}{\sigma_{\alpha T}^2} - \frac{1}{3\sigma_{\alpha S}^2}; \quad A_{\alpha-} = \frac{1}{\sigma_{\alpha C}^2} - \frac{1}{3\sigma_{\alpha S}^2}; \quad A_{\alpha} = \frac{1}{3\sigma_{\alpha S}^2}. \quad (11)$$

Для необратимой части повреждений $z_{\alpha d}(t)$ имеет место следующее выражение:

$$z_{\alpha d}(t) = D_{\alpha} \int_0^t \sigma_{\alpha u+}^2(\tau) d\tau - D_{\alpha} \omega \int_0^t \sigma_{\alpha u+}(\tau) \int_0^{\tau} \exp(-\phi(\tau-x)) \sigma_{\alpha u+}(x) dx d\tau, \quad (12)$$

где D_{α} , ω , ϕ — константы.

«Химический» критерий усталостной прочности при циклическом нагружении. При простом (пропорциональном) моногармоническом нагружении макронапряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ и микронапряжения σ_{ij} изменяются во времени t по закону

$$\sigma_{ij}^{\alpha} = \hat{\sigma}_{ij}^{\alpha} \frac{1}{1+k} (k + \sin \omega t), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \hat{\bar{\sigma}}_{ij} \frac{1}{1+k} (k + \sin \omega t), \quad (13)$$

где $\hat{\bar{\sigma}}_{ij}$ и $\hat{\sigma}_{ij}^{\alpha}$ — амплитуда колебаний макро- и микронапряжений; k — параметр асимметрии цикла; $\omega \geq 0$ — частота нагружения. Рассмотрим многоцикловое нагружение, когда число циклов $N = t\omega$ велико, а колебания являются знакопостоянными: $|k| \geq 1$. Тогда инварианты $\sigma_{\alpha u+}$ и σ_{α} также изменяются по закону (13) с амплитудами $\hat{\sigma}_{\alpha u+}$ и $\hat{\sigma}_{\alpha}$.

Для «не очень» больших значений времени t_* вкладом необратимых повреждений (12) функционале (8) можно пренебречь. Тогда, если циклическое нагружение происходит только в области сжатия или только растяжения ($k \geq 1$), критерий (7)–(9) можно преобразовать к следующему виду [6]:

$$A_{\alpha+} \hat{\sigma}_{\alpha+}^2 + A_{\alpha-} \hat{\sigma}_{\alpha-}^2 + \hat{A}_{2\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha u}^2 = 1, \quad (14)$$

где обозначены функции от параметра асимметрии цикла нагружения

$$N_{1\alpha}(k) = \frac{K_{\alpha 0}}{1-\gamma} f_1(k), \quad N_{2\alpha}(k) = \frac{\Gamma_{\alpha 0}^2}{(1-\beta)^2} f_2(k), \quad (15)$$

$$f_1(k) = \frac{k^2 + 0.5}{(|k| + 1)^2}; \quad f_2(k) = \left(\frac{k}{|k| + 1} \right)^2$$

и функции времени

$$\hat{A}_{2\alpha}(k, t_*) = \frac{1}{3\hat{\sigma}_{\alpha S}^2}, \quad \hat{\sigma}_{\alpha S}^2 = \left(1 / \hat{\sigma}_{\alpha S}^2 + 3N_{1\alpha}(k)t_*^{1-\gamma} - 3N_{2\alpha}(k)t_*^{2-2\beta} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Критерий (14) позволяет найти время до разрушения t_* компонента композита при фиксированных амплитудах микронапряжений $\hat{\sigma}_{ij}^\alpha$, т. е. (14) фактически является критерием усталостной прочности.

Критерий усталостной прочности для нитей в композите. Одним из наиболее широко применяемых компонентов в современных композитах являются высокопрочные армирующие нити, которые ориентируют по специальным направлениям, например, собирают в многослойный пакет, слои которого образуют заданные углы с некоторым выделенным направлением (рис. 1). Это так называемые слоисто-волокнистые композиты (СВК). Нити состоят из большого числа моноволокон, пропитанных матрицей. Моноволокна имеют различную длину и их упруго-прочностные свойства, как правило, обладают масштабным эффектом [12]. Поэтому для описания упруго-прочностных свойств нитей применяют специальные модели, учитывающие особенности их разрушения при различных видах напряженного состояния. Примем далее модель, предложенную в [12], согласно которой каждая нить с номером α в собственной системе координат

