UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS
MODALIDAD A DISTANCIA
AE - AP - CA

UNIDAD DIDÁCTICA

M A T E M Á T I C A

Ing. Flavio Parra T.
Ing. Fernando Salazar

Quito - Ecuador

Contenido

Introducción

La Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central enfrenta un nuevo desafío: ofrecer la Modalidad de Estudios a Distancia para cubrir las necesidades de un mercado insatisfecho dispuesto al estudio en Administración Pública, Administración de Empresas y Contabilidad y Auditoría.

La situación cambiante de los esquemas económicos, políticos y sociales que experimenta el mundo; así como el avance científico técnico en los diferentes ámbitos de las ciencias naturales y técnicas, exigen un replanteamiento en los sistemas académicos de estudios.

El desarrollo de la tecnología de punta en las telecomunicaciones ha hecho posible, la creación de nuevas metodologías académico pedagógicas como es el caso del estudio semipresencial y a distancia.

La Matemática es la asignatura que es herramienta fundamental para todas las asignaturas de todas las carreras de la Facultad de Ciencias Administrativas para la toma de decisiones de la empresa pública y privada. .

UNIDAD I:

APLICACIONES LINEALES Y CUADRATICAS

1.1 Análisis de oferta y demanda

La ley de la Oferta y la Demanda es el principio básico sobre el que se basa una economía de mercado. Este principio refleja la relación que existe entre la demanda de un producto y la cantidad ofrecida de ese producto teniendo en cuenta el precio al que se vende el producto.

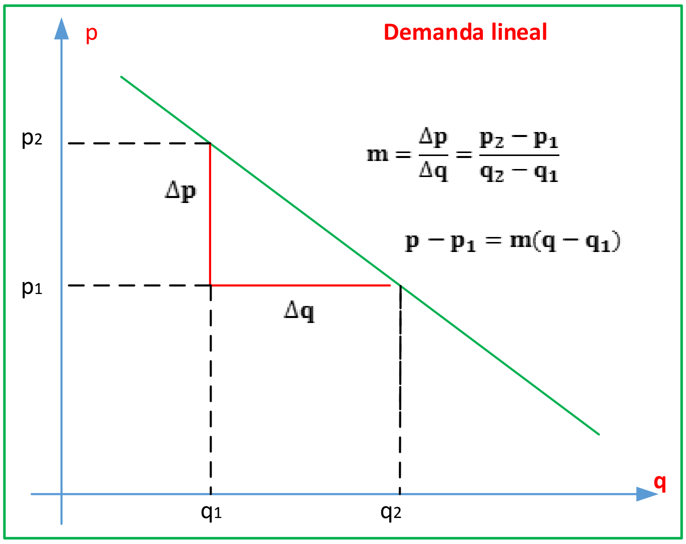
Así, según el precio que haya en el mercado de un bien, los oferentes están dispuestos a fabricar un número determinado de ese bien. Al igual que los demandantes están dispuestos a comprar un número determinado de ese bien, dependiendo del precio. El punto donde existe un equilibrio porque los demandantes están dispuestos a comprar las mismas unidades que los oferentes quieren fabricar, por el mismo precio, se llama equilibrio de mercado o punto de equilibrio.

Según esta teoría, la ley de la demanda establece que, manteniéndose todo lo demás constante, la cantidad demandada de un bien disminuye cuando el precio de ese bien aumenta. Por el otro lado, la ley de la oferta indica que, manteniéndose todo lo demás constante, la cantidad ofrecida de un bien aumenta cuando lo hace su precio.

Así, la curva de la oferta y la curva de la demanda muestran como varía la cantidad ofrecida o demandada, respectivamente, según varía el precio de ese bien.

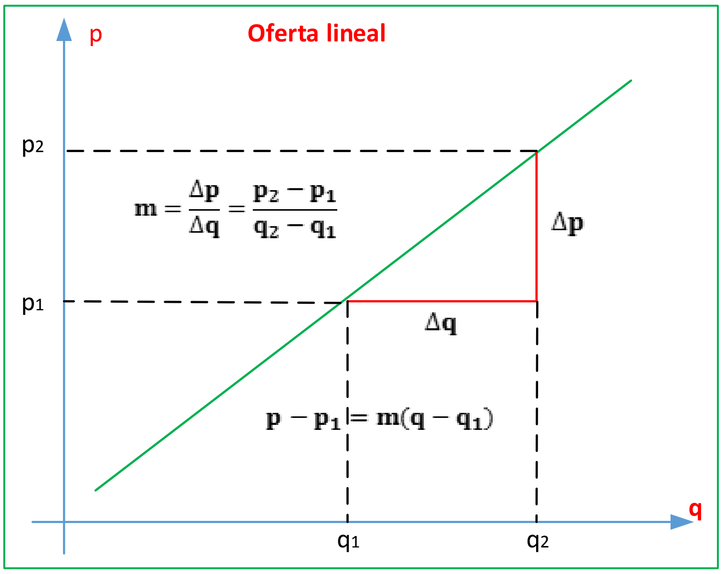
1.1.1 La curva de demanda

La demanda lineal desciende de izquierda a derecha, esto significa que al incrementarse la cantidad demanda el precio disminuye y el valor de la pendiente es negativa.



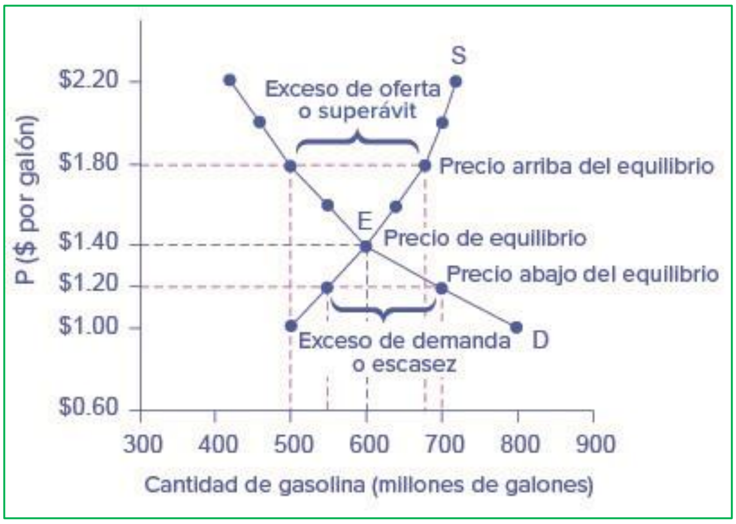
1.1.2 La curva de oferta

La curva de oferta lineal asciende de izquierda a derecha y esto significa que al incrementarse la cantidad ofertada, el precio aumenta y el valor de la pendiente es positiva.



1.1.3 Punto de equilibrio del mercado

El punto de equilibrio en la economía es cuando la oferta es igual a la demanda.



$\textbf{Oferta} = \textbf{Demanda}$ "Punto de Equilibrio"

Ejemplo: Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de $ 58 por unidad y 200 unidades y la oferta por semana es de 100 unidades cuando el precio es de $50 y 200 unidades cuando el precio es $60 .Determinar la ecuación de oferta y demanda suponiendo que es lineal; además determine el punto de equilibrio.

- Como la oferta y la demanda es lineal, el precio p está en función del número de unidades demandadas, debe encontrar dos puntos de coordenadas $(q\,,p)$.
  Para la demanda:$(100,58)$ y $(200,51)$ y la oferta $(100, 50)$ $(200, 60)$.

  Calculamos la pendiente y su ecuación.

  Demanda:

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \qquad m = \frac{51 - 58}{200 - 100} \qquad m = -\frac{7}{100}$$

$$p - p_1 = m(q - q_1) \qquad p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100)$$

$$p = -\frac{7}{100}q + 65$$

Oferta:

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} \qquad m = \frac{60 - 50}{200 - 100} \qquad m = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

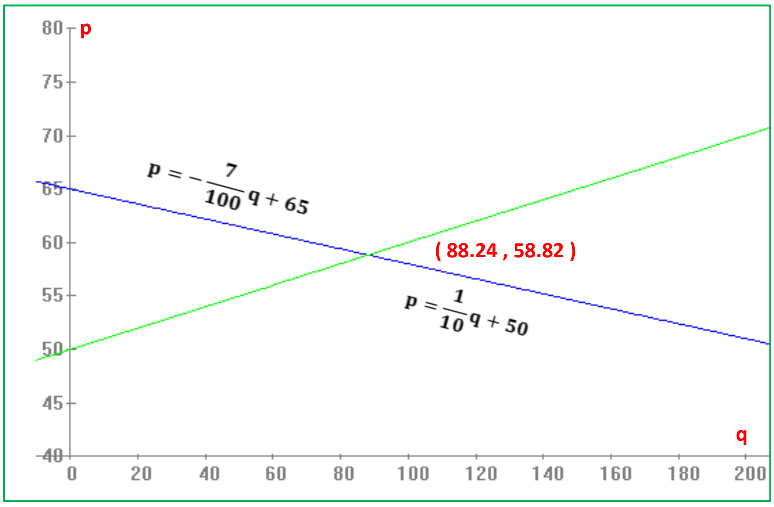
$$p - p_1 = m(q - q_1) \qquad p - 50 = \frac{1}{10}(q - 100)$$

$$\mathbf{p = \frac{1}{10}q + 50}$$

Oferta = Demanda

$$\frac{1}{10}q + 50 = -\frac{7}{100}q + 65 \qquad \frac{17}{100}q = 15$$

$$q = 88.24 \text{ unidades} \qquad p = \frac{1}{10}(88.24) + 50 \qquad p = \$58.82$$



Ejemplo: Negocios: Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son:

$$3q - 200p + 1800 = 0 \qquad y \qquad 3q + 100p - 1800 = 0$$

Respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades vendidas por periodo.

a) Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo mediante una gráfica.

b) Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

c) Encuentre el ingreso total antes y después del impuesto.

Solución:

a) Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo mediante una gráfica.

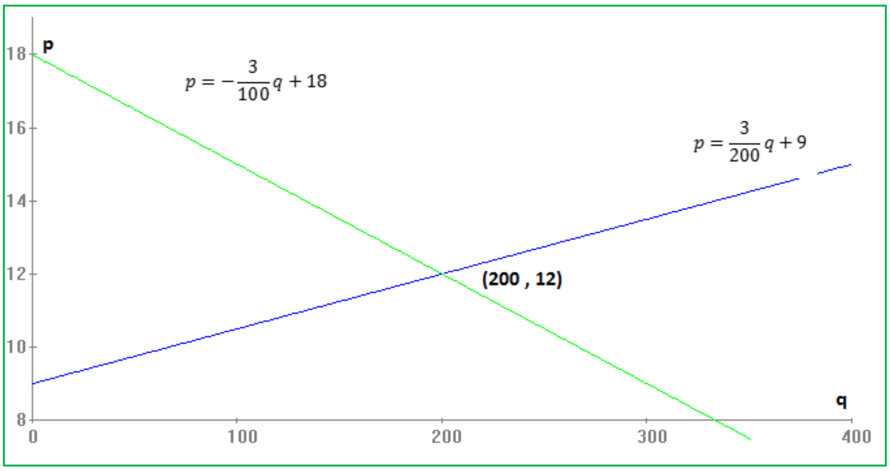
$$p = \frac{3}{200}q + 9 \qquad "Oferta"$$

$$p = -\frac{3}{100}q + 18 \qquad "Demanda"$$

$$\textbf{Oferta} = \textbf{Demanda}$$

$$\frac{3}{200}q + 9 = -\frac{3}{100}q + 18 \qquad \frac{9}{200}q = 9$$

$$q = 200\ unidades \qquad p = \$12 \qquad (200\,,12)$$



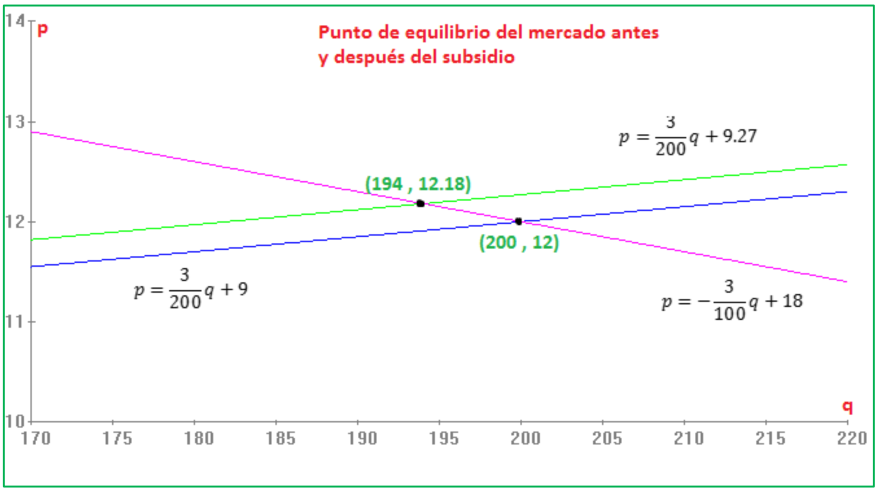
b) Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

El impuesto de \$0.27 afecta al precio de la oferta por lo que la ecuación de cambia.

$$\mathrm{p} = \left(\frac{3}{200}\mathrm{q} + 9\right) + 0.27 \qquad \mathrm{p} = \frac{3}{200}\mathrm{q} + 9.27$$

$$\frac{3}{200}\mathrm{q} + 9.27 = -\frac{3}{100}\mathrm{q} + 18 \qquad \frac{9}{200}\mathrm{q} = 8.73$$

$$\mathrm{q} = 194 \qquad \mathrm{p} = \$12.18$$



c) Encuentre el ingreso total antes y después del impuesto.

El ingreso que recibe el productor está dado por: $\mathbf{R = p.q}$

$$R = \left(\frac{3}{200}q + 9\right).q \qquad \text{sin impuesto}$$

$$R = \left(\frac{3}{200}(200) + 9\right).200 = \$2.400$$

$$R = \left(\frac{3}{200}q + 9.27\right) \qquad \text{con impuesto}$$

$$R = \left(\frac{3}{200}(194) + 9.27\right).194 = \$2.362,92$$

1.2 Producción y puntos de equilibrio (diagrama de empate o cobertura)

En la industria al producir y vender un producto, el fabricante debe conocer su ecuación de costo y de ingreso; al fabricante le interesa conocer el nivel de producción para alcanzar el punto de equilibrio, es decir el nivel de producción donde la utilidad es cero.

$\mathbf{Ingreso\ total = Costo\ total}$ **"Punto de equilibrio"**

$\mathbf{R = p_v * q}$ **"Ingreso total"**

$\mathbf{C = C_V * q + C_F}$ **"Costo total"**

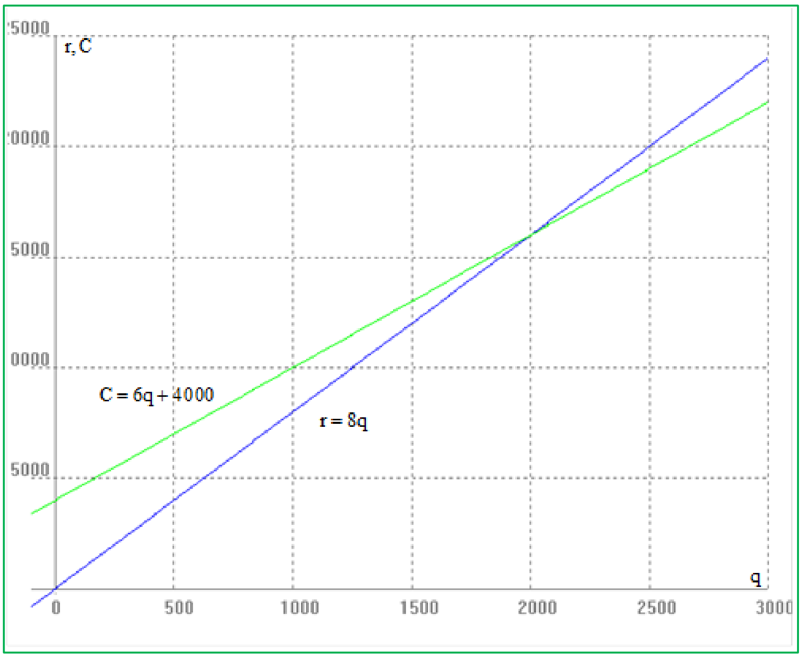
Ejemplo: Negocios. Un fabricante produce un producto cuyo costo por material es \$4, mano de obra \$2 y los costos fijos \$4000. Si el producto se vende a \$8. Determine:

- El punto de equilibrio.

$\text{Ingreso total}(r) = \text{Costo total}(C)$ "Punto de equilibrio"

$p\,q = Cv\,(q) + Cf$; $8q = 6q + 4000$

$q = 2000$; $r = C = 8\,(2000)$; $r = C = 16000$



- Determine el nivel de producción para tener una utilidad de $3000

$U = \text{Ingreso total} - \text{Costo total}$; $U = r - C$

$3.000 = 8q - (6q + 4.000)$ $q = 3.500$

- Determine el nivel de producción para tener una pérdida de $2000

$-2.000 = 8q - (6q + 4.000)$ $q = 1.000$

Ejemplo: $\mathbf{R = 0.1q^2 + 9q}$ representa el ingreso total en dólares y $\mathbf{C = 3q + 400}$ el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas, encuentre el punto de equilibrio y grafique.

Punto de equilibrio**: Ingreso total = Costo total**

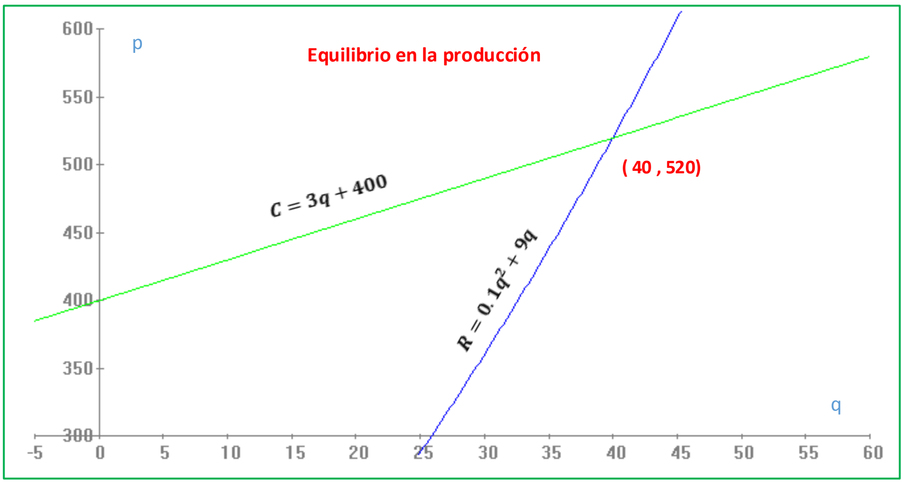
$0.1q^2 + 9q = 3q + 400$ $0.1q^2 + 6q - 400 = 0$

$q^2 + 60q - 4000 = 0$ $(q + 100)(q - 40) = 0$

$q = -100 \qquad q = 40$

$R = C = 3(40) + 400$

$R = C = \$520$



1.3 Interés Simple

Una aplicación lineal es el interés simple, que se paga al final de cada periodo y por consiguiente el capital prestado o invertido no varía y por la misma razón la cantidad recibida por interés siempre va a ser la misma, es decir, no hay capitalización de los intereses.

Si se solicita un préstamo (C) y se compromete a pagar en un tiempo determinado (t), a una tasa de interés simple (i) por el uso del dinero. Lógicamente la cantidad de dinero a pagar al finalizar el plazo fijado va a ser mayor que el capital original, pues se adicionado al mismo una cantidad adicional llamada Interés (I).

$\mathbf{I = C.i.t}$ **Interés Simple**

I: Interés simple

C: Capital

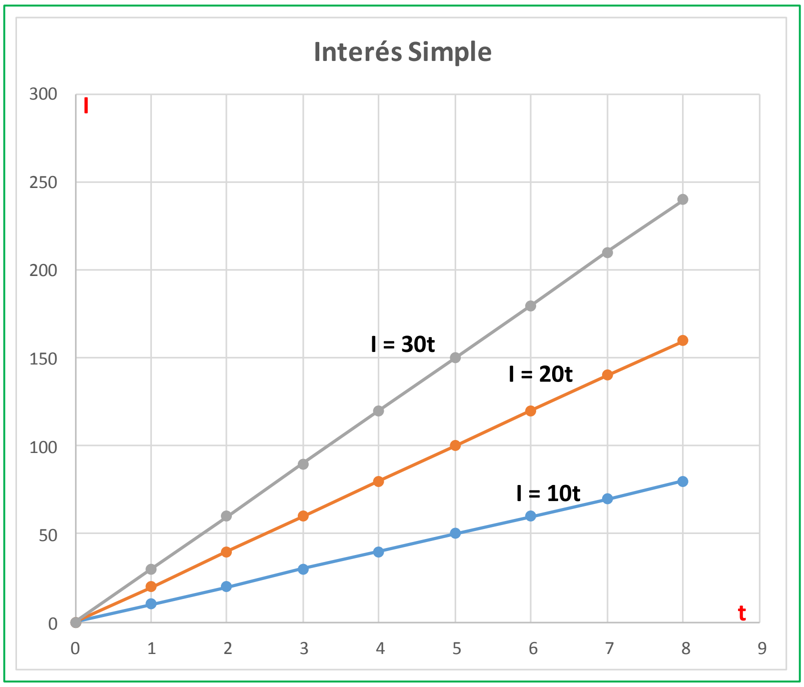
i : tasa de interés simple

t : tiempo

Suponga que se invierte un capital de \$100 a las tasas de interés simple de 10%, 20% y 30% anual. Determine el interés de 1 a 8 años.

$\mathbf{I = C.i.t}$

t	I = 10t	I = 20t	I = 30t
0	0	0	0
1	10	20	30
2	20	40	60
3	30	60	90
4	40	80	120
5	50	100	150
6	60	120	180
7	70	140	210
8	80	160	240



La modelación del interés de simple, es una línea recta, conforme la tasa de interés aumenta el valor de interés aumenta.

Ejemplo 1: Determinar el interés a pagar por un préstamo de $5.600 a ser cancelado en 3 meses con las siguientes alternativas de tasas de interés: a) 2% de interés simple mensual b) 6% de interés simple semestral c) 12% de interés simple anual.

