

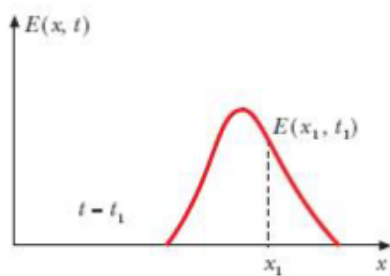
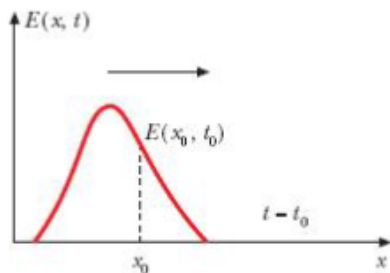
Lezione_22_fis

11. Onde elettromagnetiche

Si definisce come *onda* una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga con una velocità ben definita.

Tutte le onde soddisfano l'*equazione di D'Alembert*

$$\vec{\nabla}^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$



Le *onde meccaniche* hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi e la loro propagazione è dovuta all'interazione tra le particelle del mezzo.

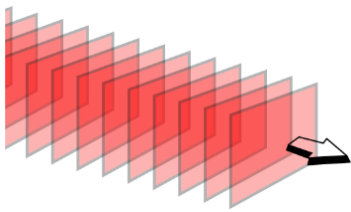
In esse non vi è un effettivo trasporto di materia (le particelle oscillano attorno a una posizioni di equilibrio), ma vengono trasportate *energia* e *quantità di moto*.

Le *onde elettromagnetiche*, ad esempio, non hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi.

11.1. Onde piane

Una situazione particolare per cui un'onda dipende solamente dalla coordinata spaziale x e dal tempo t è quella delle *onde piane*.

L'onda assume lo stesso valore in tutti i punti del piano di equazione $x = x_0$, ortogonale all'asse di propagazione x .



L'equazione di D'Alembert diventa

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

dove v^2 è il quadrato della velocità di propagazione dell'onda. Le soluzioni dell'equazione hanno forma

$$f(x - vt), \quad f(x + vt)$$

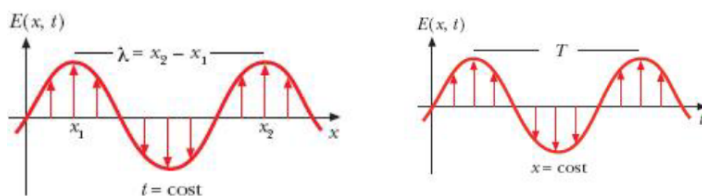
dove la prima è un'onda *progressiva*, mentre la seconda un'onda *regressiva*. Queste ci dicono che, spostandosi, l'onda non cambia forma.

11.1.1. Onde piane armoniche

L'onda *armonica* è un'onda piana particolare, la cui funzione d'onda si descrive con

$$f(x, t) = f_0 \sin(k(x \mp vt)) = f_0 \sin(kx \mp \omega t) \text{ oppure } f(x, t) = f_0 \cos(k(x \mp vt)) = f_0 \cos(kx \mp \omega t)$$

dove $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il *numero d'onda*, λ la *lunghezza d'onda* e ω è la pulsazione, che vale $\omega = kv$ ed è legata al periodo $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



Il *fronte d'onda* è il luogo dei punti nei quali la *fase dell'onda* $\phi = kx - \omega t$ ha lo stesso valore; è un piano.

Si nota che per le onde piane armoniche i fronti d'onda sono distanti λ fra loro, con uno sfasamento di 2π .

11.2. Onde elettromagnetiche piane

Le equazioni di Maxwell implicano le onde elettromagnetiche.

Consideriamo il caso senza cariche né correnti ($\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$) e facciamo l'ipotesi di avere onde piane, ovvero che i campi \vec{E} e \vec{B} siano costanti in un piano ortogonale all'asse x , ovvero parallelo al piano yz . Ciò implica che eventuali derivate rispetto alle variabili y e z debbano essere *nulle*.

Inoltre, definiamo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{m}{s}$$

la *velocità della luce* nel vuoto.

