

# Elementi di Fisica 2

## 0. Indice

- [0. Indice](#)
- [1.1. Forza elettrostatica e campo elettrostatico](#)
  - [1.1. La carica elettrica](#)
    - [1.1.1. Esperimento 1 - Elettrizzazione per strofinio](#)
  - [1.2. Proprietà fondamentale](#)
  - [1.3. Legge di conservazione della carica](#)
  - [1.4. Quantizzazione della Carica](#)
  - [1.5. Legge di Coulomb](#)
    - [1.5.1. Esempio 1.2](#)
  - [1.6. Esperimento 2 - Elettroscopio a foglie](#)
  - [1.7. Esempio 1.4](#)
  - [1.8. Elettrizzazione per contatto - conduttore isolato](#)
  - [1.9. Elettrizzazione per contatto - conduttore a terra](#)
  - [1.10. Legge di Coulomb per più cariche](#)
  - [1.11. Il campo elettrico](#)
    - [1.11.1. Campo elettrico - definizione](#)
    - [1.11.2. Problema](#)
    - [1.11.3. Problema](#)
    - [1.11.4. Esercizio 1.5](#)
  - [1.12. Il campo elettrico prodotto da una distribuzione continua di carica](#)
    - [1.12.1. Esercizio 1.6](#)
    - [1.12.2. Esercizio 1.7](#)
  - [1.13. Linee di forza del campo elettrostatico](#)
    - [1.13.1. Proprietà](#)
    - [1.13.2. Esempi di linee di campo elettrostatico](#)
- [2. Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico](#)
  - [2.1. Lavoro della forza elettrostatica](#)
    - [2.1.1. Conservatività del campo elettrico](#)
  - [2.2. Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme](#)
    - [2.2.1. Additività del potenziale elettrostatico](#)
    - [5.3.1. Esercizio 2.1](#)
    - [5.3.2. Generalizzazione](#)
  - [2.3. Esempio 2.8](#)

- [2.4. Legge di conservazione dell'Energia](#)
- [2.5. Energia potenziale elettrostatica](#)
- [2.6. Gradiente di una funzione scalare](#)
  - [2.6.1. Esempio](#)
  - [2.6.2. Teorema del differenziale totale](#)
- [2.7. Legame tra potenziale e campo elettrostatico](#)
- [2.8. Esempio 2.6](#)
- [2.9. Esempio 2.7](#)
- [2.10. Superfici equipotenziali](#)
  - [2.10.1. Proprietà](#)
- [2.11. Dipolo elettrico](#)
  - [2.11.1 Momento del dipolo elettrico](#)
  - [2.11.2. Campo elettrico generato dal dipolo](#)
  - [2.11.3. Dinamica del dipolo](#)
  - [2.11.4. Espansione a multipolo](#)
- [3. La legge di Gauss](#)
  - [3.1 Flusso del campo elettrostatico](#)
    - [3.1.1. Esempio](#)
  - [3.2. Teorema di Gauss](#)
    - [3.2.1. Dimostrazione del Teorema di Gauss](#)
  - [3.3. Applicazioni del teorema di Gauss](#)
    - [3.3.1. Esempio 3.2](#)
    - [3.3.2. Esempio 3.3](#)
    - [3.3.3. Esempio 3.4](#)
  - [3.4. Divergenza del campo elettrostatico](#)
    - [3.4.1. Equazione di Poisson](#)
  - [3.4. Teorema di Stokes](#)
    - [3.4.1. Rotore](#)
    - [3.4.2. Esercizio 3.20](#)
- [4. Conduttori, dielettrici, energia elettrostatica](#)
  - [4.1. Conduttori in equilibrio](#)
    - [4.1.1. Esempi](#)
    - [4.1.2. Esempio 4.1](#)
  - [4.2. Conduttore cavo](#)
    - [4.2.1. Proprietà](#)
  - [4.3. Conduttore cavo contenente un conduttore carico](#)
  - [4.4. Il condensatore](#)
    - [4.4.1. Condensatore sferico \(esempio 4.2\)](#)
    - [4.4.2. Condensatore cilindrico \(esempio 4.3\)](#)

- [4.4.3. Condensatore piano \(esempio 4.4\)](#)
- [4.5. Collegamento tra condensatori](#)
  - [4.5.1. Collegamento in parallelo](#)
  - [4.5.2. Collegamento in serie](#)
- [4.5. Energia del campo elettrostatico](#)
- [4.6. Dielettrici](#)
  - [4.6.1. Campo elettrostatico interno al dielettrico](#)
  - [4.6.2. Costanti dielettriche relative e rigidità dielettriche](#)
- [4.7. Polarizzazione dei dielettrici](#)
  - [4.7.1. Polarizzazione per orientamento](#)
  - [4.7.2. Vettore di polarizzazione](#)
- [4.8. Esercizi](#)
  - [4.8.1 Esercizio 4.35](#)
  - [4.8.2. Esercizio 4.40](#)
- [5. Corrente](#)
  - [5.1. Conduzione elettrica](#)
    - [5.1.1. Materiali conduttori](#)
  - [5.2. Modello di Drude per i materiali conduttori](#)
  - [5.3. Corrente elettrica](#)
    - [5.3.1. Corrente elettrica stazionaria](#)
  - [5.4. Legge di Ohm della conduttività elettrica](#)
    - [5.4.1. Legge di Ohm per i conduttori metallici](#)
    - [5.4.2. Effetti termici](#)
  - [5.5. Esercizio 5.6](#)
  - [5.6. Resistenze in serie e in parallelo](#)
    - [5.6.1. Resistenza in serie](#)
    - [5.6.2. Resistenza in parallelo](#)
  - [5.7. Forza elettromotrice](#)
  - [5.8. Potenza dissipata da una resistenza](#)
    - [5.8.1 Effetto Joule](#)
  - [5.9. Leggi di Kirchoff](#)
  - [5.10. Esempio 5.9](#)
  - [5.11. Carica e scarica di un condensatore in un circuito RC](#)
    - [5.11.1. Scarica di un condensatore](#)
    - [5.11.2. Carica di un condensatore](#)
- [6. Campo magnetico e forza magnetica](#)
  - [6.1. Interazione magnetica e campo magnetico](#)
    - [6.1.1. La calamita spezzata](#)

- 6.2. Elettricità e magnetismo
- 6.3. Forza magnetica su una carica in moto
  - 6.3.1. Teorema dell'energia cinetica
- 6.5. Moto di una particella carica in un campo magnetico
  - 6.5.1. Caso con angolo generico tra velocità e campo magnetico
- 6.6. Forza su un conduttore percorso da corrente
  - 6.6.1. Casi interessanti
  - 6.6.2. Esempio 6.1
- 6.7. Moto meccanico su circuiti piani
- 6.8. Effetto Hall
- 6.9. Esercizio 6.1
- 7. Sorgenti del campo magnetico, legge di Ampère, proprietà magnetiche della materia
  - 7.1. Campo magnetico generato da una carica in movimento
    - 7.1.1. Prima legge di Laplace
  - 7.2. Campi magnetici di circuiti particolari (applicazioni della prima legge di Laplace)
    - 7.2.1. Campo di una spira lungo il suo asse normale
    - 7.2.2. Campo di un file rettilineo - legge di Biot-Savart
    - 7.2.3. Campo di un solenoide rettilineo lungo il suo asse
    - 7.2.4. Esercizi
  - 7.3. Azioni elettrodinamiche tra i fili percorsi da corrente
    - 7.3.1. Esempio 7.1
    - 7.3.2. Esercizio 7.13
  - 7.4. Legge di Ampère
    - 7.4.1. Applicazioni della legge di Ampère
    - 7.4.2. Forma locale della legge di Ampère
    - 7.4.3. Esercizio 7.18
  - 7.5. Teorema di Gauss per il campo magnetico
    - 7.5.1. Forma locale del Teorema di Gauss per il campo magnetico
  - 7.6. Proprietà magnetiche della materia
    - 7.6.1. Sostanze diamagnetiche
    - 7.6.2. Sostanze paramagnetiche
    - 7.6.3. Ferromagnetismo
- 8. Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo
  - 8.1. Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica
    - 8.1.1. Legge di Lenz

- [8.2. Origine della forza elettromotrice indotta e del campo elettrico indotto](#)
- [8.3. Applicazioni della legge di Faraday](#)
  - [8.3.1. Attrito elettromagnetico](#)
  - [8.3.2. Correnti di Foucault](#)
  - [8.3.3. Generatore di corrente alternata](#)
  - [8.3.4. Legge di Felici](#)
- [8.4. Autoinduzione](#)
  - [8.4.1. Forza elettromotrice di autoinduzione](#)
  - [8.4.2. Circuito RL in serie](#)
- [8.5. Energia magnetica](#)
  - [8.5.1. Bilancio energetico del circuito RL](#)
  - [8.5.2. Energia intrinseca della corrente](#)
- [8.6. Mutua induzione](#)
  - [8.6.1. Circuiti accoppiati](#)
- [9. Oscillazioni elettriche e correnti alternate](#)
  - [9.1. Oscillazioni elettriche](#)
    - [9.1.1. Circuito LC](#)
    - [9.1.2. Circuito RLC in serie](#)
  - [9.2. Circuiti in corrente alternata](#)
    - [9.2.1. Circuito con resistenza](#)
    - [9.2.2. Circuito con condensatore](#)
    - [9.2.3. Circuito con induttore](#)
    - [9.2.4. Circuiti RL e RC \(in serie\)](#)
  - [9.3. Circuito RLC in serie, risonanza](#)
    - [9.3.1. Risonanza](#)
  - [9.4. Potenza nei circuiti alternati](#)
  - [9.5. Il trasformatore ideale](#)
- [10. Le equazioni di Maxwell](#)
  - [10.1. Legge di Ampère-Maxwell](#)
  - [10.2. Le equazioni di Maxwell \(forma integrale\)](#)
  - [10.3. Le equazioni di Maxwell \(forma differenziale\)](#)
- [11. Onde elettromagnetiche](#)
  - [11.1. Onde piane](#)
    - [11.1.1. Onde piane armoniche](#)
  - [11.2. Onde elettromagnetiche piane](#)
    - [11.2.1. Proprietà](#)
  - [11.3. Energia di un'onda elettromagnetica piana e vettore di Poynting](#)

- [11.4. Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana e pressione di radiazione](#)
- [11.5. Polarizzazione dell'onda elettromagnetica piana](#)
- [11.6. Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante](#)
- [11.7. Spettro delle onde elettromagnetiche](#)
  - [11.7.1. Onde hertziane](#)
  - [11.7.2. Microonde](#)
  - [11.7.3. Infrarosso](#)
  - [11.7.4. Luce visibile](#)
  - [11.7.5. Ultravioletto](#)
  - [11.7.6. Raggi X](#)
  - [11.7.7. Raggi gamma](#)

## [Lezione 01](#)

### **1.1. Forza elettrostatica e campo elettrostatico**

#### **1.1. La carica elettrica**

##### **1.1.1. Esperimento 1 - Elettrizzazione per strofinio**



Mettendo il panno vicino alla bacchetta sul sostegno nel momento iniziale, viene mostrato che gli elementi sono neutri, mentre in seguito allo sfregamento hanno acquisito una carica.

Avvicinando una bacchetta di plexiglas a quella sul sostegno (fatta dello stesso materiale) senza che si tocchino, queste si respingono, quindi la bacchetta sul sostegno inizia a ruotare. Avvicinando poi una bacchetta di ebanite, si nota che questa volta si attraggono.

□

#### **1.2. Proprietà fondamentale**

L'elettromagnetismo è lo studio della fisica cariche elettriche. Ne esistono di due varietà (scelte inizialmente in modo arbitrario): le *cariche positive* e le *cariche negative*.

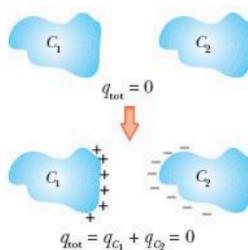
Le cariche dello stesso segno si respingono, mentre quelle di segno opposto si attraggono.

### 1.3. Legge di conservazione della carica

In un sistema isolato, la carica elettrica totale, cioè la somma delle cariche positive e negative presenti in un qualsiasi istante, non cambia mai.

Possono essere create delle particelle caricate, ma questa creazione implica la creazione anche di una carica uguale ma opposta.

Il nostro universo appare come una miscela molto bilanciata di cariche elettriche.



▲ Figura 1.5 Trasferimento di elettroni, per strofinio, da un materiale isolante ad un altro.



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

$$q_{tot} = 0$$

### 1.4. Quantizzazione della Carica

Tutte le particelle elementari cariche possiedono la stessa carica: la carica elementare

$$e = 1.6022 * 10^{-19} C$$

| Particella | Carica (C)           | Massa (kg)          |
|------------|----------------------|---------------------|
| Elettrone  | $-1.6022 * 10^{-19}$ | $9.1094 * 10^{-31}$ |
| Protone    | $1.6022 * 10^{-19}$  | $1.6726 * 10^{-27}$ |

#### 💡 Nota bene

Esistono i "Quark" con carica frazionaria, ma non possono esistere isolati. Compongono sempre particelle con cariche uguali a multipli interi di  $e$ .

Nel corso tratteremo le particelle cariche come portatrici di cariche dove la loro estensione e la loro struttura si possono considerare trascurabili.

### ! Approfondimento

Il neutrone ha circa la stessa massa del protone e ha carica nulla.

## 1.5. Legge di Coulomb

Due cariche elettriche si respingono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle intensità delle cariche e inversamente al quadrato della loro distanza.

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

La forza è newtoniana:  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$\epsilon_0$  è la *costante dielettrica (o permittività) del vuoto* e ha valore

$$\epsilon_0 = 8.8542 * 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

La costante  $\epsilon_0$  è molto più "forte" dell'analogia della legge di gravitazione ( $\gamma = 6.67 * 10^{-11}$ ), ma nell'universo le masse dei pianeti sono molto grandi e le cariche in genere sono neutre, perciò la legge di gravità si nota maggiormente.

### 1.5.1. Esempio 1.2

L'elettrone e il protone di un atomo di idrogeno si trovano a una distanza media di  $r = 0.53 * 10^{-10}m$ , che coincide con la dimensione dell'atomo.

**Calcolare l'intensità della forza di gravitazione e della forza elettrostatica tra il protone e l'elettrone.**

$$|\vec{F}_e| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} ||\hat{r}|| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8.2 * 10^{-8} N$$
$$F_g = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = 3.62 * 10^{-47} N$$

La forza di gravità è trascurabile rispetto alla forza elettrostatica, infatti hanno una differenza di 39 ordini di grandezza.

□

## 1.6. Esperimento 2 - Elettroscopio a foglie



Avvicinando una bacchetta elettrizzata ad un elettroscopio scarico, le foglioline divergono per poi richiudersi quando si allontana il corpo elettrizzato.

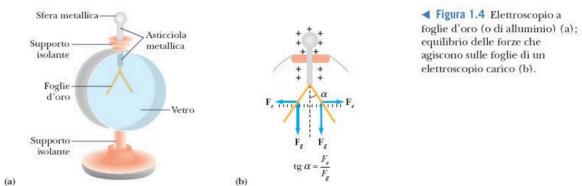
Avviene una repulsione: gli elettroni sul pomello vengono spinti verso il basso, dove sono le foglie, che a loro volta si respingono e si allontanano. In cima al pomello si troverà una carica positiva, mentre in basso una negativa.

Dopo il contatto, l'elettroscopio acquisisce una carica dello stesso segno di quello della bacchetta.

Se il pomello dell'elettroscopio viene toccato mentre la bacchetta è vicina, l'elettroscopio acquisisce una carica con segno opposto a quella della bacchetta.

L'elettroscopio a foglia è stato uno dei primi strumenti per misurare la carica presente sugli oggetti, misurando l'angolo delle foglie (a parità di distanza).

## 1.7. Esempio 1.4



◀ Figura 1.4 Elettroscopio a foglie d'oro (o di alluminio) (a); equilibrio delle forze che agiscono sulle foglie di un elettroscopio carico (b).

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

Due sferette conduttrici uguali, di massa  $m$  e carica  $q$  sono sospese ciascuna ad un filo lungo  $l$ . In equilibrio i fili sono disposti simmetricamente rispetto alla verticale, ciascuno ad angolo  $\theta$ .

**Calcolare la relazione tra  $q$  e  $\theta$ .**

In questo esercizio il sistema non è un universo isolato in cui solo le due cariche esistono, ma invece posizioniamo le cariche "nei pressi" di un corpo massivo, la Terra. Perciò la forza peso non è trascurabile (nonostante avessimo visto che la differenza degli ordini di grandezza era molto grande).

$$\tan \theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2} \frac{1}{mg} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg \sin^2 \theta}$$

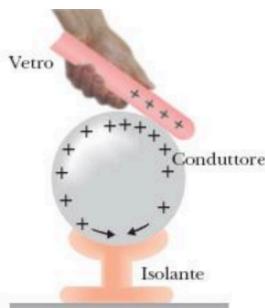
$\tan \theta \sim \theta$  e  $\sin \theta \sim \theta$  per angoli piccoli, quindi trovo:

$$q \approx \sqrt{mg16\pi\epsilon_0 l^2 \theta^3}$$

□

## Lezione 02

### 1.8. Elettrizzazione per contatto – conduttore isolato



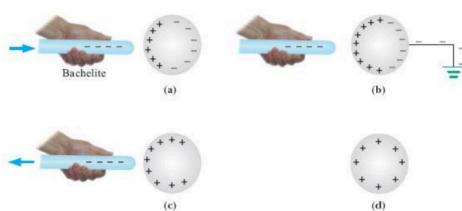
▲ Figura 1.6 Carica di una sfera di materiale conduttore isolato per contatto e ridistribuzione sulla superficie.

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

La carica che era presente nella bacchetta si trasferisce nel conduttore, così la bacchetta si scarica e il conduttore si carica.

### 1.9. Elettrizzazione per contatto – conduttore a terra

► Figura 1.8 Fasi del processo di carica di un conduttore sferico isolato per induzione elettrostatica.



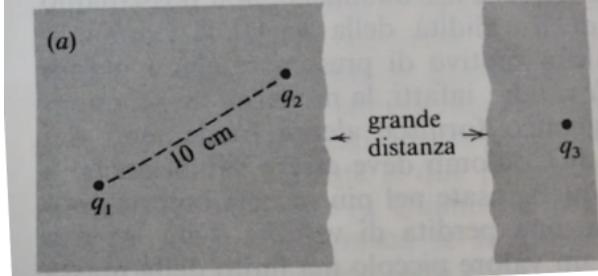
P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

Avvicinando la bacchetta carica si creavano delle cariche positive vicino alla bacchetta. Una volta messo il sistema a terra, gli elettroni si possono spostare ancora di più. Una volta tolto il collegamento, gli elettroni non possono più tornare sul conduttore, quindi mantiene la carica acquisita.

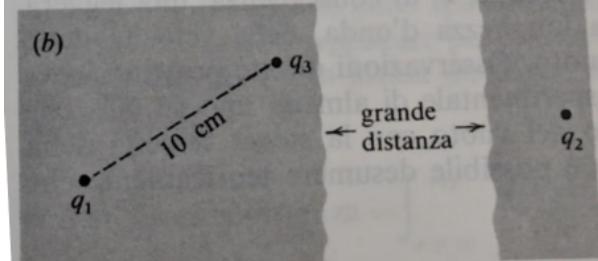
### 1.10. Legge di Coulomb per più cariche

Supponiamo di avere cariche  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e ci facciamo tre esperimenti.

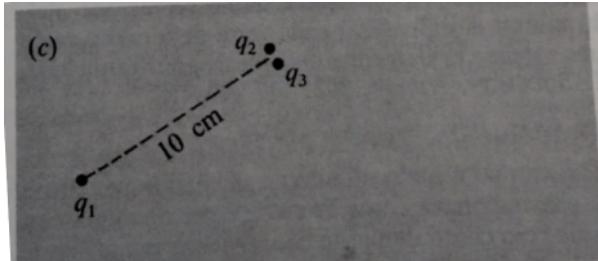
1. Misuriamo la forza che agisce su  $q_1$  quando  $q_2$  è a  $10\text{cm}$  e  $q_3$  è molto lontano ( $r = \infty$ ). Troviamo  $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$



2. Misuriamo la forza che agisce su  $q_1$  quando  $q_3$  è a  $10\text{cm}$  e  $q_2$  è molto lontano ( $r = \infty$ ). Troviamo  $\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13}$



3. Misuriamo la forza che agisce su  $q_1$  quando  $q_2$  e  $q_3$  sono molto vicine ed entrambe a  $10\text{cm}$  da  $q_1$ . Troviamo  $\vec{F}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13}$



Per il principio della linearità della forza, in generale la formula è

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_i}{r_{1i}^2} \hat{r}_{1i}$$

La forza con cui interagiscono due cariche non viene alterata dalla presenza di altre cariche: *la carica è additiva*.

Questo è la base del *principio di sovrapposizione*, ovvero la possibilità di combinare più insiemi di sorgenti in un unico sistema *sommendoli*, senza che vengano alterate le singole configurazioni.

## 1.11. Il campo elettrico

### 1.11.1. Campo elettrico – definizione

Supponiamo di avere cariche  $q_1, q_2, \dots, q_n$  fisse nello spazio. Ora avviciniamo una carica  $q_0$ . Siamo interessati solamente alla forza agente su  $q_0$  posta nel punto  $(x, y, z)$ :  $\vec{F}_0 = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i} = q_0 \vec{F}_{tot} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$

, abbiamo fatto una generalizzazione matematica.

Osserviamo che la forza è proporzionale a  $q_0$ , quindi possiamo dividere per  $q_0$ . Così otteniamo il *campo elettrico*, una grandezza vettoriale che dipende soltanto dalla distribuzione delle cariche  $q_1, \dots, q_n$  e dal punto  $(x, y, z)$ .

Una possibile formula del campo elettrico è

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

### 1.11.2. Problema

Se la cariche non sono veramente inamovibili, l'introduzione di una certa carica  $q_0$  può provocare uno spostamento delle cariche sorgenti rispetto alla loro posizione iniziale.

Allora una possibile definizione del campo elettrico è

$$\vec{E}(x, y, z) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

### 1.11.3. Problema

L'operazione di limite ha senso solo matematicamente perché le cariche sono quantizzate, in natura non sono mai state osservate cariche più piccole di  $e$ .

Un'altra possibile definizione ancora è

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$$

In questa definizione non c'è nulla di nuovo, è solo un altro modo per descrivere un sistema di cariche. Comunque rimane molto utile in quanto ci permette di predire la forza che agirà su una qualsiasi carica posta nel punto  $(x, y, z)$ .

### 1.11.4. Esercizio 1.5

Tre cariche positive eguali sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato  $l$ . **Calcolare la forza elettrica agente su ognuna delle cariche e il campo elettrostatico nel centro del triangolo.**

Chiamo le cariche  $q_0, q_1, q_2$ . Calcolo per  $q_0$ , in  $q_1$  e  $q_2$  il calcolo è analogo ma traslato.

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{01}^2} \hat{r}_{02} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{02}^2} \hat{r}_{01}$$

$$\hat{r}_{01} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{r}_{02} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{r}_{tot} = \hat{r}_{01} + \hat{r}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_x = 0$$

$$\vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2} \sqrt{3}$$

Pongo una quarta carica al centro. Noto che per la geometria del problema le forze dovute alle tre cariche ai vertici si annullano a vicenda, quindi la forza totale è zero.

□

## 1.12. Il campo elettrico prodotto da una distribuzione continua di carica

Finora abbiamo solo studiato il campo elettrico generato da cariche puntiformi. Spesso però le cariche sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria.

Noi siamo interessati al campo elettrico generato da queste cariche in punti distanti dove vengono viste come una distribuzione continua.

La distribuzione continua di carica esiste solo nel mondo matematico, ma siccome le cariche e le distanze fra loro sono infinitesimali rispetto al nostro punto di vista, possiamo considerare la carica come continua.

Una distribuzione di carica può essere:

- *Volumetrica*: Descritta da  $\rho$  che rappresenta la carica per unità di volume.  $\rho dx dy dz$  è la carica  $dq$  contenuta nel cubetto di volume  $dx dy dz$ . Per passare alla carica del volume bisogna integrare;
- *Superficiale*: Descritta da  $\sigma$  che rappresenta la carica per unità di superficie.  $\sigma d\Sigma$  è la carica  $dq$  contenuta nell'elemento di superficie  $d\Sigma$ . Anche questa volta bisogna fare l'integrale, ma di superficie;
- *Lineare*: Descritta da  $\lambda$  che rappresenta la carica per unità di linea.  $\lambda dl$  è la carica  $dq$  contenuta nell'elemento di curva  $dl$ .

### Nota bene

In generale, le distribuzioni di cariche sono funzioni con valori diversi in ogni punto. Nel corso tratteremo solo

distribuzioni uniformi.

Il campo elettrico generato da una distribuzione continua di carica è

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{\text{distribuzione}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{u}$$

dove  $r$  è la distanza tra l'elemento di carica  $dq$  e il punto  $(x, y, z)$ ,  $\hat{u}$  è il versore tra l'elemento di carica  $dq$  e il punto  $(x, y, z)$ .

- Nel caso volumetrico ho  $\vec{E}(x, y, z) = \int_{\text{volume}} dx' dy' dz' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0 r^2(x', y', z')} \hat{u}(x', y', z')$
- Nel caso superficiale ho  $\vec{E}(x, y, z) = \int_{\text{superficie}} dx' dy' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0 r^2(x', y', z')} \hat{u}(x', y', z')$
- Nel caso lineare ho  $\vec{E}(x, y, z) = \int_{\text{curva}} dx' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0 r^2(x', y', z')} \hat{u}(x', y', z')$

### 1.12.1. Esercizio 1.6

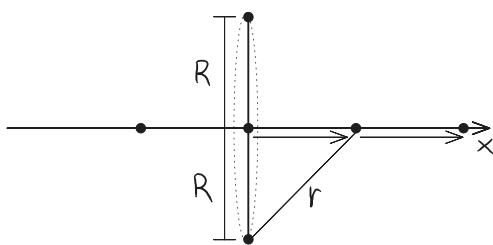
Una carica  $q$  è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio  $R$ . **Calcolare il campo elettrostatico sull'asse dell'anello.**

Per ogni punto nell'anello, troverò sempre un altro punto simmetrico, quindi le forze lungo il piano dei due punti si annullano e il campo sarà uscente.

Sarà inutile allora calcolare il campo elettrico lungo  $y$  e  $z$  paralleli all'asse  $x$  (l'asse dell'anello).

Allora:

$$\vec{E}_{tot} = E_{\hat{x}} = \int \frac{dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta \hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \int dl \hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta 2\pi R = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 r} \cos \theta \hat{x}$$



Osservo che  $\cos \theta = \frac{x}{x^2 + R^2}$

$$\vec{E}_{tot} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x} \xrightarrow{x \gg R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{x^2} \hat{x} \quad \text{dove } a = 2\pi R \lambda$$

[Lezione 03](#)

### 1.12.2. Esercizio 1.7

Un disco sottile di raggio  $R$  ha una carica  $q$  distribuita uniformemente su tutta la sua superficie. **Calcolare il campo elettrostatico sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui  $R$  tende all'infinito** (piano uniformemente carico).

$$\vec{E}_x^{\text{anello}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left[ \frac{x}{(x+R^2)} \right]^{3/2}$$

Il disco non è altro che un insieme di anelli infinitesimi, quindi si può usare l'additività per sommare i singoli contributi di tutti gli anelli, ognuno di raggio diverso.

$$q = \sigma\pi R^2$$

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

$$dE = \frac{\sigma rr d}{2\epsilon_0} \left[ \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \right]$$

$$E_x = \int_0^R \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[ \frac{r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} \right] = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2+r^2)}^{3/2} dr = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right]$$

Per  $R \rightarrow \infty$  il campo diventa  $E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}$

## 1.13. Linee di forza del campo elettrostatico

Le linee di forza del campo elettrostatico sono una rappresentazione grafica complessiva del campo in tutto lo spazio, ottenuta dalle curve le cui tangenti in ogni punto hanno la stessa direzione del campo in quel punto.

Sono curve regolari e continue, tranne che nei punti corrispondenti a posizioni occupate dalle cariche puntiformi.

Non forniscono direttamente l'intensità del campo.

Nella rappresentazione delle linee di campo si perde l'informazione sull'intensità.

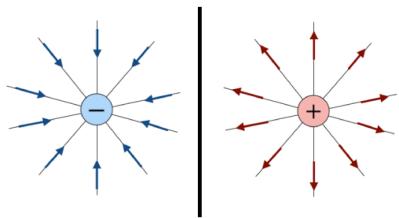
### 1.13.1. Proprietà

Queste sono proprietà universalmente valide per le linee di forza:

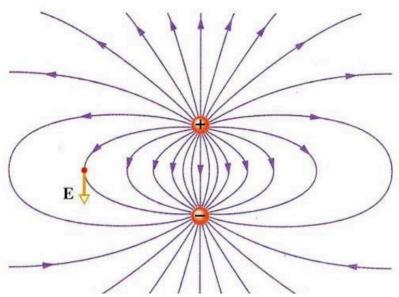
- Una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto;
- Le linee di forza si addensano dove l'intensità di campo è maggiore (si recuperano quindi alcune informazioni sull'intensità);
- Le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo elettrostatico è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- Le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative. Si chiudono all'infinito se ci sono solo cariche dello stesso segno.

## 1.13.2. Esempi di linee di campo elettrostatico

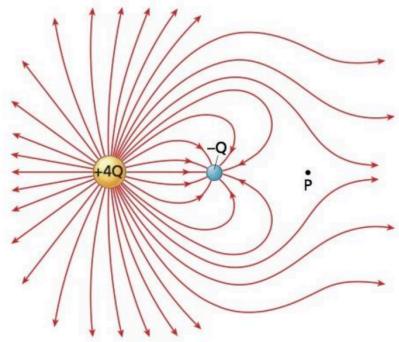
Per cariche puntiformi:



Per un dipolo:



Per due cariche di segno opposto e differente modulo:



## 2. Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico

### 2.1. Lavoro della forza elettrostatica

Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica per uno spostamento finito di una carica  $q$  dalla posizione  $A$  alla posizione  $B$

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q(V_B - V_A)$$

Dove abbiamo definito la *differenza di potenziale elettrostatica*

$$-(V_B - V_A) = \int_A^B E \cdot ds$$

### 2.1.1. Conservatività del campo elettrico

La differenza di potenziale elettrostatica è indipendente dal percorso scelto per arrivare dal punto  $A$  al punto  $B$ :

$$-(V_B - V_A) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\xi} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Infatti il campo elettrostatico è conservativo, così come la forza elettrostatica.

La circuitazione del campo elettrostatico è sempre uguale a zero.

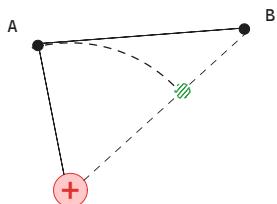
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

#### 💡 Osservazione

In questo caso per circuitazione si intende l'integrale di linea lungo il percorso chiuso, indicato con il simbolo " $\oint$ ".

## 2.2. Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

Siccome il potenziale non dipende dalla scelta del percorso, sceglieremo il percorso che ci permetta di semplificare il calcolo.



Posso "spostarmi" in un punto più vantaggioso sfruttando il fatto che forza e campo siano sempre a  $90^\circ$  fra di loro, quindi il lavoro dello spostamento è zero. Ottengo quindi una formula del tipo:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

quindi che dipende solamente dalla distanza dei punti dalla carica.

Se imponiamo che all'infinito il potenziale sia nullo abbiamo

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

## 2.2.1. Additività del potenziale elettrostatico

Vige il principio di sovrapposizione, quindi se il campo elettrostatico è generato da  $i$  cariche, quello totale avrà la seguente formula:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{A,i}}^{r_{B,i}} \frac{dr_i}{r_i^2}$$

Se imponiamo che all'infinito il potenziale sia nullo abbiamo

$$V(x, y, z) = - \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{s} = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

dove  $r_i$  è la distanza tra il punto  $P(x, y, z)$  e la carica  $q_i$ .

### 5.3.1. Esercizio 2.1

Calcolare il potenziale elettrostatico nel centro di un triangolo equilatero di lato  $l$  se in ogni vertice è presente una carica  $q$ .

$$V = - \int_{\infty}^{\text{centro}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$
$$V_1 = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}$$
$$r = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Per simmetria ho che  $V_1 = V_2 = V_3$  (in modulo).

$$V_{\text{tot}} = \sum V_i = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}$$

### 5.3.2. Generalizzazione

Nel caso in cui le cariche siano distribuite in modo continuo il potenziale elettrostatico diventa

$$V(x, y, z) = - \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distribuzione}} \frac{dq}{r}$$

dove  $r$  è la distanza tra il punto  $P(x, y, z)$  e l'elemento infinitesimo di carica  $dq$ .