$I = C.i.t$ “Interés Simple”

a) 2% de interés simple mensual

$$I = 5.600 * 0.02 * 3 = \$336,00$$

b) 6% de interés simple semestral

$$I = 5.600 * \frac{0.06}{6} * 3 = \$168,00$$

$$I = 5.600 * 0.06 * \frac{3}{6} = \$168,00$$

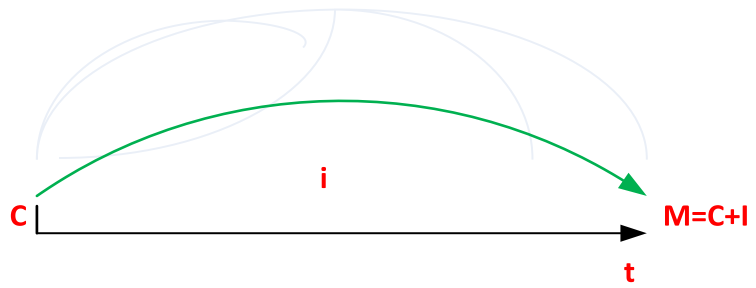
c) 12% de interés simple anual.

$$I = 5.600 * \frac{0.12}{12} * 3 = \$168,00$$

Nota: la tasa de interés y el tiempo deben estar en las mismas unidades, ej: si el tiempo está en meses, la tasa de interés también debe ser mensual.

Monto a interés simple

Es la cantidad de dinero acumulado resultante del capital original y el interés generado por el uso del dinero.



$$\mathbf{M = C + I} \qquad \mathbf{M = C + Cit}$$

$\mathbf{M = C(1 + it)}$ **"Monto a interés simple"**

$\mathbf{(1 + it)}$ **"Factor de acumulación"**

Ejemplo 2: Encontrar el Monto de un capital de $10.000 invertido durante 3 meses con una tasa de interés a) $i = 12\%$ anual b) $i = 12\%$ trimestral c) $i = 12\%$ semestral d) $i = 12\%$ mensual

$$M = C(1 + i.t)$$

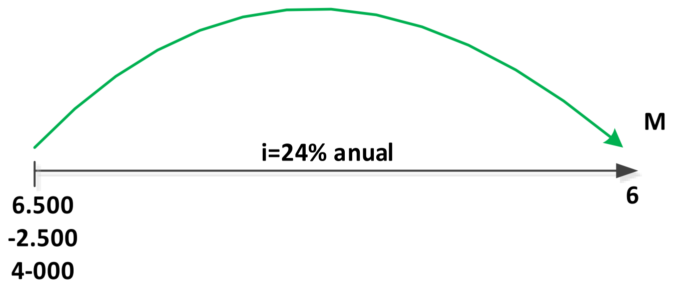
$$a)\ M = 10000\left(1 + \frac{0.12}{12} * 3\right) = 10.300$$

$$\text{b) } M = 10000\left(1 + \frac{0.12}{3} * 3\right) = 11.200$$

$$\text{c) } M = 10000\left(1 + \frac{0.12}{6} * 3\right) = 10.600$$

$$\text{d) } M = 10000(1 + 0.12 * 3) = 13.600$$

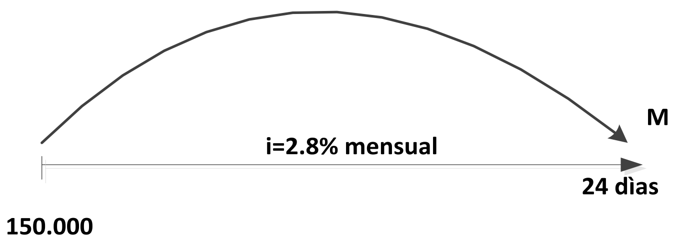
Ejemplo 3: Un comerciante adquiere un lote de mercancía con valor de \$6.500 que acuerda pagar haciendo un pago de inmediato por \$2.500 y un pago final 6 meses después. Acepta pagar el 24%, de interés simple anual sobre el saldo. ¿Cuánto debe pagar dentro de 6 meses y el interés pagado?



$$\text{a) } M = C(1 + i.t) \qquad M = 4.000\left(1 + \frac{0.24}{12}.6\right) = 4.480$$

$$\text{b) } I = M - C \qquad I = 4.480 - 4000 = 480$$

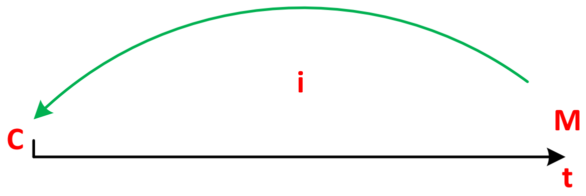
Ejemplo 4: Un inversionista deposita \$150.000 en un fondo de inversiones bursátiles que garantiza un rendimiento del 2.8% mensual. Si la persona retira su depósito 24 días después. ¿Cuánto recibe?



$$M = C(1 + i.t) \qquad M = 150.000\left(1 + \frac{0.028}{30}.24\right) = 153.600$$

Valor actual o presente

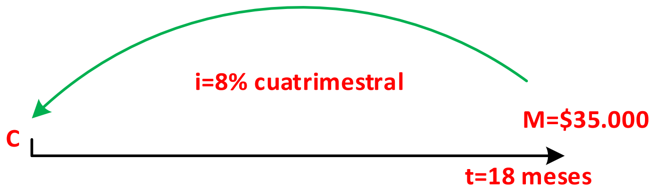
El valor actual o presente, representa la cantidad de dinero necesaria para tener una determinada cantidad de dinero en un determinado tiempo y a una tasa de interés.



$$M = C(1 + i.t) \qquad\qquad C = \frac{M}{1+i.t}$$

$$C = M(1 + i.t)^{-1}$$ **"Valor presente o Valor actual"**

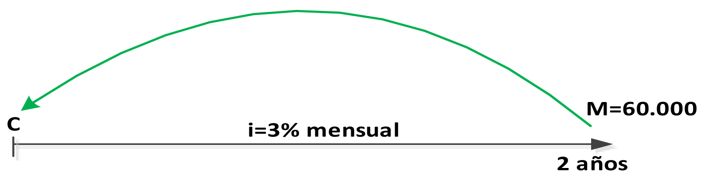
Ejemplo 5. Determine la cantidad de dinero necesaria para disponer en 14 meses \$35.000 con una tasa de interés simple del 8% cuatrimestral.



$$C = M(1 + i.t)^{-1}$$

$$C = 35.000\left(1 + 0.08 * \frac{18}{4}\right)^{-1} = \$25.735,29$$

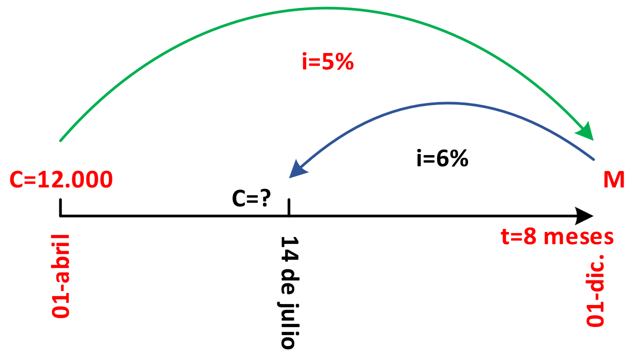
Ejemplo 6: María Luisa Delgadillo desea adquirir un inmueble dentro de 2 años. Supone que la cuota inicial en esa fecha será de \$60.000. Si desea tener esa cantidad dentro de 2 años, ¿Qué cantidad debe invertir en su depósito de renta fija que rinde 3% de interés simple mensual?



$$C = M(1 + i.t)^{-1}$$

$$C = 60.000(1 + 0.03 * 2 * 12)^{-1} = \$\,34.883,72$$

Ejemplo 7. Un pagaré de $1.200 firmado el primero de abril con vencimiento en 8 meses y con un interés del 5% es vendido a Juan el 14 de julio con la base de un rendimiento en la inversión del 6%. ¿Cuánto paga Juan por el documento?



Análisis: Se trata de una obligación que vence en ocho meses, pero por necesidades financieras, ese documento es vendido anticipadamente. El objetivo será determinar el valor del documento en esa fecha (14 de julio).

- Calculo del monto de la deuda original.

  $M = C(1 + i.t)$

  $M = 12.000\left(1 + 0.05 * \dfrac{8}{12}\right) = \$12.400$

- Calculo del valor actual del documento negociado el 14 de abril.

  $C = M(1 + i.t)^{-1}$

  Para el cálculo del valor presente se necesita el tiempo que transcurre entre el 14 de julio al 1 de diciembre.

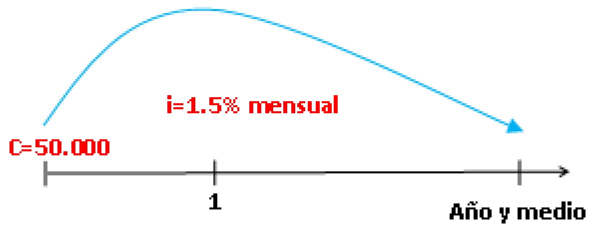
14 de julio	agosto	septiembre	octubre	noviembre	1 de diciembre
17	31	30	31	30	1

$$C = 12.400\left(1 + 0.06 * \frac{140}{360}\right)^{-1} = \$12.117{,}26$$

Calculo del Interés

El interés es el beneficio que recibe el propietario de un capital por el préstamo del mismo, a una tasa de interés y tiempo estipulados.

Ejemplo 8. Una persona obtiene un préstamo de \$50 000 y acepta liquidarlo año y medio después. Acuerda que, mientras exista el adeudo, pagará un interés simple mensual de 1.5%. ¿Cuánto deberá pagar de interés cada mes?



$$I = C.i.t$$

$$I = 50.000 * 0.015 * 1 = \$750$$

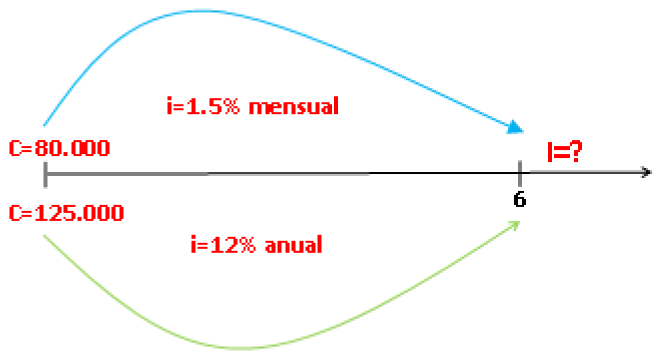
Ejemplo 9. Una persona que cobra \$5 000 mensuales de sueldo es despedida por problemas financieros de la empresa. En consecuencia, se le paga su correspondiente indemnización, que incluye 3 meses de sueldo, días por antigüedad y descuentos por impuestos, lo que arroja un saldo neto de \$45 000. ¿Qué ingreso fijo mensual le representaría al ahora desempleado depositar el monto de su liquidación en una inversión que paga 18% de interés simple anual?

$$I = C.i.t$$

$$I = 45.000 * 0.18 * \frac{1}{12} = \$675{,}00$$

Ejemplo 10. Salomé tiene 2 deudas:

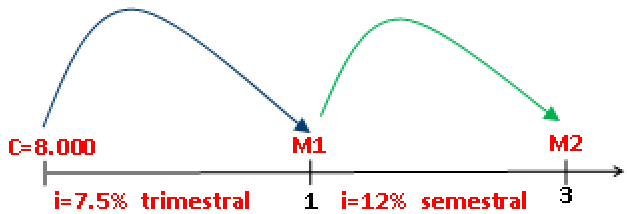
a) Le debe \$80 000 a un banco que cobra 1.5% mensual.
b) Compró a crédito un automóvil; pagó determinado enganche y le quedó un saldo de \$125 000 que comenzará a pagar dentro de 8 meses; mientras tanto, debe pagar 12% de interés simple anual durante ese lapso.
¿Cuánto pagará en los próximos seis meses por concepto de intereses?



$$I = I_1 + I_2$$

$$I = 80.000 * 0.015 * 6 + 125.000 * 0.12 * \frac{6}{12} = \$\,14.700$$

Ejemplo 11. En un préstamo de $ 8.000 a 3 años se pacta un interés del 7,5% trimestral para el primer año y del 12% semestral para los dos años siguientes. ¿Cuánto se espera de intereses en todo el plazo?



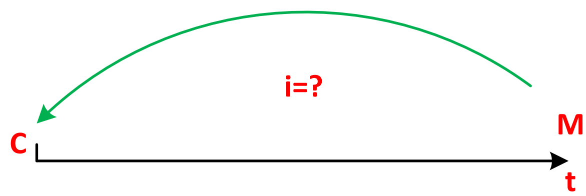
$$M_1 = 8.000(1 + 0.075 * 1 * 4) = \$10.400$$

$$M_2 = 10.400(1 + 0.12 * 2 * 2) = \$15.392$$

$$I = M - C \qquad I = 15.392 - 8.000 = \$7.392$$

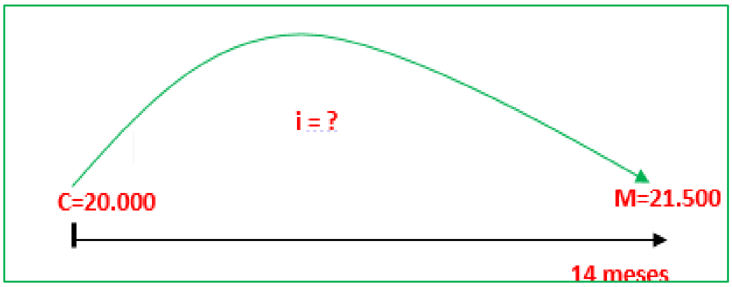
Calculo de la tasa de interés.

En muchas ocasiones en asuntos económicos, se hace necesario determinar la tasa de interés para lograr determinados objetivos de las empresas.



$$M = C(1 + i.t) \qquad i = \frac{\frac{M}{C} - 1}{t}$$

Ejemplo 12. Determinar la tasa de interés simple anual para que un capital de \$20.000 llegue a \$21.500 en el tiempo de 14 meses.

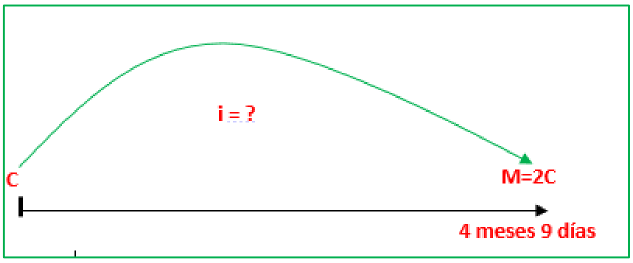


$$M = C(1 + i.t)$$

$$21.500 = 20.000\left(1 + i.\frac{14}{12}\right) \qquad i = \frac{\frac{21.500}{20.000} - 1}{\frac{14}{12}}$$

$$i = 0.0643 \qquad i = 6.43\%$$

Ejemplo 13. Determinar la tasa de interés simple anual para que un capital duplique su valor en un tiempo de 4 meses 9 días.



Previo a realizar los cálculos se debe transformar los meses y días a una sola unidad, para el caso al tiempo en meses: $4 + \frac{9}{30} = 4.30$ meses

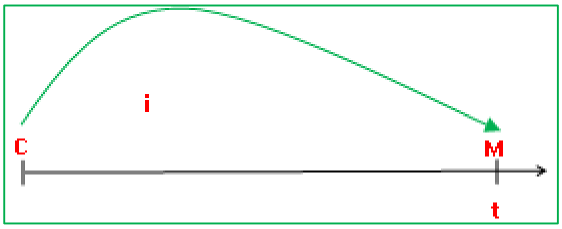
$$M = C(1 + i.t)$$

$$2C = C\left(1 + i.\frac{4.30}{12}\right) \qquad i = \frac{\frac{2C}{C} - 1}{\frac{4.30}{12}} = 2.7907$$

$$i = 279.07\% \text{ anual}$$

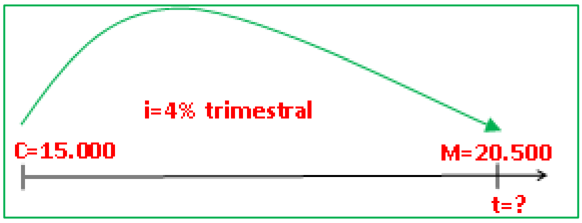
Cálculo del tiempo

Su práctica de planificación tanto personal como profesional, le conducirá al planteamiento de conocer el tiempo para que alguna transacción financiera se cumpla.



$M = C(1 + i.t) \qquad\qquad t = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$

Ejemplo 14. Determinar el tiempo en años meses y días para que un capital de $15.000 adquiera un valor de $20.500 con una tasa de interés simple trimestral del 4%.



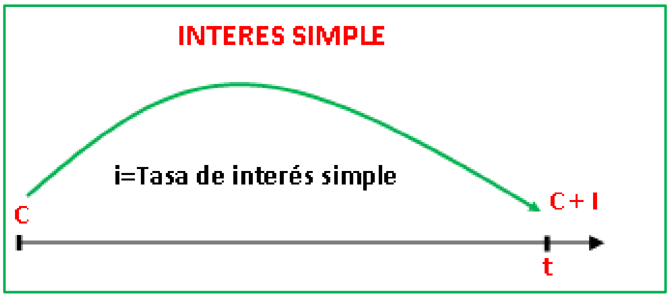
$M = C(1 + i.t) \qquad 20.500 = 15.000(1 + 0.04.t * 4)$

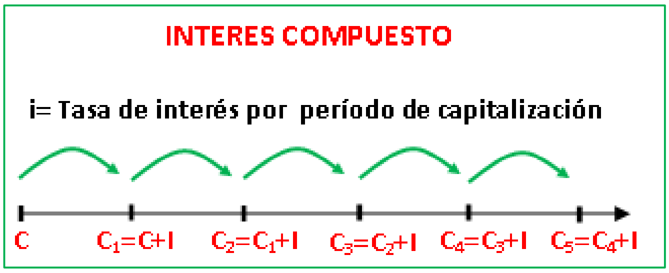
$$t = \frac{\frac{20.500}{15.000} - 1}{4 * 0.04} = 2.29 \text{ años}$$

$t = 2$ años 3 meses 14 días

1.4 Interés compuesto

Una aplicación cuadrática es el interés compuesto; en el interés simple el capital original sobre el que se calculan los intereses permanece sin variación alguna durante todo el tiempo que dura la operación. En el interés compuesto, en cambio, los intereses que se generan se suman al capital original en periodos establecidos y, a su vez, van a generar un nuevo interés adicional en el siguiente lapso.





En este caso se dice que el interés se capitaliza y que se está en presencia de una operación de interés compuesto.

En estas operaciones, el capital no es constante a través del tiempo, pues aumenta al final de cada periodo por la adición de los intereses ganados de acuerdo con la tasa convenida.

La cantidad de dinero acumulado por periodo de capitalización está dado por:

$$M_1 = C + I = C + C.i.t = C(1 + i(1))^1 = C(1 + i)^1$$

$$M_2 = M_1 + I = C(1 + i) \quad + C(1 + i) \quad . i.(1) = C(1 + i)^1(1 + i) = C(1 + i)^2$$

$$M_3 = M_2 + I = C(1 + t)^2 + C(1 + t)^2 . i.(1) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$$

En general para n periodos de capitalización la cantidad acumulada (Monto a interés compuesto es:

$$\mathbf{M = C(1 + i)^n}$$

M: Monto o valor futuro a interés compuesto

C: Capital

i: Tasa de interés por período de capitalización

n: Número de períodos de capitalización (anual, semestral, trimestral….)

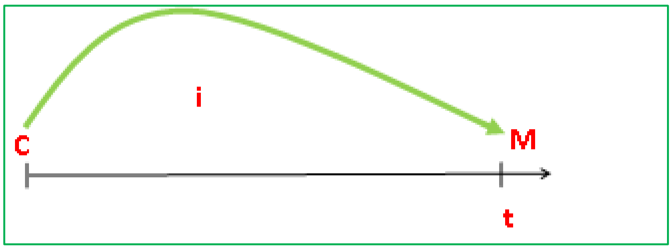
En los ejercicios a resolver es frecuente que como dato se exprese la tasa de interés en forma nominal, la fórmula de monto a interés compuesto puede expresarse:

$$\mathbf{M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m.t}}$$

Ejercicios de aplicación de monto, valor presente o actual, tasa de interés y tiempo.

A través de la Matemáticas Financieras y en particular del interés compuesto, se pueden realizar cálculos para determinar la mejor forma de la utilización del dinero; así como herramienta de planificación y control, se puede determinar por ejemplo, el tiempo para que un capital alcance un valor en el futuro o la tasa de interés a invertir con el mismo propósito.

Tomando la fórmula del monto podemos encontrar el resto de variables en estudio.



$M = C(1+i)^n$ Monto a interés compuesto

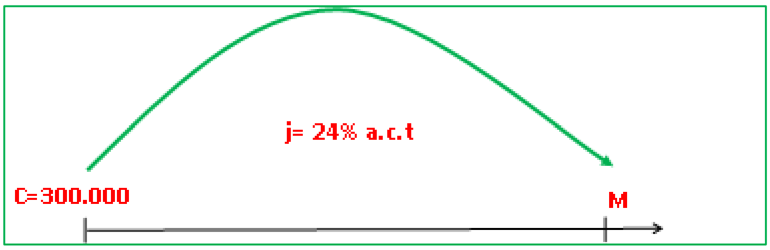
$C = M(1+i)^{-n}$ Valor actual o presente.

$n = \frac{\log\frac{M}{C}}{\log(1+i)}$ Tiempo (años, trimestres, semestres….)

