# Lezione_20_fis

# 9. Oscillazioni elettriche e correnti alternate

Già in precedenza abbiamo studiato delle correnti variabili nel tempo con i circuiti RC e LR, caratterizzati rispettivamente dalle leggi $V_C = \frac{q}{C} = Ri$, $i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$ e $\mathcal{E}_i = -L\frac{di}{dt} = Ri$, $i(t) = i_0 e^{-tL/R}$.

## 9.1. Oscillazioni elettriche

### 9.1.1. Circuito LC

Consideriamo un circuito LC ideale, il cui condensatore è carico con $V_0 = \frac{q_0}{C}$ ed è connesso all'induttore nel momento $t = 0$.


Alla chiusura del circuito inizia a scorrere una corrente e nell'induttore viene indotta una forza elettromotrice di autoinduzione $\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$ legata alla differenza di potenziale dalla legge

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0$$

ottenuta dalle leggi di Kirchoff (che useremo anche per i prossimi circuiti).

Derivando rispetto al tempo e ricordando che $i = -\frac{dq}{dt}$ si ottiene $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$, quindi la corrente segue la legge

$$i(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

mentre la differenza di potenziale ai capi del condensatore è

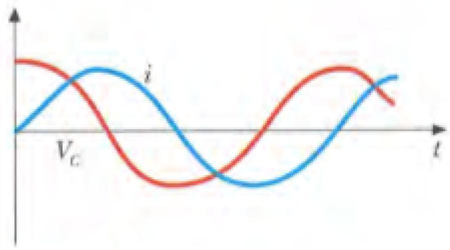
$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega LA\cos(\omega t + \phi)$$

Grazie alle condizioni iniziali, si possono determinare le costanti, quindi si ottengono le formule

$$i=\frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t,\quad V_C=V_L=V_0\cos\omega t,\quad q=q_0\cos\omega t$$

dove $\omega$ è la pulsazione e vale $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Si può osservare che la corrente e la differenza di potenziale sono in *quadratura di fase*, quindi quando la corrente è massima la differenza di potenziale è nulla, quando la differenza di potenziale è massima la corrente è nulla.
Il circuito LC è dunque sede di un'*oscillazione elettrica permanente* e per questa ragione viene anche chiamato *circuito oscillante*.




💡 **Analogia**

Matematicamente, la situazione è identica a quella di una massa $m$ sottoposta all'azione di una forza elastica, dove le corrispondenze sono solo formali. Si "equivalgono" in questo modo:

- $q \leftrightarrow x$;
- $i=\frac{dq}{dt} \leftrightarrow v=\frac{dx}{dt}$;
- $L \leftrightarrow m$;
- $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$.

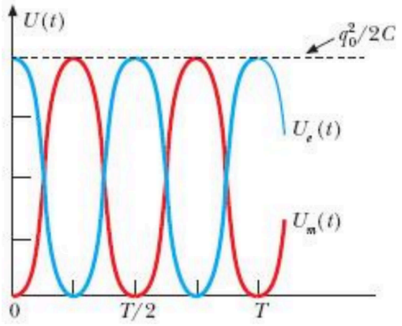
Quando il condensatore è carico, tutta l'energia del circuito è elettrica (non vi è energia magnetica poiché $i=0$), quando è invece scarico l'energia è solo magnetica, nel momento in cui le armature del condensatore sono nuovamente cariche (ma con segno opposto) l'energia è nuovamente solo elettrica.
Il *bilancio energetico* in un dato istante è

$$U(t)=U_e(t)+U_m(t)=\frac{1}{2}CV_0^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}Li_0^2\sin^2\omega t$$

Essendo $i_0=\frac{V_0}{\omega L}$, si verifica che $CV_0^2=Li_0^2$, quindi l'*energia totale è costante nel tempo* e vale

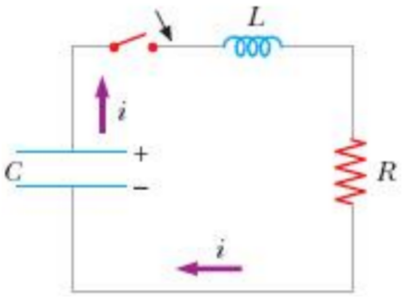
$$U(t)=\frac{1}{2}CV_0^2=\frac{q_0^2}{2C}=\frac{1}{2}Li_0^2$$

quindi *in un circuito LC ideale l'energia totale si conserva*.




## 9.1.2. Circuito RLC in serie

Consideriamo questa volta un circuito con un condensatore carico, in induttore e un resistore collegati in serie.




