Lezione_20_fis

9. Oscillazioni elettriche e correnti alternate

Già in precedenza abbiamo studiato delle correnti variabili nel tempo con i circuiti RC e LR, caratterizzati rispettivamente dalle leggi $V_C = \frac{q}{C} = Ri$, $i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$ e $\mathcal{E}_i = -L\frac{di}{dt} = Ri$, $i(t) = i_0 e^{-tL/R}$.

9.1. Oscillazioni elettriche

9.1.1. Circuito LC

Consideriamo un circuito LC ideale, il cui condensatore è carico con $V_0 = \frac{q_0}{C}$ ed è connesso all'induttore nel momento $t = 0$.

Alla chiusura del circuito inizia a scorrere una corrente e nell'induttore viene indotta una forza elettromotrice di autoinduzione $\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$ legata alla differenza di potenziale dalla legge

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0$$

ottenuta dalle leggi di Kirchoff (che useremo anche per i prossimi circuiti).

Derivando rispetto al tempo e ricordando che $i = -\frac{dq}{dt}$ si ottiene $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$, quindi la corrente segue la legge

$$i(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

mentre la differenza di potenziale ai capi del condensatore è

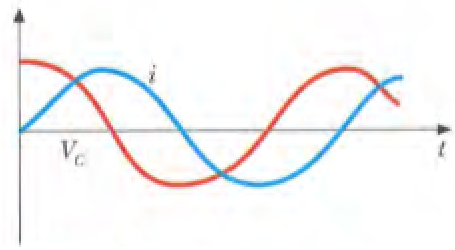
$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega LA\cos(\omega t + \phi)$$

Grazie alle condizioni iniziali, si possono determinare le costanti, quindi si ottengono le formule

$$i = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t, \quad V_C = V_L = V_0 \cos \omega t, \quad q = q_0 \cos \omega t$$

dove ω è la pulsazione e vale $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Si può osservare che la corrente e la differenza di potenziale sono in *quadratura di fase*, quindi quando la corrente è massima la differenza di potenziale è nulla, quando la differenza di potenziale è massima la corrente è nulla.
Il circuito LC è dunque sede di un'*oscillazione elettrica permanente* e per questa ragione viene anche chiamato *circuito oscillante*.



Analogia

Matematicamente, la situazione è identica a quella di una massa m sottoposta all'azione di una forza elastica, dove le corrispondenze sono solo formali. Si "equivalgono" in questo modo:

- $q \leftrightarrow x$;
- $i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt}$;
- $L \leftrightarrow m$;
- $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$.

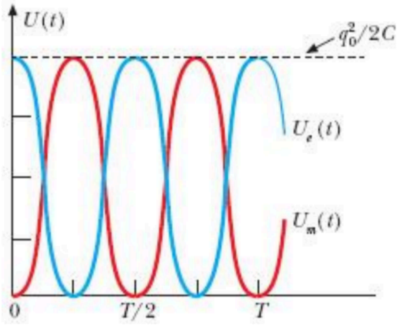
Quando il condensatore è carico, tutta l'energia del circuito è elettrica (non vi è energia magnetica poiché $i = 0$), quando è invece scarico l'energia è solo magnetica, nel momento in cui le armature del condensatore sono nuovamente cariche (ma con segno opposto) l'energia è nuovamente solo elettrica.
Il *bilancio energetico* in un dato istante è

$$U(t) = U_e(t) + U_m(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} L i_0^2 \sin^2 \omega t$$

Essendo $i_0 = \frac{V_0}{\omega L}$, si verifica che $CV_0^2 = Li_0^2$, quindi l'*energia totale è costante nel tempo* e vale

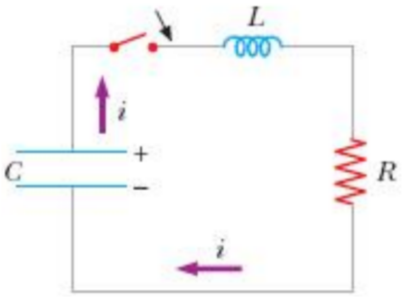
$$U(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} L i_0^2$$

quindi *in un circuito LC ideale l'energia totale si conserva*.



9.1.2. Circuito RLC in serie

Consideriamo questa volta un circuito con un condensatore carico, in induttore e un resistore collegati in serie.



