Dati e algoritmi

0. Indice

Lezione 01

1. Nozioni

1.1. Problema computazionale

Un problema computazionale è costituito da

- un insieme I di *istanze* (i *possibili input*)
- un insieme S di *soluzioni* (i *possibili output*)
- una relazione Π che a ogni istanza $i \in I$ associa *una o più* soluzioni $s \in S$

Osservazione

Π è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $I \times S$

1.1.1. Esempi

Somma di Interi (Z)

- $\mathcal{I} = \{(x, y) : x, y \in Z\}$;
- $\mathcal{S} = Z$;
- $\Pi = \{((x, y), s) : (x, y) \in \mathcal{I}, s \in \mathcal{S}, s = x + y\}$.
  Ad es: $((1, 9), 10) \in \Pi$; $((23, 6), 29) \in \Pi$ $((13, 45), 31) \notin \Pi$

Ordinamento di array di interi

- $\mathcal{I} = \{A : A = \text{array di interi}\}$;
- $\mathcal{S} = \{B : B = \text{array ordinati di interi}\}$;
- $\Pi = \{(A, B) : A \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{S}, B \text{ contiene gli stessi interi di } A\}$.
  Ad es.
  $(< 43, 16, 75, 2 >, < 2, 16, 43, 75 >) \in \Pi$
  $(< 7, 1, 7, 3, 3, 5 >, < 1, 3, 3, 5, 7, 7 >)$
  $(< 13, 4, 25, 17 >, < 11, 27, 33, 68 >)$

Ordinamento di array di interi (ver.2)

- $\mathcal{I} = \{A : A = \text{array di interi}\}$;
- $\mathcal{S} = \{P : P = \text{permutazioni}\}$;
- $\Pi = \{(A, P) : A \in \mathcal{I}, P \in \mathcal{S}, P \text{ ordina gli interi di } A\}$.
  Ad es.
  $(< 43, 16, 75, 2 >, < 4, 2, 1, 3 >) \in \Pi$
  $(< 7, 1, 7, 3, 3, 5 >, < 2, 4, 5, 6, 1, 3 >) \in \Pi$
  $(< 7, 1, 7, 3, 3, 5 >, < 2, 5, 4, 6, 1, 3 >) \in \Pi$
  $(< 13, 4, 25, 17 >, < 1, 2, 4, 3 >)$

Osservazione

- Istanze diverse possono avere la stessa soluzione (come la somma)
- Un'istanza può avere diverse soluzioni (come l'ordinamento ver. 2)

1.1.2. Esercizi

Esercizio

Specificare come problema computazionale Π la verifica se due insiemi finiti di oggetti da un universo U sono disgiunti oppure no.

$I \equiv \{(A, B) : A, B \subseteq U,\ A, B \text{ finiti}\}$
$S \equiv \{true,\ false\}$
$\Pi \equiv \{((A, B), s)\ \text{se } A \cap B = \emptyset \text{ allora } s = true,\ \text{se } A \cap B \neq \emptyset \text{ allora } s = false\}\quad s \in S, (A, B) \in I$

Esercizio

Specificare come problema computazionale Π la ricerca dell'inizio e della lunghezza del più lungo segmento di 1 consecutivi in una stringa binaria.

$I \equiv \{A : A \text{ è una stringa binaria}\}$
$S \equiv \{(i, l) : i, l \in \mathbb{N}_0\}$
$\Pi \equiv \{(A, (i, l)) : i \text{ la casella di inizio del segmento di 1 consecutivi più numeroso}, l \text{ la lunghezza del segmento di 1 consecutivi più lungo}\}$

1.2. Algoritmo e modello di calcolo

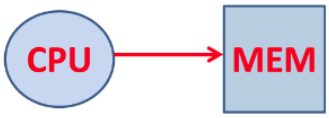
1.2.1. Algoritmo

Un *algoritmo* procedura computazionale ben definita che trasforma un dato *input* in un *output* eseguendo una sequenza finita di *operazioni elementari*.
□

L'algoritmo fa riferimento a un *modello di calcolo*, ovvero un'astrazione di computer che definisce l'insieme di operazioni elementari.

Le operazioni elementari sono: assegnamento, operazioni logiche, operazioni aritmetiche, indicizzazione di array, return di un valore da parte di un metodo, ecc.

1.2.2. Modello di calcolo RAM (Random Access Machine)



In questo modello input, output, dati intermedi (e il programma) si trovano in memoria.

Un algoritmo A risolve un *problema computazionale* $\Pi \subseteq I \times S$ *se*:

1. A calcola una funzione da I a S e quindi,
   - riceve come input istanze $i \in I$
   - produce come output soluzioni $s \in S$
2. Dato $i \in I$, A produce in output $s \in S$ tale che $(i, s) \in \Pi$.
   Se Π associa più soluzioni a una istanza i, per tale istanza A ne calcola una (quale dipende da come è stato progettato).

Lezione 02

1.3. Pseudocodice

Per semplicità e facilità di analisi, descriviamo un algoritmo utilizzando uno pseudocodice strutturato come segue:

> **Algoritmo** nome(parametri)
> **Input**: breve descrizione dell'istanza di input
> **Output**: breve descrizione della soluzione restituita in output
> Descrizione chiara dell'algoritmo tramite costrutti di linguaggi di programmazione e, se utile ai fini della chiarezza, anche tramite linguaggio naturale, dalla quale sia facilmente determinabile la sequenza di operazioni elementari eseguita per ogni dato input.

"Algoritmo nome (parametri)" è la firma (signature) dell'algoritmo; i parametri sono l'input.
Si può usare il linguaggio naturale per cose semplici, che sarebbero lunghe da scrivere con i costrutti del linguaggio di programmazione.

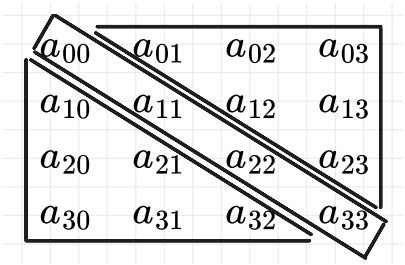
Usare *sempre* questa struttura per lo pseudocodice!

Per maggiori dettagli fare riferimento alla dispensa sulla Specifica di Algoritmi in Pseudocodice, disponibile sul Moodle del corso.

1.3.1. Esempio – Trasposta di una matrice $n \times n$ di interi

Problema computazionale: $\Pi \subseteq I \times S$
$I \equiv \{A:$ matrice $n \times n$ di interi$\}$
$S \equiv \{B:$ matrice $n \times n$ di interi$\}$
$\Pi \equiv \{(A,B) : A \in I, B \in S, B = A^t\}$

Algoritmo: idea per $n = 4$



Scambio ciascuna entry a_{ij} della matrice triangolare superiore ($a_{ij} : i = 0, \ldots, n-2, j > i$) con a_{ji} (l'omologa del triangolo inferiore)

Algoritmo `transpose(A)`
Input: matrice A $n \times n$ di interi a_{ij}, $0 \leq i, j \leq n$.
Output: matrice A^t.

```
for i <- 0 to n-2 do{
     for j <- i+1 to n-1 do{
          scambia a_ij con a_ji
     }
}
return A
```

1.4. Taglia di un'istanza

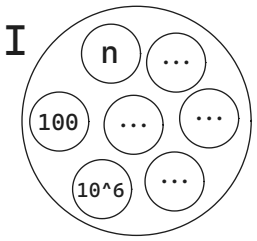
L'analisi di un algoritmo (ad esempio la determinazione della sua complessità) viene solitamente fatta *partizionando le istanze in gruppi in base alla loro taglia (size)*, in modo che le istanze di un gruppo siano tra loro *confrontabili*.

> La *taglia di un'istanza* è espressa da uno o più valori che ne caratterizzano la grandezza.

1.4.1. Esempi

- Se ho n elementi da ordinare con un `MergeSort`, la taglia è n. In questo caso fa riferimento alla dimensione fisica dell'istanza.

La taglia serve per dividere in gruppi omogenei da analizzare separatamente.



- Ordinamento di un array:
  Taglia n = numero di elementi dell'array
- Trasposta di una matrice:
  Prendendo una generica matrice $n \times m$ ho più modi di definire la taglia, in base al tipo di analisi che si vuole condurre:
  - Taglia $x = n * m$
  - Taglia (n, m), con n e m rispettivamente il numero di righe e numero di colonne
  - (Se $n = m$) Taglia $n =$ numero di righe/colonne

1.5. Struttura dati

Le strutture dati sono usate dagli algoritmi per organizzare e accedere in modo sistematico ai dati di input e ai dati generati durante l'esecuzione.

1.5.1. Struttura dati - definizione

> Una *struttura dati* è una collezione di oggetti corredata di *metodi* di accesso e/o modifica.

Vi sono due *livelli di astrazione*:

1. *Livello logico*: specifica l'organizzazione logica degli oggetti della collezione, e la relazione input-output di ciascun metodo (a questo livello si parla di *Abstract Data Type* o ADT)
2. *Livello fisico*: specifica il layout fisico dei dati e la realizzazione dei metodi tramite algoritmi.

1.5.1.1. Esempio

In Java a livello logico ho (gerarchia di) *interfacce*, mentre a livello fisico ho (gerarchia di) *classi*.
□

1.5.2. Esercizio

Siano A e B due array di n e m interi, rispettivamente. Scrivere un algoritmo in pseudocodice per calcolare il seguente valore:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (A[i] \cdot B[j])$$

1.5.3. Esercizio

Sia A un array di n interi distinti, ordinato in senso crescente, e x un valore intero. Scrivere due algoritmi in pseudocodice che implementano la ricerca binaria per trovare x in A. Entrambi gli algoritmi restituiscono l'indice i tale che $A[i] = x$, se x appare in A, e -1 altrimenti. Il primo algoritmo deve essere iterativo e usare un solo ciclo, e il secondo algoritmo deve essere ricorsivo.

2. Analisi degli algoritmi

L'analisi di un algoritmo A mira a studiarne l'*efficienza* e l'*efficacia*. In particolare, essa può valutare la ***complessità*** di *tempo* e *spazio*, e la ***correttezza*** di *terminazione* (se termina o rimane in un loop) e della *soluzione del problema computazionale*.

Noi ci concentreremo sulla complessità di tempo e sulla correttezza della soluzione del problema computazionale.

2.1. Complessità in tempo

L'*obiettivo* è *stimare il tempo di esecuzione ("running time") di un algoritmo* al fine di valutarne l'efficienza e poterlo confrontare con altri algoritmi per lo stesso problema.

2.1.1. Requisiti per la complessità in tempo

La complessità in tempo deve:

1. Riguardare *tutti gli input*;
2. Permettere di *confrontare algoritmi* (senza necessariamente determinare il tempo di esecuzione esatto);
3. Essere *derivabile dallo pseudocodice*.

2.1.1.1. Esempio

Stimare sperimentalmente il tempo di esecuzione di un algoritmo (ad esempio in Java con `System.currentTimeMillis()`) è utile, ma non soddisfa i requisiti. **Perché?**

- Non si possono considerare tutti gli input (se infiniti);
- Richiede di implementare l'algoritmo con un programma e l'impatto dell'implementazione può influenzare il confronto tra algoritmi;
- La stima dipende dall'ambiente hardware/software.

2.1.1.2. Approccio che soddisfa i requisiti

- Analisi al *caso pessimo* (*worst-case*) in funzione della taglia dell'istanza (requisiti 1 e 2)
- Conteggio delle operazioni elementari nel modello RAM (requisiti 2 e 3)
- Analisi asintotica (per semplificare il conteggio)

> **Osservazione**
>
> Esiste anche l'analisi al caso medio (*average case*) e l'analisi probabilistica.

2.1.2. Complessità (in tempo) al caso pessimo - definizione

Sia A un algoritmo che risolve $\Pi \subseteq I \times S$.

> La complessità (in tempo) al caso pessimo di A è una funzione $t_A(n)$ definita come *il massimo numero di operazioni elementari che A esegue per risolvere un'istanza di taglia n*.

In altre parole, se chiamiamo $t_{A,i}$ il numero di operazioni eseguite da A per l'istanza i, abbiamo che

$$t_A(n) = max\{t_{A,i} : \text{ istanza } i \in I \text{ di taglia } n\}$$

La definizione rispetta i tre requisiti definiti sopra.

2.1.3. Difficoltà nel calcolo di $t_A(n)$

Determinare $t_A(n)$ per ogni n è arduo, se non impossibile, perché è *difficile identificare l'istanza peggiore di taglia n* e perché è *difficile contare il massimo numero di operazioni richieste per risolvere tale istanza* peggiore (il conteggio richiederebbe anche una specifica dettagliata del set di operazioni elementari del modello RAM).
Ma *non è necessario determinare esattamente $t_A(n)$*, infatti il tempo di esecuzione, che la complessità vuole stimare, dipende da tanti fattori che è impossibile quantificare in modo preciso, in più le

diverse operazioni elementari del modello RAM possono avere impatto diverso sui tempi di esecuzione a seconda delle architetture.
Ci accontentiamo dei *limiti superiori* e i *limiti inferiori* a $t_A(n)$.

2.1.4. Esempio (`arrayMax`)

Algoritmo `arrayMax(A)`
Input: array $A[0 \div n-1]$ di $n \geq 1$ interi.
Output: max intero in A.

```
currMax<-A[0]
for i<-1 to n-1 do{
    if(currMax < A[i]) then currMax<-A[i];
}
return currMax
```

Taglia dell'istanza: n (ragionevole)

2.1.4.1. Stima di $t_{\text{arrayMax}}(n)$

È facile vedere che per una qualsiasi istanza di taglia n:

- al di fuori del ciclo for `arrayMax` esegue un numero costante (rispetto a n) di operazioni;
- in ciascuna delle $n-1$ iterazioni del ciclo for si esegue un numero costante di operazioni.
  Esistono allora quattro costanti $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ tali che per ogni n valga $t_{\text{arrayMax}}(n) \leq c_1 n + c_2$ (cioè il *limite superiore*) e $t_{\text{arrayMax}}(n) \geq c_3 n + c_4$ (cioè il *limite inferiore*). Non è necessario stimare le quattro costanti per le stesse ragioni per cui non è necessario stimare esattamente la complessità.

2.2. Analisi asintotica

Si ricorre quindi all'analisi asintotica, ignorando i *fattori moltiplicativi costanti* (rispetto alla taglia dell'istanza) e i *termini additivi non dominanti*.