#### ⌚ Unità di misura

Poiché la *differenza di potenziale* è un lavoro diviso per una carica, l'unità di misura nel SI è joule/coulomb,  $J/C$ . Questa unità è molto importante e si chiama *volt*, di simbolo  $V$ ; quindi

$$V = \frac{J}{C}$$

La differenza di potenziale di  $1V$  è quella che dà luogo al

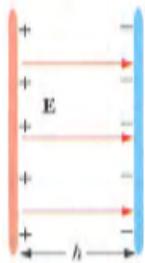
lavoro di  **$1J$**  per il trasporto di una carica di  **$1C$** .

Si noti che il volt è l'unità di misura anche delle tensioni elettriche e delle forze elettromotrici.

## Lezione 04

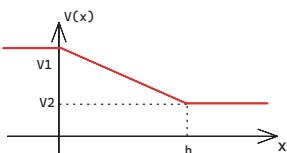
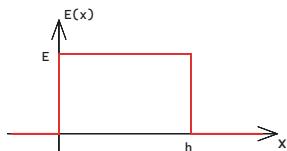
### 2.3. Esempio 2.8

**Calcolare l'andamento del potenziale elettrostatico tra due piani indefiniti, paralleli, uniformemente carichi con densità di superficie  $+\sigma$  e  $-\sigma$  e a distanza  $h$ .**



So che il campo tra i due piani ha modulo  $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Se quindi prendo un punto  $A$  sulla superficie interna del piano positivo e un punto  $B$  sulla superficie interna del piano negativo, alla stessa altezza di  $A$ , calcolo il potenziale:

$$V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (B - A) = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} h$$



Osservo che il campo all'esterno dei piani è nullo, quindi il potenziale è costante.

### 2.4. Legge di conservazione dell'Energia

Durante il moto della particella, l'**energia totale**, ovvero la somma dell'energia cinetica e dell'energia elettrostatica, **rimane costante**

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{cost}$$

**Nota bene**

Dati  $A = B$ , si ha  $V_A = V_B$ , quindi alla fine di un percorso chiuso l'energia cinetica è la stessa che all'inizio, la velocità può aver cambiato direzione, ma non modulo.

### ! Osservazione

Dato un campo uniforme, quindi costante in modulo, direzione e verso, si ottiene  $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E(z_B - z_A)$  perciò  $V_A = -Ez_A + c$ ,  $V_B = -Ez_B + c$ , con  $c$  costante, ovvero

$$V(z) = -Ez + c$$

Questo vuol dire che il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di un piano ortogonale alla direzione del campo (come avviene nell'[esempio 2.8](#) e nell'esempio seguente).

### Esempi 1.9 e 2.3

Una carica puntiforme  $q$  di massa  $m$  è liberata in quiete tra due piani indefiniti, paralleli, uniformemente carichi con densità di superficie  $+\sigma$  e  $-\sigma$  e a distanza  $h$ . Descrivere il moto della carica.

**Calcolare l'energia cinetica acquisita.**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$qE = F = ma \implies a = \frac{qE}{m}$$

$$E_I = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_I = qV_I$$

$$E_F = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV_F$$

Per la conservazione dell'energia ho:

$$E_F = E_I \implies E_{F,K} = q(V_I - V_F) = q\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}h\right)$$

### ⌚ Unità di misura

Quando una carica elementare viene accelerata dalla differenza di potenziale di  $1V$  essa acquista energia cinetica pari a  $e\Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} J$ .

Questa quantità di energia, che è adeguata per descrivere le energie dei fenomeni su scala atomica, definisce l'unità di misura [elettronvolt](#), di simbolo  $eV$

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J \implies 1J = 6.25 \cdot 10^{18} eV$$

## 2.5. Energia potenziale elettrostatica

Supponiamo di avere una distribuzione di  $N$  cariche. Quale è il lavoro esterno necessario per "costruire" questa distribuzione partendo con tutte le cariche all'infinito?

Cominciando portando la prima carica. Non essendoci ancora nessun'altra carica, il campo è nullo, così come il lavoro esterno. La seconda carica risente il campo generato dalla prima carica, quindi il lavoro esterno è  $\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_{el} = -\int_{\infty}^{p_2} q_2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_2 V_{p_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ .

### ! Osservazione

Il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva della carica, altrimenti è negativo.

La terza carica risente il campo generato dalla prima e seconda carica. Vige il principio di sovrapposizione, quindi il lavoro è  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{13} + \mathcal{L}_{23} = -\int_{\infty}^{p_3} q_3 \vec{E}^{(1)} \cdot d\vec{s} - \int_{\infty}^{p_3} q_3 \vec{E}^{(2)} \cdot d\vec{s} = q_3 V_{p_3}^{(1)} + q_3 V_{p_3}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$

In generale il lavoro è

$$\mathcal{L}_{ext} = \sum_{j>i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

## 2.6. Gradiente di una funzione scalare

Sia  $f(x, y, z)$  funzione continua e derivabile delle coordinate  $x, y, z$ ; con le derivare parziali  $\frac{d}{dx} f, \frac{d}{dy} f, \frac{d}{dz} f$ .

Possiamo costruire un vettore le cui componenti siano uguali alle rispettive derivate parziali. Questo vettore viene chiamato gradiente

$$\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}} f = \frac{d}{dx} f \hat{x} + \frac{d}{dy} f \hat{y} + \frac{d}{dz} f \hat{z} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \\ \frac{df}{dz} \end{pmatrix}$$

Il gradiente indica la direzione di massima crescita.

### 2.6.1. Esempio

Calcoliamo il gradiente della funzione  $f(x, y, z) = x^2yz^3$ .

$$\vec{\nabla} = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$$

□

La componente lungo  $x$  è la derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x$  e fornisce una misura della rapidità con cui varia  $f$  quando ci si muove lungo  $x$ . Vale l'analogo per la componente  $y$  e la  $z$ .

La direzione del campo coincide con quella lungo cui si muove per trovare il più rapido incremento della funzione  $f$ .

## 2.6.2. Teorema del differenziale totale

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = \vec{\nabla}f \cdot \vec{s}$$

## 2.7. Legame tra potenziale e campo elettrostatico

Ricordo che  $V(r) = - \int_{-\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s}$  e che  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ .

Usando il teorema di differenziale totale

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{s}$$

Quindi

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Il campo elettrostatico è un campo vettoriale che è equivalente a un singolo numero per punto dello spazio, per quanto riguarda l'aspetto delle informazioni.

## 2.8. Esempio 2.6

Una carica  $q$  è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio  $R$ . **Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse dell'anello.**

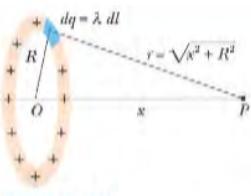


Figura 2.21

Definisco  $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ , quindi  $dq = \lambda dl$ , mentre definisco la distanza tra un punto dell'anello e un punto  $P$  sull'asse  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$  (come si può vedere in figura).

Calcolo il potenziale:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

### ① Osservazione

Il potenziale elettrostatico è massimo nel centro  $O$  e decresce simmetricamente rispetto al piano contenente l'anello all'aumentare della distanza di  $P$  dal centro.

Per  $x \gg R$  il potenziale elettrostatico vale  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0|x|}$ , come se la carica fosse al centro.

Posso anche calcolare  $\vec{E}$  in maniera più semplice di quanto fatto nell'[esercizio 1.6](#):

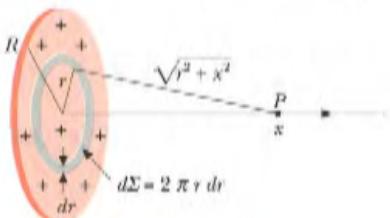
$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = 0$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = 0.$$

## 2.9. Esempio 2.7

Un disco sottile di raggio  $R$  ha una carica  $q$  distribuita su tutta la sua superficie. **Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse del disco.**



**Figura 2.22**

Chiamo la densità superficiale di carica  $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ , quindi  $dq = \sigma d\Sigma$ , con  $d\Sigma$  l'area di una superficie infinitesima.

Considero un anello, concentrico al disco, di raggio  $r$  e area  $d\Sigma = 2\pi r dr$ ; allora il potenziale su questo anello è (calcolato come nell'esempio precedente):

$$dV(x) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

Integro allora su tutto il disco e ottengo:

$$V(x) = \int_{\Sigma} dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2+x^2} - x)$$

### ! Osservazione

In  $x = 0$  il potenziale elettrostatico è massimo e vale  $V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ .

Per  $x \gg R$  il potenziale è  $V(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$ , come se la carica fosse posta al centro del disco.

Come nell'esercizio precedente, si può calcolare il campo:

$$E_x(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right).$$

## 2.10. Superfici equipotenziali

Le *superfici equipotenziali* sono una rappresentazione grafica complessiva del potenziale eletrostatico.

Sono superfici dello spazio tridimensionale, il *luogo geometrico dei punti il cui potenziale eletrostatico ha lo stesso valore*

$$V(x, y, z) = \text{costante}$$

Non forniscono direttamente l'intensità del campo.

### 2.10.1. Proprietà

- Per un punto passa un ed una sola superficie equipotenziale;
- Le linee di forza in ogni punto sono ortogonali alle superfici equipotenziali.

La prima proprietà dipende dal fatto che il potenziale eletrostatico è una funzione univoca, mentre la seconda è conseguenza del fatto che il campo eletrostatico  $\vec{E}$  non può avere una componente tangente a una superficie equipotenziale.

#### ! Osservazione

Il verso del campo eletrostatico indica il verso in cui le superfici equipotenziali diminuiscono in valore.

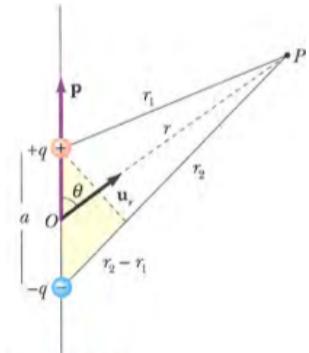
Inoltre, le superfici equipotenziali si infittiscono nelle zone in cui il campo è maggiore (fissato un certo passo  $\Delta V$ ).

## Lezione 05

## 2.11. Dipolo elettrico

Due cariche puntiformi  $-q$  e  $+q$  distanti  $a$  formano un dipolo elettrico.

Ricordo che  $V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$



Poniamo  $P$  molto lontano, cioè  $P \gg a$ , otteniamo  $r_2 - r_1 = a \cos \theta$ ,  $r_1 r_2 = r^2$ , perciò

$$V(p) = \frac{q_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q\vec{a} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

con  $\vec{a}$  il vettore che punta dalla carica negativa alla carica positiva. Il suo modulo è pari alla distanza tra le cariche.

### 2.11.1 Momento del dipolo elettrico

Definiamo il momento del dipolo elettrico come

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

#### ! Osservazione

La quantità  $\vec{p}$  non dà informazioni sulla costituzione del sistema: hanno lo stesso momento di dipolo due cariche  $2q$  a distanza  $\frac{a}{2}$  rispetto a due cariche  $q$  a distanza  $a$ .

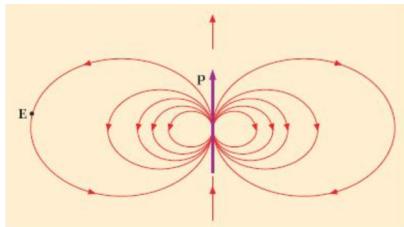
### 2.11.2. Campo elettrico generato dal dipolo

Ricordando che  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  e il risultato appena ottenuto  $V(P) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , potrei calcolare il gradiente come  $\vec{\nabla}V = \frac{dV}{dx}\hat{x} + \frac{dV}{dy}\hat{y} + \frac{dV}{dz}\hat{z}$ , ma considerato che  $V(P)$  è scritto come coordinate polari, quindi conviene calcolare il gradiente come

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} - \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta}\hat{\theta}$$

Ottengo quindi alla fine

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$



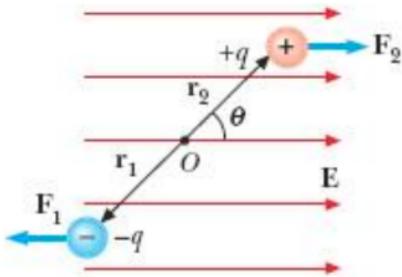
Lungo l'asse del dipolo ( $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ ) il campo è parallelo e con corde a  $p$  e vale  $\vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ .

Lungo l'asse mediano ( $\theta = \frac{\pi}{2}$  o  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ) il campo è parallelo e discorde a  $\vec{p}$  e vale  $\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

### 2.11.3. Dinamica del dipolo

Consideriamo un dipolo di momento  $\vec{p}$  posto in una regione in cui agisce un campo elettrostatico  $\vec{E}$  uniforme.

Avrà che  $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$  e  $\vec{F}_2 = q\vec{E}$ , cioè sono uguali ma discordi. La risultante delle forze è uguale a zero, quindi non c'è movimento del centro di massa (notare che le cariche del dipolo sono vincolate, non si possono separare ulteriormente).



Le forze hanno un momento meccanico diverso da zero:

$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} = -pE \sin \theta \hat{z}$ . Questo momento meccanico tende a far ruotare  $\vec{p}$  fino a renderlo parallelo e concorde al campo. è una "bussola" del campo elettrico.

### 2.11.4. Espansione a multipolo

Una distribuzione complessivamente neutra, genera comunque un campo elettrico e ne subisce gli effetti.

In generale il potenziale di una distribuzione arbitraria di carica (con  $r \gg a$ ) può essere scritta come:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{Q} \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

usando l'espansione a multipolo.

I dipoli atomici e molecolari sono molto importanti nello studio della materia. Alcuni dipoli si formano quando un forte campo elettrico deforma (polarizza) un atomo o una molecola. Lo vedremo quando studieremo i dielettrici.

Altre molecole hanno una struttura a dipolo anche in assenza di un campo elettrico, come ad esempio la molecola di acqua  $H_2O$ .

## 3. La legge di Gauss

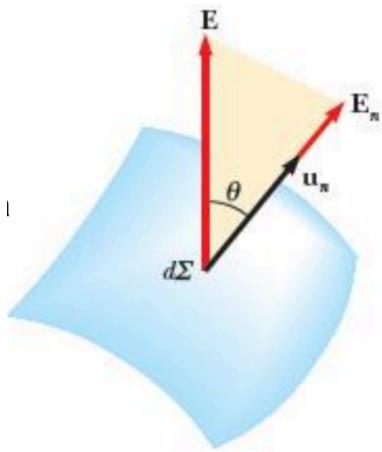
### 3.1 Flusso del campo elettrostatico

Consideriamo l'elemento di superficie infinitesimo  $d\Sigma$ .

Definiamo il flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$  attraverso questo elemento di superficie come

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

dove  $\vec{u}_n$  è il versore normale alla superficie,  $\vec{E}_n$  è la proiezione del campo elettrostatico lungo la normale della superficie.



### 💡 Analogia

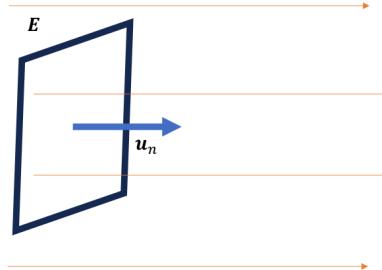
Immaginiamo che il campo  $\vec{E}$  rappresenti la velocità di un fluido in movimento, per esempio di un fiume, dove la velocità varia da un posto all'altro ma si mantiene costante nel tempo.

$\vec{u}_n d\Sigma$  rappresenta allora un'area orientata di una telaio immerso nell'acqua.

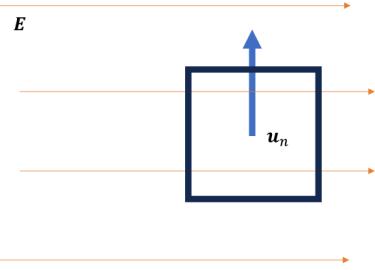
Allora  $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$  rappresenta la "rapidità" con cui fluisce l'acqua attraverso la cornice del telaio.

Consideriamo l'elemento di superficie così piccolo che possa essere considerato piano, così il campo  $\vec{E}$  non varia:

1. **Superficie e campo paralleli:**  $d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = Ed\Sigma$



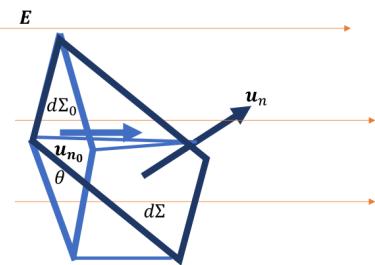
## 2. Superficie e campo ortogonali: $d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$



## 3. In generale:

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = E \cos \theta d\Sigma = Ed\Sigma_0$$

Ciò è equivalente a calcolare il flusso attraverso la superficie  $d\Sigma_0$ , che è perpendicolare al campo elettrostatico poiché è la proiezione di  $d\Sigma$  sul piano perpendicolare al campo, ma ha un'area minore uguale a  $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos \theta$



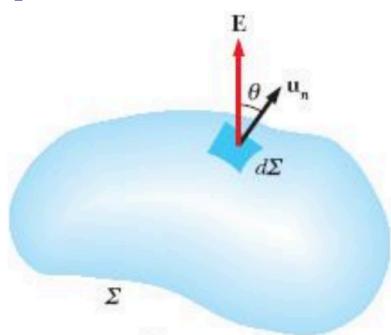
Consideriamo il flusso attraverso la superficie finita  $\Sigma$ , che è anche chiusa. Suddividiamo  $\Sigma$  in elementi infinitesimi di superficie  $d\Sigma$  e sommiamo i contributi infinitesimi:

$$\Phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

Orientiamo le normali delle superfici infinitesime verso l'esterno.

Se  $\vec{E} \cdot \vec{u}_n > 0$  si dice che il flusso è *uscente*, invece se  $\vec{E} \cdot \vec{u}_n < 0$  si dice che il flusso è *entrante*.

Se il flusso è *nullo* vuol dire che il *flusso entrante egualia quello uscente*.



### 3.1.1. Esempio

Calcoliamo il flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme. Scegliamo come superficie una sfera di raggio  $R$

concentrica con la carica.

### 3.2. Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$ , prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa, è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute al suo interno divisa per  $\epsilon_0$ .

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \in \text{interne}} q_i$$

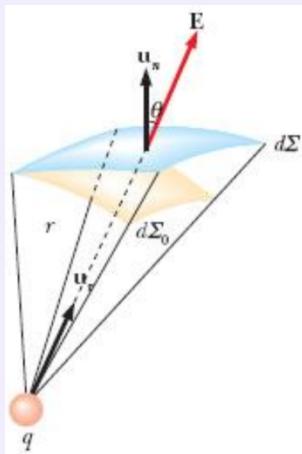
Notare che il flusso non dipende dalla superficie scelta.

#### ≡ Angolo solido

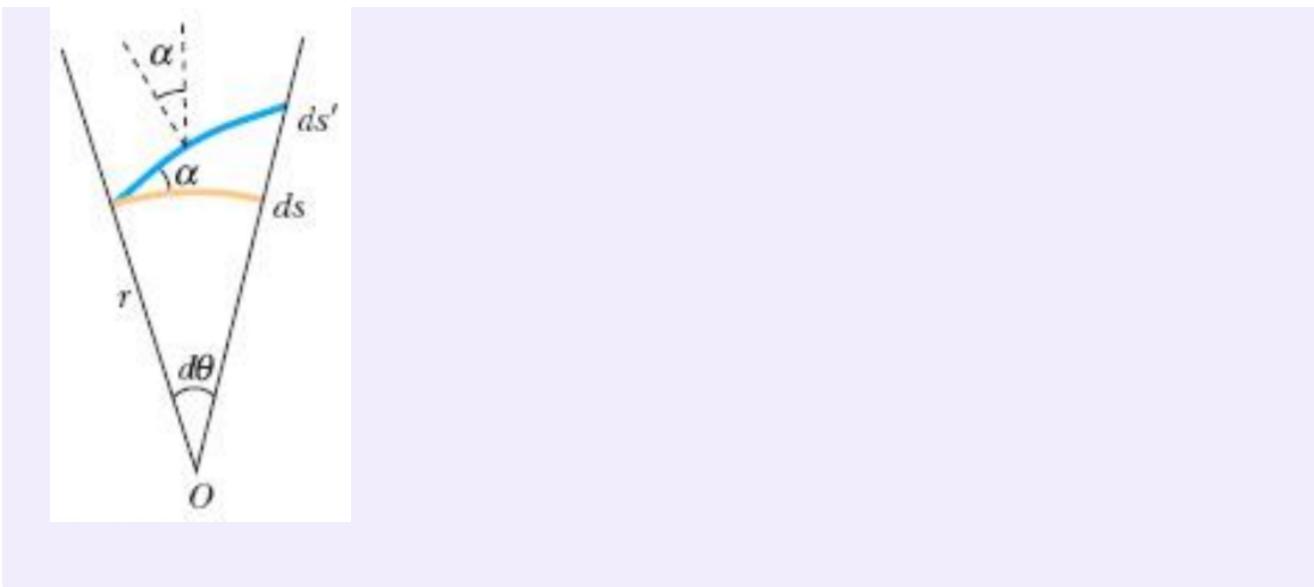
Sia  $d\Sigma$  un elemento di superficie,  $\vec{u}_n$  la sua normale e  $d\Sigma_0$  la sua proiezione ortogonale a  $\vec{u}_r$ , il versore di raggio  $r$  uscente da un punto di osservazione  $O$ .

Si definisce *angolo solido infinitesimo* la quantità

$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos \alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$



Questa è l'estensione a tre dimensioni del concetto di angolo piano infinitesimo  $d\theta = \frac{ds \cos \alpha}{r} = \frac{ds_0}{r}$ .

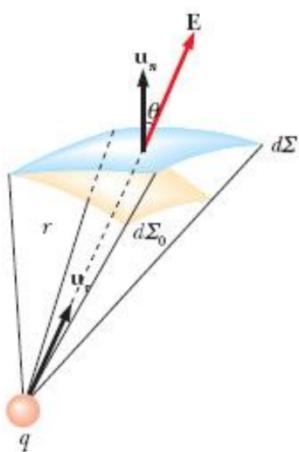


### 3.2.1. Dimostrazione del Teorema di Gauss

Prendiamo in esame il campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme attraverso un elemento di superficie  $d\Sigma$ .

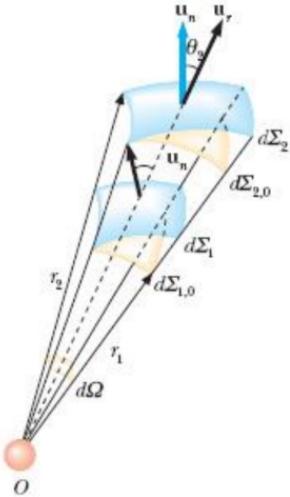
$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_r}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Il flusso del campo elettrostatico di una carica puntiforme dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie o dalla distanza dalla carica.



Il flusso è lo stesso per qualsiasi superficie  $d\Sigma$  il cui contorno si appoggi alla superficie del cono definito dall'angolo solido  $d\Omega$  poiché

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_1 \cos \theta_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_{1,0}}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2 \cos \theta_2}{r_2 r} = \frac{d\Sigma_{2,0}}{r_2^2}$$



Una carica interna genera flusso solamente uscente:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Una carica esterna genera sia flusso entrante, sia uscente:

$$d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\Phi_1$$

Quindi i flussi entranti e uscenti si annullano a vicenda e quello risultante sarà nullo.

Vige il principio della sovrapposizione, perciò:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

Ciascun integrale vale  $\frac{q}{\epsilon_0}$  per le cariche interne, mentre è nullo per quelle esterne. Segue quindi che

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \in \text{interne}} q_i$$

Generalizzato per funzioni continue ottengo

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} dq$$

dove  $\tau$  è il volume racchiuso dalla superficie  $\Sigma$ .

## Lezione 06

### 3.3. Applicazioni del teorema di Gauss

Abbiamo studiato che in generale il campo elettrostatico per una distribuzione di carica si calcola con  $\vec{E}(x, y, z) = \int_{\text{distribuzione}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dq}{r^2} \hat{u}$  (con  $r$  la distanza tra il punto  $(x, y, z)$  e l'elemento di carica  $dq$ ,  $\hat{u}$  è il versore tra il punto e l'elemento di carica  $dq$ ); questa è una

soluzione formale, ma spesso - operativamente parlando - calcolare questo integrale è molto difficile.

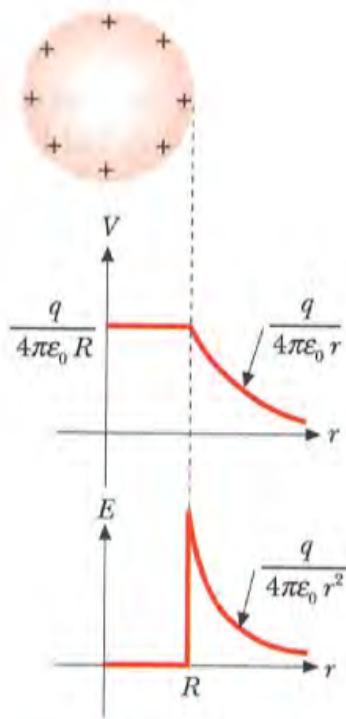
Un'alternativa per il calcolo del campo elettrostatico è data dal teorema di Gauss, la cui espressione non fornisce una relazione diretta tra il campo elettrostatico e la distribuzione di carica. In alcune situazioni, studiando le simmetrie del sistema e scegliendo superfici opportune riusciamo a calcolare l'espressione del campo facilmente.

### 3.3.1. Esempio 3.2

Una carica  $q$  è distribuita con densità spaziale costante  $\rho$  su una sfera di raggio  $R$ . Calcolare il campo elettrostatico nei punti interi ed esterni alla sfera.

Interno:  $\vec{E} = \vec{0}$

Esterno: Come per la carica puntiforme.



### 3.3.2. Esempio 3.3

Una carica è distribuita con densità di linea uniforme  $\lambda$  su un filo rettilineo molto lungo (al limite infinito). Calcolare il campo elettrostatico nei punti esterni al filo.

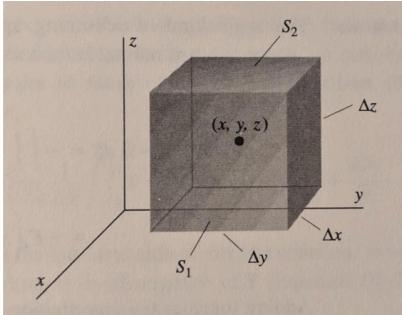
### 3.3.3. Esempio 3.4

Una carica è distribuita con densità di superficie  $\sigma$  su un piano indefinito. Calcolare il campo elettrostatico.

### 3.4. Divergenza del campo elettrostatico

Conosciamo le forme integrali del potenziale, il flusso e la circuitazione, ma conosciamo la forma differenziale (locale) solo per il potenziale, proviamo allora a calcolarla per il flusso.

Scegliamo un punto  $P(x, y, z)$  e calcoliamo il flusso attraverso un cubo centrato in  $P$ .



$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} dq = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0}, \text{ con } \Delta V \text{ il volume del cubo.}$$

Ora prendiamo il limite per il cubo che tende a zero:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Phi(\vec{E}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0} = 0$$

Se dividiamo per  $\Delta V$  il rapporto tende a un valore finito:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{E})}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Definiamo quindi la divergenza

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Svolgiamo l'integrale:  $\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint_{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \sum_{i=1}^6 \oint_{S_i} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$  con  $S_i$  la  $i$ -esima faccia del cubo.

Calcoliamo l'integrale su  $S_1$ :  $\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$ .

Il cubo è molto piccolo, quindi possiamo considerare il campo costante e uguale al suo valore al centro della faccia.

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = E_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$$

Calcoliamo l'integrale su  $S_2$  sfruttando la stessa considerazione:

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = -E_x(x - \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z.$$

Il segno meno viene dalla normale che punta verso il basso.

$$\begin{aligned} \text{Calcoliamo: } & \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (E_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z - E_x(x - \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z) \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \\ & = (E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x - \Delta x, y, z)) \frac{1}{\Delta x} = \frac{d}{dx} E_x \end{aligned}$$

Il calcolo è analogo lungo  $S_3$  e  $S_4$ , ottenendo quindi

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\oint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma + \oint_{S_4} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma) \frac{1}{\Delta V} = \frac{d}{dy} E_y.$$

$$\text{Lungo } S_5 \text{ e } S_6 \text{ ottengo invece } \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\oint_{S_5} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma + \oint_{S_6} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma) \frac{1}{\Delta V} = \frac{d}{dz} E_z$$

Sommando tutto ottengo perciò:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{\Delta V} = \frac{d}{dx} E_x + \frac{d}{dy} E_y + \frac{d}{dz} E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

| Forma integrale   | Forma differenziale (locale)                           |
|---|--|
| $V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s}$   | $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$                             |
| $\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} dq$ | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ |
| $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  | ?  |

### 3.4.1. Equazione di Poisson

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}V \end{cases} \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = \vec{\nabla}^2 V = \frac{d^2 x}{d^2 x} V + \frac{d^2 y}{d^2 y} V + \frac{d^2 z}{d^2 z} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ con } \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \text{ e } \vec{\nabla}^2$$

Laplaciano

$$\implies V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distribuzione}} \frac{dq}{r}$$

L'equazione di Poisson riassume le proprietà fondamentali del campo elettrostatico, cioè la sua conservatività e la legge di Gauss con il suo andamento.

[Lezione 07](#)

### 3.4. Teorema di Stokes

La circuitazione di un campo vettoriale,  $\vec{E}$  nel nostro caso, lungo una linea chiusa  $C$  è eguale al flusso del rotore del campo attraverso una superficie qualsiasi  $\Sigma$  avente per contorno  $C$ :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{rot} \vec{E} \cdot d\Sigma = \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\Sigma$$

So che la circuitazione del campo elettrostatico è nulla, quindi  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot dS = 0$ , quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

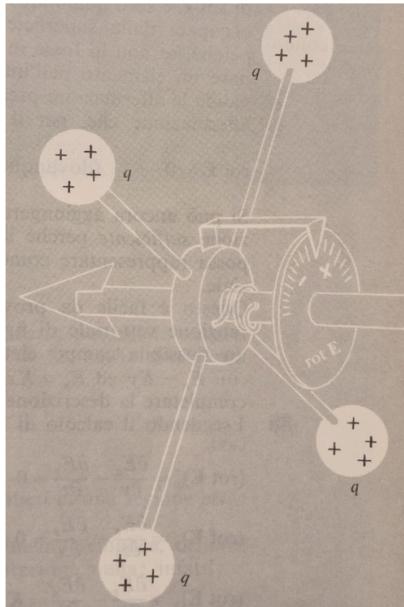
Allora ho completato la tabella:

| Forma integrale   | Forma differenziale (locale)                           |
|---|--|
| $V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s}$   | $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$                             |
| $\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} dq$ | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ |
| $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$                      |

### 3.4.1. Rotore

Il rotore è caratterizzato da

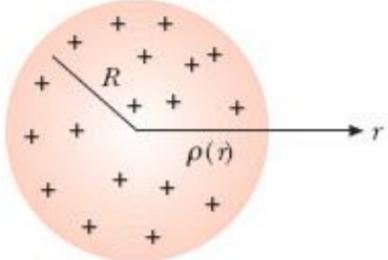
$$\vec{\text{rot}} E = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = \left( \frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) \hat{x} + \left( \frac{d}{dz} E_x - \frac{d}{dx} E_z \right) \hat{y} + \left( \frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) \hat{z}$$



Se esplorassimo lo spazio con questo dispositivo, nelle zone con un rotore diverso da zero avrebbe la tendenza a ruotare. Il momento torcente sarebbe proporzionale alla componente del rotore nella direzione dell'asse del dispositivo.

### 3.4.2. Esercizio 3.20

All'interno di una sfera di raggio  $R = 10c$ , è contenuta una carica  $q = 8 \cdot 10^{-9} C$ , distribuita con densità  $\rho(r) = br$ , con  $b$  costante e  $r$  distanza dal centro. Calcolare la costante  $b$  e il campo elettrostatico.



## 4. Conduttori, dielettrici, energia elettrostatica

### 4.1. Conduttori in equilibrio

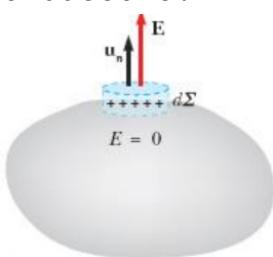
I conduttori sono materiali caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni che permettono il

moto di alcune cariche che li costituiscono, vi è quindi *mobilità dei portatori di carica* (cioè elettroni e ioni).