Questa volta, alla chiusura del circuito, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore e dell'induttore non è più la stessa, ma vale la formula

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

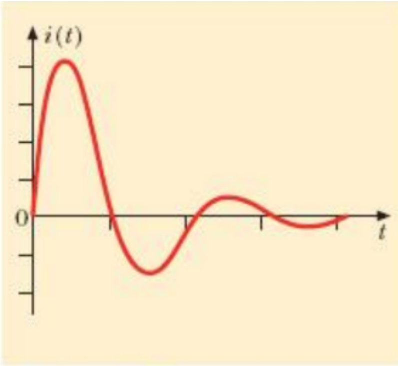
Derivando in maniere analoga a prima si ottiene $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$ che ha soluzione

$$i(t))Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

dove $\gamma = \frac{R}{2L}$ ha il significato di *costante di tempo* e indica la *rapidità di annullamento della corrente*, mentre $\omega$ è la pseudo-pulsazione con valore

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

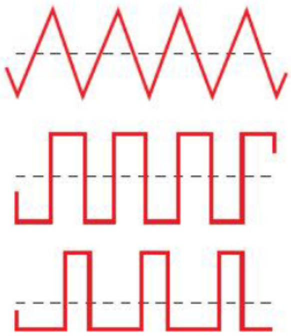
Si ha quindi che per $\gamma^2 \gg \omega_0^2$, cioè quando $R^2 < \frac{4L}{C}$ si ha una pulsazione reale, quindi la corrente si descrive con una sinusoide modulata.




Si può concludere che, in questo circuito, a ogni ciclo viene dissipata dell'energia nella resistenza. Il processo termina quando tutta l'energia $U_e = \frac{q_0^2}{2C}$ viene assorbita dalla resistenza.
Per mantenere un'oscillazione permanente, bisognerebbe fornire costantemente potenza pari all'energia dissipata nel resistore.

## 9.2. Circuiti in corrente alternata

> Una forza elettromotrice e una corrente che variano nel tempo proporzionalmente a $\sin \omega t$ o $\cos \omega t$ sono dette *alternate*. Per definizione si chiama *alternata* una *grandezza periodica* che ha *valor medio nullo in un periodo*.



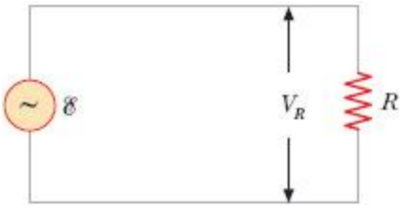
**Ricorda**

Per una grandezza alternata si definisce il valore efficace dalla relazione $\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$ e $i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$

### 9.2.1. Circuito con resistenza

Applicando ai capi di un resistore una forza elettromotrice $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ si ha un passaggio di corrente in accordo con la legge di Ohm

$$\mathcal{E} = Ri \implies i = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$




La corrente è *in fase* con la forza elettromotrice e il suo valore *non dipende* dalla frequenza della forza elettromotrice.
Possiamo affermare che ai capi del resistore compare la *tensione*

$$V_R = Ri = V_0 \cos \omega t$$

che vale anche per circuiti più complessi.

La potenza istantanea dissipata dalla resistenza vale

$$\mathcal{P}(t) = V_R i = \frac{\mathcal{E}_0^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

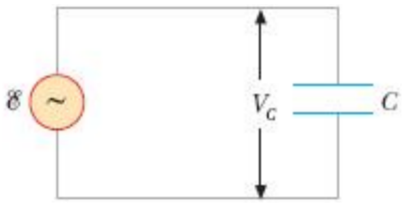
mentre la potenza media dissipata su un periodo vale

$$\mathcal{P}_m = V_{R,eff} i_{eff} = \frac{V_{R,eff}^2}{R} = R i_{eff}^2$$

### 9.2.2. Circuito con condensatore

Ai capi di un condensatore carico vi è la differenza di potenziale $V_C = \frac{q}{C}$, supponendo nulla la resistenza complessiva si ottiene

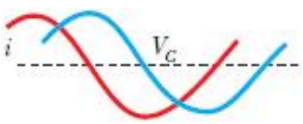
$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} \implies q = C\mathcal{E} = C\mathcal{E}_0 \cos \omega t$$




Uso la relazione $i = \frac{dq}{dt}$ per trovare la corrente

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\omega C\mathcal{E}_0 \sin \omega t = \omega C\mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

si vede dunque che è in *anticipo di una quadratura sulla forza elettromotrice* (ovvero $\frac{\pi}{2}$). Anche questa volta la relazione di fase è indipendente dalla pulsazione, ma la corrente *dipende dalla frequenza*.