2.2.1. Esempio (`arrayMax`)

Riprendendo l'esempio, nel caso di `arrayMax` possiamo affermare che $t_{\text{arrayMax}}(n)$ è *al più* proporzionale a n (limite superiore) ed è anche *almeno* proporzionale a n (limite inferiore), ne consegue quindi che $t_{\text{arrayMax}}(n)$ è *proporzionale* a n (limite stretto).
□

> Per esprimere affermazione come quelle fatte sopra si usano gli **ordini di grandezza**: $O(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $o(\cdot)$.

Lezione 03

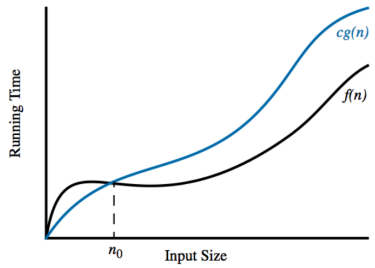
2.3. Ordini di grandezza

Siano $f(n)$, $g(n)$ funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

2.3.1. O-grande

> $f(n) \in O(g(n))$ se $\exists c > 0$ e $\exists n_0 \geq 1$, *costanti rispetto a n*, tali che
>
> $$f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

Cioè se $f(n)$ è al più proporzionale a $g(n)$, ovvero se $f(n)$ non cresce asintoticamente più di $c \cdot g(n)$.



2.3.1.1. Esempi

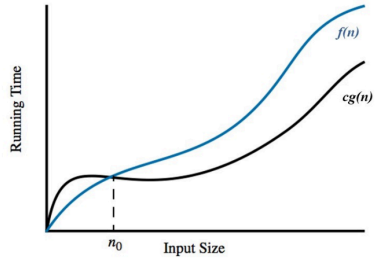
$f(n)$	$O(\cdot)$	c	n_0
$3n + 4$ per $n \geq 1$	$O(n)$	4	4
$n + 2n^2$ per $n \geq 1$	$O(n^2)$	3	1
2^{100} per $n \geq 1$	$O(1)$	2^{100}	1
$c_1 n + c_2$ per $n \geq 1$, $c_1, c_2 > 0$	$O(n)$	$c_1 + c_2$	1

Si può dire che $3n + 4 \in O(n^5)$, $c = 7$, $n_0 = 1$, ma non sarebbe molto utile.

2.3.2. Omega-grande

> $f(n) \in \Omega(g(n))$ se $\exists c > 0$ e $\exists n_0 \geq 1$, *costanti rispetto a n*, tali che
>
> $$f(n) \geq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

Cioè $f(n)$ è almeno proporzionale a $g(n)$.



2.3.2.1. Esempi

$f(n)$	$\Omega(\cdot)$	c	n_0
$3n+4$ per $n \geq 1$	$\Omega(n)$	1	4
$n+2n^2$ per $n \geq 1$	$\Omega(n^2)$	1	1
2^{100} per $n \geq 1$	$\Omega(1)$	2^{100}	1
$c_1 n + c_2$ per $n \geq 1$, $c_1, c_2 > 0$	$\Omega(n)$	1	1

2.3.3. Theta

> $f(n) \in \Theta(g(n))$ se
>
> $$f(n) \in O(g(n)) \quad \text{e} \quad f(n) \in \Omega(g(n))$$

Cioè $f(n)$ è (*esattamente*) proporzionale a $g(n)$.

2.3.3.1. Esempi

- $f(n) = 3n + 4 \in \Theta(n)$;
- $f(n) = n + 2n^2 \in \Theta(n^2)$;
- $f(n) = 2^{100} \in \Theta(1)$;
- $t_{\text{arrayMax}}(n) \in \Theta(n)$.

2.3.4. o-piccolo

> $f(n) \in o(g(n))$ se
>
> $$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Cioè $f(n)$ è *asintoticamente* più piccola (cresce meno) di $g(n)$.

2.3.4.1. Esempi

- $f(n) = 100n$ per $n \geq 1 \implies f(n) \in o(n^2)$;
- $f(n) = \frac{3n}{\log_2 n}$ per $n \geq 1 \implies f(n) \in o(n)$.

2.3.5. Proprietà degli ordini di grandezza

1. $max\{f(n), g(n)\} \in \Theta(f(n) + g(n))$ per ogni $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
2. $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i \in \Theta(n^k)$, se $a_k > 0$, k, a_i costanti, e $k \geq 0$.
   Ad esempio: $(n+1)^5 \in \Theta(n^5)$.
   Cioè tengo il termine con l'esponente maggiore;
3. $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, se $a, b > 1$ sono costanti;

   > **Osservazione**
   > La proprietà deriva dalla relazione $\log_b n = (\log_a n)(\log_b a)$ e, grazie a essa, *la base dei logaritmi*, se costante, *si omette negli ordini di grandezza*, a meno che il logaritmo non sia all'esponente.

4. $n^k \in o(a^n)$, se $k > 0$, $a > 1$ sono costanti;
5. $(\log_b n)^k \in o(n^h)$ se b, k, h sono costanti, con $b > 1$ e $h, k > 0$.

2.3.6. Strumenti matematici

2.3.6.1. Parte bassa

> $\forall x \in \mathbb{R}$, si definisce $\lfloor x \rfloor$ come il più grande intero tale che sia $\leq x$.

2.3.6.1.1. Esempi

- $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$;
- $\lfloor 3 \rfloor = 3$.

2.3.6.2. Parte alta

> $\forall x \in \mathbb{R}$, si definisce $\lceil x \rceil$ come il più piccolo intero tale che sia $\geq x$.

2.3.6.2.1. Esempi

- $\lceil \frac{3}{2} \rceil = 2$;
- $\lceil 3 \rceil = 3$.

2.3.6.3. Modulo

> $\forall x, y \in Z$, con $y \neq 0$, si definisce $x \bmod y$ come il resto della divisione intera x/y (l'operatore "%" in Java).

2.3.6.3.1. Esempi

- $29 \bmod 7 = 4$;
- $80 \bmod 4 = 0$.

2.3.6.4. Sommatorie notevoli

$\forall n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$, con $n \geq 0$ e $a > 0$ vale:

- $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$;
- $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \in \Theta(a^n)$ per $a > 1$;
- $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} - 1 \in \Theta(a^n)$ per $a > 1$.

2.4. Analisi di complessità in pratica

Dato un algoritmo A e detta $t_A(n)$ la sua complessità al caso pessimo, si cercano limiti asintotici superiori e/o inferiori a $t_A(n)$.

2.4.1. Limite superiore (upper bound) - definizione

$$t_A(n) \in O(f(n))$$

Si prova argomentando che per ogni n "abbastanza grande" e per ciascuna istanza di taglia n l'algoritmo esegue $\leq c \cdot f(n)$ *operazioni*, con c costante (e che non serve determinare).

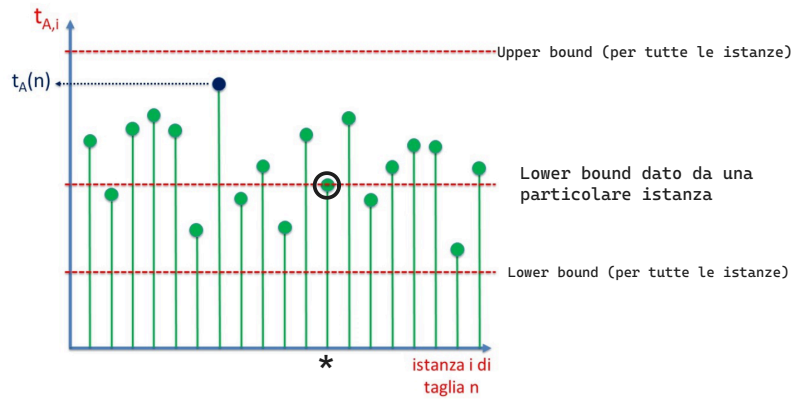
2.4.2. Limite inferiore (lower bound) - definizione

$$t_A(n) \in \Omega(f(n))$$

Si prova argomentando che per ogni n "abbastanza grande", *esiste* un'istanza di taglia n per la quale l'algoritmo esegue $\geq c \cdot f(n)$ *operazioni*, con c costante (e che non serve determinare).
In alcuni casi è comodo argomentare che per *ciascuna* istanza di taglia n l'algoritmo esegue $\geq c \cdot f(n)$ operazioni.

> ⚠ **Attenzione**
>
> Sia che si provi $t_A(n) \in O(f(n))$ o che si provi $t_A(n) \in \Omega(f(n))$
>
> - $f(n)$ deve essere più vicino possibile alla complessità vera (*tight bound*)
> - $f(n)$ deve essere più semplice possibile, quindi senza costanti e termini additivi di ordine inferiore, solo con i *termini essenziali*!

2.4.3. Limiti superiori e inferiori



2.4.4. Terminologia per complessità

- logaritmica: $\Theta(\log n)$, base 2 o costante > 1
- lineare: $\Theta(n)$
- quadratica: $\Theta(n^2)$
- cubica: $\Theta(n^3)$
- polinomiale $\Theta(n^c)$, $c > 0$ costante
- esponenziale: $\Omega(a^n)$, $a > 1$ costante
- polilogaritmica: $\Theta((\log n)^c)$, $c > 0$ costante

2.4.5. Esempio (prefix averages)

Si consideri il seguente problema computazionale.
Dato un array di n interi $X[0 \dots n-1]$ calcolare un array $A[0 \dots n-1]$ dove $A[i] = \left(\sum_{j=0}^{i} X[j]\right) \frac{1}{i+1}$, per $0 \leq i < n$.

Vedremo adesso due algoritmi di cui uno banale e inefficiente, poi uno più furbo ed efficiente. Per entrambi gli algoritmi vale la seguente specifica di input-output:
Input: $X[0 \dots n-1]$ array di n interi.
Output: $A[0 \dots n-1] : A[i] = \left(\sum_{j=0}^{i} X[j]\right) \frac{1}{i+1}$ per $0 \leq i < n$.

2.4.5.1. Algoritmo inefficiente

Algoritmo `prefixAverages1`

```
for i <- 0 to n-1 di{
     a <- 0;
     for j <- 0 to i do {
          a <- a+X[j];
     }
     A[i] <- a/(i+1);
```

```
}
return A
```

- Fuori dal for esterno: $\Theta(1)$ operazioni
- Per ciascuna iterazione i del for esterno $(i = 0, \ldots, n-1)$:
  - $\Theta(i+1)$ operazioni nel for interno
  - $\Theta(1)$ altre operazioni

La complessità è quindi:
$t_{pA1}(n) \in \Theta\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} i + 1\right) = \Theta\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) = \Theta\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = \Theta(n^2)$.

2.4.5.2. Algoritmo efficiente

Algoritmo `prefixAverages2`

```
s <- 0;
for i <- 0 to n-1 do{
     s <- s + X[i];
     A[i] <- s/(i+1);
}
return A
```

- Fuori dal for: $\Theta(1)$ operazioni
- Iterazioni i del for $(i = 0, \ldots, n-1)$: $\Theta(1)$ operazioni

La complessità è quindi: $t_{pA2}(n) \in \Theta\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} 1\right) = \Theta(n)$

Possiamo affermare che $t_{pA2}(n) \in o(t_{pA1}(n))$, cioè è migliore.

Lezione 04

2.4.6. Esercizi

2.4.6.1. Analisi complessità in tempo

Sia A un algoritmo che ricevuto in input un array X di $n \geq 1$ interi esegue

- $c_1 n$ operazioni per ogni intero pari in X
- $c_2 \lceil \log_2 n \rceil$ operazioni per ogni intero dispari in X
  dove c_1 e c_2 sono costanti positive.
  Analizzare la complessità in tempo dell'algoritmo esprimendola con $\Theta(\cdot)$.

Per un'istanza particolare (es: array di tutti interi pari) ho $\Theta(n^2)$, ho quindi ricavato un lower bound.

- Taglia dell'istanza: n
- Complessità: $t_A(n)$
- Upper bound: $\forall$ istanza di taglia n, A esegue $\leq n\max\{c_1 m, c_2\lceil\log_2 n\rceil\} \leq n\max\{c_1,c_2\}\max\{n,\log_2 n\} = n\max\{c_1,c_2\}n$ operazioni $\implies t_A(n) \in O(n^2)$ **(1)**
- Lower bound basato su una particolare istanza: Sia X un array di interi pari $\implies$ per tale X, A esegue $n \cdot c_1 \cdot n = c_1 n^2$ operazioni $\implies t_A(n) \in \Omega(n^2)$ **(2)**
- Lower bound basato su tutte le istanze: $\forall$ istanza di taglia n, A esegue $\geq n\min\{c_1 n, c_2\lceil\log_2 n\rceil\} \geq n\min\{c_1,c_2\}\min\{n,\log_2 n\} = n\min\{c_1,c_2\}\lceil\log_2 n\rceil$ operazioni $\implies t_A(n) \in \Omega(n\log n)$ Questo lower bound è peggiore rispetto a quello trovato prima.

2.4.6.1. Descrizione insertion sort

Il seguente pseudocodice descrive l'algoritmo di ordinamento chiamato `InsertionSort` (Si assume che la sequenza S da ordinare sia una variabile globale che dopo la fine dell'algoritmo è accessibile e ordinata).

Algoritmo `InsertionSort(S)`
Input: Sequenza $S[0\ldots n-1]$ di n chiavi.
Output: Sequenza S ordinata in senso crescente.

```
for i<-1 to n-1 do{
     curr<-S[i];
     j<-i-1;
     while((j>=0) AND (S[j] > curr)) do{
          S[j+1]<-S[j];
          j<-j-1;
     }
     S[j+1]<-curr;
}
```

Notazione

Nel caso degli algoritmi di ordinamento, in analogia al libro di testo, usiamo il termine *sequenza* per denotare la collezione di elementi da ordinare che assumiamo rappresentata come array.

1. Trovare opportune funzioni $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$ tali che le seguenti affermazioni siano vere, per una qualche costante $c > 0$ e per n abbastanza grande.
   - Per ciascuna istanza di taglia n l'algoritmo esegue $\leq cf_1(n)$ operazioni.
   - Per ciascuna istanza di taglia n l'algoritmo esegue $cf_2(n)$ operazioni.
   - Esiste un'istanza di tagli a n per la quale l'algoritmo esegue $\geq cf_3(n)$ operazioni
     La funzione $f_1(n)$ deve essere la più piccola possibile, mentre le funzioni $f_2(n)$ e $f_3(n)$ devono essere le più grandi possibili.
2. Sia $t_{IS}(n)$ la complessità al caso pessimo dell'algoritmo. Sfruttando le affermazioni del punto precedente trovare un upper bound $O(\cdot)$ e un lower bound $\Omega(\cdot)$ per $t_{IS}(n)$.