In condizioni statiche (all'equilibrio) non c'è movimento delle cariche. Se il campo elettrico all'interno del conduttore non fosse zero, i portatori di carica subirebbero una forza che li porterebbe in moto, non sarebbe una situazione statica. Possiamo quindi concludere che all'interno del conduttore  $\vec{E} = 0$ .

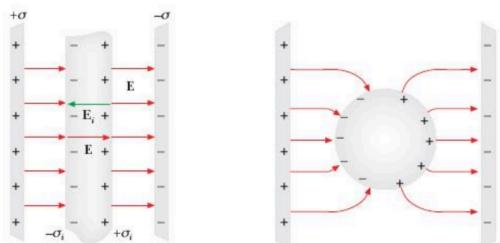
Delle conseguenze fatto che il campo elettrostatico sia nullo all'interno sono:

- L'*eccesso di carica* può stare solo sulla *superficie* del conduttore, infatti applicando la legge di Gauss a una qualunque superficie chiusa interna al conduttore, verifichiamo che il flusso sia nullo ( $\vec{E} = 0$ ), quindi all'interno non ci possono essere cariche;
- Il *potenziale elettrostatico* è *costante* su tutto il conduttore (il conduttore forma una "superficie equipotenziale"), infatti  $V(P_2) - V(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  per qualsiasi coppia di punti;
- Il campo elettrostatico in un punto nelle vicinanze alla superficie del conduttore è perpendicolare ad essa e ha intensità  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , con  $\sigma$  la densità di carica superficiale in quel punto, ciò si ottiene applicando la legge di Gauss alla superficie del conduttore.



$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$$

#### 4.1.1. Esempi



Nella figura di sinistra si può vedere una lastra di materiale conduttore all'interno di un campo elettrostatico uniforme, mentre

in quella di destra una sfera di materiale conduttore all'interno di un campo elettrostatico uniforme.

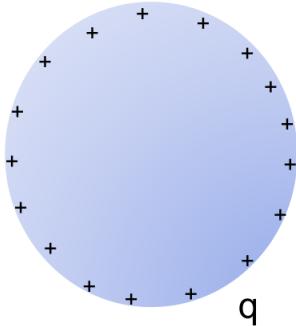
#### 4.1.2. Esempio 4.1

Due sfere conduttrici, di raggi  $R_1$  e  $R_2$ , sono poste a distanze molto grandi rispetto ai due raggi e sono collegate tramite un filo conduttore. La carica complessiva è  $q$ . Trascurando la carica presente sul filo, calcolare le cariche  $q_1$  e  $q_2$  presenti sulle due sfere e il rapporto tra i campi elettrostatici uscenti dalle stesse.

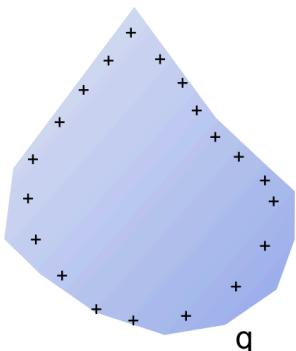
#### Lezione 08

Depositiamo una carica  $q$  su un conduttore. Vale sempre  $\vec{E} = 0$ , quindi: l'eccesso di carica può stare solo sulla superficie del conduttore; il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore; il campo elettrostatico in un punto nelle vicinanze alla superficie del conduttore è perpendicolare e ha intensità  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  con  $\sigma$  la densità di carica superficiale in quel punto.

Il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore  $q$ , quindi il punto di riferimento del potenziale del conduttore è la superficie.

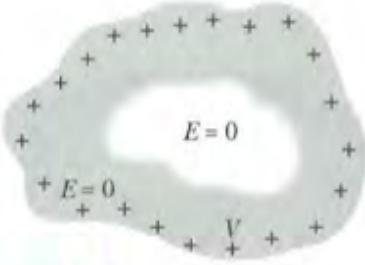


Il campo elettrostatico in un punto nelle vicinanze della superficie del conduttore è perpendicolare e ha intensità  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  con  $\sigma$  la densità di carica superficiale in quel punto: come abbiamo visto nell'[esempio 4.1](#),  $\sigma$  è più elevata nelle zone dove il raggio di curvatura è minore. Questo si chiama l'[effetto punta](#). Viene utilizzato per creare scintille tra elettrodi.



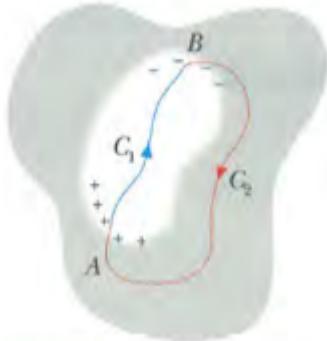
## 4.2. Conduttore cavo

All'interno della cavità il campo elettrostatico è nullo. Questo è dimostrabile con il teorema di Gauss applicato su una qualunque superficie chiusa racchiusa nella cavità: la carica totale è zero, quindi anche il campo è zero.



Sulle pareti della cavità la carica è nulla. Questo è dimostrabile con il teorema di Gauss applicato su una qualunque superficie chiusa che racchiuda la cavità: il campo è nullo dentro al conduttore e all'interno della cavità.

Potrebbe essere composta da una distribuzione di cariche positive e una distribuzione di cariche negative la cui somma è zero. Proviamo a verificare quest'ipotesi.



Ipotesi: Sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche, infatti:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Su  $C_2$  l'integrale di linea è zero perché il campo (interno al conduttore) è nullo.

Se ci fossero cariche positive e negative, le linee di campo sarebbero tutte all'interno della cavità. Quindi  $\vec{E} \neq 0$  e anche l'integrale di linea su  $C_1$  sarebbe diverso da zero.

Questo è un assurdo perché si violerebbe la proprietà del campo conservativo.

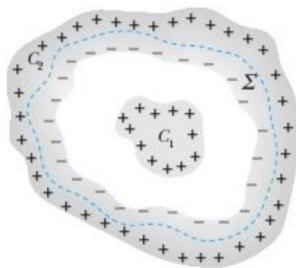
### 4.2.1. Proprietà

- La *carica* di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla *superficie esterna*, anche in presenza di una o più cavità;

- Il campo elettrostatico è nullo e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore, anche in presenza di cavità;
- Il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno e spazio esterno.

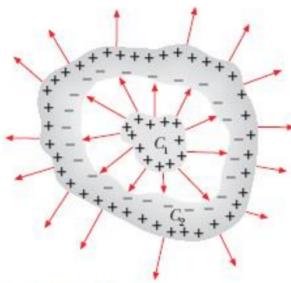
### 4.3. Conduttore cavo contenente un conduttore carico

Il campo elettrostatico all'interno di un conduttore cavo è zero, quindi non ci può essere una carica totale all'interno che sia diversa da zero. Ponendo un conduttore nella cavità, sulla superficie interna del conduttore cavo compare una carica  $-q$ . Allo stesso tempo il conduttore è neutro, quindi è comparsa una carica  $+q$  sulla superficie esterna.



Questo si chiama *induzione completa*: tutte le linee di forza che partono dal conduttore interno, terminano sul conduttore esterno.

Il campo all'esterno è indistinguibile da quello che si creerebbe se avessimo depositato la carica sul conduttore cavo (è infatti uno schermo elettrostatico perfetto).



### 4.4. Il condensatore

Un oggetto che sfrutta le proprietà dei conduttori cavi sono i condensatori.

Viene definita *capacità* del condensatore  $C$  il rapporto tra la carica presente sulle sue armature e la differenza di potenziale

tra le stesse

$$C = \frac{q}{\Delta V}, \quad q = C\Delta V, \quad \Delta V = \frac{q}{C}$$

#### 4.4.1. Condensatore sferico (esempio 4.2)

Consideriamo il sistema formato da un conduttore sferico di raggio  $R_1$  al centro di un conduttore cavo di raggio interno  $R_2$  e raggio esterno  $R_3$ . Depositiamo una carica  $q$  sul conduttore interno.

Calcolare la differenza di potenziale tra i due conduttori.

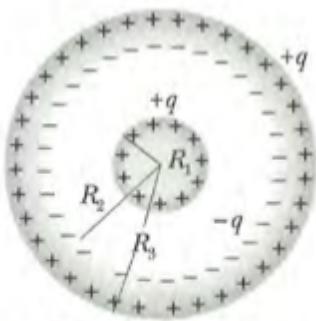
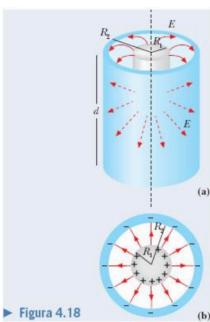


Figura 4.17

Condensatore sferico.

#### 4.4.2. Condensatore cilindrico (esempio 4.3)

Le armature di un condensatore cilindrico sono due porzioni di superficie cilindriche coassiali, una di raggio  $R_1$  e l'altra di raggio  $R_2$  di eguale lunghezza  $d$  grande rispetto ai raggi. Si realizza così un'ulteriore situazione di conduttore all'interno di un altro conduttore cavo, con induzione approssimativamente completa. Calcolare la capacità del condensatore.



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci

Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III

EdiSES Università

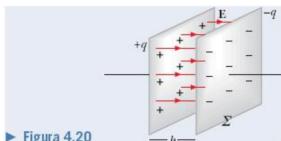
Nella cavità del conduttore il campo corrisponde a quello di un filo infinito carico  $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$ , che è radiale.

La differenza di potenziale è  $\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$ .

Allora la capacità del condensatore è:  $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ .

### 4.4.3. Condensatore piano (esempio 4.4)

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani paralleli, di area  $\Sigma$  e distanti  $h$ . La carica positiva  $q$  è distribuita con densità uniforme  $\sigma$  sull'armatura positiva e quella negativa  $-q$  con densità uniforme  $-\sigma$  sull'armatura negativa. Calcolare la capacità del condensatore.



► Figura 4.20



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

Il campo tra le due armature è  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$ .

La differenza di potenziale è  $\Delta V = Eh = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h$ . Usando i dati forniti, quindi la superficie delle armature, riscrivo la formula come:

$$\Delta V = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h.$$

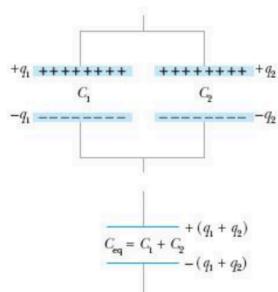
La capacità è allora:  $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$ .

#### ! Osservazione

Nel condensatore cilindrico e piano le formule sono valide lontano dai bordi, dove il campo non è più uniforme.

## 4.5. Collegamento tra condensatori

### 4.5.1. Collegamento in parallelo



▲ Figura 4.23 Capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo.



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo  
EdiSES Università

Un conduttore (un cavo) collega le armature in alto, saranno quindi equipotenziali. Un altro conduttore collega le armature in basso, anch'esse equipotenziali fra loro. Allora la *differenza di potenziale* applicata ad entrambi i condensatori è *uguale*.

Trovo quindi che  $q_1 = C_1 \Delta V$  e  $q_2 = C_2 \Delta V$ , e ottengo

$$q_{tot} = q_1 + q_2 + \dots + q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \Delta V$$

Chiamo *capacità equivalente* del sistema la capacità che avrebbe un unico condensatore con carica  $+q$  e  $-q$  sulle armature, tale che  $|q| = |q_1 + q_2 + \dots + q_n|$ .

Per condensatori caricati in parallelo ottengo

$$C_{eq} = \frac{q}{\Delta V} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

#### 4.5.1.1. Esempio 4.7

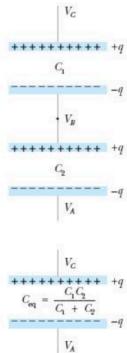
Due condensatori di capacità  $C_1$  e  $C_2$  hanno un'armatura a terra e sono caricati con d.d.p.  $V_1$  e  $V_2$ . Si collegano tra loro le due armature libere e il sistema assume una nuova condizione di equilibrio con una d.d.p.  $V$  rispetto alla terra. Calcolare  $V$ .

$$q_1 = C_1 \Delta V_1, \quad q_2 = C_2 \Delta V_2$$

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V$$

$$\Delta V = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2}{C_1 + C_2}$$

#### 4.5.2. Collegamento in serie



▲ Figura 4.24 Capacità equivalente di due condensatori collegati in serie.

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

La differenza di potenziale tra le armature di  $C_1$  vale  $V_c - V_B$ , quella tra le armature di  $C_2$  è  $V_B - V_A$ , quindi la differenza di potenziale complessiva vale  $\Delta V = V_c - V_A$ .

La carica  $+q$  sull'armatura superiore di  $C_1$  induce una carica  $-q$  sull'armatura inferiore di  $C_1$ . L'armatura inferiore di  $C_1$  e quella superiore di  $C_2$  formano un unico conduttore centrale che deve essere neutro, compare quindi una carica  $+q$  sull'armatura superiore di  $C_2$ . La carica  $+q$  sull'armatura superiore di  $C_2$  induce una carica  $-q$

sull'armatura inferiore di  $C_2$ . Allora la *carica* su entrambi i condensatori è *uguale*.

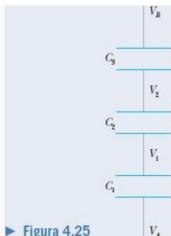
Trovo che  $\Delta V_1 = V_c - V_B = \frac{q}{C_1}$ ,  $\Delta V_2 = V_B = \frac{q}{C_2}$ , allora ottengo

$$\Delta V = V_n - V_0 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n} = q \left( \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

mentre ho che la capacità equivalente è

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

#### 4.5.2.1. Esempio 4.6



► Figura 4.25

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci

Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III

EdiSES Università

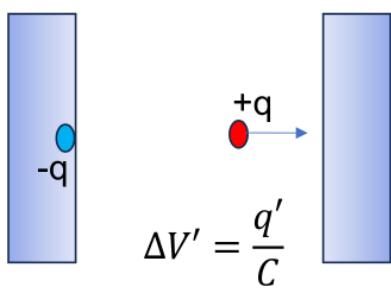
Ai capi di tre condensatori in serie c'è una d.d.p.  $V_B - V_A = 100V$  e la capacità equivalente del sistema è  $C_{eq} = 100pF$ . Calcolare i valori delle capacita  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  tali che rispetto a  $V_A$  sia  $V_1 = 50V$ e  $V_2 = 70V$ .

[Lezione 09](#)

## 4.5. Energia del campo elettrostatico

Caricare un condensatore è un processo che richiede lavoro. Visto che il campo elettrostatico è conservativo, il lavoro non dipende dal percorso, ma dipende soltanto dallo stato iniziale e lo stato finale.

Possiamo immaginare di caricare il condensatore portando una carica  $+q$  da un'armatura all'altra, lasciando indietro una casica  $-q$ .



$$dW = \Delta V' dq' = \frac{q'}{C} dq', \text{ allora } W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2q\Delta V}.$$

Consideriamo il caso del condensatore piano:  $C = \epsilon_0 \frac{S}{h}$ ,  $\Delta V = Eh$ , allora  $U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 S h = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tau$ .

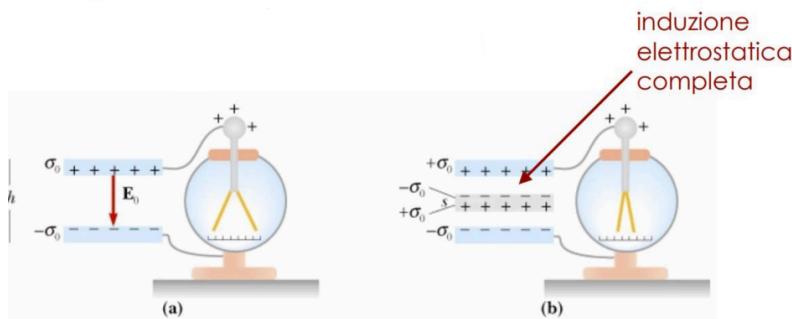
Questa è una formula generale applicabile in qualsiasi situazione:

$$dU = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau \quad U = \int dU = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau$$

## 4.6. Dielettrici

Studiamo come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene parzialmente o totalmente riempito con un materiale isolante.

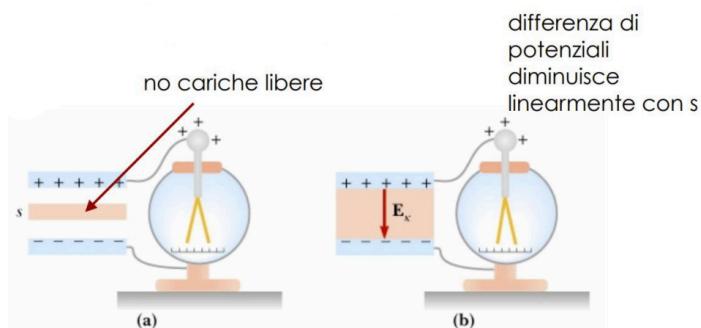
Preso un condensatore piano carico e isolato ( $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ ,  $V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$ ), introduciamo parallelamente una lastra *conduttrice* di spessore  $s$ . Notiamo che sulla superficie della lastra si formano, per induzione elettrostatica completa, delle distribuzioni di densità di carica  $\sigma_0$ , tali che il campo all'interno della lastra sia nullo. Vediamo allora che la differenza di potenziale diminuisce, mentre il campo totale rimane invariato. La posizione della lastra non influisce sul potenziale, che quindi diventa  $V = E_0(h - s) < V_0$



Introducendo invece una lastra *isolante*, non si formerebbero distribuzioni di densità, visto che questa non ha cariche libere di muoversi al suo interno.

Osserviamo allora che diminuisce la differenza di potenziale, ma l'effetto rispetto alla lastra conduttrice è minore (a parità di spessore), quindi  $V < V_0$ .

La differenza di potenziale diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore della lastra e assume il valore minimo  $V_K$  quando tutto lo spazio tra le armature è riempito da materiale isolante.



Grazie a una serie di esperienze di carattere sistematico, possiamo concludere che gli *isolanti* hanno la proprietà di *ridurre la differenza di potenziale* tra le armature dei condensatori; la differenza di potenziale misurata con un condensatore vuoto e la differenza di potenziale misurata con un condensatore completamente riempito con un materiale isolante *dipende solo dal materiale*; infine il rapporto tra la differenza di potenziale misurata nel vuoto  $V_0$  e quella misurata con il condensatore completamente riempito di isolante è sempre maggiore di 1.

Chiamiamo le *sostanze isolanti* che *riducono* la differenza di potenziale tra le armature, e quindi il campo elettrico, *sostanze dielettriche* o *dielettrici*.

Definiamo la *costante relativa del dielettrico* come

$$\mathcal{K} = \frac{V_0}{V_k} > 1$$

#### 4.6.1. Campo elettrostatico interno al dielettrico

Il campo elettrostatico all'interno del dielettrico deve valere  $E_K = \frac{V_K}{h} = \frac{V_0}{Kh} = \frac{E_0}{\mathcal{K}} = \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}\epsilon_0}$ .

Quindi la variazione del campo è  $E_0 - E_K = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}\epsilon_0} = \frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{1+\chi} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$

Chiamiamo *suscettività elettrica del dielettrico*

$$\chi = \mathcal{K} - 1$$

Possiamo quindi scrivere il campo nel dielettrico come

$$E_K = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

con  $\sigma_p = \frac{K-1}{K} \sigma_0 = \frac{\chi}{\chi+1} \sigma_0$ .

Allora il campo è uguale alla sovrapposizione del campo dovuto alle cariche libere sulle armature del condensatore e del campo di una distribuzione di carica con densità  $\sigma_p$  posto sulle facce del dielettrico con segno opposto a quello delle cariche libere.

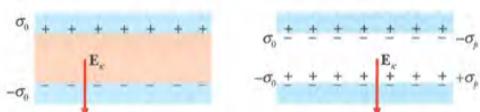


Figura 4.34

Densità di carica  $\sigma_p$  sulle superficie di una lastra di materiale isolante.

#### 4.6.2. Costanti dielettriche relative e rigidità dielettriche

La *rigidità dielettrica* è il *massimo valore del campo elettrostatico* che può essere applicato a un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno;

Una scarica danneggia irreparabilmente il dielettrico, nel senso che viene a mancare la sua proprietà isolante.

| Sostanza               | Costante dielettrica relativa $\kappa$ | Rigidità dielettrica $V/m$ |
|------------------------|--|----------------------------|
| aria                   | 1,00059                                | $3 \cdot 10^6$             |
| acqua                  | 80                                     | $15 \cdot 10^6$            |
| alcool etilico         | 28                                     | –                          |
| olio per trasformatori | 2,5                                    | $20 \cdot 10^6$            |
| ambra                  | 2,7                                    | $90 \cdot 10^6$            |
| bachelite              | 4,9                                    | $24 \cdot 10^6$            |
| carta                  | $2 \div 5,5$                           | $16 \cdot 10^6$            |
| polietilene            | 2,3                                    | $50 \cdot 10^6$            |
| polistirolo            | 2,6                                    | $25 \cdot 10^6$            |
| procellana             | 6,5                                    | $4 \cdot 10^6$             |
| teflon                 | 2,1                                    | $60 \cdot 10^6$            |
| vetro                  | $4 \div 7$                             | $20 \cdot 10^6$            |

I materiali solidi che compaiono nella tabella sono materiali *amorfi*, dotati di simmetria in tutte le direzioni (*isotropi*). Per essi, come del resto per i gas e i liquidi, la costante dielettrica  $K$  non dipende né dal valore né dalla direzione del campo  $\vec{E}$  cui vengono sottoposti.

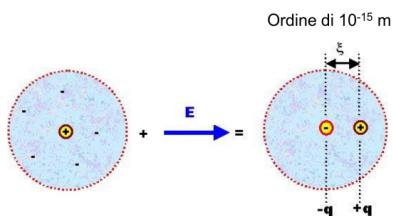
Le proprietà elettrostatiche dei dielettrici di questo tipo sono completamente descritte dalle relazioni dedotte in questo paragrafo.

#### 4.7. Polarizzazione dei dielettrici

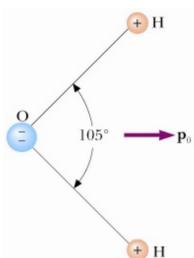
I fenomeni osservati possono essere spiegati dalla struttura elettrica microscopica della materia: negli isolanti gli elettroni sono legati agli atomi e non possono allontanarsi spontaneamente. Applicando allora un campo esterno avviene uno *spostamento locale*

delle cariche che costituiscono gli atomi (le cariche negative in verso opposto al campo, le cariche positive in senso concorde). L'atomo acquista un *momento di dipolo* elettrico microscopico, *indotto* dal campo  $\vec{E}$ :

$$\vec{p}_a = Ze\vec{X}$$



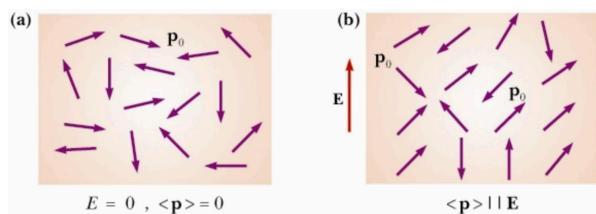
Altre sostanze presentano un momento di dipolo intrinseco, come l'acqua, infatti il loro centro delle cariche positive è diverso dal centro delle cariche negative.



#### 4.7.1. Polarizzazione per orientamento

In assenza di campo elettrostatico esterno, i dipoli molecolari sono orientati a caso, per via degli urti dovuti al moto di agitazione termica che distruggono eventuali configurazioni ordinate dovute alle interazioni tra dipoli. Quando si applica un campo  $\vec{E}$ , su ciascuno dei dipoli elettrici di momento  $p_0$  agisce il momento delle forze che ne causa un orientamento con il campo elettrostatico soltanto *parziale* perché disturbato dall'agitazione termica.

Il grado di allineamento aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare dell'intensità del campo elettrostatico esterno.



#### 4.7.2. Vettore di polarizzazione

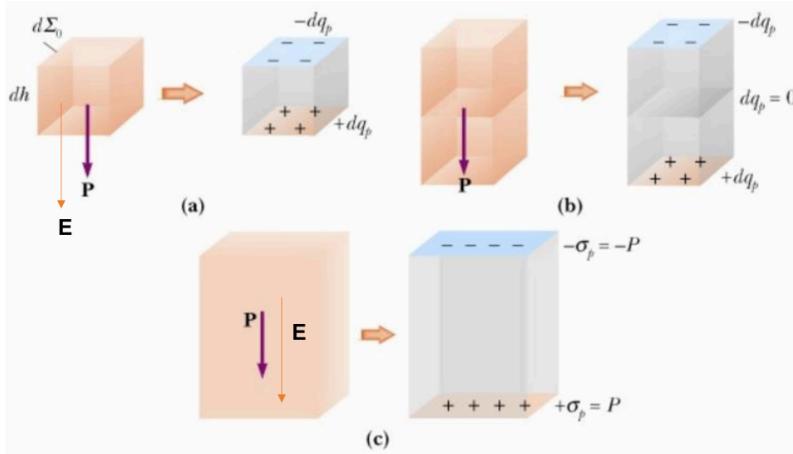
Consideriamo un volumetto  $\tau$  nell'intorno di un punto  $O$ . Questo volumetto contiene un numero  $N$  (molto grande) di particelle. Il momento di dipolo risultante è  $\vec{p}_{tot} = N\langle \vec{p} \rangle$ .

Definiamo il *vettore polarizzazione* come il momento di dipolo per unità di volume

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_{tot}}{\tau} = \frac{N\langle \vec{p} \rangle}{\tau} = n\langle \vec{p} \rangle$$

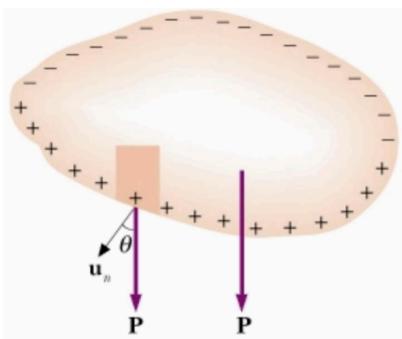
con  $n$  unità di particelle per unità di volume.

Nella maggior parte dei dielettrici risulta  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ , infatti ciascun momento di dipolo  $\langle \vec{p} \rangle$  è parallelo al campo  $\vec{E}$ .



Suddividiamo una lastra in prismi infinitesimi di base  $d\Sigma_0$ , altezza  $dh$  e volume  $d\tau = \Sigma_0 dh$ : ciascuno di questi ha il momento di dipolo  $dp = \vec{P}d\tau = Pd\Sigma_0 dh$ , come visto nella figura (a).

Consideriamo ora due prismi consecutivi con una base in comune e consideriamo  $\vec{P}$  costante, la carica  $+dq_p$  di un prisma si annulla con la carica  $-dq_p$  dell'altro sulla base in comune (come si vede nella figura (b)); ripetendo l'operazione per tutti i prismi alla fine rimangono solamente le cariche sulle basi dei prismi che appartengono alle facce della lastra, visto nella figura (c).



Considerando una superficie generica di superficie interna  $d\Sigma_0$  e superficie esterna  $d\Sigma$  si ha

$$dq_p = P \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

La densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di  $P$  lungo la normale della superficie.

## 4.8. Esercizi

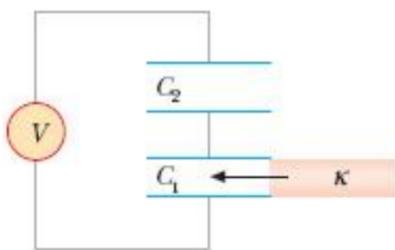
### 4.8.1 Esercizio 4.35



Un condensatore piano, con armature quadrate si area  $\Sigma = 400\text{cm}^2$  distanti  $d = 2\text{mm}$ , è riempito per metà di mica ( $\mathcal{K}_1 = 5$ ) e metà di paraffina ( $\mathcal{K}_2 = 2$ ), come mostrato in figura. **Calcolare la capacità  $C$  del condensatore.** Se tra le armature viene applicata una differenza di potenziale  $V = 2 \cdot 10^3\text{V}$ , **calcolare il campo elettrostatico  $E$ , la carica  $q$  e l'energia elettrostatica  $U_e$  del sistema.**

Lezione 10

### 4.8.2. Esercizio 4.40



A due condensatori piani di capacità  $C_1 = 500\text{pF}$  e  $C_2 = 1000\text{pF}$ , collegati in serie, è collegato un generatore che mantiene una differenza di potenziale costante  $V = 400\text{V}$ . Una lastra di dielettrico, con costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$ , viene inserita tra le armature di  $C_1$ , così da riempirlo completamente. **Calcolare la variazione di carica  $\Delta q$  erogata dal generatore; la variazione  $\Delta V_1$  della differenza di potenziale ai capi di  $C_1$ ; l'energia fornita dal generatore nel processo.**

#### ⌚ Unità di misura

La polarizzazione e l'induzione dielettrica hanno la stessa unità di misura, che è quella della densità superficiale di carica,  $\frac{C}{m^2}$ .

La costante di elettrica relativa e la suscettività elettrica sono adimensionali. Invece la costante dielettrica assoluta ha

le dimensioni di  $\epsilon_0$ , che risultano  $\frac{F}{m}$  o l'unità corrispondente e più usata  $\frac{C^2}{Nm^2}$ .

### Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici

Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma di tutte le cariche presenti all'interno, *sia libere che di polarizzazione*. Definendo  $D = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  come *vettore di induzione dielettrica*, che afferma che il flusso dell'induzione dielettrica attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche libere contenute all'interno della superficie stessa

$$\vec{\Phi}(\vec{D}) = \oint \vec{D} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = q$$

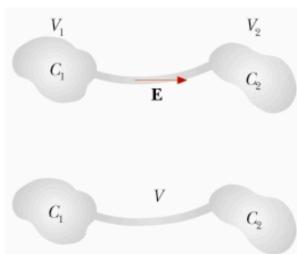
Si può ottenere similmente la forma locale

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \rho$$

## 5. Corrente

### 5.1. Conduzione elettrica

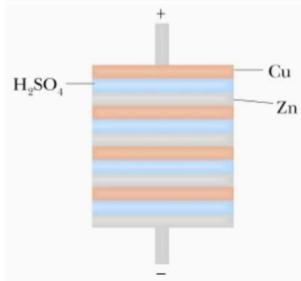
Quando si mettono a contatto dei conduttori isolati con diverso valore di potenziale iniziale, per un breve istante, si crea un campo elettrico all'interno dei conduttori, che spostano le cariche con l'obiettivo di uguagliare la differenza di potenziale. Questo spostamento di cariche dura così poco che non si riesce a studiare in maniera sistematica. Serve allora qualcosa che riesca a sostenere una corrente più a lungo.



Il *generatore di forza elettromotrice* è un dispositivo capace di mantenere nel tempo una differenza di potenziale tra due conduttori a contatto.

La pila voltagica di Alessandro Volta fu il primo generatore. Consisteva in un blocco di diversi elementi: un disco di rame, un

tampone imbevuto di una soluzione acquosa di acido solforico e un disco di zinco. Il disco di rame funge da catodo, mentre quello di zinco da anodo.



La *forza elettromotrice della pila* è la differenza di potenziale tra i dischi, che è direttamente proporzionale al numero di coppie di dischi.

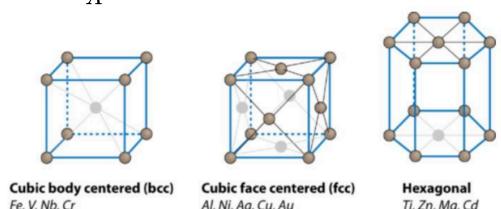
Collegando le due estremità della pila viene stabilita una *corrente continua*.

Il lavoro necessario per mantenere un moto ordinato di cariche in un circuito chiuso è ottenuto nella pila trasformando l'energia chimica in energia elettrica.

### 5.1.1. Materiali conduttori

I materiali conduttori sono formati da un reticolo spaziale (detto *reticolo cristallino*) ai cui vertici si trovano gli ioni positivi e all'interno si muovono liberamente gli elettroni. Per alcuni metalli (come il rame e l'argento) c'è un elettrone libero per ogni atomo.

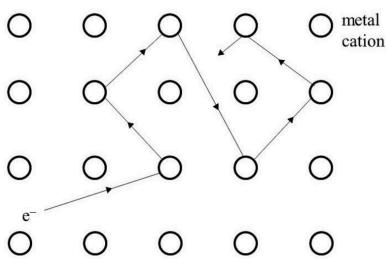
Per calcolare il numero di elettroni liberi si può usare la formula:  $n = \frac{N_A \rho}{A}$ .



