fast campus

Chapter. 2

Maths for Linear Regression

Theory Assignment

FAST CAMPUS ONLINE

강사. 신경식

Question.2-01

최적화의 대상이 되는 함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$f(x) = 3(x + 2)^2 - 1$$

위의 $f(x)$에 대하여 optimal point는 $x_o = \underset{x}{\operatorname{argmin}} f(x)$에 대하여 $(x_o, f(x_o))$로 정의될때, 다음 문제들의 답을 구하시오.

1) derivative $\dfrac{df(x)}{dx}$를 구한 뒤, $f(x)$와 $\dfrac{df(x)}{dx}$의 개형을 각각 그리시오.

2) $f(x)$의 값이 최소가 되는 optimal point에서의 x값을 구하시오.

3) differential coefficient를 이용하여 $x = -4, -3, -2, -1, 0$에서 각각 x가 optimal point로 이동해야 하는 방향을 $+, -$, 변화없음 중 하나로 나타내시오.

4) 3)의 풀이를 바탕으로 $\dfrac{df(x)}{dx}$와, 임의의 x가 optimal point로 이동하기 위한 방향과의 관계를 설명하시오.

Question.2-02

최적화의 대상이 되는 함수 $f(x, y)$가 다음과 주어졌다고 하자.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

이때 주어진 f의 contour plot은 오른쪽 그림과 같고,

optimal point는 $\underset{(x,y)}{\mathrm{argmin}}\, f(x, y)$을 만족시키는 (x, y)로 정의할 때,

다음 물제들에 답하시오.

1) f에 대해 임의의 (x, y)에서의 gradient $\nabla_{(x,y)} f(x, y)$를 구하시오.