Più generalmente, per un circuito qualsiasi, vale

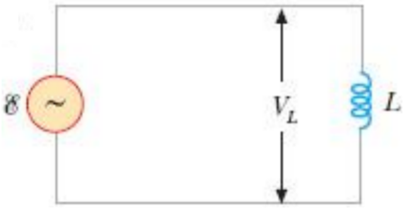
$$V_C = \frac{i_0}{\omega C}\sin\omega t = \frac{i_0}{\omega C}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

dove $\frac{1}{\omega C}$ è detto *reattanza del condensatore* (o *reattanza capacitiva*), che rappresenta un'opposizione al passaggio di corrente.

## 9.2.3. Circuito con induttore

In un circuito con una forza elettromotrice alternata, un induttore e resistenza nulla è descritto dall'equazione

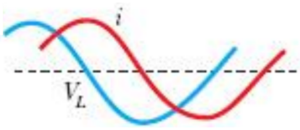
$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = 0 \implies \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos\omega t$$




Quindi la corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\sin\omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

perciò la corrente è *in quadratura* rispetto alla forza elettromotrice (ovvero è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$). La corrente *dipende dalla frequenza*.




In un circuito generico, la tensione ai capi dell'induttore vale

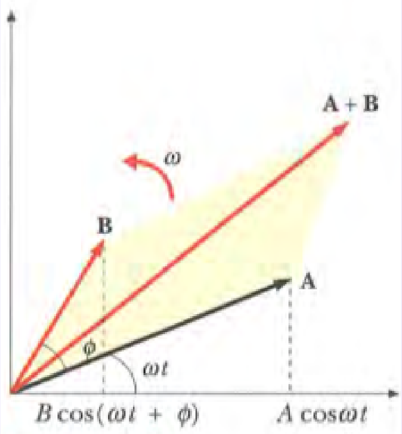
$$V_L = L\frac{di}{dt} = -\omega L i_0\sin\omega t = \omega L i_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

dove $\omega L$ è detto *reattanza dell'induttore* (o *reattanza induttiva*).

## 9.2.4. Circuiti RL e RC (in serie)

> **Metodo dei vettori rotanti o dei fasori di Fresnel**
>
> Un'oscillazione armonica viene rappresentata come proiezione lungo un asse di un vettore di modulo $\mathcal{E}_0$ ruotante con velocità angolare $\omega$. Due oscillazioni sfasate di $\theta$ sono rappresentate da due vettori ruotanti che mantengono un angolo costante $\theta$ tra loro e la somma si esegue con la regola del parallelogramma; la proiezione del vettore somma è la somma cercata dalle due

oscillazioni.




Siccome la tensione totale dei seguenti circuiti è la somma delle tensioni dei loro elementi, che sono generalmente sfasati tra loro, useremo questo metodo per calcolare la tensione totale.

### 9.2.4.1. Circuito RL

Nel circuito in serie RL, attraversato dalla corrente $i = i_0 \cos \omega t$, le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = R i_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

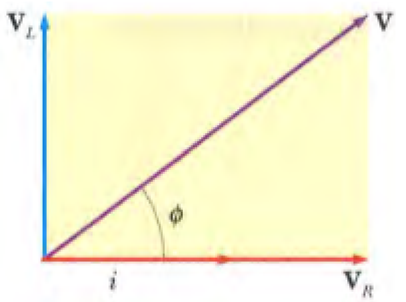
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} i_0$$

ed è sfasata di un angolo $\phi$ rispetto alla corrente, tale che $\tan \phi = \frac{\omega L}{R}$.

La tensione ai capi della serie vale

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



#### 9.2.4.2. Circuito RC

Nel circuito in serie RC le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = Ri_0 \cos \omega t, \qquad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

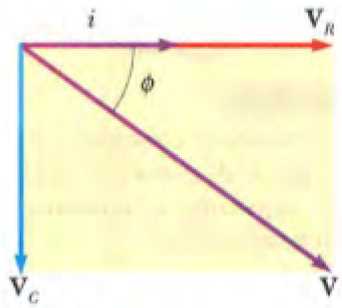
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} i_0$$

ed è sfasata di un angolo $\phi$ rispetto alla corrente, tale che $\tan \phi = -\frac{1}{\omega CR}$.