### 5.2. Modello di Drude per i materiali conduttori

Nel modello classico della conduzione elettrica dei metalli, proposto inizialmente da Drude, il moto degli elettroni liberi in un conduttore è completamente disordinato quando non vi viene applicato un campo esterno. Gli elettroni subiscono continue interazioni (chiamate urti) con gli ioni e il loro moto tra un urto e il successivo è rettilineo, mentre la sua direzione è casuale. Allora l'insieme delle traiettorie è casuale e non si ha flusso (o *corrente*) in alcuna direzione.

Da ciò capiamo che la velocità ha una distribuzione termica, quindi  $v_m = \frac{1}{N} \sum_i v_i = 0$ .



Applicando un campo elettrico  $\vec{E}$  ogni elettrone acquista un'accelerazione nello stesso verso del campo  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$ , però il loro moto continua a essere disordinato, urtando gli ioni in media ogni  $\tau$ . Acquistano allora una velocità di deriva  $\vec{v}_d = \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m}\tau$ , dove  $\vec{v}_i$  è la componente casuale del moto.

Facendo la media tra le velocità di tutti gli  $N$  elettroni troviamo

$$\bar{v}_d = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m}\tau = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

, perché  $\langle v \rangle v_m = \frac{1}{N} \sum_i v_i = 0$ !

Macroscopicamente vediamo che in presenza di un campo elettrico gli elettroni si muovono a *velocità costante*.

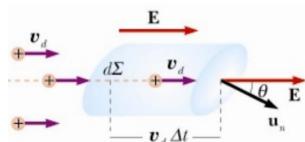
### 5.3. Corrente elettrica

Consideriamo ora una superficie  $\Sigma$  all'interno di un conduttore.

Definiamo l'*intensità di corrente istantanea*  $i$  come la carica  $\Delta q$  che passa attraverso la superficie  $\Sigma$  nel tempo  $\Delta t$  (per  $\Delta t \rightarrow 0$ )

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Prendiamo invece una superficie infinitesima  $d\Sigma$ . La carica complessiva che la attraversa in un tempo  $\Delta t$  è quella contenuta nel volumetto  $d\tau = d\Sigma v_d \Delta t$ , ovvero  $\Delta q = ne d\Sigma \cos \theta v_d \Delta t$ , con  $\theta$  l'angolo tra la normale della superficie e la direzione del campo e  $n$  il numero di portatori di carica.



Ottengo allora che l'intensità di corrente attraverso  $d\Sigma$  è  $di = ne v_d d\Sigma \cos \theta$ .

Definiamo quindi la *densità di corrente* (di elettroni) come

$$\vec{j} = n(-e)\vec{v}_d$$

## ⚡ Unità di misura

La corrente elettrica ha come unità di misura l'*Ampere*, data dalla relazione

$$A = \frac{C}{s}$$

Spesso sono usati i sottomultipli per le correnti e i multipli per le potenze.

La densità di corrente ha unità  $\frac{A}{m^2}$

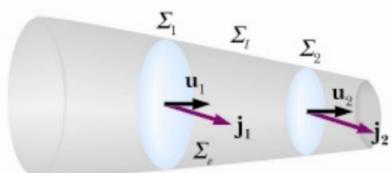
### ⚠ Osservazione

Presi una superficie  $\Sigma$  ortogonale al campo  $\vec{E}$  uniforme, allora

$$i = j\Sigma$$

### 5.3.1. Corrente elettrica stazionaria

Date due superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , le rispettive intensità di corrente  $i_1 = \int_{\Sigma_1} \vec{u} \cdot \vec{u}_1 d\Sigma_1$  e  $i_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot \vec{u}_2 d\Sigma$ ; queste intensità rappresentano la carica che entra e esce dalla superficie chiusa delimitata tra  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_l$  (un tronco di cono).



Assunto che la carica non vari nel tempo, ovvero in *condizione di stazionarietà*, tra  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , allora  $i_1 = i_2$ , ovvero *l'intensità di corrente è costante attraverso ogni sezione del conduttore*.

### 5.4. Legge di Ohm della condutività elettrica

Usando che  $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_d$  e  $\vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau$ , otteniamo la legge di Ohm, che lega la densità di corrente  $\vec{j}$  al campo  $\vec{E}$

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

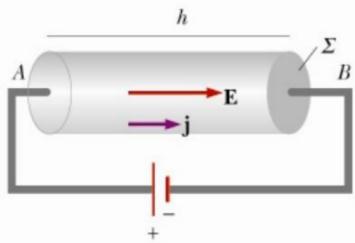
con  $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$  detta *conduttività del materiale*.

Questa legge si può anche riscrivere nella forma  $\vec{E} = \rho\vec{j}$ , dove  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  è la *resistività del materiale*.

Minore è la resistività del conduttore, maggiore è la densità di corrente che può circolare in un conduttore a parità di campo elettrico  $E$ .

### 5.4.1. Legge di Ohm per i conduttori metallici

Applichiamo la legge di Ohm ad un conduttore metallico cilindrico di lunghezza  $h$  e sezione  $\Sigma$ . Ai capi del conduttore è applicata, tramite un generatore di forza elettromotrice, una differenza di potenziale  $V = V_B - V_A$ .



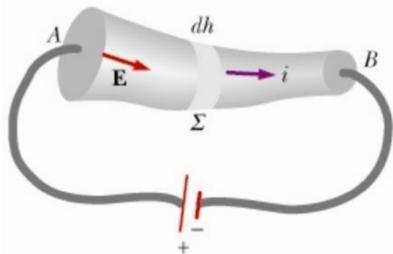
Il regime è stazionario, l'intensità di corrente ha lo stesso valore attraverso qualsiasi sezione del conduttore ed è legata al campo elettrico tramite la formula  $E = \rho j = \frac{\rho}{\Sigma} i$ , mentre campo elettrico e potenziale sono legati dalla relazione  $V = V_B - V_A = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = Eh$ .

Ottengo dunque che

$$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i = Ri$$

con  $R = \frac{\rho h}{\Sigma}$ , che chiamiamo *resistenza*.

Questa è anche nota come *legge di Ohm per i conduttori metallici*.



La legge si può generalizzare prendendo  $R = \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma(h)} dh$ .

#### ⌚ Unità di misura

L'unità della resistenza ha simbolo  $\Omega$  e valore deducibile dalla sua definizione

$$\Omega = \frac{V}{A}$$

La resistività invece si misura in  $\Omega m$ , la conduttanza in  $\Omega^{-1} = S$  (dove  $S$  si chiamano siemens), la conduttività in  $\Omega^{-1}m^{-1}$ .

**TABELLA 5.1 Resistività e coefficienti termici della resistività**

| Materiale          | Resistività ( $\Omega \cdot m$ ) | Coefficiente termico ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ) |
|--------------------|----------------------------------|--|
| argento            | $1.59 \cdot 10^{-8}$             | $4.1 \cdot 10^{-3}$                              |
| rame               | $1.67 \cdot 10^{-8}$             | $6.8 \cdot 10^{-3}$                              |
| oro                | $2.35 \cdot 10^{-8}$             | $4.0 \cdot 10^{-3}$                              |
| alluminio          | $2.65 \cdot 10^{-8}$             | $4.3 \cdot 10^{-3}$                              |
| tungsteno          | $5.65 \cdot 10^{-8}$             | $4.5 \cdot 10^{-3}$                              |
| zinco              | $5.92 \cdot 10^{-8}$             | $4.2 \cdot 10^{-3}$                              |
| nichel             | $6.84 \cdot 10^{-8}$             | $6.9 \cdot 10^{-3}$                              |
| ferro              | $9.71 \cdot 10^{-8}$             | $6.5 \cdot 10^{-3}$                              |
| platino            | $10.6 \cdot 10^{-8}$             | $3.9 \cdot 10^{-3}$                              |
| stagno             | $11.0 \cdot 10^{-8}$             | $4.7 \cdot 10^{-3}$                              |
| niobio             | $12.5 \cdot 10^{-8}$             |  |
| piombo             | $20.7 \cdot 10^{-8}$             | $3.4 \cdot 10^{-3}$                              |
| mercurio           | $98.4 \cdot 10^{-8}$             |  |
| carbonio (grafite) | $1.38 \cdot 10^{-5}$             | $-0.5 \cdot 10^{-3}$                             |
| germanio           | 0.46                             | $-48 \cdot 10^{-3}$                              |
| silicio            | $2.30 \cdot 10^3$                | $-75 \cdot 10^{-3}$                              |
| acqua              | $2 \cdot 10^5$                   |  |
| vetro              | $10^{10} \div 10^{14}$           |  |
| zolfo              | $2 \cdot 10^{15}$                |  |
| quarzo fuso        | $10^{16} \div 10^{17}$           |  |
| aria               | $3 \cdot 10^{13}$                |  |



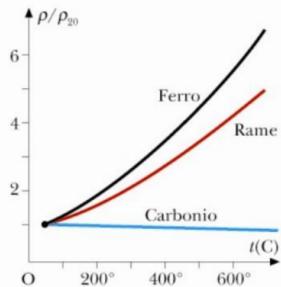
*P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci*  
**Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III**  
**EdiSES Università**

#### 5.4.2. Effetti termici

La resistività nella maggior parte dei conduttori metallici puri è una funzione crescente della temperatura. In un intervallo limitato (qualche decina di gradi) intorno alla temperatura di  $20^{\circ}\text{C}$  la relazione è praticamente lineare

$$\rho = \rho_{20}(1 + \alpha\Delta T)$$

con  $\Delta T = T - 20^\circ$  la differenza delle temperature e  $\alpha = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$  il coefficiente termico.



## 5.5. Esercizio 5.6

Un resistore ha la forma di un tronco di cono lungo  $d$  e raggi estremi  $a$  e  $b$ . Se  $\rho$  è la resistività del materiale, **calcolare la resistenza  $R$  e verificare la formula per  $a=b$ .**

## 5.6. Resistenze in serie e in parallelo

Conduttori ohmici caratterizzati da un determinato valore della resistenza (alla temperatura ambiente) sono chiamati **resistori**

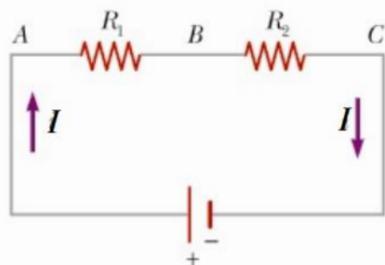
Oltre al valore della resistenza viene sempre precisato il valore massimo della potenza che può essere in essi dissipata senza causare alterazioni irreversibili.



Simbolo del resistore.

### 5.6.1. Resistenza in serie

Due resistori sono collegati in serie quando hanno un **estremo in comune**: in regime stazionario l'**intensità** cli corrente che li attraversa è la **stessa**.

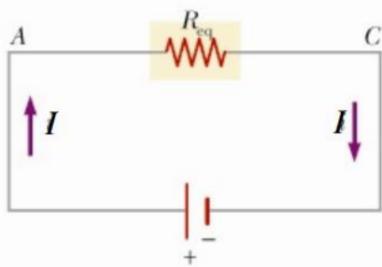


Applichiamo a ciascun resistore la legge di Ohm e sommiamo:

$$V_A - V_B = R_1 i, \quad V_B - V_C = R_2 i, \quad \text{allora} \quad V_A - V_C = (R_1 + R_2)i.$$

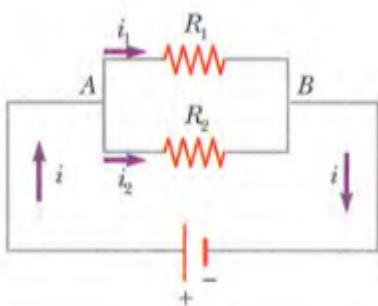
Definiamo quindi la *resistenza equivalente*

$$R_{eq} = R_1 + \dots + R_n$$



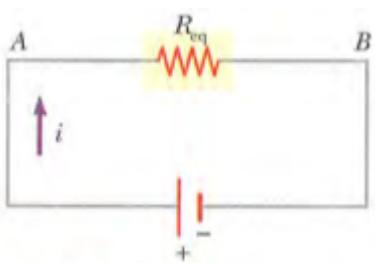
### 5.6.2. Resistenza in parallelo

Due resistori si dicono in parallelo quando sono *collegati* tra loro in *entrambi gli estremi*. In questo caso l'elemento comune ai due resistori è la differenza di potenziale  $V = V_A - V_B$  e quindi, in base alla legge di Ohm, essi sono attraversati da due correnti  $i_1$  e  $i_2$ , diverse se sono diversi i valori delle resistenze  $R_1$  e  $R_2$



Avendo allora  $i_1 = \frac{V}{R_1}$  e  $i_2 = \frac{V}{R_2}$ , quindi  $i_{tot} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R_{eq}}$  con

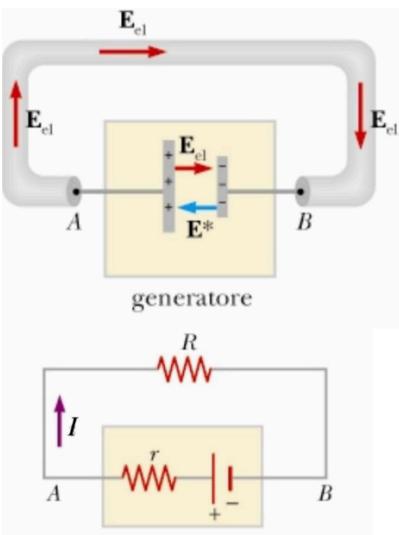
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}$$



[Lezione 11](#)

### 5.7. Forza elettromotrice

Consideriamo un modello semplificato di un generatore. Dentro di esso sono accumulate le cariche  $+q$  e  $-q$ . Nel conduttore vale la legge di Ohm, quindi  $V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ri$ , che per un circuito chiuso diventa  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_{Ti}$ .



Noto però che il primo membro dell'equazione coincide con la definizione di forza elettromotrice, allora affermo che il campo elettrico totale è formato da un campo elettrostatico  $\vec{E}_{el}$  e un **campo elettromotore**  $\vec{E}^*$ , che è l'origine della corrente  $i$ .

La circuitazione *non è nulla* e vale

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = Ri$$

Il generatore è anche caratterizzato da una propria resistenza interna  $r$ :

$$\mathcal{E}(R + r)i \quad \mathcal{E} - ri = Ri$$

## 5.8. Potenza dissipata da una resistenza

Consideriamo una carica  $dq$  che sta attraversando una resistenza la cui differenza di potenziale vale  $V$ . Il lavoro compiuto dal campo elettrico è

$$dW = Vdq = Vi dt$$

quindi la *potenza elettrica* spesa è

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi$$

se vale la legge di Ohm allora  $P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$ .

Se la corrente è costante nel tempo, il lavoro per un dato tempo  $t$  vale  $W = Pt$ .

### 5.8.1 Effetto Joule

Tornando al modello di Drude, gli elettroni cedono energia al reticolo dopo ogni urto. Per questo in presenza di un campo elettrico hanno una velocità di deriva costante e non seguono un moto uniformemente accelerato.

Il lavoro svolto per vincere la resistenza del reticolo viene assorbito dal conduttore, la cui temperatura allora aumenta. Questo effetto viene chiamato *effetto Joule*.

### ! Osservazione

Se il conduttore è posto in isolamento termico, allora esso si scalda fino alla fusione del metallo. Se invece è in contatto termico con l'ambiente, si scalda fino a raggiungere una temperatura di equilibrio (se questa è inferiore a quella di fusione).

## 5.9. Leggi di Kirchoff

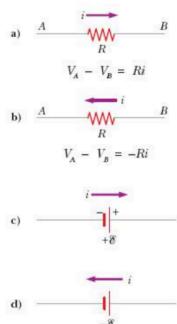
La *prima legge di Kirchoff* o la *legge dei nodi* dice che la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla

$$\sum_k i_k = 0$$

La *seconda legge di Kirchoff* o *legge delle maglie* stabilisce che la somma algebrica delle forze elettromotrici presenti nei rami della maglia è eguale alla somma algebrica delle differenze di potenziale ai capi dei resistori  $R_k$  situati nei rami della maglia (nella somma sono compresi anche i contributi delle resistenze interne dei generatori)

$$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_k R_k i_k$$

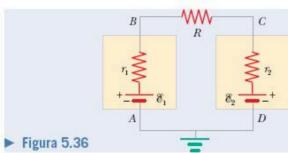
Per la convenzione dei segni si versa (arbitrariamente) il verso della maglia. Se la corrente  $i_k$  è concorde avrà segno positivo, altrimenti negativo. Se la sorgente di forza elettromotrice viene attraversata dal polo negativo al polo positivo allora avrà segno positivo, altrimenti negativo.



▲ Figura 5.34 Regole sui segni delle grandezze che compaiono nella legge delle maglie.

## 5.10. Esempio 5.9

Nel circuito a una maglia  $R = 50\Omega$ ,  $\mathcal{E}_1 = 50V$ ,  $r_1 = 30\Omega$ . Calcolare l'intensità della corrente  $i$ .



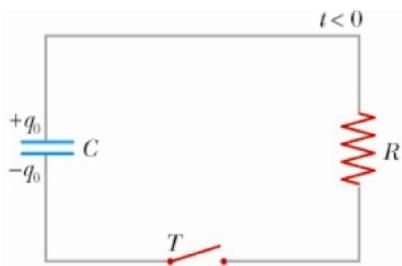
► Figura 5.36

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES EdiSES Università

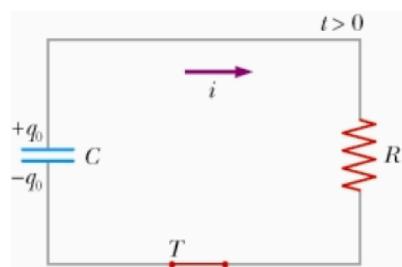
## 5.11. Carica e scarica di un condensatore in un circuito RC

### 5.11.1. Scarica di un condensatore

Consideriamo un condensatore  $C$  con carica iniziale  $q_0$ , una resistenza  $R$  e un interruttore inizialmente aperto. La differenza di potenziale ai capi del condensatore vale  $V_0 = \frac{q_0}{C}$ , mentre l'energia immagazzinata è  $U = \frac{q_0^2}{2C}$ .



Al momento  $t = 0$  chiudiamo l'interruttore, quindi il circuito. Le cariche positive si muovono dall'armatura a potenziale maggiore a quella di potenziale minore, dando luogo a una corrente  $-i = \frac{dq}{dt}$  sul resistore, il cui segno meno è dovuto dal fatto che diminuisce nel tempo.



In un istante generico, la differenza di potenziale ai capi del condensatore  $V_C$  è uguale a quella ai capi del resistore  $V_R$ , valgono allora le relazioni:

$$V_C = \frac{q}{C} = V_R = Ri \implies i = \frac{q}{RC}$$

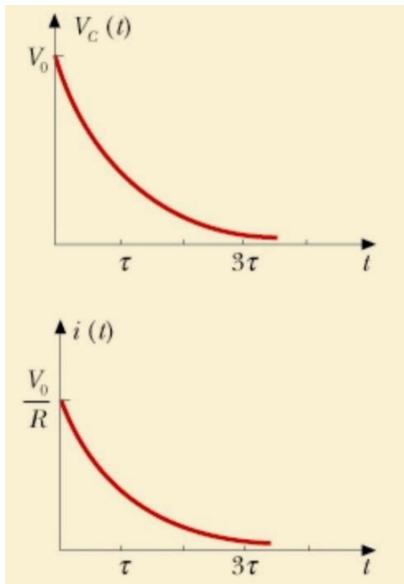
$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC} \implies \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \implies \int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \implies \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC} = q(t) = q_0 e^{-t/\tau},$$

con  $\tau = RC$ , una costante di tempo detta *costante caratteristica* del

circuito.

Ho quindi le formule

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0 e^{-t/\tau}, \quad i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau}, \quad q(t) = q_0 e^{-t/\tau}, \quad P(t) = R i^2 = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$



Nella scarica viene dissipata energia pari a  $U = \frac{q_0^2}{2C}$ .

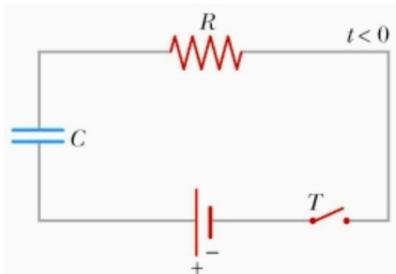
### ! Osservazione

Dal valore iniziale della differenza di potenziale nel circuito, dopo un tempo  $\tau$  il valore sarà 36.8%, dopo  $2\tau$  13.5%, mentre dopo  $3\tau$  sarà 0.5%.

Si considera che dopo un tempo  $5\tau$  il valore sia nullo (l'errore di approssimazione è trascurabile).

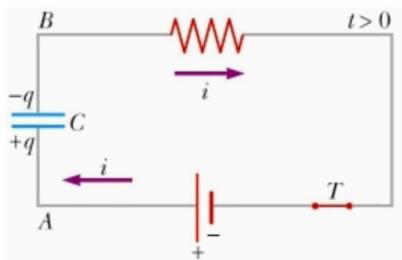
## 5.11.2. Carica di un condensatore

Consideriamo un condensatore  $C$  inizialmente scarico, una resistenza  $R$ , un generatore di forza elettromagnetica  $\mathcal{E}$  e un interruttore inizialmente aperto.



Al momento  $t = 0$  chiudiamo l'interruttore, quindi il circuito. Il generatore inizia a prelevare cariche dai conduttori connessi al polo negativo e a portarle al polo positivo di modo che sulle armature del condensatore compaiono le cariche  $+q$  e  $-q$ , fino a

quando la carica del condensatore raggiunge il valore massimo  $q_0 = C\mathcal{E}$ , a cui corrisponde la differenza di potenziale  $V_A - V_B$  tra le armature, pari alla forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  del generatore.



In un istante di tempo generico valgono le formule

$$\mathcal{E} = V_R(t) + V_C(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

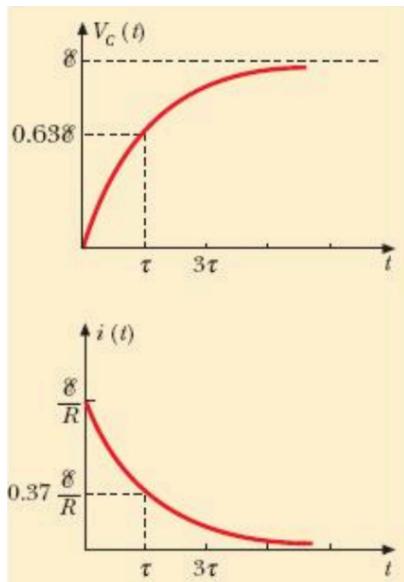
Supponendo che la resistenza interna del generatore sia trascurabile, trovo che

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \implies \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = \frac{dt}{RC} \implies \int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \implies \ln \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = -\frac{t}{RC}$$

Quindi otteniamo le formule

$$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}), \quad V_C(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau}), \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}, \quad V_R(t) = \mathcal{E}e^{-t/\tau}$$

Con  $\tau = RC$ , detto *tempo caratteristico* del circuito.



### ! Osservazione

La differenza di potenziale tra le armature del condensatore al tempo  $t = 0$  è nulla, mentre la corrente è massima ( $\frac{\mathcal{E}}{R}$ ). Dopo un tempo  $\tau$   $V_C$  sarà il 63.2% di  $\mathcal{E}$  (il suo valore asintotico) e la corrente sarà il 36.8% del valore iniziale, dopo  $2\tau$  saranno rispettivamente 86.5%, mentre dopo  $3\tau$  saranno 99.5% e 0.5%.

Si considera che dopo un tempo  $5\tau$   $V_C$  ha raggiunto il valore

massimo e la corrente è nulla (l'errore di approssimazione è trascurabile).

Durante il processo, il generatore compie lavoro

$$W = \int \mathcal{E} dq = \mathcal{E} \int_0^{q_0} dq = \mathcal{E} q_0 = C \mathcal{E}^2.$$

Siccome  $\Delta U = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$ , si deduce che metà del lavoro viene dissipato sulla resistenza per effetto Joule, mentre l'altra metà per aumentare l'energia elettrostatica del condensatore. Si ottiene allora la relazione

$$P_{gen}(t) = P_C(t) + P_R(t)$$

## Lezione 12

# 6. Campo magnetico e forza magnetica

## 6.1. Interazione magnetica e campo magnetico

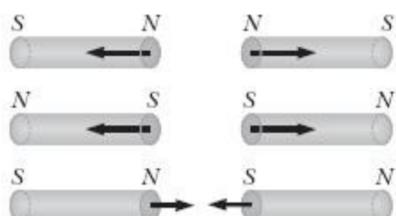
Il magnetismo è un fenomeno noto sin dall'antichità: la proprietà di attirare la limatura di ferro di alcuni minerali come la magnetite era nota ai greci almeno dal VVI secolo a.C.

Il nome di tale campo di forza deriva dalla città Magnesia al Meandro nei pressi dell'odierna città di Germencik in Turchia, dove ci sono giacimenti di magnetite.

Fino all'inizio del XIX secolo, il campo magnetico era considerato indipendente dal campo elettrico. Nel XVI secolo il fisico britannico William Gilbert condusse degli esperimenti, grazie ai quali notò *cinque proprietà*:

1. Un magnete genera un campo, chiamato *campo magnetico*, e un altro magnete risente dell'azione che il campo esercita nella posizione da esso occupata. In particolare si nota che la forza di interazione tra i due magneti è *attrattiva o repulsiva* a seconda dei poli magnetici che vengono affacciati, detti *poli positivi* e *poli negativi*.

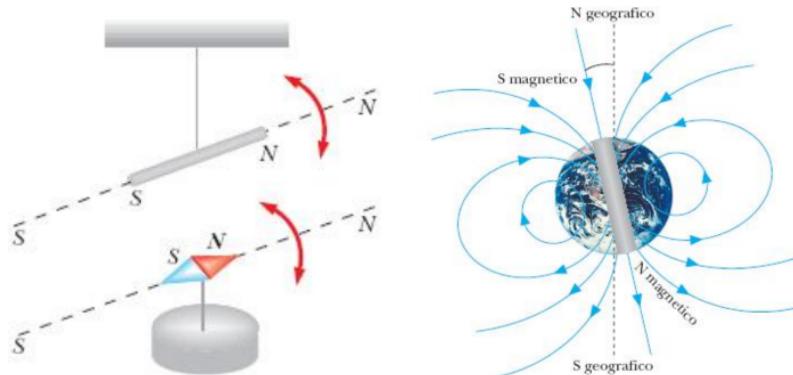
Si nota inoltre che i poli di uno stesso magnete sono *sempre opposti*.



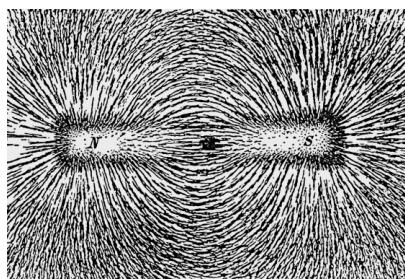
2. Se si avvicina a un pezzo di magnetite una bacchetta sottile di ferro, questa a sua volta *acquista la proprietà* di attrarre la

limatura di ferro. Essa viene chiamata *magnete artificiale* o *calamita* e presenta due poli magnetici di segno opposto.

- Se sospendiamo ad un filo l'ago magnetico sopra definito e lo lasciamo libero di ruotare, osserviamo che esso tende a disporsi approssimativamente parallelo al meridiano terrestre.



- Coulomb svolse uno studio quantitativo sulla *forza magnetica* tra i poli di due magneti, dimostrando un andamento inversamente proporzionale al quadrato della distanza, almeno per i poli puntiformi (gli estremi di sbarre lunghe e sottili ne sono una buona approssimazione).
- I granelli di limatura si dispongono in modo ordinato lungo linee regolari, fatto che interpretiamo supponendo che ciascun granello venga magnetizzato dal campo magnetico del magnete e, diventato un dipolo magnetico, si orienti parallelamente al campo magnetico stesso.

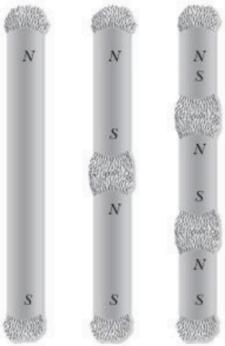


### 6.1.1. La calamita spezzata

Se si taglia a metà una calamita compaiono sempre due poli di segno opposto nella zona del taglio, che precedentemente non mostrava la proprietà di attirare la limatura di ferro.

Ripetendo il taglio su pezzi sempre più piccoli, si ottiene ogni volta lo stesso risultato, *senza* riuscire ad ottenere un polo magnetico isolato (*monopololo magnetico*). Infatti i poli magnetici sembrano esistere sempre a coppie di egual valore e segno opposto, cioè sotto forma di *dipoli magnetici*. Non è mai stato possibile

ottenere un monopolo magnetico.



### ♀ Approfondimento

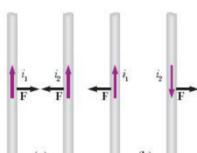
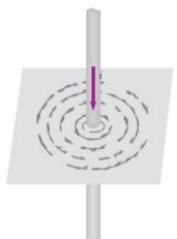
L'esistenza del **monopolo magnetico elementare** (e della sua antiparticella) non sarebbe in contrasto con le teorie quantistiche che descrivono il comportamento elementare della materia. Una possibile spiegazione della loro attuale assenza è la seguente: nel **big-bang** da cui ha avuto origine l'universo sono stati prodotti, insieme alle altre particelle, anche **monopoli e antimonopoli**; la maggior parte di questi, a seguito di processi di annichilazione particella-antiparticella è scomparsa in un tempo brevissimo liberando energia, ma alcuni però potrebbero essere sopravvissuti e sarebbero sparsi nell'universo, analogamente a quanto succede per i **neutrini** e per la cosiddetta **radiazione cosmica di fondo**, altri **fossili** dei processi avvenuti negli istanti immediatamente successivi al big-bang.

Poiché l'interazione di questi ipotetici monopoli con la materia dovrebbe dar luogo a un rilascio di energia notevole (su scala microscopica) sono stati costruiti esperimenti per segnalare l'eventuale passaggio di monopoli; uno di questi è installato da vari anni nel laboratorio sotterraneo del Gran Sasso, dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. Caratteristica di tali laboratori è la schermatura, dovuta a chilometri di roccia, di buonaparte della radiazione cosmica, con il che è facilitata la rivelazione di fenomeni rari dovuti a particelle extraterrestri penetranti. Nessun monopolo magnetico è stato finora rivelato, anche se si sono ottenuti limiti sui flussi di tali particelle: anche tali risultati negativi sono importanti, in quanto permettono di selezionare tra teorie concorrenti.

## 6.2. Elettricità e magnetismo

Nel XIX secolo sono stati effettuati diversi esperimenti da diversi fisici come Hans Christian Ørsted e André-Marie Ampère.

Oersted mostrò che un ago magnetico, posto in prossimità di un filo percorso da corrente, tende ad assumere una ben definita posizione di equilibrio. Se poniamo in un piano perpendicolare al filo percorso da corrente della limatura di ferro, osserviamo che i grani si addensano lungo circonferenze con centro il filo.



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci

Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III

EdiSES Università



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci

Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III

EdiSES

In seguito Ampère dimostrò che anche due fili percorsi da corrente interagiscono e intuì che le azioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'*interazione tra cariche elettriche in movimento*, ponendo le basi della teoria attuale del magnetismo.

Negli anni successivi al 1820 Faraday dimostrò l'esistenza di una ulteriore connessione tra elettricità e magnetismo, provando che campi magnetici variabili nel tempo producono campi elettrici (non conservativi).

Infine Maxwell, a cui è dovuta la sistemazione formale dell'elettromagnetismo classico, predisse il risultato simmetrico, cioè che campi elettrici variabili nel tempo danno origine a campi magnetici. Egli dimostrò pertanto che nel caso più generale un *campo elettrico e un campo magnetico non possono avere esistenza indipendente e vanno unificati nell'unico concetto di campo elettromagnetico*. Con lo sviluppo della teoria della relatività ristretta la nozione di campo elettromagnetico acquistò un ulteriore aspetto, nel senso che campo elettrico e campo magnetico hanno significato relativo: un'interazione magnetica in un sistema di riferimento inerziale può apparire elettrica in un altro sistema di riferimento inerziale e viceversa.

## 6.3. Forza magnetica su una carica in moto

Dai paragrafi precedenti possiamo concludere che sistema di cariche in moto genera, in una certa regione, un campo magnetico, che

indichiamo con il simbolo  $\vec{B}$ , e che l'altro sistema di cariche in moto risente di una forza in quanto immerso in  $\vec{B}$ .