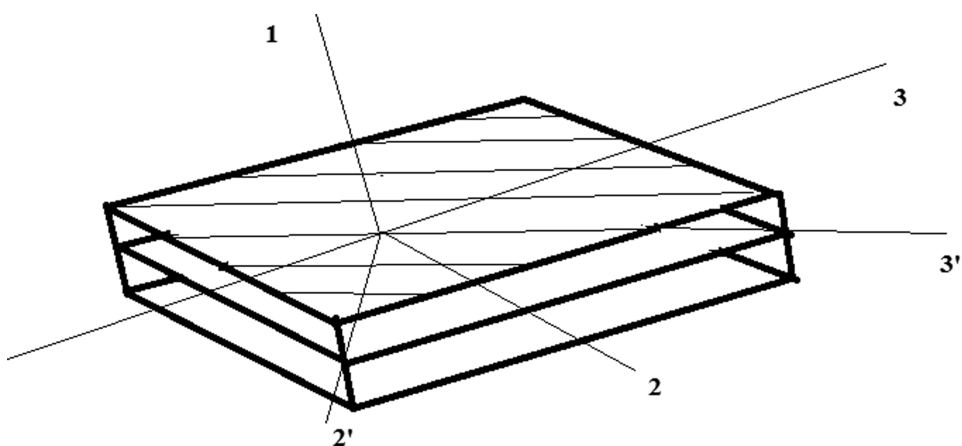


Рис. 1. Слоисто-волокнистый композит

$O\xi_m^\alpha$, связанной с ее геометрической формой, является трансверсально-изотропной, и ее усталостные свойства описываются двумя параметрами повреждаемости $z_{1\alpha}(t)$ и $z_{2\alpha}(t)$. Параметр $z_{1\alpha}(t)$ учитывает только свойства в направлении укладки моноволокон, а второй — только в поперечных направлениях и при продольных сдвигах:

$$z_{1\alpha} = \frac{Y_{1\alpha+}^2}{\hat{\sigma}_{\alpha T}^{I/2}} + \frac{Y_{1\alpha-}^2}{\hat{\sigma}_{\alpha C}^{I/2}}; \quad (17)$$

$$z_{2\alpha} = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{\alpha T}^2} - \frac{1}{3\hat{\sigma}_{\alpha S}^2} \right)^2 Y_{2\alpha+}^2 + \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_{\alpha C}^2} - \frac{1}{3\hat{\sigma}_{\alpha S}^2} \right)^2 Y_{2\alpha-}^2 + \frac{1}{12\hat{\sigma}_{\alpha S}^2} (Y_{2\alpha}^2 + 3Y_{3\alpha}^2 + 12Y_{4\alpha}^2). \quad (18)$$

Усталостное разрушение нити по типу 1 или 2 наступает, когда достигается соответствующее предельное условие

$$z_{1\alpha}(t_*) = 1; \quad z_{2\alpha}(t_*) = 1. \quad (19)$$

В (17) и (18) обозначены инварианты тензоров амплитуд напряжений $\check{\sigma}_{\alpha ij}$, записанные в собственной системе координат $O\xi_m^\alpha$, связанной с ориентацией нити:

$$Y_{1\alpha\pm} = \frac{1}{2} (|\check{\sigma}_{\alpha 33}| \pm \check{\sigma}_{\alpha 33}), \quad Y_{2\alpha\pm} = \frac{1}{2} (|\check{\sigma}_{\alpha 11} + \check{\sigma}_{\alpha 22}| \pm (\check{\sigma}_{\alpha 11} + \check{\sigma}_{\alpha 22})), \quad (20)$$

$$Y_{3\alpha}^2 = (\check{\sigma}_{\alpha 11} - \check{\sigma}_{\alpha 22})^2 + 4\check{\sigma}_{\alpha 12}^2, \quad Y_{4\alpha}^2 = \check{\sigma}_{\alpha 13}^2 + \check{\sigma}_{\alpha 23}^2.$$

Направление 3 здесь полагается соответствующим криволинейной оси нити, а направления 1 и 2 — ортогональны к нему. Переход к единой для всех компонентов системе координат $O\xi_m$ осуществляется с помощью тензорных преобразований

$$\check{\sigma}_{\alpha ij} = Q_{aik} Q_{ajl} \hat{\sigma}_{\alpha kl}, \quad (21)$$

где $Q_{\alpha jl}$ — матрицы поворота.

Пределы $\hat{\sigma}_{\alpha T}^I$ и $\hat{\sigma}_{\alpha C}^I$ усталостной прочности нити при растяжении и сжатии в направлении укладки моноволокон вычисляются по формулам [12]:

$$\hat{\sigma}_{\alpha T}^I = \hat{\sigma}_{fT} H_0 \frac{\varphi_f^{r_f}}{(1 - \varphi_f)^{S_f}} \left(\frac{E_f}{2G_m} \right)^{S_f} \left(\frac{\hat{\sigma}_{mS}}{\hat{\sigma}_{fT}} \right)^{\omega_f}; \quad (22)$$

$$\hat{\sigma}_{\alpha C}^I = \hat{\sigma}_{mS} h_C^\ell, \quad h_C^\ell = \begin{cases} s_C^{-1/2}, & B_{m2} > B_{m4} \\ s_T^{-1/2}, & B_{m2} < B_{m4} \end{cases}, \quad (23)$$

$$s_{T,C} = (B_{m2} - B_{m4})^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{mS}}{\hat{\sigma}_{mT,C}} \right)^2 + B_{m2} B_{m4},$$

где H_0 , r_f , S_f , ω_f — Вейбулловские параметры разброса прочности моноволокон в нити [12]; φ_f — коэффициент армирования нити (доля моноволокон в нити); $\hat{\sigma}_{mT,C,S}$ — пределы усталостной прочности матрицы на растяжение, сжатие и сдвиг; $\hat{\sigma}_{fT}$ — среднестатистический по пучку моноволокон предел усталостной прочности моноволокон на растяжение, которые имеют выражение, аналогичное (16):