2.4.7. Regola di buon senso

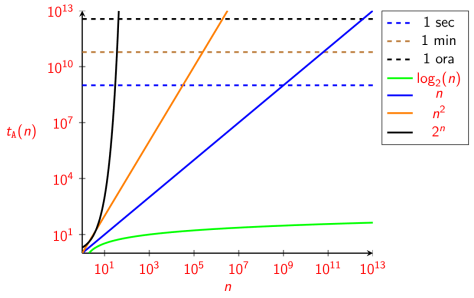
Una complessità polinomiale (o migliore) implica un algoritmo efficiente, mentre una complessità esponenziale implica un algoritmo inefficiente.
Supponiamo che la complessità $t_A(n)$ sia espressa in nanosecondi e definiamo

$$n_\tau \equiv \text{max taglia di un'istanza risolvibile in tempo } \tau$$

Per ottenere n_τ, risolviamo $t_A(n_\tau) = \tau$ rispetto a n_τ.

2.4.7.1. Esempi

$t_A(n)$	n_τ **per** $\tau = 10^9$ **(1 sec)**	n_τ **per** $\tau = 60 * 10^9$ **(1 min)**	n_τ **per** $\tau = 3600 * 10^9$ **(1 ora)**
$\log_2 n$	$2^{10^9} = \infty$	∞	∞
n	10^9	$6 * 10^{10}$	$3.6 * 10^{12}$
n^2	$10^{4.5}$	$\approx 8 * 10^{4.5}$	$\approx 1.8 * 10^6$
2^n	≈ 30	≈ 36	≈ 42



2.4.7.2. Esempio

La crittografia a chiave pubblica è molto usata dai protocolli di sicurezza.
L'invio di un messaggio cifrato da Alice a Bob funziona (in maniera approssimata) in questo modo:

- Bob possiede una chiave privata k_1 e una chiave pubblica k_2;
- Alice invia a Bob un messaggio m cifrato con k_2;
- Bob decifra il messaggio ricevuto da Alice con k_1;

L'*Algoritmo RSA* sviluppato nel 1977 da Rivest, Shamir, Adleman (*Turing Award 2002*) è il più famoso algoritmo di crittografia a chiave pubblica. La sua "sicurezza" si basa sulla difficoltà di risolvere il seguente problema.

2.4.7.2.1. Integer factorization (per interi prodotti di 2 primi)

> Dato un intero N prodotto di due primi p, q, determinare p e q.

Che taglia dell'istanza scelgo?

Posso scrivere, ad esempio, questo algoritmo banale per risolvere il problema:

```
for p<-2 to floor{sqrt{N}} do{
    if(N mod p = 0) then return {p, N/p};
}
```

Esprimiamo la complessità in funzione del numero n bit che servono per rappresentare N. Se $p, q \in \Theta(\sqrt{N})$ la complessità è $\Theta(\sqrt{N}) = \Theta(2^{n/2})$

2.4.7.2.1.1. Esempio numerico

Prendendo $n = 1024$ ottengo $2^{n/2} = 2^{512} \geq 10^{154}$. Sul computer più potente del mondo ($< 10^{19}$ flop/sec) l'algoritmo banale richiederebbe circa

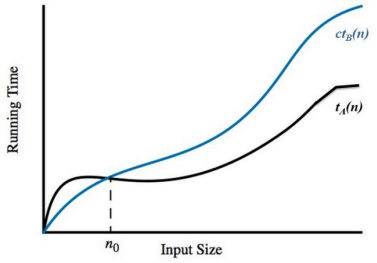
$\frac{10^{154}}{10^{19}} = 10^{135}$ secondi. Considerando che un anno ha meno di 10^8 secondi, sarebbero più di 10^{127} anni di calcolo.

> **Nota bene**
>
> Esistono algoritmi più efficienti, ma sempre con complessità esponenziale.

> **Dalla motivazione del A.M. Turning Award 2002 assegnato a Rivest, Shamir e Adleman**
>
> RSA is used in almost all internet-based commercial transactions. Without it, commercial online activities would not be as widespread as they are today. It allows users to communicate sensitive information like credit card numbers over an unsecure internet without having to agree on a shared secret key ahead of time. Most people ordering items over the internet don't know that the system is in use unless they notice the small padlock symbol in the corner of the screen. RSA is a prime example of an abstract elegant theory that has had great practical application.

2.4.8. Efficienza asintotica degli algoritmi

Dati A, B due algoritmi che risolvono il problema computazionale Π, $t_A(n)$ e $t_B(n)$ sono le complessità rispettivamente di A e B al caso pessimo. Se $t_A(n) \in o(t_B(n))$, allora A è "*asintoticamente più efficiente*" di B.



Nota bene: n_0 potrebbe essere *molto* grande.

> **Caveat sull'analisi asintotica al caso pessimo**
>
> 1. *Le costanti trascurate potrebbero essere elevate* e, in pratica, potrebbero avere un impatto elevato sulle

prestazioni.

2. *Il caso pessimo potrebbe essere costituito solo da **istanze patologiche*** mentre per tutte le istanze di interesse la complessità potrebbe essere asintoticamente migliore.
   Cosa fare in questo caso?
   - Restringere il dominio delle istanze, mantenendo quelle di interesse ed escludendo quelle patologiche.
   - Fare un'analisi al caso medio.

2.5. Analisi di correttezza

2.5.1. Induzione

Per provare che una proprietà $Q(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$ si procede così:

- Si sceglie un intero $k \geq 0$;
- **Base:** si dimostra $Q(n_0),\ Q(n_0+1),\ \ldots,\ Q(n_0+k)$;
- **Passo induttivo:** si fissa un valore $n \geq n_0 + k$ *arbitrario* e si dimostra che $Q(m)$ vera $\forall m : n_0 \leq m \leq n \implies Q(n+1)$ vera.

Osservazioni

- "$Q(m)$ vera $\forall m : n_0 \leq m \leq n$" è chiamata *ipotezi induttiva*.
- La dimostrazione deve valere *per ogni* $n \geq n_0 + k$
- Di solito, ma non sempre, $k = 0$ (il libro di testo descrive l'induzione con $n_0 = 1$).

2.5.1.1. Esempio

$$Q(n) : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 0$$

Nota bene: Implica che $Q(n) \in \Theta(n^2)$.

- $n_0 = 0,\ k = 0$
- Base: $Q(0) : \sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ ✓
- Passo induttivo: Fisso $n \geq n_0 + k = 0$ arbitrario.
  Ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2} \quad \forall 0 \leq m \leq n$
  Dimostriamo che $Q(n+1)$ è vera:
  $\sum_{i=0}^{n+1} i = n+1 + \sum_{i0}^{n} i = n+1\frac{n(n+1)}{2} =$ per ipotesi induttiva
  $= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \implies Q(n+1)$ è vera

2.5.1.2. Esercizio

Dimostrare per induzione la seguente proprietà:

$$Q(n) : \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall \geq 0$$

Nota bene: Implica che $\sum_{i=0}^{n} i^2 \in \Theta(n^3)$

> **Osservazione**
>
> In generale $\sum_{i=0}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1})$, con k costante.

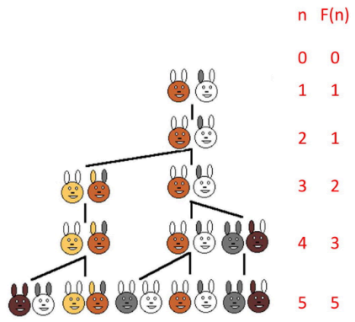
Lezione 05

2.5.1.3. Successione di Fibonacci - esempio

La *successione di Fibonacci* è definita così: $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \\ F(n+1) = F(n) + F(n-1) \end{cases}$

$\forall n \geq 1$.

Si può pensare a $F(n)$ come il numero di coppie di conigli all'inizio del mese n se una coppia genera un'altra coppia ogni mese, a partire dal terzo mese, i conigli non muoiono, all'inizio del mese 1 c'è una coppia neonata.



Dimostrare che

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) \quad (\implies F(n) \in \Theta(N\phi^n))$$

$\forall n \geq 0$, dove $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*golden ratio*) e $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2.5.1.3.1. Induzione fallace

Dimostriamo $F(n) = 0$, $\forall n \geq 0$ $(n_0 = 0)$:

- $k = 0$

- Base: $F(0) = 0 \implies \checkmark$
- Passo induttivo: fissato $n \geq 0$ e assumendo $F(m) = 0$ pe rogni $0 \leq m \leq n$ (ipotesi induttiva), si ha $F(n+1) = F(n) + F(n-1) = 0 + 0$

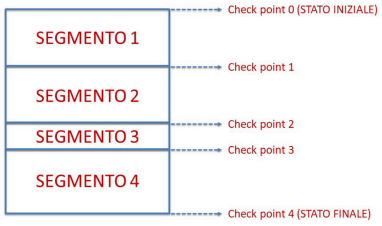
Il passo induttivo non è corretto quando $n = 0$, perché $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$ vale solo per $n \geq 1$. Allora in questo caso devo usare una base più ampia: $n_0 = 0$, $k = 1$.

2.5.2. Correttezza

Per provare la correttezza di terminazione, cioè appunto la terminazione, è necessario assicurarsi che i cicli (inclusi i GOTO) e l'eventuale ricorsione abbiano termine.

Gli step dell'approccio generale alla soluzione del problema computazionale sono:

- *Definire lo stato iniziale* dell'algoritmo e quello *finale* che esso *deve raggiungere*;
- *Decomporre l'algoritmo in segmenti* e definire per ogni segmento lo stato in cui l'algoritmo si deve trovare del termine del segmento (*checkpoint*);
- *Dimostrare* che a partire dallo stato iniziale *si raggiungono* in successione *gli stati specificati* per la fine di ogni segmento. In particolare, lo stato che deve valere alla fine dell'ultimo segmento deve coincidere (o implicare) lo stato finale desiderato.
  I *segmenti notevoli* sono cicli (for, while, repeat-until).



Osservazione

I cicli sono i segmenti più difficili da analizzare (perché definiscono *implicitamente* molte operazioni) ma, insieme alla ricorsione, costituiscono gli strumenti essenziali per la scrittura di algoritmi o programmi interessanti.

2.5.3. Invariante

Per provare la correttezza di un ciclo (for, while, repeat-until, ...) bisogna dimostrare che al termine della sua esecuzione vale una certa *proprietà* $\mathcal{L}$ che rappresenta uno stato ed è *funzionale alla correttezza dell'algoritmo*. A tal fine si fa uso di un *invariante*.

> Un *invariante* per un ciclo è una *proprietà* espressa in funzione delle variabili usate nel ciclo, che descrive lo *stato* in cui si trova l'esecuzione alla fine di una generica iterazione del ciclo.

Nota bene

L'invariante deve essere scelto finalizzandolo alla correttezza e alla prova della proprietà $\mathcal{L}$.

2.5.4. Correttezza di un ciclo tramite invariante

Per dimostrare che alla fine del ciclo vale una certa proprietà $\mathcal{L}$, si individua un opportuno invariante e si dimostra che:

1. Esso *vale all'inizio del ciclo* (subito prima che il ciclo inizi);
2. Esso *vale alla fine di ciascuna iterazione*, che si dimostra induttivamente provando che se vale alla fine di una generica iterazione, vale alla fine della successiva;
3. *Alla fine dell'ultima iterazione, l'invariante implica la proprietà* $\mathcal{L}$ (in alcuni casi coincide con essa).

Terminologia

L'esecuzione di un *ciclo* consiste di più di zero iterazioni delle istruzione in esso contenute (*corpo del ciclo*).
Ad esempio `for i<-1 to n do {corpo del ciclo}` è un ciclo che esegue sempre n iterazioni.

2.5.4.1. Esempio (`arrayMax`)

Algoritmo `arrayMax(A)`
Input: Array $A[0 \div n-1]$ di $n \geq 1$ interi.
Output: massimo intero di A.

```
currMax<-A[0];
for i<-1 to n-1 do{
     currMax<-max{currMax, A[i]};
}
return currMax;
```

Proprietà $\mathcal{L}$: alla fine del ciclo, $currMax$ è il massimo intero in A (quindi il valore restituito è corretto).
Invariante: Alla fine della iterazione $i \geq 0$, $currMax = max\{A[0], A[1], \ldots, A[i]\}$.

> **Osservazione**
>
> La fine dell'iterazione $i = 0$ corrisponde all'inizio del ciclo.

1. All'inizio del ciclo ($i = 0$) l'invariante è reso vero dall'assegnamento $currMax < -A[0]$;
2. Disponiamo l'invariante uguale a vero a fine iterazione $i < n - 1 \implies currMax = max\{A[0], \ldots, A[i]\}$ e dimostriamo che vale anche alla fine della successiva iterazione.
   Nella iterazione $i + 1$ l'istruzione $currMax <\text{-} max\{currMax, A[i + 1]\}$ assicura che alla fine di tale iterazione $currMax <\text{-} max\{A[0], \ldots, A[i + 1]\}$;
3. Alla fine dell'ultima iterazione ($i = n - 1$):
   Se vale'invariante, cioè se $currMax = max\{A[0], \ldots, A[n - 1]\}$, allora $currMax$ è effettivamente il massimo intero, che è la proprietà $\mathcal{L}$.

2.5.4.2. Esempio (`arrayFind`)

Algoritmo `arrayFind(A)`
Input: Elemento x, array $A[0 \div n - 1]$ di n elementi.
Output: indice $i \in [0, n)$ tale che $A[i] = x$, se esiste, altrimenti -1.

```
i<-0;
while i < n do{
     if(x = A[i]) then return i;
     else i<-i+1;
}
return -1;
```

Proprietà $\mathcal{L}$: Il valore trovato è corretto.
Invariante: Alla fine di una generica iterazione $x \neq A[j] \ \ \forall 0 \leq j < i$ con

i valore della variabile omonima alla fine dell'iterazione corrente.