Consideriamo ora una particella di massa  $m$  e carica  $q$ , posta in un campo magnetico  $\vec{B}$ . Se la particella è "ferma", su di essa non agisce alcuna forza. Se invece la particella è in moto con velocità  $\vec{v}$ , si verifica che su di essa agisce la *forza di Lorentz*

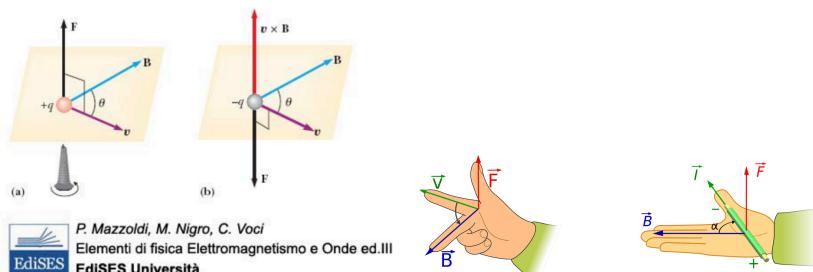
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

il cui modulo vale  $F = qvB \sin \theta$ , con  $\theta$  l'angolo tra  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ . Allora avrà valore massimo quando  $\vec{v}$  è ortogonale a  $\vec{B}$ , mentre sarà nulla se saranno parallele.

### Lezione 13

La direzione della forza è ortogonale al piano individuato da  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  e il suo verso è determinato dalla regola del prodotto vettoriale quando la carica è positiva (altrimenti dal suo opposto se è negativa).

Mnemonicamente, per individuare il verso si può usare la regola della mano destra o della vite.



#### 6.3.1. Teorema dell'energia cinetica

La differenza di energia cinetica tra due punti nella traiettoria di una carica in movimento all'interno di una regione con campo magnetico non nullo è data dalla seguente formula:

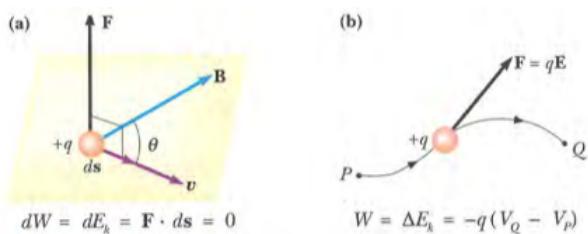
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Ovvero la differenza di energia è data dal lavoro compiuto dalla forza di Lorentz, in particolare dal prodotto scalare tra la forza e lo spostamento infinitesimo.

Come è stato detto nel paragrafo precedente, la forza di Lorentz  $\vec{F}$  è sempre ortogonale alla velocità  $\vec{v}$ , che è sempre parallela allo spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$ . Allora il prodotto scalare tra forza e spostamento è nullo ( $\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ ).

Concludiamo che la *forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella*, comunica soltanto un'accelerazione centripeta ad essa,

quindi una particella carica che si muove in un campo magnetico, ha una velocità che cambia in direzione, ma non in modulo.



**Figura 6.15**

Il campo magnetico (a) non accelera una particella carica, mentre il campo elettrostatico (b) la accelera.

### ⌚ Unità di misura

L'unità del campo magnetico nel sistema internazionale si ricava grazie alla formula della forza di Lorentz:

$$\frac{N}{C\frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$$

e le si dà il nome di *tesla*

$$T = \frac{kg}{As^2}$$

Un sottomultiplo comune, ma non standard, è il *gauss*, definito come  $1G = 10^{-4}T$ .

### ♀ Approfondimento

Il campo magnetico terrestre, sulla superficie terrestre, vale circa  $0,4G$ . I normali magneti da laboratorio possono generare campi magnetici fino a  $2T$ . Campi magnetici fino a  $10T$  sono attualmente prodotti utilizzando la tecnologia della *supercondutività*.

## 6.5. Moto di una particella carica in un campo magnetico

Consideriamo il seguente problema (esempio 5.9): un fascio di elettroni viene accelerato da fermo con una differenza di potenziale  $V$  e inviato in una regione in cui agisce un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme, perpendicolare alla direzione di volo degli elettroni.

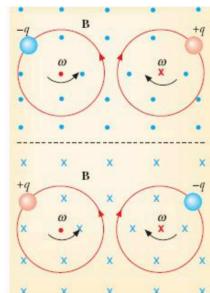
**Descrivere il moto degli elettroni.**

Dopo l'accelerazione dovuta al potenziale elettrostatico  $V$ , gli elettroni avranno velocità  $|v| = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ .

Entrando nella regione con il campo magnetico, istante per istante la forza di Lorentz, sempre perpendicolare alla velocità e al campo, è diretta verso il centro

$$F = evB = m \frac{v^2}{r}$$

La forza di Lorentz è una forza *centripeta* e gli elettroni compiono una *traiettoria circolare*.



 P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

Dalla formula della forza si possono ricavare:

- Il *raggio* della curvatura:  $r = \frac{mv}{eB}$ ;
- La *velocità angolare*:  $\omega = \frac{v}{r} = \frac{eb}{m}$ ;
- Il *periodo* della traiettoria:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$

### ① Osservazione

Abbiamo potuto ricavare le formule con semplicità perché il valore della velocità, quindi a cascata anche i valori ricavati, sono costanti nel tempo.

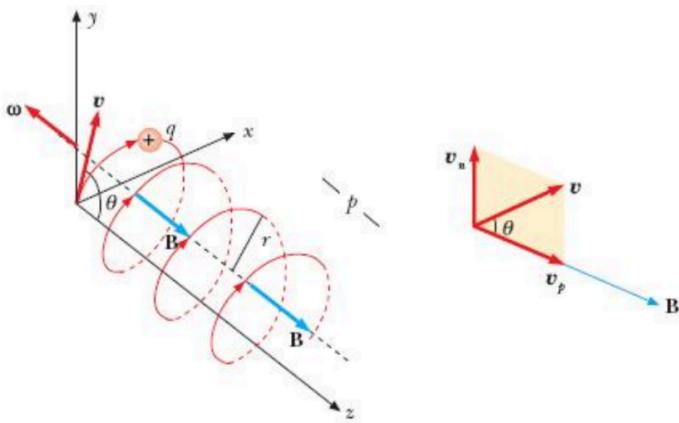
## 6.5.1. Caso con angolo generico tra velocità e campo magnetico

Nel caso in cui ci sia un angolo generico  $\theta$  tra  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ , scomponiamo la velocità nelle sue componenti  $\vec{v}_\perp = \vec{v} \sin \theta$  (ortogonale a  $\vec{B}$ ) e  $\vec{v}_\parallel = \vec{v} \cos \theta$  (parallela a  $\vec{B}$ ).

Osserviamo che  $\vec{F}_\parallel = q\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = 0$ , quindi  $\vec{v}_\parallel$  resta costante e il moto lungo la direzione del campo è *rettilineo uniforme*.

Lungo il piano ortogonale al campo, la forza vale  $\vec{F}_\perp = q\vec{v}_\perp \times \vec{B}$ , cioè il moto descritto è analogo a quello del caso precedente, sarà perciò *circolare uniforme* con velocità  $\vec{v}_\perp$ .

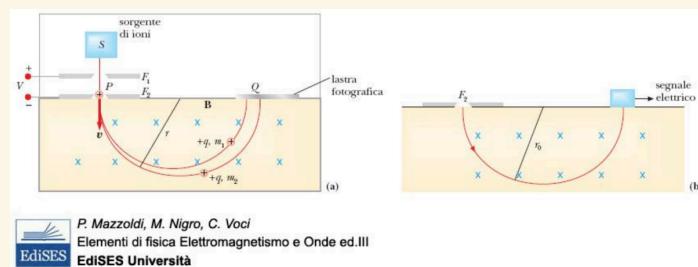
Complessivamente, la particella compie un *moto elicoidale uniforme* avendo come asse la stessa direzione di  $\vec{B}$ , raggio  $r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$  e passo  $p = \vec{v}_\perp T = 2\pi \frac{mv \cos \theta}{qB}$



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

## 💡 Applicazioni del moto di particelle cariche in un campo magnetico uniforme

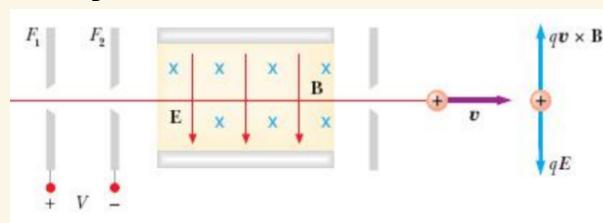
Lo *spettrometro di massa* è uno strumento che separa ioni aventi la stessa carica, ma massa diversa.



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

Gli ioni prodotti nella sorgente  $S$  passano attraverso una coppia di fenditure strette che ne definiscono la traiettoria e tra le quali è applicata una differenza di potenziale  $V$ . All'uscita dalla seconda fenditura tutti gli ioni, indipendentemente dalla loro massa se hanno la stessa carica e considerando trascurabile la velocità iniziale, possiedono la stessa energia cinetica. Si ottiene così un fascetto di ioni isoenergetici, che viene introdotta in un campo magnetico  $\vec{B}$  costante. Il raggio della loro traiettoria sarà deciso solo dalla loro velocità, carica e massa; allora differirà solo in base alla massa.

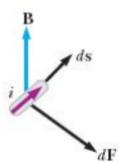
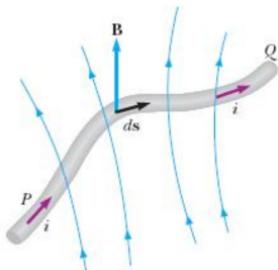
Il *selettore di velocità* è uno strumento che permette di ottenere un fascio di ioni diversi con la stessa velocità  $\vec{v}$ . Si fanno agire contemporaneamente nella stessa regione un campo elettrostatico  $\vec{E}$  e un campo magnetico  $\vec{B}$ , entrambi uniformi e ortogonali tra loro.



In questo modo solo le particelle con velocità iniziale pari a  $v = \frac{E}{B}$  proseguono con un moto rettilineo e sono in grado di uscire dal selettore.

## 6.6. Forza su un conduttore percorso da corrente

Immersiamo un conduttore in un campo magnetico  $\vec{B}$ .



Su ciascun elettrone che scorre dentro il conduttore si applica la legge di Lorentz. In un tratto di conduttore lungo  $d\vec{s}$  e di sezione  $\Sigma$  sono contenuti  $N = n\Sigma d\vec{s}$  elettroni, la forza risultante è quindi  $d\vec{F} = (\Sigma d\vec{s})n(-e)\vec{v}_d \times \vec{B} = (\Sigma d\vec{s})\vec{j} \times \vec{B} = id\vec{f} \times \vec{B}$ , dove ho usato che  $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_d$  e  $i = \Sigma j$ .

La relazione

$$d\vec{F} = id\vec{s} \times \vec{B}$$

si chiama *seconda legge elementare di Laplace* ed esprime il fatto che la forza magnetica su un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente è ortogonale al campo magnetico.

Anche qui vale la regola della vite.

Per ottenere la forza su un tratto di filo indeformabile di lunghezza finita, percorso dalla corrente (stazionaria)  $i$  integriamo

$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B}$$

con  $P$  e  $Q$  gli estremi del filo.

Su questo tratto  $\vec{B}$  può variare in modulo, direzione e verso, ma si assume sia lo stesso all'interno di ogni sezione infinitesima del filo. La corrente si porta fuori dal segno di integrale in quanto costante su ciascuna sezione del filo.

### 6.6.1. Casi interessanti

Consideriamo un campo magnetico uniforme e un conduttore rettilineo, allora la formula per la forza diventa

$$\vec{F} = i \left( \int_P^Q d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

Se invece il campo è uniforme, ma il conduttore è curvilineo ( contenuto in un piano) si ottiene

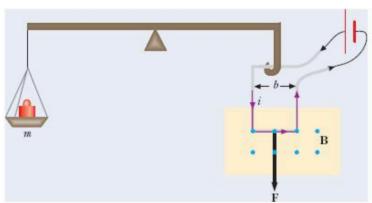
$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B} = i \overrightarrow{PQ} \times \vec{B}$$

Si può concludere quindi che la *forza* su un filo percorso da corrente che giace in un piano in cui agisce un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  *non dipende dalla forma del filo*, ma *solo dalla lunghezza* del segmento che unisce i suoi estremi.

Considerando infine il caso in cui il campo magnetico è uniforme e il conduttore è chiuso, si ha che gli estremi del filo sono coincidenti, quindi la forza è *nulla*.

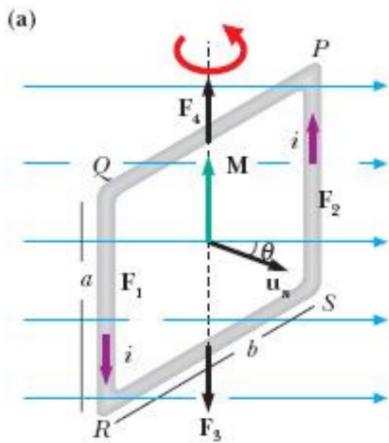
### 6.6.2. Esempio 6.1

Al giogo di una bilancia è sospesa una spira rigida larga  $b = 5\text{cm}$ . La parte inferiore è immersa in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  ortogonale al piano della spira. Se nella spira circola una corrente di intensità  $i = 1\text{A}$  con verso opportuno, si osserva che per riequilibrare la bilancia occorre mettere una massa  $m = 0.5\text{g}$  sul piatto. **Calcolare il valore del modulo di  $\vec{B}$ .**



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci  
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III  
EdiSES Università

## 6.7. Moto meccanico su circuiti piani

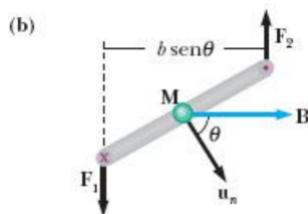


Consideriamo una spira rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , percorsa da corrente  $i$ , immersa in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme, come in figura. Orientiamo il versore  $\vec{u}_n$  della normale al piano della spire usando la regola della mano destra, allora  $\vec{u}_n$  forma un angolo  $\theta$  con  $\vec{B}$ .

Le forze che agiscono sulla spira sono:

- Sul lato  $\overrightarrow{RS}$  agisce una forza  $\vec{F}_3$  di modulo  $|\vec{F}_3| = ibB$  che punta verso il basso;
- Sul lato  $\overrightarrow{QP}$  agisce una forza  $\vec{F}_4$  di modulo  $|\vec{F}_4| = ibB$  che punta verso l'alto.

Le forze magnetiche  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  sono uguali e contrarie e hanno la stessa retta di azione: nel loro insieme formano una coppia di braccio nullo, quindi di momento nullo.



- Sul lato  $\overrightarrow{QR}$  agisce una forza  $\vec{F}_1$  di modulo  $|\vec{F}_1| = iaB$  che punta verso fuori;
- Sul lato  $\overrightarrow{PS}$  agisce una forza  $\vec{F}_2$  di modulo  $|\vec{F}_2| = iaB$  che punta verso dentro.

Le forze magnetiche  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  sono anch'esse uguali e contrarie, ma hanno diversa retta d'azione: costituiscono una coppia di braccio  $b \sin \theta$ . Il loro momento meccanico vale

$$M = b \sin \theta F = iabB \sin \theta = i\Sigma B \sin \theta$$

definendo il momento magnetico  $\vec{m}$  della spira otteniamo

$$\vec{m} = i \Sigma \vec{u}_s \quad \vec{M} \times \vec{m} \times \vec{B}$$

### ① Osservazione

Le formule dedotte per la spira, valgono in realtà per un circuito piano di qualsiasi forma.

In analogia con quanto visto per il dipolo elettrico, anche per il dipolo magnetico (spira o ago magnetico) si definisce un'*energia potenziale*, legata alla posizione angolare rispetto alla direzione di  $\vec{B}$ .

$$U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -|\vec{m}| |\vec{B}| \cos \theta$$

Tra momento meccanico e energia potenziale sussiste la relazione

$$\vec{M} = \frac{dU_p}{d\theta} = -mB \sin \theta$$

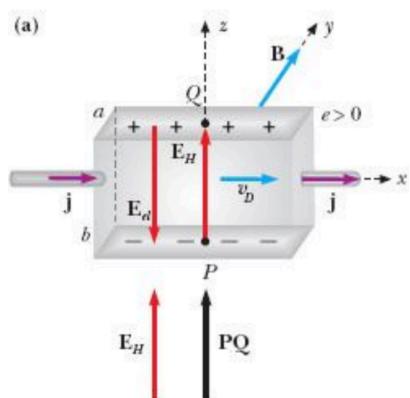
### ⌚ Unità di misura

Nel sistema internazionale, l'unità di misura del *momento di dipolo magnetico* è

$$\frac{A}{m^2} = \frac{J}{T}$$

## 6.8. Effetto Hall

Consideriamo un conduttore a forma di nastro sottile, di sezione  $\Sigma = ab$ , è percorso da una corrente di intensità  $i$  con verso concorde all'asse  $x$ . Il nastro è sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  concorde con l'asse  $y$ , allora su ciascun portatore di carica agisce la forza di Lorentz  $\vec{F} = e\vec{v}_d \times \vec{B}$ .



La forza di Lorentz provoca una *deflessione nel moto* delle cariche, aggiungendo una componente perpendicolare alla velocità di deriva, di conseguenza tende ad accumulare cariche di segno opposto sulle due facce ortogonali all'asse  $z$ .

L'accumulo di cariche crea un campo elettrostatico che si oppone a un ulteriore accumulo e porta il sistema verso un equilibrio.

A questo proposito, definiamo il *campo elettromotore di Hall* come

$$\vec{E}_H = \vec{v}_d \times \vec{B} = \left( \frac{i}{\Sigma n e} \right) \vec{u}_x \times \vec{B}$$

ricordando che  $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_d$  e  $i = \Sigma j$ .

Questo campo elettromotrice è la sorgente di una forza elettromotrice, in quanto causa una forza di natura non elettrostatica, non conservativa, che determina il moto continuo delle cariche. La condizione di equilibrio è allora

$$\vec{E}_H + \vec{E}_{el} = 0 \quad \text{o} \quad q(\vec{v}_d \times \vec{B} + \vec{E}_{el}) = 0$$

### ⓘ Osservazione

Il verso di  $\vec{E}_H$  dipende dal segno della carica: se  $e > 0$ ,  $\vec{E}_H$  è concorde all'asse  $z$ , mentre è discorde all'asse  $z$  se  $e < 0$ .

All'equilibrio, il sistema si comporta come un generatore in cui non circola corrente, la cui tensione è

$$\mathcal{E}_H = \int_P^Q \vec{E}_H \cdot d\vec{z} = E_h b = \frac{iB}{nea}$$

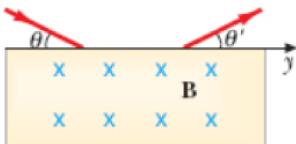
### ⓘ Approfondimento

Grazie all'*effetto di Hall trasversale* (il fenomeno appena descritto) si può determinare il segno dei portatori di carica e la densità di carica  $ne$  dei portatori.

Nella maggior parte dei metalli, i portatori sono gli elettroni, ma in alcuni metalli il segno di  $\mathcal{E}_H$  corrisponde a portatori positivi. Questo non rappresenta davvero un moto di particelle positive (che è solo *apparente*), ma un moto *in direzione inversa* di elettroni, che si spostano da una zona neutra a una con *lacune* (positive), andando a colmarle; rendono dunque la prima zona positiva e la seconda neutra.

## 6.9. Esercizio 6.1

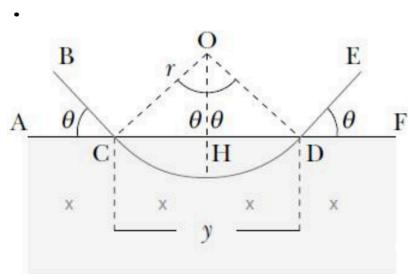
Un protone di energia cinetica  $E_K = 6\text{MeV}$  entra in una regione di spazio in cui esiste un campo magnetico  $B = 1\text{T}$  ortogonale al piano della traiettoria (verso entrante), formando con l'asse  $y$  l'angolo  $\theta = 30^\circ$ . Calcolare l'angolo  $\theta'$  della direzione di uscita con l'asse  $y$  e la distanza lungo  $y$  tra il punto di uscita e il punto di ingresso.



Il raggio di curvatura vale  $r = \frac{mv}{eB}$ .

L'angolo d'ingresso è uguale all'angolo di uscita.

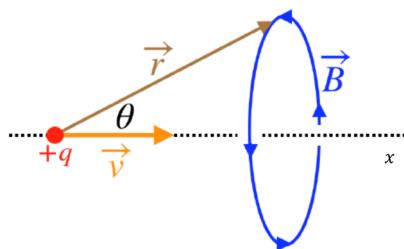
La distanza tra il punto d'ingresso e quello di uscita vale  $y = 2r \sin \theta$



Ciò si spiega visto che:  $C$  è il punto d'ingresso nella zona con campo magnetico e  $O$  è il centro del moto circolare uniforme; il segmento  $\overline{BC}$  è parallelo alla traiettoria iniziale e l'angolo  $\widehat{BCO}$  è di  $90^\circ$  perché la velocità lineare è sempre tangenziale in un moto circolare uniforme.

## 7. Sorgenti del campo magnetico, legge di Ampère, proprietà magnetiche della materia

### 7.1. Campo magnetico generato da una carica in movimento



Supponiamo di avere una carica  $q$  che si muove con moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $x$  con velocità  $\vec{v}$ , essa genera un campo magnetico

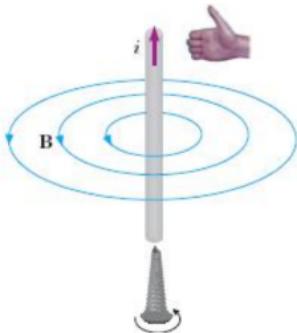
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{q}{4\pi r^2} \vec{v} \times \vec{u}_r = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

ricordando che il campo elettrostatico generato dalla carica vale

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

La costante  $\mu_0$  è chiamata *permeabilità magnetica nel vuoto*.

Il modulo del campo magnetico vale  $|\vec{B}| = \mu_0 \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \theta$ , che ci dice che le linee di campo sono *circonferenze con l'asse x come centro*, orientate secondo la regola della mano destra.



#### ! Osservazione

Questa formula mostra che campo elettrico e magnetico sono collegati, dunque è un primo suggerimento dell'esistenza del *campo elettromagnetico*.

### 7.1.1. Prima legge di Laplace

Generalizziamo il campo generato da un elettrone a quello di una corrente che scorre dentro un conduttore sfruttando l'additività del campo. In un tratto di conduttore lungo  $d\vec{s}$  e di sezione  $\Sigma$  sono contenuti  $N = n\Sigma d\vec{s}$  elettroni, otteniamo allora la formula:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi r^2} (\Sigma d\vec{s}) n(-e) \vec{v}_d \times \vec{u}_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\Sigma d\vec{s}) \vec{j} \times \vec{u}_r = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \vec{u}_r, \text{ ricordando che } \vec{j} = n(-e) \vec{v}_d \text{ e } i = \Sigma j.$$

Dunque, grazie ai suoi esperimenti, Laplace formulò la legge

$$d\vec{B} = k_m \frac{i}{r^2} d\vec{s} \times \vec{u}_r$$

con  $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ .

Per ottenere il campo magnetico  $B$  prodotto da un circuito chiuso si usa la *legge di Ampère-Laplace*

$$\vec{B} = \oint_{\text{circuito}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\text{circuito}} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

che risulta verificata sperimentalmente in ogni situazione.

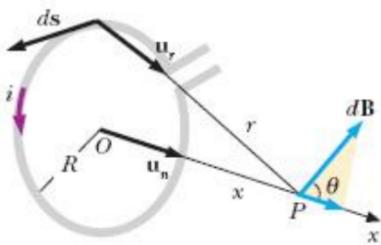
## 7.2. Campi magnetici di circuiti particolari (applicazioni della prima legge di Laplace)

### 7.2.1. Campo di una spira lungo il suo asse normale

Al centro di una spira di raggio  $R$ , percorsa da una corrente  $i$ , il campo è  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} d\vec{s} \vec{u}_n$ , quindi

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \vec{u}_n \oint d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{u}_n$$

visto che  $\oint d\vec{s} = 2\pi R$ .



Spostandosi lungo l'asse  $x$ , che coincide con l'asse normale della spira, vale sempre  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$ , ma adesso  $d\vec{B}$  avrà una componente sia lungo  $x$ , sia una trasversale.

Consideriamo l'elemento infinitesimo di circuito posto in maniera simmetrica rispetto a  $d\vec{s}$ : le componenti di  $d\vec{B}$  parallele all'asse  $x$  si sommano, mentre quelle trasversali si annullano due a due, per la simmetria del problema. Possiamo quindi limitare il calcolo alla componente lungo l'asse  $x$ . Notiamo inoltre che  $d\vec{s} \times \vec{u}_r$  sono sempre ortogonali. Otteniamo dunque la formula

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato tra l'asse  $x$  e  $d\vec{B}$ .

Infine, otteniamo la formula totale per il campo lungo l'asse della spira:  $\vec{B}(x) = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos \theta \vec{u}_n \oint ds = \frac{\mu_0 i}{2r^2} R \cos \theta \vec{u}_n =$  usando  $\theta = \frac{R}{r}$   
 $= \frac{\mu_0 i}{2r^3} R^2 \vec{u}_n$  usando  $r^2 = x^2 + R^2$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_n$$

#### Lezione 15

Lontano dalla spira ( $x \gg R$ ) si ha  $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \vec{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i\pi R^2}{x^3} \vec{u}_n = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3}$ , indicando con  $\vec{m} = i\pi R^2 \vec{u}_n$  il momento magnetico della spira, si nota che la struttura è identica a quella del campo eletrostatico

sull'asse di un dipolo ( $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}$ ), quindi il campo generato vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

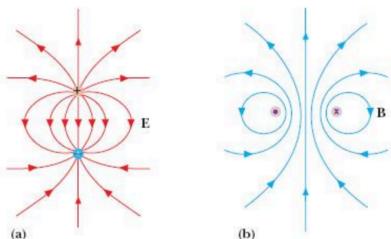
ed è un *campo di dipolo magnetico*.

Si può generalizzare a una spira di qualsiasi forma.

### 7.2.1.1. Linee di campo generate dal dipolo magnetico

Esiste una differenza sostanziale tra le linee del campo elettrico e del campo magnetico di una spira, che è la caratteristica peculiare che contraddistingue in generale di due campi:

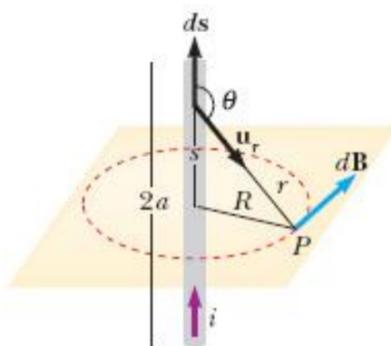
- le linee di forza del campo elettrostatico  $\vec{E}$  escono ed entrano nelle cariche sorgenti;
- le linee del campo magnetico  $\vec{B}$  sono linee chiuse, senza inizio e senza fine.



Le linee di campo magnetico sono *concatenate con la sorgente* che le ha prodotte. Inoltre, prendendo un percorso chiuso coincidente con una delle linee del campo, si può osservare che il campo è sempre equiverso lungo tale linea e quindi la sua *circuitazione non* può essere *nulla*.

### 7.2.2. Campo di un file rettilineo - legge di Biot-Savart

Consideriamo il campo generato da un filo rettilineo di lunghezza  $2a$ , in cui scorre corrente continua  $i$ , sul piano bisettrice; ci poniamo sul punto  $P$  a distanza  $R$  dal filo.



Un elemento di filo produce campo magnetico

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta ds}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{R}$$

usando che  $r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta = R$  e  $s \tan(\pi - \theta) = -s \tan \theta = R$ .

Quindi il campo generato in totale da un file di lunghezza  $a$  si calcola integrando tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\theta_{max}$ , dove  $\theta_{max}$  corrisponde all'angolo formato dalla quota massima  $s = a$ :  $B_a = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos \theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}}$ .

Allora si ha

$$B_a = \frac{\mu_0 i a}{4\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}$$

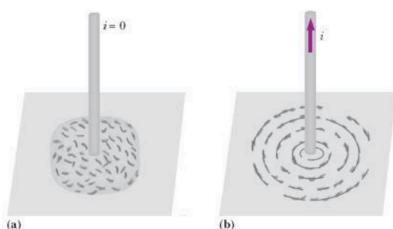
Prendendo tutto il filo iniziale in esame si ottiene il campo

$$\vec{B} = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} \vec{u}_\phi$$

con  $\vec{u}_\phi$  il versore tangente alla circonferenza orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite.

Infine, facendo tendere a infinito la lunghezza del filo si ottiene la *legge di Biot-Savart*, che afferma che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende *solo dalla distanza dal filo*, in modo inversamente proporzionale; le sue linee sono *circonferenze concentriche* al filo e risultano pertanto *concatenate alla corrente, sorgente del campo stesso*.

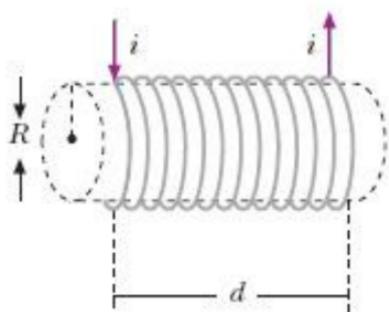
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi$$



### 7.2.3. Campo di un solenoide rettilineo lungo il suo asse

#### Ricorda

Un solenoide è una bobina formata da  $N$  spire circolari di raggio  $R$ , lunga  $d$ , in cui scorre una corrente  $i$ . È caratterizzato dalla densità di spire per unità di lunghezza  $n = \frac{N}{d}$ .

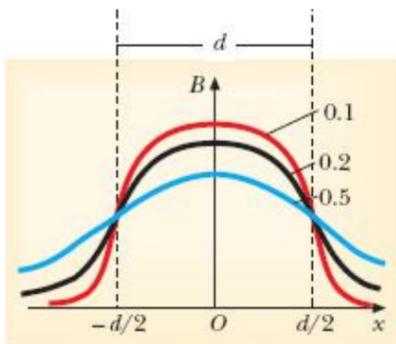


Si può dimostrare, sommando il campo generato da tutte le spire, che il campo magnetico generato da un solenoide rettilineo è pari a

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[ \frac{\frac{d}{2} + x}{\sqrt{(\frac{d}{2} + x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{d}{2} - x}{\sqrt{(\frac{d}{2} - x)^2 + R^2}} \right]$$

Al centro del solenoide ( $x = 0$ ) il campo è massimo e vale

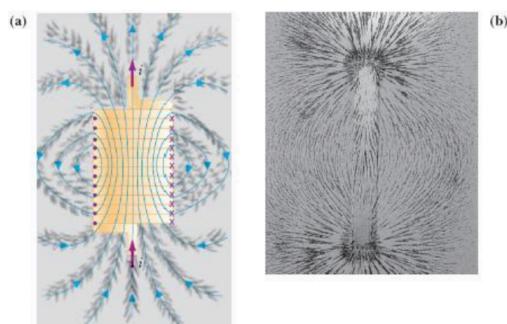
$$B_O = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}}$$



Se la lunghezza del solenoide è molto maggiore rispetto al raggio, il campo all'interno del solenoide (lontano dai bordi) si può approssimare con

$$B_\infty = \mu_0 n i$$

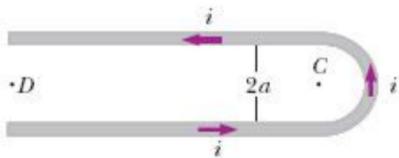
Le sue linee di campo sono molto simili a quelle di un magnete cilindrico



## 7.2.4. Esercizi

### 7.2.4.1. Esercizio 7.12

Un filo conduttore è piegato a "U", come in figura, la distanza tra i due fili paralleli è  $2a = 2\text{cm}$ , la corrente che vi scorre è  $i = 0,5\text{A}$ . Calcolare il campo magnetico in un punto  $D$ , molto lontano dal tratto di filo curvo, di cui si trascura l'effetto. Calcolare poi il campo magnetico nel punto  $C$ .