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{mS}^2 &= (1/\sigma_{mS}^2 + 3N_{1m}(k)t_*^{1-\gamma} - 3N_{2m}(k)t_*^{2-2\beta})^{-1}; \\ \hat{\sigma}_{mT,C}^2 &= (1/\sigma_{mT,C}^2 + N_{1m}(k)t_*^{1-\gamma} - N_{2m}(k)t_*^{2-2\beta})^{-1}; \\ \hat{\sigma}_{fT}^2 &= (1/\sigma_{fT}^2 + N_{1f}(k)t_*^{1-\gamma_f} - N_{2f}(k)t_*^{2-2\beta_f})^{-1},\end{aligned}\quad (24)$$

где $\sigma_{mT,C,S}$ — пределы статической прочности матрицы на растяжение, сжатие и сдвиг; σ_{fT} — средний предел статической прочности моноволокон в нити.

В формулах (22) обозначены коэффициенты концентрации напряжений в той части матрицы, которая находится в составе нити (окружает моноволокна):

$$\begin{aligned}B_{m1} &= (1 - \delta_f)\delta_f + \frac{\nu_f}{2}\delta_f^2 \frac{E_f}{E_m} \sin^2 2\Phi_f, \quad B_{m2} = \frac{E_m}{\varphi_f E_f} \left(1 + \varphi_f \frac{E_f}{E_m} tg^2 2\Phi_f \right), \\ B_{m4} &= tg\Phi_f, \quad B_{m3} = (1 - \delta_f)\delta_f + \frac{1 + \nu_f}{2}\delta_f^2 \frac{E_f}{E_m} \sin^2 2\Phi_f, \quad \delta_f = 2 \left(\frac{\varphi_f}{\pi} \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь Φ_f — угол разориентации моноволокон в нити; E_m , E_f — модули упругости матрицы и моноволокон; ν_f — коэффициент Пуассона моноволокон.

Разрушение нити при продольном сжатии возникает вследствие потери устойчивости моноволокон. Потеря устойчивости объясняется наличием угла разориентации моноволокон Φ_f . В результате потери устойчивости моноволокно изгибается и в матрице возникают напряжения, ведущие к ее разрушению или к отслаиванию моноволокон.

Пределы усталостной прочности нити при поперечном растяжении, сжатии и сдвиге, а также при продольном сдвиге нити выражаются по формулам

$$\hat{\sigma}_{T,C,S} = \frac{1}{B_{m1}} \hat{\sigma}_{mT,C,S}, \quad \hat{\sigma}_S^I = \frac{1}{B_{m3}} \hat{\sigma}_{mS}.\quad (26)$$

Критерий усталостной прочности композита. Полагаем, что ЯП композита состоит из системы $N - 1$ нитей ($\alpha = 1 \dots N - 1$), каждая из которых ориентирована по своему направлению, задаваемому соб-

ственной криволинейной системой координат $O\xi_m^\alpha$. Вся система нитей окружена матрицей, которой соответствует индекс $\alpha = N$. Тогда усталостное разрушение композита описывается системой критериев усталостной прочности (17), (18) для каждой нити $\alpha = 1 \dots N - 1$ и критерия (14) при $\alpha = N$ — для матрицы:

$$\max\{z_{1a}(t_*), z_{2a}(t_*), z_N(t_*)\} = 1, \quad \alpha = 1 \dots N - 1, \quad (27)$$

где $z_N(t_*)$ — параметр повреждаемости матрицы, согласно (14),

$$z_N(t_*) = A_{m+} \hat{\sigma}_{m+}^2 + A_{m-} \hat{\sigma}_{m-}^2 + \hat{A}_{2m}(t_*) \hat{\sigma}_{mu}^2. \quad (28)$$

Подставляя в (27) выражение (5) для компонент микронапряжений, получим искомый критерий усталостной прочности, выраженный через макронапряжения $\hat{\bar{\sigma}}_{ij}$.

Критерий (27) для каждого момента времени t_* гиперповерхность в 6-мерном пространстве макронапряжений $\hat{\bar{\sigma}}_{ij}$

$$\Omega(\hat{\bar{\sigma}}_{ij}, t_*, k) = 1. \quad (29)$$

Для того, чтобы пользоваться этой поверхностью при проведении расчетов конструкций из композитов на усталость, часто удобно иметь способ представления поверхности не в виде алгоритма решения уравнения (27), а в виде множества точек $\hat{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{\rho\}}$, $\rho = 1, 2, \dots$ на поверхности усталостной прочности в 6-мерном пространстве макронапряжений. Точки $\hat{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{\rho\}} \in \Sigma_c$ на поверхности усталостной прочности композитов находим с помощью следующего алгоритма. В 6-мерном пространстве макронапряжений из нулевой точки осуществляем пропорциональное (простое) нагружение по лучу

$$\hat{\bar{\sigma}}_i^{\{\rho\}} = \hat{\bar{\sigma}}_0 n_i^{\{\rho\}} \tau^{\{\rho\}}, \quad \rho = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

