Question.2-01

최적화의 대상이 되는 함수 $f(x)$가 다음과 주어졌다고 하자.

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 1$$

위의 $f(x)$에 대하여 optimal point는 $x_o = \underset{x}{\operatorname{argmin}} f(x)$에 대하여 $(x_o, f(x_o))$로 정의될때, 다음 문제들의 답을 구하시오.

1) derivative $\dfrac{df(x)}{dx}$를 구한 뒤, $f(x)$와 $\dfrac{df(x)}{dx}$의 개형을 각각 그리시오.

2) $f(x)$의 값이 최소가 되는 optimal point에서의 x값을 구하시오.

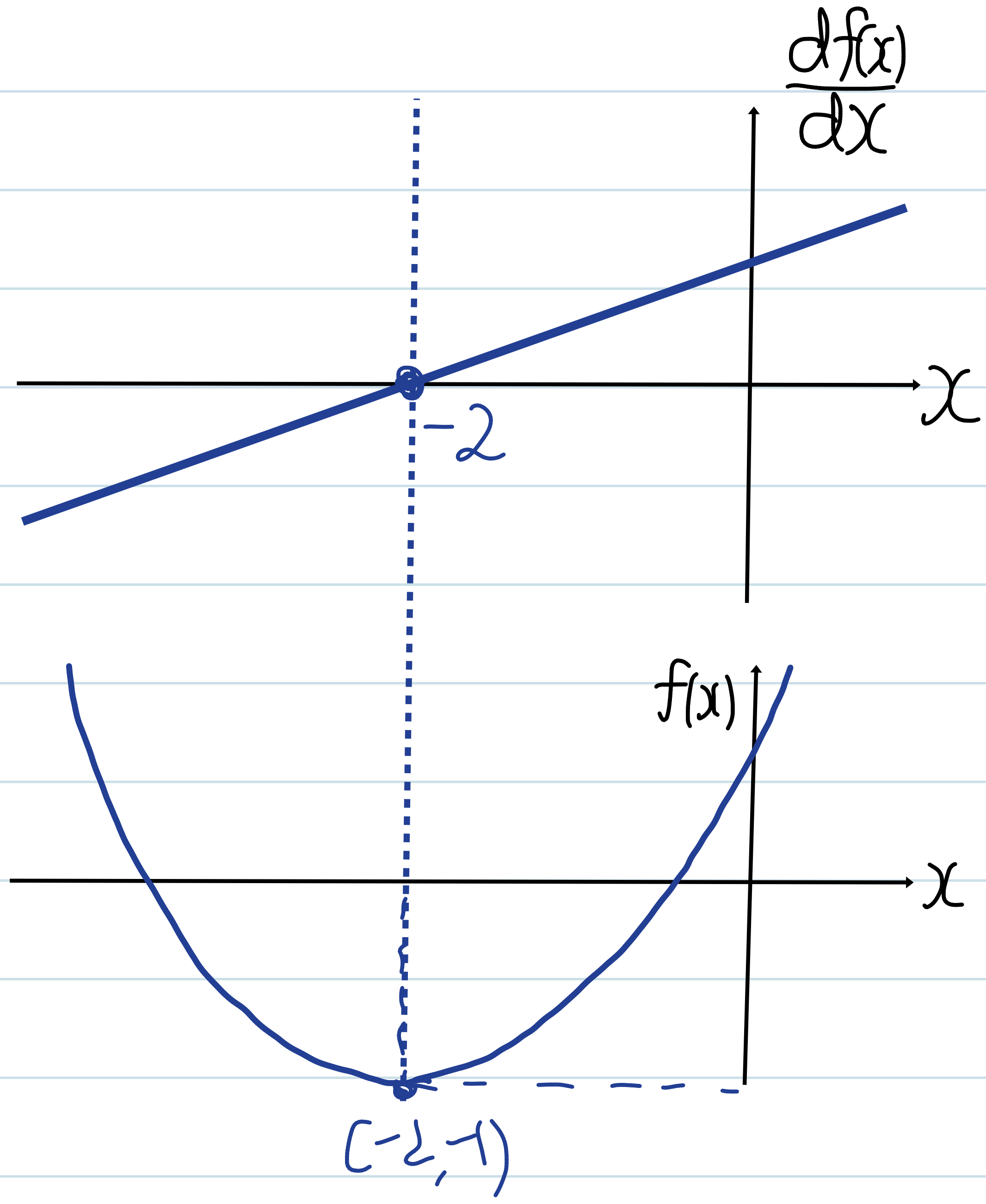
3) differential coefficient를 이용하여 $x = -4, -3, -2, -1, 0$에서 각각 x가 optimal point로 이동해야 하는 방향을 +, −, 변화없음 중 하나로 나타내시오.