Grazie alla terza e alla quarta equazione di Maxwell si possono ricavare delle relazioni che legano fra loro le derivate delle componenti non nulle dei campi, che poi deriviamo per ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

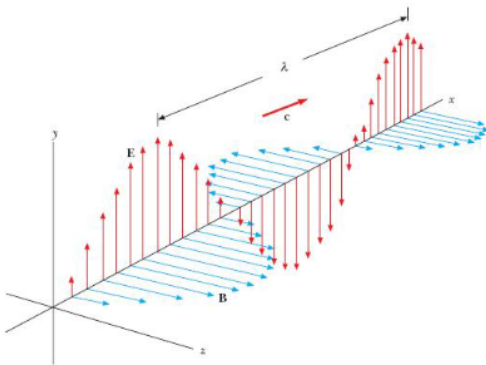
Queste equazioni ci permettono di concludere che ognuna delle componenti del campo elettrico e del campo magnetico si propagano lungo l'asse x (trasversalmente) con velocità c .

Troviamo che la soluzione delle equazioni delle onde è

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= E_{0,y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + E_{0,z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z \\ \vec{B}(x, t) &= B_{0,y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + B_{0,z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z \end{aligned}$$

e siccome le equazioni (accoppiate) di Maxwell devono valere, troviamo anche che

$$B_{0,y} = -\frac{E_{0,z}}{c}, \quad B_{0,z} = \frac{E_{0,y}}{c}$$



Troviamo che valgono

$$B = \frac{E}{c} \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

infatti $B^2 = B_{0,y}^2 + B_{0,z}^2 = \frac{E_{0,z}^2}{c^2} + \frac{E_{0,y}^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2}$ e

$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = -\frac{E_{0,y} E_{0,z}}{c} + \frac{E_{0,y} E_{0,z}}{c} = 0$, ovvero i due campi sono ortogonali tra loro e i moduli sono dipendenti.

11.2.1. Proprietà

- \vec{E} e \vec{B} si propagano con la stessa *velocità c* ;
- I moduli dei campi sono legati dalla relazione di proporzionalità $B = \frac{E}{c}$;
- \vec{E} e \vec{B} sono *ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione*: le onde elettromagnetiche sono onde *trasversali* e per esse è significativo il concetto di *polarizzazione*;
- Il verso del prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$ definisce il verso di propagazione dato da c ;
- Le onde elettromagnetiche obbediscono al *principio di sovrapposizione*; è una proprietà generale che dipende dal fatto che nelle equazioni di Maxwell i campi \vec{E} e \vec{B} compaiano in forma lineare;
- \vec{E} e \vec{B} sono *in fase*, quindi massimi e minimi cadono negli stessi punti;
- I campi \vec{E} e \vec{B} sono *inscindibili*: la presenza di uno comporta la presenza dell'altro.

🔗 Onde elettromagnetiche in mezzi trasparenti

Se il mezzo in cui si propaga l'onda non è il vuoto, ma ha proprietà magnetiche trascurabili, allora si può considerare $\epsilon = k\epsilon_0$ e μ_0 si può considerare invariato, allora la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica diventa

$$v = \frac{1}{\mu_0 \epsilon} = \frac{c}{\sqrt{k}}$$

Siccome $k > 1$, allora la velocità delle onde elettromagnetiche in mezzi materiali è sempre inferiore alla velocità della luce nel vuoto.

Si dice $n = \frac{c}{v} = \sqrt{k}$ l'*indice di rifrazione* del mezzo.

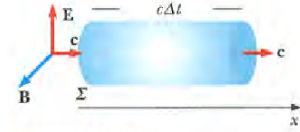
11.3. Energia di un'onda elettromagnetica piana e vettore di Poynting

Dalle formule di densità di energia del campo elettrico e del campo magnetico, trovate in precedenza, vediamo che la *densità istantanea* di *energia elettromagnetica* è

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E^2$$

Quindi l'energia elettromagnetica risulta per metà dovuta al campo elettrico e per metà da quello magnetico. Il risultato è vero in generale, anche per le onde non piane.

Considerando una superficie di area Σ perpendicolare alla direzione di propagazione, si può trovare che nel tempo dt attraverso Σ passa tutta l'energia contenuta nel volume $\Sigma c dt$, ovvero $dU = u \Sigma c dt = \epsilon_0 E^2 c \Sigma dt$. Quindi la potenza che attraversa Σ è $\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E^2 c \Sigma$.



