Fondamenti di analisi matematica e probabilità

0. Indice

1. Lo spazio e le curve

1.1. Lo spazio e la distanza

1.1.1. Vettori e norma in $\mathbb{R}^n$

Un generico vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ si indica con $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ dove n sono le dimensioni dello spazio.

1.1.1.1. Esempi

$n = 1$ $x \in \mathbb{R}$
$n = 2$ $\underline{x} = (x, y)$
$n = 3$ $\underline{x} = (x, y, z)$.

1.1.2. Norma e distanza - definizioni

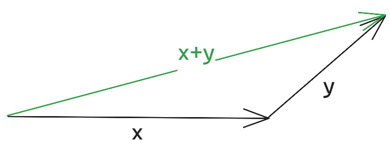
> La norma di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è definita come $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_{n-1}^2 + x_n^2}$
> .

> La distanza tra $x, y \in Rr^n$ è $(x, y) = ||x - y||$

1.1.3. Proposizione (disuguaglianza triangolare)

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, allora

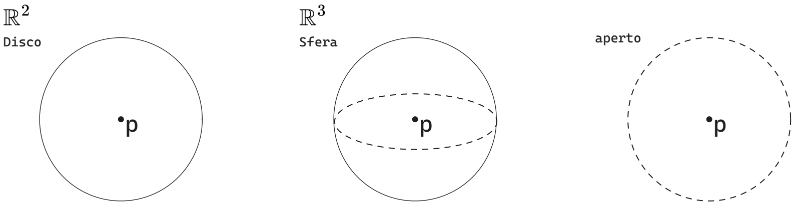
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$



1.1.4. Palla aperta/chiusa - definizione

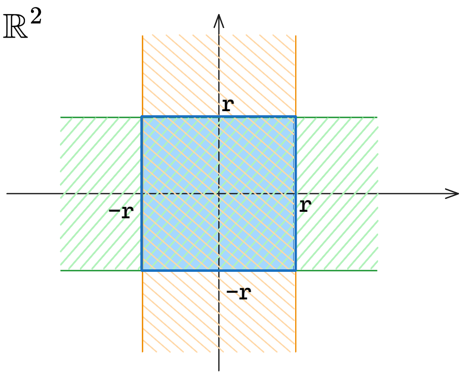
> Una "palla" chiusa di centro $p \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r \geq 0$ (se $r = 0$ è degenere, quindi un punto) è definita come l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ la cui distanza è minore uguale di r, cioè:
>
> $$B(p, r] := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : ||x - p|| \leq r\}$$
>
> Analogamente la palla aperta di stesso centro e raggio è indicata con
>
> $$B(p, r[:= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : ||x - p|| < r\}$$
>
> La differenza, chiamata *(iper)sfera* (cerchio se le dimensioni

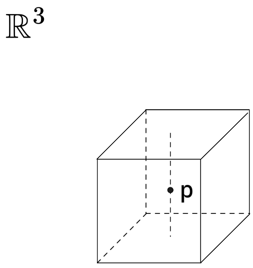
> sono due), è
>
> $$\partial B(p,r] = \partial B(p,r[:= \{\underline{x} \in \mathbb{R} : ||x-p|| = r\}$$



1.1.5. Quadrati/(iper)cubi chiusi/aperti - definizione

> Un cubo (quadrato se le dimensioni sono due, ipercubo se le dimensioni sono più di tre) chiuso di centro $q \in \mathbb{R}^n$ e semilato (o raggio) r si definisce come
>
> $$Q(q,r] = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1 - q_1| \leq r,\ \ldots,\ |x_n - q_n| \leq r\}$$



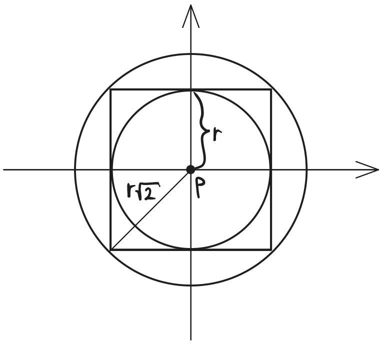


Osservazione

Un punto sta in un disco di centro p e raggio r quando dista da p meno di r; sta in un quadrato di stesso centro e raggio quando le componenti distano dalle rispettive componenti del centro per meno di r.

1.1.6. Proposizione (inclusioni tra palle e cubi)

Ogni palla contiene un cubo di stesso centro e viceversa. Infatti per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ e $r \geq 0$ si ha $B(p,r] \subseteq Q(p,r)$ e $Q(p,r] \subseteq B(p, r\sqrt{n}]$



1.1.6.1. Dimostrazione

a)

$B(p,r] \subseteq Q(p,r]$
Se $x \in B(p,r]$ allora $\forall i = 1, \ldots, n$ si ha $|x_i - p_i| \leq |x - p| \leq r$ da cui $x \in Q(p,r]$.

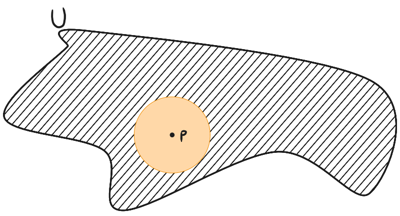
b)

$Q(p,r] \subseteq B(p, r\sqrt{n}]$
Se $x \in Q(p,r]$ allora $|x-p|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - p_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n r^2 = nr^2$.
Perciò $x \in B(p, r\sqrt{n}]$.
$\square$

[Lezione 02]

1.1.7. Intorno - definizione

> Dico $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *intorno* di $p \in \mathbb{R}^n$ se contiene una palla di centro p:
> $$\exists \delta > 0 : B(p, \delta) \subseteq U$$



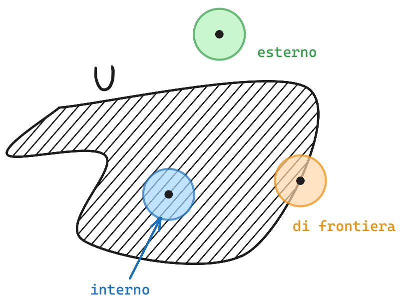
1.1.7.1 Esempi

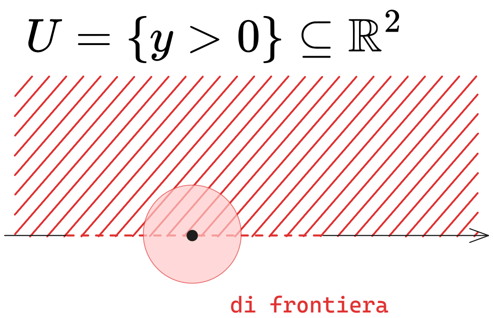
Sono intorni di $(0,0)$ gli insiemi $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq \frac{1}{10^6}\}$,
$Q\left((0,0), \frac{1}{10^6}\right]$.
Invece l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$ non è un intorno dell'origine.