$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$ Tasa de interés (anual, trimestral, mensual)

Ejemplos:

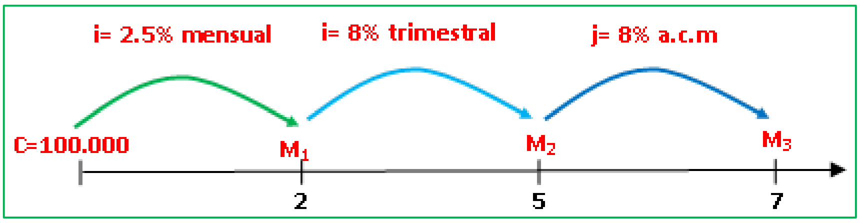
1. ¿Cuánto dinero debe pagarse a un banco que hizo un préstamo de $300 000 si se reembolsa al año capital e interés y la tasa aplicada es de 24% anual convertible trimestralmente?



$$M = C\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m.t}$$

$$M = 300.000\left(1 + \frac{0.24}{4}\right)^{4.1} = \$378.743{,}09$$

2. KLM, invierte $100.000 en un proyecto minero que ofrece el 2.5% mensual de utilidad para los dos primeros años, 8% convertible trimestral para los 3 siguientes años y para los 2 últimos años el 28% convertible mensualmente. La empresa dispone que el capital original y las utilidades se mantengan en el proyecto, ¿Qué cantidad de dinero dispondrá al finalizar la inversión?



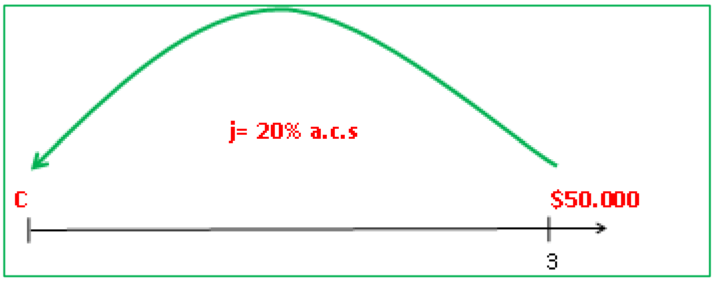
$$M = C(1 + i)^n$$

$$M_1 = 100.00(1 + 0.025)^{2.5*12} = \$209.756{,}76$$

$$M_2 = 209.756{,}76\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4*3} = \$266.022{,}29$$

$$M_3 = 266.022{,}29\left(1 + \frac{0.28}{12}\right)^{12*2} = \$462.731{,}35$$

3. ¿Cuánto debe depositarse en el banco si se desea tener un monto de $50 000 dentro de 3 años y la tasa de interés es de 20% anual convertible semestralmente?

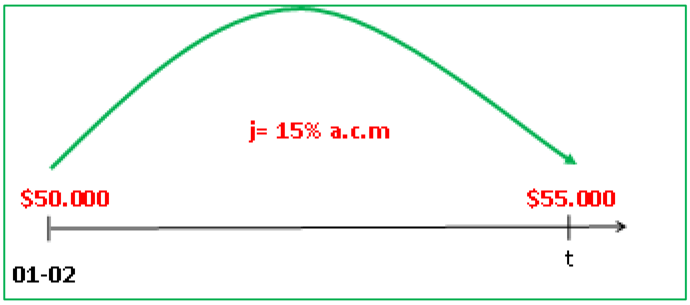


$$M = C(1 + i)^n$$

$$50.000 = C\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{2x3}$$

$$C = \$28.223{,}70$$

4. Se realiza una inversión de $50 000 en un banco el día 1 de febrero. ¿En qué fecha valdrá $55 000 si la tasa de interés es de 15% compuesta mensualmente?



$$M = C(1+i)^{n}$$

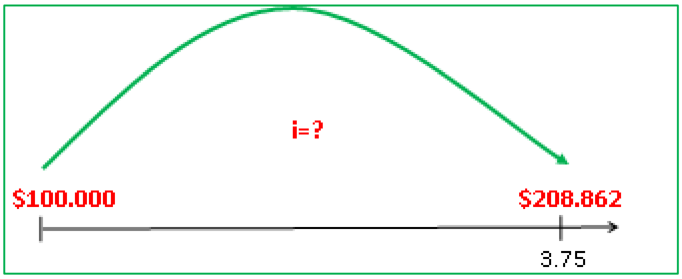
$$55.000 = 50.000\left(1+\frac{0.15}{12}\right)^{12xt}$$

$$1.10 = 1.0125^{12t}$$

$$\log 1.0125^{12t} = \log 1.10 \qquad t = 0.6394 \text{ años}$$

$$t \cong 230 \text{ dias} \qquad \text{Fecha: 19 de septiembre}$$

5. Pablo Pérez depositó $100 000 en una cuenta bancaria hace 3 años y 9 meses. Actualmente tiene $208 862, y desea saber cuál es la tasa de interés que ha ganado si la capitalización es trimestral.



$$M = C(1+i)^{n}$$

$$208.862 = 100.000(1+i)^{3.75x4}$$

$(1+i)^{15} = 2.08862 \qquad\qquad i = 2.08862^{\frac{1}{15}} - 1$

$i = 5.03\%$ trimestral

1.5.1 Población futura.

La fórmula para calcular el crecimiento del dinero también puede aplicarse para determinar la población futura.

$\mathbf{P_F = P_A(1+r)^n}$

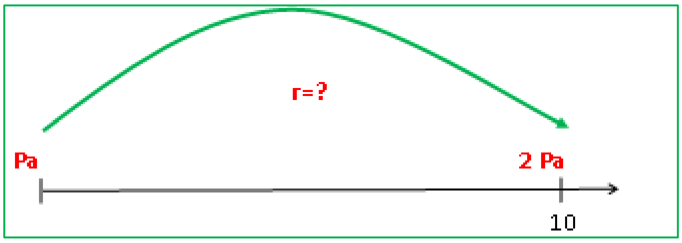
P_F: Población futura

P_A: Población actual

r: tasa de crecimiento poblacional

n: periodo de tiempo

6. La población de una ciudad se ha duplicado en 10 años. ¿Cuál ha sido su tasa de crecimiento poblacional?

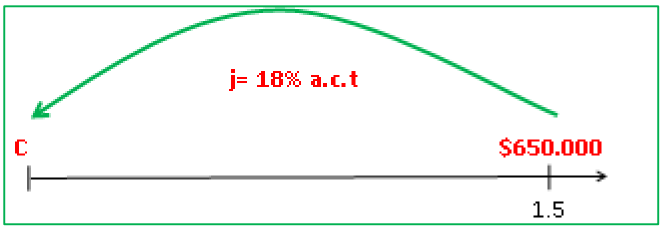


$P_F = P_A(1+r)^n$

$2P_A = P_A(1+r)^{10} \qquad\qquad (1+r)^{10} = 2$

$r = 2^{1/10} - 1 \qquad\qquad r = 7.18\%$ anual

7. ¿Qué cantidad de dinero recibe una empresa en calidad de préstamo si ha firmado un documento por \$650 000 que incluye capital e intereses a 18% convertible trimestralmente, y tiene vencimiento en 18 meses?



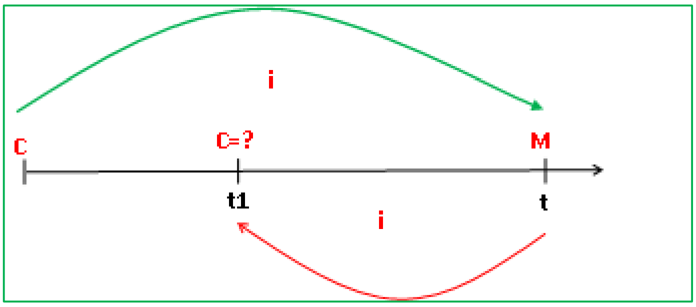
$$C = M(1+i)^{-n}$$

$$C = 650.000\left(1+\frac{0.18}{4}\right)^{-4*1.5}$$

$$C = \$499.132{,}23$$

1.5.2 Descuento compuesto

Un pagaré puede ser negociado antes de la fecha de vencimiento, estableciéndose un descuento por esta transacción financiera.

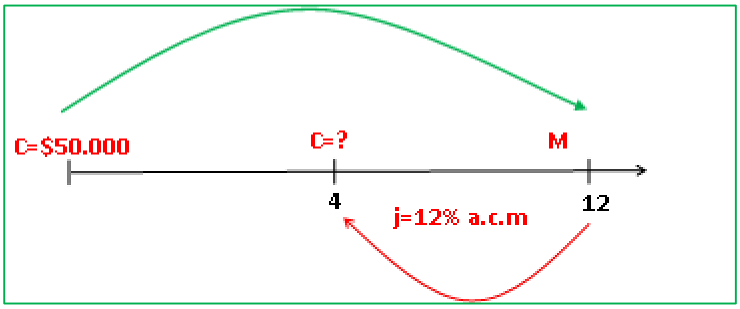


$$M = C(1+i)^{n}$$

$$C = M(1+i)^{-n}$$

$$D_C = M - C$$

8. Una deuda de \$50 000 se documenta mediante un pagaré que incluye intereses a razón de 3% trimestral, y que será pagadero al cabo de un año. ¿Qué cantidad puede obtenerse por él si se descuenta al cabo de 4 meses a una tasa de interés de 12% convertible mensualmente?



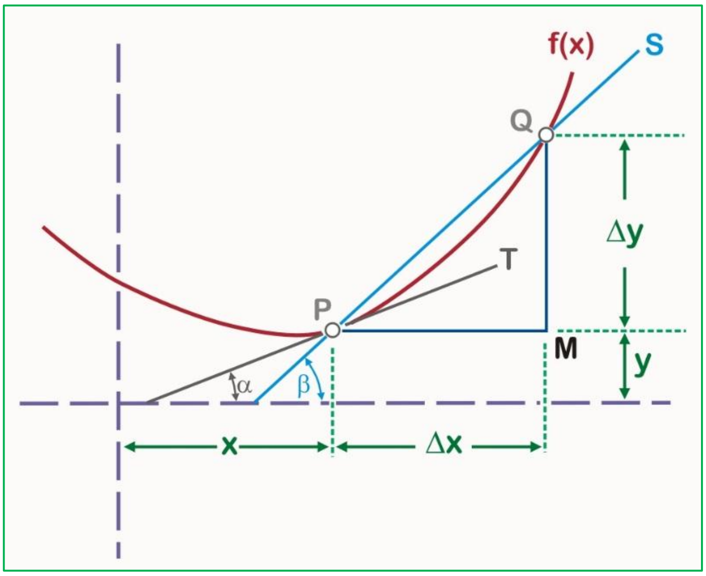
$$M = C(1+i)^{n}$$

$$M = 50.000(1+0.03)^{1x4} = 56.275{,}44$$

$$C = M(1+i)^{-n}$$

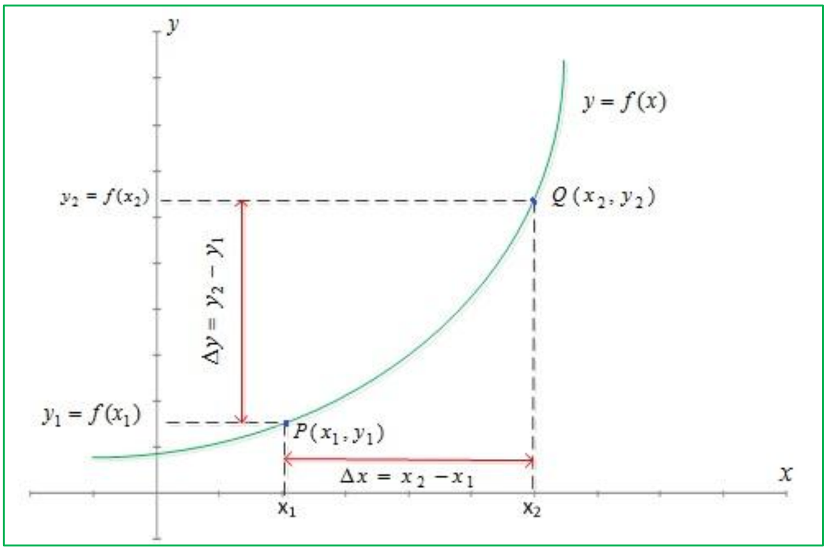
$$C = 56.275{,}44(1+0.12/12)^{-8} = \$51.969{,}42$$

UNIDAD II: DERIVACION



2.1 Incrementos y tasas

- El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una variable cuando cambia otra variable de la cual depende la variable original.



$\Delta x = x_2 - x_1$ $\qquad$ $x_2 = x_1 + \Delta x$

$\Delta y = y_2 - y_1$ $\qquad$ $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ $\qquad$ Si : $\quad x_1 = x$

$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$

- **Ejemplo 1:** Determine Δy; si $y = f(x) = x^2 + 1$ para a) $x = 1$ y $\Delta x = 0.02$ b) $x = 1$ para cualquier Δx

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = f(1 + 0.02) - f(1)$

$\Delta y = [(1.02)^2 + 1] - [(1)^2 + 1] = 0.0404$

b) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = [(1 + \Delta x)^2 + 1] - [(1)^2 + 1]$

$\Delta y = 1 + 2\Delta x + \Delta x^2 + 1 - 2$

$\Delta y = 2\Delta x + \Delta x^2$

$\Delta y = 2(0.02) + (0.02)^2 = 0.0404$

- Ejemplo 2: El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro. Si p es el precio por litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta q (en litros por día) está dado por: $q = 500(150 - p)$. Calcule el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento el precio de 120 centavos a 130 centavos por litro.

$p_1 = 120 \qquad p_2 = 130 \qquad \Delta_p = 10$

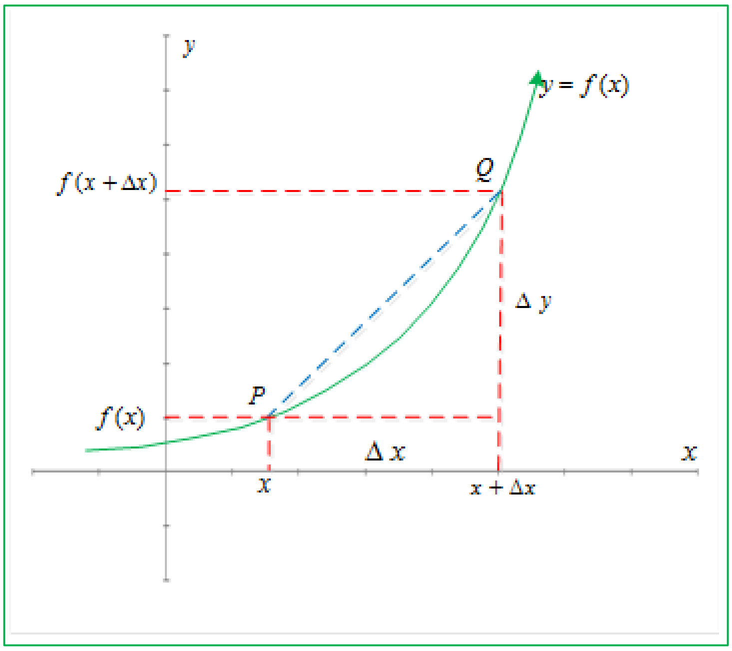
$\Delta_q = f(p + \Delta_p) - f(p)$

$\Delta_q = f(120 + 10) - f(120) \qquad \Delta_q = f(130) - f(120)$

$\Delta_q = [500(150 - 130)] - [500(150 - 120)] = -5000$

Al producirse un incremento en el precio de 10 centavos decrece el volumen de venta en 5000 litros de gasolina.

TASA DE CAMBIO PROMEDIO: de una función f sobre un intervalo de x a $x + \Delta x$, se define como la razón $\Delta_{\mathbf{y}}/\Delta_{\mathbf{x}}$.



$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - \Delta x}$$

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{\mathbf{f(x + \Delta x) - f(x)}}{\mathbf{\Delta x}}$$

- La línea PQ es una línea secante que tiene como pendiente igual a Δ_y/Δ_x .

$$\mathbf{m_{sec}} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

- **Ejemplo 3**: Cuando se le da cierta droga a una persona, su reacción se mide mediante los cambios de temperatura, variación de pulso y otros cambios fisiológicos. La fuerza S de la reacción depende de la cantidad x de la droga administrada y está dada por: $S(x) = x^2(5 - x)$.

  Determine el promedio de la razón de cambio en la fuerza de reacción cuando la cantidad de unidades de droga cambia de $x = 1$ a $x = 3$.

$$x = 1 \quad a \quad x = 3 \qquad \Delta x = 3 - 1 \qquad \Delta x = 2$$

$$\frac{\Delta_S}{\Delta_x} = \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta_x}$$

$$\frac{\Delta_S}{\Delta_x} = \frac{S(1 + 2) - S(1)}{2}$$

$$\frac{\Delta_S}{\Delta_x} = \frac{[(3)^2(5-3)] - [(1)^2(5-1)]}{2}$$

$$\frac{\Delta_S}{\Delta_x} = 7$$

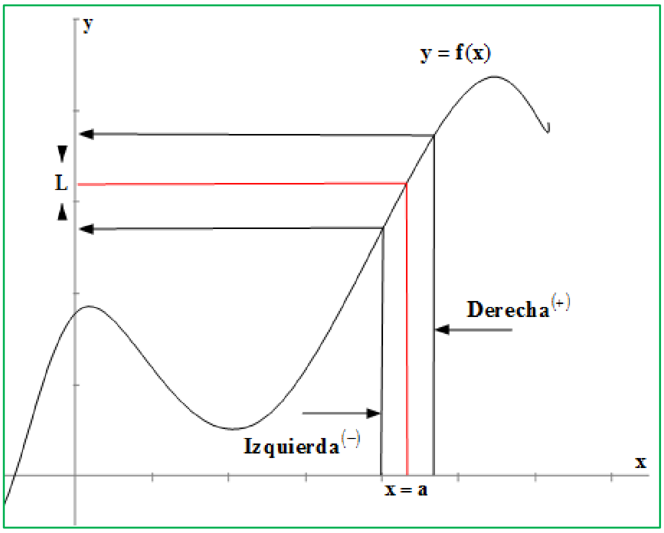
2.2 Límites.

El límite cuando x se acerca **(o tiende)** a **a**, es el número L, siempre que f(x) esté arbitrariamente cercana a L para toda x lo suficientemente cerca, pero diferente de a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

En otras palabras; no estamos interesados en lo que le pasa a f(x) cuando x es igual a **a**, sino lo que le sucede a f(x) cuando x está muy cerca de **a**.

Una función puede no estar definida, pero si puede existir el límite.

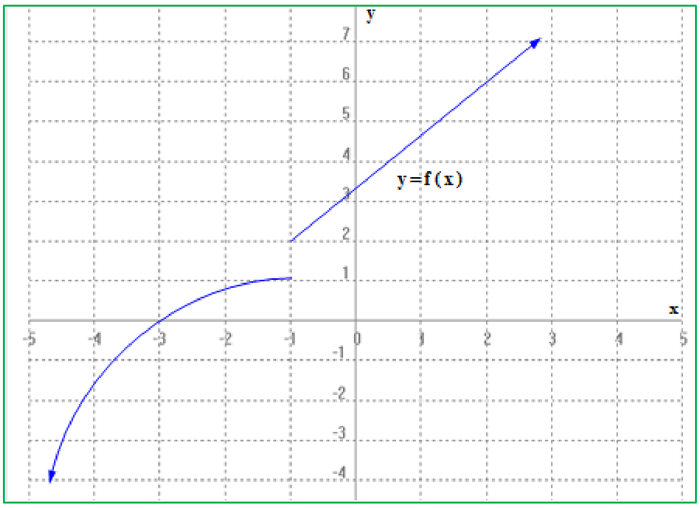


- Podemos acercarnos a **a**; tanto por izquierda como por derecha, entonces para que exista límite; el límite por izquierda y por derecha deben ser iguales, e igual a L.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad ; \text{ existe; si}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

- Para que entienda la definición de límite resuelva el ejercicio, en base al gráfico.



a) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \to -1} f(x) = \text{No existe}$

d) $\lim_{x \to 2} f(x) = 6$

e) $\lim_{x \to -3} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- Estudie las propiedades y ejercicios resueltos del texto base. Para el cálculo de límites veamos los ejemplos siguientes:

1. $\lim_{x \to -2} 5x^2 + 3x - 100 = 5(-2)^2 + 3(-2) - 100 = -86$

2. $\lim_{y \to 8} \frac{\sqrt{2y^2 - 7}}{y - 3} = \frac{\sqrt{2(8)^2 - 7}}{8 - 3} = \frac{11}{5}$

3. $\lim_{x \to 10} -30 = -30$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x - 3}}{2x^2 - 3x - 18} = \frac{\sqrt{3 - 3}}{2(3)^2 - 3(3) - 18} = \frac{0}{-9} = 0$

- Cuando al remplazar el límite; se obtiene como resultado **0/0**, **(FORMA 0/0)**; significa que debemos realizar manipulación algebraica o factorar.

Ejemplo1: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6} = \frac{(-2)^2+3(-2)+2}{(-2)^2-(-2)-6} = \frac{0}{0} \qquad \text{Forma}: \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x-3} = \frac{-2+1}{-2-3} = \frac{1}{5}$$

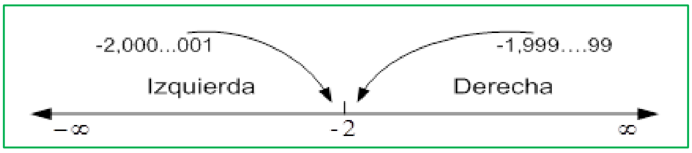
Ejemplo 2: $\lim\limits_{x \to 36} \dfrac{\sqrt{x}-6}{x-36}$

$$\lim_{x \to 36} \frac{\sqrt{x}-6}{x-36} = \frac{\sqrt{36}-6}{36-36} = \frac{0}{0} \qquad \text{"FORMA}\frac{0}{0}\text{ "}$$

$$\lim_{x \to 36} \frac{(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}+6)}{(x-36)(\sqrt{x}+6)} = \lim_{x \to 36} \frac{x-36}{(x-36)(\sqrt{x}+6)} = \lim_{x \to 36} \frac{1}{(\sqrt{x}+6)} = \frac{1}{\sqrt{36}+6} = \frac{1}{12}$$

- Si al remplazar el límite se obtiene como resultado, una constante dividida para cero, **(FORMA K/0)**; para encontrar el límite; necesariamente debemos hacer el análisis de límites por izquierda y por derecha.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+4}{x+2} = \dfrac{(-2)^2+4}{-2+2} = \dfrac{8}{0} \qquad \text{Forma}: \dfrac{K}{0}$



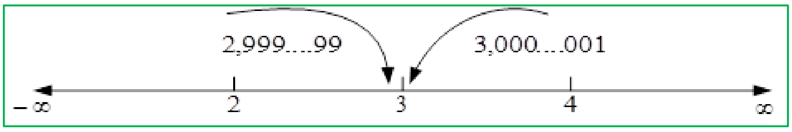
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2+4}{x+2} = \frac{8}{-1{,}999....999+2} = \frac{8}{0{,}000....0001} = \infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2+4}{x+2} = \frac{8}{-2{,}000....0001+2} = \frac{8}{-0{,}000.....0001} = -\infty$$

Como el límite por izquierda y por derecha, no son iguales, concluimos que:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+4}{x+2} = \text{No existe}$$

Ejemplo 2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x-1}{(x-3)^2} = \dfrac{3(3)-1}{(3-3)^2} = \dfrac{9}{0}$ Forma : $\dfrac{K}{0}$



$$\lim_{x \to 3^+} \frac{3x-1}{(x-3)^2} = \frac{8}{(3{,}000....001-3)^2} = \frac{8}{(0{,}000....001)^2} = \frac{8}{0{,}000....0001} = \infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{3x-1}{(x-3)^2} = \frac{8}{(2{,}999....999-3)^2} = \frac{8}{(-0{,}000....001)^2} = \frac{8}{0{,}000....0001} = \infty$$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x-1}{(x-3)^2} = \infty$ Porque límite por derecha e izquierda son iguales.