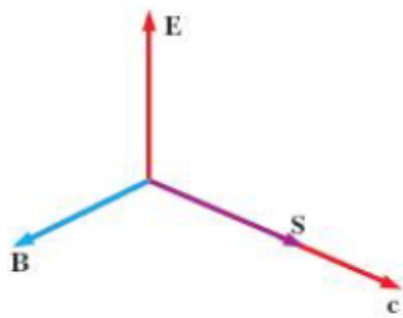
Definendo un vettore $\vec{S} = \epsilon_0 E^2 \vec{c}$, si trova che esso ha la proprietà che il flusso attraverso una superficie Σ perpendicolare alla direzione di propagazione dà la potenza istantanea attraverso Σ stessa $\mathcal{P} = \Phi_{\Sigma}(\vec{S}) = S \Sigma$.

Definiamo il **vettore di Poynting** come il vettore

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 E B \vec{u} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

la cui unità di misura è $\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$.

Esso ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione.



Il valore medio del vettore di Poynting è l'**intensità dell'onda elettromagnetica piana**

$$I = S_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 x E_0^2 = \epsilon_0 x E_{eff}^2$$

11.4. Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana e pressione di radiazione

Le onde elettromagnetiche trasportano energia, quindi trasportano anche quantità di moto e momento angolare.

Attraverso una superficie unitaria Σ perpendicolare alla direzione di propagazione, passa in media nell'unità di tempo la quantità di moto

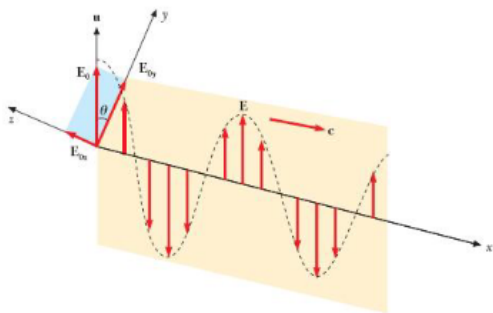
$$\langle p \rangle = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \epsilon_0 E_{eff}^2$$

Quando questa quantità di moto viene assorbita completamente dalla materia si determina una forza per unità di superficie detta *pressione di radiazione*.

11.5. Polarizzazione dell'onda elettromagnetica piana

Un'onda elettromagnetica piana *polarizzata rettilineamente* ha il campo elettrico con solo la componente y (quindi il campo magnetico solo la componente z) e resta sempre parallelo all'asse y durante la propagazione.

La scelta dell'asse y è arbitraria, qualsiasi direzione ortogonale all'asse di propagazione è accettabile.



Il campo elettrico dell'onda elettromagnetica rappresentata in figura si scrive $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{u}$ e l'intensità dell'onda $I_0 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$.

Scritto il versore come $\vec{u} = \cos \theta \vec{u}_y + \sin \theta \vec{u}_z$, si ottiene

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos \theta \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + E_0 \sin \theta \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

quindi *l'onda elettromagnetica piana è rappresentata come sovrapposizione di due onde elettromagnetiche piane polarizzate rettilineamente nei piani (xy) e (xz) di ampiezza rispettivamente $E_0 \cos \theta$ e $E_0 \sin \theta$* .

Un'onda magnetica piana il cui campo elettrico e magnetico restano costanti in modulo, ma ruotano con velocità angolare ω attorno alla direzione di propagazione data da c , con $\vec{E} \times \vec{B}$ parallelo e concorde a c , si dice *polarizzata circolarmente*. Se $E_{0,y} \neq E_{0,z}$, allora si dice *polarizzata ellitticamente*.

! Osservazione

La polarizzazione circolare e rettilinea rappresentano tutti i possibili stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana.

Un'onda elettromagnetica piana non polarizzata ha l'angolo θ che definisce la direzione di \vec{E} che varia casualmente nel tempo.

11.6. Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante

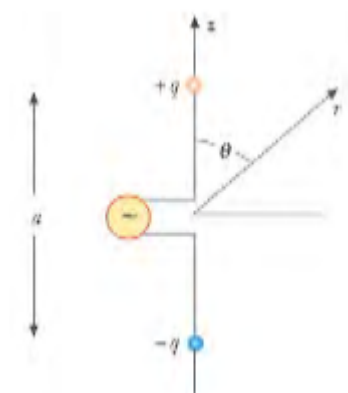
Un *dipolo elettrico oscillante* ha la carica q concentrata agli estremi e varia sinusoidalmente;

$$q = q_0 \sin \omega t \implies i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos \omega t$$

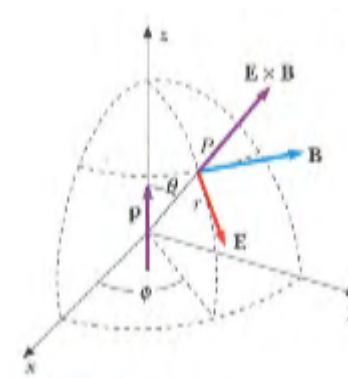
da cui viene generato un *momento di dipolo elettrico* oscillante

$$p = qa = q_0 a \sin \omega t = p_0 \sin \omega t$$

parallelo all'asse z in figura.