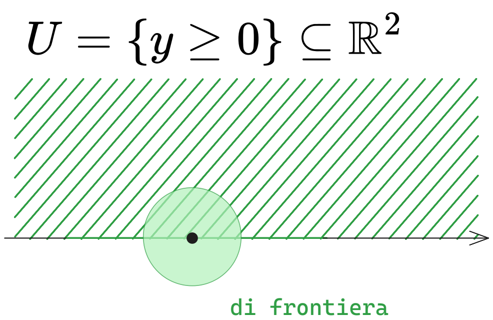
1.1.8. Punti interni, esterni, di frontiera - definizione

> Dico $p \in U$ *interno* a U se U è un intorno di p.
> Dico $p \notin U$ *esterno* a U se $\mathbb{R}^n \setminus U$ è un intorno di p.
> Dico $p \in \mathbb{R}^n$ *di frontiera* per U se $\forall \delta > 0 \;\; B(p,\delta) \cap U \neq 0$ e $B(p,\delta) \setminus U \neq \emptyset\}$ (tutti i casi rimanenti).

1.1.8.1. Esempi







1.1.9. Insiemi di U - definizione

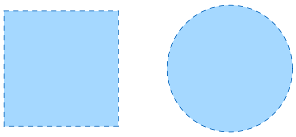
Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$, si dicono

> $IntU = U^0 = \{\text{punti interni di } U\}$
> $EstU = \{\text{punti esterni di } U\}$
> **Frontiera**: $\partial U = \{\text{punti di frontiera di } U\}$
> **Chiusura**: $Clos(U) = \bar{U} = U \cup \partial U$

1.1.9.1. Proposizione

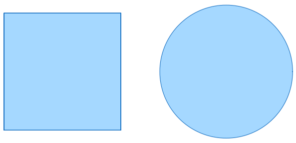
$EstU = \mathbb{R}^n \backslash Clos(U) = (\mathbb{R}^n \setminus U)^0$
$\partial U \cup IntU \cup EstU = \mathbb{R}^n$
$Int(U) = U \backslash \partial U$

$B(p,r)$ o $Q(p,r)$ hanno tutti punti interni.



1.1.10. Insiemi aperti e chiusi - definizione

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è *aperto* se ogni suo punto è interno, *chiuso* se $\mathbb{R}^n \backslash D$ è aperto

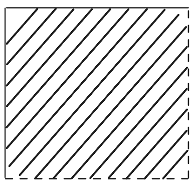


$B(p,r]$ e $Q(p,r]$ sono chiusi

1.1.10.1. Proposizione

Se $\partial D \subseteq D$ allora D è chiuso.
Se $D \cap \partial D = \emptyset$ allora D è aperto.
$Clos(D) = D \cup \partial D$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene la frontiera.

1.1.10.1.1 Esempio



Non è né chiuso né aperto

1.1.11. Prodotto scalare

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ due vettori

> Il prodotto scalare è un numero dato da
>
> $$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Si vede quindi che $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$.

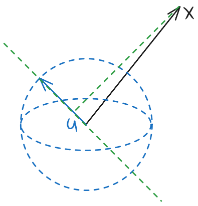
Nota bene

Due vettori si dicono ortogonali se $x \cdot y = 0$.

1.1.11.1. Esempio

$(1,2) \cdot (3,2) = 1 * 3 + 2 * 2 = 3 + 4 = 7 \leq ?$
□

1.1.11.2. Visualizzazione

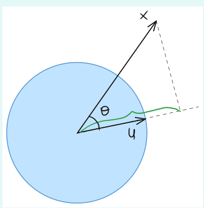


Osservazione

Se u è unitario, ossia $||u|| = 1$, $x \cdot u$ è la "lunghezza" della proiezione di x lungo la retta passante per u.

Nota bene

In $\mathbb{R}^2$ $x \cdot u = ||x|| \cos \theta$, $x \cdot y = ||x|| \cdot ||y|| \cos \theta$, con θ angolo compreso tra i due vettori.



1.1.11.3. Proposizione (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

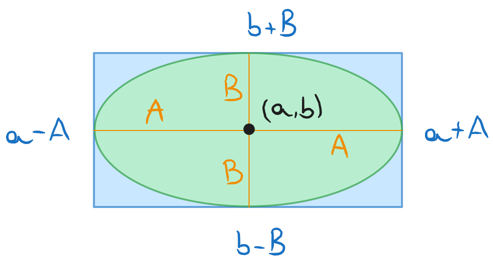
Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale $x \cdot y \leq ||x|| \cdot ||y||$. La disuguaglianza vale anche con il valore assoluto, quindi il prodotto scalare è compreso tra il prodotto delle norme e il suo opposto.
L'uguaglianza vale soltanto quando x e y sono proporzionali

> **Osservazione**
>
> Quando $x \cdot y$ è massimo, se $x, y \neq 0$?
> Se $y = \lambda x$, $\lambda > 0$
> Quando è minimo?
> Se $y = \lambda x$, $\lambda < 0$

1.1.12. Insiemi notevoli di $\mathbb{R}^n$

1.1.12.1. Ellisse

> $\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$, $A, B > 0$



1.1.12.2. Esercizio

$x^2 - 4x + 3y^2 + 18y + 6 = 0$

Prima studio le coppie di termini:
$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
$3(y+3)^2 = 3(y^2 + 6y + 9) = 3y^2 + 18y + 27$
Ora rimetto insieme:
$(x-2)^2 + \frac{(y+3)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 25$ che diventa $\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+3)^2}{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

1.1.12.2. Retta

Sia r una retta in $\mathbb{R}^2$ perpendicolare al vettore (a, b), ha equazione $ax + by = c$.

1.1.12.3. Piano

Sia π piano in $\mathbb{R}^3$ perpendicolare al vettore (a, b, c), ha equazione $ax + by + cz = d$.

1.1.12.4 Cilindro

Sia γ un cilindro di asse parallelo all'asse z per $(a, b, 0)$, ha equazione $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $r \geq 0$.

1.2. Curve parametriche

1.2.1. Curva parametrica - definizione

> Dico *curva parametrica* una *funzione* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,
>
> $$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), .., \gamma_n(t))$$
>
> con $\gamma_1, ..., \gamma_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue*, I intervallo.
> $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ continua.

Se il dominio ha una sola variabile, allora la funzione vettoriale è continua se ogni componente è continua.

> Chiamo *sostegno/supporto/immagine* l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ visitati dalla curva, cioè l'immagine della curva, ovvero $\gamma(I) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in I : \gamma(t) = x\}$

> Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, si chiama $\gamma(a)$ punto iniziale e $\gamma(b)$ punto finale.

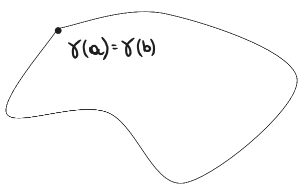
Osservazione

Mentre una curva ha un unico sostegno, la sua immagine, un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ può essere il sostegno di varie curve.
Ad esempio il cerchio unitario è sostegno di $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, ma anche di $g(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, 200\pi]$

1.2.2. Proprietà

1.2.2.1. Chiusa

> Una curva si dice chiusa se $I = [a, b]$, $\gamma(a) = \gamma(b)$, con $\gamma(a)$ punto iniziale e $\gamma(b)$ punto finale.



