

### Question.3-04

다음과 같이 하나의 data sample만 가지고 있는 Dataset이 주어졌다.

$$\mathcal{D} = \{(1,2)\}$$

이때 다음 질문들에 답하시오. 단 prediction model은  $\hat{y} = \theta x$ 를 사용한다.

- 1) Square error를 loss로 사용할 때 loss에 대한 식을 구하고,  $\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta}$ 의 식을 구하시오.  
그리고 gradient descent method를 이용하여  $\theta$ 를 update시키는 식을 구하시오.
- 2) initial  $\theta$ 를 1로, learning rate을 0.01로 설정했을 때 3 iteration 동안 update되는  $\theta$ 들을 구하시오.  
그리고 target  $\theta$ 에 가까워지는지 확인하시오.
- 3) loss의 식을 graph로 표현하고 2)에서 구한  $\theta$ 가 update되는 위치들을 이 graph 위에 나타내시오.

1) 주어진 상황에서 loss  $\mathcal{L}$ 는 다음과 같다.

$$\mathcal{L}(\theta) = (y - \hat{y})^2 = (y - \theta x)^2 = (2 - \theta)^2$$

이  $\theta$ 에 대한 함수  $\mathcal{L}(\theta)$ 의  $\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta}$ 를 구해보면

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} [(2 - \theta)^2] = 2(2 - \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [2 - \theta] \\ &= -(4 - 2\theta)\end{aligned}$$

가 된다. 위의  $\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta}$ 와 gradient descent method를 이용하여  $\theta$ 의 update equation을 구해보면

$$\begin{aligned}\theta &:= \theta - \alpha \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} \\ &= \theta + \alpha(4 - 2\theta)\end{aligned}$$

가 된다. 이때  $\alpha$ 는 learning rate이다.

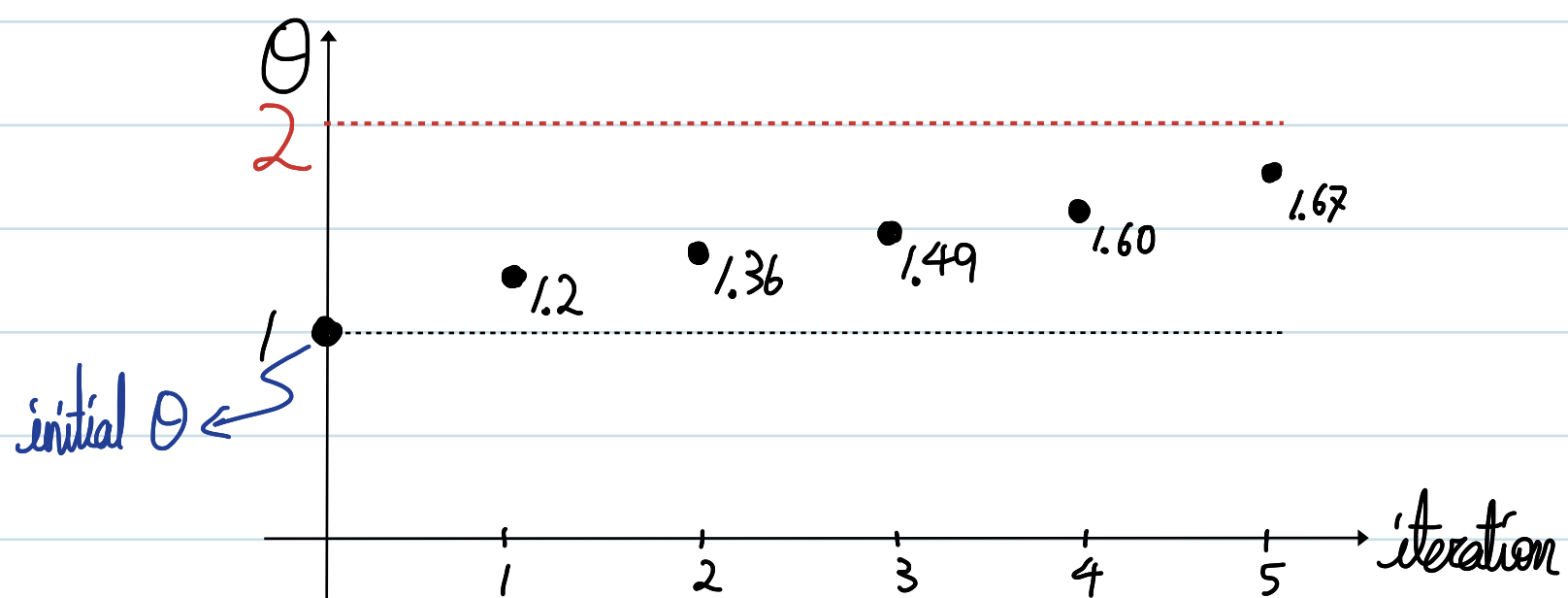
2) 1)에서 구한  $\theta$ 의 update equation을 이용하여  $\theta$ 를 3번 update하면 다음과 같다.

$$1^{\text{st}} \text{ iteration: } \theta := 1 + 0.1(4 - 2 \times 1) = 1.2$$

$$2^{\text{nd}} \text{ iteration: } \theta := 1.2 + 0.1(4 - 2 \times 1.2) = 1.36$$

$$3^{\text{rd}} \text{ iteration: } \theta := 1.36 + 0.1(4 - 2 \times 1.36) = 1.49$$

즉  $\theta$ 는 update할수록 아래의 graph와 같이 target  $\theta^* = 2$ 에 가까워진다.



3) 2)에서 계산한 값들을  $\theta$ 에 대한 함수  $L(\theta)$ 와 함께 graph로 표현하면 다음과 같다.



위의 graph에서도 확인할 수 있듯이 initial  $\theta = 1$ 은 update가 되면서 target  $\theta^* = 2$ 에 가까워진다.