A los límites por izquierda y por derecha se les denomina **límites laterales**.

- Para el cálculo de **límites al infinito**; consideremos lo ejemplos siguientes:

1. El límite de un polinomio cuando x tiende a ∞ o a - ∞; es el mismo del término que involucra la mayor potencia de x.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to -\infty} 2-5x+3x^2-8x^3$

$$= \lim_{x \to -\infty} -8x^3 = -8(-\infty)^3 = -8(-\infty) = \infty$$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x \to \infty} -150 = -150$

2. El límite de funciones racionales cuando x tiende a ∞ o a - ∞, tomamos el mayor de los exponentes, tanto del numerador como del denominador.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x^3-5x^2+3x-26}{2x-9x^2-4x^4}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3}{-4x^4} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{x} = -\frac{2}{\infty} = 0$$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2+5}{2x^3-1} - 3\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2}{2x^3} - 3\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{2x} - 3\right) = \frac{7}{2(\infty)} - 3 = 0 - 3 = -3$$

2.2.2 Continuidad aplicada a las desigualdades

- Estudió desigualdades lineales, teniendo como resultado un intervalo. Ahora el estudio de desigualdades no lineales; el método consiste en encontrar los ceros de la función, es decir los puntos de intersección con el eje x y los puntos en los cuales la función no está definida. Para explicar el método de solución , consideremos el ejemplo siguiente:

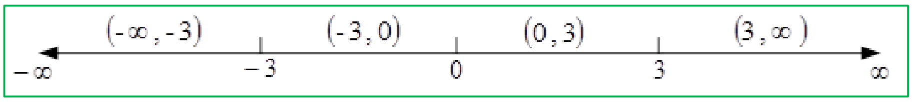
Ejemplo 1: $\mathbf{\dfrac{x}{x^2-9} < 0}$

1. Factoramos si es posible la expresión.

$$f(x) = \frac{x}{(x+3)(x-3)}$$

2. Igualamos a 0; independientemente numerador y denominador. Los valores obtenidos, los ubicamos en la recta de los reales y determinamos los intervalos,

$x = 0$; $x = -3$; $x = 3$



3. De cada uno de los intervalos tomamos un valor no extremo y evaluamos en la función, en la que no interesa el valor, sino el signo.

$(-\infty, -3)$ $\quad f(-4) = \dfrac{(-)}{(-)(-)} = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$ $\quad f(x) < 0$

$$(-3,0) \qquad f(-2)=\frac{(-)}{(+)(-)}=\frac{(-)}{(-)}=(+) \qquad f(x)>0$$

$$(0,3) \qquad f(2)=\frac{(+)}{(+)(-)}=\frac{(+)}{(-)}=(-) \qquad f(x)<0$$

$$(3,\infty) \qquad f(4)=\frac{(+)}{(+)(+)}=\frac{(+)}{(+)}=(+) \qquad f(x)>0$$

4. Escogemos los intervalos que satisfacen la desigualdad (<0).

   Solución: $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

Ejemplo 2: Participación en talleres. Imperial Education Service (IES) está ofreciendo un curso de procesamiento de datos a personal clave en la compañía Zeta. El precio por persona es de \$50 y la compañía Zeta garantiza que al menos asistirán 50 personas. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para todos en \$0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que el IES aceptará, de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

1. **Planteamiento.** Sea x, el número de personas adicionales que asistan al curso. El ingreso total está dado por el número de personas que asistan al curso por el costo por persona.

   $R \geq (50)(\$50)$ "Ingreso total"

   Número de personas x Precio por persona ≥ 2500

   $$(50+x)(50-0.50x)\geq 2500 \quad ; \quad 2500-25x+50x-0.50x^2 \geq 2500$$

   $$-0.50x^2+25x\geq 0$$

2. Utilice el método para la solución de desigualdades no lineales.

   $f(x)=x(-0.50x+25)$; $x=0, 50$ "Puntos críticos"

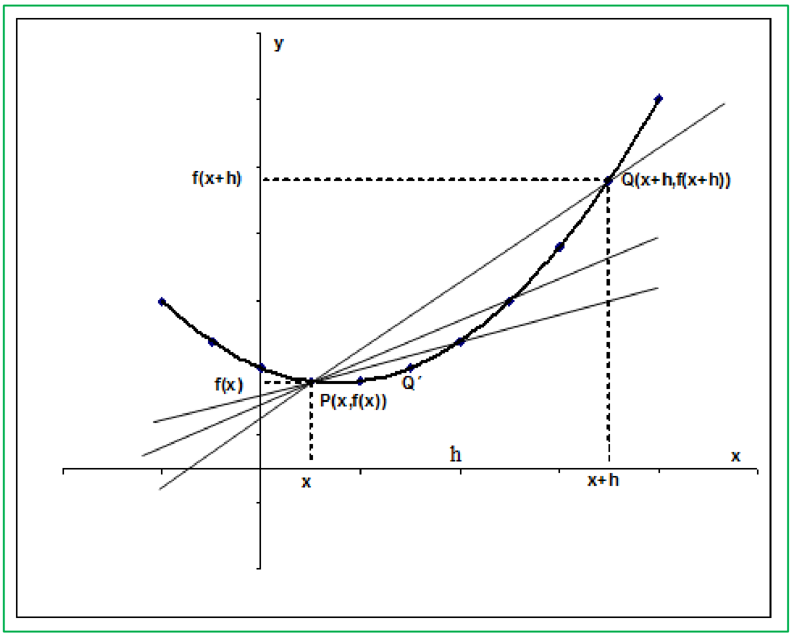
$$(0,50) \qquad f(1)=(+)(+)=(+) \qquad f(x)\geq 0$$
$$(50,\infty) \qquad f(51)=(+)(-)=(-) \qquad f(x)\leq 0$$

Solución: $[0, 50]$

Comprobación: Pueden asistir hasta 100 personas con un precio de $25.

2.3 La derivada

Uno de los problemas principales que se ocupa el cálculo es el encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto sobre una curva. Consideremos los puntos P y Q de la curva y = f(x) ; la línea PQ es la línea secante (une dos puntos de la curva); si Q se acerca hasta el límite a P, $\mathbf{h \to 0}$; entonces la línea secante tiende a ser tangente (toca en un solo punto a la curva).



Encontremos la pendiente de la línea secante PQ.

$$m_{sec} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \qquad\qquad m_{sec} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si Q se acerca hasta el límite a P; la pendiente de la secante tiende a ser la pendiente de la línea tangente, cuando $h \to 0$. La pendiente de la línea tangente a la curva en el punto P, se llama la **derivada por la definición**.

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec} \;;$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ **"derivada por la definición"**

- **Ejemplo1**: Encontrar la ecuación de la línea tangente a la curva; $\mathbf{y = x^2 - 4x - 5}$; en el punto (3 , -8).

1. Calculamos la derivada de la función.

$$y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-4(x+h)-5\right]-(x^2-4x-5)}{h}$$

$$y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-4x-4h-5-x^2+4x+5}{h}$$

$$y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\,(2x+h-4)}{h}=2x+0-4=2x-4$$

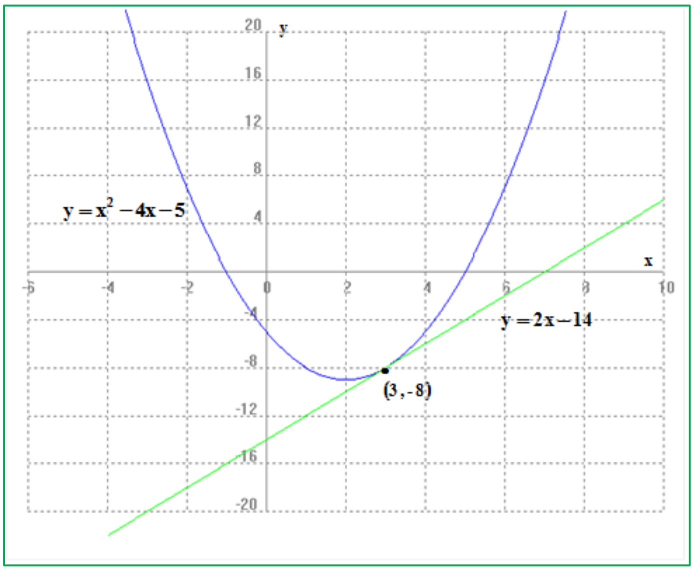
2. Al reemplazar el punto $(3,-8)$ en la derivada, encontramos la pendiente.

$$y'(3)=f'(3)=2(3)-4=2 \qquad ; \qquad m=2$$

3. Con la pendiente (m = 2) y el punto (3, -8); encontramos la ecuación de la recta. Aplicamos la forma punto-pendiente.

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad\qquad y+8=2(x-3)$$

$$y=2x-14$$



Ejemplo 2: Encuentre la pendiente de la curva $y = f\left(x\right) = \frac{2}{3x-1}$, en el punto $(-2, 3)$.

a) Recuerde la derivada, representa la pendiente de la línea tangente en un punto de la curva.

$$y' = f'\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h}$$

$$y' = f'\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{\left[3\left(x+h\right)-1\right]} - \frac{2}{3x-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2\left(3x-1\right) - 2\left(3x+3h-1\right)}{\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)}}{h}$$

$$y' = f'\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2\left(3x-1\right) - 2\left(3x+3h-1\right)}{\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6x-2-6x-6h+2}{\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)}}{h}$$

$$y' = f'\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-6h}{\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-6h}{h\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)}$$

$$y' = f'\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-6h}{\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-6h}{h\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)}$$

$$y' = f'\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{-6}{\left(3x+3h-1\right)\left(3x+1\right)} = \frac{-6}{\left(3x+3(0)-1\right)\left(3x-1\right)}$$

$$y' = f'\left(x\right) = \frac{-6}{\left(3x-1\right)^2}$$

b) Reemplace la coordenada x en la derivada y determine la pendiente.

$$y'(-2) = m = \frac{-6}{\left(3(-2)\ \ -1\right)^2} \qquad ; \qquad m = -\frac{6}{49}$$

2.3.1 Reglas de derivación.

- El proceso de derivación por medio de la definición; resulta un proceso largo y tedioso; por fortuna existen reglas; que permiten efectuar la diferenciación en forma mecánica y eficiente. Estas reglas las resumimos en 3.

1. $\mathbf{y = f(x) = c}$	$\mathbf{y' = f'(x) = 0}$
2. $\mathbf{y = f(x) = cx^n}$	$\mathbf{y' = c.n.x^{n-1}}$
3. $\mathbf{y = c.f(x)}$	$\mathbf{y' = c.f'(x)}$

- **Ejemplos:** Determine la derivada de las funciones aplicando las reglas de derivación:

1. $y = f(x) = -80$ $\qquad\qquad y' = f'(x) = 0$

2. $y = f(x) = 9x^8$ $\qquad\qquad y' = f'(x) = 72x^7$

3. $y = f(x) = 5x^6 - 8\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} + \dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - 5x + 23$

Exprese los radicales como exponentes: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

$$y = f(x) = 5x^6 - 8\frac{x^{1/2}}{x^{3/4}} + \frac{3}{2x^{2/3}} - 5x + 23 = 5x^6 - 8x^{-1/4} + \frac{3}{2}x^{-2/3} - 5x + 23$$

$$y' = f'(x) = 30x^5 + 2x^{-5/4} - x^{-5/3} - 5$$

4. $y = 9\left(7x^3 - 2x^{-5} + 4x - 3\right)$ Regla 3 $y' = c \bullet f'(x)$

$y' = 9\left(21x^2 + 10x^{-6} + 4\right)$

5. $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\,(2x-1)}{\sqrt[5]{x^2}}$

Transforme radicales en exponentes: $y = \dfrac{x^{3/4}\,(2x-1)}{x^{2/5}}$

$y = x^{7/20}\,(2x-1)$ $\quad ; \quad$ $y = 2x^{27/20} - x^{7/20}$

$y' = \frac{27}{10} x^{7/20} - \frac{7}{20} x^{-13/20}$

6. Encuentre todos los puntos sobre la curva $y = \frac{5}{2}x^2 - x^3$; en los que la recta tangente es horizontal.

Cuando una recta es horizontal, la pendiente (derivada) es cero.

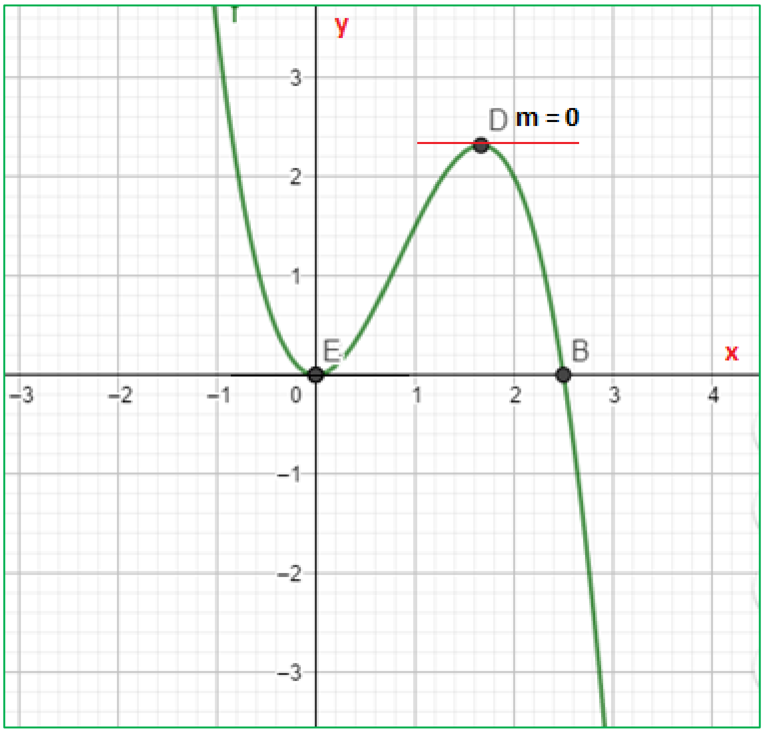
$y' = 5x - 3x^2$ $\qquad\qquad$ $y' = 0$

$x(5 - 3x) = 0$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $(0\,,0)$

$5 - 3x = 0$ $\qquad$ $x = \frac{5}{3}$ $\qquad\qquad$ $\left(\frac{5}{3}\,,\frac{125}{54}\right)$

Para tener una idea más clara de lo expresado y de los resultados obtenidos, analicemos en el gráfico de la función en que punto de la curva ocurre que la recta tangente es horizontal.

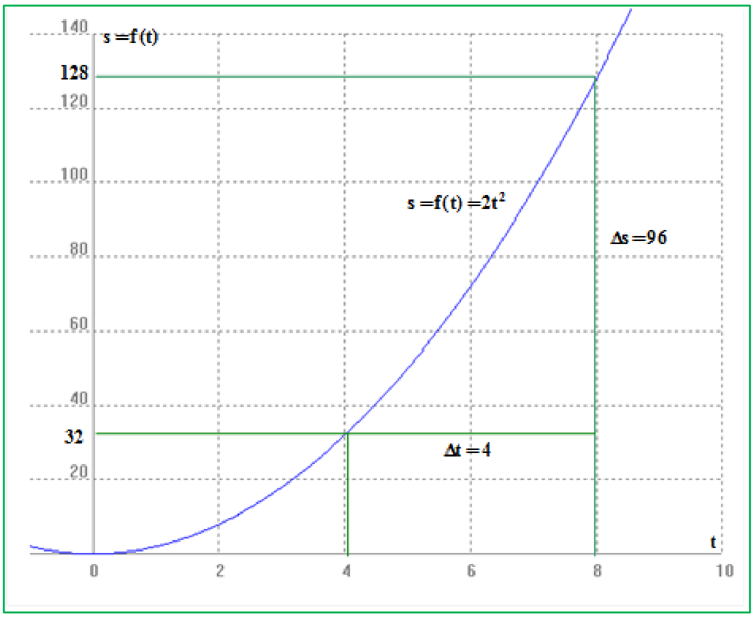


2.3.2 La derivada como una razón de cambio

- La interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la línea tangente a una curva. Una aplicación importante de la derivada es determinar cómo una variable cambia en relación con otra. Un hombre de negocios debe conocer cómo cambia su utilidad con respecto a la variación de la producción; así como un médico le interesa conocer cómo reacciona un paciente por el cambio en la dosis de un medicamento.

Una manera conveniente de **interpretar la derivada como una razón de cambio** es el movimiento de un objeto en el tiempo.

Suponga que un objeto se mueve de acuerdo a la ecuación: $\mathbf{s = f(t) = 2t^2}$; que representa una ecuación de movimiento, donde **s** representa a una función de posición.



La variación de posición (Δs) respecto a la variación de tiempo (Δt), se llama velocidad promedio o velocidad media.

$\Delta s = s_2 - s_1$ Variación de posición.

$\Delta t = t_2 - t_1$ Variación de tiempo.

$$\mathbf{v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

Al límite de la velocidad promedio cuando $\Delta t \to 0$; se define como la velocidad instantánea.

$$\mathbf{v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

Para las condiciones expuestas, calculamos la velocidad promedio y la velocidad instantánea.

$\Delta t = 8 - 4 = 4\,\text{s}.$

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(4+4) - f(4)}{4} = \frac{2(8)^2 - 2(4)^2}{4} = \frac{128 - 32}{4} = \frac{96}{4} = 24\,\text{m/s}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t \quad ; \qquad v(4) = 4(4) = 16\,\text{m/s}$$

2.3.3 Costo Marginal

Si **c = f(q)**; representa el costo total de producir y comerciar **q** unidades de un producto. **La razón de cambio de c con respecto a q se llama costo marginal**. Y se define como el **costo aproximado** de producir una unidad adicional.

$$\text{Costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

Ejemplo 1: **Administración.** El costo generado por la venta de q mesas está dado por: $\mathbf{C(q) = 200q - q^2/500}$

a) Encuentre el costo marginal cuando $q = 1000$ unidades
b) Determine el costo real por la venta de la mesa 1001
c) Compare las respuestas de los incisos (a) y (b). ¿Cómo se relacionan?

a) $\dfrac{dC}{dq} = 20 - \dfrac{2q}{500} \quad ; \qquad \dfrac{dC}{dq} = 20 - \dfrac{q}{250}$

$$\frac{dC}{dq}(q = 1000) = 20 - \frac{1000}{250} = 16$$

b) $$\frac{\Delta C}{\Delta q}=\frac{C\,(1001)-C(1000)}{1001-1000}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta q}=\frac{\left[20\,(1001)-\frac{1001^2}{500}\right]-\left[20(1000)-\frac{1000^2}{500}\right]}{1001-1000}=15.998$$

c) El valor del costo marginal se aproxima al valor real del costo de producir la unidad 1001.

Ejemplo 2: Suponga que la función de demanda para un producto está dada por $\mathbf{p=\frac{50000-q}{25000}}$, y la función de costo esta dada por $\mathbf{c=2100+0.25q}$, donde $0\le q\le 30000$. Encuentre la utilidad marginal para q=15000, 21875, 25000.

Recuerde: Utilidad = Ingreso total(r)-Costo total(c)

$$r=p.q\quad ;\quad r=\left(\frac{50000-q}{25000}\right)q=\frac{50000q-q^2}{25000}=2q-\frac{q^2}{25000}$$

$$U=2q-\frac{q^2}{25000}-(2100+0.25q)=1.75q-\frac{q^2}{25000}-2100$$

$$\frac{dU}{dq}=1.75-\frac{2q}{25000}\quad ;\quad \frac{dU}{dq}=1.75-\frac{q}{12500}$$

$$\frac{dU}{dq}(15000)=1.75-\frac{15000}{12500}=\$0.55$$

$$\frac{dU}{dq}(21875)=1.75-\frac{21875}{12500}=\$0.00$$

$$\frac{dU}{dq}(25000)=1.75-\frac{25000}{12500}=-\$0.25$$

Del análisis de resultados puede determinar que si se venden más de 21875 unidades la ganancia marginal es negativa. Esto indica que incrementar la producción más allá de ese nivel, reducirá la ganancia.

Ejemplo 3. Ciencias Sociales. Los estándares de vida están definidos por la producción total de bienes y servicios dividida entre la población total. En Estados Unidos, durante la década de 1980, el estándar de vida se aproximaba mucho por: $f(x) = -0.023x^3 + 0.3x^2 - 0.4x + 11.6$, donde $x = 0$ corresponde a 1981. Use la derivada para encontrar la razón de cambio del estándar de vida en los siguientes años.

(a) 1980 (b) 1983 (c) 1988 (d) 1989 (e) 1990

(f) ¿Qué le dicen sus respuestas a los incisos (a) - (e) acerca del estándar de vida en esos años?

