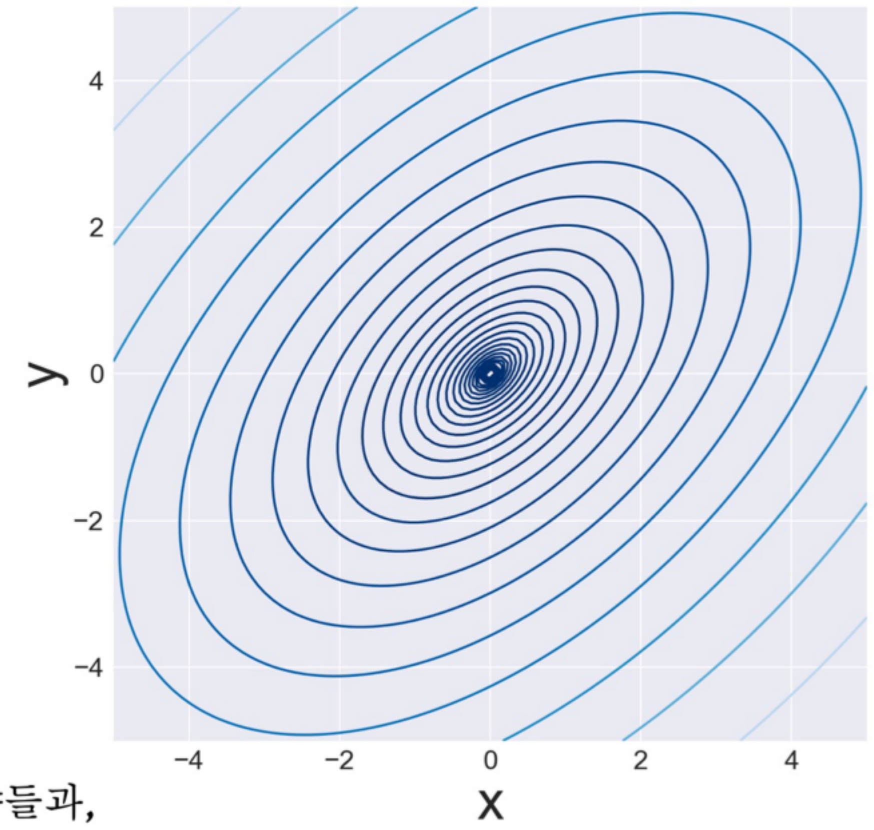
Question.2-02

최적화의 대상이 되는 함수 $f(x,y)$가 다음과 주어졌다고 하자.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$$



이때 주어진 f의 contour plot은 오른쪽 그림과 같고,

optimal point는 $\underset{(x,y)}{\operatorname{argmin}} f(x,y)$을 만족시키는 (x,y)로 정의할 때,

다음 물제들에 답하시오.

1) f에 대해 임의의 (x,y)에서의 gradient $\nabla_{(x,y)} f(x,y)$를 구하시오.

2) 다음의 (x,y) pair들에 대해 gradient들을 구하고,
contour plot 위에 gradient들을 표시하시오

$$(x,y) = (1,1), (2,1)$$

3) 위 (x,y)들에 대해 (x,y)들에서 함수값 f를 가장 크게 증가시키는 방향들과,
가장 크게 감소시키는 방향들을 구하시오.

1) 주어진 f는 x와 y에 대한 함수이므로 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2+y^2-xy] = 2x-y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2+y^2-xy] = 2y-x$$