1.2.2.2. Piana

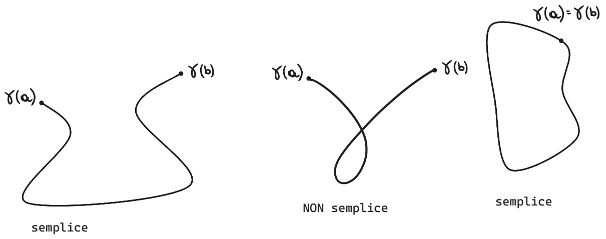
> Una curva si dive piana se esiste un piano $\subseteq \mathbb{R}^n$ che contiene il supporto.

1.2.2.3. Semplice

> Una curva si dice semplice se $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ è *iniettiva*, eccetto al più la possibilità $\gamma(a) = \gamma(b)$ se $I = [a, b]$.

Ricorda

In genere una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se $\forall x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$.



1.3. Derivate di curve

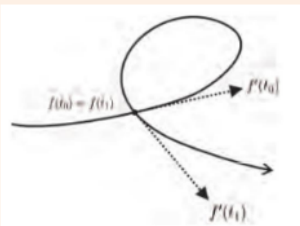
1.3.1. Vettore derivato - definizione

> Definisco *vettore derivato*/*vettore tangente*/*vettore velocità* di $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ il vettore
>
> $$\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$
>
> se $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono derivabili in $t \in I$.
> Analogamente, la derivata seconda è $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \dots, \gamma_n''(t))$, se $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono derivabili due volte.

> La *retta tangente* a γ in t è l'insieme dei punti $\{\gamma(t) + \gamma'(t)\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Attenzione

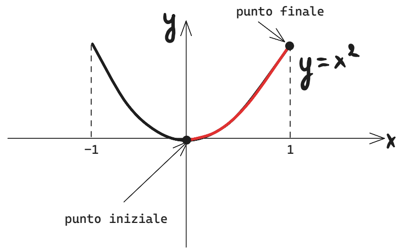
Si parla di tangente alla curva, non al suo sostegno. Può capitare che γ ripassi sullo stesso punto in due istanti diversi con derivate diverse.



1.3.1.1. Esercizio

$\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1] = I$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$
$\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = t^2$

Calcolo il sostegno:
$t = x$
$y = t^2 = x^2$
Vediamo facilmente che è piana (ha solo due componenti).



Semplice? Sì, la prima componente non si ripete $\implies \gamma$ non si ripete (è iniettiva). Altrimenti avrei trovato $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

Chiusa? No! $\gamma(0) = (0,0) \neq \gamma(1) = (1,1)$

Velocità? $\gamma'(t) = (1, 2t)$
Accelerazione? $\gamma''(t) = (0, 2)$

1.3.2. Derivata e approssimazione

> Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ derivabile in t_0, allora
>
> $$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$$
>
> dove con $o_{t_0}(s)$ si indica una funzione $R(t)$ tale che $\lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} = 0$.

Geometricamente si tratta di un'approssimazione (detta al primo ordine) di $\gamma(t)$ con il punto $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$ della retta tangente a γ in t_0.

1.3.3. Calcolo delle derivate di una curva

Come detto prima, una curva è derivabile solo se le sue componenti sono derivabili. Per calcolare quindi la derivata di una curva si deriva componente per componente.

1.3.3.1. Regole di derivazione

Siano $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in $t \in \mathbb{R}$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $\frac{d}{dt}(cost=0)$;
2. $\frac{d}{dt}(\alpha f)=\alpha f'$;
3. $\frac{d}{dt}(\phi(t)f(t))=\phi'(t)f(t)+\phi(t)f'(t)$;
4. $\frac{d}{dt}(f+g)=f'+g'$;
5. $\frac{d}{dt}(f\cdot g)=f'\cdot g+f\cdot g'$;
6. Se $u:J\subset\mathbb{R}\to I$ è derivabile, $\frac{d}{dt}(f\circ u)=f'(u)u'$.

> ⚠ **Attenzione**
> Nel punto 5. si parla di prodotto scalare, non di prodotto (che si trova al punto 3.).

[Lezione 03]

1.3.4. Velocità scalare - definizione

Sia $\gamma:I\to Rr^n$, $t\in I$

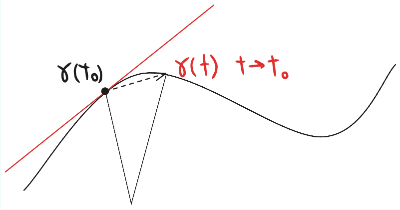
> Dico
>
> $$||\gamma'(t)||=\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\ldots+\gamma_n'^2(t)}$$
>
> la *velocità scalare*.

> t è un *valore regolare* per la curva se $\exists\gamma'(t)$ e inoltre $\gamma'(t)\neq 0 \iff ||\gamma(t)||>0$ (quindi se esiste ed è non nullo).

> Se γ è regolare al parametro t, definisco
>
> $$\frac{\gamma'(t)}{|||\gamma(t)||}$$
>
> il *versore tangente* o *versore velocità*.

> Definisco la retta tangente alla curva γ in $\gamma(t_0)$:
>
> $$r:x(t)=p+v(t-t_0)$$
>
> con $p=\gamma(t_0)$ e $v=\gamma'(t_0)$

> **Ricorda**
>
> Posso approssimare γ vicino a t_0 con la retta tangente
>
> $$\gamma(t)=\gamma(t_0)+\gamma'(t_0)(t-t_0)+R(t)$$
>
> con $\lim_{t\to t_0}\frac{||R(t)||}{t-t_0}\to 0$.



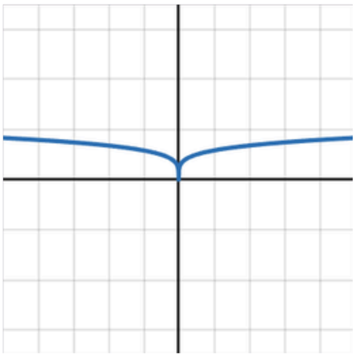
1.3.4.1. Esercizio

$\gamma(t) = (t^9, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Svolgo:

$x = t^9$, $y = t^2 = x^{2/9}$

$Supp\,\gamma =$ grafico di $f(x) = x^{2/9}$ per il tratto in $[-1, 1]$.

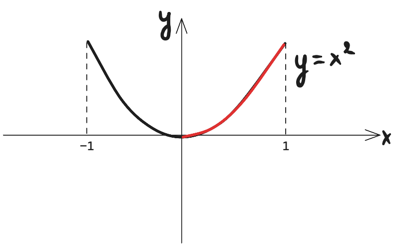


Eppure $\gamma_1(t) = t^9$ e $\gamma_2(t) = t^2$ cono $\mathcal{C}^\infty$, tuttavia $\gamma'(t) = (9t^8, 2t)$ si annulla in $t = 0$, parametro corrispondente al punto $\gamma(0) = (0, 0)$.

Osservazione

Ecco perché chiediamo $\gamma'(t_0) \neq 0$ per dire che t_0 sia un valore regolare.

1.3.5. Esercizio



$\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in I = [0, 1]$

Svolgo:

$t, t^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$\gamma'(t) = (1, 2t)$

$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1+4t^2} \geq 1$, quindi è regolare.