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -0.069x^2 + 0.6x - 0.4$$

(a) $f'(0) = -0.069(0)^2 + 0.6(0) - 0.4 = -0.4$

(b) $f'(3) = -0.069(3)^2 + 0.6(3) - 0.4 = 0.779$

(c) $f'(8) = -0.069(8)^2 + 0.6(8) - 0.4 = -0.016$

(d) $f'(9) = -0.069(9)^2 + 0.6(9) - 0.4 = -0.589$

(e) $f'(10) = -0.069(10)^2 + 0.6(10) - 0.4 = -1.3$

(f) Los resultados negativos nos hacen ver que el estándar de vida en esa década no fue bueno o decreció en relación a los años anteriores.

Ejemplo 4. $\mathbf{C = 0.04q^3 - 0.5q^2 + 4.4q + 7500}$; representa el costo total de producir q unidades de un producto. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para $q = 5$ $q = 25$ $q = 1000$

$$\frac{dC}{dq} = 0.12q^2 - q + 4.4 \qquad \text{"}\textbf{Funcion de costo marginal}\text{"}$$

$$\frac{dC}{dq}(5) = 0.12(5)^2 - (5) + 4.4 = 2.4 \text{ u.m.}$$

$$\frac{dC}{dq}(25) = 0.12(25)^2 - (25) + 4.4 = 54.4 \text{ u.m}$$

$$\frac{dC}{dq}(25) = 0.12(1000)^2 - (1000) + 4.4 = 119\,004{,}40 \text{ u.m}$$

La ecuación de costo del fabricante no es la adecuada para una producción en serie, porque conforme aumenta la producción, producir una unidad adicional incrementa el costo.

Ejemplo 6: Polilla de invierno. En Nueva Escocia se realizó un estudio de la polilla de invierno. Las larvas de la polilla caen al pie de los arboles huéspedes a una distancia de x pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de y, donde:

$$\mathbf{y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2 \qquad 1 \leq x \leq 9}$$

a. ¿con que rapidez cambia la densidad de las larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando x = 6?
b. ¿Para qué valor de x la densidad de las larvas decrece a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

Solución:

a. $\frac{dy}{dx} = -1.5 - x \qquad \frac{dy}{dx}(6) = -1.5 - (6) = -7.5 \text{ larvas/pie}^2$
b. $-6 = -1.5 - x \qquad x = 4.5 \text{ pies}$

Ejemplo 7: $\mathbf{\bar{C} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + 20\,000/q;}$ representa el costo promedio por unidad, que es una función del número q de unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para $q = 100, q = 500$.

Solución:

Recuerde: $\mathbf{C = \bar{C}.q}$ "Costo total"

$$C = \left(0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \frac{20\,000}{q}\right).q$$

$$C = 0.00002q^3 - 0.01q^2 + 6q + 20000$$

$$\frac{dC}{dq} = 0.00006q^2 - 0.02q + 6$$

$$\frac{dC}{dq} = 0.00006(100)^2 - 0.02(100) + 6 = 4.6 \text{ u.m.}$$

$$\frac{dC}{dq} = 0.00006(500)^2 - 0.02(500) + 6 = 11 \text{ u.m.}$$

2.3.4 Regla del producto y del cociente.

Si f y g son funciones diferenciables, entonces su producto **f.g** y su cociente **f/g** ; son también diferenciables.

Regla del producto:

$$\mathbf{y = f(x).g(x)} \qquad \mathbf{y' = \frac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}$$

Regla del cociente:

$$\mathbf{y = \frac{f(x)}{g(x)}} \qquad \mathbf{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Ejemplos: Diferenciar las funciones.

1. $y = (\sqrt{x} + 3)(x^2 - 5x)$

   Transforme radicales a potencia: $y = (x^{1/2} + 3)(x^2 - 5x)$

   $f(x) = (x^{1/2} + 3) \qquad g(x) = (x^2 - 5x)$; Aplique regla del producto

   $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}(x^2 - 5x) + (x^{1/2} + 3)(2x - 5)$; Realice operaciones

   $y' = \frac{5}{2}x^{3/2} + 6x - \frac{15}{2}x^{1/2} - 15$

2. $y = \frac{x - 2x^2}{4x^2 + 1}$

   $f(x) = x - 2x^2 \quad ; \quad g(x) = 4x^2 + 1$

   $y' = \frac{(1 - 4x)(4x^2 + 1) - (x - 2x^2)(8x)}{(4x^2 + 1)^2}$; Realice operaciones

   $y' = \frac{-4x^2 - 4x + 1}{(4x^2 + 1)^2}$

3. $y = \dfrac{3(2x^3 - 5x^2 + 8)}{5}$

Puede confundir con regla del cociente, considere: $y = \dfrac{3}{5}\left(2x^3 - 5x^2 + 8\right)$

$y = c\,f(x)$; $y' = c\,f'(x)$; $y' = \dfrac{3}{5}(6x^2 - 10x)$

4. $y = (x^2 - 1)(3x^3 - 6x + 5) - 4(4x^2 + 2x + 1)$

Tenemos el producto de funciones y el producto de una constante por una funcion.

$\mathbf{y = F.G - c.H}$ $\mathbf{y' = [F'G + FG'] - cH'}$

$y' = [(2x)(3x^3 - 6x + 5) + (x^2 - 1)(9x^2 - 6)] - 4(8x + 2)$

$y' = 6x^4 - 12x^2 + 10x + 9x^4 - 6x^2 - 9x^2 + 6 - 32x - 8$

$y' = 3x^4 - 27x^2 - 22x - 2$

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{x+1}{x^2(x-4)}$; en el punto $(2\,, -\frac{3}{8})$.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva se debe encontrar la pendiente de la recta utilizando la derivación.

$y = \dfrac{x+1}{x^3 - 4x^2}$ $y' = \dfrac{(1)(x^3 - 4x^2) - (x+1)(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = \dfrac{-2x^3 + x^2 + 8x}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y'(2) = m = \dfrac{-2(2)^3 + (2)^2 + 8(2)}{((2)^3 - 4(2)^2)^2} = \dfrac{4}{64}$ $m = \dfrac{1}{16}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ “Ecuación de la recta: forma punto-pendiente”

$y + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{16}(x - 2)$ $y = \dfrac{1}{16}x - \dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{8}$

$y = \dfrac{1}{16}x - \dfrac{1}{2}$

6. $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q+750}}{\mathbf{q+50}}$ representa una función de demanda para cierto producto, donde p denota el precio por unidad para q unidades. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para $q = 5$. Recuerde que ingreso total: $\mathbf{R = p.q}$

$$R = \left(\frac{q + 750}{q + 50}\right).q \qquad\qquad R = \frac{q^2 + 750q}{q + 50}$$

$$\frac{dR}{dq} = \frac{(2q + 750)(q + 50) - (q^2 + 750q)(1)}{(q + 50)^2}$$

$$\frac{dR}{dq} = \frac{q^2 + 100q + 37500}{(q + 50)^2}$$

$$\frac{dR}{dq}(5) = \frac{(5)^2 + 100(5) + 37500}{(5 + 50)^2} = 12.57 \text{ u.m}$$

7. **Ingresos en taquilla**. Los ingresos totales en taquilla a nivel mundial de cierta película se aproximan con la función $\mathbf{T(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}}$, donde T(x) se mide en millones de dólares y x son los años posteriores al lanzamiento de la película, ¿Cuán rápido cambian los ingresos totales uno, tres y cinco años después del lanzamiento de la película?

   Le piden determinar la razón de cambio del ingreso (T) respecto a los años posteriores al lanzamiento de la película (x)

$$\frac{dT}{dx} = T'(x) = \frac{240x\left(x^2 + 4\right) - 120x^2(2x)}{\left(x^2 + 4\right)^2} = \frac{960x}{\left(x^2 + 4\right)^2}$$

$$T'(1) = \frac{960(1)}{\left(1^2 + 4\right)^2} = 38.4 \text{ millones}$$

$$T'(3) = \frac{960(3)}{\left(3^2 + 4\right)^2} = 17.04 \text{ millones}$$

$$T'(5) = \frac{960(5)}{\left(5^2 + 4\right)^2} = 5.71 \text{ millones}$$

Los resultados le permiten analizar el decrecimiento del ingreso en el tiempo.

2.3.5 Regla de la cadena y la potencia.

- Para explicar estas reglas; utilicemos un ejemplo.

Encontrar la derivada de la función: $y = 9(3x^3 - 2x^2 + 13)^5$

1. Con las reglas conocidas, no podemos diferenciar directamente; utilizamos una sustitución.

   $u = 3x^3 - 2x^2 + 13 \qquad\qquad y = 9u^5$

2. Nuestro objetivo es encontrar la derivada $\frac{dy}{dx}$; **y** está en función de **u**, realizamos esa derivada; además **u** está en función de **x**, también realizamos esa derivada. Este proceso; se denomina la regla de la cadena.

   $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}} \qquad$ **REGLA DE LA CADENA**

   $$\frac{dy}{dx} = 45u^4.(9x^2 - 4x)$$

3. Volvemos a la sustitución original.

   $$\frac{dy}{dx} = 45(3x^3 - 2x^2 + 13)^4 (9x^2 - 4x)$$

- **Para la regla de la potencia**, usamos la regla de la cadena directamente. Primero derivamos la potencia, luego la función interna.

  $$\frac{dy}{dx} = 45(3x^3 - 2x^2 + 13)^4 (9x^2 - 4x)$$

Ejemplo 1: Encuentre la derivada de: $y = 2x.(1 - 5x)^4$

Aplique la regla del producto. $y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$y' = 2(1 - 5x)^4 + 2x.(4)(1 - 5x)^3(-5) \qquad ; \qquad y' = 2(1 - 5x)^3[(1 - 5x) - 20x]$

$y' = 2(1 - 5x)^3(1 - 25x)$

Ejemplo 2: Encuentre la derivada de: $y = \frac{4x - 3}{(8x^2 - 3)^4}$

Aplique la regla del cociente: $y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

$$y' = \frac{(4)\left(8x^2-3\right)^4 - (4x-3)\left[4\left(8x^2-3\right)^3(16x)\right]}{\left[\left(8x^2-3\right)^4\right]^2}$$

$$= \frac{4\left(8x^2-3\right)^3\left[\left(8x^2-3\right)-16x(4x-3)\right]}{\left(8x^2-3\right)^8}$$

$$y' = \frac{4\left(8x^2-3-64x^2+48x\right)}{\left(8x^2-3\right)^5} \quad ; \quad y' = \frac{4\left(-56x^2+48x-3\right)}{\left(8x^2-3\right)^5}$$

- **Ejemplo 4**: $y = \dfrac{(4x^2-2)(8x-1)}{(3x-1)^2}$; utilice las reglas de diferenciación.

  1. Tiene combinado la regla del cociente y del producto. Denominador al cuadrado, derive numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador. Tome en cuenta que el numerador es un producto cuando derive aplique la regla.

$$y' = \frac{\left[8x(8x-1)+(4x^2-2)8\right](3x-1)^2-(4x^2-2)(8x-1)(2)(3x-1)(3)}{((3x-1)^2)^2}$$

$$y' = \frac{(3x-1)\left[\left(64x^2-8x+32x^2-16\right)(3x-1)-6\left(32x^3-4x^2-16x+2\right)\right]}{(3x-1)^4}$$

$$y' = \frac{288x^3-96x^2-24x^2+8x-48x+16-192x^3+24x^2+96x-12}{(3x-1)^3}$$

$$y' = \frac{96x^3-96x^2+56x+4}{(3x-1)^3}$$

$$y' = \frac{4(24x^3-24x^2+14x+1)}{(3x-1)^3}$$

2.3.6 Producto de ingreso marginal.

Una de las aplicaciones importantes de la Economía, es el **producto de ingreso marginal**; que es el ingreso aproximado que se recibe por emplear un trabajador adicional en la producción y venta de un producto.

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dm}$$; regla de la cadena.

Ejemplo 3: Si: $\mathbf{q = \dfrac{200m - m^2}{20}}$, $\mathbf{p = -0{,}1q + 70}$, $m = 40$. Donde **q** es el número total de unidades producidas por día por **m** empleados de un fabricante, y **p** es el precio de venta por unidad. Encuentre el producto de ingreso marginal para el valor dado de m.

a. Se pide determinar el producto de ingreso marginal: $\dfrac{dr}{dm} = \dfrac{dr}{dq} . \dfrac{dq}{dm}$;

No tiene la función de ingreso; recuerde: $r = p.q$

$$r = (-0{,}1q + 70)\, q \quad ; \quad r = -0{,}1q^2 + 70q$$

$$\frac{dr}{dq} = -0{,}20q + 70 \quad ; \quad \text{Encuentre q:} \quad q = \frac{200(40) - (40)^2}{20} = 320$$

$$\frac{dr}{dq}(40) = -0{,}20(320) + 70 = 6$$

b. Calcule: $\dfrac{dq}{dm}$

$$\frac{dq}{dm} = \frac{200 - 2m}{20} \quad ; \quad \frac{dq}{dm}(40) = \frac{200 - 2(40)}{20} = 6$$

c. Calcule el producto de ingreso marginal.

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} . \frac{dq}{dm} = (6)(6) \quad ; \quad \frac{dr}{dm} = 36$$

El resultado obtenido significa; que el fabricante recibe un ingreso adicional de 36 unidades monetarias, por el empleo del trabajador número 41.

2.3.7 Propensión marginal al consumo y al ahorro

En el análisis económico una función importante es la función de consumo de un país que está en función del ingreso del mismo que se lo expresa en miles de millones de dólares; la propensión marginal al consumo se define como la razón de cambio del consumo en relación al cambio del ingreso y representa el el consumo aproximado de consumir el ingreso del país en un siguiente periodo. Tenemos:

$\mathbf{C = f(I)}$ “Consumo en función del ingreso”

$$\mathbf{Propensión\ marginal\ al\ consumo} = \frac{\mathbf{dC}}{\mathbf{dq}}$$

Ahora se supone que el ahorro (S) es la diferencia entre el ingreso y el consumo, la propensión marginal al ahorro se define de igual forma como la razón de cambio del ahorro respecto al ingreso del país en un determinado periodo.

$\mathbf{S = I - C}$ "Ahorro en función del ingreso"

$$\frac{dS}{dI} = \frac{dI}{dI} - \frac{dC}{dI} \qquad\qquad \frac{\mathbf{dS}}{\mathbf{dI}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{dC}}{\mathbf{dI}}$$

$$\mathbf{Propensión\ marginal\ al\ ahorro = 1 - Propensión\ marginal\ al\ consumo}$$

Ejemplo: Función de consumo. Suponga que la función de un país está dada por:

$$C = \frac{10\sqrt{I} + 0.7\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I}}$$

Donde C e I están en miles de millones de dólares.

a. Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de 25.000 millones de dólares.
b. Determine la razón de cambio relativa y porcentual de C con respecto a I, cuando es de 25.000 millones de dólares.

Solución:

a. $\frac{\mathbf{dS}}{\mathbf{dI}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{dC}}{\mathbf{dI}}$

$$C = \frac{10I^{1/2} + 0.7I^{3/2} - 0.2I}{I^{1/2}} \qquad\qquad C = 10 + 0.7I - 0.2I^{-1/2}$$

$$\frac{dC}{dI} = 0.7 + 0.1I^{-3/2} \qquad\qquad \frac{dC}{dI}(25) = 0.7 + 0.1(25)^{-3/2} = 0.7008$$

$$\frac{dS}{dI}(25) = 1 - 0.7008 = 0.2992$$

- La propensión a ahorrar del próximo periodo es de 29.92%

b. Razón de cambio relativa y porcentual

$$\text{Razon de cambio relativa} = \frac{C'}{C}$$

$$\text{Razon de cambio porcentual} = \frac{C'}{C}x100$$

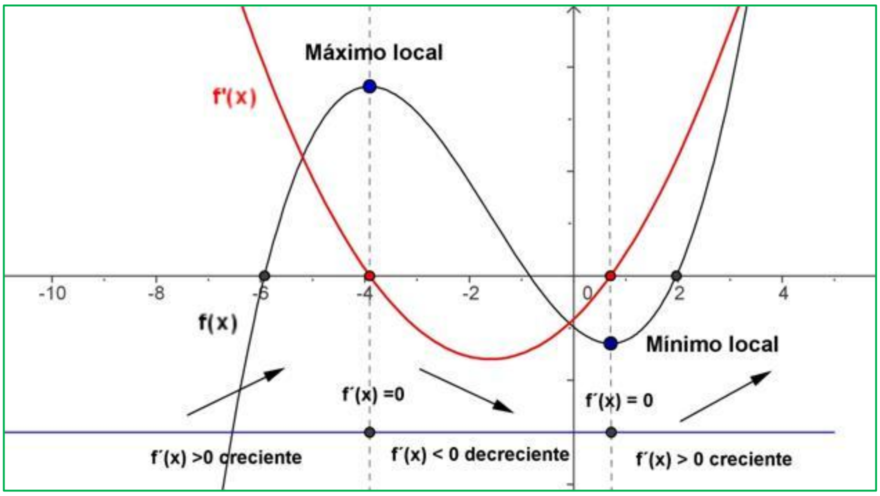
$$C(25)=\frac{10(25)^{1/2}+0.7(25)^{3/2}-0.2(25)}{(25)^{1/2}}=26.5$$

$$\text{Razon de cambio relativa}=\frac{0.7008}{26.5}=0.0264$$

$$\text{Razon de cambio porcentual}=0.0264\text{x}100=2.64\%$$

- Se puede observar que el consumo para el siguiente periodo aumenta en alrededor del 2.64%

UNIDAD III: DERIVACIÓN Y TRAZADO DE CURVAS



3.1 Derivadas de funciones logarítmicas.

Si: $\mathbf{y = \ln u}$ **y** $\mathbf{u = f(x)}$ $$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$$

- **Ejemplo1**: $y = \ln(3x^2 - 6x + 5)$

$$y' = \frac{1}{3x^2 - 6x + 5} .(6x - 6) \qquad\qquad y' = \frac{6(x-1)}{3x^2 - 6x + 5}$$

a) Para realizar derivadas que tengan logaritmos es necesario que recuerde sus propiedades.

3.1.1 Reglas de los logaritmos

1. $\log_b x + \log_b y = \log_b xy$
2. $\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$
3. $\log_b x^m = m \log_b x$
4. $\log_b 1 = 0$
5. $\log_b b^x = x$
6. $b^{\log_b x} = x$
7. $\log_b x = \log_b y \qquad por\ igualdad \qquad x = y$
8. $b^x = b^y \qquad por\ igualdad \qquad x = y$

9. $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

Ejemplo 2: Encontrar la derivada. $y = \ln \sqrt[4]{\frac{(2x+5)^3.(4-3x^3)^2}{(8x-1)^5}}$

a. Exprese en términos de exponentes. $y = \ln \left[\frac{(2x+5)^3.(4-3x^3)^2}{(8x-1)^5}\right]^{1/4}$

b. Aplique propiedades.

$$y = \frac{1}{4}\left[3 \ln (2x+5) + 2 \ln (4-3x^3) - 5 \ln (8x-1)\right]$$

c. Diferencie o derive.

$$y' = \frac{1}{4}\left(\frac{3(2)}{2x+5} + \frac{2(-9x^2)}{4-3x^3} - \frac{5(8)}{8x-1}\right) \qquad y' = \frac{1}{4}\left(\frac{6}{2x+5} - \frac{18x^2}{4-3x^3} - \frac{40}{8x-1}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2x+5} - \frac{9x^2}{4-3x^3} - \frac{20}{8x-1}\right)$$

Ejemplo 3: Encuentre la derivada. $y = \frac{2x+3}{\ln(1-3x)}$

$$y' = \frac{2.\ln(1-3x) - (2x+3).\frac{-3}{1-3x}}{[\ln(1-3x)]^2}$$

$$y' = \frac{\frac{2(1-3x)\ln(1-3x)+3(2x+3)}{1-3x}}{\ln^2(1-3x)}$$

$$y' = \frac{2(1-3x)\ln(1-3x)+3(2x+3)}{(1-3x)\ln^2(1-3x)}$$

Ejemplo 4: Costo marginal. La función en dólares del costo promedio de un fabricante, está dada por: $\bar{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{500}}{\mathbf{ln(q+20)}}$. Encuentre el costo marginal (redondeado a dos decimales) cuando $q = 50$.

$$C = \bar{C}.q \qquad C = \frac{500}{\ln(q+20)}.q \qquad C = \frac{500q}{\ln(q+20)}$$

$$\frac{dC}{dq} = \frac{500\ln(q+20) - 500q.\frac{1}{q+20}}{[\ln(q+20)]^2}$$

$$\frac{dC}{dq} = \frac{500\ln(5+20) - 500(5).\frac{1}{5+20}}{[\ln(5+20]^2} \qquad \frac{dC}{dq} = 145.68$$

3.2 Derivadas de funciones exponenciales.

Si: $\mathbf{y = e^u}$ **y** **u=f(x)**

$$\frac{dy}{dx} = y' = e^u.\frac{du}{dx}$$

EJEMPLOS

1. Encontrar la derivada. $y = e^{2x^2-5x+3}$

   $$\frac{dy}{dx} = e^{2x^2-5x+3}(4x-5)$$

2. Derive: $y = 4^{5x^3+8}$

   Transformar la función exponencial de base 4 a base e: $b^x = e^{x.\ln b}$

   $$y = e^{(5x^3+8)\ln 4} \qquad y' = e^{(5x^3+8)\ln 4}.(15x^2)\ln 4$$

   $$y' = 15.\ln 4.x^2.4^{5x^3+8}$$

3. $\mathbf{C = 100q.e^{\frac{2q+5}{10}}}$, representa el costo total de producir q unidades de un producto. Encuentre la función de costo marginal.

   $$C' = \frac{dc}{dq} = 100e^{\frac{2q+5}{10}} + 100q.\ e^{\frac{2q+5}{10}}.\frac{2}{10}$$

   $$C' = \frac{dc}{dq} = e^{\frac{2q+5}{10}}(100+20q) \quad ; \quad C' = \frac{dc}{dq} = 20e^{\frac{2q+5}{10}}(5+q)$$

3.3 derivadas de orden superior.

La derivada de una función f(x) es f´(x) y es una función de x; si realizamos la derivada, obtenemos la segunda derivada y así sucesivamente.

Ejemplo. Sí, $y = 3x^5 + 14x^3 - 12x^2 + 13x + 100$; encontrar y´´´.

