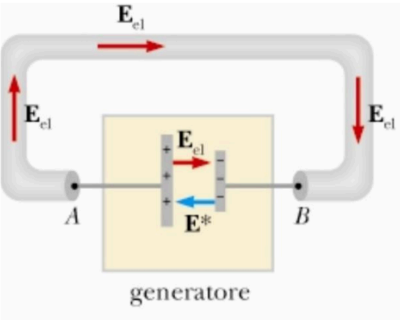
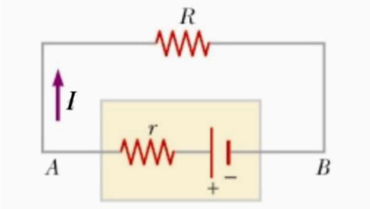
Lezione_11_fis

5.7. Forza elettromotrice

Consideriamo un modello semplificato di un generatore. Dentro di esso sono accumulate le cariche $+q$ e $-q$. Nel conduttore vale la legge di Ohm, quindi $V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ri$, che per un circuito chiuso diventa $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_T i$.





Noto però che il primo membro dell'equazione coincide con la definizione di forza elettromotrice, allora affermo che il campo elettrico totale è formato da un campo elettrostatico $\vec{E}_{el}$ e un *campo elettromotore* $\vec{E}^*$, che è l'origine della corrente i.
La circuitazione *non è nulla* e vale

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = Ri$$

Il generatore è anche caratterizzato da una proprio resistenza interna r:

$$\mathcal{E}(R+r)i \quad \mathcal{E} - ri = Ri$$

5.8. Potenza dissipata da una resistenza

Consideriamo una carica dq che sta attraversando una resistenza la cui differenza di potenziale vale V. Il lavoro compiuto dal campo elettrico è

$$dW = V dq = Vi\, dt$$

quindi la *potenza elettrica* spesa è

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi$$

se vale la legge di Ohm allora $P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$.
Se la corrente è costante nel tempo, il lavoro per un dato tempo t vale $W = Pt$.

5.8.1 Effetto Joule

Tornando al modello di Drude, gli elettroni cedono energia al reticolo dopo ogni urto. Per questo in presenza di un campo elettrico hanno una velocità di deriva costante e non seguono un moto uniformemente accelerato.
Il lavoro svolto per vincere la resistenza del reticolo viene assorbito dal conduttore, la cui temperatura allora aumenta. Questo effetto viene chiamato *effetto Joule*.

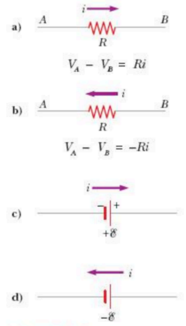
> **Osservazione**
>
> Se il conduttore è posto in isolamento termico, allora esso si scalda fino alla fusione del metallo. Se invece è in contatto termico con l'ambiente, si scalda fino a raggiungere una temperatura di equilibrio (se questa è inferiore a quella di fusione).

5.9. Leggi di Kirchoff

> La *prima legge di Kirchoff* o la *legge dei nodi* dice che la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla
>
> $$\sum_k i_k = 0$$

> La *seconda legge di Kirchoff* o *legge delle maglie* stabilisce che la somma algebrica delle forze elettromotrici presenti nei rami della maglia è eguale alla somma algebrica delle differenze di potenziale ai capi dei resistori R_k situati nei rami della maglia (nella somma sono compresi anche i contributi delle resistenze interne dei generatori)
>
> $$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_k R_k i_k$$

Per la convenzione dei segni si versa (arbitrariamente) il verso della maglia. Se la corrente i_k è concorde avrà segno positivo, altrimenti negativo. Se la sorgente di forza elettromotrice viene attraversata dal polo negativo al polo positivo allora avrà segno positivo, altrimenti negativo.

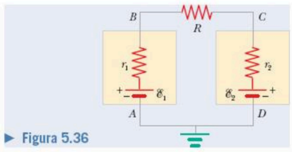


▲ Figura 5.34 Regole sui segni delle grandezze che compaiono nella legge delle maglie.