### 7.2.4.2. Esercizio 7.13

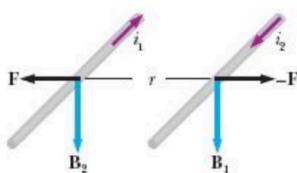
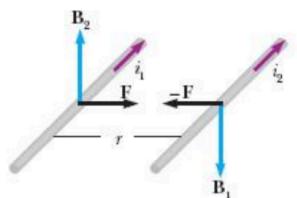
Una sottile lamina conduttrice di larghezza  $h = 2\text{cm}$  è percorsa dalla corrente  $i = 10\text{A}$ . Calcolare il valore del campo magnetico  $B(x)$  a distanza  $x$  dal bordo della striscia. Calcolare poi il momento meccanico  $\vec{M}$  che agisce su un piccolo ago magnetico di momento  $m = 0,1\vec{u}_x\text{Am}^2$ , posto a distanza  $x = 1\text{cm}$ .

## 7.3. Azioni elettrodinamiche tra i fili percorsi da corrente

Consideriamo due fili rettilinei paralleli molto lunghi e abbastanza vicini, così da poter essere considerati *indefiniti*, percorsi dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$ . Ciascun filo risente della forza esercitata dal campo magnetico prodotto dall'altro filo (dato dalla legge di Biot-Savart).

Le due forze sono uguali e contrarie, *attrattive* se le *correnti* sono *equiverte*, *repulsive* se *contrarie*. La formula è data da

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad | \vec{F} | = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$



### 7.3.1. Esempio 7.1

Due spire circolari di raggio  $R = 30\text{cm}$  aventi lo stesso asse sono poste in piani paralleli orizzontali distanti  $a = 3\text{mm}$ . La spira superiore è appesa al giogo di una bilancia.

Se nelle spire circola la stessa corrente  $i = 1\text{A}$  nello stesso verso, per ristabilire l'equilibrio occorre aggiungere sull'altro piatto della bilancia una massa  $m$ . Calcolare  $m$ .

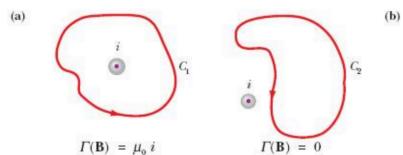
[Lezione 16](#)

### 7.3.2. Esercizio 7.13

Una sottile lamina conduttrice di lunghezza  $h = 2\text{cm}$  è percorsa dalla corrente  $I = 10\text{A}$ . Calcolare il valore del campo magnetico  $B(x)$  a distanza  $x$  dal bordo della striscia, calcolare poi il momento magnetico  $\vec{M}$  che agisce su un piccolo ago magnetico di momento  $\vec{m} = 0,1\vec{u}_x \text{Am}^2$ , posto a distanza  $x = 1\text{cm}$ .

## 7.4. Legge di Ampère

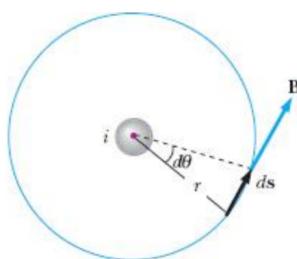
Calcoliamo la circuitazione del campo magnetico generato da un filo indefinito percorso da corrente. Ci sono due casi: si concatena il filo (figura (a)) oppure non lo si concatena (figura (2)).



Consideriamo ora il calcolo del prodotto scalare tra il campo magnetico e un elemento infinitesimo di curva  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ .

Poiché il filo genera un campo magnetico le cui linee di campo sono circonferenze concentriche al filo stesso, il prodotto scalare dipende soltanto dall'angolo  $d\theta$  sotteso da  $d\vec{s}$ :

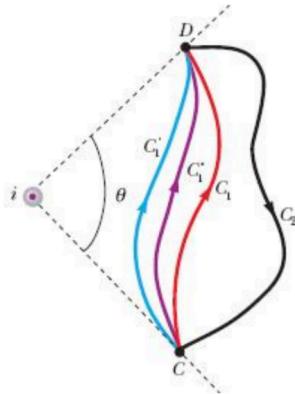
$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{ds}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$$



Prendiamo allora un percorso qualsiasi percorso qualsiasi da un punto  $C$  a un punto  $D$  e ne facciamo l'integrale

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo definito dalle due semirette dove stanno  $C$  e  $D$ . Anche in questo caso il risultato è indipendente dal percorso scelto tra  $C$  e  $D$  e dipende dall'angolo  $\theta$ , inoltre  $\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\int_D^C \vec{B} \cdot d\vec{s}$ .

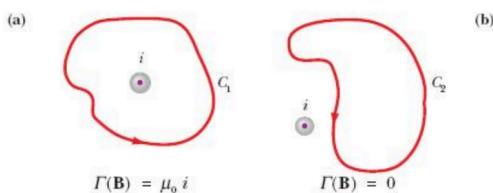


Infine, calcoliamo l'integrale lungo una linea chiusa  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$ . Nel caso in cui il *filo* sia *concatenato* alla corrente si ottiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

mentre nel caso in cui non sia concatenata si ottiene

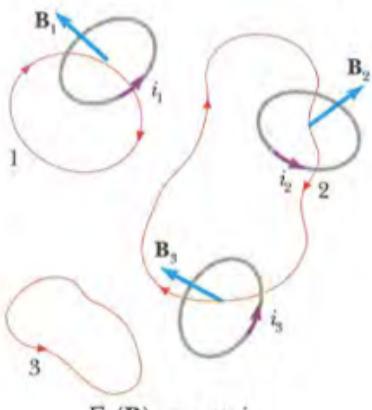
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$



L'integrale di linea del campo magnetico  $\vec{B}$  lungo una linea chiusa, ovvero la *circuitazione*  $\Gamma(\vec{B})$  è uguale alla somma algebrica delle *correnti concatenate*, moltiplicata per  $\mu_0$ .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_k i_k = \mu_0 i_{\text{concatenate}}$$

Se, in particolare, la linea non concatena nessuna corrente, la circuitazione è *nulla*.



$$\begin{aligned}\Gamma_1(\mathbf{B}) &= -\mu_0 i_1 \\ \Gamma_2(\mathbf{B}) &= \mu_0 (i_3 - i_2) \\ \Gamma_3(\mathbf{B}) &= 0\end{aligned}$$

**Figura 7.19**

Applicazione della legge di Ampère ad un sistema di circuiti chiusi.

### ! Osservazione

Essendo che la circuitazione di  $\vec{B}$  è diversa da zero, il *campo magnetico non è conservativo*.

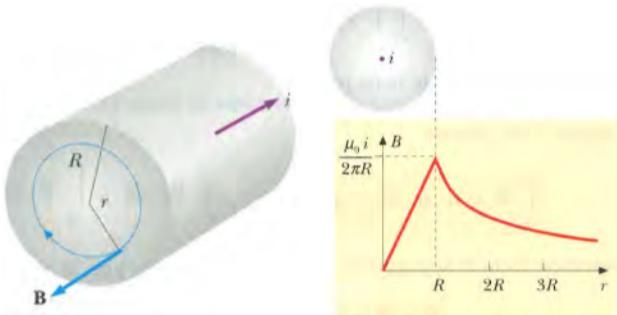
Senza per ora approfondire l'argomento, diciamo che la legge di Ampère è *valida solamente per correnti di conduzione*, dovute cioè al moto di cariche in regime stazionario, quali sono quelle che abbiamo considerato sinora.

## 7.4.1. Applicazioni della legge di Ampère

Dalla legge di Ampère, per esempio, si puossono ricavare la legge di Biot-Savart ( $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi$ ) e il campo magnetico prodotto da un solenoide rettilineo indefinito ( $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_y$ ).

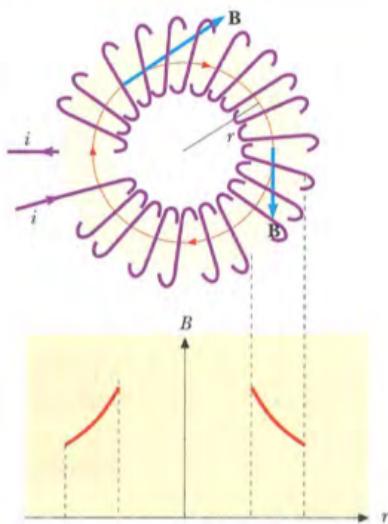
### 7.4.1.1. Esempio 7.2

Un filo rettilineo indefinito di raggio  $R$  è percorso da una corrente di intensità  $i$ . Calcolare il campo magnetico prodotto dal filo in funzione della distanza  $r$  dall'asse del filo.



### 7.4.1.2. Esempio 7.4

Un *solenoido toroidale* è costituito da  $N$  spire avvolte attorno ad una superficie a forma di ciambella (toroide). Calcolare il campo magnetico se nel sistema circola la corrente  $i$ .

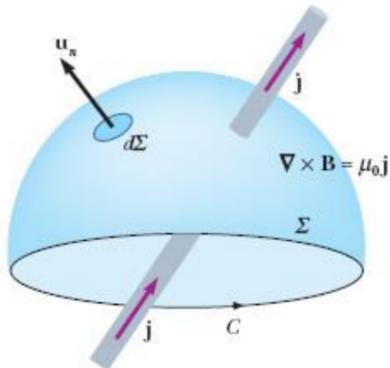


### 7.4.2. Forma locale della legge di Ampère

#### Ricorda – Teorema di Stokes

La circuitazione di un campo vettoriale,  $\vec{B}$  nel nostro caso, lungo la linea chiusa  $C$  è eguale al flusso del rotore del campo attraverso una superficie qualsiasi  $\Sigma$  avente per contorno  $C$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{B} \cdot d\Sigma = \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\Sigma$$



Abbiamo che la legge di Ampère diventa

$$\mu_0 i_{\text{concatenate}} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\Sigma$$

e ricordando la relazione tra corrente  $i$  e il vettore densità di

corrente  $\vec{j}$ , ovvero  $i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\Sigma$ , si ottiene

$$\iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\Sigma = \mu_0 i = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\Sigma$$

che quindi ci permette di scrivere la *forma locale della legge di Ampère*

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

### 7.4.3. Esercizio 7.18

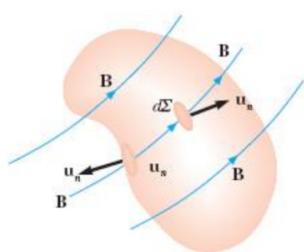
Molti fili indefiniti paralleli, ciascuno percorso dalla corrente  $i$ , sono disposti uno accanto all'altro su una superficie piana. Il numero di fili per unità di lunghezza è  $n$ . Dimostrare, utilizzando la legge di Biot-Savart, che il campo magnetico  $\vec{B}$  è parallelo al piano in cui si trovano i fili. Calcolarne inoltre il modulo servendosi della legge di Ampère.

[Lezione 17](#)

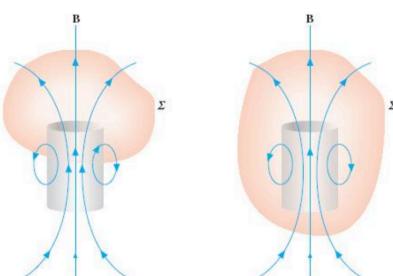
## 7.5. Teorema di Gauss per il campo magnetico

Abbiamo visto che le linee di campo magnetico sono sempre linee continue senza inizio né fine e che lungo esse il campo  $\vec{B}$  è sempre nello stesso verso. Questo ha una conseguenza quando calcoliamo il *flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa*:

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$$



Infatti ogni linea di campo entrante in una superficie *chiusa* deve necessariamente uscirne. Ne segue che il flusso entrante e quello uscente hanno modulo uguale, perciò il flusso complessivo deve essere nullo.



### 7.5.1. Forma locale del Teorema di Gauss per il campo magnetico

Usando il teorema della divergenza ( $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{B})}{\Delta V}$ ), si può dimostrare facilmente che da  $\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$  segue la corrispondente forma locale:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

#### Forme integrali e forme differenziali

| Forma integrale   | Forma differenziale (locale)                  |
|---|---|
| $\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$                     | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$              |
| $\Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{concatenate}}$ | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ |

### 7.6. Proprietà magnetiche della materia

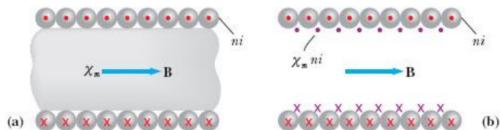
Discutiamo le proprietà magnetiche della materia, ovvero il comportamento della stessa in presenza di un campo magnetico prodotto da correnti elettriche, procedendo, in analogia con quanto fatto per i dielettrici, con una descrizione fenomenologica.

Supponiamo di avere un solenoide indefinito con densità di spira  $n$  e corrente  $i$ . Supponiamo inoltre di riempire completamente il solenoide con un mezzo omogeneo e di misurare il campo magnetico all'interno.

Definiamo la permeabilità magnetica come il rapporto tra il modulo dei campi magnetici misurati

$$k_m = \frac{B}{B_0}$$

dove  $B_0$  è il campo del solenoide vuoto.



La variazione del campo magnetico dovuta alla presenza del mezzo è

$$\vec{B}_m = \vec{B} - \vec{B}_0 = (k_m - 1)\vec{B}_0 = \chi_m \vec{B}_0$$

dove  $\chi_m$  è la *suscettività magnetica*.

Interpretiamo questo risultato nel seguente modo: l'effetto del mezzo magnetizzato risulta identico a quello che sarebbe prodotto da un secondo solenoide eguale al primo, ma percorso da corrente di densità lineare  $\chi_m n i$ .

La presenza di un campo magnetico crea delle correnti di magnetizzazione all'interno del materiale, dette *amperiane*, che scorrono sulla *superficie* del mezzo.

Definiamo la magnetizzazione del mezzo, ovvero il momento di dipolo per unità di volume

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0 = \chi_m \vec{H}$$

dove  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$  è il *campo magnetizzante*.

### 7.6.1. Sostanze diamagnetiche

Nelle *sostanze diamagnetiche* la permeabilità magnetica relativa è costante al variare di  $B$  e minore di 1:

$$k_m < 1 \implies \chi_m < 0$$

Ogni molecola della sostanza acquista un momento di dipolo magnetico indotto che a sua volta dipende da un campo magnetico indotto. La magnetizzazione  $\vec{M}$  del campo indotto è *antiparallela* al campo inducente  $\vec{B}_0$ , ovvero ha un contributo negativo e il campo magnetico totale è minore di quello inducente.

$$B < B_0$$

Dal momento che  $B < B_0$ , le *correnti amperiane* devono dare un contributo opposto a  $\vec{B}_0$ .

#### Suscettività di sostanze diamagnetiche

| Sostanza | $\chi_m$               |
|----------|------------------------|
| Argento  | $-2.39 \cdot 10^{-5}$  |
| Bismuto  | $-16.42 \cdot 10^{-5}$ |
| Oro      | $-3.46 \cdot 10^{-5}$  |
| Piombo   | $-1.58 \cdot 10^{-5}$  |
| Rame     | $-0.98 \cdot 10^{-5}$  |
| Silicio  | $-0.42 \cdot 10^{-5}$  |
| Acqua    | $-0.90 \cdot 10^{-5}$  |
| Mercurio | $-2.80 \cdot 10^{-5}$  |

| Sostanza | $\chi_m$              |
|----------|-----------------------|
| Argon    | $-1.10 \cdot 10^{-8}$ |
| Azoto    | $-1.35 \cdot 10^{-8}$ |
| Idrogeno | $-0.45 \cdot 10^{-8}$ |

### 7.6.2. Sostanze paramagnetiche

Nelle *sostanze paramagnetiche* la permeabilità magnetica relativa è costante al variare di  $\vec{B}$  e maggiore di 1:

$$k_m > 1 \implies \chi_m > 0$$

In questo caso i momenti delle molecole (e le correnti amperiane) sono *equiversi* al campo inducente (e alle correnti di conduzione), quindi il campo magnetico risultante è maggiore di quello inducente.

$$B > B_0$$

#### ⌚ Suscettività di sostanze paramagnetiche

| Sostanza  | $\chi_m$              |
|-----------|-----------------------|
| Alluminio | $2.08 \cdot 10^{-5}$  |
| Calcio    | $1.94 \cdot 10^{-5}$  |
| Magnesio  | $1.17 \cdot 10^{-5}$  |
| Platino   | $27.91 \cdot 10^{-5}$ |
| Sodio     | $0.85 \cdot 10^{-5}$  |
| Titanio   | $18.22 \cdot 10^{-5}$ |
| Tungsteno | $7.92 \cdot 10^{-5}$  |
| Uranio    | $40.92 \cdot 10^{-5}$ |
| Ossigeno  | $387.4 \cdot 10^{-8}$ |

È importante sottolineare la dipendenza dalla temperatura della suscettività, che obbedisce alla *prima legge di Curie*

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T}$$

dove  $\rho$  è la densità,  $T$  la temperatura in Kelvin e  $C$  la *costante di Curie*.

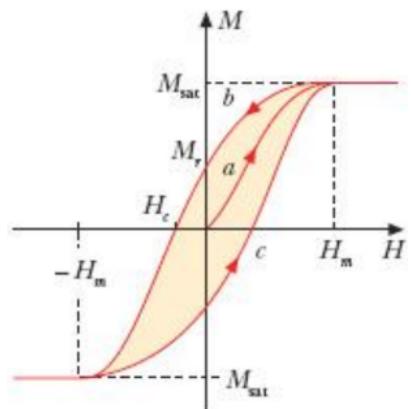
Pochi metalli paramagnetici non seguono la legge di Curie e hanno suscettività praticamente costante.

### 7.6.3. Ferromagnetismo

Nelle sostanze ferromagnetiche la suscettività dipende dal *valore del campo magnetico* e anche dal *modo in cui viene raggiunto*.

Il ferro, il cobalto, il nichel e molte leghe (basate principalmente sul ferro) sono sostanze ferromagnetiche.

#### 7.6.3.1. Ciclo di isteresi



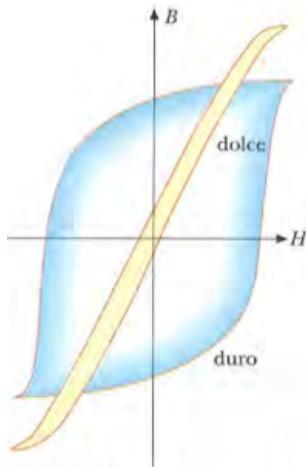
Prendendo una sostanza ferromagnetica nello *stato vergine* (cioè quando non è mai stata sottoposta a magnetizzazione) e facendo crescere  $H$ , i valori di  $B$  e  $M$  si spostano lungo la curva  $a$ , detta *curva di prima magnetizzazione*.

Aumentando il campo magnetizzante  $H$  aumenta anche la magnetizzazione  $M$  fino alla saturazione  $M_{sat}$  (poi rimane quasi costante, in realtà aumenta come una retta di pendenza  $\mu_0$ , quindi molto piccola).

Tornando verso  $H = 0$ , rimane una magnetizzazione residua  $M_r$ , ovvero il materiale è diventato un *magnete permanente* (anche in assenza di corrente). Per eliminare la magnetizzazione bisogna applicare un *campo magnetizzante coercitivo*  $H_c$ .

Facendo diminuire ulteriormente  $H$  si nota che la situazione è speculare e si va a formare un ciclo, chiamato *ciclo di isteresi*, che rappresenta il diagramma di stato del materiale. I materiali "duri" hanno un ciclo largo (sono buoni magneti permanenti), mentre

i materiali "dolci" uno più stretto (sono buoni elettromagneti).



### 7.6.3.2. Seconda legge di Curie

Un'altra proprietà fondamentale dei materiali ferromagnetici è che per ognuno di essi esiste una temperatura critica  $T_C$ , detta *temperatura di Curie*, al di sopra la quali il materiale diventa *paramagnetico*, con suscettività che segue la *seconda legge di Curie*:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_C}$$

La temperatura di Curie del ferro è  $T_C = 1043K = 700^\circ C$

| Sostanza       | $\chi_m$ | $k_m$   | $\chi_m, k_m$   | $\vec{M} \rightarrow \vec{H}$  | $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_0$ |
|----------------|----------|---------|-----------------|--------------------------------|---------------------------------|
| Diamagnetica   | $< 0$    | $< 1$   | costanti        | $\vec{M}$ opposto a $\vec{H}$  | $B < B_0$                       |
| Paramagnetica  | $> 0$    | $> 1$   | costanti        | $\vec{M}$ concorde a $\vec{H}$ | $B > B_0$                       |
| Ferromagnetica | $\gg 0$  | $\gg 1$ | funzioni di $H$ | $\vec{M}$ dipende da $\vec{H}$ | $B \gg B_0$                     |

#### ⌚ Unità di misura

Il vettore  $\vec{H}$  e il vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  hanno la stessa unità di misura e dato che un'espressione di  $H$  è  $ni$ , l'unità di misura è

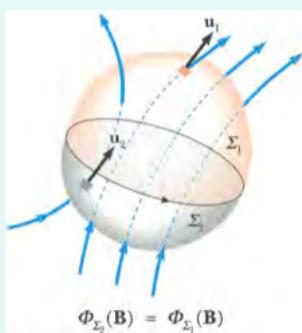
$$\frac{A}{m}$$

Ricordiamo che  $k_m$  e  $\chi_m$  sono adimensionali, mentre  $\mu$  e  $\mu_0$  si misurano in  $\frac{H}{m}$ .

## 8. Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

### Ricorda - Flusso concatenato

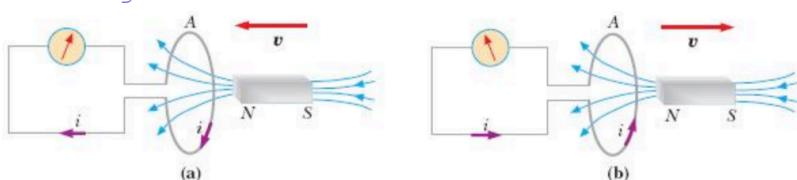
Poiché le linee di campo  $\vec{B}$  sono linee chiuse, considerate due qualunque superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  aventi la linea chiusa  $s$  come contorno, le linee che passano attraverso  $\Sigma_1$  passano tutte anche attraverso  $\Sigma_2$ , ovvero il flusso di  $\vec{B}$  è lo stesso attraverso qualunque superficie che poggi su  $s$ . Si parla quindi di flusso attraverso la linea chiusa  $s$  o flusso concatenato con la linea chiusa  $s$ .



### 8.1. Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica

Consideriamo una spira  $A$  di filo conduttore connessa con un galvanometro a zero centrale. Avvicinando un magnete o una spira  $A'$  in cui circola corrente alla spira  $A$ , l'indice del galvanometro si sposta in una direzione, mentre si sposta in quella opposta se si allontana il magnete/spira. L'effetto è uguale se si avvicina o allontana la spira  $A$ , tenendo fermo l'altro oggetto.

Da questi esperimenti si evince che in una spira compare una *corrente indotta* ogni volta c'è un *moto relativo* tra la spira e un campo magnetico  $\vec{B}$ . Siccome è necessario avere una sorgente di forza elettromotrice perché circoli una corrente in un circuito, affermiamo che *dal moto relativo tra una spira e un campo magnetico ha origine una forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  indotta*.



Venne condotto un altro esperimento da Faraday, che osservò lo stesso fenomeno di induzione in un circuito durante i processi di carica e scarica (in cui il valore di  $\vec{B}$  varia).

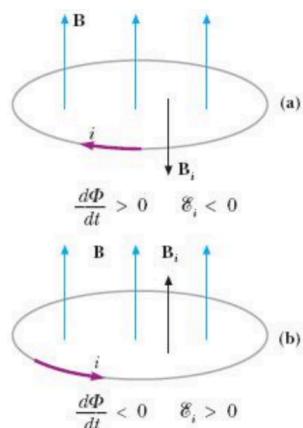
Ogni qualvolta il flusso del campo magnetico  $\Phi(\vec{B})$  concatenato con un circuito varia nel tempo di ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso nel tempo. Questa è conosciuta come *legge di Faraday* (o ledde di Faraday-Neumann o di Faraday-Henry)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

### 8.1.1. Legge di Lenz

Il segno meno della legge di Faraday viene messo in evidenza dalla *legge di Lenz*.

L'effetto della forza elettromotrice indotta è sempre tale da opporsi alla causa che l'ha generata; pertanto la forza elettromotrice che si manifesta nel circuito è tale da produrre una corrente indotta i cui effetti magnetici si oppongono alle variazioni del flusso  $\Phi(\vec{B})$  concatenato con il circuito stesso.



## Lezione 18

### 8.2. Origine della forza elettromotrice indotta e del campo elettrico indotto

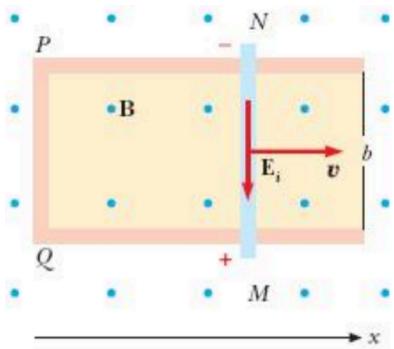
#### ⌚ Possibili modi per causare l'induzione elettromagnetica

Una variazione del flusso del campo magnetico può avere più cause, ad esempio può *variare* il *campo magnetico* nel tempo, può avvenire un *cambio del circuito* s che definisce la superficie  $\Sigma$  attraverso la quale si considera il flusso (il circuito potrebbe essersi mosso o deformato) oppure può *cambiare l'angolo* tra il campo magnetico e la superficie  $\Sigma$ .

Questi cambi si possono vedere nella seguente formula

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \int_C \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \right) = -\frac{d}{dt} (BA \cos \theta)$$

Consideriamo un circuito rettangolare conduttore in cui un lato è costituito da una sbarretta conduttrice di lunghezza  $b$  mobile; esso è posto in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme e costante, ortogonale al piano contenente il circuito. Supponiamo che la sbarretta si muova di moto traslatorio con velocità  $v$ , verso destra, mantenendo un buon contatto elettrico col resto del circuito.



Sugli elettroni di conduzione, che sono in moto con la velocità  $v$  della sbarretta, agisce la forza di Lorentz  $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ , che sposta gli elettroni verso l'alto, generando un accumulo di carica. Il campo elettromotore vale  $\vec{E}_i = \vec{F}(-e) = \vec{v} \times \vec{B}$ .

La circuitazione del campo elettromotore vale

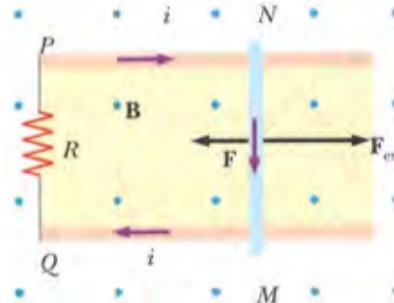
$\mathcal{E}_i = \int_{MNPQ} \vec{E}_i = \int_{MN} \vec{v} \times \vec{B} = -vBb$ . Ricordando poi che  $v = \frac{dx}{dt}$  e che il flusso del campo magnetico sulla superficie vale  $\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = Bbx$  abbiamo che

$$\mathcal{E}_i = -vBb = -\frac{dx}{dt} Bb = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

## 8.3. Applicazioni della legge di Faraday

### 8.3.1. Attrito elettromagnetico

Prendiamo in esame un circuito simile a quello del paragrafo precedente e inseriamovi una resistenza interna di valore  $R$ .



Siccome la barretta viene mantenuta in moto a velocità costante  $\vec{v}$ , compare la forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E}_i$  che genera un corrente sul circuito. *Sulla barretta agisce una forza*

$$\vec{F} = i\vec{b} \times \vec{B} = -\frac{(Bb)^2}{R}\vec{v}$$

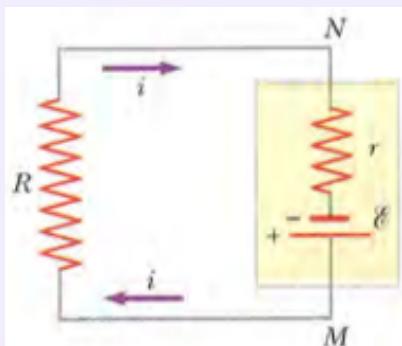
ovvero una *forza resistente di tipo viscoso*, proporzionale alla velocità, chiamata *resistenza di attrito elettromagnetico*.

### ! Osservazione

Per vincere la resistenza di attrito bisogna applicare una forza esterna, eguale e contraria a  $\vec{F}$ , spendendo la potenza

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = \frac{(Bbv)^2}{R} = Ri^2 = \mathcal{E}_i i$$

Il sistema può essere considerato come un generatore in cui la potenza erogata proviene da un'azione meccanica esterna.



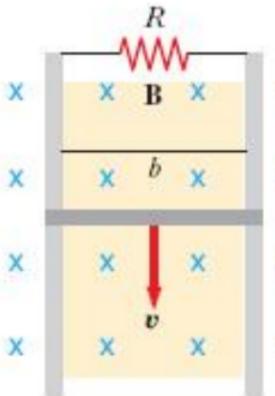
### Ω Approfondimento

Grazie a questa applicazione si può anche comprendere il *significato energetico* del *segno meno* della legge di Faraday, cioè della *legge di Lenz*. Se infatti il segno meno non ci fosse, basterebbe un impulso per mettere in moto la sbarretta, che verrebbe mantenuta in movimento dalla stessa forza  $\vec{F}$ . Ma questo non rispetterebbe il *principio di conservazione dell'energia*.

### 8.3.1.1. Esercizio 8.5

Due guide conduttrici verticali parallele, distanti  $b = 20\text{cm}$ , sono chiuse ad un estremo da un resistore  $R = 4\Omega$ . Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione della forza peso, una sbarretta di massa  $m = 0.01\text{kg}$ . Il dispositivo è immerso in un campo magnetico  $B = 1\text{T}$  uniforme e costante, ortogonale al piano del

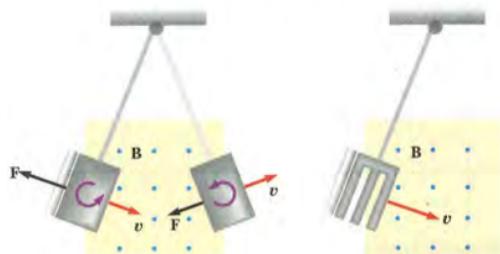
circuito. Calcolare il valore della velocità limite  $v_\infty$  della sbarretta, il calore della corrente limite  $i_\infty$  e l'energia  $W_x$  dissipata nel circuito per ogni centimetro percorso dalla sbarretta in queste condizioni.



### 8.3.2. Correnti di Foucault

Quando il campo magnetico è variabile all'interno di un *conduttore metallico* il campo elettrico indotto dà origine a *correnti concatenate alle linee di  $\vec{B}$* , che possono essere molto intense dato che la resistività del metallo è piccola. Se si vogliono ridurre le correnti indotte, si lamina la massa del conduttore in fogli paralleli alle linee di  $\vec{B}$  e separati da un isolante, in modo che le correnti debbano attraversarlo.

Tecnicamente tali correnti si chiamano *correnti parassite o di Foucault*.

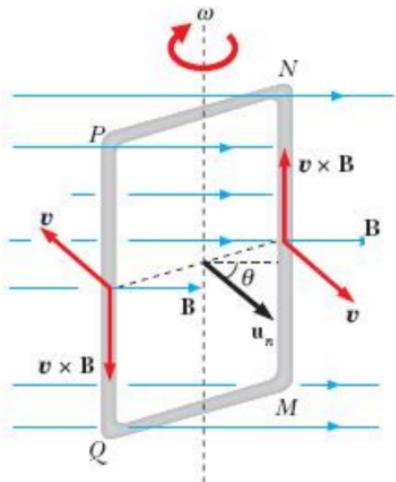


Nell'esempio in figura, la piastrina viene rallentata all'entrata e all'uscita dalla regione in cui è presente il campo magnetico; mentre la sua velocità non viene frenata (dal campo elettromagnetico) mentre si trova al suo interno o all'esterno. Nella figura di destra si può osservare l'assenza delle correnti di Foucault nella piastrina.

Alcune applicazioni degli effetti di riscaldamento delle correnti di Foucault si possono trovare nei forni ad induzione e nei freni elettromagnetici.

### 8.3.3. Generatore di corrente alternata

Una spira rettangolare ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno a un asse verticale passante per il centro di massa. Sulla spira agisce un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme e costante, orizzontale; indichiamo con  $\theta$  l'angolo formato dalla normale alla spira con  $\vec{B}$ .



Il flusso del campo magnetico attraverso la spira di area  $\Sigma$  vale  $\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = B\Sigma \cos \theta = B\Sigma \cos \omega t$ , quindi la forza elettromotrice indotta vale

$$\mathcal{E}_i = \omega B \Sigma \sin \omega t$$

con valore massimo  $\mathcal{E}_{max} = \omega B \Sigma$ .