$y´ = 15x^4 + 42x^2 - 24x + 13$

$y´´ = 60x^3 + 84x - 24$

$y´´´ = 180x^2 + 84$

3.4 Diferenciación implícita.

La diferenciación implícita es una técnica para diferenciar funciones que no están dadas de la forma usual y = f(x).

$y = x^2 + 3x - 100$ **“EXPLÍCITA”**

$y^2 + 3xy – 5x = 8$ **“ IMPLÍCITA”**

Para la diferenciación implícita, tome en cuenta que y = f(x), por lo que cada vez que derive **y**, va a tener una derivada interna.

Ejemplo. Encontrar la ecuación de la línea tangente a la curva $3xy^3 + 2xy + 5 = 10x$, en el punto (1 , 1)

Recuerde, la derivada evaluada en un punto le proporciona la pendiente de la línea tangente a la curva en ese punto.

1. Igualamos a cero la expresión: $3xy^3 + 2xy + 5 - 10x = 0$

2. Diferenciamos:

$$\left(3y^3 + 3x(3y^2 \frac{dy}{dx})\right) + \left(2y + 2x\frac{dy}{dx}\right) + 0 - 10 = 0$$

3. Agrupamos los términos en $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}(9xy^2 + 2x) = 10 - 3y^3 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10 - 3y^3 - 2y}{9xy^2 + 2x}$$

4. Evaluamos la derivada en el punto para determinar la pendiente y aplicamos la ecuación de rectas punto-pendiente.

$$\frac{dy}{dx}(1{,}1) = \frac{10 - 3(1)^3 - 2(1)}{9(1)(1)^2 + 2(1)} = \frac{5}{11} \qquad ; \qquad m = \frac{5}{11}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad ; \qquad y - 1 = \frac{5}{11}(x - 1) \qquad ; \qquad y = \frac{5}{11}x + \frac{6}{11}$$

3.5 Diferenciación logarítmica.

Una técnica que simplifica la diferenciación de y = f(x); cuando f(x), contiene productos, cocientes o potencias; es la técnica de diferenciación logarítmica. Para explicación del método utilicemos un ejemplo.

Encontrar la derivada utilizando diferenciación logarítmica:

$$y = \frac{(x^2 + 3)^5 (3x - 1)^4}{3x^2 \sqrt[3]{(x + 5)^2}}$$

1. El método, inicia aplicando logaritmo natural a los dos lados de la igualdad; y utilizamos las propiedades de logaritmos.

$$\ln y = \ln \frac{(x^2 + 3)^5 (3x - 1)^4}{3x^2 \sqrt[3]{(x + 5)^2}}$$

$$\ln y = \ln (x^2 + 3)^5 (3x - 1)^4 - \ln 3x^2 (x + 5)^{2/3}$$

$$\ln y = \left[5 \ln(x^2 + 3) + 4 \ln (3x - 1)\ \right] - \left[2 \ln (3x) + \frac{2}{3} \ln (x + 5)\right]$$

2. Aplicamos reglas de derivación.

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{5(2x)}{x^2 + 3} + \frac{4(3)}{3x - 1} - \frac{2(3)}{3x} - \frac{2(1)}{3(x + 5)}$$

$$.\frac{dy}{dx} = [\ \frac{10x}{x^2 + 3} + \frac{12}{3x - 1} - \frac{2}{x} - \frac{2}{3(x + 5)}\ ]\, y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2[\ \frac{5x}{x^2 + 3} + \frac{6}{3x - 1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3(x + 5)}\ ]\frac{(x^2 + 3)^5 (3x - 1)^4}{3x^2 \sqrt[3]{(x + 5)^2}}$$

3.6 Elasticidad de la demanda

En economía se puede medir como un cambio en el precio de un producto afecta a la cantidad demandada; el resultado del cambio se le conoce como elasticidad de la demanda(n); es decir, la respuesta del consumidor al aumentar o disminuir el precio.

En términos económicos, la elasticidad de la demanda es la razón de cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta en un cambio porcentual en el precio.

$$\mathbf{n} \cong \frac{\textbf{cambio porcentual en la cantidad}}{\textbf{cambio porcentual en el precio}}$$

Definición: Si $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ es una función de demanda diferenciable, la elasticidad puntual de la demanda, en $(q\ , p)$ esta dada por:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}}{\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dq}}}$$

La elasticidad se clasifica:

1. **Elástica:** $|\boldsymbol{n}| > \mathbf{1}$
2. **Elasticidad unitaria:** $|\boldsymbol{n}| = \mathbf{1}$
3. **Inelástica:** $|\boldsymbol{n}| < \mathbf{1}$

Elasticidad e ingreso

El ingreso marginal del fabricante se ve afectado por la elasticidad de la demanda; si p es una función de q, el ingreso total está dado por:

$$\mathrm{r} = \mathrm{pq} \qquad \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dq}} = \mathrm{p} + \mathrm{q}\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}$$

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dq}} = \mathrm{p}\left(1 + \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}}\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}\right) \qquad \frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dq}} = \mathbf{p}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$$

Ejemplos: Encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de q o p y determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

1. $\mathrm{p} = \frac{800}{2\mathrm{q}+1} \qquad \mathrm{q} = 24$

   $\mathrm{n} = {}^{\mathrm{p}/\mathrm{q}}\!\big/_{\mathrm{dp}/\mathrm{dq}}$

$$\mathrm{p} = 800(2\mathrm{q}+1)^{-1} \qquad \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} = -800(2\mathrm{q}+1)^{-2}.(2)$$

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} = -1.600(2\mathrm{q}+1)^{-2} \qquad \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}(24) = -1.600(2(24)+1)^{-2} = -0.6664$$

$$\mathrm{q} = 24 \qquad \mathrm{p} = \frac{800}{2(24)+1} = 16.33$$

$$\mathrm{n} = {}^{16.33/24}\!\big/_{-0.6664} = -1.021$$

$n = |-1.021| = 1.021$ " elasticidad elástica"

2. $\mathrm{p} = 100\mathrm{e}^{-\mathrm{q}/200} \qquad \mathrm{q} = 200$

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} = 100\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{q}}{200}}\left(-\frac{1}{200}\right) \qquad \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{q}}{200}}$$

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}(200) = -\frac{1}{2}.\mathrm{e}^{-\frac{200}{200}} = -0.1839$$

$$\mathrm{q} = 200 \qquad \mathrm{p} = 100\mathrm{e}^{-\frac{200}{200}} = 36.79$$

$$\mathrm{n} = {}^{\frac{36.79}{200}}\!\Big/_{-0.1839} = -1.00$$

$\mathrm{n} = |-1.00| = 1.00$ "elasticidad unitaria"

3. La ecuación de demanda para un cierto producto es $\mathbf{q} = \sqrt{\mathbf{2500 - p^2}}$ donde p está en dólares. Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 30$ y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda, si el precio de \$30 baja a \$28.50.

$$q = (2500 - p^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}(2500 - p^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2p)$$

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{(2500 - p^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{dp}{dq} = -\frac{(2500 - p^2)^{\frac{1}{2}}}{p}$$

$$\frac{dp}{dq}(30) = -\frac{(2500 - (30)^2)^{\frac{1}{2}}}{(30)} = -1.3333$$

$$p = 30 \qquad q = (2500 - (30)^2)^{\frac{1}{2}} = 40$$

$$n = {}^{\frac{30}{40}}\!\Big/_{-1.3333} = -0.5625$$

$n = |-0.5625| = 0.5625$ elasticidad inelástica

- Cambio porcentual aproximado de la demanda cuando precio baja de \$30 a \$28.5

  $\text{Cambio porcentual de la demanda} = \left(-\frac{1.5}{30}\right) * 100(-0.5625) = 2.81\%$

  Crece en alrededor del 2.81%

  Nota: Para el cálculo de la derivada de dp/dq, se puede realizar la derivación implícita, como sigue.

  $\mathrm{q} = (2500 - \mathrm{p}^2)^{\frac{1}{2}}$

  $1 = \frac{1}{2}(2500 - \mathrm{p}^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2\mathrm{p})\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} \qquad \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} = -\frac{(2500 - \mathrm{p}^2)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{p}}$

3.7 Trazado de Curvas

El estudio del comportamiento gráfico de las ecuaciones es importante en las matemáticas; utilizado en varias áreas de aplicación práctica. Para la comprensión del tema, se recomienda la revisión de la base teórica expuesta en el texto guía. **Ejemplo1**:

Graficar: $y = 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 10x + 2$

3.7.1 Intersecciones con los ejes.

En el capítulo 3; gráficas en coordenadas rectangulares, estudiamos estos conceptos, si tienes dudas revisa este tratamiento.

a) Intersección con eje x: y = 0

$$0 = 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 10x + 2$$

Por los métodos conocidos no es posible encontrar la intersección con el eje x.

b) Intersección con eje y: x = 0

$$y = 2(0)^3 - \frac{11}{2}(0)^2 - 10(0) + 2 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad (0, 2)$$

3.7.2 Simetría respecto a los ejes y al origen.

a) Simetría respecto al eje x: Sustituimos en la ecuación original y por –y; si la ecuación resultante no cambia existe simetría al eje x (Sx).

$$-y = 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 10x + 2 \qquad \text{No Sx}$$

b1) Simetría respecto al eje y. Sustituimos x por –x.

$$y = 2(-x)^3 - \frac{11}{2}(-x)^2 - 10(-x) + 2 \quad ; \quad y = -2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 10x + 2 \quad ; \quad \text{No Sy}$$

b2) Simetría al origen. Sustituimos simultáneamente x por –x y y por –y.

$$-y = -2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 10x + 2 \qquad \text{No So}$$

3.7.3 Máximos y mínimos relativos.

En este paso es fundamental que sus conocimientos de derivación sean sólidos.

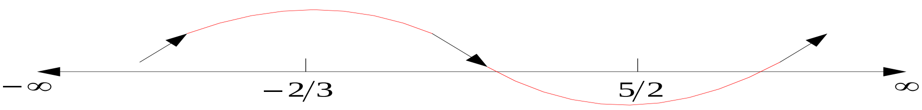
Si, $\mathbf{f'(x) > 0}$ para toda x en (a , b), entonces **f es creciente en (a , b)** y $\mathbf{f'(x) < 0}$, para toda x en (a , b), entonces **f es decreciente en (a , b).**

$$y' = 6x^2 - 11x - 10$$
$$y' = (2x - 5)(3x + 2)$$

Igualamos a cero cada uno de los factores:

$$2x - 5 = 0 \quad ; \quad 3x + 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$$ "puntos críticos"

A estos valores los ubicamos en la recta de los reales y formamos intervalos. Evaluamos los intervalos en la primera derivada.



Intervalos: $(-\infty, -2/3)$; $(-2/3, 5/2)$; $(5/2, \infty)$

$(-\infty, -2/3)$ $\qquad y'(-1) = (-)(-) = (+)$ $\qquad$ creciente

$(-2/3, 5/2)$ $\qquad y'(0) = (-)(+) = (-)$ $\qquad$ decreciente

$(5/2, \infty)$ $\quad y´(3) = (+)(+) = (+)$ $\quad$ Creciente

Del análisis de los intervalos y naturaleza creciente y decreciente de la curva, concluimos que:

$x = -2/3$ $\quad$ Máximo relativo
$x = 5/2$ $\quad$ Mínimo relativo

3.7.4 Concavidad y puntos de inflexión.

Si **f´´(x) > 0** para toda x en (a , b), entonces **f es cóncava hacia arriba** en (a , b). Si **f´´(x) < 0**, para toda x en (a , b), entonces **f es cóncava hacia abajo** en (a , b).

$$y´´ = 12x - 11$$

Encontramos puntos críticos, igualando a 0 la segunda derivada:

$12x - 11 = 0 \quad ; \quad x = 11/12$ " Punto crítico "

$$\begin{array}{ccccc} & \cap & & \cup & \\ -\infty & & 11/12 & & \infty \end{array}$$

Intervalos: $(-\infty, 11/12) ; (11/12, \infty)$

$(-\infty, 11/12)$ $\quad y´´(0) = 12(0) - 11 = (-)$ $\quad$ Cóncava hacia abajo. $\cap$

$(11/12, \infty)$ $\quad y´´(2) = 12(2) - 11 = (+)$ $\quad$ Cóncava hacia arriba. $\cup$

En este paso; determinamos los **puntos de inflexión**, que es el punto donde cambia la concavidad: $x = 11/12$ "Punto de inflexión"

3.7.5 Graficación.

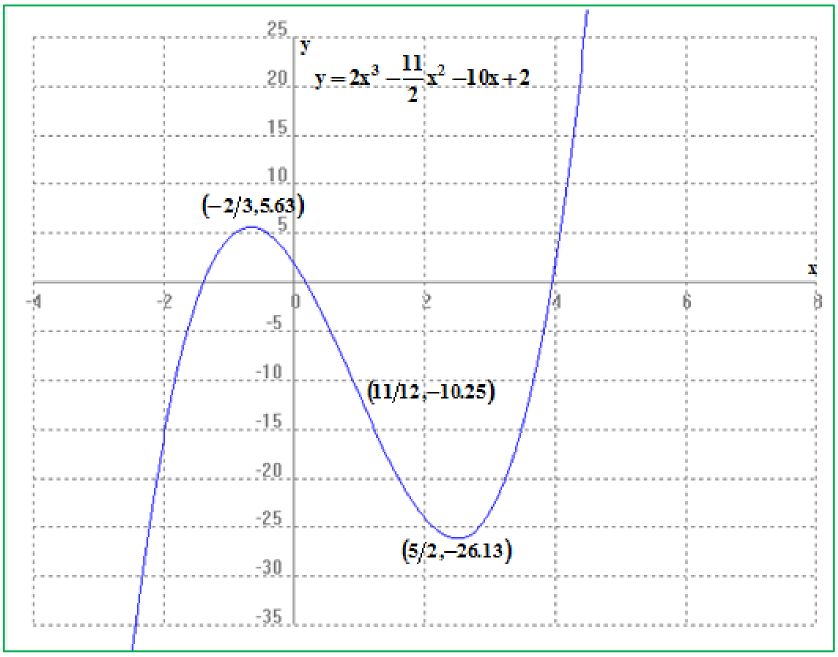
Con la información obtenida graficamos.

a) Ubique las intersecciones: (0 , 2)

b) Utilizando una tabla de valores para ubicar máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión.

x	-2/3	2.50	11/12
y	5,63	-26,13	-10,25

c) Haga un análisis de intervalos, en lo que se refiere a naturaleza creciente o decreciente de la curva y a la concavidad.



Ejemplo 2: Crecimiento de organizaciones para la salud. Con base en los datos de la Group Health Association of America, el número de personas que reciben atención en una Organización para la conservación de la Salud desde el inicio de 1984 hasta 1994 es aproximado mediante la función:

$$f(t) = 0.0514t^3 - 0.853t^2 + 6.8147t + 15.6524 \quad ; \quad (0 < t \leq 11)$$

donde $f(t)$ proporciona el número de personas, en millones, y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1984.

a) Encuentre los máximos y mínimos relativos.
b) Encuentre los puntos de inflexión.
c) ¿En qué momento del intervalo dado aumentaba con más rapidez la cantidad de personas atendidas en una organización de este tipo?

a) Máximos y mínimos relativos

$f'(t) = 0.1542t^2 - 1.706t + 6.8147$ $\qquad f'(t) = 0$

$0.1542t^2 - 1.706t + 6.8147 = 0$

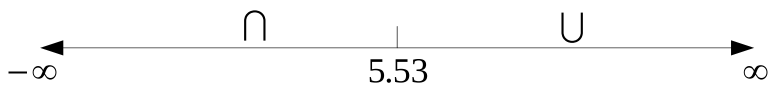
$$t = \frac{-(-1.706) \pm \sqrt{(1.706)^2 - 4(0.1542)(6.8147)}}{2(0.1542)}$$

$$t = \frac{1.706 \pm \sqrt{-1.29}}{0.3084} \qquad \text{"no existen ni máximos ni mínimos relativos"}$$

b) Concavidad.

$f''(t) = 0.3084t - 1.706 \qquad ; \qquad f''(t) = 0$

$$0.3084t - 1.706 = 0 \qquad t = \frac{1.706}{0.3084} = 5.53$$



$f''(0) = 0.3084(0) - 1.706 = -1.706$ $\qquad \cap$ "Cóncava hacia abajo"

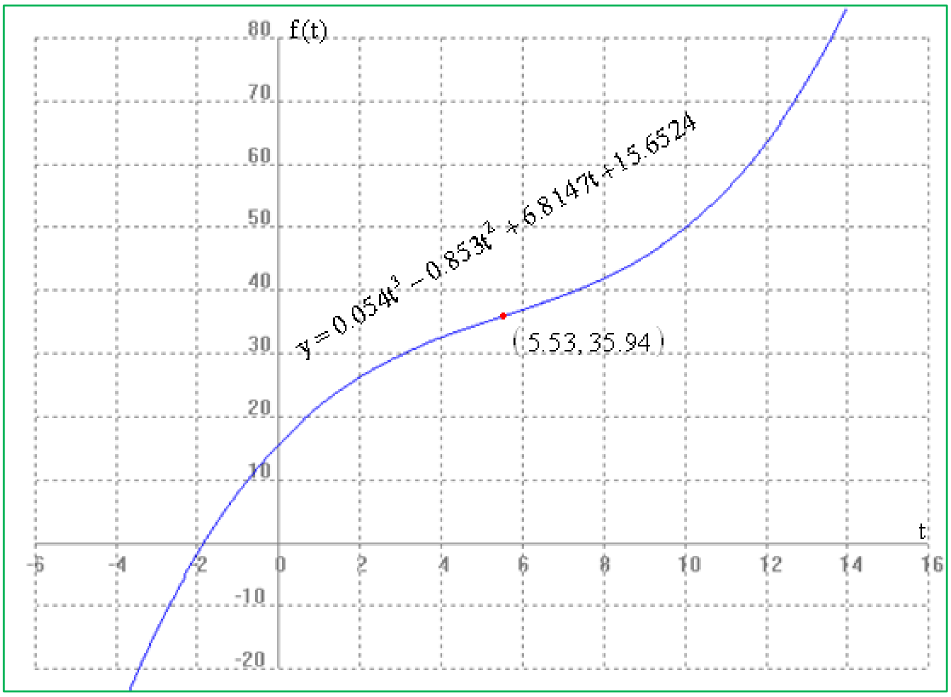
$f''(6) = 0.3084(6) - 1.706 = 0.14$ $\qquad \cup$ "Cóncava hacia arriba"

$t = 5.53$ "Punto de inflexión"

c) $[5.53, 11]$

d) Grafico

x	5,63	-1	0	1	6	7
y	35,94	7,93	15,65	21,67	36,94	39,19



3.8 Aplicación de máximos y mínimos.

En muchas aplicaciones de la vida real hay que hallar el valor máximo o mínimo absoluto de una función dada; por ejemplo, un gerente está interesado en el nivel de producción que rinda la máxima ganancia para una compañía; un agricultor, la cantidad correcta de fertilizante para minimizar el costo de la cosecha.

Para resolver estas preguntas; se debe expresar la cantidad que se desea maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego realizamos las pruebas de la primera y segunda derivada para determinar si es un máximo o un mínimo absoluto.

Estudia los ejercicios resueltos del texto base y las recomendaciones de página 600 para la solución de problemas de aplicación; además de los ejercicios de la guía de estudios.

Es necesario que recuerde y domine algunos conceptos importantes como:

Costo total: $c = C_v + C_F$

Ingreso total: $r = p.q$

Utilidad: $P = r - c$

Costo promedio: $\overline{c} = c / q$

- Utilicemos ejemplos para explicar el método de cálculo.

  1. Utilidad. Los costos totales fijos de la empresa XYZ son de $1.200, los costos combinados de material y mano de obra son de $2 por unidad y la ecuación de demanda es: $p = \frac{100}{\sqrt{q}}$

  ¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad? ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?

a) Ponga atención; se le pide maximizar la utilidad. Debe plantear una ecuación de utilidad.

   P = r – c

$$r = \frac{100}{\sqrt{q}}.q \qquad r = 100.q^{1/2} \qquad c = 2q + 1200$$

b) Realiza la derivada de la función de utilidad e igualamos a cero.

$$P = 100.q^{1/2} - 2q - 1200 \qquad \frac{dP}{dq} = 50.q^{-1/2} - 2$$

$$\frac{dP}{dq} = \frac{50}{\sqrt{q}} - 2 \qquad \frac{50 - 2\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 0 \qquad q = 625$$

c) Para el valor encontrado de q (punto crítico), encontramos la segunda derivada para verificar si se trata de un máximo o un mínimo.

$$\frac{d^2P}{dq^2} = -25q^{-3/2} \qquad \frac{d^2P}{dq^2}(q = 625) = -25(625)^{-3/2} = -0,0016$$

$$\frac{d^2P}{dq^2} < 0 \qquad \text{"Máximo absoluto"}$$

d) Contestemos el resto del problema.

$$p = \frac{100}{\sqrt{25}} = \$4$$

Ejemplo 2. Administración. Un club local está organizando un vuelo a Hawai. El costo del vuelo es de $425 por persona para 75 pasajeros, con un descuento de $5 por pasajero en exceso de 75.

a) Encuentre el número de pasajeros que maximizará el ingreso obtenido del vuelo.

b) Encuentre el ingreso máximo.

a) La pregunta es maximizar el ingreso obtenido por el vuelo.
Ingreso (R) = (número de personas)(costo por persona)

x = número de personas.

$$R = (75 + x)(425 - 5x) \qquad R = -5x^2 + 50x + 31.875$$

b) Encontramos la primera derivada e igualamos a cero.

$$\frac{dR}{dq} = -10x + 50 \qquad -10x + 50 = 0 \qquad x = 5$$

c) Comprobamos con la segunda derivada.

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -5 < 0 \qquad \text{"Máximo absoluto"}$$

d) Respondemos la segunda pregunta.

$$R = (75 + 5)(425 - 5 * 5) = \$33.600$$

3. Utilidad. Un fabricante vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de la demanda para esos sacos es $p = 400 - 50q$, donde p es el precio de venta (en dólares por saco) y q la demanda (en miles de sacos). Si la función de costo marginal del fabricante está dada por $\frac{dc}{dq} = \frac{800}{q+5}$, demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.