$r : p = \gamma(0) = (0,0)$, $v = \gamma'(0) = (1,0)$

$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \to \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff \{y = 0\}$

> **Osservazione**
>
> Posso anche scrivere le "equazioni cartesiane" della retta, eliminando il parametro:
>
> $\gamma(t) = (t, f(t))$
>
> $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ vettore velocità
>
> $||\gamma_0(t)|| = \sqrt{1+(f'(t))^2}$ velocità scalare > 0
>
> $r : \begin{cases} x = x_0 + 1 \cdot t \\ y = f(x_0) + f'(x_0)t \end{cases} \implies t = x - x_0$, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1.4. Lunghezza di curve

1.4.1. Lunghezza - definizione

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in C^1(I)$, $I = [a,b]$

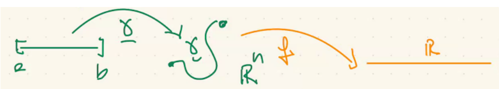
> Chiamo *lunghezza* di γ
>
> $$L(\gamma, [a,b]) := \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt$$

1.4.2. Integrale curvilineo

Sia $f : R^n \to \mathbb{R}$ continua

> Chiamo *integrale curvilineo di prima specie* di f lungo γ
>
> $$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma_1(t), \ldots \gamma_n(t))\, ||\gamma'(t)||\, dt$$

> **Osservazione**
>
> Se $f(x,y,z) \equiv 1$ allora $\int_\gamma 1 ds = \int_a^b 1 ||\gamma'(t)||\, dt = L(\gamma, [a,b])$



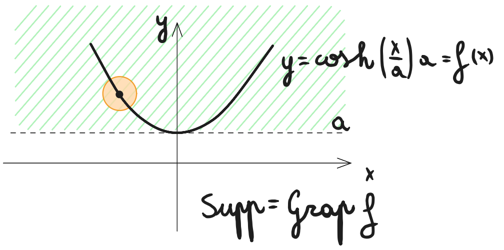
1.4.3. Esercizio

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ a\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ dove $a > 0$.

Studiarne le proprietà e calcolarne la lunghezza dell'arco per $t \in [0, 1]$.

γ è una curva? $t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \in \mathcal{C}^\infty$, quindi è una curva.

Calcolo il supporto:
$x = t$
$y = a\cosh\left(\frac{t}{a}\right) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$
$Supp(\gamma)$ è di punti interni a $\{y > 0\}$?
Se $p \in Supp(\gamma)$, $p = \left(x, a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ ho che $B\left(p, \frac{a}{2}\right) \subseteq \{y > 0\}$.



Verifico se è semplice:
$x(t) = t$ è strettamente crescente, quindi è iniettiva $\implies t_1 \neq t_2$, $x(t_1) \neq x(t_2) \implies (x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2), z(t_2)) \implies \gamma$ è iniettiva, quindi è semplice.

Controllo se è chiusa:
Siccome γ è iniettiva, non è chiusa.

$$\gamma'(t) = \left(1, \cancel{a}\frac{1}{\cancel{a}}\sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right) = (1, f'(t))$$

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + f'(t)^2} = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)} = \cosh\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$L(\gamma, [0, t]) = \int_0^t ||\gamma'(r)||\, dr = \int_0^t \cosh\left(\frac{r}{a}\right) dr = \left[\sinh\left(\frac{r}{a}\right)a\right]_0^t = a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$$

Posso anche calcolare una nuova curva $\tilde{\gamma}$ in questo modo:
$l = \phi(t) = a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$
$\frac{t}{a} = \sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right) = \sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right) = \phi^{-1}(l)$
$t = a\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)$
$\tilde{\gamma}(l) = \left(a\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right),\ a\cosh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)\right)\right)$
Il parametro di $\tilde{\gamma}$ è la lunghezza percorsa.

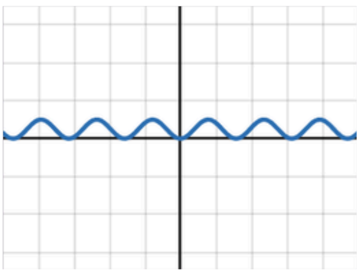
1.4.4. Grafico di funzione - definizione

> Sia $f : A \to B$, si definisce
>
> $$Graph\, f = \{(x, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$$
>
> il grafico di f.

> Si chiama $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ la *parametrizzazione canonica di grafico cartesiano*.

1.4.4.1. Esercizio

$\gamma(\theta) = (e^\theta, \sin^2(e^\theta))$, $\theta \in [1, \ln 4]$ non è la parametrizzazione canonica di un grafico cartesiano, tuttavia posso scrivere:
$t = e^\theta$, $\theta = \ln t$, $t \in [e, 4]$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\ln t) = (t, \sin^2(t))$, $e \leq t \leq 4$
$\tilde{\gamma}$ è una parametrizzazione canonica.



1.4.4.2. Esercizio

Studiare $\tilde{\gamma}(r) = \begin{pmatrix} \ln r \\ a \cosh\left(\frac{\ln r}{a}\right) \end{pmatrix}$, $r > 0$, $I = \mathbb{R}^+$.

$t = \ln r$, $r = e^t$. $r \in \mathbb{R}$
$\gamma(r(t)) = (t, a \cosh\left(\frac{t}{a}\right))$, $\tilde{I} = \mathbb{R}$.
Quindi la curva è la stessa dell'esercizio 1.3.8..

1.4.5. Proposizione (derivata della composta)

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, $\phi : \tilde{I} \to I \in \mathcal{C}^1$
Se $\tilde{\gamma}(r) = \gamma(\phi(r))$, $\tilde{\gamma}_i(r) = \gamma_i(\phi(r))$, allora

$$\tilde{\gamma}'(r) = \gamma'(\phi(r)) \cdot \phi'(r)$$

1.4.5.1. Dimostrazione

Devo mostrare $\frac{d}{dr}\tilde{\gamma}_i(r) = \phi'(r) \cdot \gamma_i'(\phi(r))$, $i = 1, \ldots, n$

$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_i(r) = \gamma_i'(\phi(r)) \cdot \phi'(r)$ per la regola della catena!
□

1.4.5.2. Esercizio

Considero $\gamma(t) = (e^{t^2}, \sin(t^2))$, $t > 0$.
Derivando componente per componente calcolo:
$\frac{d}{dt}\gamma(t) = (e^{t^2} \cdot 2t, \cos(t^2) \cdot 2t) = (e^{t^2}, \cos(t^2)) \cdot 2t$
Applico ora la regola della catena alla composizione:
$\tilde{\gamma}(r) = (e^r, \sin(r))$, $r = \phi(t) = t^2$, $r > 0$ e trovo lo stesso risultato
$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma} = \phi'(t) \cdot \tilde{\gamma}(r)\big|_{r=\phi(t)}$

1.4.6. Curve equivalenti - definizione

> Si dice $\tilde{\gamma}(t)$, $t \in \tilde{I}$, *equivalente* a $\gamma(r)$, $r \in I$, se $\phi \in \mathcal{C}^1(I; \tilde{I})$ biunivoco con $\phi' \neq 0$.