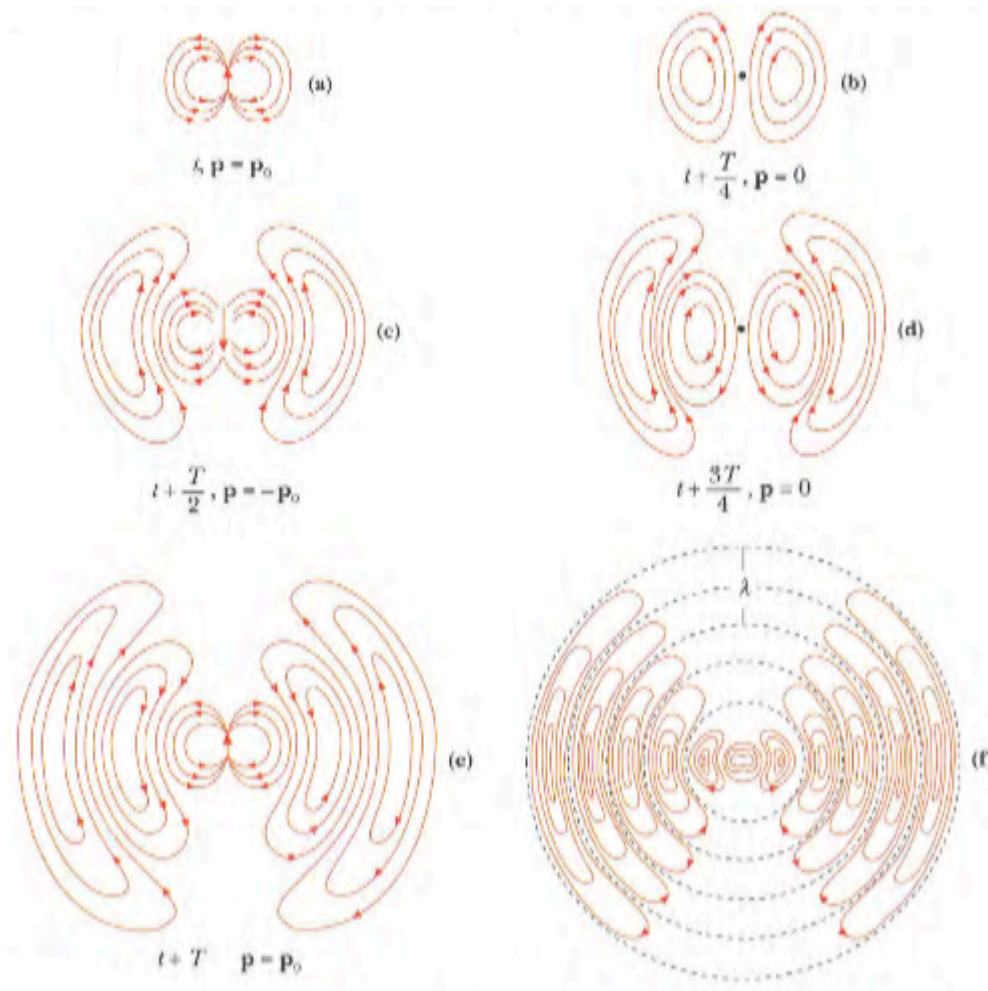
A grandi distanza dal centro del dipolo ($r \gg a$), si dimostra che si propaga un'onda elettromagnetica trasversale a una direzione \vec{r} che parte dal centro. Il campo elettrico \vec{E} si trova su un piano meridiano, mentre il campo magnetico \vec{B} in uno parallelo.



I moduli sono dati da

$$E = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sin(kr - \omega t), \quad B = \frac{E}{c}$$

Il momento di dipolo, essendo oscillante, si annulla, inverte, annulla nuovamente e infine torna al suo valore originale in un periodo, andando a formare linee di campo che si chiudono e allontanano.



Il campo magnetico associato al campo elettrico risulta perpendicolare al foglio, le sue linee sono quindi *circonferenze* con in centro sull'asse del dipolo p , il cui raggio aumenta all'allontanarsi dalla sorgente.