1. All'inizio del ciclo ($i = 0$) l'invariante vale per *vacuità* dato che il range $0 \div i - 1$ è vuoto;
2. Supponiamo l'invariante vero alla fine di una generica iterazione $\implies x \neq A[j] \ \forall 0 \leq j < i < n$.
   Alla fine della successiva iterazione:
   - Se $x = A[i] \implies i$ non cambia e si esce dal ciclo;
   - Se $x \neq A[i] \implies i$ diventa $i + 1$.
     In entrambi i casi l'invariante continua a valere;
3. Fine ultima iterazione, ci sono due possibili uscite:
   - $u_1 : x = A[i]$: In questo caso si restituisce i e chiaramente $\mathcal{L}$ vale;
   - $u_2 : i = n$ in questo caso si restituisce -1.
     Dato che l'invariante mi dice che $x \neq A[j] \ \forall j : 0 \leq j < n = i$ so che x non è in A e quindi restituire -1 è corretto $\implies \mathcal{L}$ vale.

2.5.6. Ricorsione

> Un *algoritmo ricorsivo* è un algoritmo che invoca sé stesso (su istanze sempre più piccole) sfruttando la nozione di induzione.

La soluzione di un'istanza di taglia n è ottenuta *direttamente* se $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n_0 + k$ (casi base), altrimenti *riducendosi* alla soluzione di $r \geq 1$ istanze di taglia minore di n: se $n > n_0 + k$. Se $r = 1$ si parla di *linear recursion*.

2.5.6.1. Esempi

Algoritmo `linearSum(A,n)`
Input: array A, intero $n \geq 1$.
Output: $\sum_{i=0}^{n-1} A[i]$.

```
if (n = 1) then{
     return A[0];
}
else{
     return linearSum(A, n-1) + A[n-1];
}
```

Taglia dell'istanza: n; $n_0 = 1$ e $k = 0$.
Se voglio trovare la somma di tutti gli elementi di un array A, la prima invocazione sarà `linearSum(A,|A|)`.

Algoritmo `reverseArray(A,i,j)`
Input: array A, indici $i, j \geq 0$.
Output: array A con gli elementi in $A[i \div j]$ ribaltati.

```
if(i < j) then{
     swap(A[i], A[j]);
     reverseArray(A, i+1, j-1);
}
return
```

Taglia dell'istanza: $n = j - i + 1$.
Caso base: $n \leq 1$.
La prima invocazione per ribaltare tutto A è `reverseArray(A,0,|A|-1)`.

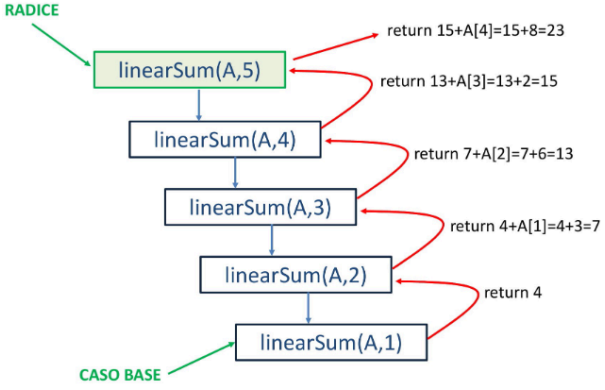
Lezione 06

2.5.6.2. Esecuzione di un algoritmo ricorsivo

All'esecuzione di un algoritmo ricorsivo su una data istanza è associato un *albero della ricorsione* (o *recursion trace*) tale che:

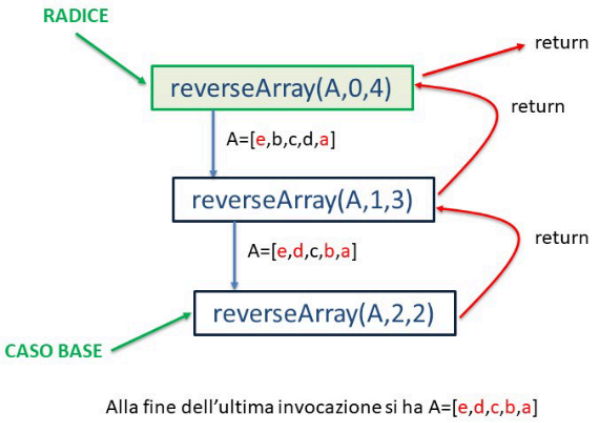
- Ogni nodo corrispondente a un'invocazione ricorsiva distinta fatta durante l'esecuzione dell'algoritmo;
- La *radice* dell'albero corrisponde alla prima invocazione, i *figli* di un nodo x sono associati alle invocazioni ricorsive fatte direttamente dall'invocazione corrispondente a x;
- Le *foglie* dell'albero rappresentano i *casi base*.

L'albero della ricorsione per `linearSum(A,5)`, con $A = [4,3,6,2,8]$ risulta:



Avvengono un numero costante di operazioni per chiamata, quindi il numero totale sarà proporzionale al numero di chiamate. La complessità è allora $\Theta(n)$ (giustificazione a seguire).

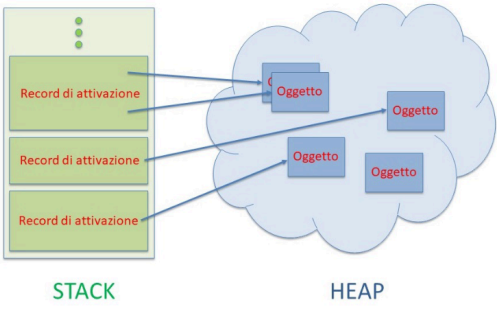
L'albero della ricorsione per `reverseArray(A,0,4)`, con $A = [a,b,c,d,e]$ sarà invece:



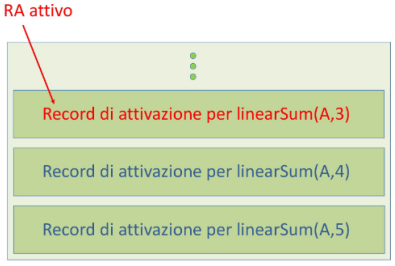
Alla fine dell'ultima invocazione si ha A=[e,d,c,b,a]

Nell'esecuzione di un programma (in Java) entrano di solito in gioco die spazi di memoria:

- *Stack*: spazio destinato a memorizzare variabili locali ai metodi e riferimenti a oggetti.
  - Per ogni invocazione di un metodo viene inserito un *record di attivazione* (abbreviato in RA; in inglese di usa il termine *activation record* o *activation frame*) contenente variabili e riferimenti a oggetti relativi a quell'invocazione.
  - Un RA viene eliminato quando l'invocazione del metodo corrispondente finisce l'esecuzione.
  - I RA sono inseriti/eliminati con politica LIFO (Last In First Out); in ogni istante possono essere acceduti i dati relativi all'ultimo RA inserito, ma non quelli di altri RA.
- *Heap*: spazio destinato a memorizzare gli oggetti.



Supponiamo di eseguire `linearSum(A,5)` e consideriamo l'invocazione ricorsiva `linearSu,(A,3)`. Quando viene creato il RA per tali invocazione ricorsiva, lo stato della Stack è il seguente:



Ricorda

Un algoritmo ricorsivo è un algoritmo che invoca sé stesso su istanze più piccole.

> Un *algoritmo iterativo* è un algoritmo non-ricorsivo.

Osservazione

Il termine *iterativo* è usato per evidenziare che (tranne per casi banali) *un algoritmo non-ricorsivo fa uso di cicli per poter elaborare istanze di qualsiasi taglia*.
Mentre i cicli sono essenziali in un algoritmo iterativo, un algoritmo ricorsivo può non avere cicli (come `linearSum` e `reverseArray`), ma può anche averli (come `MergeSort`).

2.5.7. Complessità di algoritmi ricorsivi

La *complessità* di un algoritmo ricorsivo A può essere *stimata tramite l'Albero della Ricorsione*.

Consideriamo l'albero associato all'esecuzione di A su un'istanza i di taglia n:

- A ogni nodo è attribuito un *costo* pari al numero di operazioni eseguite dall'invocazione corrispondente a quel nodo, *escluse quelle fatte dalle invocazioni ricorsive al suo interno*;
- Il numero totale di operazioni eseguite da A per risolvere i si ottiene sommando i costi associati a tutti i nodi.
  Per ottenere un *upper bound a* $t_A(n)$ si ricava una stima per eccesso del numero totale di operazioni che valga per tutte le istanze i di taglia n, mentre per ottenere un *lower bound a* $t_A(n)$ si trova un'istanza particolare o si fa una stima inferiore che vada bene per tutte le istanze.

2.5.7.1. Esempi

2.5.7.1.1. Complessità di `linearSum(A,n)`

Algoritmo `linearSum(A,n)`
Input: array A, intero $n \geq 1$.
Output: $\sum_{i=0}^{n-1} A[i]$.

```
if (n = 1) then{
    return A[0];
```

```
}
else{
    return linearSum(A, n-1) + A[n-1];
}
```

L'albero della ricorsione associato a una generica istanza di taglia n:

- n nodi associati a `linearSum(A,j)`, $j = n-1, \ldots, 1$;
- Costo associato a ciascun nodo: $\Theta(1)$ operazioni (esclude quello delle chiamate ricorsive)-
  $\implies$ Ogni istanza di taglia n richiede $\Theta(n)$ operazioni.
  $\implies t_{\text{linearSum}}(n) \in \Theta(n)$ è la complessità al caso pessimo.

2.5.7.1.2. Complessità di `reverseArray(A,i,j)`

Algoritmo `reverseArray(A,i,j)`
Input: array A, indici $i, j \geq 0$.
Output: array A con gli elementi in $A[i \div j]$ ribaltati.

```
if(i < j) then{
    swap(A[i], A[j]);
    reverseArray(A, i+1, j-1);
}
return
```

L'albero della ricorsione associato a una generica istanza di taglia n $(n = j - i + 1)$:

- $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ nodi associati;
- Costo associato a ciascun nodo: $\Theta(1)$ operazioni (esclude quello delle chiamate ricorsive).
  $\implies$ Ogni istanza di taglia n richiede $\Theta(n)$ operazioni.
  $\implies t_{\text{reverseArray}}(n) \in \Theta(n)$ è la complessità al caso pessimo.

2.5.7.2. Calcolo efficiente di potenze

Dato $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$ intero, calcolare $p(x,n) = x^n$.
È fondamentale osservare che

$$p(x,n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ x \cdot p\left(x, \frac{n-1}{2}\right)^2 & n > 0 \text{ dispari} \\ p\left(x, \frac{n}{2}\right)^2 & n > 0 \text{ pari} \end{cases}$$

Algoritmo `power(x,n)`
Input: $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$.
Output: $p(x,n)$.

```
if(n = 0) then{
     return 1;
}
if(n è dispari) then{
     y <- power(x, (n-1)/2);
     return x*y*y;
}
else{
     y <- power(x, n/2);
     return y*y;
}
```

2.5.7.2.1. Complessità di `power(x,n)`

Supponiamo $n \geq 1$ (consideriamo n come taglia dell'istanza):

- Alla i-esima chiamata ricorsiva l'algoritmo viene invocato per un esponente $n_i \leq \frac{n}{2^i}$. Di conseguenza l'albero della ricorsione avrà $O(\log n)$ nodi;
- Ogni invocazione di `power` esegue $\Theta(1)$ operazioni, esclusa l'eventuale chiamata ricorsiva. Quindi il costo associato a ciascun nodo è $\Theta(1)$.
  $\implies t_{\text{power}}(n) \in O(\log n)$.

2.5.7.2.2. Applicazione di `power` al calcolo di $F(n)$

Il seguente algoritmo efficiente sfrutta la formula $F(n)) \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$ e l'algoritmo `power` visto in precedenza:

Algoritmo `powerFib(n)`
Input: intero $n \geq 0$.
Output: $F(n)$.

```
φ <- ((1 + sqrt{5})/2);
φ^ <- ((i - sqrt{5})/2);
return (power(φ,n) - power(φ^, n))/sqrt{5};
```

Da quanto provato per `power`, otteniamo che la complessità di `powerFib` è $O(\log n)$.

2.5.8. Correttezza di algoritmi ricorsivi

Per provare la correttezza (o una qualsiasi proprietà) di un algoritmo ricorsivo A si ricorre all'induzione.

Sia n la taglia dell'istanza:

1. Si dimostra la correttezza per i casi vase $n \in [n_0, n_0 + k]$;
2. Supponendo che A risolva correttamente tutte le istanze di taglia $m \in [n_0, n]$, per un qualche $n \geq n_0 + k$, si dimostra che esso risolve correttamente tutte le istanze di taglia $n + 1$.

2.5.8.1. Correttezza di `linearSum(A,n)` per $n \geq 1$

Caso base ($n = 1$): correttezza banale.
Passo induttivo: Fisso $n \geq 1$ arbitrario.
Ipotesi induttiva: `linearSum(A,j)` sia corretto $\forall A,\ \forall 1 \leq j \leq n$.
Considero `linearSum(A,n+1)` con A array di $\geq n+1$ elementi:
`linearSum(A,n+1)` restituisce $\text{linearSum}(A, n) + A[n] = \sum_{i=0}^{n-1} A[i] + A[n] = \sum_{i=0}^{n} A[i]$ per ipotesi induttiva.
$\implies$ Il valore restituito è corretto.

> **Riepilogo sulle nozioni di base**
>
> - Nozioni di: problema computazionale, algoritmo (che risolve un problema computazionale), taglia dell'istanza, struttura dati;
> - Specifica di un algoritmo tramite pseudocodice;
> - Complessità al caso pessimo di un algoritmo:
>   - Definizione;
>   - Analisi asintotica espressa tramite ordini di grandezza ($O(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$);
> - Tecniche di dimostrazione: esempio, controesempio, per assurdo, induzione;
> - Invarianti e loro uso per provare la correttezza di cicli;
> - Algoritmi ricorsivi e loro analisi:
>   - Complessità: tramite l'albero della ricorsione o tramite guess e induzione;
>   - Correttezza: tramite induzione.

[lezione 07 & 08] - svolgimento esercizi

3. Ripasso di Java

Per scrivere un programma stand-alone, chiamato `MyProgram.java` è necessario che la `public class` abbia lo stesso nome del file e che abbia il metodo main, dal quale inizia l'esecuzione.

```
import … ; // import a package or a class
public class MyProgram {
     public static void main(String[] args) {
          /*...*/ // corpo del metodo main
     }
     /* eventuali altri metodi */
}
```

Per compilare il programma si usa il comando `javac MyProgram.java` da terminale, che crea un *bytecode* `MyProgram.class` eseguibile sulla *Java Virtual Machine* (JVM). Per eseguirlo si usa il comando `java MyProgram`, che richiede che la directory corrente sia nel `CLASSPATH`, altrimenti si usa `java -cp - MyProgram`.
In alternativa, si può usare in *Integrated Development Environment* (IDE), come IntelliJ IDEA, Eclipse, Jbuilder.