1.4.6.1. Proposizione

Due curve equivalenti hanno

- Stessa immagine;
- Stesse proprietà (semplicità, chiuse, regolari);
- Stesso versore velocità, quindi retta tangente;
- Stessa lunghezza e stesso integrale curvilineo di $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.4.6.2. Esercizio

$f(x, y, z) = e^{x+y+z}$
$\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [1, e] = I$; $\tilde{\gamma}(t) = (e^t, e^{2t}, e^{3t})$, $t \in [0, 1] = \tilde{I}$
$\phi(t) = e^t \in \mathcal{C}^1$, $\phi'(t) = e^t > 0$, $t = \ln r$

Ho verificato che sono equivalenti: ora calcolo l'integrale curvilineo di f lungo le due curve:

1. $\int_\gamma f\, ds = \int_1^e e^{t+t^2+t^3}\sqrt{1+4t^2+9t^4}\, dt$
2. $\int_g f\, ds = \int_0^1 e^{e^r+e^{2r}+e^{3r}}\sqrt{1+4e^{2r}+9e^{4r}}e^r\, dr$
   Facendo la sostituzione $r = \phi(t) = e^t$ mi accorgo che sono uguali, quindi hanno la stessa lunghezza.

1.4.7. Curve associate a grafici di funzione

Data $f : I \to \mathbb{R}$ *continua*, I intervallo, $\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$, $t \in I$.
Allora γ è:

- *Mai chiusa*, siccome $x(t)$ è crescente, quindi iniettiva;
- *Sempre semplice* siccome $x(t)$ è crescente, quindi iniettiva;

- *Se f derivabile in I^0* $\implies \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \implies$ sempre *regolare*
- La *retta tangente* a tempo $t = x_0$ è $\begin{cases} x_0 = \cancel{x_0} + 1(s - \cancel{x_0}) \\ y = f(x_0) + f'(x_0)(s - x_0) \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$, cioè $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;
- $L(\gamma; I) = \int_I \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$

1.4.8. Esercizio (spirale logaritmica)

$\rho(\theta) = e^{-\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ ($\theta \in [-M, M]$)
$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

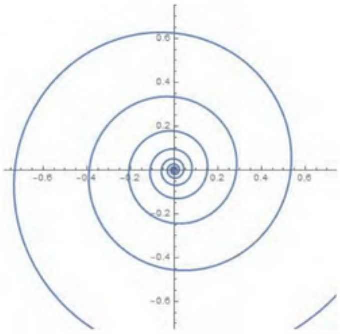


Figura 1.22: La spirale logaritmica

$x^2 + y^2 = \rho^2(\theta)\cos^2\theta + \rho^2(\theta)\sin^2(\theta) = \rho^2(\theta) = e^{-2\theta}$
$\rho(\theta) = ||\gamma(\theta)|| =$ distanza del punto dall'origine
$\theta =$ angolo con l'asse delle x
$\gamma(0) = (e^0\cos 0, e^0 \sin 0) = (1, 0)$
$\rho(\theta) = e^{-\theta}$ è decrescente $\implies$ se θ cresce, tende a zero.
γ è *non* chiusa e semplice siccome è iniettiva (ed è piana, banalmente, perché ha due componenti).
Iniettività: $\theta_1 < \theta_2 \to \gamma(\theta_1) \in \partial B(0, e^{-\theta_1})$, $\gamma(\theta_2) \in \partial B(0, e^{-\theta_2}) \implies \gamma(\theta_1) \neq \gamma(\theta_2)$
(sono su circonferenze di stesso centro ma raggio diverso, quindi non si intersecano mai)
Velocità vettoriale:
$\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta,\ \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta) = e^{-\theta}(-\cos\theta - \sin\theta,\ -\sin\theta + \cos\theta)$
$||\gamma'(\theta)||^2 = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)^2 + (\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)^2 = (\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2 = e^{-2\theta} + e^{-2\theta} =$
$\int_0^L ||\gamma'(\theta)||\, d\theta = \int_0^L \sqrt{2}e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{2}[-e^{-\theta}]_0^L = \sqrt{2}[1 - e^{-L}]$

1.4.9. Curve in forma polare

Ogni punto $P = (x, y) \neq (0, 0)$ del piano si può individuare attraverso due parametri:

- Il raggio $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- L'argomento $\theta(x, y) \in \mathbb{R}$: si tratta dell'angolo con segno che la semiretta dall'origine al punto P effettua con l'asse delle x; esso è individuato in realtà a meno di multipli di 2π
  La coppia $(\rho(x, y), \theta(x, y))$ rappresenta in tal caso le *coordinate*

polari del punto considerato.

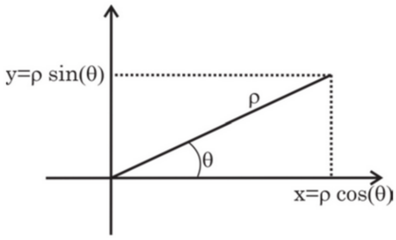


Figura 1.19: coordinate polari

La scrittura $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in I$ è un'abbreviazione per

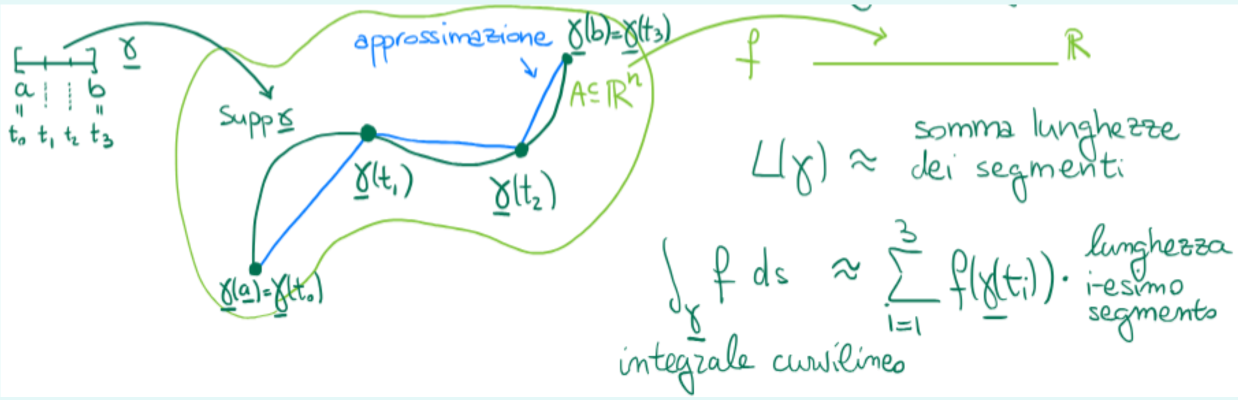
$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$$

1.4.9.1. Lunghezza di curve in forma polare

Se derivabile, $||\gamma'(\theta)|| = \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}$ è derivabile dove $\rho > 0$ oppure $\rho' > 0$ e inoltre $L(\gamma, [\theta_0, \theta_1]) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta$

Approfondimento (non in programma)

Idea: vedere documento interattivo o libro, salto la costruzione.
C'è un procedimento di limite in cui approssimo la curva con una linea spezzata: la lunghezza della linea spezzata è la somma delle lunghezze dei segmenti che compongono la spezzata.
Facendo il limite quando il numero di segmenti aumenta, se $\gamma \in \mathcal{C}^1$ otteniamo proprio la lunghezza della curva! Per gli integrali:



Che applicazioni abbiamo in mente, ad esempio?