Recuerda: La utilidad máxima ocurre cuando el ingreso marginal es igual costo marginal $\frac{dr}{dq} = \frac{dc}{dq}$

a) Encuentra el ingreso y el ingreso marginal.

$$r = pq \quad ; \quad r = (400 - 50q).q \quad ; \quad r = 400q - 50q^2 \quad ; \quad \frac{dr}{dq} = 400 - 100q$$

b) Igualar ingreso marginal con el costo marginal.

$$400 - 100q = \frac{800}{q+5} \qquad ; \qquad 100(4 - q)(q+5) = 800$$

$$q^2 + q - 12 = 0 \quad ; \quad (q+4)(q-3) = 0 \quad ; \quad q = -4 \ , \quad q = 3$$

Deben venderse 3000 sacos para obtener la utilidad máxima.

Ejemplo: Para $y = -5x^3 + x^2 + x - 7$. Determine los intervalos donde la curva crece decrece y la posición de máximos y mínimos relativos.

$$y' = -15x^2 + 2x + 1$$

$y' = -(5x+1)(3x-1) \qquad y' = 0 \qquad x = -\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ "Puntos críticos"

$-\infty \qquad -\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{3} \qquad \infty$

-	(-)	(-)	(-)
$5x+1$	(-)	(+)	(+)
$3x-1$	(-)	(-)	(+)
y'	(-)	(+)	(-)
	Decreciente	Creciente	Decreciente

$x = -\frac{1}{5}$ Mínimo relativo $\qquad x = \frac{1}{3}$ Máximo relativo

Ejemplo: Para $y = x^4 - 16$ .Determine las intersecciones simetría, simetría, donde la curva crece, decrece y la posición de los máximos y mínimos relativos.

(a) Intersección con los ejes.

a1) Intersección con eje x: y = 0

$x^4 - 16 = 0 \qquad (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \qquad (2\,,0) \quad (-2\,,0)$

$x^2 + 4 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{-4}$ No existe a2) Intersección eje y: x = 0

$y = (0)^4 - 16 \qquad y = -16 \qquad (0\,, -16)$

(b) Simetría

b1) Respecto al eje x: y(-y) $\quad -y = x^4 - 16 \quad$ No Sx

b2) Respecto al eje y: x(-x) $\quad y = x^4 - 16 \quad$ Si Sy

b3) Respecto al origen: x(-x); y(-y) $\quad -y = x^4 - 16 \quad$ No So

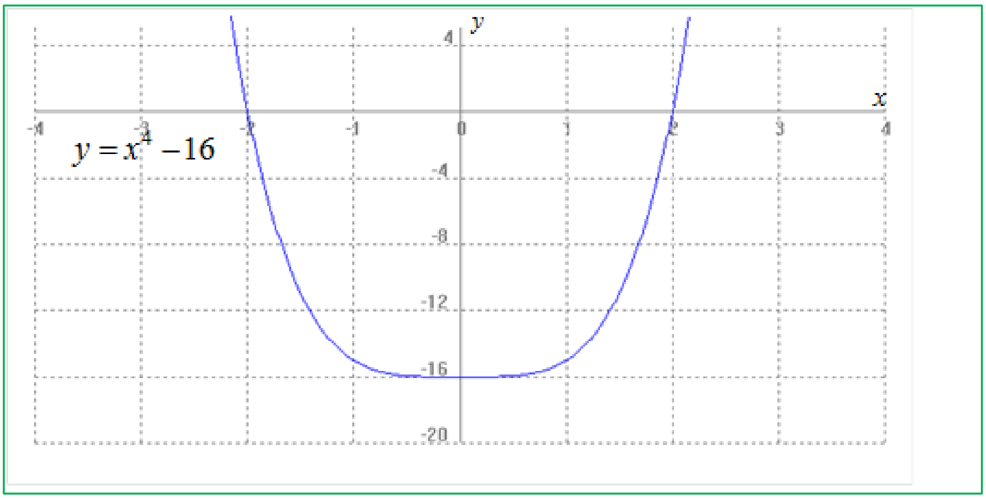
(c) Máximos y mínimos relativos.

$y' = 4x^3 \qquad y' = 0$

$4x^3 = 0 \qquad x = 0 \qquad$ Punto crítico

	$-\infty$ 0	0 ∞
$4x^3$	(-)	(+)
y'	(-)	(+)
	Decreciente	Creciente

$x = 0 \qquad$ Mínimo relativo



Ejemplo: Ingreso. Para el producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por: $r = 240q + 57q^2 - q^3$. Determine la producción para obtener un ingreso máximo.

$$\frac{dr}{dq} = -3q^2 + 114q + 240 \qquad \frac{dr}{dq} = -3(q^2 - 38q - 80\,)$$

$$\frac{dr}{dq} = -3(q-40)(q+2) \qquad \frac{dr}{dq} = 0$$

$q = -2\,, 40$ “Puntos críticos”

$-\infty$ $\quad -2$ $\quad 40$ $\quad \infty$

-3	(-)	(-)	(-)
$q-40$	(-)	(-)	(+)
$q+2$	(-)	(+)	(+)
dr/dq	(-)	(+)	(-)
	Decreciente	Creciente	Decreciente

$q = 40$ “Máximo relativo”

Ejemplo: Para $y = \frac{1}{10}x^5 - 3x^3 + 17x + 43$. Determine la concavidad y los puntos de inflexión.

$$y' = \frac{1}{2}x^4 - 9x^2 + 17 \qquad y'' = 2x^3 - 18x$$

$$y'' = 2x(x^2 - 9) \qquad y'' = 2x(x-3)(x+3)$$

$y'' = 0$ $\quad x = 0, 3, -3$ “Puntos críticos”

$-\infty$ $\quad -3$ $\quad 0$ $\quad 3$ $\quad \infty$

$2x$	(-)	(-)	(+)	(+)
$x-3$	(-)	(-)	(-)	(+)
$x+3$	(-)	(+)	(+)	(+)
y''	(-)	(+)	(-)	(+)
	∩	∪	∩	∪

$x = -3, 0, 3$ "Puntos de inflexión"

Ejemplo: Para $y = 3x^5 - 5x^3$ .Determine las intersecciones simetría, simetría, donde la curva crece, decrece y la posición de los máximos y mínimos relativos. Además determine la concavidad y los puntos de inflexión. Trace la gráfica.

(d) Intersección con los ejes.

a1) Intersección con eje x: y = 0

$3x^5 - 5x^3 = 0$ $\quad$ $x^3(3x^2 - 5) = 0$

$x^3 = 0$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $(0, 0)$

$3x^2 - 5 = 0$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{5/3}$ $\quad$ $\left(\sqrt{5/3}, 0\right)$ $\left(-\sqrt{5/3}, 0\right)$

a2) Intersección eje y: x = 0

$y = 3(0)^5 - 5(0)^3$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $(0,0)$

(e) Simetría

b1) Respecto al eje x: y(-y) $\;-y = 3x^5 - 5x^3$ $\quad$ No Sx

b2) Respecto al eje y: x(-x) $y = -3x^5 + 5x^3$ $\quad$ Si Sy

b3) Respecto al origen: x(-x); y(-y) $\;y = 3x^5 - 5x^3$ $\quad$ Si So

(f) Máximos y mínimos relativos.

$y' = 15x^4 - 15x^2$

$y' = 15x^2(x^2 - 1)$ $\quad$ $y' = 15x^2(x - 1)(x + 1)$

$y' = 0$ $\quad$ $x = 0, 1, -1$ $\quad$ "Puntos críticos"

$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ ∞

$15x^2$	(+)	(+)	(+)	(+)
$x - 1$	(-)	(-)	(-)	(+)
$x + 1$	(-)	(+)	(+)	(+)
y'	(+)	(-)	(-)	(+)
	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

$x = -1$ “Máximo relativo” $x = 1$ “Mínimo relativo”

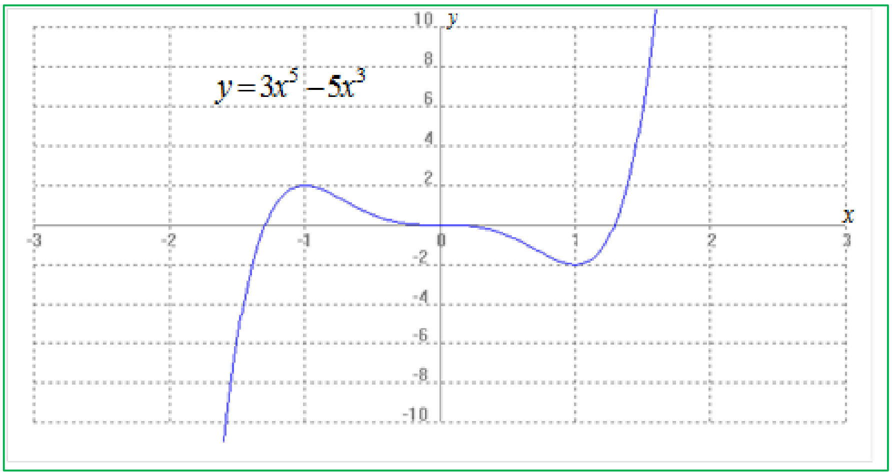
(g) Concavidad y puntos de inflexión

$y'' = 60x^3 - 30x$ $y'' = 30x(2x^2 - 1)$

$y'' = 0$ $x = 0, \pm\sqrt{1/2}$ “Puntos críticos”

	$-\infty$	$-\sqrt{1/2}$	0	$\sqrt{1/2}$	∞
$30x$	(-)	(-)	(+)	(+)
$2x^2 - 1$	(+)	(-)	(-)	(+)
y''	(-)	(+)	(-)	(+)
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$x = 0 , \pm\sqrt{1/2}$ “Puntos de inflexión”



Ejemplo: Para $y = \frac{55}{3}x^3 - x^2 - 21x - 3$. Realice la prueba de la segunda derivada para encontrar máximos o mínimos.

$y' = 55x^2 - 2x - 21$ $y' = (11x - 7)(5x + 3)$

$y' = 0$ $x = 7/11 \, , -3/5$ “Puntos críticos”

$$y'' = 110x - 2$$

$$y''\left(\frac{7}{11}\right) = 110\left(\frac{7}{11}\right) - 2 = 68 > 0 \qquad \text{Mínimo relativo}$$

$$y''\left(-\frac{3}{5}\right) = 110\left(-\frac{3}{5}\right) - 2 = -68 < 0 \qquad \text{Máximo relativo}$$

Ejemplo: Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 20 y cuyo producto de 2 veces uno de los números por el cuadrado del otro sea un máximo.

$$x + y = 20 \qquad \text{Suma de números}$$

$$P = 2xy^2 \qquad \text{Producto}$$

$$x = 20 - y \qquad P = 2(20 - y)y^2 \qquad P = 40y - 2y^3$$

$$\frac{dP}{dy} = 40 - 6y \qquad \frac{dP}{dy} = 0$$

$$40 - 6y = 0 \qquad y = \frac{20}{3} \qquad \text{“Punto crítico”}$$

$$\frac{d^2P}{dy^2} = -6 < 0 \qquad \text{Máximo absoluto}$$

$$x = 20 - \frac{20}{3} \qquad x = \frac{40}{3}$$

11.- **Utilidad.** Para el producto de un monopolista, la función de demanda es $p = 85 - 0.05q$ y la función de costo es $c = 600 + 35q$. ¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿A qué precio ocurre esto y cuál es la utilidad?

$$U = R - C \qquad \text{Utilidad} \qquad R = p * q \qquad \text{Ingreso}$$

$$U = [(85 - 0.05q).q - (600 + 35q)]$$

$$U = 85q - 0.05q^2 - 600 - 35q \qquad U = 50q - 0.05q^2 - 600$$

$$\frac{dU}{dq} = 50 - 0.10q \qquad \frac{dU}{dq} = 0$$

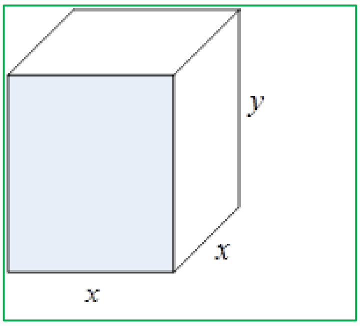
$$50 - 0.10q = 0 \qquad q = 500 \qquad \text{“Punto crítico”}$$

$$\frac{d^2U}{dq^2} = -0.10 \qquad \text{“Máximo absoluto”}$$

$p = 85 - 0.05(500) = \$60$

$U = 50(500) - 0.05(500)^2 - 600 = \$11.900$

Ejemplo: Diseño de un recipiente. Un fabricante de recipiente diseña una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada, que debe tener un volumen de 32 pies^2 .¿Que dimensiones debe tener la caja, si se requiere que se utilice la menor cantidad de material?



$C = x^2 + 4xy$ "Cantidad"

$V = x^2y$ "Volumen" $32 = x^2y$ $y = \frac{32}{x^2}$

$C = x^2 + 4x\left(\frac{32}{x^2}\right)$ $C = x^2 + \frac{128}{x}$ $C = x^2 + 128x^{-1}$

$\frac{dC}{dx} = 2x - 128x^{-2}$ $\frac{dC}{dx} = 2x - \frac{128}{x^2}$ $\frac{dC}{dx} = 0$

$2x - \frac{128}{x^2} = 0$ $2x = \frac{128}{x^2}$ $2x^3 = 128$

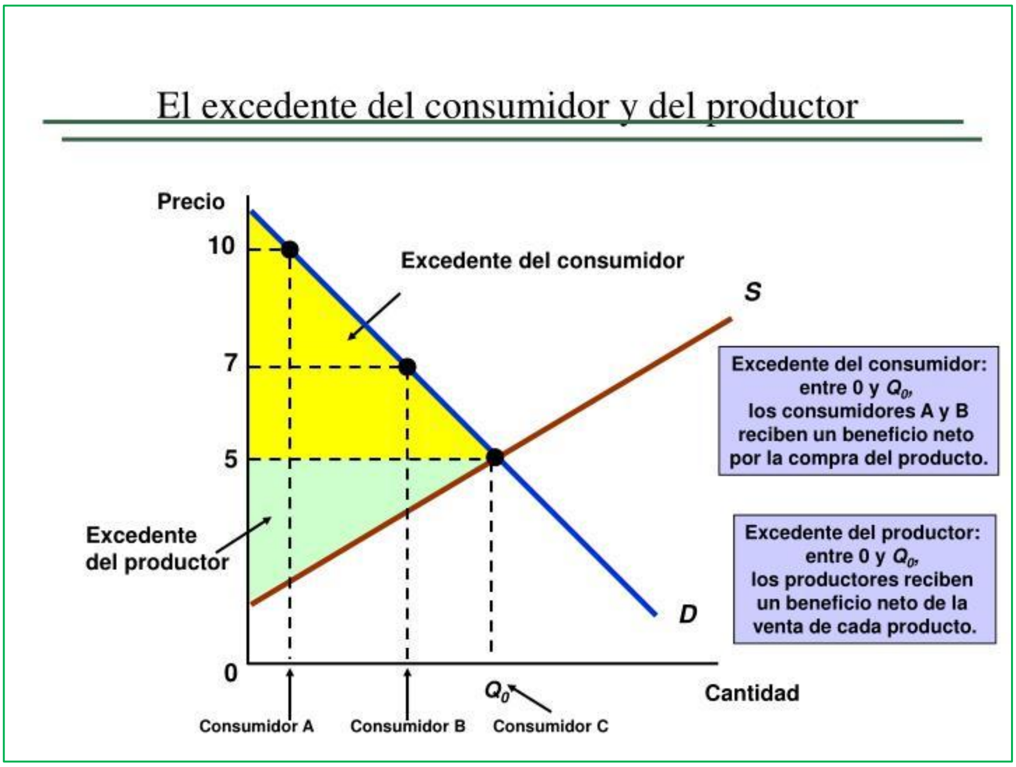
$x = \sqrt[3]{64}$ $x = 4$ "Punto crítico"

$\frac{dC}{dx} = 2 + 256x^{-3}$ $\frac{dC}{dx} = 2 + \frac{256}{x^3}$

$\frac{dC}{dx} = 2 + \frac{256}{(4)^3} = 6 > 0$ "Máximo relativo"

$y = \frac{32}{(4)^2} = 2$ Dimensiones: 4x4x2

UNIDAD IV: INTEGRACIÓN



4.1 Diferenciales

Definición.- Sea $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ una función diferenciable en $\mathbf{x}$ y sea $\Delta\mathbf{x}$ un cambio en $\mathbf{x}$, donde $\Delta\mathbf{x}$ puede ser cualquier número real. Entonces, la diferencial de **y**, que se denota por **dy** o **d(f(x))** está dado por:

$$\mathbf{dy} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}).\Delta\mathbf{x}$$

Ejemplo 1**:** Encuentre el diferencial dy para $y = f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x + 2$ cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.003$

$dy = f'(x).\Delta x$

$dy = (6x^2 + 12x - 3)\Delta x$

$dy = (6(1)^2 + 12(1) - 3)(0.003) = 0.0045$

Si $\mathbf{y} = \mathbf{x}$; y aplicamos diferenciales tenemos:

$dy = dx \quad \rightarrow \quad dx = f'(x)\Delta x \quad \rightarrow \quad dx = 1\Delta x \quad \rightarrow \quad \mathbf{dx} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$

De acuerdo a esta conclusión tenemos que: $\mathbf{dy = f'(x)dx}$ que es la expresión del diferencial que utilizaremos de aquí en adelante.

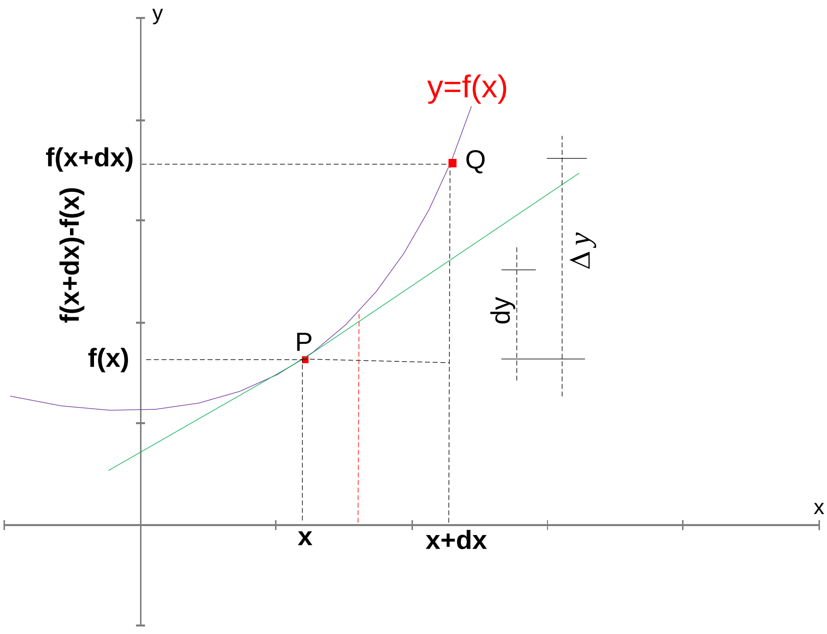
Ejemplo 2: Si $y = f(x) = 2\sqrt[3]{x^2}$. Encuentre el diferencial dy.

$dy = f'(x)dx$ $\qquad\qquad y = 2x^{\frac{2}{3}}$

$dy = \frac{4}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}dx$ $\qquad\qquad dy = \frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}dx$

$$dy = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}\, dx$$

Por medio de diferenciales podemos estimar el valor de una función, para lo cual hagamos el siguiente análisis.



Si por el punto $P(x\,,\ f(x))$, pasa una línea tangente y damos un incremento a x, dx; tendremos el punto $Q(x + dx, f(x + dx)$, entonces la variación en y está dado por:$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$.

Pero si $dx \to 0$, entonces Δy y dy son prácticamente iguales, por lo que:

$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$; si $dx \to 0$ $\Delta y \approx dy$

$dy \approx f(x + dx) - f(x)$; $f(x + dx) \approx f(x) + dy$

$\mathbf{f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx}$ "Fórmula para estimar el valor de una función"

Ejemplo3: Un centro de salud del gobierno examinó las historias clínicas de un grupo de individuos que fueron hospitalizados por una enfermedad particular. Se encontró que la proporción total P que fue dada de alta al final de t días está dada por:

$$\mathbf{P = P(t) = 1 - \left(\frac{300}{300+t}\right)^3}$$

Use diferenciales para estimar el cambio de $t = 300$ a $t = 305$

$dP = P'(t)dt$ $\quad t = 300$ $\quad \Delta t = dt = 5$

$$dP = -3\left(\frac{300}{300 + t}\right)^2\left(\frac{0 - 300(1)}{(300 + t)^2}\right)dt$$

$$dP = 3\frac{300^3}{(300 + t)^4}\, dt$$

$$dP = 3\frac{300^3}{(300 + 300)^4}(5) = 0.0031$$

Determine el cambio verdadero de P (Δp)

$\Delta P = P(305) - P(300)$

$$\Delta P = \left[1 - \left(\frac{300}{300 + 305}\right)^3\right] - \left[1 - \left(\frac{300}{300 + 300}\right)^3\right] = 0.00307$$

Conclusión: $\Delta P \approx dP$

Ejemplo 4: Use diferenciales para estimar el valor de $\sqrt[4]{16.3}$

Asumimos como $y = f(x) = \sqrt[4]{x}$

$f(x + dx) \approx f(x) + dy$ $\quad f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx$

$y = f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ $\quad x = 16$ $\quad dx = 0.3$

$$f(x+dx) \approx f(x) + \frac{1}{4}\, x^{-\frac{3}{4}} dx$$

$$f(16+0.3) \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}}(0.3) \approx 2{,}0009375$$

Ejemplo 5: La ecuación de demanda para un producto es $p = \frac{10}{\sqrt{q}}$. Por medio de diferenciales estime el precio cuando se demandan 24 unidades.

$$f(q+dq) = f(q) + f'(q)dq$$

$$p = 10q^{-\frac{1}{2}} \qquad q = 25 \qquad dq = -1$$

$$f(q+dq) \approx f(q) - 5q^{-\frac{3}{2}} dq$$

$$f(25-1) \approx \frac{10}{\sqrt{25}} - 5(25)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$f(24) \approx 2 + 0.0425 = 2.0425$$

4.2 Integral indefinida.

En los temas anteriores ha estudiado la derivación, ahora vamos a tratar el proceso inverso que se denomina integración; esto es, dada una derivada se debe encontrar la función original.