3.1. Caratteristiche di Java e dell'approccio Object-Oriented

Le caratteristiche principali sono la modularità, l'astrazione e incapsulamento (information hiding) e l'ereditarietà (Inheritance).

3.1.1. Modularità

Le classi vengono viste come un insieme di oggetti che interagiscono insieme; Main è la classe principale, mentre le altre rappresentano tipi di oggetti. Un'*applicazione* è un insieme di *oggetti interagenti*.
Un *oggetto* è un'*istanza di una classe* che definisce avriabili di istanza (in inglese "instance variables" o "fields") e metodi ("methods").
Per definire una variabile `i` di tipo `Integer`, alla quale assegno un oggetto di tipo `Integer`, dopo averlo creato, scrivo: `Integer i = new Integer(5);`.

3.1.2. Astrazione e incapsulamento (information hiding)

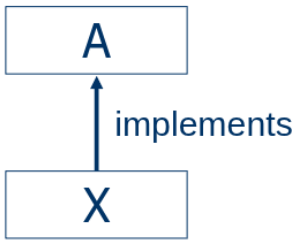
Con l'*information hiding* si astrae la *specifica* delle funzionalità, separandola dalla loro *implementazione*, quindi si possono usare le funzionalità solamente in base alla specifica.
Visto che l'implementazione delle funzionalità è nascosta, gli errori sono più confinati (si ha *robustezza*) e c'è la possibilità di cambiare l'implementazione senza cambiare la specifica (si ha *adattabilità*).
Nel caso delle strutture dati, questo approccio dà origine alla nozione di *Abstract Data Type* (ADT), che in Java si realizza tramite l'utilizzo di interfacce, classi e classi astratte.

> Un'*interfaccia* è un insieme di dichiarazioni di metodi senza corpo e di costanti.

> Una *classe* è la definizione di costanti, variabili e metodi con corpo.

> Una *classe astratta* è una via di mezzo tra un'interfaccia e una classe (ci sono alcuni metodi senza corpo).

```
public interface A {
     public int a1();
     public boolean a2();
}
public class X implements A {
     public int a1() { /*...*/ }
     public boolean a2() { /*...*/ }
     public void b() { /*...*/ }
}
A var1 = new A(); //NO!
A var1 = new X(); //OK!
```



Ad esempio: `java.lang.String implements java.lang.Comparable`.

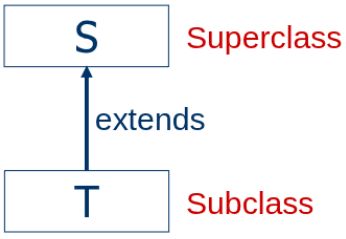
> ⚠ **Attenzione**

Non si può creare un oggetto di un'interfaccia, sono legati solo alle classi.

3.1.3. Ereditarietà (inheritance)

Con l'ereditarietà si *importano* in una classe le caratteristiche di un'altra classe, aggiungendone di nuove e/o specializzandone alcune. In Java una *sottoclasse estende una superclasse*

```
public class S {
     public void a() { /*...*/ }
     public void b() { /*...*/ }
     public int c() { /*...*/ }
}
public class T extends S {
     /* inherits b() and c() */
     float y; // added
     public void a() { /*...*/ } // specialized
     public boolean d() { /*...*/ } // added
}
```



Osservazione

Ogni classe estende implicitamente `java.lang.Object`.

3.1.3.1. Ereditarietà multipla per interfacce

Un'Interfaccia (*non* una classe) può estender più interfacce.

```
public interface A { /*...*/ }
public interface B { /*...*/ }
public interface C extends A, B { /*...*/ }
```

Osservazione

`A` e `B` non possono contenere metodi con la stessa firma.

```
public class D implements A, B {
     // deve implementare tutti i metodi di A e B
}
public class D implements C {
     // deve implementare tutti i metodi di A e B
     // e quelli (eventuali) aggiuntivi di C
}
```

3.2. Programmazione generica (generics)

La programmazione generica è un tipo di polimorfismo, introdotto da Java SE5. Permette l'uso di *variabili di tipo* nella definizione di classi, interfacce e metodi. Si parla in questo caso di *classi/interfacce generiche* e *metodi generici*.

Nel creare un'istanza di una classe generica si specifica il tipo (*actual type*) da sostituire con la variabile di tipo. L'actual tupe non può essere un tipo primitivo (come per esempio un intero), ma deve essere una classe che estende `Object`.
Nell'invocazione di un metodo generico, la sostituzione della variabile di tipo con un actual type è fatta automaticamente in base ai parametri passati.
L'uso delle classi/interfacce generiche evita il ricorso a parametri di tipo `Object` e l'uso frequente di cast.

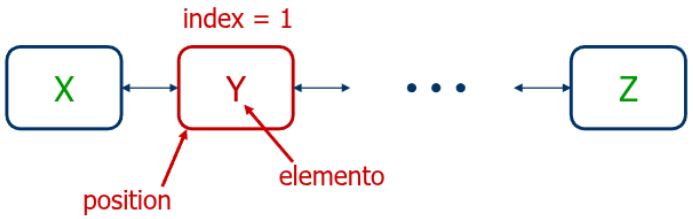
```
public interface MyInterface<E> {
     public int size();
     public boolean method1 (E var1);
     public E method2 ();
}
public class MyClass<E> implements MyInterface<E>{
     E var;
     public int size() { /*...*/ };
     public boolean method1 (E var1) { /*...*/ };
     public E method2 () { /*...*/ };
     public E method3 (float var2) { /*...*/ };
}
MyInterface<Integer> x = new MyClass<Integer>();
```

```
public class MyClass1<E extends S> { /*...*/ } // E può essere sostitutito solo da oggetti di tipo che estende/implementa la classe/interfaccia S
```

3.3. ADT elementari

3.3.1. Lista (list)

> Una *lista* (*list*) è una collezione di elementi organizzati secondo un ordine lineare tale per cui è identificabile il primo elemento, il secondo e così via fino all'ultimo.
>
> - In una lista *index-based* un elemento può essere acceduto tramite un *indice intero* che indica il numero di elementi che lo precedono;
> - In una lista *position-bases* ogni elemento è contenuto in un contenitore detto *nodo* (*position*).



3.3.1.1. Lista index-based

```
public interface List<E> {
    /** Returns the number of elements in this list. */
    public int size();
    /** Returns whether the list is empty. */
    public boolean isEmpty();
    /** Inserts an element e to be at index i, shifting all elements after this. */
    public void add(int i, E e);
    /** Returns the element at index i, without removing it. */
    public E get(int i);
    /** Replaces the element at index i with e, returning the previous element at i. */
    public E set(int i, E e);
    /** Removes and returns the element at index i shifting left subsequent elements. */
    public E remove(int i)
}
```

Osservazione

I metodi `public int size()` e `public boolean isEmpty()` si troveranno in ogni ADT che vedremo.

Si implementa questo tipo di lista *tramite array*. I metodi possono essere implementati con complessità $O(1)$, tranne `add` e `remove`, che richiedono complessità $O(n)$ (dove n è il numero di elementi nella lista).

Osservazione

Nel caso in cui l'array sia pieno, l'inserimento di un elemento x è implementato creando un nuovo array di capacità maggiore (solitamente doppia), trasferendo tutte le entry dal vecchio al nuovo array, e inserendo l'elemento x nel nuovo array.

3.3.1.2. Lista position-based

```
public interface Position<E> {
    /** Return the element stored at this position */
    public E getElement();
}

public interface PositionalList<E> {
    /** Returns the number of elements in this list. */
    public int size();
    /** Returns whether the list is empty. */
    public boolean isEmpty();
    /** Returns the first node in the list. */
    public Position<E> first();
    /** Returns the last node in the list. */
    public Position<E> last();
    /** Returns the node after a given node in the list. */
    public Position<E> after(Position<E> p);
    /** Returns the node before a given node in the list. */
    public Position<E> before(Position<E> p);
    /** Inserts an element at the front of the list. */
    public void addFirst(E e);
    /** Inserts and element at the back of the list. */
    public void addLast(E e);
    /** Inserts an element after the given node in the list. */
    public void addAfter(Position<E> p, E e);
```

```
    /** Inserts an element before the given node in the list. */
    public void addBefore(Position<E> p, E e);
    /** Removes a node from the list, returning the element stored there.
*/
    public E remove(Position<E> p);
    /** Replaces the element stored at the given node, returning old
element. */
    public E set(Position<E> p, E e);
}
```

Si implementa questo tipo di lista tramite *doubly-linked* list.
Ogni nodo diventa un oggetto a sé, con variabili di istanza che "puntano" al predecessore e al successore. L'inizio e la fine della lista sono delimitati da dei *nodi sentinella*.
I metodi possono essere implementati con complessità $O(1)$, ma la lista può essere scandita solo sequenzialmente,

> **Osservazione**
>
> È possibile implementare una lista index-based tramite souble-linked list, o una lista position-based tramite array, ma con scarsi vantaggi.

3.3.2. Pila (stack) e coda (queue)

> Una *pila* (*stack*) è una collezione di elementi inseriti e rimossi in base al principio *Last-In First-Out* (LIFO).

```
public interface Stack<E> {
    /** Returns the number of elements in this list. */
    public int size();
    /** Returns whether the list is empty. */
    public boolean isEmpty();
    /** Inserts an element e at the top of the stack. */
    public void push(E e);
    /** Returns the element at the top of the stack without removing it.
*/
    public E top();
    /** Removes and returns the element at the top of the stack. */
    public E pop();
}
```

> Una *coda* (*queue*) è una collezione di elementi inseriti e rimossi in base al principio *First-In First-Out* (FIFO).

```
public interface Queue<E> {
    /** Returns the number of elements in this list. */
    public int size();
    /** Returns whether the list is empty. */
    public boolean isEmpty();
    /** Inserts an element e at the rear of the queue. */
    public void enqueue(E e);
    /** Returns but does not remove the first element of the queue (null
if empty). */
    public E first();
    /** Removes and returns the first element of the queue (null if
empty). */
    public E dequeue();
}
```

Entrambe le strutture dati possono essere implementate tramite *doubly-linked list*. La pila effettua inserimento (*push*) e rimozione (*pop*) in testa alla lista, mentre la coda effettua l'inserimento (*enqueue*) in coda e la rimozione (*dequeue*) in testa alla lista. Tutti i metodi possono essere implementati con complessità $O(1)$ ma, a differenza della lista, non si ha accesso a element intermedi a meno di no rimuovere quelli che li precedono nell'ordine di accesso.

> **Osservazione**
>
> È possibile usare anche una *singly-linked list*.

3.4. Collection framework di Java

> "*Collection*" è un termine generico per indicare una struttura dati.

> Il *collection framework di Java* è un'architetture unificata di strutture dati e algoritmi implementato nel package `java.util`.

Esso contiene:

- *interfacce* di varie collection;
- *classi* che implementano le interfacce;

- *algoritmi polimorfi* per operare su collection (*metodi statici della classe Collections*), come ad esempio il sorting;
- ampio uso della *programmazione generica*.

Il package `java.util` contiene diverse implementazioni di Liste, Pile e Code. Tra esse si segnalano le seguenti:

- Lista
  - Interfaccia: `List`;
  - Classe `ArrayList`: implementazione index-based;
  - Classe `LinkedList`: implementazione sia index-based che position-based. Tuttavia l'implementazione position-based non utilizza esplicitamente il concetto di position ma si basa sull'uso di iteratori.
- Pila e Coda
  - Interfaccia unificata: `Deque` (Double-ended queue);
  - Classe `LinkedList`: implementazione unificata di Pila e Coda (e Lista);
  - Classe Stack: implementazione della Pila basata su Vector. Si consiglia tuttavia l'uso di classi, come `LinkedList`, che implementano l'interfaccia `Deque` che è più completa.

Info

I nomi di alcuni metodi differiscono da quelli riportati precedentemente che seguono il libro di testo.

Riepilogo sul ripasso di Java

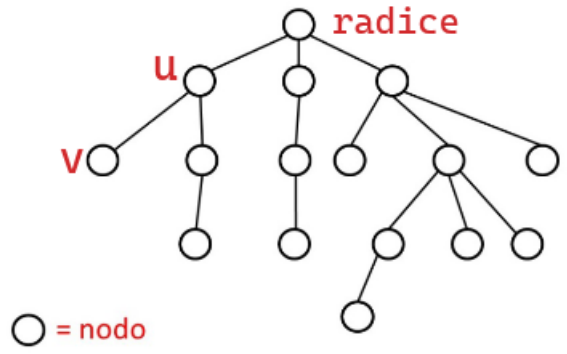
- Programma stand-alone;
- Caratteristiche di Java e dell'approccio Object-Oriented;
- ADT elementari:
  - Lista (index-based e position-based);
  - Pila
  - Coda
- Collection framework di Java, con particolare attenzione alle interfacce e classi che implementano Lista, Pila e Coda.

---

4. Alberi

4.1. Alberi generali

Un *albero* è una collezione di *nodi* caratterizzata da una *struttura gerarchica* che si dipana da un nodo *radice* tramite relazioni di tipo padre-figlio.



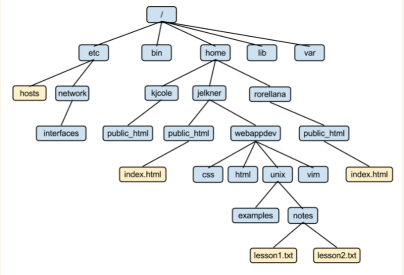
Nel disegno u è padre di v, v è figlio di u.

Osservazioni

Le relazioni padre-figlio costituiscono un insieme di collegamenti minimali che introducono un legame (connessione) tra tutti i nodi.
Una lista è un caso estremo di albero con una struttura gerarchica lineare.

Campi applicativi

1. Strutture dati: mappe, priority queue;
2. Esplorazione risorse: filesystem, siti di e-commerce;



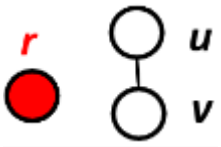
3. Sistemi distribuiti e reti di comunicazione: sincronizzazione, broadcast, gathering;
4. Analisi di algoritmi: albero della ricorsione;
5. Classificazione: alberi di decisione;
6. Compressione di dati (codici di Huffman);

7. Biologia computazionale: alberi filogenetci.

4.1.1. Definizioni e proposizioni

> Un *albero radicato* (*rooted tree*) T è una collezione di nodi che, se non è vuota, soddisfa le seguenti proprietà:
>
> - $\exists$ un nodo speciale $r \in T$ (r è chiamato *radice*);
> - $\forall v \in T, v \neq r : \exists! u \in T$: u è padre di v (v è figlio di u);
> - $\forall v \in T, v \neq r$: risalendo di padre in padre si arriva a r (ovvero ogni nodo è discendente dalla radice).