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

5.10. Esempio 5.9

Nel circuito a una maglia $R = 50\Omega$, $\mathcal{E}_1 = 50V$, $r_1 = 30\Omega$. **Calcolare l'intensità della corrente i.**



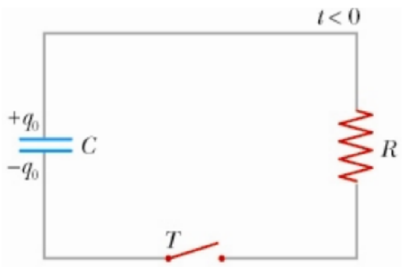
► Figura 5.36

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

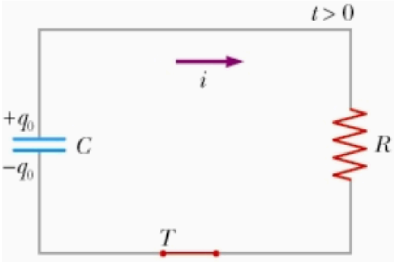
5.11. Carica e scarica di un condensatore in un circuito RC

5.11.1. Scarica di un condensatore

Consideriamo un condensatore C con carica iniziale q_0, una resistenza R e un interruttore inizialmente aperto. La differenza di potenziale ai capi del condensatore vale $V_0 = \frac{q_0}{C}$, mentre l'energia immagazzinata è $U = \frac{q_0^2}{2C}$.



Al momento $t = 0$ chiudiamo l'interruttore, quindi il circuito. Le cariche positive si muovono dall'armatura a potenziale maggiore a quella di potenziale minore, dando luogo a una corrente $-i = \frac{dq}{dt}$ sul resistore, il cui segno meno è dovuto dal fatto che diminuisce nel tempo.



In un istante generico, la differenza di potenziale ai capi del condensatore V_C è uguale a quella ai capi del resistore V_R, valgono allora le relazioni:

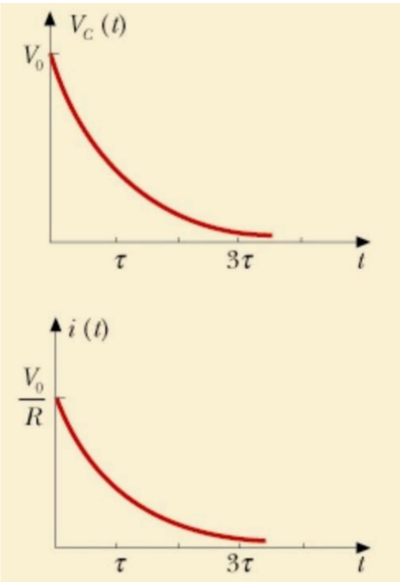
$V_C = \frac{q}{C} = V_R = Ri \implies i = \frac{q}{RC}$

$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC} \implies \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \implies \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \implies \ln\frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC} = q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$,

con $\tau = RC$, una costante di tempo detta *costante caratteristica* del circuito.

Ho quindi le formule

> $$V(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0 e^{-t/\tau} \quad i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau} \quad q(t) = q_0 e^{-t/\tau} \quad P(t) = Ri^2 = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$

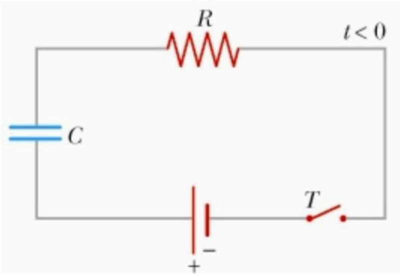


Nella scarica viene dissipata energia pari a $U = \frac{q_0^2}{2C}$.