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ descrive una corda $\gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$ e se $\lambda : Supp\,\gamma \to \mathbb{R}$ è la sua densità lineare, allora
$M = \int_\gamma \lambda\, ds \equiv \int_a^b \lambda(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, dt$ è la massa della corda
$x_B = \frac{1}{M}\int_\gamma x \cdot \lambda\, ds = \frac{1}{M}\int_a^b x(t) \cdot \lambda(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\, dt$
$y_B = \frac{1}{M}\int_\gamma y \cdot \lambda\, ds = \frac{1}{M}\int_a^b y(t) \cdot \lambda(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\, dt$
$z_B = \frac{1}{M}\int_\gamma z \cdot \lambda\, ds = \frac{1}{M}\int_a^b z(t) \cdot \lambda(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\, dt$
Con x_B, y_B, z_B le coordinate del baricentro della corda

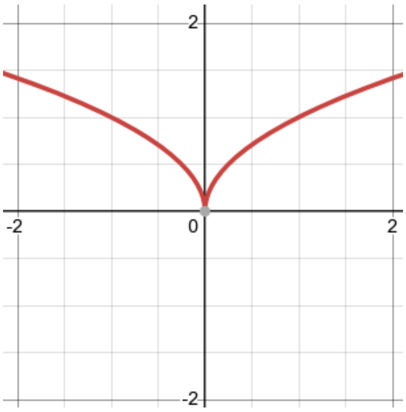
Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ descrive un oggetto che ruota intorno a un asse e se $\lambda : Supp\gamma \to \mathbb{R}$ è la sua densità lineare, d è la distanza dall'asse, $\int_\gamma d^2 \cdot \lambda \, ds \equiv \int_a^b d^2(\gamma(t)) \cdot \lambda(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \, dt$ è il *momento d'inerzia*.
Ad esempio, intorno all'asse z: $\int_a^b (x^2(t) è y^2(t)) \cdot \lambda(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \, dt$ essendo $d = x^2 + y^2$.

[Lezione 04]

1.4.9. Esercizio

Studiare $\gamma(t) = (t^5, |t|^{5/2}) \quad - \leq t \leq 1$

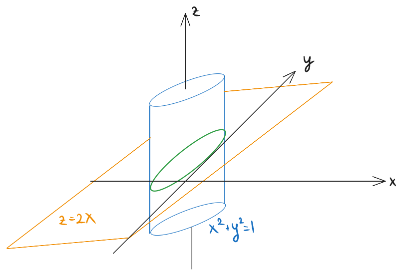
$Supp\,\gamma = Graph\,f(x)$ in $[-1,1]$, $f(x) = \sqrt{|x|}$



t^5 è crescente, quindi iniettiva, quindi γ è semplice.
γ è non chiusa: $\gamma(-1) \neq \gamma(1)$ (si può vedere anche dall'iniettività).
$\gamma'(t) = (5t^4, \frac{5}{2}|t|^{3/2} sgn(t))$ in $[-1,1]$
$||\gamma'(t)|| = (0,0)$ in $t = 0 \implies$ regolare tranne che in $t = 0$, $\gamma(0) = (0,0)$
Nota: $\phi(t) = t^5 = x$, $\phi'(t) = 5t^4 > 0$ se $t \neq 0 \implies \gamma \sim \tilde{\gamma}(x) = (x, \sqrt{|x|})$ solo in $[-1, -\epsilon]$ e $[\epsilon, 1]$.
$L(\gamma; (0,1)) = L(\tilde{\gamma}, (0,1)) = \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \, dx = \dots$
$\tilde{\gamma}'(x) = (1, \frac{1}{2\sqrt{x}})$

1.4.10. Esercizio

Parametrizzare e studiare $\mathbb{R}^3 \supseteq \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{z = 2x\}$ + retta tangente in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.
(Perché il testo del problema potrebbe essere sbagliato?)



$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \qquad -\pi \le \theta \le \pi \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

$Supp\,\gamma \subseteq \{z = 2x\} \implies$ piana

Verifico se è iniettiva:

$x(\theta_1) = x(\theta_2)$, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$, $\theta_1 = -\theta_2$

$y(\theta_1) = \sin\theta_1 = -\sin\theta_2 = -y(\theta_2) \implies \sin\theta_1 = 0$

Quindi $\theta_1 = 0 = \theta_2$ oppure $\theta_1 = -\pi = -\theta_2$

Quindi è chiusa e semplice.

$\gamma \in \mathcal{C}^\infty$

$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, -2\sin\theta) \neq 0$ regolare

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$r : x(s) = p + v\left(s - \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

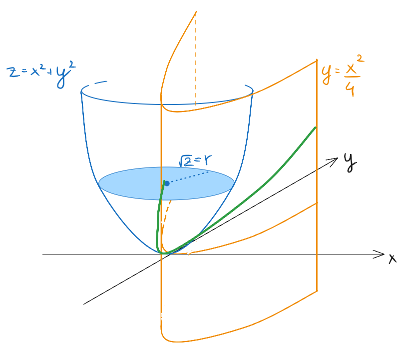
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}q \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}q \quad q \in \mathbb{R}, \quad q = t - \frac{\pi}{4} \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}q \end{cases}$$

$$q = 1 - \sqrt{2}x \quad \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - x - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}x) \end{cases}$$

Esercizio: correggere le coordinate cartesiane

1.4.11. Esercizio

Parametrizzare e studiare $\{z = x^2 + y^2\} \cap \{4y = x^2\}$ + "lunghezza".
(Perché il testo è sbagliato?)



$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{4} \\ z = t^2 + \frac{t^4}{16} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{4}, \frac{t^4}{16}\right)$

$\gamma'(t) = \left(1, \frac{t}{2}, 2t + \frac{t^3}{4}\right)$

$\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $||\gamma'|| \neq 0 \implies$ regolare

$x(t)$ è crescente, quindi γ è iniettiva, perciò è semplice e non chiusa.

$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + \left(\frac{t^2}{4}\right) + \left(2t + \frac{t^3}{4}\right)^2}$

$L(\gamma, [a,b]) = \int_a^b ||\gamma'|| \, dt = \dots$

2. Funzioni di più variabili

2.1. Funzione in più variabili - definizioni

> Una *funzione in più variabili* è una funzione
>
> $$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$$
>
> , $\forall \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $f(x) \in \mathbb{R}$, definita in un sottoinsieme D di uno spazio $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), detto dominio di funzione.

Se l'insieme D non è precisato a priori, si intende il più grande insieme sul quale l'espressione della funzione ha significato.

> Il *grafico di una funzione* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è l'insieme dello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$ definito come
>
> $$Graph\, f := \{(\underline{x}, f(x)), \underline{x} \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

> Gli *insiemi di livello* (o *curve di livello* se $n = 2$) $c \in \mathbb{R}$ Sono quei sottoinsiemi tali che
>
> $$L_c(f) := \{\underline{x} \in D : f(x) = c\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$$
>
> data $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione.