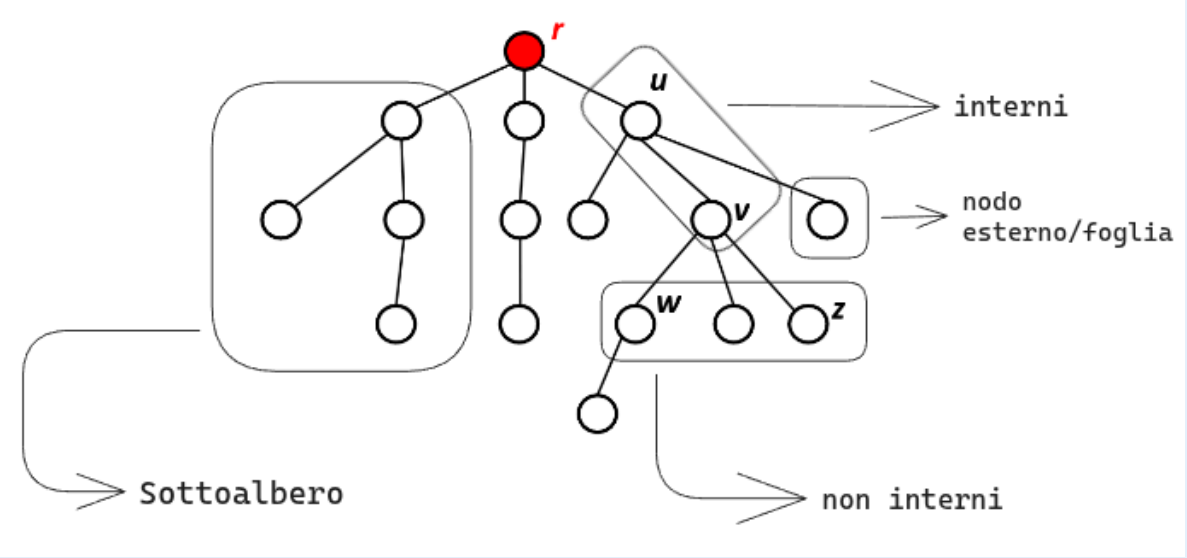
Nel libro di testo la terza condizione manca. Senza questa, la seguente collezione con u padre di v e v padre di u sarebbe un albero, che ha poco senso. Questa collezione piuttosto è una foresta di alberi.



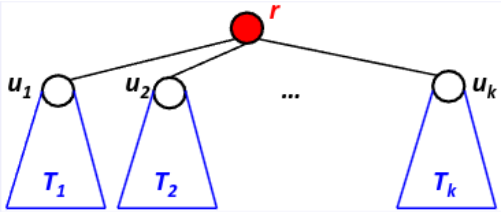
Lezione 10

Terminologia

- x è *antenato* di y se $x = y$ oppure x è antenato del padre di y;
- x è *discendente* di y se y è antenato di x;
- I *nodi interni* sono quei nodi con almeno 1 figlio;
- I *nodi esterni* (o *foglie*) sono i nodi senza figli;
- T_v è un albero formato da tutti i discendenti di v (quindi include v);
- T è un *albero ordinato* se per ogni nodo interno $v \in T$ è definito un ordinamento lineare tra i figli $u_1, u_2, \ldots, u_k$ di v.



Si può definire ricorsivamente cos'è un albero radicato.

> Un *albero radicato* T è una collezione di nodi che, se non è vuota, risulta partizionata in questo modo:
>
> $$T = \{r\} \cup T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$$
>
> per un qualche $k \geq 0$, dove:
>
> - r è radice con figli $u_1, u_2, \ldots, u_k$;
> - $\forall i, 1 \leq i \leq k$: T_i è un albero non vuoto con radice u_i $(\implies T_i \equiv T_{u_i})$.
>
> 
>

Chiaramente, le due definizione di albero radicato (ricorsiva e non) sono equivalenti.

> Si definisce la *prodondità* di un nodo v in un albero T in due modi alternativi:
>
> 1. $\text{depth}_T(v) = |\text{antenati}(v)| - 1$;
> 2. - Se $v = r$ radice $\implies \text{depth}_T(v) = 0$;
>   - Altrimenti $\text{depth}_T(v) = 1 + \text{depth}_T(\text{padre}(v))$.

> Il *livello* è l'insieme dei nodi a profondità i $(froalli \geq 0)$.

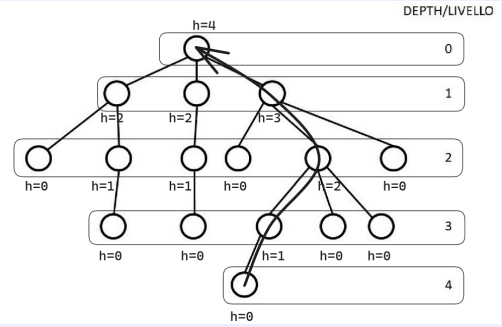
> L'*altezza* di un nodo v in un albero T $(\text{height}_T(v))$ si definisce come:
>
> - Se v è foglia $\implies \text{height}_T(v) = 0$;

- Altrimenti $\text{height}_T(v) = 1 + \max_{w:w \text{ figlio di } v}(\text{height}_T(w))$.

L'*altezza di un albero* T si definisce $\text{height}(T) = \text{height}_T(r)$, con r radice di T.

Proposizione

Dato un albero T, $\text{height}(T) = \max_{v \in T: v \text{ foglia}}(\text{depth}_T(v))$.

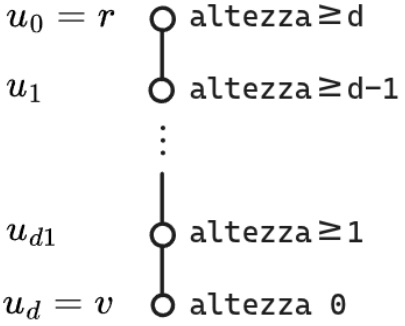


4.1.1.1. Dimostrazione

Sia h l'altezza dell'albero e $d = \max_{v \in T: v \text{ foglia}}(\text{depth}_T(v))$. Proviamo $h \geq d$ e $h \leq d$.

4.1.1.1.1. $h \geq d$

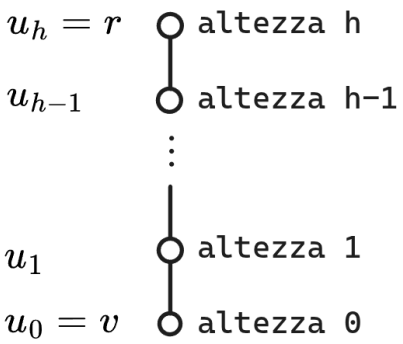
Sia v una foglia a profondità d e sia r la radice di T. allora esiste un percorso da v a r.



È immediato vedere che
$\text{height}_T(u_i) \geq d - i \forall d \geq i \geq 0 \implies \text{height}_T(r) \geq d \implies h \geq d$.

4.1.1.1.2. $h \leq d$

Per assurdo, se $h \geq d$ deve esistere un percorso in T dalla radice r a una foglia v.



In questo caso, la foglia v ha h antenati diversi da v, che sono $u_1, u_2, \ldots, u_h$, e quindi $\text{depth}_T(v) = h > d$, che contraddice il fatto che d è la massima profondità di una foglia.

□

4.1.2. Interfacce

4.1.2.1. Iterator e Iterable

Prima di definire l'interfaccia `Tree` definiamo due interfacce.

> `Iterator` è un "cursore" che permette di enumerare (scan) gli elementi di una collezione.

```
public interface Iterator<E> {
    /** Returns true if the scan of the collection is not over */
    boolean hasNext();
    /** Returns the next element in the collection */
    E next();
}
```

> `Iterable` è una collezione che rende disponibile un iteratore ai suoi elementi.

```
public interface Iterable<E> {
    /** Returns an iterator of the collection */
    Iterator<E> iterator()
}
```

4.1.2.1. Tree

L'interfaccia `Tree` rappresenta l'implementazione tipica di un albero.
Notare che il puntatore alla radice è l'unico punto di accesso e che ogni nodo è un oggetto a sé stante (ad esempio di una classe che

implementa `Position`) e offre metodi per accedere al padre e ai figli.

```
public interface Tree<E> extends Iterable<E> {
     /** Returns the number of positions in the tree */
     int size();
     /** Returns true if the tree contains no positions */
     boolean isEmpty();
     /** Returns the Position of the root (or null if empty)*/
     Position<E> root();
     /** Returns the Position of p's parent (or null if p is the root) */
     Position<E> parent(Position<E> p);
     /** Returns an iterable containing p's children */
     Iterable<Position<E>> children(Position<E> p);
     /** Returns the number of children of p */
     int numChildren(Position<E> p);
     /** Returns true if p is internal */
     boolean isInternal(Position<E> p);
     /** Returns true if p is external */
     boolean isExternal(Position<E> p);
     /** Returns true if p is root */
     boolean isRoot(Position<E> p);
     /** Returns an iterator to all element in the tree */
     Iterator<E> iterator();
     /** Returns an iterable containing all positions in the tree */
     Iterable<Position<E>> positions();
}
```

Osservazioni

`iterator()` deriva dal fatto che `Tree<E>` estende `Iterable<E>` (dove `E` rappresenta il tipo dei dati contenuti nei nodi).
Assumiamo complessità $\Theta(1)$ per tutti i metodi, tranne `children`, `iterator` e `positions`, e che sia possibile enumerare i figli di un nodo (tramite `children`) in tempo proporzionale al loro numero (quindi ogni figlio è enumerato in tempo costante).

4.1.3. Calcolo della profondità di un nodo (algoritmo ricorsivo)

Algoritmo `depth(v)`
Input: $v \in T$.

Output: profondità di v in T.

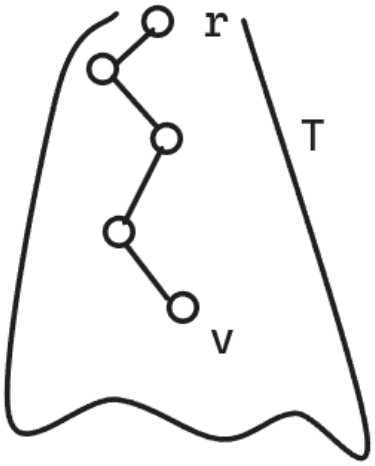
```
if(T.isRoot(v)) then{
     return 0; //Caso base
}
else{
     return 1 + depth(T.parent(v));
}
```

> **Osservazione**
>
> Come nel libro di testo, definiamo gli algoritmi di base per gli alberi come metodi di una classe astratta che implementa l'interfaccia `Tree`, non specificando l'albero T come parametro in quanto esso è associato implicitamente all'istanza (`this`) da cui si invoca il metodo.

4.1.3.1. Complessità di `depth`

Studiamo l'albero della ricorsione associato a `depth(v)`, $v \in T$.
Se d_v è la profondità di v:

- Vi sono $d_v + 1$ invocazioni ricorsive di `depth`, una per ogni antenato di v;
- Avvengono $\Theta(1)$ operazioni in ciascuna invocazione ricorsiva.
  $\implies$ Vi sono $d_v + 1$ nodi dell'albero della ricorsione di costo $\Theta(1)$ ciascuno.
  $\implies$ Complessità di `depth(v)` $\in \Theta(d_v + 1)$.



> **Osservazione**

Il "$+1$" è giustificato dal fatto che se $d_v = 0$ (ovvero v è la radice), comunque `depth(v)` richiede $\Theta(1)$ operazioni; *tuttavia* per semplificare la notazione scriveremo $\Theta(d_v)$ intendendo $\Theta(d_v + 1)$.

4.1.3.2. Diversa taglia dell'istanza

Se volessi esprimere la complessità in funzione di $n = |T|$?

Usando la profondità d come taglia dell'istanza, le possibili istanze di taglia sono tutti i nodi di tutti i possibili alberi T (di qualsiasi cardinalità $|T|$) $\implies$ La complessità al caso pessimo è $\Theta(d)$.

Usando il numero di nodi n come taglia dell'istanza, le possibili istanze di taglia n sono tutti i nodi appartenenti ad alberi T, con $|T| = n$ $\implies$ La complessità al caso pessimo è $\Theta(n)$.

4.1.3.2.1. Dimostrazione di complessità

L'upper bound è $O(n)$ perché in un albero con n nodi ogni nodo v ha profondità $len \implies$ `depth(v)` richiede $O(n)$ operazioni.
Il lower bound è $\Omega(n)$ perché in un albero che è una catena di n nodi, l'ultimo nodo della catena è una foglia v di profondità $n-1$, e quindi `depth(v)` richiede $\Omega(n)$ operazioni.

4.1.3.3. Versione iterativa

Algoritmo `depthITER(v)`
Input: $v \in T$.
Output: profondità di v in T.

```
d <- 0;
u <- v;
while(!T.isRoot(u)) do{
     u <- parent(u);
     d <- d+1;
}
return d;
```

La sua complessità è $\Theta(d_v)$.

4.1.4. Calcolo dell'altezza di un nodo

Algoritmo `height(v)`
Input: $v \in T$.
Output: altezza di v in T.

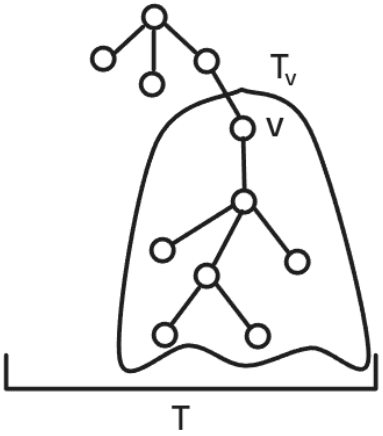
```
h <- 0;
foreach w ∈ T.children(v) do{
     h <- max{h, 1 + height(w)};
}
return h;
```

Tecnicamente, `T.children(v)` è una collezione "Iterable" che contiene i figli di v. Con "`foreach w ∈ T-children(v)`" si enumerano i figli di v, ciascuno dei quali viene generato in tempo $\Theta(1)$.