Intensità e potenza sono

$$I(r, \theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \sin^2 \theta, \quad \mathcal{P} = \frac{8\pi}{3} I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0} c^3$$

con $I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3}.$

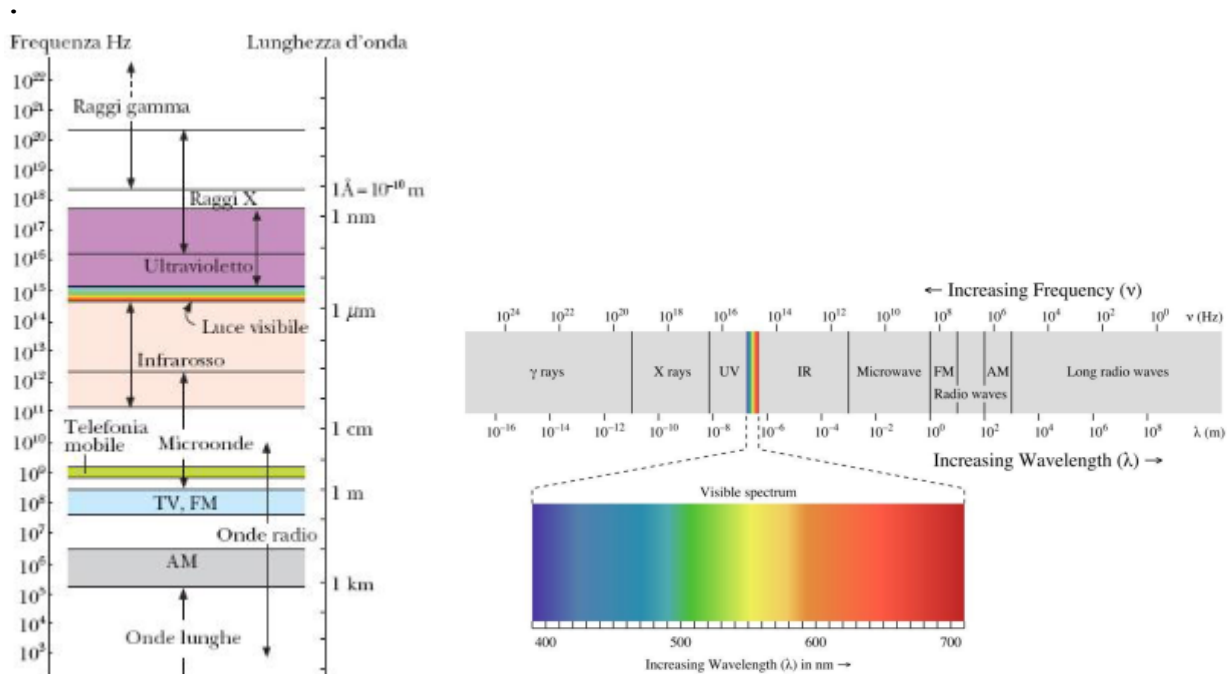
11.7. Spettro delle onde elettromagnetiche

Lo spettro delle onde elettromagnetiche è convenzionalmente suddiviso in una successione di bande, i cui confini non sono netti,

ma hanno zone di sovrapposizione.

Le loro *proprietà fisiche sono determinante dalle frequenza*, che è *determinata dalla sorgente*; in base al mezzo in cui si trovano, lunghezza d'onda e velocità possono variare (nello schema sono rappresentate le lunghezze relative al vuoto), ma vale sempre la relazione

$$\lambda \nu = c$$



11.7.1. Onde hertziane

Si trovano negli intervalli (corrispondenti) $[0.3, 3 \cdot 10^6]m$ e $[10^2, 10^9]Hz$. Sono prodotte con dispositivi elettronici e sono utilizzate nelle trasmissioni radiofoniche e televisive. Si chiamano anche onde radio o radiofrequenze.

11.7.2. Microonde

Si trovano negli intervalli $[3 \cdot 10^{-3}, 0.3]m$ $[10^9, 10^{11}]Hz$. Sono prodotte con dispositivi elettronici e sono utilizzate per comunicazioni e sistemi radar.