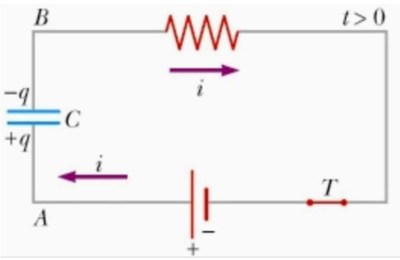
> **Osservazione**
>
> Dal valore iniziale della differenza di potenziale nel circuito, dopo un tempo τ il valore sarà 36.8%, dopo 2τ 13.5%, mentre dopo 3τ sarà 0.5%.
> Si considera che dopo un tempo 5τ il valore sia nullo (l'errore di approssimazione è trascurabile).

5.11.2. Carica di un condensatore

Consideriamo un condensatore C inizialmente scarico, una resistenza R, un generatore di forza elettromagnetica $\mathcal{E}$ e un interruttore inizialmente aperto.



Al momento $t=0$ chiudiamo l'interruttore, quindi il circuito. Il generatore inizia a prelevare cariche dai conduttori connessi al polo negativo e a portarle al polo positivo di modo che sulle armature del condensatore compaiono le cariche $+q$ e $-q$, fino a quando la carica del condensatore raggiunge il valore massimo $q_0 = C\mathcal{E}$, a cui corrisponde la differenza di potenziale $V_A - V_B$ tra le armature, pari alla forza elettromotrice $\mathcal{E}$ del generatore.



In un istante di tempo generico valgono le formule

$$\mathcal{E} = V_R(t) + V_C(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

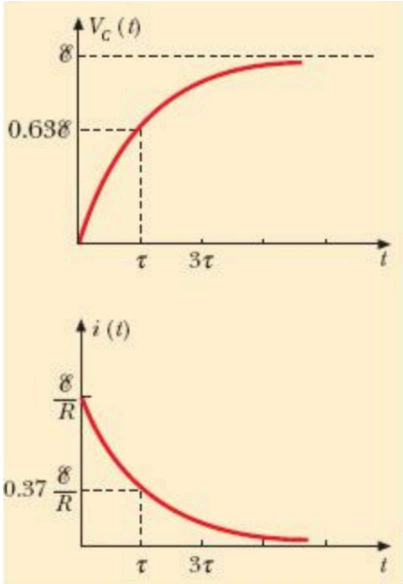
Supponendo che la resistenza interna del generatore sia trascurabile, trovo che

$R\frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \implies \frac{dq}{q-C\mathcal{E}} = \frac{dt}{RC} \implies \int_0^q \frac{dq}{q-C\mathcal{E}} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \implies \ln\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = -\frac{t}{RC}$

Quindi otteniamo le formule

$$q(t) = C\mathcal{E}(1-e^{-t/\tau}) \;\; V_C(t) = \mathcal{E}(e - e^{-t/\tau}) \;\; i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau} \;\; V_R(t) = \mathcal{E}e^{-t/\tau}$$

Con $\tau = RC$, detto *tempo caratteristico* del circuito.



Osservazione

La differenza di potenziale tra le armature del condensatore al tempo $t = 0$ è nulla, mentre la corrente è massima ($\frac{\mathcal{E}}{R}$). Dopo un tempo τ V_C sarà il 63.2% di $\mathcal{E}$ (il suo valore asintotico) e la corrente sarà il 36.8% del valore iniziale, dopo 2τ saranno rispettivamente 86.5%, mentre dopo 3τ saranno 99.5% e 0.5%.
Si considera che dopo un tempo 5τ V_C ha raggiunto il valore massimo e la corrente è nulla (l'errore di approssimazione è trascurabile).

Durante il processo, il generatore compie lavoro
$W = \int \mathcal{E} dq = \mathcal{E} \int_0^{q_0} dq = \mathcal{E} q_0 = C\mathcal{E}^2$.
Siccome $\Delta U = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$, si deduce che metà del lavoro viene dissipato sulla resistenza per effetto Joule, mentre l'altra metà per aumentare l'energia elettrostatica del condensatore. Si ottiene allora la relazione

$$P_{gen}(t) = P_C(t) + P_R(t)$$