La corrente ha valore

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B \Sigma}{R} \sin \omega t$$

mentre la potenza vale

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}_i i = \frac{(\omega B \Sigma)^2}{R} \sin^2 \omega t$$

Si può dimostrare che le formule ricavate per la spira rettangolare valgono per una spira di qualsiasi forma.

#### ⚠️ Osservazione

Il momento meccanico delle forze magnetiche  $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$  tende a orientare il momento magnetico  $\vec{m} = i\Sigma \vec{u}_n$  parallelo a  $\vec{B}$ , infatti il valore di potenza appena calcolato corrisponde alla quantità necessaria da fornire per mantenere la spira in rotazione.

Su un periodo di tempo maggiore del periodo  $T$ , si può calcolare il valore medio della potenza, che corrisponde a

$$\mathcal{P}_m = \frac{(\omega B \Sigma)^2}{2R}$$

perché proporzionale al seno (il cui valore medio è  $\frac{1}{2}$ ).

La potenza media coincide con quella che sarebbe erogata, sulla medesima resistenza  $R$ , da un generatore di corrente continua con forza elettromotrice  $\mathcal{E}_{eff}$ , tale che  $\mathcal{E}_{eff}^2 = \frac{\mathcal{E}_{max}^2}{2R}$ .

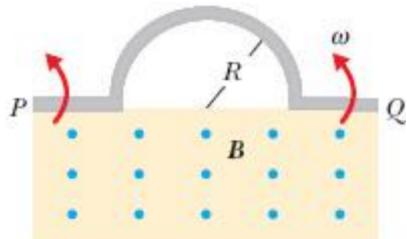
Infatti la media della forza elettromotrice su un periodo è nulla (proprietà di tutte le funzioni sinusoidali), per ovviare al problema si prende la media quadratica  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}$ .

Si definisce quindi il *valore efficace* (*root mean square*) è la quantità

$$\mathcal{E}_{eff} = \sqrt{\langle \mathcal{E}^2 \rangle} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

### 8.3.3.1. Esercizio 8.17

Un conduttore di forma semicircolare di raggio  $R = 20\text{cm}$ , ruota attorno all'asse  $PQ$  come in figura, con velocità  $\omega$  costante, compiendo 100 giri al secondo. Un campo magnetico uniforme  $B = 1.3T$  agisce perpendicolarmente al foglio. Calcolare il valore massimo della forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  indotta nel conduttore e la forza elettromotrice media in un giro completo.



### 8.3.4. Legge di Felici

Quando una spira di resistenza  $R$  si muove in un campo magnetico  $\vec{B}$  in essa viene indotta una corrente. Nell'intervallo di tempo da  $t_1$  a  $t_2$  nella spira fluisce una carica  $q$  data da

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

quindi il valore della carica non dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solamente dal valore iniziale e finale.

Questa è nota come *legge di Felici*.

## 8.4. Autoinduzione

Un circuito di forma qualunque percorso da corrente produce un campo magnetico.

Il flusso di questo campo concatenato con il circuito stesso, chiamato *autoflusso*, secondo la legge di Ampère-Laplace vale

$$\Phi(\vec{B}) = \int \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\text{circuito}} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_n d\Sigma = Li$$

dove  $L$  è il *coefficiente di autoinduzione* o *induttanza* del circuito, che dipende dalla forma dei circuito (costante se il circuito è indeformabile) e dalle proprietà magnetiche del mezzo.

### ⌚ Unità di misura

Il coefficiente di autoinduzione è dato come rapporto tra un flusso magnetico e una corrente, quindi l'unità di misura è

$$\frac{Wb}{A} = \frac{V/s}{A} = \frac{\Omega}{s} = H$$

tale unità di chiama *henry*, di simbolo  $H$ .

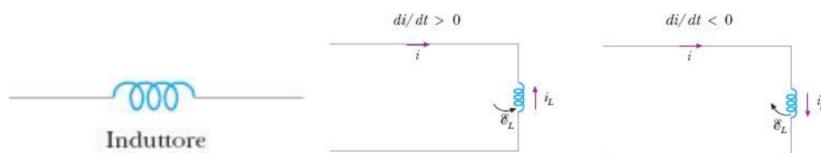
### 8.4.1. Forza elettromotrice di autoinduzione

Quando la corrente di un circuito *non* è costante nel tempo, l'autoflusso concatenato varia e nel circuito compare una *forza elettromotrice indotta*, detta di *autoinduzione*:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

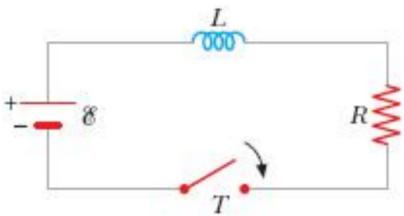
assumendo  $L$  costante.

Un circuito con induttanza non nulla si dice *induttivo*.



### 8.4.2. Circuito RL in serie

Consideriamo il circuito costituito da un generatore di forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  e di resistenza interna trascurabile, da un induttore con induttanza  $L$  e da un resistore di resistenza  $R$ . Le variazioni di corrente sono causate inizialmente dall'apertura e dalla chiusura dell'interruttore  $T$ .



La legge di Ohm per il circuito è

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri \implies \mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = Ri$$

integrandola si ottiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L} \implies \ln(\mathcal{E} - Ri) = -\frac{R}{L}t + \text{cost} \implies \mathcal{E} - Ri = Ae^{-Rt/L}$$

dove  $A$  è una costante da determinare in base alle condizioni iniziali.

#### 8.4.2.1. Chiusura del circuito

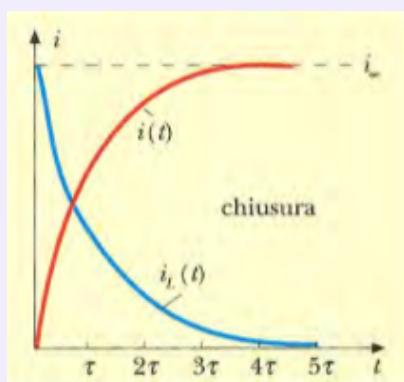
Quando si chiude l'interruttore, la corrente non può variare bruscamente, quindi deve restare nulla, ovvero a  $t = 0$  vale  $i = 0$ . Da ciò risulta che  $A = \mathcal{E}$  e la corrente vale

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R}(e^{-t/\tau})$$

dove  $\tau = \frac{L}{R}$  è la *costante di tempo* del circuito.

##### ! Osservazione

La corrente  $i(t)$  tende asintoticamente al valore di *regime*  $i_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R}$ , minore è l'induttanza, meno è il tempo necessario per lo stabilizzarsi della corrente.



Se fosse  $R = 100\Omega$  e  $L = 10^{-6}H$  si avrebbe  $\tau = 10^{-6}s$ , il regime di corrente costante verrebbe raggiunto in tempo molto breve, con valori di  $L$  presenti in un normale circuito resistivo.

Se invece dovessimo chiudere un circuito contenente l'avvolgimento di un elettromagnete, che può avere  $L \sim 1H$  e

$R \sim 1\Omega$ , la costante di tempo risulterebbe dell'ordine del secondo.

### 8.4.2.2. Apertura del circuito

All'istante di apertura, nel circuito scorre la corrente con il valore di regime, che si azzera secondo la legge

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Lt/R} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

## 8.5. Energia magnetica

La presenza di una forza elettromotrice in un circuito implica, per definizione, un lavoro sulle cariche che costituiscono la corrente.

### 8.5.1. Bilancio energetico del circuito RL

La potenza erogata dal generatore vale

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

e il lavoro nel tempo  $dt$  vale

$$dW = \mathcal{P}dt = Ri^2 dt + Li di$$

è il lavoro compiuto dal generatore.

Il termine  $Ri^2 dt$  rappresenta il lavoro speso per far circolare la corrente nel circuito e trasformato in calore (*effetto Joule*), mentre il termine  $Li di$  è il lavoro speso contro la forza elettromotrice di autoinduzione.

### 8.5.2. Energia intrinseca della corrente

La corrente passa da zero al valore  $i$  in un tempo  $t$  quindi il lavoro speso contro la forza elettromotrice di autoinduzione vale

$$W = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

Possiamo quindi definire l'*energia intrinseca della corrente*, immagazzinata nell'induttanza, come

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2$$

Consideriamo un tratto di solenoide rettilineo indefinito lungo  $d$ , si vede che  $U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau$ , dove  $\tau$  è il volume. Si vede che questo risultato vale anche per il solenoide toroidale.

Si definisce allora la *densità di energia magnetica* come

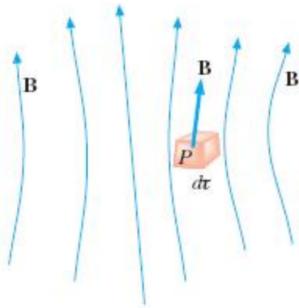
$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

In un volume  $d\tau$  attorno a un punto in cui il campo magnetico vale  $\vec{B}$  c'è l'energia magnetica

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} dt$$

quindi l'*energia magnetica totale* si ottiene integrando su tutto lo spazio

$$U_m = \int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$



Si vede allora che, in quanto dovuta ad un effetto magnetico, l'*energia intrinseca della corrente appare come un'energia magnetica*, dipendente dal valore locale del campo magnetico.

## 8.6. Mutua induzione

Il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito (1) attraverso un secondo circuito (2) vale

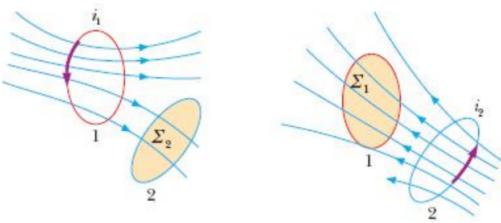
$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2$$

dove  $\Sigma_2$  è una qualsiasi superficie che si appoggia sul secondo circuito.

Dal momento che  $B_1$  è proporzionale a  $i_1$  (e la situazione è analoga per (2)) possiamo scrivere

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} i_1, \quad \Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2$$

conglobando in  $M$  tutti i fattori geometrici e l'eventuale dipendenza dalle proprietà magnetiche del mezzo in cui sono immersi i circuiti.



È possibile dimostrare che  $M_{1,2} = M_{2,1}$

Si definisce allora  $M$  come il *coefficiente di mutua induzione*. La sua unità di misura è l'henry ( $H$ ).

### 8.6.1. Circuiti accoppiati

Due circuiti si dicono *accoppiati* se  $M \neq 0$ .

In base alla legge di Faraday si ha una forza elettromotrice indotta in un circuito dalla variazione di corrente nell'altro

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

L'espressione dell'energia magnetica del sistema di due circuiti accoppiati è

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

dove  $M i_1 i_2$  rappresenta il lavoro necessario per contrastare la forza elettromotrice indotta.

#### *Forma locale della legge di Faraday-Lenz*

Ricordiamo che la legge di Faraday-Lenz è  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{dt}$  e che la forza elettromotrice indotta vale  $\mathcal{E}_i = \int_C \vec{E} \cdot \vec{s}$ . Applicando quindi il teorema di Stokes

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

si ottiene

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

# 9. Oscillazioni elettriche e correnti alternate

Già in precedenza abbiamo studiato delle correnti variabili nel tempo con i circuiti RC e LR, caratterizzati rispettivamente dalle leggi  $V_C = \frac{q}{C} = Ri$ ,  $i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$  e  $\mathcal{E}_i = -L\frac{di}{dt} = Ri$ ,  $i(t) = i_0e^{-tL/R}$ .

## 9.1. Oscillazioni elettriche

### 9.1.1. Circuito LC

Consideriamo un circuito LC ideale, il cui condensatore è carico con  $V_0 = \frac{q_0}{C}$  ed è connesso all'induttore nel momento  $t = 0$ .



Alla chiusura del circuito inizia a scorrere una corrente e nell'induttore viene indotta una forza elettromotrice di autoinduzione  $\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$  legata alla differenza di potenziale dalla legge

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0$$

ottenuta dalle leggi di Kirchoff (che useremo anche per i prossimi circuiti).

Derivando rispetto al tempo e ricordando che  $i = -\frac{dq}{dt}$  si ottiene  $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$ , quindi la corrente segue la legge

$$i(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

mentre la differenza di potenziale ai capi del condensatore è

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega L A \cos(\omega t + \phi)$$

Grazie alle condizioni iniziali, si possono determinare le costanti, quindi si ottengono le formule

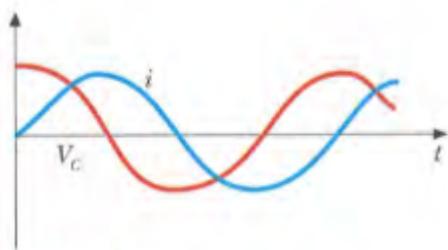
$$i = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t, \quad V_C = V_L = V_0 \cos \omega t, \quad q = q_0 \cos \omega t$$

dove  $\omega$  è la pulsazione e vale  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Si può osservare che la corrente e la differenza di potenziale sono in *quadratura di fase*, quindi quando la corrente è massima la

differenza di potenziale è nulla, quando la differenza di potenziale è massima la corrente è nulla.

Il circuito LC è dunque sede di un'*oscillazione elettrica permanente* e per questa ragione viene anche chiamato *circuito oscillante*.



### 💡 Analogia

Matematicamente, la situazione è identica a quella di una massa  $m$  sottoposta all'azione di una forza elastica, dove le corrispondenze sono solo formali. Si "equivalgono" in questo modo:

- $q \leftrightarrow x$ ;
- $i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt}$ ;
- $L \leftrightarrow m$ ;
- $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$ .

Quando il condensatore è carico, tutta l'energia del circuito è elettrica (non vi è energia magnetica poiché  $i=0$ ), quando è invece scarico l'energia è solo magnetica, nel momento in cui le armature del condensatore sono nuovamente caricate (ma con segno opposto) l'energia è nuovamente solo elettrica.

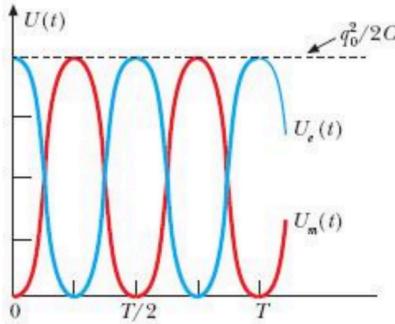
Il *bilancio energetico* in un dato istante è

$$U(t) = U_e(t) + U_m(t) = \frac{1}{2}CV_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}Li_0^2 \sin^2 \omega t$$

Essendo  $i_0 = \frac{V_0}{\omega L}$ , si verifica che  $CV_0^2 = Li_0^2$ , quindi l'*energia totale* è *costante nel tempo* e vale

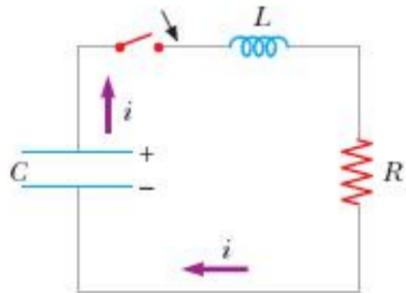
$$U(t) = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2}Li_0^2$$

quindi *in un circuito LC ideale l'energia totale si conserva.*



### 9.1.2. Circuito RLC in serie

Consideriamo questa volta un circuito con un condensatore carico, un induttore e un resistore collegati in serie.



Questa volta, alla chiusura del circuito, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore e dell'induttore non è più la stessa, ma vale la formula

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = Ri$$

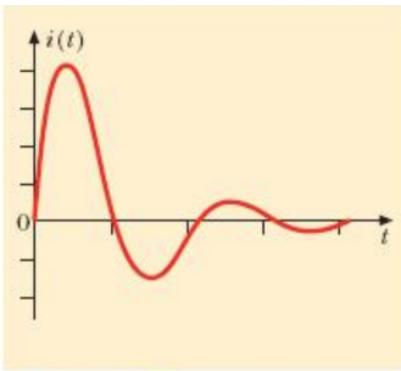
Derivando in maniere analoghe a prima si ottiene  $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$  che ha soluzione

$$i(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

dove  $\gamma = \frac{R}{2L}$  ha il significato di *costante di tempo* e indica la *rapidità di annullamento della corrente*, mentre  $\omega$  è la pseudo-pulsazione con valore

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Si ha quindi che per  $\gamma^2 \gg \omega_0^2$ , cioè quando  $R^2 < \frac{4L}{C}$  si ha una pulsazione reale, quindi la corrente si descrive con una sinusoida modulata.

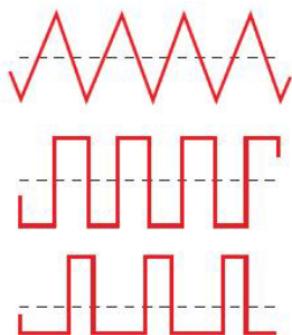


Si può concludere che, in questo circuito, a ogni ciclo viene dissipata dell'energia nella resistenza. Il processo termina quando tutta l'energia  $U_e = \frac{q_0^2}{2C}$  viene assorbita dalla resistenza.

Per mantenere un'oscillazione permanente, bisognerebbe fornire costantemente potenza pari all'energia dissipata nel resistore.

## 9.2. Circuiti in corrente alternata

Una forza elettromotrice e una corrente che variano nel tempo proporzionalmente a  $\sin \omega t$  o  $\cos \omega t$  sono dette *alternate*. Per definizione si chiama *alternata* una *grandezza periodica* che ha *valor medio nullo in un periodo*.



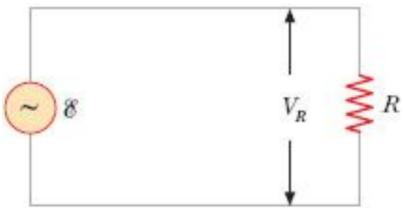
### Ricorda

Per una grandezza alternata si definisce il valore efficace dalla relazione  $\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$  e  $i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$

### 9.2.1. Circuito con resistenza

Applicando ai capi di un resistore una forza elettromotrice  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  si ha un passaggio di corrente in accordo con la legge di Ohm

$$\mathcal{E} = Ri \implies i = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$



La corrente è *in fase* con la forza elettromotrice e il suo valore *non dipende* dalla frequenza della forza elettromotrice.

Possiamo affermare che ai capi del resistore compare la *tensione*

$$V_R = Ri = V_0 \cos \omega t$$

che vale anche per circuiti più complessi.

La potenza istantanea dissipata dalla resistenza vale

$$\mathcal{P}(t) = V_R i = \frac{\mathcal{E}_0^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

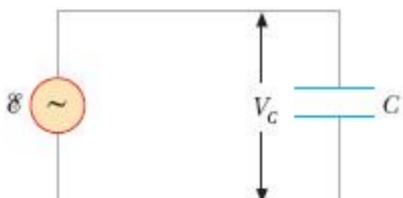
mentre la potenza media dissipata su un periodo vale

$$\mathcal{P}_m = V_{R,eff} i_{eff} = \frac{V_{R,eff}^2}{R} = R i_{eff}^2$$

### 9.2.2. Circuito con condensatore

Ai capi di un condensatore carico vi è la differenza di potenziale  $V_C = \frac{q}{C}$ , supponendo nulla la resistenza complessiva si ottiene

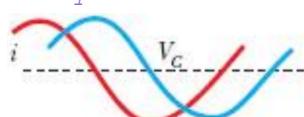
$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} \implies q = C\mathcal{E} = C\mathcal{E}_0 \cos \omega t$$



Uso la relazione  $i = \frac{dq}{dt}$  per trovare la corrente

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\omega C \mathcal{E}_0 \sin \omega t = \omega C \mathcal{E}_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

si vede dunque che è in *anticipo di una quadratura sulla forza elettromotrice* (ovvero  $\frac{\pi}{2}$ ). Anche questa volta la relazione di fase è indipendente dalla pulsazione, ma la corrente *dipende dalla frequenza*.



Più generalmente, per un circuito qualsiasi, vale

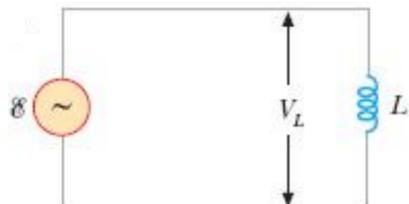
$$V_C = \frac{i_0}{\omega C} \sin \omega t = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = V_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

dove  $\frac{1}{\omega C}$  è detto *reatanza del condensatore* (o *reatanza capacitiva*), che rappresenta un'opposizione al passaggio di corrente.

### 9.2.3. Circuito con induttore

In un circuito con una forza elettromotrice alternata, un induttore e resistenza nulla è descritto dall'equazione

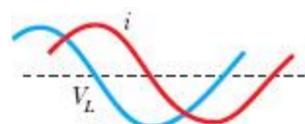
$$\mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = 0 \implies \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t$$



Quindi la corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

perciò la corrente è *in quadratura* rispetto alla forza elettromotrice (ovvero è in ritardo di  $\frac{\pi}{2}$ ). La corrente *dipende dalla frequenza*.



In un circuito generico, la tensione ai capi dell'induttore vale

$$V_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L i_0 \sin \omega t = \omega L i_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

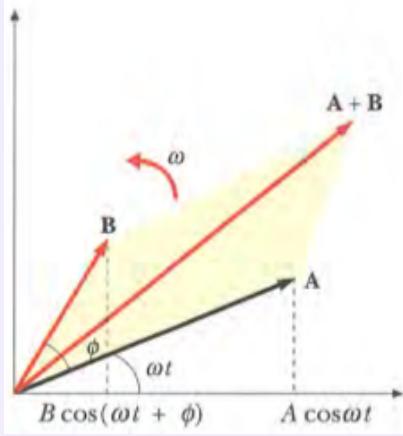
dove  $\omega L$  è detto *reatanza dell'induttore* (o *reatanza induttiva*).

### 9.2.4. Circuiti RL e RC (in serie)

#### Metodo dei vettori rotanti o dei fasori di Fresnel

Un'oscillazione armonica viene rappresentata come proiezione lungo un asse di un vettore di modulo  $\mathcal{E}_0$  ruotante con velocità angolare  $\omega$ . Due oscillazioni sfasate di  $\theta$  sono rappresentate da due vettori ruotanti che mantengono un angolo costante  $\theta$  tra loro e la somma si esegue con la regola del parallelogramma; la proiezione del vettore somma è la somma cercata dalle due

oscillazioni.



Siccome la tensione totale dei seguenti circuiti è la somma delle tensioni dei loro elementi, che sono generalmente sfasati tra loro, useremo questo metodo per calcolare la tensione totale.

#### 9.2.4.1. Circuito RL

Nel circuito in serie RL, attraversato dalla corrente  $i = i_0 \cos \omega t$ , le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = R i_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

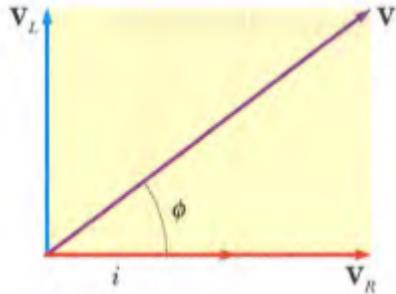
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} i_0$$

ed è sfasata di un angolo  $\phi$  rispetto alla corrente, tale che  $\tan \phi = \frac{\omega L}{R}$ .

La tensione ai capi della serie vale

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



#### 9.2.4.2. Circuito RC

Nel circuito in serie RC le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = Ri_0 \cos \omega t, \quad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

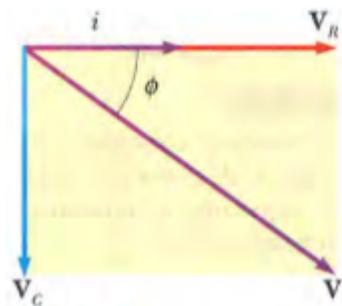
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} i_0$$

ed è sfasata di un angolo  $\phi$  rispetto alla corrente, tale che  $\tan \phi = -\frac{1}{\omega CR}$ .

La tensione ai capi della serie vale sempre

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



A questo punto si definisce l'*impedenza Z* dell'elemento o della serie il coefficiente di proporzionalità tale che

$$V_0 = Zi_0$$

In generale l'impedenza è in funzione della pulsazione.

#### Unità di misura

L'impedenza e la reattanza sono definite da un rapporto tra tensione e corrente, come la resistenza, quindi si misurano in ohm ( $\Omega$ ) .

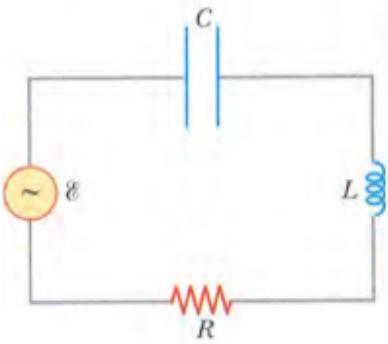
### 9.3. Circuito RLC in serie, risonanza

Nel circuito RLC in serie, in cui scorre la corrente  $i = i_0 \cos \omega t$ , deve valere

$$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

e deve essere che la tensione ai capi della serie coincida con la

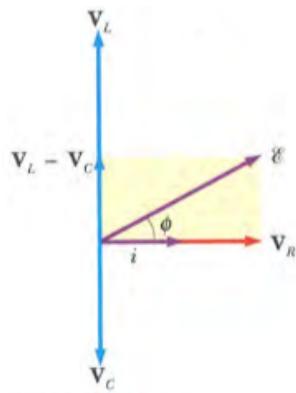
forza elettromotrice del generatore  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ .



Usando il metodo dei vettori rotanti si ottiene

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} i_0 = Z i_0$$

di fase  $\phi$  tale che  $\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ .



Riprendendo l'equazione iniziale, si ottiene:

$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{\mathcal{E}_0 \omega}{L} \cos \omega t$ , che permette di ricavare l'equazione della corrente

$$i(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \phi') + i_0 \sin(\omega t + \phi)$$

dove  $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$  e  $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ . Si ottiene quindi una *sinusoide con decadimento esponenziale* sommata a una sinusoide. La corrente efficace dipende dalla frequenza.

L'equazione implica che, dopo un transiente, il circuito oscilla con pulsazione dettata dalla forza elettromotrice alternata inserita.

### 9.3.1. Risonanza

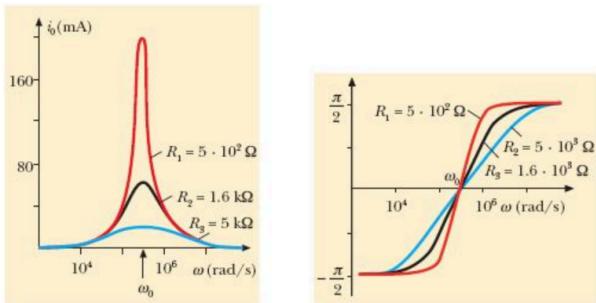
La corrente dell'oscillazione raggiunge il valore massimo quando  $Z$  è minimo, ovvero quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

In tali *condizioni*, dette di *risonanza*, lo *sfasamento* tra corrente e

forza elettromotrice è *nulla*, l'impedenza è eguale alla resistenza e il circuito si comporta come se fosse puramente resistivo.

Nei seguenti grafici sono rappresentate delle *curve di risonanza*.



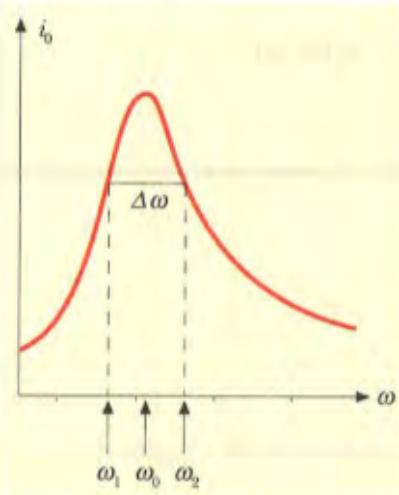
Prima della risonanza, il termine capacitivo è maggiore del termine induttivo, la fase varia tra  $-\frac{\pi}{2}$  e zero, quindi il comportamento è di tipo RC in serie.

Oltre la risonanza, predomina il termine induttivo su quello capacitivo, la fase varia tra zero e  $\frac{\pi}{2}$ , quindi il comportamento è di tipo RL in serie.

Si definisce la *larghezza della risonanza* con la differenza

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

dove  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono i valori della pulsazione tali che  
 $i_0(\omega_1) = i_0(\omega_2) = \frac{i_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$ .



Si definisce *fattore di merito della risonanza* la quantità

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

## 9.4. Potenza nei circuiti alternati

La potenza istantanea erogata dal generatore (dopo  $t \gg \frac{1}{\gamma}$ ) è

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(t)i(t) = \mathcal{E} \sin \omega t \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \sin(\omega t - \phi)$$

Il valore medio in un periodo vale

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 \cos \phi = \mathcal{E}_{eff} i_{eff} \cos \phi$$

il cui ultimo termine è detto "legge di Galileo-Ferraris".

Ricordando infine che  $\phi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$  otteniamo che  $\cos \phi = \frac{R}{Z}$ , quindi

$$\mathcal{P} = i_{eff}^2 R$$

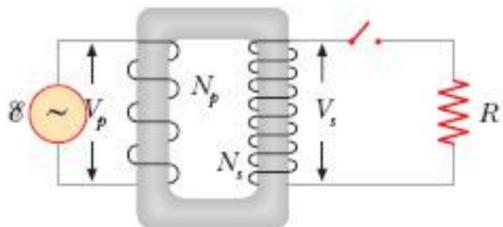
che ci dice che *la potenza viene dissipata solo nei resistori*.

## 9.5. Il trasformatore ideale

Per effettuare un passaggio da alta tensione e bassa corrente a bassa tensione e corrente elevata, senza apprezzabile perdita di potenza, si realizza, normalmente a passi successivi, con un *trasformatore*.

Un trasformatore consta di due avvolgimenti su un nucleo di ferro dolce, isolati tra loro e composti da  $N_p$  e  $N_s$  spire rispettivamente.

La funzione del nucleo di ferro è di aumentare il flusso  $\Phi(\vec{B})$  per una data corrente e far sì che le linee di  $\vec{B}$  restino all'interno del ferro.



### 💡 Trasformatore generico

I due circuiti sono *accoppiati*, quindi il flusso del campo magnetico attraverso le bobine è

$$\Phi_p(\vec{B}) = L_p i_p + M i_s, \quad \Phi_s(\vec{B}) = L_s i_s + M i_p$$

e dalla legge di Kirchoff si ottengono le formule

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t - L_p \frac{di_p}{dt} - M \frac{di_s}{dt} = ri_p, \quad -L_s \frac{di_s}{dt} - M \frac{di_p}{dt} = Ri_s$$

dove  $r$  è la resistenza interna del generatore. Sono due equazioni differenziali accoppiate. Noi semplificheremo considerando  $r = 0$  e  $i_s = 0$  (quindi un trasformatore ideale e aperto)

Considerando il caso ideale, non c'è campo magnetico disperso e superficie di ciascuna spira è identica. Se il circuito secondario è aperto, il flusso attraverso le singole spire del circuito primario e secondario è lo stesso, quindi le differenze di potenziale ai capi dei circuiti sono

$$V_p = -\frac{d\Phi_p(\vec{B})}{dt} = -N_p \frac{d\Phi_1(\vec{B})}{dt}, \quad V_s = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt} = -N_s \frac{d\Phi_1(\vec{B})}{dt}$$

dove  $\Phi_1(\vec{B})$  è il flusso attraverso una spira.

Vale quindi

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

Siccome non c'è resistenza nel circuito primario, vale  $\mathcal{E}(t) = -V_p$ , dunque

$$V_s = -\frac{N_s}{N_p \mathcal{E}(t)}$$

A circuito secondario aperto, il rapporto tra tensione in uscita e tensione in entrata è eguale al rapporto tra le spire del secondario e del primario. È detto *rapporto di trasformazione*.

Quando si chiude l'interruttore nel circuito secondario circola la corrente  $i_s$ . Il variare di  $i_s$  comporta una variazione di flusso nel primario, però la variazione totale di flusso deve essere sempre eguale a  $\mathcal{E}$  e quindi il generatore deve erogare un'ulteriore corrente per compensare. Questa potenza è eguale alla potenza spesa nel circuito secondario sulla resistenza  $R$ .

Siamo in presenza di un *trasferimento di potenza* dal primario al secondario non per via conduttriva, ma *attraverso le variazioni del campo magnetico*.