где $n_i^{\{\rho\}}$ — направляющие косинусы луча нагружения ($n_i^{\{\rho\}} n_i^{\{\rho\}} = 1$); $\hat{\bar{\sigma}}_0$ — размерная константа напряжений; τ — переменный параметр движения по лучу; $\hat{\bar{\sigma}}_i^{\{\rho\}}$ — координатный столбец напряжений, образованный из компонент тензора $\hat{\bar{\sigma}}_{ij}$. Подставляя выражение (30) в (29), и учитывая, что все критерии усталостной прочности (27), (28) матрицы и нити являются однородными функциями 2-го порядка, получаем для параметра τ следующее значение:

$$\tau^{\{\rho\}} = 1 / \sqrt{\Omega(\hat{\bar{\sigma}}_0 n_i^{\{\rho\}}, t_*, k)}.$$

Подставляя найденное выражение для $\tau^{\{\rho\}}$ в (30), находим координаты точки $\hat{\bar{\sigma}}_{ij}^{\{\rho\}}$, $\rho = 1, 2, \dots$ в пространстве напряжений.

Результаты численного моделирования. В качестве примера разработанного метода был рассмотрен слоисто-волоконистый композит, с тремя типами армирующих нитей ($\alpha = 1 \dots 3$, $N = 4$), уложенных в плоскости, ортогональной к оси $O\xi_1$. Все нити были прямолинейными, но отличались углом ϕ_α поворота оси $O\xi_1$: нити $\alpha = 1$ были ориентированы под углом $\phi_1 = 0^\circ$ оси $O\xi_3$, нити $\alpha = 2$ — под углом $\phi_2 = 90^\circ$, а угол ϕ_3 нити $\alpha = 3$ варьировался в диапазоне от 0 до 90° . Такие композиты широко применяют на практике и образуются выкладкой или спирально кольцевой намоткой.

Характеристики моноволокон в нитях соответствовали органическим волокнам, а характеристики матрицы — эпоксидной матрицы со следующими значениями констант:

$$\begin{aligned} E_f &= 200 \text{ ГПа}, \sigma_{fT} = 2,2 \text{ ГПа}, \nu_f = 0,25, \omega_f = 0,33, s_f = 0,07, r_f = 0,25 \\ H_0 &= 3, \Phi_f = 1^\circ, \\ E_m &= 3 \text{ ГПа}, \nu_m = 0,35, \sigma_{mT} = 35 \text{ МПа}, \sigma_{mC} = 43 \text{ МПа}, \sigma_{mS} = 27 \text{ МПа}, \\ K_{m0} \sigma_0^2 t_0^{1-\gamma} &= 0,153, \Gamma_{m0}^2 \sigma_0^2 t_0^{2-2\beta} = 0,008, \gamma = 0,798, \beta = 0,9, \sigma_0 = 10 \text{ МПа}, \\ t_0 &= 5 \cdot 10^8 \text{ с}, \\ K_{f0} \sigma_0^2 t_0^{1-\gamma_f} &= 8,25 \cdot 10^{-5}, \Gamma_{f0}^2 \sigma_0^2 t_0^{2-2\beta_f} = 0,5 \cdot 10^{-5}, \gamma_f = 0,721, \beta_f = 0,823. \end{aligned}$$

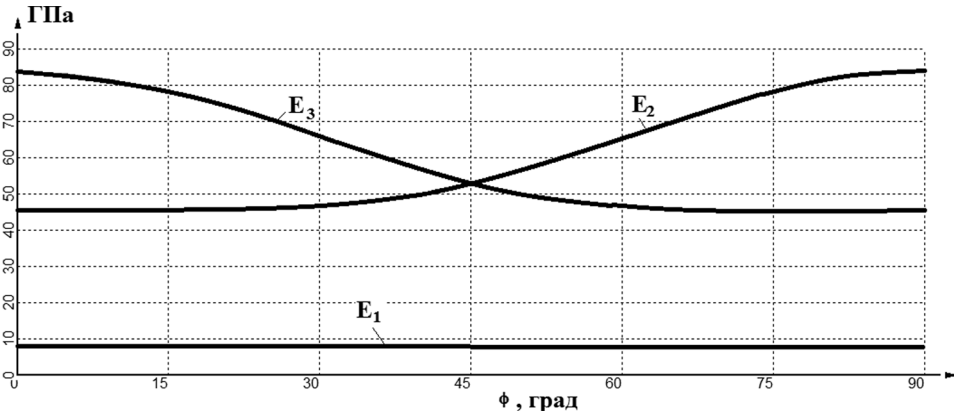


Рис. 2. Графики зависимости эффективных модулей упругости композита СВК от угла армирования ϕ

Частота нагружения была выбрана равной 17 Гц. На рис. 2 показаны графики зависимости эффективных модулей упругости композита СВК E_1 , E_2 , E_3 от угла армирования $\phi_3 = \phi$. На рис. 3 аналогичные зависимости для модулей сдвига G_{12} , G_{13} , G_{23} , а на рис. 4 — для коэффициентов Пуассона ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} . Эффективные упругие модули рассчитаны по формулам (5). Результаты конечно-элементного решения локальных задач (2) в ЯП обсуждались в работах [9, 10].