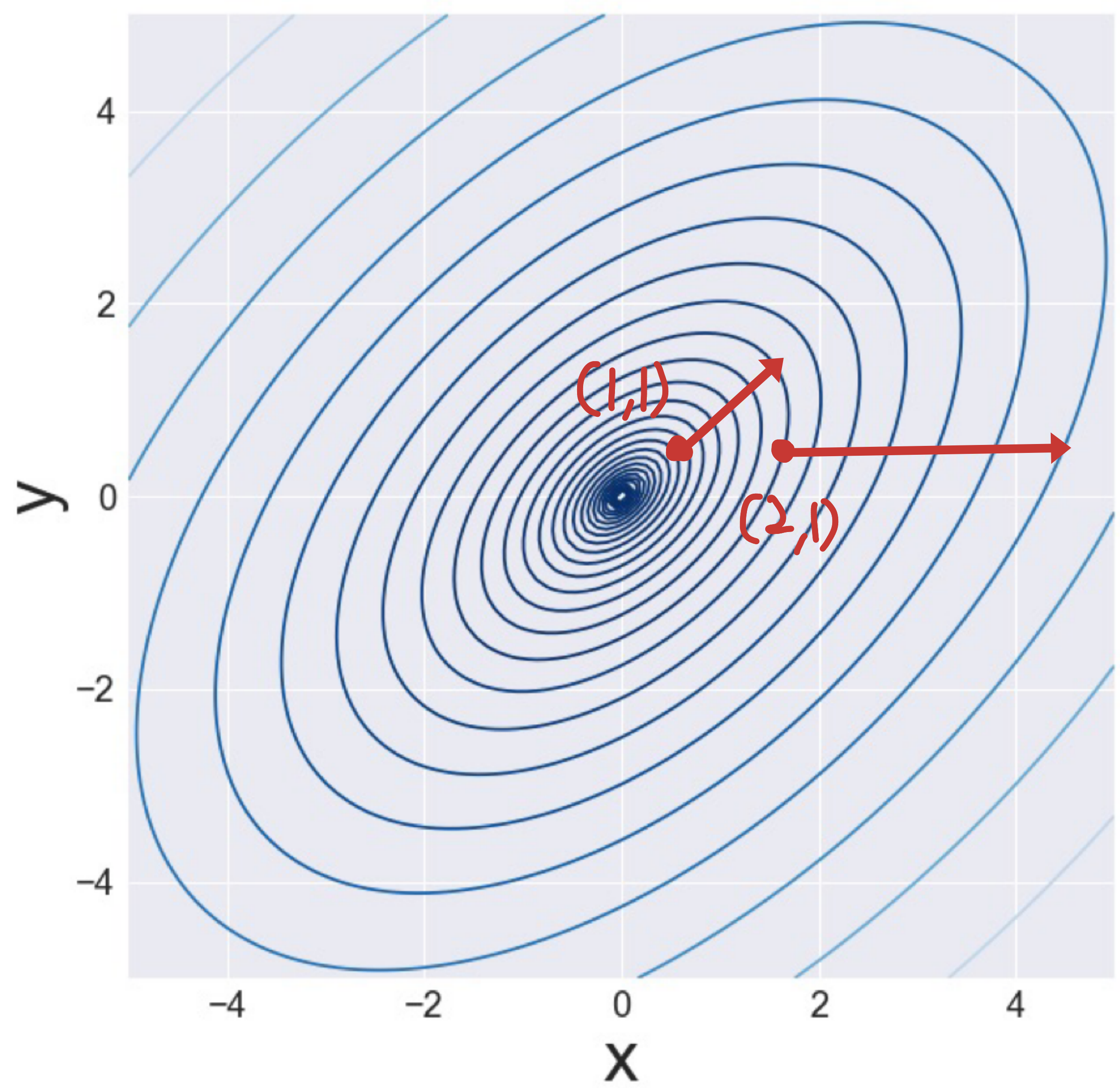
따라서 f에 대해 임의의 (x,y)에서의 gradient는 다음과 같다.

$$\nabla_{(x,y)} f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (2x-y,\ 2y-x)$$

2) 문제에서 주어진 (x,y)들에 대한 gradient들을 구하면 다음과 같다.

$$\nabla_{(x,y)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = (1,1) \qquad \nabla_{(x,y)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = (3,0)$$

그리고 이를 contour plot에 나타내면 다음과 같다.



3) 함숫값을 가장 크게 증가시키는 방향은 $\nabla_{(x,y)} f(x,y)$이다.

또한 함숫값을 가장 크게 감소시키는 방향은 $-\nabla_{(x,y)} f(x,y)$이다.

이를 주어진 (x,y)들에 대해 구해보면

$$\nabla_{(x,y)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = (1,1) \qquad \nabla_{(x,y)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = (3,0)$$

$$-\nabla_{(x,y)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = (-1,-1) \qquad \nabla_{(x,y)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = (-3,0)$$

이 된다. 따라서 $(1,1)$에서 함숫값을 가장 크게 증가시키는 방향은 $(1,1)$이며 함숫값을 가장 크게 감소시키는 방향은 $(-1,-1)$이다.

$(2,1)$에 대해 함숫값을 가장 크게 증가시키는 방향은 $(3,0)$이며 함숫값을 가장 크게 감소시키는 방향은 $(-3,0)$이다.

이를 contour plot에 나타내면 다음과 같다.