4.1.4.1. Complessità di `height`

Studiamo l'albero della ricorsione associato a `height(v)` con $v \in T$:

- Ha un nodo (cioè un'invocazione ricorsiva) per ogni $u \in T_v$;
- Il costo associato al nodo $u \in T_v$ è $\Theta(c_u + 1)$, dove c_u è il numero di figli di u
  $\implies$ La complessità di `height(v)` $\in \Theta\left(\sum_{u \in T_v}(c_u + 1)\right)$



Sia n_v il numero di nodi in T_v (quindi il numero di discendenti di v). Riscriviamo $\sum_{u \in T_v}(c_u + 1)$ in funzione di n_v:
$\sum_{u \in T_v}(c_u + 1) = \left(\sum_{u \in T_v} c_u\right) + \sum_{u \in T_v} 1 = \left(\sum_{u \in T_v} c_u\right) + n_v$.

> **Proposizione (8.4 del libro di testo)**
>
> $\sum_{u \in T_v} c_u = n_v - 1$

$\implies \sum_{u \in T_v}(c_u + 1) = 2n_v - 1$
$\implies$ La complessità di `height(v)` è $\Theta(n_v)$.

4.1.4.1.1. Dimostrazione della proposizione

In generale la relazione è vera perché ogni nodo di T_v, tranne v, è calcolato *esattamente* una volta in $\sum_{u \in T_v} c_u$ come figlio di suo padre. □

Dall'analisi fatta discende che la complessità per calcolare l'altezza di tutto l'albero T (invocando `height(r)` con r radice di T) è $\Theta(n)$, con $n = |T|$, quindi lineare nel numero di nodi dell'albero.

Lezione 11

4.1.5. Visite di alberi

> La *visita di un albero* T è la scansione sistematica di tutti i nodi di T che permette di eseguire una qualche operazione (*visita*) ad ogni nodo.

Rappresentano un *design pattern algoritmico* che può essere istanziato per il calcolo di valori e/o per impostazione di opportune variabili associate ai nodi.

Per gli alberi generali studieremo la visita in preorder e in postorder.

4.1.5.1. Preorder

> Una visita in *preorder* visita *prima il padre e poi (ricorsivamente) i sottoalberi radicati nei figli*.

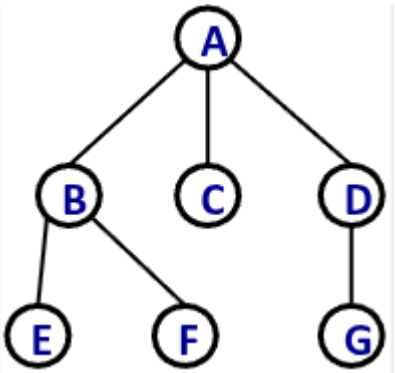
Con questa modalità, le operazioni svolte per un nodo possono dipendere da quelle svolte per i suoi antenati.

Algoritmo `preorder(v)`
Input: nodo $v \in T$.
Output: risultante dalla visita di T_v.

```
visita v;
foreach w ∈ T.cildren(v) do{
    preorder(w);
}
```

La *chiamata iniziale* da effettuare per visitare tutto T è `preorder(T.root())`.

Nel *caso base* v è una foglia (il ciclo `foreach` non esegue istruzioni, infatti v non ha figli).



Assumendo che `children()` esamini i figli da sinistra a destra, l'ordine della visita in preorder per l'albero sovrastante è A, B, E, F, C, D, G.

4.1.5.2. Postorder

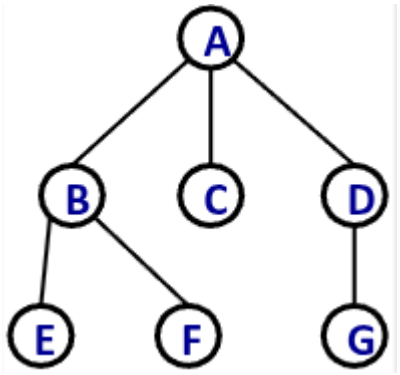
> Una visita in *postorder* visita *prima (ricorsivamente) i sottoalberi radicati nei figli, poi il padre*.

Con questa modalità, le operazioni svolte per un nodo possono dipendere da quelle svolte per i suoi discendenti.

Algoritmo `postorder(v)`
Input: nodo $v \in T$.
Output: risultante dalla visita di T_v.

```
foreach w ∈ T.children(v) do{
    postorder(w);
}
visita v;
```

La *chiamata iniziale* da effettuare per visitare tutto T è `postorder(T.root())`.
Nel *caso base* v è una foglia (il ciclo `foreach` non esegue istruzioni, infatti v non ha figli).



Assumendo che `children()` esamini i figli da sinistra a destra, l'ordine della visita in preorder per l'albero sovrastante è E, F, B, C, G, D, A.

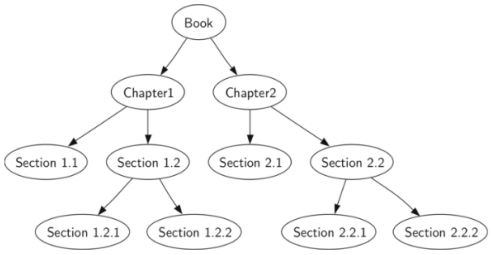
> Sia T un albero ordinato e siano $u, v \in T$ due nodi allo stesso livello.
> Diciamo che u è *a sinistra* di v (e quindi v è a destra di u) se u viene prima di v nella visita in *preorder*.

Osservazione

La definizione è coerente con il modo di disegnare gli alberi.

4.1.5.3. Esempi

Quale visita è opportuno utilizzare per stampare l'indice di un libro, rappresentato tramite il seguente albero?



Quella corretta è la visita in preorder, infatti la sequenza di visita è "Book: Chapter1, Section 1.1., Section 1.2, Section 1.2.1, Section 1.2.2, Chapter 2, Section 2.1, Section 2.2, Section 2.2.1, Section 2.2.2".

Un esempio analogo è rappresentato dalla struttura di un file system come sequenza di cartelle e file.

4.1.5.3.1. Esempio di algoritmo basato sulla visita in preorder (`allDepths`)

Vogliamo progettato un algoritmo `allDepths` che, dato un albero T, calcoli la profondità di ogni nodo $v \in T$ e la memorizzi in un campo `v.depth`.

Proviamo ad adattare la visita in preorder, definendo la visita di un nodo v in questo modo: se v è radice si imposta la profondità a zero, altrimenti si imposta la profondità a $1+$ la profondità del padre, che è già impostata, dato che il padre è già stato visitato.

Algoritmo `allDepths(T,v)`
Input: $v \in T$, e `u.depth` impostato correttamente per u padre di v.
Output: `z.depth` impostato correttamente $\forall z \in T_v$.

```
//visita
if(T.isRoot(v)) then{
     v.depth <- 0;
}
else{
     v.depth(v) <- 1 + T.parent(v).depth;
}

//visita ricorsiva dei sottoalberi radicati nei figli
forall w ∈ T.children(v) do{
     allDepths(w);
}
```

Osservazioni

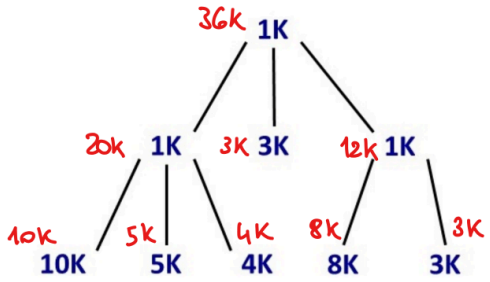
Per impostare il campo `depth` per tutti i nodi di T invoco `allDepths(T, T.root())`.
`allDepths` non restituisce alcun valore (non c'è un `return`), ma modifica i modi dell'albero che si considerano come oggetti globali che sopravvivono all'esecuzione dell'algoritmo.

4.1.5.3.2. Esempi di algoritmi basati sulla visita in postoder

L'algoritmo `height` è un esempio di visita in postorder dato che l'altezza di un nodo viene calcolata solo dopo aver calcolato quelle dei figli.

Si consideri un file system gerarchico in cui la struttura è rappresentata da un albero T dove i nodi interni corrispondono alla cartelle e i nodi foglia ai file. Ogni nodo v ha un campo `v.loc-size` che memorizza lo spazio occupato dal nodo, escludendo quello dei discendenti.
Progettare un algoritmo `diskSpace` che dato un tale T calcoli, per ogni nodo $v \in T$, lo spazio aggregato occupato dai suoi discendenti e

lo memorizzi in un campo `v.aggr-size`.



Nell'esempio sovrastante sono rappresentati in blu i valori dei campi `loc-size`, mentre in rosso quelli dei campi `aggr-size` alla fine dell'algoritmo.

Algoritmo `diskSpace(T,v)`
Input: $v \in T$ e `u.loc-size` impostato $\forall u \in T$.
Output: `v.aggr-size`, `z.aggr-size` impostato correttamente $\forall z \in T_v$.

```
v.aggr-size <- v.loc-size;
foraeach w ∈ T.children(v) do{
    v.aggr-size <. v-aggr-size + diskSpace(T,w);
}
return v.aggr-size;
```

Alternativamente si può scegliere di non far restituire `v.aggr-size` (con input e output analoghi):

```
v.aggr-size <- v.loc-size;
foraeach w ∈ T.children(v) do{
    diskSize(T,w);
    v.aggr-size <. v-aggr-size + w.aggr-size;
}
```

In questa versione la chiamata ricorsiva è isolata, infatti non restituisce nessun valore.

Osservazioni per la scrittura di algoritmi ricorsivi

- Un algoritmo ricorsivo può utilizzare sia *variabili globali* che sopravvivono a tutta l'esecuzione dell'algoritmo, sia *variabili locali alle singole invocazioni* che rimangono in vita solo durante l'esecuzione dell'invocazione corrispondente.

- Gli eventuali valori restituiti dalle invocazioni ricorsive (se ce ne sono) devono essere "utilizzati" in qualche modo, altrimenti vanno perduti.

4.1.5.5. Complessità

4.1.5.5.1. Complessità di `preorder(T.root())`

Sia n il numero di nodi di T. Consideriamo l'albero della ricorsione associato all'esecuzione di `preorder(T.root())`:

- Ha n nodi associati alle invocazioni ricorsive che sono *esattamente* una per ogni nodo di T;
- Il costo del nodo associato all'invocazione di `preorder(v)`, con $v \in T$ generico, è $\Theta(t_v + c_v + 1)$, dove t_v è il costo di "visita v" e c_v è il numero di figli di v.
  $\implies$ La complessità di `preorder(T.root())` è $\Theta\left(\sum_{v \in T}(t_v + c_v + 1)\right) = \Theta\left(\left(\sum_{v \in T} t_v\right) + \left(\sum_{v \in T}(c_v + 1)\right)\right) = \Theta\left(n + \sum_{v \in T} t_v\right)$.

> **Osservazione**
>
> Si ha la stessa complessità per la visita in `postorder` e `inorder` (per gli alberi binari).
> Dall'analisi discende che le visite consentono di enumerare tutti i nodi di T in tempo lineare in $|T|$ e, se $t_v \in \Theta(1)$, la complessità totale sarebbe $\Theta(n = |T|)$.

4.1.5.5.2. Complessità di `allDepths(T, T.root())`

`allDepths(T, T.root())` ha lo stesso schema della visita in `preorder` e $t_v \in \Theta(1) \forall v \in T$, quindi la complessità totale è $\Theta(n)$, dove $n = |T|$.

4.1.5.5.3. Complessità di `diskSum(T, T.root())`

`diskSum(T, T.root())` ha lo stesso schema della visita in `postorder` e $t_v \in \Theta(c_v + 1)$, con c_v il numero di figli di v. Allora la complessità è $T\left(n + \sum_{v \in T} t_v\right) = \Theta\left(n + \sum_{v \in T}(c_{v+1})\right) = \Theta(n)$.

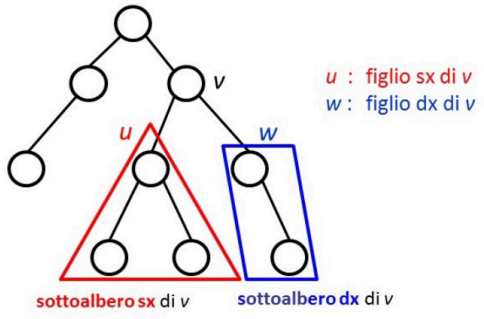
> **Riepilogo sugli alberi generali**
>
> - Definizione: albero, antenati, discendenti, sottoalbero, profondità di un nodo, altezza di un nodo, profondità di un nodo e di un albero;

- Relazione tra altezza di un albero e profondità delle foglie;
- Algoritmi per il calcolo della profondità e altezza di un nodo e dell'altezza di un albero;
- Visite: preorder, postorder e le loro applicazioni;
- Algoritmi di visita come template generali.

4.2. Alberi binari

> Per *arietà* di un albero si intende il *massimo numero di figli di un nodo interno*.

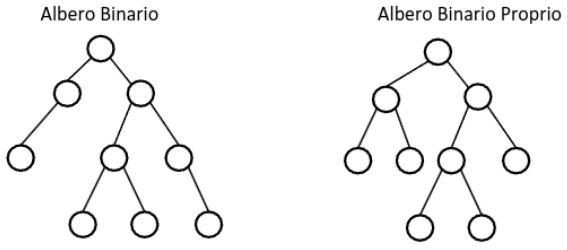
> Un *albero binario* T è un albero ordinato in cui:
>
> - Ogni *nodo interno ha* ≤ 2 *figli*;
> - Ogni nodo non radice è etichettato come *figli sinistro* (sx) o *destro* (dx) di suo padre;
> - Se ci sono entrambi i figli, il figlio sinistro viene prima del figlio destro nell'ordinamento dei figli di un nodo.



> Un *albero binario proprio* T è un albero binario tale che *ogni nodo interno ha* ***esattamente*** 2 *figli*.

Terminologia

In letteratura gli alberi *propri* ("proper" in inglese) sono anche chiamati *pieni* ("full" in inglese).



4.2.1. Interfaccia `BinaryTree`

```
public interface BinaryTree<E> extends Tree<E> {
    /** Returns the Position of p's left child (or null if it doesn't
exists) */
    Position<E> left(Position<E> p);
    /** Returns the Position of p's right child (or null if it doesn't
exists) */
    Position<E> right(Position<E> p);
    /** Returns the Position of p's sibling (or null if no sibling
exists) */
    Position<E> sibling(Position<E> p);
}
```

4.2.2. Proprietà

Sia T un albero binario proprio non vuota, dove $n = |T|$ è il numero di nodi in T, m (o n_E) è il numero di foglie in T, $n - m$ (o n_I) è il numero di nodi interni in T e h è l'altezza di T.