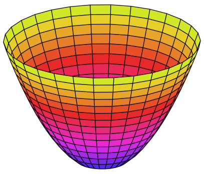
> Dico che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha *simmetria radiale* (quindi è una *funzione radiale*) se $\exists h : f(x) = h(||x||^2)$
>
> > **Osservazione**
> >
> > Se f è radiale, allora gli insiemi di livello sono circonferenze (o $\emptyset$) quando h è iniettiva.
> > Questo avviene perché:

> $c = f(\underline{x}) = h(||x||^2) \iff ||x||^2 = h^{-1}(c) \iff ||\underline{x}|| = \sqrt{h^{-1}(c)}$, che è il bordo di una palla centrata in 0 di raggio $\sqrt{h^{-1}(c)}$.

2.1.1. Esempio

$f(x,y) = x^2 + y^2 = h(||\underline{x}||^2)$
$h(x) = f(x,0) = x^2$

$$L_c(f) = \begin{cases} \emptyset & c < 0 \\ \{(0,0)\} & c = 0 \\ \partial B(0, \sqrt{c}) & c > 0 \end{cases}$$

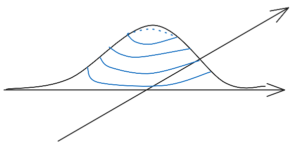


2.1.2. Esempio

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = h(||x||^2)$, $h(\omega) = e^{-\omega}$
$h(x))f(x,0) = e^{-x^2}$

$$L_c(f) = \begin{cases} \emptyset / c \leq 0,\ c > 1 \\ \partial B\left(\underline{0}, \sqrt{\ln \frac{1}{c}}\right) & 0 < c < 1 \end{cases}$$

Infatti per $1 > c > 0$ ottengo $e^{-(x^2+y^2)} = c \iff -(x^2+y^2) = \ln c i f x^2 + y^2 = \ln \frac{1}{c}$



2.1.3. Esempio

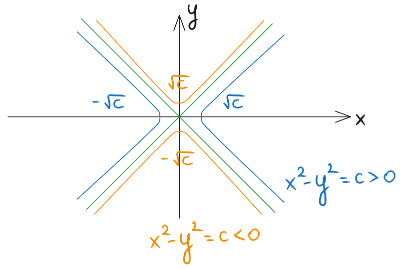
$f(x) = 1 = h(||x||^2)$, $x \in \mathbb{R}^n$
$L_1(f) = \mathbb{R}^n$
$L_c(f) = \emptyset$, $c \neq 1$

Lezione 05

2.1.4. Esercizio

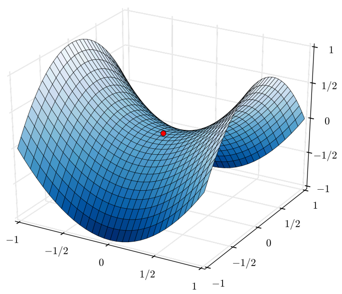
$z = x^2 - y^2$. **Come disegnare il grafico?**

Profili:
$x = 0$, $h_1(x) = f(x,0) = x^2$
$y = 0$, $h_2(y) = f(0,y) = -y^2$
Ottengo due iperboli, una sull'asse x e una sull'asse y:



Livelli:

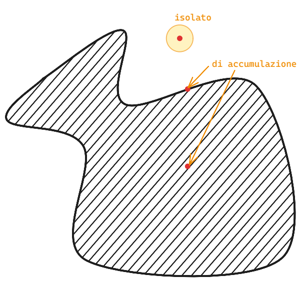
$$x^2 - y^2 = c : \begin{cases} c = & x = y \text{ o } y = -x \\ c > 0 & \text{iperbole con vertice } y = 0, x = \pm\sqrt{c} \\ c < 0 & \text{iperbole con vertice } x = 0, y = \pm\sqrt{c} \end{cases}$$



2.2. Limiti di funzioni in più variabili

2.2.1. Punti di accumulazione e isolati - definizione

> Un punto è di *accumulazione* per $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se $\forall U_p$ intorno di p
>
> $$U_p \cap D \setminus \{p\} \neq \emptyset$$
>
> cioè se ogni intorno di p contiene punti di D diversi da p.
> Si dice p *isolato* per D se $\exists U_p$ intorno di p tale che
>
> $$U_p \cap D = \{p\}$$
>
> cioè se non è di accumulazione.



2.2.1.1. Proposizione

Se $p \in D$, allora o è di accumulazione, o è isolato (considerando che la definizione di punto isolato è la negazione di quella di punto di

accumulazione, questa conclusione risulta banale).
Se $p \notin D$, allora o è esterno o è di accumulazione per D.

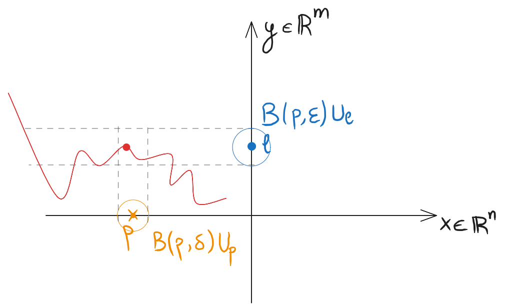
Terminologia

$Acc(D) = \{\text{punti di accumulazione di } D\} = \bar{D} \setminus \{\text{punti isolati di } D\}$

2.2.2. Limite (reale) - definizione

> Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $p \in Acc(D)$dico che $\exists \lim_{x\to p} f(x) = l$ se $\forall U_l$ intorno di l $\exists U_p$ intorno di p tale che $\forall x \in D \cap U_p \setminus \{p\}$ $f(x) \in U_l$.

2.2.2.1. Visualizzo



2.2.3. Funzione continua - definizione

> Se $p \in D$ dico f continua in p quando $l = f(p)$ ossia $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.
> Definisco f continua nei punti isolati.

Significa che la funzione è continua in un punto se $\forall U_{f(p)}$ $\exists U_p : x \in D \cap U_p \implies f(x) \in U_l$ (notare che non viene tolto il punto).

Osservazione

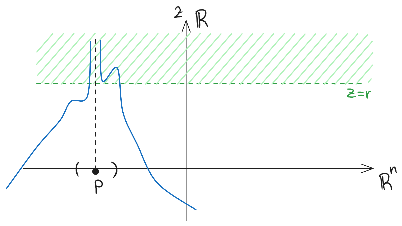
Rientrano in questa definizione i limiti di funzioni vettoriali $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to R^k$ considerati componente per componente.
Mostriamo ad esempio che se $\gamma_i(t) \to l_i$ per $t \to p$ $\forall i = 1, \ldots, k$, allora $\lim_{t\to p} \gamma(t) = l$ con la definizione sopra:
Se $\lim_{t\to p} \gamma_i = l_i$ per $i = 1, \ldots, k$, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_i < 0 : 0 < |t - p| < \delta_i$, $|\gamma_i - l_i| < \epsilon$
Scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$.
Se $0 < |t - p| < \delta$ ho allora $|\gamma_i - l_i| < \epsilon$ per tutte le componenti, ossia $\gamma(t) \in Q(l, \epsilon) \implies \gamma(t) \in B(l, \epsilon\sqrt{n})$.
Viceversa, se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta < 0$: se $0 < |t - p| < \delta$ allora $\gamma(t) \in B(l, \epsilon) \implies \gamma \in Q(l, \epsilon) \implies |\gamma_i - l_i| < \epsilon$ per $i = 1, \ldots, k \implies \lim_{t\to p} \gamma_i = l_i$

2.2.3.1. Caso $l \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to p} f(x) = l$?
Con $x \in D$ $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : 0 < ||x-p|| < \delta$: $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.