11.7.3. Infrarosso

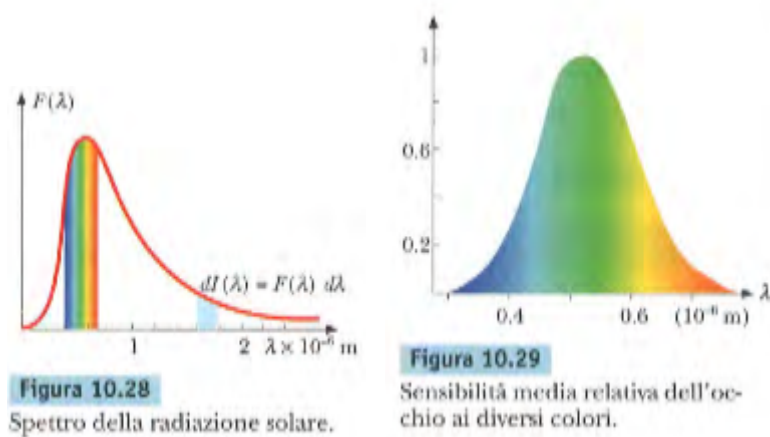
Si trovano negli intervalli $[0.78 \cdot 10^{-6}, 10^{-3}]m$ $[3 \cdot 10^{11}, 3.8 \cdot 10^{14}]Hz$. Vengono prodotte dai corpi caldi, le cui molecole vengono eccitate tramite gli urti causati dall'agitazione termica. Se assorbite danno origine a un aumento delle temperatura. Gli infrarossi vengono usati in terapie fisiche in medicina, nella

fotografia infrarossa, la spettroscopia vibrazionale (lo studio dei livelli energetici vibrazionali delle molecole)).

11.7.4. Luce visibile

Si trovano negli intervalli $[0.38 \cdot 10^{-6}, 0.78 \cdot 10^{-6}]m$ e $[3.8 \cdot 10^{14}, 7.9 \cdot 10^{14}]Hz$. È la banda di frequenze cui è sensibile l'occhio della maggior parte degli esseri viventi. La luce visibile è prodotta nei moti di agitazione termica ad alta temperatura, da scariche in un gas, in generale da processi in cui vengono eccitati gli elettroni più esterni degli atomi.

Il sole è la più importante sorgente di luce visibile vicina a noi; l'energia elettromagnetica ha origine dall'agitazione termica degli atomi che si trovano sulla superficie a una temperatura di circa $6000K$.



Le diverse sensazioni che la luce produce nell'occhio dipendono dalla lunghezza d'onda e vengono classificate come colori.

Colore	$\lambda(10^{-6}m)$	$\mu(10^{14}Hz)$
rosso	0.780 – 0.622	3.85 – 4.82
arancione	0.622 – 0.597	4.82 – 5.03
giallo	0.597 – 0.577	5.03 – 5.20
verde	0.577 – 0.492	5.20 – 6.10
azzurro	0.492 – 0.455	6.10 – 6.59
violetto	0.455 – 0.380	6.59 – 7.89

11.7.5. Ultravioletto

Si trovano negli intervalli $[6 \cdot 10^{-6}, 0.38 \cdot 10^{-6}]m$ e $[7.9 \cdot 10^{14}, 5 \cdot 10^{17}]Hz$. Una delle sorgenti degli ultravioletti è il Sole; queste onde vengono assorbite nell'atmosfera con un fenomeno di ionizzazione (creando la ionosfera, oltre i $100km$ di altezza, mentre tra i 20 e i

30 chilometri si forma l'ozono). L'assorbimento atmosferico è fondamentale per la vita sulla Terra in quanto questa radiazione in grandi quantità risulta letale (mentre in piccole quantità causa, ad esempio, l'abbronzatura).

11.7.6. Raggi X

Si trovano negli intervalli $[6 \cdot 10^{-10}, 6 \cdot 10^{-12}]m$ e $[5 \cdot 10^{17}, 5 \cdot 10^{19}]Hz$. Vengono comunemente prodotti mediante la decelerazione degli elettroni di alta energia, che bombardano un bersaglio metallico. Vengono comunemente utilizzati per indagini radiografiche, mentre fasci ben focalizzati e molto intensi venivano usati nella terapia contro i tumori.

11.7.7. Raggi gamma

Si trovano negli intervalli $\lambda \leq 10^{-10}m$ e $\nu \geq 3 \cdot 10^{18}Hz$. Sono prodotti in processi nucleari (decadimenti radioattivi e reazioni tra nuclei) e nei decadimenti di particelle subnucleari. L'assorbimento dei raggi gamma può causare seri danni in un organismo vivente; ad oggi vengono usati in terapie antitumorali.