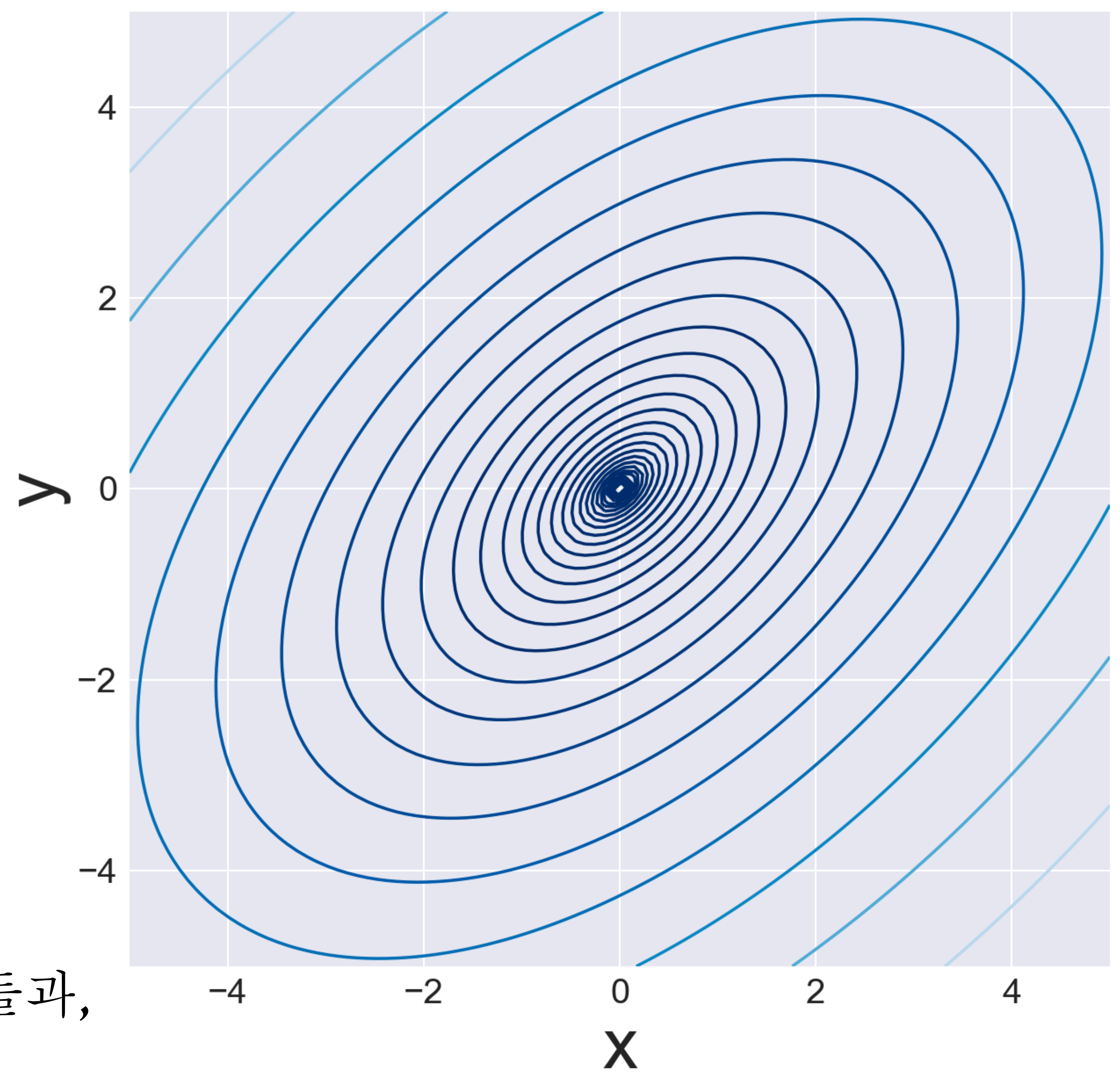
2) 다음의 (x, y) pair들에 대해 gradient들을 구하고,

   contour plot 위에 gradient들을 표시하시오

$$(x, y) = (1,1), (2,1)$$

3) 위 (x, y)들에 대해 (x, y)들에서 함수값 f를 가장 크게 증가시키는 방향들과,

   가장 크게 감소시키는 방향들을 구하시오.



Question.2-03

함수 f가 $\overrightarrow{\theta}$에 대해 다음과 같이 주어졌을 때, Jacobian matrix $\dfrac{\partial f(\overrightarrow{\theta})}{\partial \overrightarrow{\theta}}$를 구하시오.

1) $\overrightarrow{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ $\quad f(\overrightarrow{\theta}) = (\theta_1)^3 - 2(\theta_2)^2 + \theta_1\theta_3$

2) $\overrightarrow{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ $\quad f(\overrightarrow{\theta}) = ln^2(\theta_1) - 3e^{\theta_2\theta_3} + tan(\theta_3)$

Question.2-04

함수 $\vec{f}$가 θ에 대해 다음과 같이 주어졌을 때, Jacobian matrix $\dfrac{\partial \vec{f}(\theta)}{\partial \theta}$를 구하시오.

$$\vec{f}(\theta) = \begin{pmatrix} f_1(\theta) \\ f_2(\theta) \\ f_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^3 - 2\theta^2 + 10 \\ ln(\theta) - sin(\theta)cos(\theta) \\ e^{\theta+10} - e^{2\theta} \end{pmatrix}$$

Question.2-05

함수 $\vec{f}$가 $\vec{\theta}$에 대해 다음과 같이 주어졌을 때, Jacobian matrix $\dfrac{\partial \vec{f}(\vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}}$를 구하시오.

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{\theta}) \\ f_2(\vec{\theta}) \\ f_3(\vec{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_1)^3 - 2(\theta_2)^2 + 10 \\ ln(\theta_1) - sin(\theta_1)cos(\theta_2) \\ e^{\theta_1 + 10} - e^{2\theta_2} \end{pmatrix}$$

Question.2-06

$\vec{\theta}, \vec{f}$가 다음과 같이 주어지고,

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{\theta}) \\ f_2(\vec{\theta}) \\ f_3(\vec{\theta}) \end{pmatrix}$$

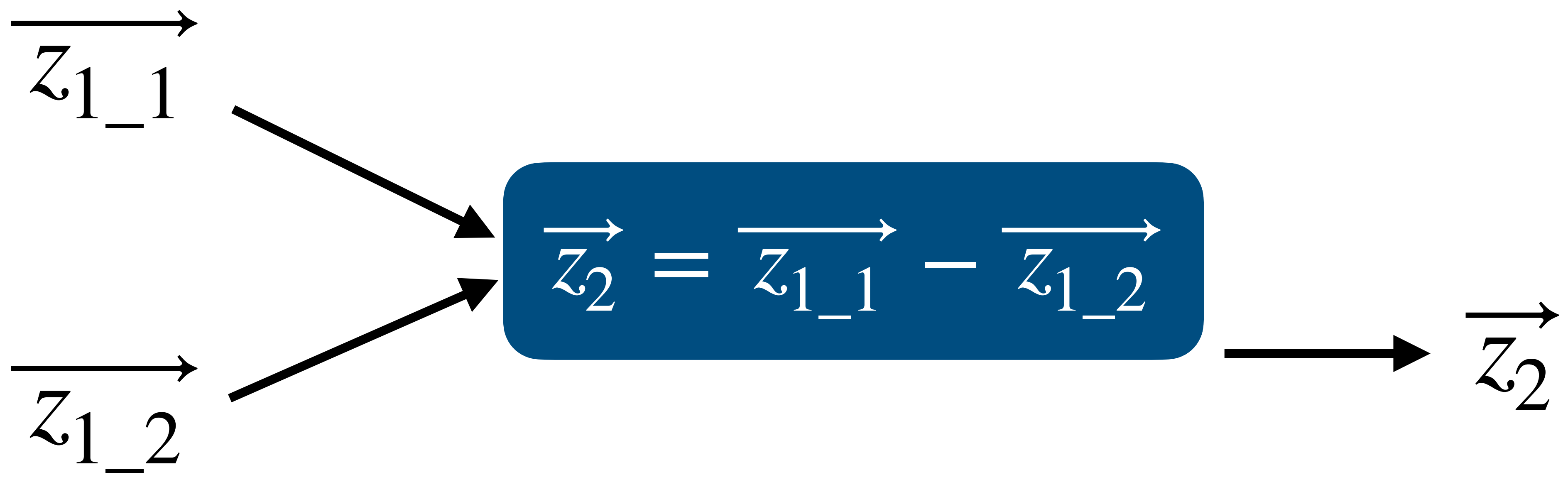
$\vec{\theta}$에 대한 함수 $\vec{f}$는 다음과 같을 때,