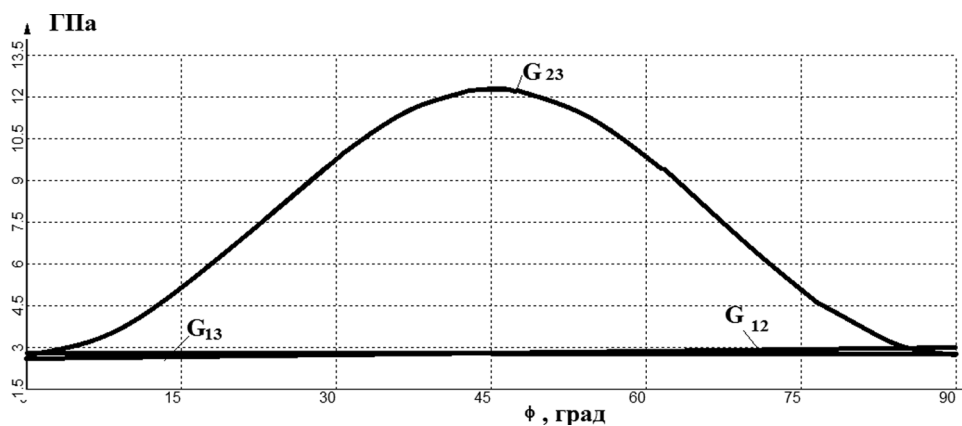


Рис. 3. Зависимости модулей сдвига эпоксидного органопластика СВК от угла армирования ϕ

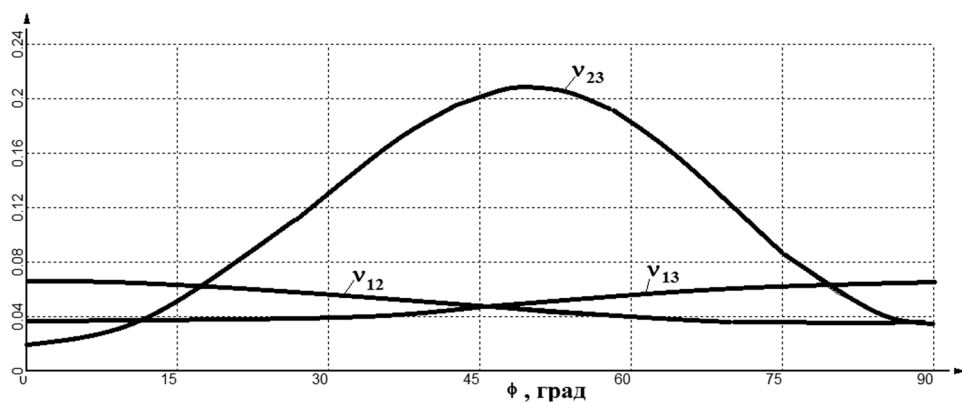


Рис. 4. Зависимости коэффициентов Пуассона композита СВК от угла армирования ϕ

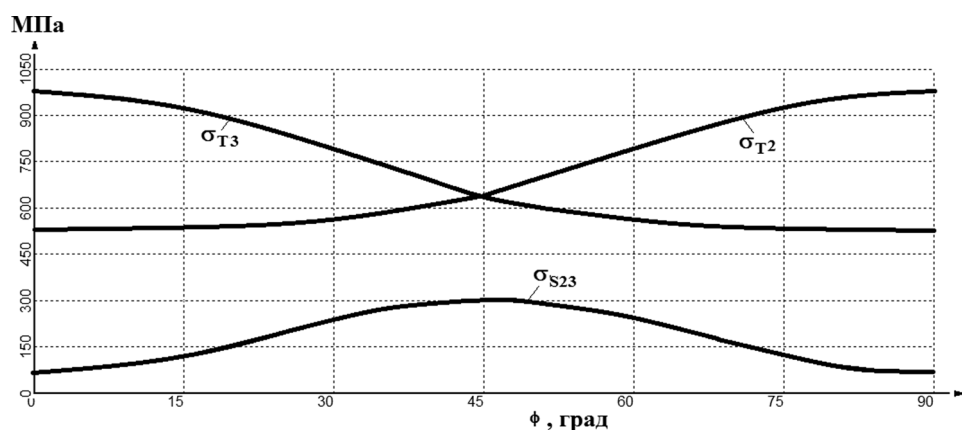


Рис. 5. Графики зависимости пределов статической прочности композита СВК при растяжении и сдвиге от угла армирования ϕ