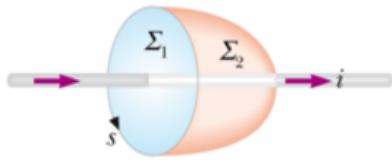
# 10. Le equazioni di Maxwell

## 10.1. Legge di Ampère-Maxwell

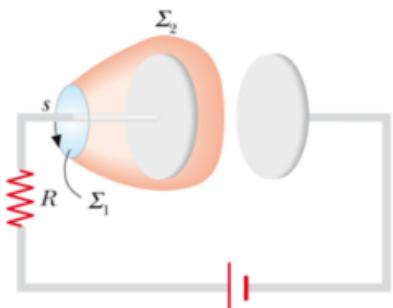
Il campo magnetico nel vuoto soddisfa la legge di Ampère:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{concatenate}}$$

Si definisce *condizione di stazionarietà* la seguente condizione: la legge di Ampère vale, senza nessuna riserva, quando considerata una superficie chiusa qualunque, l'intensità di corrente di conduzione  $i_c$  che entra è uguale all'intensità di corrente di conduzione  $i_c$  che esce.



Consideriamo ora un circuito RC, nel suo processo di carica e scarica.



Fissata la linea  $s$  concatenata al filo e le superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , calcoliamo la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo  $s$ . Se usassimo la superficie  $\Sigma_1$ , useremmo l'intensità di corrente di conduzione che attraversa il filo; se invece usassimo la superficie  $\Sigma_2$ , che poggia sempre su  $s$ , non incontreremmo il filo, quindi la corrente sarebbe nulla. Non è più realizzata la condizione di stazionarietà.

Come già visto in paragrafi precedenti, durante i processi di carica e scarica su un'armatura del condensatore si verifica una variazione di carica nel tempo  $\frac{dq}{dt}$ , corrispondente alla corrente  $i$  entrante nell'armatura, e sull'altra armatura c'è una variazione, eguale in modulo e opposta in segno,  $-\frac{dq}{dt}$ , che corrisponde a una corrente uscente  $i = -\left(-\frac{dq}{dt}\right) = \frac{dq}{dt}$ .

Possiamo affermare che ci sarà una variazione netta della carica contenuta nella superficie chiusa formata da  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Ricordiamo inoltre il teorema di Gauss, per cui vale  $1 = \mathcal{E}_0 \Phi(\vec{E})$ .

Definiamo allora la corrente di spostamento come

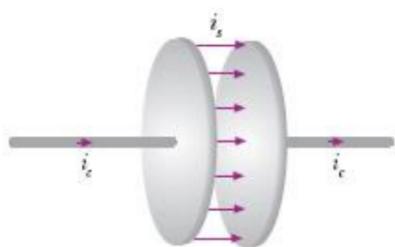
$$i_s = \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Allora la corrente che percorre il circuito durante la carica è di conduzione  $i_c$  attraverso i fili e di spostamento  $i_s$  tra le due armature del condensatore.

L'incongruenza che avevamo scoperto nella legge di Ampère viene risolta se consideriamo l'intensità di corrente come somma della corrente di conduzione e della corrente di spostamento

$$i = i_c + i_s$$

Questa intensità soddisfa la condizione di stazionarietà.



Si modifica la legge di Ampère, trovando la legge di Ampère-Maxwell

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i_c + \mathcal{E}_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

che stabilisce che i campi magnetici sono prodotti sia dalle correnti di conduzioni che da variazioni temporali del campo elettrico.

### Attenzione

Non bisogna essere tratti in inganno: il termine di spostamento coniato da Maxwell non è collegato a nessun moto di carica.

### Approfondimento

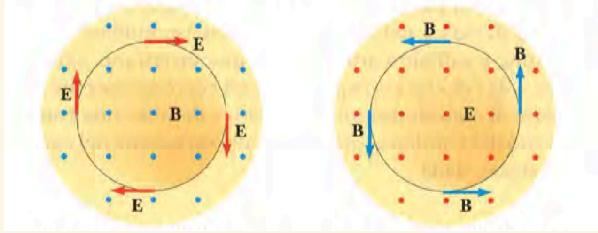
Anche quando non ci sono correnti di conduzione, ma ci sono variazioni del campo elettrico nel tempo, si individua un campo magnetico

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Si stabilisce quindi una simmetria di comportamento con la legge

di Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$



## 10.2. Le equazioni di Maxwell (forma integrale)

| Legge                   | Formula  |
|-------------------------|--|
| Legge di Gauss          | $\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$                                 |
| Legge di Faraday        | $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$                                    |
| Legge di Gauss          | $\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\Sigma = 0$  |
| Legge di Ampère-Maxwell | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$ |

La legge di Gauss per il campo elettrico stabilisce il legame tra carica elettrica e campo elettrico: la struttura è la stessa sia per campi statici che per campi variabili nel tempo. La legge di Faraday mostra che anche un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico. La legge di Gauss per il campo magnetico afferma che il campo magnetico è sempre solenoidale e che quindi non esistono cariche magnetiche libere (monopoli magnetici). Infine la legge di Ampère-Maxwell individua come sorgenti del campo magnetico le correnti di conduzione e le variazioni temporali del campo elettrico.

L'azione che il campo magnetico e il campo elettrico compiono su una carica  $q_0$  si manifesta con la *forza di Lorenz generalizzata*

$$\vec{F} = q_0(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Il moto della carica obbedisce alla *legge di Newton*, quindi  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

Ai campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  è associata una *densità di energia elettromagnetica*

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

### 10.3. Le equazioni di Maxwell (forma differenziale)

Le forme differenziali permettono di ottenere una relazione *locale* tra carica e campo elettrico e corrente e campo magnetico. In questo modo le proprietà dei campi elettrici e magnetici non sono più legate ad interi circuiti o intere superfici chiuse, ma sono valide punto per punto nello spazio. Per passare dalle equazioni integrali scritte qui sopra alle equazioni differenziali si usano il *teorema della divergenza* per le equazioni dei flussi e il *teorema di Stokes* per le equazioni delle circuitazioni.

| Legge                   | Formula   |
|-------------------------|---|
| Legge di Gauss          | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  |
| Legge di Faraday        | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$                                    |
| Legge di Gauss          | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  |
| Legge di Ampère-Maxwell | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ |

#### ⌚ Le equazioni di Maxwell nel vuoto

| Legge          | Forma integrale  | Forma differenziale                                    |
|----------------|--|--|
| Legge di Gauss | $\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$ | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ |

| Legge                   | Forma integrale  | Forma differenziale   |
|-------------------------|--|---|
| Legge di Faraday        | $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$                                    | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$                                    |
| Legge di Gauss          | $\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\Sigma = 0$  | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  |
| Legge di Ampère-Maxwell | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$ | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ |

Lontano dalle sorgenti dei campi le formule assumono una forma interessante:

| Legge                   | Forma integrale   | Forma differenziale  |
|-------------------------|---|--|
| Legge di Gauss          | $\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$                                 | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$   |
| Legge di Faraday        | $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$                 | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$                 |
| Legge di Gauss          | $\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\Sigma = 0$                                 | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$   |
| Legge di Ampère-Maxwell | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$ | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |

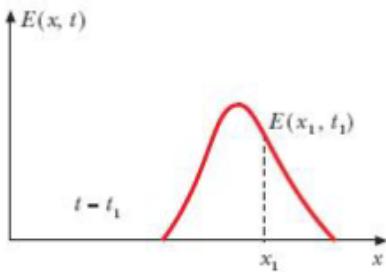
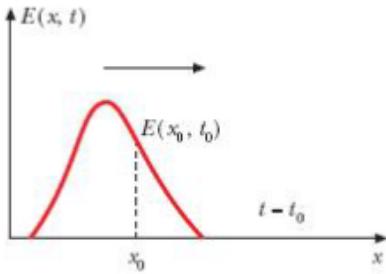
## Lezione 22

# 11. Onde elettromagnetiche

Si definisce come *onda* una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga con una velocità ben definita.

Tutte le onde soddisfano l'*equazione di D'Alembert*

$$\vec{\nabla}^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$



Le *onde meccaniche* hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi e la loro propagazione è dovuta all'interazione tra le particelle del mezzo.

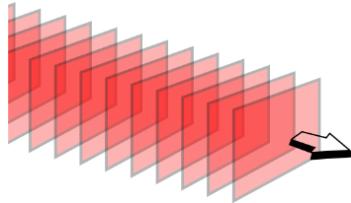
In esse non vi è un effettivo trasporto di materia (le particelle oscillano attorno a una posizioni di equilibrio), ma vengono trasportate *energia* e *quantità di moto*.

Le *onde elettromagnetiche*, ad esempio, non hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi.

## 11.1. Onde piane

Una situazione particolare per cui un'onda dipende solamente dalla coordinata spaziale  $x$  e dal tempo  $t$  è quella delle *onde piane*.

L'onda assume lo stesso valore in tutti i punti del piano di equazione  $x = x_0$ , ortogonale all'asse di propagazione  $x$ .



L'equazione di D'Alembert diventa

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

dove  $v^2$  è il quadrato della velocità di propagazione dell'onda. Le soluzioni dell'equazione hanno forma

$$f(x - vt), \quad f(x + vt)$$

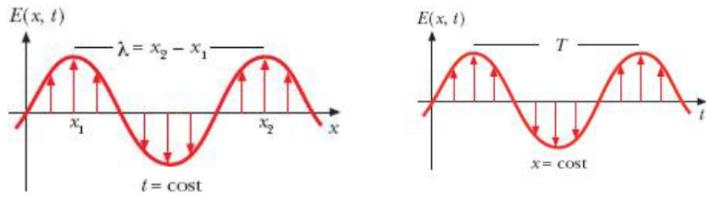
dove la prima è un'*onda progressiva*, mentre la seconda un'*onda regressiva*. Queste ci dicono che, spostandosi, l'onda non cambia forma.

### 11.1.1. Onde piane armoniche

L'*onda armonica* è un'onda piana particolare, la cui funzione d'onda si descrive con

$$f(x, t) = f_0 \sin(k(x \mp vt)) = f_0 \sin(kx \mp \omega t) \text{ oppure } f(x, t) = f_0 \cos(k(x \mp vt)) = f_0 \cos(kx \mp \omega t)$$

dove  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  è il *numero d'onda*,  $\lambda$  la *lunghezza d'onda* e  $\omega$  è la pulsazione, che vale  $\omega = kv$  ed è legata al periodo  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .



Il *fronte d'onda* è il luogo dei punti nei quali la *fase dell'onda*  $\phi = kx - \omega t$  ha lo stesso valore; è un piano.

Si nota che per le onde piane armoniche i fronti d'onda sono distanti  $\lambda$  fra loro, con uno sfasamento di  $2\pi$ .

### 11.2. Onde elettromagnetiche piane

Le equazioni di Maxwell implicano le onde elettromagnetiche. Consideriamo il caso senza cariche né correnti ( $\rho = 0$  e  $\vec{j} = 0$ ) e facciamo l'ipotesi di avere onde piane, ovvero che i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  siano costanti in un piano ortogonale all'asse  $x$ , ovvero parallelo al piano  $yz$ . Ciò implica che eventuali derivate rispetto alle variabili  $y$  e  $z$  debbano essere *nulle*.

Inoltre, definiamo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{m}{s}$$

la *velocità della luce* nel vuoto.

Grazie alla terza e alla quarta equazione di Maxwell si possono ricavare delle relazioni che legano fra loro le derivate delle componenti non nulle dei campi, che poi deriviamo per ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Queste equazioni ci permettono di concludere che ognuna delle componenti del campo elettrico e del campo magnetico si propagano lungo l'asse  $x$  (trasversalmente) con velocità  $c$ .

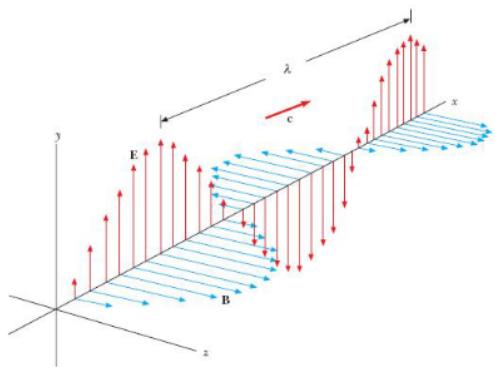
Troviamo che la soluzione delle equazioni delle onde è

$$\vec{E}(x, t) = E_{0,y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + E_{0,z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(x, t) = B_{0,y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + B_{0,z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

e siccome le equazioni (accoppiate) di Maxwell devono valere, troviamo anche che

$$B_{0,y} = -\frac{E_{0,z}}{c}, \quad B_{0,z} = \frac{E_{0,y}}{c}$$



Troviamo che valgono

$$B = \frac{E}{c} \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

infatti  $B^2 = B_{0,y}^2 + B_{0,z}^2 = \frac{E_{0,z}^2}{c^2} + \frac{E_{0,y}^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2}$  e  
 $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = -\frac{E_{0,y} E_{0,z}}{c} + \frac{E_{0,y} E_{0,z}}{c} = 0$ , ovvero i due campi sono ortogonali tra loro e i moduli sono dipendenti.

### 11.2.1. Proprietà

- $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  si propagano con la stessa *velocità c*;
- I moduli dei campi sono legati dalla relazione di proporzionalità  $B = \frac{E}{c}$ ;
- $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono *ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione*: le onde elettromagnetiche sono onde *trasversali* e per esse è significativo il concetto di *polarizzazione*;
- Il verso del prodotto vettoriale  $\vec{E} \times \vec{B}$  definisce il verso di propagazione dato da  $c$ ;
- Le onde elettromagnetiche obbediscono al *principio di sovrapposizione*; è una proprietà generale che dipende dal fatto che nelle equazioni di Maxwell i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  compaiano in forma lineare;

- $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono *in fase*, quindi massimi e minimi cadono negli stessi punti;
- I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono *inscindibili*: la presenza di uno comporta la presenza dell'altro.

### Ω Onde elettromagnetiche in mezzi trasparenti

Se il mezzo in cui si propaga l'onda non è il vuoto, ma ha proprietà magnetiche trascurabili, allora si può considerare  $\epsilon = k\epsilon_0$  e  $\mu_0$  si può considerare invariato, allora la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica diventa

$$v = \frac{1}{\mu_0\epsilon} = \frac{c}{\sqrt{k}}$$

Siccome  $k > 1$ , allora la velocità delle onde elettromagnetiche in mezzi materiali è sempre inferiore alla velocità della luce nel vuoto.

| Si dice  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{k}$  l'*indice di rifrazione* del mezzo.

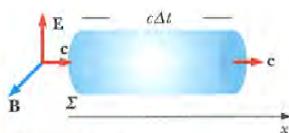
## 11.3. Energia di un'onda elettromagnetica piana e vettore di Poynting

Dalle formule di densità di energia del campo elettrico e del campo magnetico, trovate in precedenza, vediamo che la *densità istantanea* di *energia elettromagnetica* è

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E^2$$

Quindi *l'energia elettromagnetica risulta per metà dovuta al campo elettrico e per metà da quello magnetico*. Il risultato è vero in generale, anche per le onde non piane.

Considerando una superficie di area  $\Sigma$  perpendicolare alla direzione di propagazione, si può trovare che nel tempo  $dt$  attraverso  $\Sigma$  passa tutta l'energia contenuta nel volume  $\Sigma c dt$ , ovvero  $dU = u \Sigma c dt = \epsilon_0 E^2 c \Sigma dt$ . Quindi la potenza che attraversa  $\Sigma$  è  $\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E^2 c \Sigma$ .



Definendo un vettore  $\vec{S} = \epsilon_0 E^2 \vec{c}$ , si trova che esso ha la proprietà che il flusso attraverso una superficie  $\Sigma$  perpendicolare alla direzione

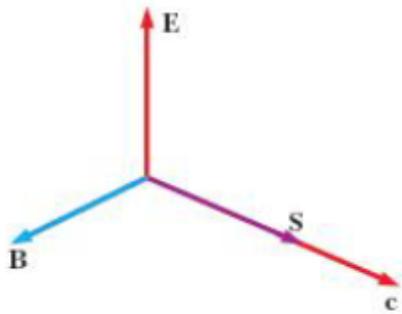
di propagazione dà la potenza istantanea attraverso  $\Sigma$  stessa  
 $\mathcal{P} = \Phi_\Sigma(\vec{S}) = S\Sigma$ .

Definiamo il *vettore di Poynting* come il vettore

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 E B \vec{u} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

la cui unità di misura è  $\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$ .

Esso ha direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione.



Il valore medio del vettore di Poynting è l'*intensità dell'onda elettromagnetica piana*

$$I = S_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 x E_0^2 = \epsilon_0 x E_{eff}^2$$

#### **11.4. Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana e pressione di radiazione**

Le onde elettromagnetiche trasportano energia, quindi trasportano anche quantità di moto e momento angolare.

Attraverso una superficie unitaria  $\Sigma$  perpendicolare alla direzione di propagazione, passa in media nell'unità di tempo la quantità di moto

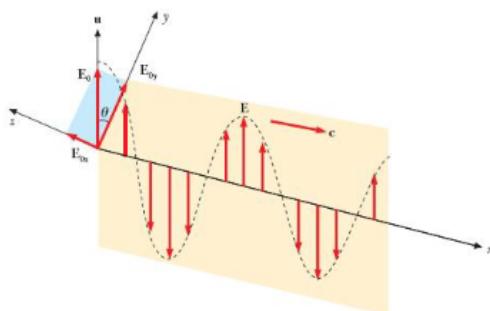
$$\langle p \rangle = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \epsilon_0 E_{eff}^2$$

Quando questa quantità di moto viene assorbita completamente dalla materia si determina una forza per unità di superficie detta *pressione di radiazione*.

## 11.5. Polarizzazione dell'onda elettromagnetica piana

Un'onda elettromagnetica piana *polarizzata rettilineamente* ha il campo elettrico con solo la componente  $y$  (quindi il campo magnetico solo la componente  $z$ ) e resta sempre parallelo all'asse  $y$  durante la propagazione.

La scelta dell'asse  $y$  è arbitraria, qualsiasi direzione ortogonale all'asse di propagazione è accettabile.



Il campo elettrico dell'onda elettromagnetica rappresentata in figura si scrive  $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{u}$  e l'intensità dell'onda  $I_0 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$ .

Scritto il versore come  $\vec{u} = \cos \theta \vec{u}_y + \sin \theta \vec{u}_z$ , si ottiene

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos \theta \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + E_0 \sin \theta \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

quindi *l'onda elettromagnetica piana è rappresentata come sovrapposizione di due onde elettromagnetiche piane polarizzate rettilineamente nei piani (xy) e (xz) di ampiezza rispettivamente  $E_0 \cos \theta$  e  $E_0 \sin \theta$ .*

Un'onda magnetica piana il cui campo elettrico e magnetico restano costanti in modulo, ma ruotano con velocità angolare  $\omega$  attorno alla direzione di propagazione data da  $c$ , con  $\vec{E} \times \vec{B}$  parallelo e concorde a  $c$ , si dice *polarizzata circolarmente*. Se  $E_{0,y} \neq E_{0,z}$ , allora si dice *polarizzata ellitticamente*.

### ! Osservazione

La polarizzazione circolare e rettilinea rappresentano tutti i possibili stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana.

Un'onda elettromagnetica piana non polarizzata ha l'angolo  $\theta$  che definisce la direzione di  $\vec{E}$  che varia casualmente nel tempo.

## 11.6. Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante

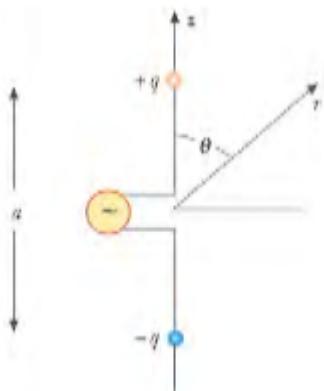
Un *dipolo elettrico oscillante* ha la carica  $q$  concentrata agli estremi e varia sinusoidalmente;

$$q = q_0 \sin \omega t \implies i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos \omega t$$

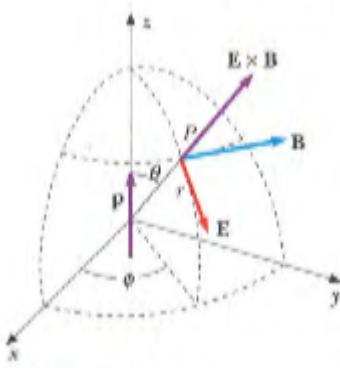
da cui viene generato un *momento di dipolo elettrico* oscillante

$$p = qa = q_0 a \sin \omega t = p_0 \sin \omega t$$

parallelo all'asse  $z$  in figura.



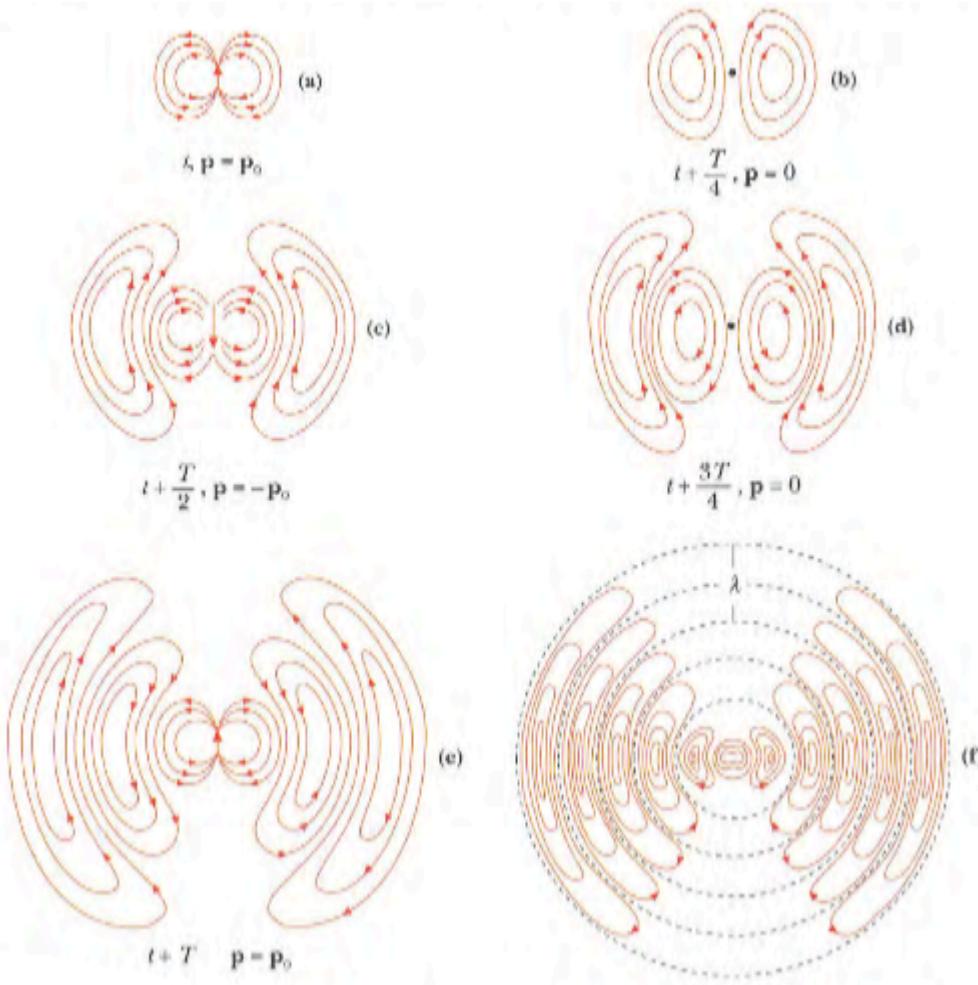
A grandi distanza dal centro del dipolo ( $r \gg a$ ), si dimostra che si propaga un'*onda elettromagnetica trasversale* a una direzione  $r$  che parte dal centro. Il campo elettrico  $\vec{E}$  si trova su un piano meridiano, mentre il campo magnetico  $\vec{B}$  in uno parallelo.



I moduli sono dati da

$$E = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sin(kr - \omega t), \quad B = \frac{E}{c}$$

Il momento di dipolo, essendo oscillante, si annulla, inverte, annulla nuovamente e infine torna al suo valore originale in un periodo, andando a formare linee di campo che si chiudono e allontanano.



Il campo magnetico associato al campo elettrico risulta perpendicolare al foglio, le sue linee sono quindi *circonferenze* con in centro sull'asse del dipolo  $p$ , il cui raggio aumenta all'allontanarsi dalla sorgente.

Intensità e potenza sono

$$I(r, \theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \sin^2 \theta, \quad \mathcal{P} = \frac{8\pi}{3} I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0} c^3$$

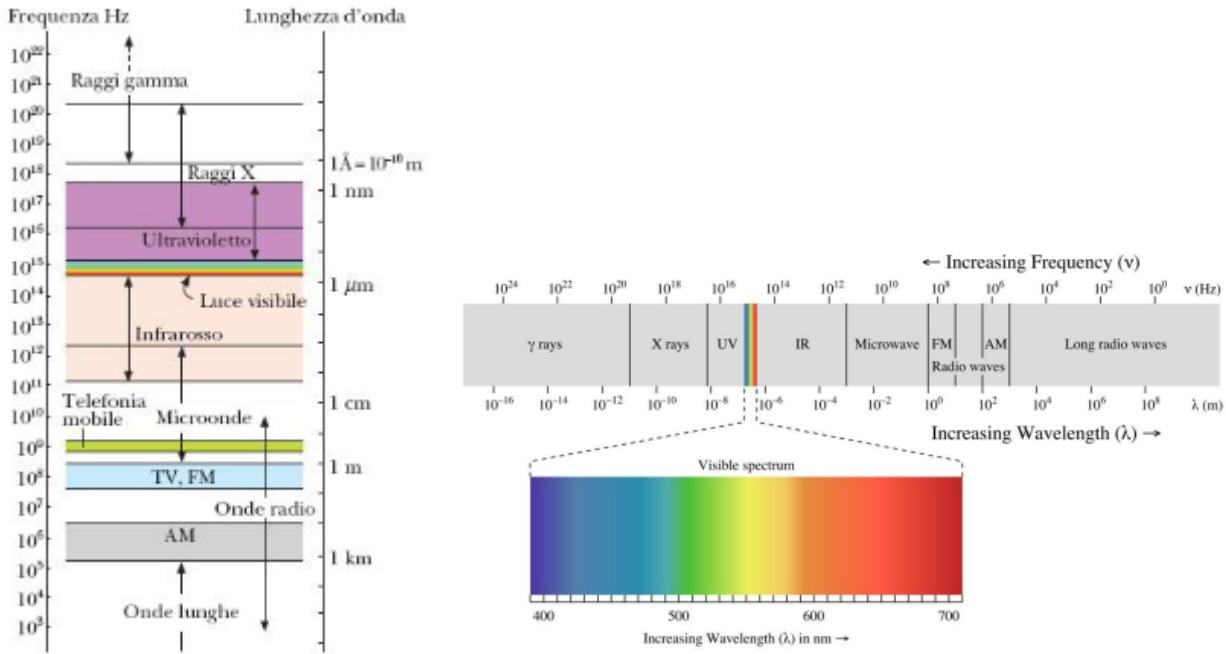
con  $I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3}$ .

## 11.7. Spettro delle onde elettromagnetiche

Lo spettro delle onde elettromagnetiche è convenzionalmente suddiviso in una successione di bande, i cui confini non sono netti, ma hanno zone di sovrapposizione.

Le loro *proprietà fisiche sono determinate dalla frequenza*, che è *determinata dalla sorgente*; in base al mezzo in cui si trovano, lunghezza d'onda e velocità possono variare (nello schema sono rappresentate le lunghezze relative al vuoto), ma vale sempre la relazione

$$\lambda \nu = c$$



### 11.7.1. Onde hertziane

Si trovano negli intervalli (corrispondenti)  $[0.3, 3 \cdot 10^6] m$  e  $[10^2, 10^9] Hz$ .

Sono prodotte con dispositivi elettronici e sono utilizzate nelle trasmissioni radiofoniche e televisive.

Si chiamano anche onde radio o radiofrequenze.

### 11.7.2. Microonde

Si trovano negli intervalli  $[3 \cdot 10^{-3}, 0.3] m$   $[10^9, 10^{11}] Hz$ .

Sono prodotte con dispositivi elettronici e sono utilizzate per comunicazioni e sistemi radar.

### 11.7.3. Infrarosso

Si trovano negli intervalli  $[0.78 \cdot 10^{-6}, 10^{-3}] m$   $[3 \cdot 10^{11}, 3.8 \cdot 10^{14}] Hz$ .

Vengono prodotte dai corpi caldi, le cui molecole vengono eccitate tramite gli urti causati dall'agitazione termica. Se assorbite danno origine a un aumento delle temperature.

Gli infrarossi vengono usati in terapie fisiche in medicina, nella fotografia infrarossa, la spettroscopia vibrazionale (lo studio dei livelli energetici vibrazionali delle molecole).

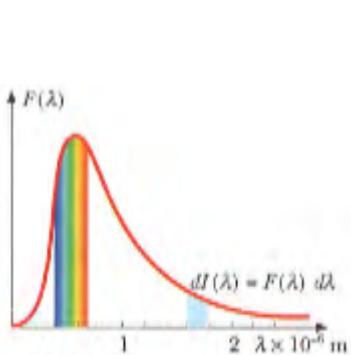
### 11.7.4. Luce visibile

Si trovano negli intervalli  $[0.38 \cdot 10^{-6}, 0.78 \cdot 10^{-6}] m$  e  $[3.8 \cdot 10^{14}, 7.9 \cdot 10^{14}] Hz$ .

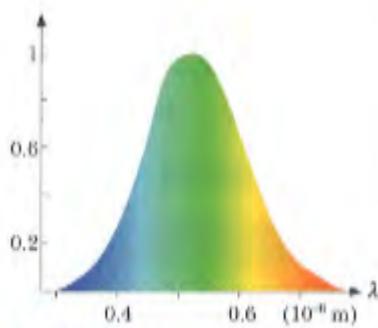
È la banda di frequenze cui è sensibile l'occhio della maggior parte degli esseri viventi. La luce visibile è prodotta nei moti di agitazione termica ad alta temperatura, da scariche in un gas, in

generale da processi in cui vengono eccitati gli elettroni più esterni degli atomi.

Il sole è la più importante sorgente di luce visibile vicina a noi; l'energia elettromagnetica ha origine dall'agitazione termica degli atomi che si trovano sulla superficie a una temperatura di circa  $6000K$ .



**Figura 10.28**  
Spettro della radiazione solare.



**Figura 10.29**  
Sensibilità media relativa dell'occhio ai diversi colori.

Le diverse sensazioni che la luce produce nell'occhio dipendono dalla lunghezza d'onda e vengono classificate come colori.

| Colore    | $\lambda(10^{-6}m)$ | $\mu(10^{14}Hz)$ |
|-----------|---------------------|------------------|
| rosso     | 0.780 – 0.622       | 3.85 – 4.82      |
| arancione | 0.622 – 0.597       | 4.82 – 5.03      |
| giallo    | 0.597 – 0.577       | 5.03 – 5.20      |
| verde     | 0.577 – 0.492       | 5.20 – 6.10      |
| azzurro   | 0.492 – 0.455       | 6.10 – 6.59      |
| violetto  | 0.455 – 0.380       | 6.59 – 7.89      |

### 11.7.5. Ultravioletto

Si trovano negli intervalli  $[6 \cdot 10^{-6}, 0.38 \cdot 10^{-6}]m$  e  $[7.9 \cdot 10^{14}, 5 \cdot 10^{17}]Hz$ .

Una delle sorgenti degli ultravioletti è il Sole; queste onde vengono assorbite nell'atmosfera con un fenomeno di ionizzazione (creando la ionosfera, oltre i  $100km$  di altezza, mentre tra i  $20$  e i  $30$  chilometri si forma l'ozono). L'assorbimento atmosferico è fondamentale per la vita sulla Terra in quanto questa radiazione in grandi quantità risulta letale (mentre in piccole quantità causa, ad esempio, l'abbronzatura).

### 11.7.6. Raggi X

Si trovano negli intervalli  $[6 \cdot 10^{-10}, 6 \cdot 10^{-12}]m$  e  $[5 \cdot 10^{17}, 5 \cdot 10^{19}]Hz$ .

Vengono comunemente prodotti mediante la decelerazione degli elettroni di alta energia, che bombardano un bersaglio metallico.

Vengono comunemente utilizzati per indagini radiografiche, mentre fasci ben focalizzati e molto intensi venivano usati nella terapia contro i tumori.

### 11.7.7. Raggi gamma

Si trovano negli intervalli  $\lambda \leq 10^{-10} m$  e  $\nu \geq 3 \cdot 10^{18} Hz$ .

Sono prodotti in processi nucleari (decadimenti radioattivi e reazioni tra nuclei) e nei decadimenti di particelle subnucleari. L'assorbimento dei raggi gamma può causare seri danni in un organismo vivente; ad oggi vengono usati in terapie antitumorali.