DEFINICIÓN: Una antiderivada de una función f es una función F tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

$\frac{dF}{dx} = f(x)$; $\mathbf{dF = f(x)dx}$ **"Notación diferencial"**

- Cuando conocemos la derivada de una función, el proceso de encontrar la función original recibe el nombre de **antidiferenciación.** Por ejemplo, si la derivada de una función es $3x^2$, sabemos que la función podría ser $f(x) = x^3$ porque $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$.

  Pero, la función también podría ser $f(x) = x^3 - 10$ porque $\frac{d(x^3-10)}{dx} = 3x^2$.

Es evidente que cualquier función de la forma $f(x)=x^3+C$, donde C es una constante arbitraria, tendrá $f'(x)=3x^2$ como su derivada, porque la derivada de cualquier constante es cero. Así $3x^2$, tendrá un número infinito de antiderivadas.

- **Por lo que, dos antiderivadas de una función solo difieren en una constante**.

Por consiguiente, como $\mathbf{x^3+C}$ describe todas las antiderivadas de $3x^2$ podemos escribir:

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

Para indicar la antiderivada general de la función $f(x)=3x^2$. La expresión se lee como: "la integral de $3x^2$ respecto a x". En este caso $3x^2$ se llama integrando. El signo de integral, $\int$, indica el proceso de integración y el dx indica que se toma la integral respecto a x.

La función resultante del proceso de integración se conoce como **integral indefinida**. Podemos expresar la integral indefinida de una función f(x); como:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ si y solo si $\mathbf{F'(x) = f(x)}$

4.2.1 Reglas de integración

Como en el caso de derivación, en la integración es necesario que conozca y domine sus reglas.

1. $\int \mathrm{kdx} = kx + C$

2. $\int \mathrm{kx}^{\mathrm{n}} = k\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{C}$

4. $\int \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = \ln|x| + C$

5. $\int \mathrm{k\ f(x)dx} = \mathrm{k}\int \mathrm{f(x)dx}$

6. $\int (\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)})dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Ejemplos.

1. $\int 5\mathrm{dx} = 5\mathrm{x} + \mathrm{C}$

2. $\int 7\mathrm{x}^5\mathrm{dx} = 7\dfrac{\mathrm{x}^{5+1}}{5+1} + \mathrm{C} = \dfrac{7}{6}\mathrm{x}^6 + \mathrm{C}$

3. $\int (\, 9\mathrm{x}^3 + \dfrac{8\sqrt[4]{\mathrm{x}^3}}{5} + \dfrac{3}{\sqrt[5]{\mathrm{x}^2}} + 9\mathrm{x} - 100)\ \mathrm{dx}$

$= \int (9\mathrm{x}^3 + \dfrac{8}{5}\mathrm{x}^{3/4} + 3\mathrm{x}^{-2/5} + 9\mathrm{x} - 100)\mathrm{dx}$; aplique las reglas.

$= 9\dfrac{\mathrm{x}^4}{4} + \dfrac{8}{5}.\dfrac{\mathrm{x}^{7/4}}{7/4} + 3\dfrac{\mathrm{x}^{3/5}}{3/5} + 9\dfrac{\mathrm{x}^2}{2} - 100\mathrm{x} + \mathrm{C}$

$= \dfrac{9}{4}\mathrm{x}^4 + \dfrac{32}{35}\mathrm{x}^{7/4} + 5\mathrm{x}^{3/5} + \dfrac{9}{2}\mathrm{x}^2 - 100\mathrm{x} + \mathrm{C}$

4. $\int \frac{(2t+1)^2}{3t}\mathrm{dt}$

$= \int \dfrac{4t^2 + 4t + 1}{3t}\mathrm{dt} \qquad = \int \left(\dfrac{4t}{3} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3t}\right)\mathrm{dt}$

$= \dfrac{4}{3}.\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{4}{3}t + \dfrac{1}{3}\ \ln|t| + C$

$= \dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{4}{3}t + \dfrac{1}{3}\ \ln|t| + C$

4.2.2 Integración por el método de sustitución

- Cuando no es posible aplicar directamente las reglas de integración, como en todo proceso matemático, se realiza una sustitución. Ejemplos:

1. $\int 2x.(3x^2+5)^6 dx$

Como no puede aplicar directamente las reglas de integración; recurra a la sustitución.

$u = 3x^2+5 \qquad = 2\int u^6(\frac{du}{6}) = \frac{2}{6}.\frac{u^7}{7} + C$

$du = 6xdx \qquad = \frac{1}{21}(3x^2+5)^7 + C$

$xdx = \frac{du}{6}$

Proceso: Determine $u = 3x^2+5$, calcule el diferencial $du = 6xdx$. Sustituya: es preferible que las constantes salgan de la integral $2\int u^6.xdx$, le queda por sustituir xdx, que lo encuentra en el diferencial, despeja $xdx = \frac{du}{6}$, tiene $2\int u^6(\frac{du}{6})$ Con las reglas conocidas ya puede integrar.

2. $\int \frac{3x^2-1}{2x^3-2x+5} dx$

$u = 2x^3-2x+5 \qquad = \int \frac{(du/2)}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$

$du = (6x^2-2)dx \qquad = \ln|2x^3-2x+5| + C$

$du = 2(3x^2-1)dx$

$(3x^2 - 1)\,dx = \frac{du}{2}$

3. $\int \frac{x^2-4x}{\sqrt{x^3-6x^2+2}}dx$

Transforma el radical en exponente $\int \frac{x^2-4x}{(x^3-6x^2+2)^{1/2}}dx$

$\int (x^2-4x)(x^3-6x^2+2)^{-1/2}dx$

$u = x^3-6x^2+2$ $\qquad = \int u^{-1/2}(\frac{du}{3}) = \frac{1}{3}.\frac{u^{1/2}}{1/2}+C$

$du = (3x^2-12x)dx$ $\qquad = \frac{2}{3}(x^3-6x^2+2)^{1/2}+C$

$du = 3(x^2-4x)dx$

$(x^2-4x)dx = \frac{du}{3}$

4.2.3 Integración por partes.

Muchas integrales no pueden encontrarse por los métodos analizados, sin embargo, hay maneras de cambiar ciertas integrales a formas más fáciles de integrar, como es el caso de la integración por partes. La fórmula de integración partes es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Cuando use la fórmula de integración por partes, algunas veces la "mejor selección" de **u** y **dv** puede no ser obvia. En algunos casos una selección puede ser tan buena como la otra; en otros, sólo una selección puede ser adecuada. La habilidad para ser una buena selección si existe se adquiere con la práctica y, desde luego, con el procedimiento de ensayo y error. Ejemplos.

Como una ayuda para la integración considera las formulas siguientes:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x \pm a} = \ln|\,x \pm a\,| \qquad \int e^{x \pm a} dx = e^{x \pm a} + C$$

$$\int \frac{dx}{bx \pm a} = \frac{1}{b}\ln|\,bx \pm a\,| \qquad \int e^{bx \pm a} dx = \frac{1}{b} e^{bx \pm a} + C$$

1. $\int y^3 \ln y.dy$

$u = \ln y \qquad dv = y^3 dy$

$du = \dfrac{dy}{y} \qquad v = \int y^3 dy = \dfrac{y^4}{4}$

$$= \frac{y^4}{4}.\ln y - \int \frac{y^4}{4}.\frac{dy}{y} = \frac{1}{4}y^4.\ln y - \frac{1}{16}y^4 + C = \frac{1}{4}y^4(\ln y - \frac{1}{4}) + C$$

2. $\int 4xe^{2x} dx$

$u = 4x \qquad dv = e^{2x}.dx$

$du = 4dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

$$= 4x.\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}.4dx = 2x.e^{2x} - \frac{4}{2}.\frac{1}{2}.e^{2x} + C$$

$$= 2x.e^{2x} - e^{2x} + C = e^{2x}(2x - 1) + C$$

4.3. La integral definida.

Teorema fundamental del cálculo integral. Si f es continua en el intervalo $[\,a\,,\,b\,]$ y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

1. $\int_0^1 2x^2(x^3 - 1)^3 dx$

$u = x^3 - 1 \qquad = 2\int u^3 (\frac{du}{3}) = \frac{2}{3}\frac{u^4}{4} = \frac{1}{6}u^4$

$du = 3x^2 dx \qquad = \frac{1}{6}(x^3 - 1)^4$

$x^2 dx = \frac{du}{3}$

$$= \left[\frac{1}{6}(1^3 - 1)^4\right] - \left[\frac{1}{6}(0^3 - 1)^4\right] = -\frac{1}{6}$$

2. **Demografía.** Para cierta población, suponga que s es una función tal que s(x) es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama función de la tabla de vida. Bajo condiciones apropiadas, la integral $\int_x^{x+n} s(t)dt$ da el número esperado de gente en la población que tiene entre exactamente x y x + n años, inclusive. Si $s(x) = 10000\sqrt{100 - x}$, determine el número de personas que tienen exactamente entre 36 y 64 años, inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano, ya que una respuesta fraccionaria no tiene sentido.

$$\int_{36}^{64} 10.000\sqrt{100 - x}\, dx$$

$u = 100 - x \qquad = 10000\int u^{1/2}(-du) = -10000\frac{u^{3/2}}{3/2}$

$du = -dx \qquad = -\frac{20000}{3}(100 - x)^{3/2}$

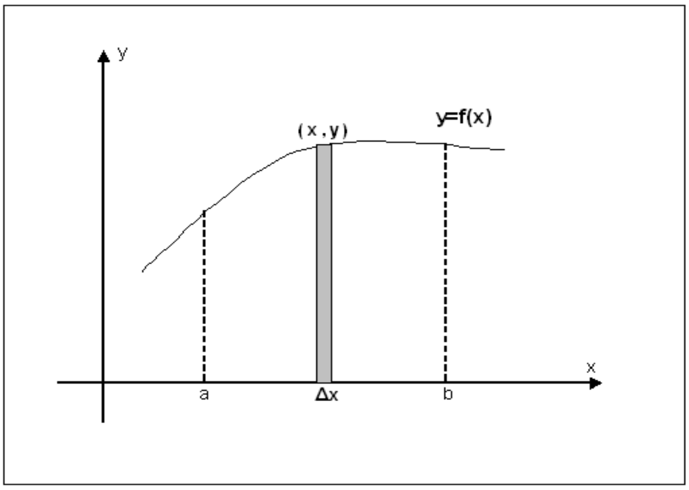
$dx = -du$

$$= \left[-\frac{20000}{3}(100 - 64)^{3/2}\right] - \left[-\frac{20000}{3}(100 - 36)^{3/2}\right]$$

$$= -1440000 + 3413333{,}33 = 1973333$$

4.3.1 Cálculo de áreas

Una de las aplicaciones del teorema fundamental del cálculo integral, es encontrar el área bajo una curva. Para determinar áreas es conveniente hacer un esbozo de la región implicada.



Para encontrar el área en el intervalo $[a, b]$ bajo la curva, se debe realizar la sumatoria de todas las áreas de los rectángulos o sea $\sum_{a}^{b} \Delta x.f(x)$; si la sumatoria llevamos al límite entonces tenemos: $\int_a^b f(x)dx$.

En general para el área bajo una curva tendríamos: $\int_a^b (y_{sup} - y_{inf})dx$. En palabras, cuando trabajamos con elementos verticales Δx, tenemos la diferencia entre la curva superior y la curva inferior. Ejemplos.

1. Encontrar el área limitada por las curvas: $y = 9 - x^2$ y $y = 0$

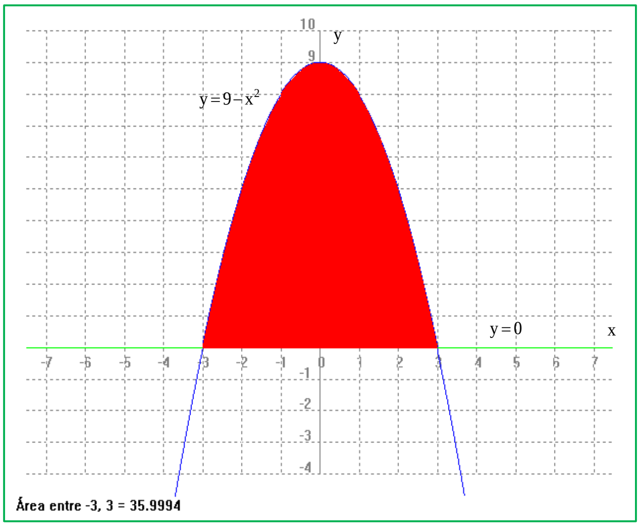
   Utilice la fórmula: $A = \int_a^b (y_{sup} - y_{inf})dx$

   Encuentre los límites **a** y **b,** o sea la intersección de las 2 curvas; que los obtiene igualando las ecuaciones.

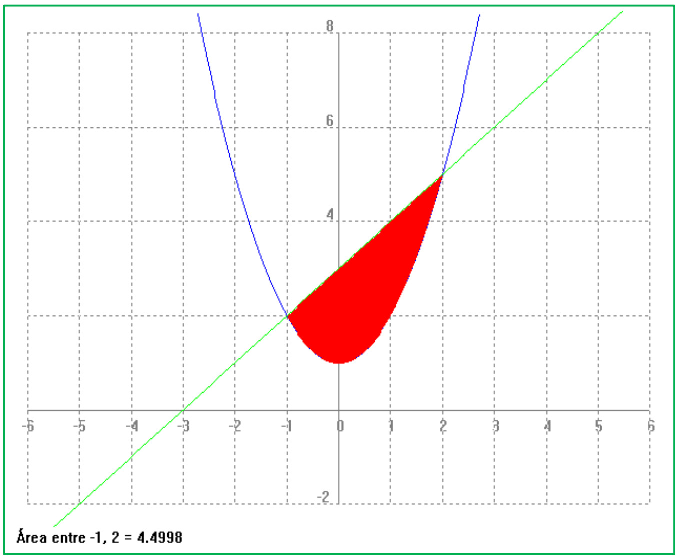
   $9 - x^2 = 0 \quad ; \quad x = \pm 3$

$$A = \int_{-3}^{3} \left[(9 - x^2) - (0) \right] dx$$

$$A = 9x - \frac{x^3}{3} = \left[(9(3) - \frac{(3)^3}{3}) - (9(-3) - \frac{(-3)^3}{3} \right] = 36\, u^2$$



2. Encuentre el área limitada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$



$$x^2 + 1 = x + 3 \quad ; \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad ; \quad (x - 2)(x + 1) = 0 \quad ; \quad x = 2 \quad , \quad x = -1$$

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(x+3)-(x^2+1)\right]dx = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)dx$$

$$A = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x = \left[\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} + 2(2)\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)\right) \right]$$

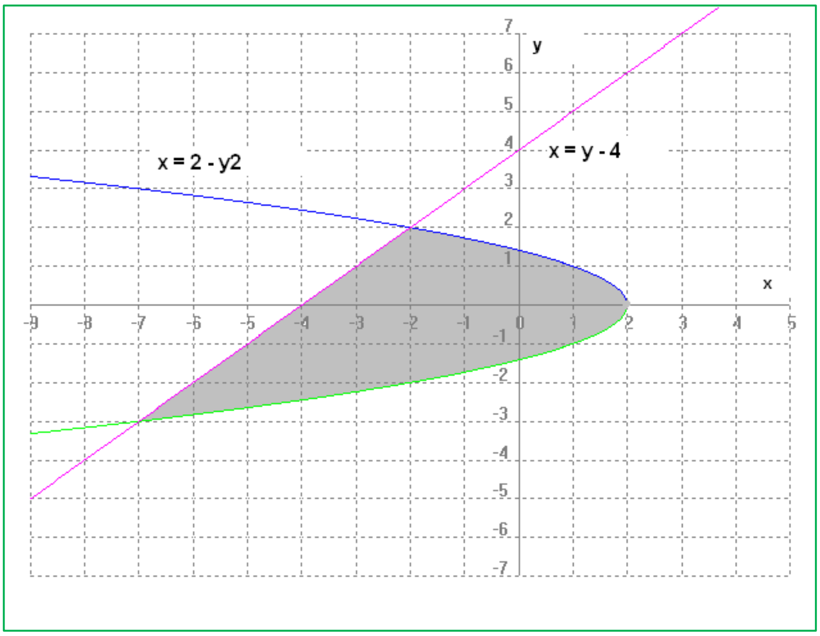
$$A = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{9}{2} u^2$$

- Cuando y no está definida como en el caso de la ecuación $x + y^2 = 5$; para facilitar el cálculo de áreas es conveniente utilizar elementos horizontales Δy, entonces:

$$A = \int_{y1}^{y2} (xder - xizq)\, dy$$

Ejemplo: Encontrar el área limitada por las curvas $y^2 = 2 - x$ y $y = x + 4$.

Expresa las ecuaciones de $x = f(y)$; $x = 2 - y^2$; $x = y - 4$



$y - 4 = 2 - y^2$; $y^2 + y - 6 = 0$; $(y+3)(y-2) = 0$; $y = -3$, $y = 2$

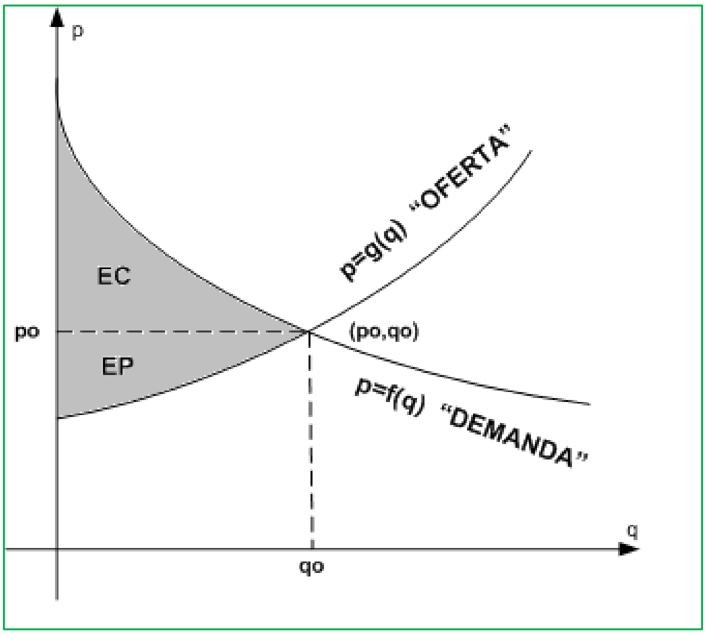
$$A = \int_{-3}^{2} \left[\left(2 - y^2\right) - \left(y - 4\right)\right]dy = \int_{-3}^{2} \left(6 - y - y^2\right)dy$$

$$A = 6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} = \left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$A = 12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - 9 = \frac{125}{6}\, u^2$$

4.3.2 Excedente de consumidores y de productores

El cálculo de áreas tiene su aplicación en la economía. Sea $p = f(g)$ una curva de demanda y $p = g(q)$ una curva de oferta. El punto (q_0, p_0) en las que las curvas se intersecan se llama punto de equilibrio. Donde p_0 es el precio por unidad al que los consumidores comprarán la misma cantidad q_0 de un producto que los productores desean vender a ese precio.



El **área EC es el excedente de consumidores** y representa la ganancia total de los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio de equilibrio.

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq$$

El área EP es el excedente de productores y representa el beneficio de los productores ya que están dispuestos a suministrar el producto a precios menores que p_o.

$$EP = \int_{0}^{q_o} [p_o - g(q)] dq$$

Ejemplo: La ecuación de demanda para un producto es: $(p + 20)(q + 10) = 800$ y la ecuación de oferta es: $q - 2p + 30 = 0$

a. Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 20$ y $q = 10$

$$p = f(q) = \frac{800}{q+10} - 20 \quad \text{“demanda”} \qquad p = g(q) = \frac{q+30}{2} \quad \text{“oferta”}$$

$$\frac{800}{q+10} - 20 = \frac{q+30}{2} \quad ; \quad 2[800 - 20(q+10)] = (q+30)(q+10)$$

$$q^2 + 80q - 900 = 0 \quad ; \quad (q+90)(q-10) = 0 \quad ; \quad q = 10 \quad , \quad q = -90$$

$$p = \frac{10+30}{2} \quad ; \quad p = 20$$

b. Determine el excedente de los consumidores y productores bajo el equilibrio de mercado.

$$EC = \int_{0}^{10} \left[\left(\frac{800}{q+10} - 20 \right) - 20 \right] dq = \int_{0}^{10} \left(\frac{800}{q+10} - 40 \right) dq$$

$$EC = (800 \ln q - 40q) \Big|_{0}^{10} = [800 \ln(20) - 40(10) - 800 \ln(10)] = 154.52$$

$$EP = \int_{0}^{10} \left[20 - \frac{q+30}{2} \right] dq = \left[20q - \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{2} + 30q \right) \right]_{0}^{10}$$

$$EP = \left[5q - \frac{q^2}{4} \right]_{0}^{10} = 5(10) - \frac{10^2}{4} = 25$$

Bibliografía

Bibliografía Principal

HAEUSSLER, ERNEST F, JR, Matemáticas para la Administración y la Economía, Décimo segunda Edición. 2008. Pearson Educación de México S.A.

Bibliografía Complementaria

Margaret L. LIAL y Thomas W: HUNGERFORD “Matemáticas para Administración y Economía en las Ciencias Sociales, Naturales y de Administración”, séptima edición, México 2000.

Jagdish C. Arya Y Robin W. Lardner “Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía”, cuarta edición, México 2000.

Tan, S. T, Matemáticas para la Administración y la Economía, Segunda Edición, 2001.- El Caribe.-Editorial Thompson.

González O Mancill, Álgebra Elemental Tomo I y Tomo II. Editorial Kapeluz. Buenos Aires

Netgrafía

HAEUSSLER, ERNEST F, JR, Matemáticas para la Administración y la Economía.

http://elblogerperu.blogspot.com/2010/03/matematicas-para-la-administracion-y-la.html

Matemática para Administración y Economía

http://books.google.com.ec/books/about/Matem%C3%A1ticas_para_Administraci%C3%B3n_Y_Econ.html?id=TABzj5AZ0JAC&redir_esc=y