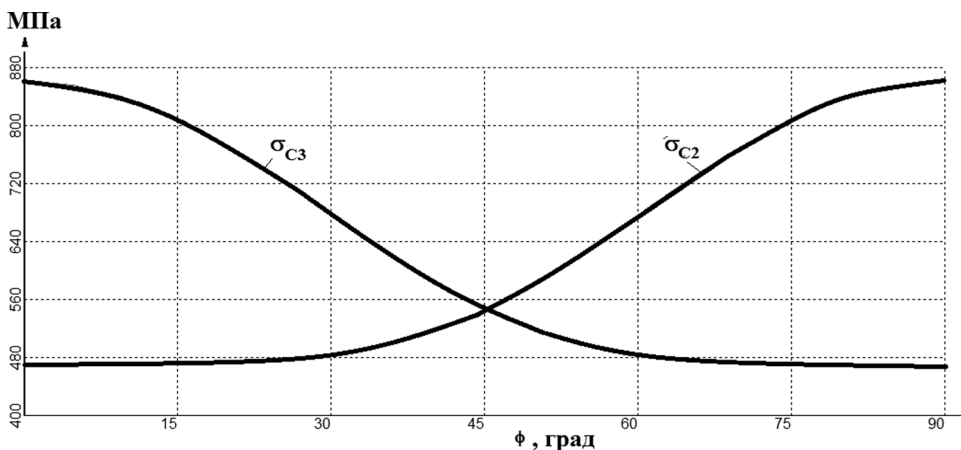


Рис. 6. Графики зависимости пределов статической прочности эпоксидного органо-пластика СВК при сжатии от угла армирования ϕ

Графики зависимости пределов статической прочности при $t = 0$ композита СВК σ_{T2} , σ_{T3} , σ_{S23} , σ_{C2} , σ_{C3} от угла армирования ϕ показаны на рис. 5 и 6. Пределы прочности соответствуют фиксированным точкам, являющимися пересечениями осей координат с поверхностью прочности (29) при $t = 0$: $\Omega(\bar{\sigma}_{ij}^{\{\rho\}}, 0, 0) = 1$:

$$\sigma_{T2} = \bar{\sigma}_{22}^{\{\rho\}}, \text{ остальные } \bar{\sigma}_{ij}^{\{\rho\}} = 0; \quad \sigma_{T3} = \bar{\sigma}_{33}^{\{\rho\}}, \text{ остальные } \bar{\sigma}_{ij}^{\{\rho\}} = 0;$$

$$\sigma_{S23} = \bar{\sigma}_{23}^{\{\rho\}}, \text{ остальные } \bar{\sigma}_{ij}^{\{\rho\}} = 0; \quad \sigma_{C2} = -\bar{\sigma}_{22}^{\{\rho\}}, \text{ остальные } \bar{\sigma}_{ij}^{\{\rho\}} = 0;$$

$$\sigma_{C33} = -\bar{\sigma}_{33}^{\{\rho\}}, \text{ остальные } \bar{\sigma}_{ij}^{\{\rho\}} = 0.$$

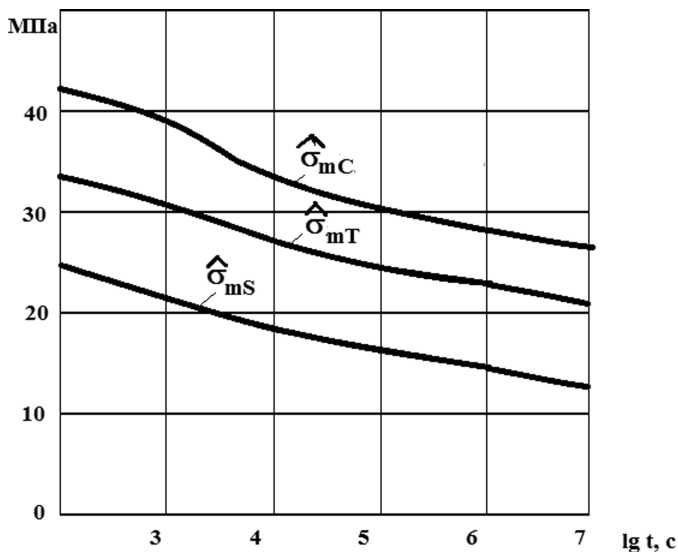


Рис. 7. Сечения поверхности статической прочности эпоксидного органо-пластика СВК плоскостью $(\sigma_{22}, \sigma_{33})$ при различных углах ϕ

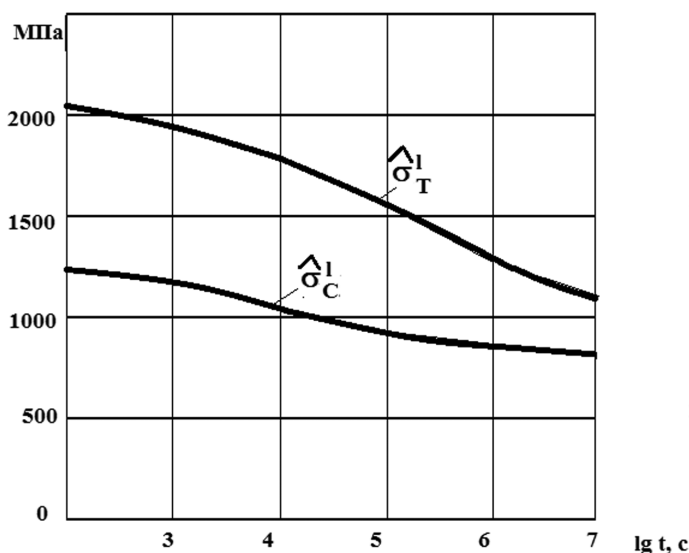


Рис. 8. Графики усталостной прочности эпоксидной матрицы при растяжении, сжатии и сдвиге