La tensione ai capi della serie vale sempre

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$




> A questo punto si definisce l'*impedenza* $Z$ dell'elemento o della serie il coefficiente di proporzionalità tale che
>
> $$V_0 = Zi_0$$
>
> In generale l'impedenza è in funzione della pulsazione.

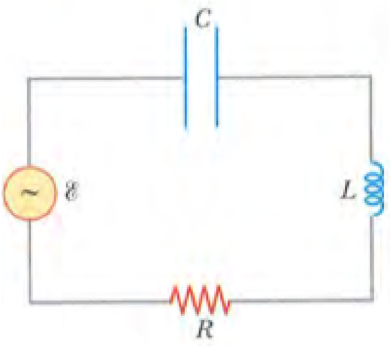
> **Unità di misura**
>
> L'impedenza e la reattanza sono definite da un rapporto tra tensione e corrente, come la resistenza, quindi si misurano in ohm ($\Omega$).

## 9.3. Circuito RLC in serie, risonanza

Nel circuito RLC in serie, in cui scorre la corrente $i = i_0 \cos \omega t$, deve valere

$$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

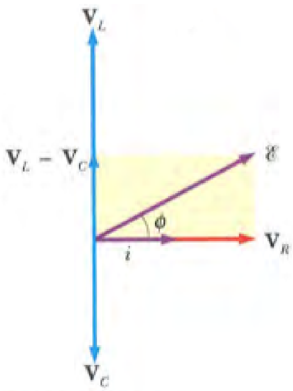
e deve essere che la tensione ai capi della serie coincida con la forza elettromotrice del generatore $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$.




Usando il metodo dei vettori rotanti si ottiene

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} i_0 = Z i_0$$

di fase $\phi$ tale che $\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.




Riprendendo l'equazione iniziale, si ottiene:
$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = \frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{\mathcal{E}_0 \omega}{L} \cos\omega t$, che permette di ricavare l'equazione della corrente

$$i(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \phi') + i_0 \sin(\omega t + \phi)$$

dove $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$ e $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Si ottiene quindi una *sinusoide con decadimento esponenziale* sommata a una sinusoide. La corrente efficace dipende dalla frequenza.
L'equazione implica che, dopo un transiente, il circuito oscilla con pulsazione dettata dalla forza elettromotrice alternata inserita.

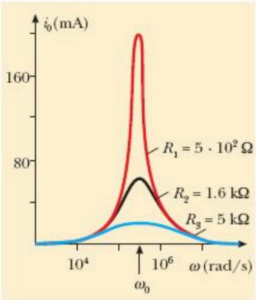
## 9.3.1. Risonanza

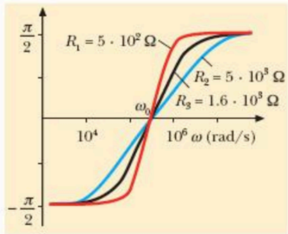
La corrente dell'oscillazione raggiunge il valore massimo quando $Z$ è minimo, ovvero quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

In tali *condizioni*, dette di *risonanza*, lo *sfasamento* tra corrente e forza elettromotrice è *nullo*, l'impedenza è eguale alla resistenza e il circuito si comporta come se fosse puramente resistivo.

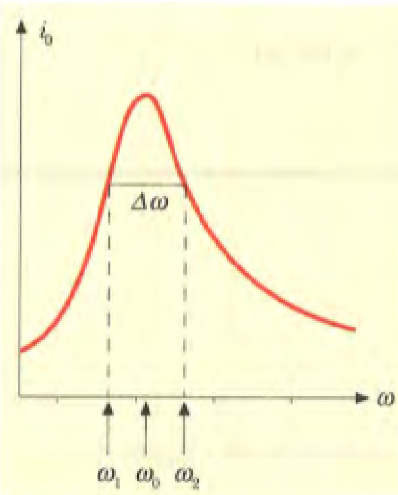
Nei seguenti grafici sono rappresentate delle *curve di risonanza*.




Prima della risonanza, il termine capacitivo è maggiore del termine induttivo, la fase varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e zero, quindi il comportamento è di tipo RC in serie.
Oltre la risonanza, predomina il termine induttivo su quello capacitivo, la fase varia tra zero e $\frac{\pi}{2}$, quindi il comportamento è di tipo RL in serie.

> Si definisce la *larghezza della risonanza* con la differenza
>
> $$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$
>
> dove $\omega_1$ e $\omega_2$ sono i valori della pulsazione tali che $i_0(\omega_1) = i_0(\omega_2) = \frac{i_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$.




> Si definisce *fattore di merito della risonanza* la quantità
>
> $$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$