Caso $l = +\infty$, $p \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ se $\forall r > 0\, \exists \delta > 0 : 0 < ||x-p|| < \delta$ con $x \in D$ ho $f(x) > r$

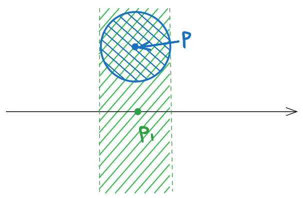


2.2.4. Esercizio

$f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1)$ con h continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f è continua in $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Q: $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : 0 < ||x-p|| < \delta$, ho $f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$?

Siccome h continua
$\exists \tilde{\delta} : 0 < |x_1 - p_1| < \delta$, $\underbrace{h(p_1)}_{f(p)} - \epsilon < h(x) < h(p_1) + \epsilon$



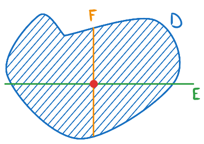
Ok! Posso prendere $\delta = \tilde{\delta}$

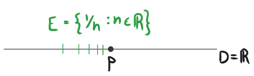
2.2.5. Proprietà dei limiti

2.2.5.1. Unicità del limite - teorema

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in AccD$, se $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l_1$ e se $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l_2 \implies l_1 = l_2$

Se $p \in AccD$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l$; se $E \subseteq D$, $p \in AccE$ allora $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l$ in E.





2.2.5.2. Permanenza del segno - proposizione per i limiti

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione, $p \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per D e $\lim_{x \to p} f(x) > 0$ (eventualmente $+\infty$). Allora esiste un intorno U_p di p tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in U_p \cap D \setminus \{p\}$

2.2.5.3. Permanenza del segno - teorema per funzioni continue

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(p) > 0$ c'è un intorno U_p tale che $f > 0$ su $U_p \cap D$.

> **Osservazione**
>
> Come conseguenza sono continui i polinomi e composte di funzioni continue reali con polinomi (ad esempio $\log(1 + x + x^2y + y^3)$).

2.2.5.3.1. Esempio

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \underbrace{e^x + y^2 e^x}_{f} = 1$

$\exists B(\underline{0}, \delta) : f(x, y) > \frac{1}{2}$

2.2.5.4. Algebra dei limiti - proposizione

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni, $p \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per D, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Sia $f(x) \underset{p}{\to} l_1$, $g(x) \underset{p}{\to} l_2$.

Allora

1. $f(x) + g(x) \underset{p}{\to} l_1 + l_2$:
2. $f(x)g(x) \underset{p}{\to} l_1 l_2$;
3. qualora $l_2 \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{p}{\to} \frac{l_1}{l_2}$.
4. Casi di limiti infiniti:
   - $c + \infty = +\infty$;
   - $(c > 0) \cdot (+\infty) = +\infty$;
   - $\frac{c > 0}{0^+} = +\infty$.

2.2.5.4.1. Esempio

$f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$.

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f + g = 0 + 0 = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} fg = 0 * 0 = 0$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f}{e^g} = \frac{x}{e^y} = \frac{0}{1} = 0$

2.2.5.5. Algebra delle funzioni continue - proposizione

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n\to\mathbb{R}}$, $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni continue in $p \in D$. Allora sono continue in p:

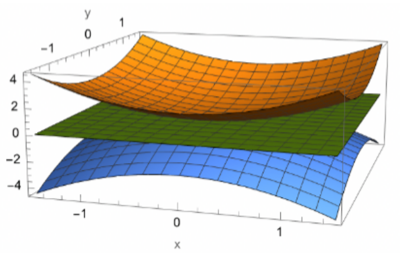
- cf, $(c \in \mathbb{R})$;
- $f + g$;
- fg;
- $\frac{f}{g}$, $(g(p) \neq 0)$.
  Se poi h è una funzione di variabile reale continua in $f(p)$, la funzione composta $h \circ f(x) := h(f(x))$ è continua in $f(p)$ (cioè la composizione di funzioni continue produce funzioni continue dove ben definita).

2.2.5.6. Teorema dei carabinieri (o del confronto) - per funzioni continue e limiti

Siano f, g, h definite intorno a p (p escluso) e si supponga

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

attorno a p (p escluso). Se $f(x) \underset{p}{\to} l$, $h(x) \underset{p}{\to} l$, allora $g(x) \underset{p}{\to} l$



2.2.5.6.1. Esempio

$f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$-1x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{y} \leq 1x^2$
$-1y^2 \leq y^2 \sin\frac{1}{x} \leq 1y^2$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 ?'$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -x^2 - y^2 = 0$
$-x^2 - y^2 \leq f \leq x^2 + y^2$, che applicando il limite per $(0,0)$ diventa $0 \leq l \leq 0$.

2.2.6. Esercizio

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^3y}-1}{x^3y+o(x^3y)} = ?$

Ricordo che $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^3y}-1}{x^3y+o(x^3y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-z(x,y)}-1}{z(x,y)+o(z(x,y))} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{-z}-1}{z+o(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{-1}-1}{-z} \frac{z}{z+o(z)}(-1) = -1$

2.2.7. Esercizio

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{[\sin(3x^6)(y+4)]}-1}{x^6}$ ha dominio $\{x \neq 0\}$.
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{e^{(3x^6)(y+4)}-1}{\sin(3x^6)(y+4)}}_{\to 1} \underbrace{(y+4)}_{\to 4} \underbrace{\frac{\sin(3x^6)}{3x^6}}_{\to 1} \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

2.2.8. Teorema

- $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, U *aperto*, allora $\forall c \in \mathbb{R}$

  $$\{x \in U : f(x) > c\},\ \{x \in U : f(x) < c\},\ \{f(x) \neq c\}$$

  sono insiemi *aperti*;
- $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, C chiuso, allora $\forall c \in \mathbb{R}$

  $$\{x \in U : f(x) \geq c\},\ \{x \in U : f(x) \leq c\},\ \{f(x) \in [a,b]\}$$

  sono insiemi *chiusi*.

2.2.8.1. Dimostrazione del primo

Se $p \in U$ un punto del dominio dove $l = f(p) > c > 0$ allora $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0$ tale che $||x-p|| < \delta$ allora $-\epsilon < f(p) - l < \epsilon$ scelgo $\epsilon = \frac{l}{2}$ e ottengo
$f(p) > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$
$\implies x \in B\left(p, \frac{c}{2}\right)\ \ f(x) \in \{x \in U : f(x) > c\}$

2.2.8.2. Esempi

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 8y^2 \leq 5\}$ è chiuso (in particolare, è un'ellisse con il brodo compreso)
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 8y^2 < 5\}$ è aperto (in particolare, è un'ellisse senza il bordo).
$\{(x,y) : \ln(1 + x^2e^y) > 2\}$ è aperto.

> **Osservazione**
>
> Se volessi considerare l'intersezione di due insiemi, dovrebbero essere entrambi aperti o entrambi chiusi.
> Vediamo un controesempio:
> $\{x^2 + y^2 < 9\} \cap \{x \geq 0\}$ non è né aperto né chiuso.