Questa volta, alla chiusura del circuito, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore e dell'induttore non è più la stessa, ma vale la formula

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

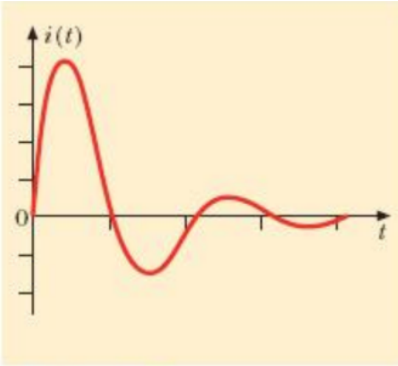
Derivando in maniere analoga a prima si ottiene $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$ che ha soluzione

$$i(t))Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

dove $\gamma = \frac{R}{2L}$ ha il significato di *costante di tempo* e indica la *rapidità di annullamento della corrente*, mentre ω è la pseudo-pulsazione con valore

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

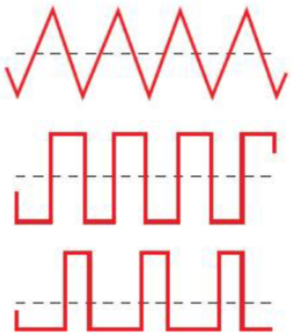
Si ha quindi che per $\gamma^2 \gg \omega_0^2$, cioè quando $R^2 < \frac{4L}{C}$ si ha una pulsazione reale, quindi la corrente si descrive con una sinusoide modulata.



Si può concludere che, in questo circuito, a ogni ciclo viene dissipata dell'energia nella resistenza. Il processo termina quando tutta l'energia $U_e = \frac{q_0^2}{2C}$ viene assorbita dalla resistenza.
Per mantenere un'oscillazione permanente, bisognerebbe fornire costantemente potenza pari all'energia dissipata nel resistore.

9.2. Circuiti in corrente alternata

> Una forza elettromotrice e una corrente che variano nel tempo proporzionalmente a $\sin \omega t$ o $\cos \omega t$ sono dette *alternate*. Per definizione si chiama *alternata* una *grandezza periodica* che ha *valor medio nullo in un periodo*.



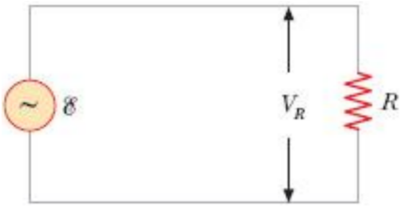
Ricorda

Per una grandezza alternata si definisce il valore efficace dalla relazione $\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$ e $i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$

9.2.1. Circuito con resistenza

Applicando ai capi di un resistore una forza elettromotrice $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ si ha un passaggio di corrente in accordo con la legge di Ohm

$$\mathcal{E} = Ri \implies i = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$



La corrente è *in fase* con la forza elettromotrice e il suo valore *non dipende* dalla frequenza della forza elettromotrice.
Possiamo affermare che ai capi del resistore compare la *tensione*

$$V_R = Ri = V_0 \cos \omega t$$

che vale anche per circuiti più complessi.

La potenza istantanea dissipata dalla resistenza vale

$$\mathcal{P}(t) = V_R i = \frac{\mathcal{E}_0^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

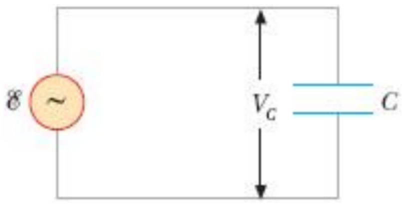
mentre la potenza media dissipata su un periodo vale

$$\mathcal{P}_m = V_{R,eff} i_{eff} = \frac{V_{R,eff}^2}{R} = R i_{eff}^2$$

9.2.2. Circuito con condensatore

Ai capi di un condensatore carico vi è la differenza di potenziale $V_C = \frac{q}{C}$, supponendo nulla la resistenza complessiva si ottiene

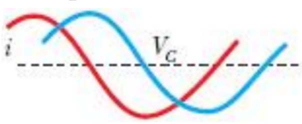
$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} \implies q = C\mathcal{E} = C\mathcal{E}_0 \cos \omega t$$



Uso la relazione $i = \frac{dq}{dt}$ per trovare la corrente

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\omega C\mathcal{E}_0 \sin \omega t = \omega C\mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

si vede dunque che è in *anticipo di una quadratura sulla forza elettromotrice* (ovvero $\frac{\pi}{2}$). Anche questa volta la relazione di fase è indipendente dalla pulsazione, ma la corrente *dipende dalla frequenza*.



Più generalmente, per un circuito qualsiasi, vale

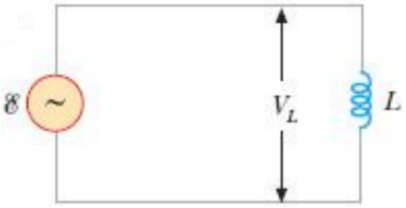
$$V_C = \frac{i_0}{\omega C} \sin \omega t = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

dove $\frac{1}{\omega C}$ è detto *reattanza del condensatore* (o *reattanza capacitiva*), che rappresenta un'opposizione al passaggio di corrente.