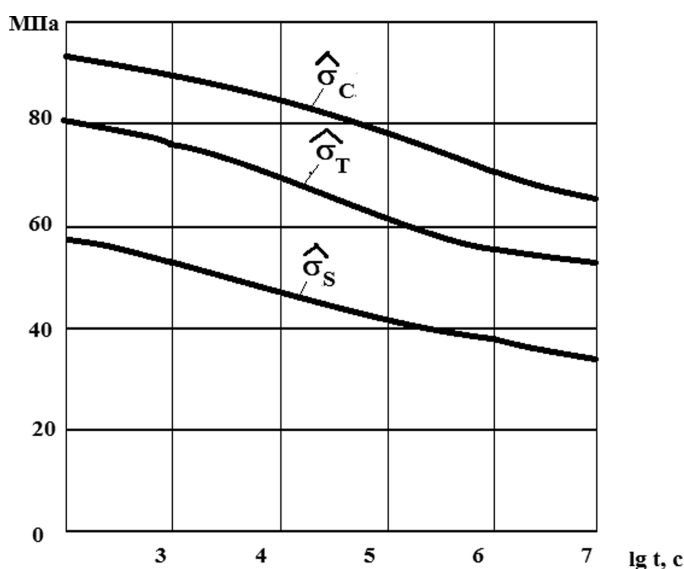


Рис. 9. Графики усталостной прочности $\hat{\sigma}_{T,C,S}(t)$ и $\hat{\sigma}_{T,C}^I(t)$ органических нитей при поперечном растяжении, сжатии и сдвиге

На рис. 7 показаны сечения поверхности статической прочности композита (условно-мгновенное нагружение при $t = 0$) плоскостью $(\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33})$ при различных углах $\phi_3 = \phi$. Сечения поверхности образуют совокупность отрезков, которые соответствуют разным типам разрушения композита. Отрезки, близкие к вертикальным, соответствуют разрушению слоя с углами армирования $\phi_1 = 0^\circ$, отрезки, близкие к го-

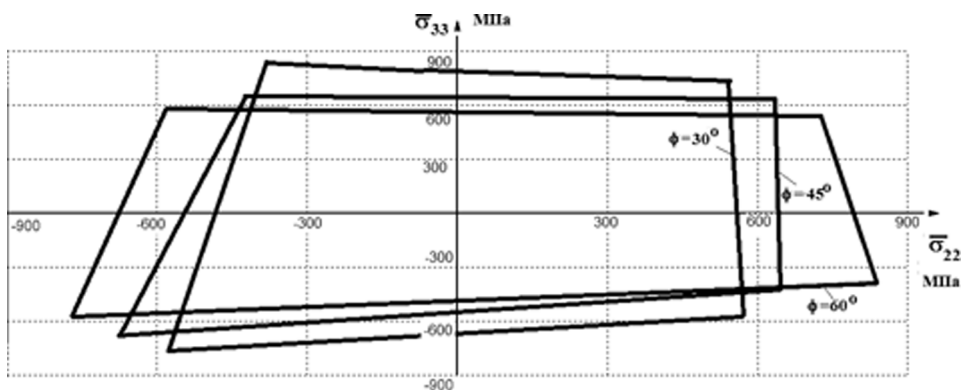


Рис. 10. Графики усталостной прочности $\hat{\sigma}_{T,C,S}(t)$ и $\hat{\sigma}_{T,C}^I(t)$ органических нитей при продольном растяжении и сжатии

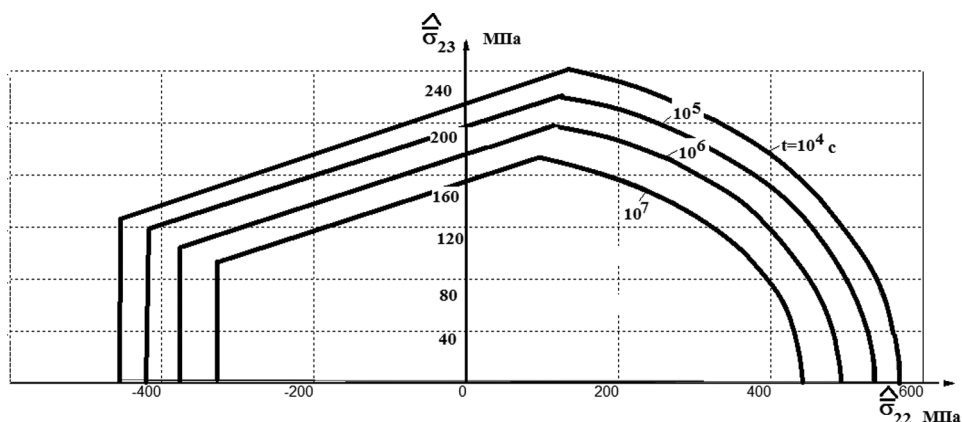


Рис. 11. Сечения поверхности усталостной прочности эпоксидного органоупластика СВК плоскостью $(\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33})$ при различных значениях времени t циклического нагружения