1. $m = n - m + 1$, ovvero le foglie sono uguali al numero di nodi interni più uno; ci permette di stabilire quanto spazio - al massimo - verrà occupato;
2. $h + 1 \leq m \leq 2^h$;
3. $h \leq n - m \leq 2^h - 1$;
4. $2h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$;
5. $\log_2(n+1) - 1 \leq h \leq \frac{n-1}{2}$.

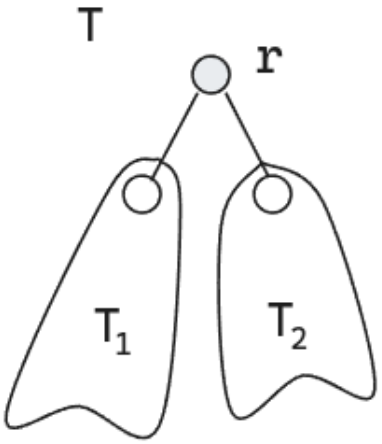
Lezione 12

4.2.2.1. Dimostrazioni

4.2.2.1.1. (1)

Proviamo la prima proprietà per induzione sull'altezza $h \geq 0$ di T.
Caso base: $h = 0 \implies T$ equivale a un singolo nodo $\implies n = 1$ e $m = 1 \implies \checkmark$.
Passo induttivo: Fisso $h \geq 0$ arbitrario.
Ipotesi induttiva: la proprietà (1) vale per tutti gli alberi binari propri di altezza $\leq h$.

Sia T un albero binario proprio di altezza $h + 1 \geq 1$, sia T_1 di altezza h_1 il sottoalbero con radice il figlio sinistro della radice di T, mentre T_2 di altezza h_2 quello del figlio destro.



Allora $h+1 = 1+\max\{h_1,h_2\} \implies h_1,h_2 \leq h \implies$ Per T_1 e T_2 vale l'ipotesi induttiva.

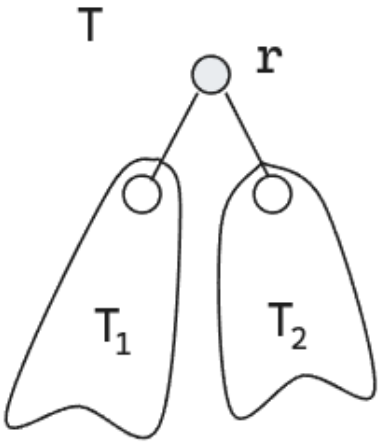
Sia m il numero di foglie di T, n il numero di nodi di T, m_i il numero di foglie di T_i, n_i il numero di nodi di T_i, $i = \{1,2\}$.
$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2 + 1$.
$m = m_1 + m_2 = (n_1 - m_1 + 1) + (n_2 + m_2 + 1) =$ per ipotesi induttiva:
$= (n_1 + n_2 + 1) - (m_1 + m_2) + 1 = n - m + 1$.
□

> **Osservazione**
>
> In un albero binario proprio T, dato che il numero di foglie è uguale al numero di nodi interni aumentato di uno, il numero totale di nodi è dispari.

4.2.2.1.2. (2)

Dimostriamo che $m \leq 2^h$ per induzione su $h \geq 0$.
Caso base: $h = 0 \implies T$ equivale a un singolo nodo $\implies m = 1 \implies$ ✓.
Passo induttivo: Fisso $h \geq 0$ arbitrario.
Ipotesi induttiva: la proprietà vale per tutti gli alberi binari propri di altezza $\leq h$.

Sia T un albero binario proprio di altezza $h+1 \geq 1$, sia T_1 di altezza h_1 il sottoalbero con radice il figlio sinistro della radice di T, mentre T_2 di altezza h_2 quello del figlio destro.



Allora $h+1 = 1+\max\{h_1,h_2\} \implies h_1,h_2 \leq h \implies$ Per T_1 e T_2 vale l'ipotesi induttiva.

Sia m il numero di foglie di T, m_i il numero di foglie di T_i, $i = \{1,2\}$.
$m = m_1 + m_2$ e devo dimostrare che $m \leq 2^{h+1}$.
$m = m_1 + m_2 \leq 2^{h_1} + 2^{h_2} \leq$ per ipotesi induttiva:
$\leq 2^h + 2^h = 2^{h+1}$.
□

Dimostro che $m \geq h+1$ per induzione su $h \geq 0$.
Caso base: $h = 0 \implies T$ equivale a un singolo nodo $\implies m = 1 \implies$ ✓.
Passo induttivo: Fisso $h \geq 0$ arbitrario.
Ipotesi induttiva: la proprietà vale per tutti gli alberi binari propri di altezza $\leq h$.

In maniera analoga a prima, la proprietà vale per T_1 e T_2.
$m = m_1 + m_2 \geq (h_1+1) + (h_2+1) \geq$ per ipotesi induttiva:
$\geq \max\{h_1,h_2\} + 2 = (h+1)+1$.
□

4.2.2.1.3. (3), (4), (5)

Per provare $(3): h \leq n-m \leq 2^h - 1$, sostituisco m in (2) con $n-m+1$ (da (1)) e ottengo $h+1 \leq n-m+1 \leq 2^h \implies h \leq n-m \leq 2^h-1$.
□

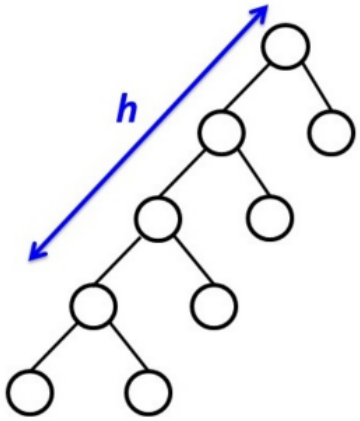
Per provare $(4): 2h+1 \leq n \leq 2^{h+1}-1$ sommo (2) e (3).
□

(5) deriva da (4), risolvendo rispetto a h:
$2h+1 \leq n \implies h \leq \frac{n-1}{2}$
$2^{h+1}-1 \geq n \implies 2^{h+1} \geq n+1 \implies h+1 \geq \log_2(n+1) \implies h \geq \log_2(n+1)-1$.
□

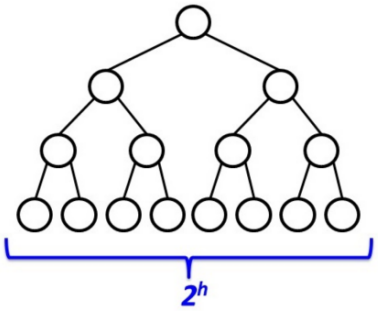
Osservazione

La quinta proprietà, (5), implica che in un albero binario proprio con n nodi, l'altezza è compresa tra $\Omega(\log n)$ e $O(n)$.

4.2.3. Alberi binari propri estremi



In questo esempio si ha $m = h + 1$ e $n = 2h + 1$. È importante notare come le parti sinistre di (2), (3) e (4) e la parte destra di (5) continuano a valere.
È un albero *molto sbilanciato* (*skewed*).



In questo esempio di hanno 2^i nodi al livello i, $0 \leq i \leq h$, quindi ci saranno $m = 2^h$ (equivalente al numero di nodi al livello h), quindi $n = \sum_{i=0}^{h} 2^i = \frac{2^{h+1}-1}{2-1} = 2^{h+1} - 1$. È importante notare come le parti destre di (2), (3) e (4) e la parte sinistra di (5) continuano a valere.
È un albero *perfettamente bilanciato*.

> ⚠ **Attenzione**
>
> In assenza di altre ipotesi, il migliore upper bound all'altezza di un albero binario con n nodi è $O(n)$, non $O(\log n)$.

4.2.4. Visite di alberi binari

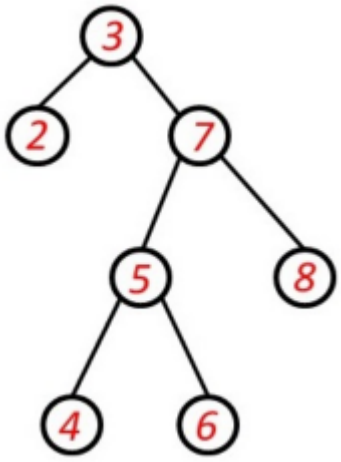
> Oltre alle visite in `preorder` e `postorder`, per gli alberi binari si definisce anche la *visita inorder*, che visita *prima*

> *(ricorsivamente) il sottoalbero sinistro, poi il padre, poi (ricorsivamente) il sottoalbero destro*.

Algoritmo `inorder(v)`
Input: $v \in T$.
Output: visita inorder di T_v

```
if(T.left(v) != null) then{
     inorder(T.left(v));
}
visita v;
if(T.right(v) != null) then{
     inorder(T.right(v));
}
```

La *chiamata iniziale* per visitare tutto T è `inorder(T.root())`.



Osservazione

È un esempio di albero binario di ricerca, che studieremo più avanti, dove la visita `inorder` tocca gli elementi presente in ordine crescente di valore.

4.2.4.1. Complessità di `inorder(T.root())`

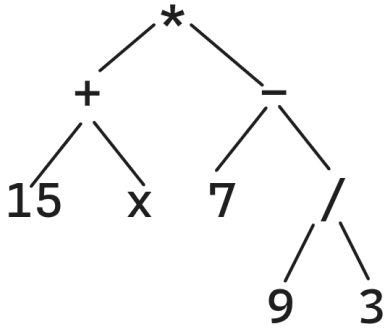
La complessità è $\Theta\left(n + \sum_{v \in T} t_v\right)$, dove $n = |T|$ e t_v è il costo della visita di v.
Si fa la stessa analisi di `preorder` per dimostrare la complessità.

4.2.4.2. Applicazioni: espressioni aritmetiche

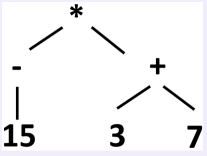
> Il *Parse Tree* T associato a un'espressione aritmetica E (con operatori solo binari) è un albero binario proprio i cui nodi

> foglia contengono le costanti/variabili di E e i nodi interni contengono gli operatori di E, in modo tale che:
>
> - Se $E = a$, con a una costante/variabile, allora T è costituito da un'unica foglia contenente a;
> - Se $E = (E_1 \, \mathrm{Op} \, E_2)$, la radice di T contiene Op e ha come sottoalbero sinistro il Parse Tree associato a E_1, mentre come sottoalbero destro il Parse Tree associato a E_2.

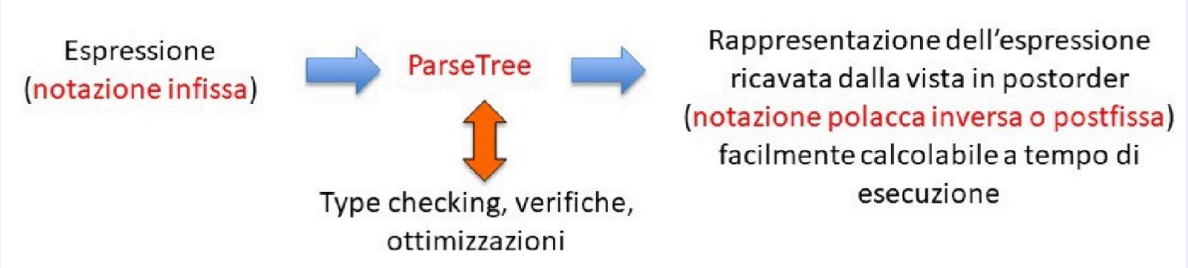
Ad esempio, posso scrivere un'espressione con la *notazione infissa*: $E = ((15 + x) * (7 - (9 \div 3)))$; altrimenti posso usare la *notazione postfissa* o *polacca inversa*: $E = 15x + 793 \div -*$. Il Parse Tree per quest'espressione E è



Osservazioni

- Le parentesi sono implicite nella struttura dell'albero;
- Se si ammettono operatori unari, l'albero non è più proprio, ad esempio: $-15 * (3 + 7)$ 

- Nei compilatori avviene il seguente processo:



Nelle sezioni successive vedremo come a partire dal Parse Tree T di un'espressione E si possono generare le rappresentazioni di E in notazione postfissa e infissa, usando le visite rispettivamente in postorder e inorder.

> Sia E_v l'espressione associata al sottoalbero T_v, con v nodo di T.

4.2.4.2.1. Generazione dell'espressione in notazione infissa

Si utilizza lo schema della visita inorder.

Algoritmo `infix(T,v,L)`
Input: Parse Tree T for E, $v \in T$, Lista L.
Output: Aggiunta a L di E_v in notazione infissa.

```
if(T.isExternal(v)) then{
     L.addLast(v.getElement());
}
else{
     L.addLast('(');
     infix(T, T.left(v), L);
     L.addLast(v.getElement());
     infix(T, T.right(v), L);
     L.addLast(')');
}
```

La *chiamata iniziale* per esprimere in notazione infissa tutta l'espressione E è `infix(T, T.root(), L)`, con $L = \emptyset$.

> **Osservazione**
>
> T e L sono variabili globali.

4.2.4.2.1.1. Complessità di `infix(T, T.root(), L)`

`infix(T, T.root(), L)` ha la stessa struttura della visita inorder, quindi la complessità è $\Theta\left(n + \sum_{v \in T} t_v\right)$, dove $n = |T|$ e t_v è il csto della visita di v, che in questo caso è $\Theta(1)$, quindi la complessità è $\Theta(n)$.

4.2.4.2.2. Generazione dell'espressione in notazione postfissa

Si utilizza lo schema della visita in postorder.

Algoritmo `ipostix(T,v,L)`
Input: Parse Tree T for E, $v \in T$, Lista L.
Output: Aggiunta a L di E_v in notazione postfissa.

```
if(T.isExternal(v)) then{
     L.addLast(v.getElement()); //visita di v ∈ Θ(1)
}
else{
```

```
        postfix(T, T.left(v), L);
        postfix(T, T.right(v), L);
        L.addLast(v.getElement()); //visita di v ∈ Θ(1)
    }
```

La *chiamata iniziale* per esprimere in notazione postfissa tutta l'espressione E è `postfix(T, T.root(), L)`, con $L = \emptyset$.

4.2.4.2.2.1. Complessità di `postfix(T, T.root(), L)`

L'analisi è analoga a `infix`, quindi la complessità è $\Theta(n)$, con $n = |T|$.

Riepilogo alberi binari

- Definizioni: albero binario proprio;
- Visita inorder e le loro applicazioni;
- Algoritmi di visita come template generali.