$$f_i(\vec{\theta}) = sin(\theta_i)$$

Jacobian matrix $\dfrac{\partial \vec{f}(\vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}}$를 구하시오.

Question.2-07

다음 연산에서 $\dfrac{\partial \overrightarrow{z_2}}{\partial \overrightarrow{z_{1\_1}}}, \dfrac{\partial \overrightarrow{z_2}}{\partial \overrightarrow{z_{1\_2}}}$, 를 각각 구하시오.



Question.2-08

다음 연산에서 $\dfrac{\partial \overrightarrow{z_2}}{\partial \overrightarrow{z_1}}$를 구하시오.

$$\overrightarrow{z_1} \longrightarrow \boxed{\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1} \bigcirc \overrightarrow{z_1}} \longrightarrow \overrightarrow{z_2}$$

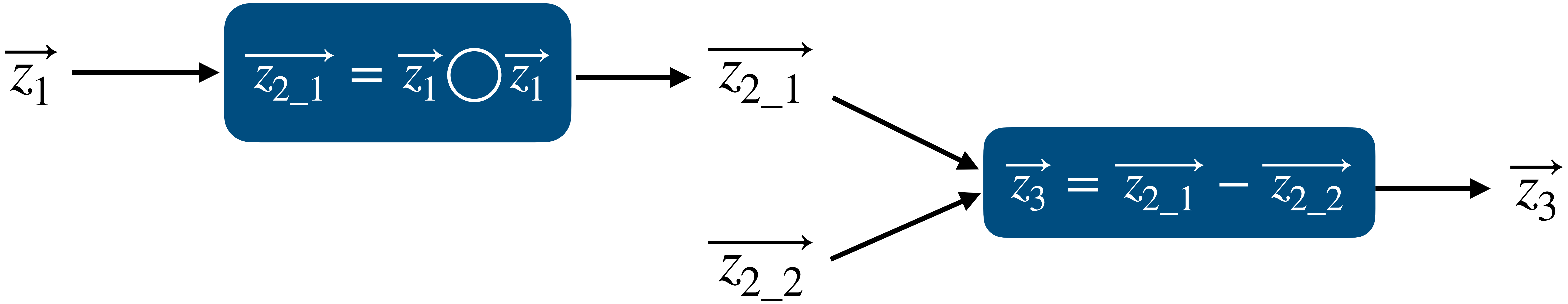
이때 $\bigcirc$은 Hadamard product을 의미하며,

$$\overrightarrow{z_1} \bigcirc \overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} z_1^{(1)} * z_1^{(1)} \\ z_1^{(2)} * z_1^{(2)} \\ \vdots \\ z_1^{(n)} * z_1^{(n)} \end{pmatrix}$$

로 계산된다.

Question.2-09

다음 연산에서 $\dfrac{\partial \overrightarrow{z_3}}{\partial \overrightarrow{z_1}}$를 구하시오.



Question.2-10

$\alpha, \overrightarrow{\beta}, \vec{\gamma}, \overrightarrow{\delta}$가 다음과 같이 주어졌다.

$$\overrightarrow{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1(\vec{\gamma}) \\ \beta_2(\vec{\gamma}) \\ \beta_3(\vec{\gamma}) \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} r_1(\overrightarrow{\delta}) \\ r_2(\overrightarrow{\delta}) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\beta_i \qquad \overrightarrow{\beta}(\vec{\gamma}) = \begin{pmatrix} \beta_1(\vec{\gamma}) \\ \beta_2(\vec{\gamma}) \\ \beta_3(\vec{\gamma}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)^2 + 2r_2 \\ 2(r_1)^2 - 4(r_2)^2 \\ r_1 + 3(r_2)^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma}(\overrightarrow{\delta}) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\overrightarrow{\delta}) \\ \gamma_2(\overrightarrow{\delta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin(\delta_1) + cos(\delta_2) + tan(\delta_3) \\ e^{\delta_1} - e^{2\delta_2} + ln(\delta_3) \end{pmatrix}$$

이때 $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\overrightarrow{\delta}}$를 구하시오.