4) 3)의 풀이를 바탕으로 $\dfrac{df(x)}{dx}$와, 임의의 x가 optimal point로 이동하기 위한 방향과의 관계를 설명하시오.

1) 먼저 주어진 f(x)의 derivative를 구해보면,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[3(x+2)^2-1\right] = 6(x+2)\cdot\frac{d}{dx}(x+2) = 6(x+2)$$

가 된다. 따라서 f(x), $\frac{df(x)}{dx}$의 개형을 그려보면 다음과 같다.



2) 위의 그림에서 x=-2일 때 f(x)의 값은 -1임을 알 수 있다.
또한 이 x값에서 $\frac{df(x)}{dx}$의 값은 0이 되는 것을 알 수 있다.

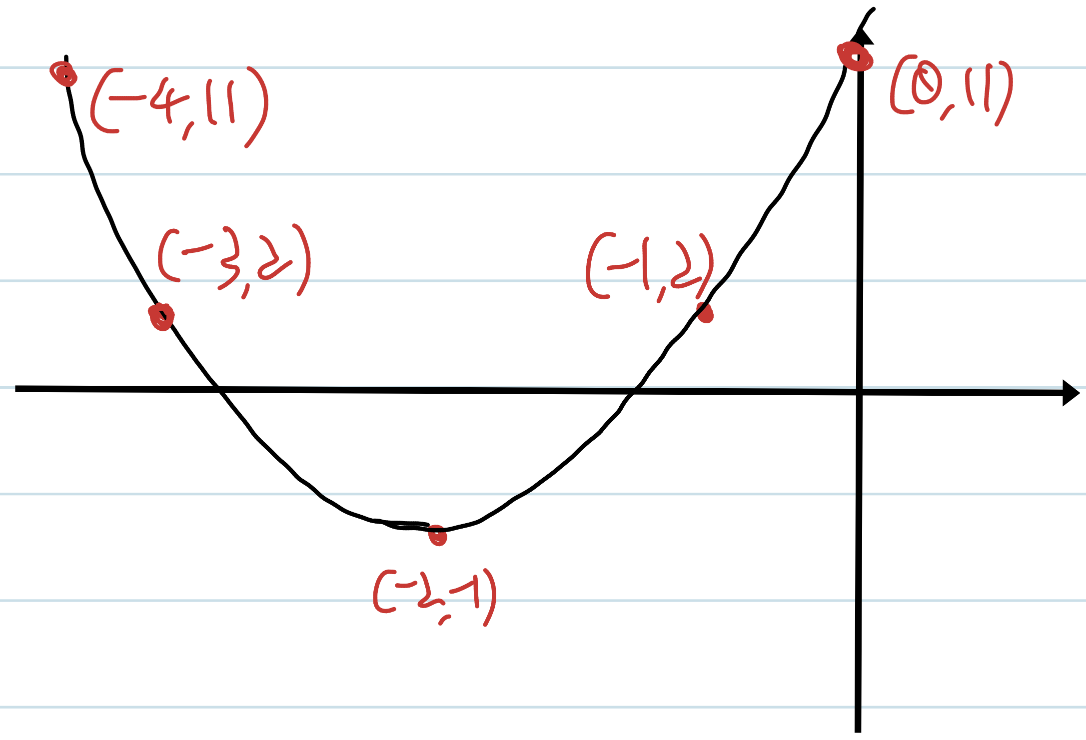
3) 1)에서 구한 derivative를 이용하여 x=-4,-3,-2,-1,0에서의 differential coefficient들을 구하면 다음과 같다.

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=-4} = \left.6(x+2)\right|_{x=-4} = -12 \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=-1} = \left.6(x+2)\right|_{x=-1} = 6$$

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=-3} = \left.6(x+2)\right|_{x=-3} = -6 \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.6(x+2)\right|_{x=0} = 12$$

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=-2} = \left.6(x+2)\right|_{x=-2} = 0$$

2)과 각 점을 $f(x)$의 graph에서 나타내면 다음과 같다



따라서 각 점에서 x는 다음과 같은 방향으로 이동해야 한다.

$x=-4 \rightarrow$ (+)방향
$x=-3 \rightarrow$ (+)방향
$x=-2 \rightarrow$ 변화없음
$x=-1 \rightarrow$ (−)방향
$x=0 \rightarrow$ (−)방향

4) 2)에서 구한 differential coefficient들과 3)에서 구한 함숫값을 최소로 만들기 위한 x의 이동방향들을 정리하면 다음과 같다.

x	$\frac{df(x)}{dx}$	이동방향
−4	−12	(+)
−3	−6	(+)
−2	0	변화없음
−1	+6	(−)
0	+12	(−)

따라서 optimal point로 이동하기 위해 x가 이동해야하는 방향은 differential coefficient의 부호와 반대방향이다. 이 이동은 $\frac{df(x)}{dx}$가 0이 될 때까지 반복된다.