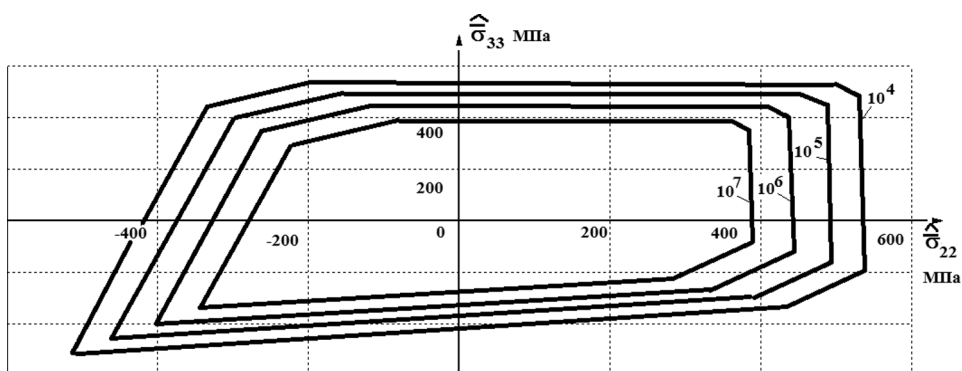


Рис. 12. Сечения поверхности усталостной прочности эпоксидного органоупластика СВК плоскостью $(\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33})$ при различных значениях времени t циклического нагружения

горизонтальным – слою с углом армирования $\phi_1 = 90^\circ$. Разрушение слоя с углами ϕ происходит в зонах стыка отрезков разных семейств. Таким образом, разрушение композита носит сложный комбинированный характер и зависит от значений углов армирования.

На рис. 8 показаны графики усталостной прочности $\hat{\sigma}_{mT,C,S}(t)$ матрицы, рассчитанные по формулам (24) для значений (32). Усталость рассматривалась на базе $10^3 \dots 10^7$ с. На рис. 9 и 10 показаны графики усталостной прочности $\hat{\sigma}_{T,C,S}(t)$ и $\hat{\sigma}_{T,C}^l(t)$ нитей, рассчитанные по формулам (22), (23) и (26) для тех же моментов времени.

На рис. 11 и 12 показаны сечения поверхности усталостной прочности композита СВК плоскостями $(\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33})$ и $(\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{23})$ для значения угла $\phi = 45^\circ$. Поверхности соответствуют четырем различным значениям времени $t = 10^4, 10^5, 10^6$ и 10^7 с. Характер усталостного разрушения композита в целом не изменяется во времени, поверхности усталостной прочности самоподобно смещаются внутрь к началу координат, вследствие уменьшения значений усталостной прочности матрицы и армирующих нитей. Самоподобие поверхностей обусловлено тем, что СВК композит рассматриваемой структуры с углами армирования $0, 45, 90^\circ$ разрушается только из-за разрушения матрицы в разных слоях, разрыва моноволокон в композите данного типа не происходит, как при статическом, так и при усталостном нагружении. Экспериментальные данные в целом подтверждают данные выводы.

Выводы. Разработана математическая модель усталостного разрушения композиционных материалов, в которой тензоры концентрации микронапряжений рассчитываются на основе конечно-элементного решения локальных задач на ячейках периодичности. Модель учитывает различные механизмы микроразрушения композита: в следствие разрушения матрицы при растяжении, сжатии и сдвиге, а также при комбинированном нагружении, и вследствие разрушения армирующих нитей по 2-м типам – из-за поперечного расслоения и из-за обрыва нитей при продольном растяжении или сжатии. Представлены результаты численного моделирования усталостных характеристик слоисто-волоконистых композитов, которые показали, что поверхности усталостной прочности зависят от структуры армирования композитов, и образованы из частей нескольких поверхностей, соответствующих разным типам разрушения композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малейстер А. К. Соппротивление композитных и полимерных материалов. Рига: Изд-во «Зинатне», 1980.
2. Ильюшин А. А., Побрядя Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука. 1970.

3. Гольденблат И. А., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение. 1968.
4. Петров В. А., Башкарев А. Я., Веттегрень Е. И. Физические основы прогнозирования долговечности конструкционных материалов. СПб.: Политехника. 1993.
5. Димитриенко Ю. И., Димитриенко И. П. Прогнозирование долговечности полимерных элементов конструкций с помощью «химического» критерия длительной прочности // Вопросы оборон. техники. № 1/2. 2002. С. 15–21.
6. Димитриенко Ю. И., Димитриенко И. П. Расчет сопротивления усталости композитов на основе «химического» критерия длительной прочности // Вопросы оборон. техники. № 1/2. 2002. С. 21–25.
7. Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит. 2009. 624 с.
8. Димитриенко Ю. И. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды // Механика сплошной среды. Т. 2. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. 560 с.
9. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечных элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2002. № 2. С. 95–108.
10. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Об упругих свойствах композиционных материалов // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 4. С. 96–110.
11. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Метод конечного элемента для решения локальных задач механики композиционных материалов: учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. 66 с.
12. Димитриенко Ю. И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997. 356 с.

Статья поступила в редакцию 27.10.2011.