9.2.3. Circuito con induttore

In un circuito con una forza elettromotrice alternata, un induttore e resistenza nulla è descritto dall'equazione

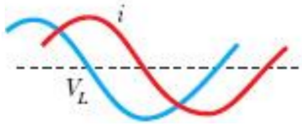
$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = 0 \implies \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t$$



Quindi la corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

perciò la corrente è *in quadratura* rispetto alla forza elettromotrice (ovvero è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$). La corrente *dipende dalla frequenza*.



In un circuito generico, la tensione ai capi dell'induttore vale

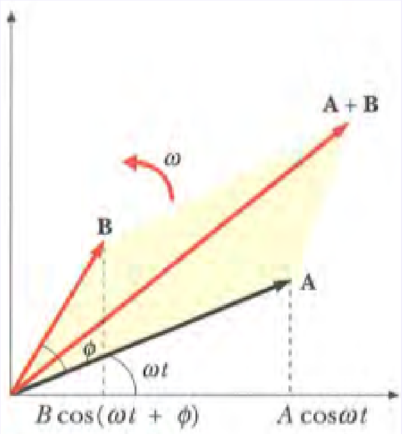
$$V_L = L\frac{di}{dt} = -\omega L i_0 \sin \omega t = \omega L i_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

dove ωL è detto *reattanza dell'induttore* (o *reattanza induttiva*).

9.2.4. Circuiti RL e RC (in serie)

Metodo dei vettori rotanti o dei fasori di Fresnel

Un'oscillazione armonica viene rappresentata come proiezione lungo un asse di un vettore di modulo $\mathcal{E}_0$ ruotante con velocità angolare ω. Due oscillazioni sfasate di θ sono rappresentate da due vettori ruotanti che mantengono un angolo costante θ tra loro e la somma si esegue con la regola del parallelogramma; la proiezione del vettore somma è la somma cercata dalle due oscillazioni.



Siccome la tensione totale dei seguenti circuiti è la somma delle tensioni dei loro elementi, che sono generalmente sfasati tra loro, useremo questo metodo per calcolare la tensione totale.

9.2.4.1. Circuito RL

Nel circuito in serie RL, attraversato dalla corrente $i = i_0 \cos \omega t$, le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = Ri_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

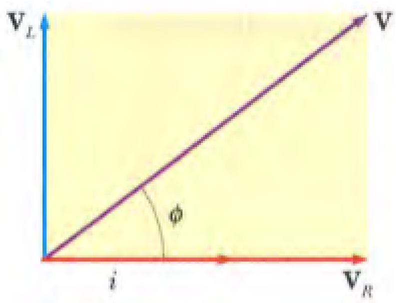
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} i_0$$

ed è sfasata di un angolo ϕ rispetto alla corrente, tale che $\tan \phi = \frac{\omega L}{R}$.

La tensione ai capi della serie vale

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



9.2.4.2. Circuito RC

Nel circuito in serie RC le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = Ri_0 \cos \omega t, \quad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

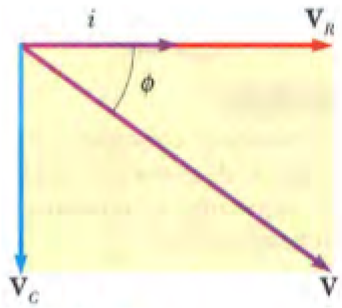
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} i_0$$

ed è sfasata di un angolo ϕ rispetto alla corrente, tale che $\tan \phi = -\frac{1}{\omega CR}$.

La tensione ai capi della serie vale sempre

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



> A questo punto si definisce l'*impedenza* Z dell'elemento o della serie il coefficiente di proporzionalità tale che
>
> $$V_0 = Zi_0$$
>
> In generale l'impedenza è in funzione della pulsazione.

Unità di misura

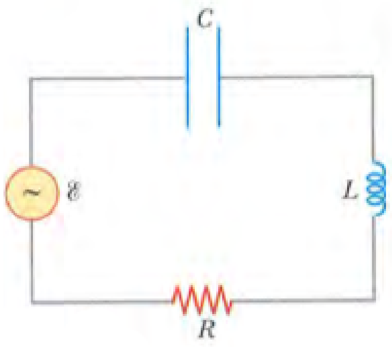
L'impedenza e la reattanza sono definite da un rapporto tra tensione e corrente, come la resistenza, quindi si misurano in ohm (Ω).

9.3. Circuito RLC in serie, risonanza

Nel circuito RLC in serie, in cui scorre la corrente $i = i_0 \cos \omega t$, deve valere

$$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

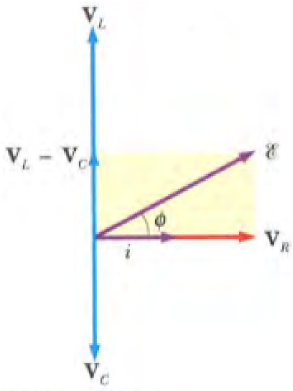
e deve essere che la tensione ai capi della serie coincida con la forza elettromotrice del generatore $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$.



Usando il metodo dei vettori rotanti si ottiene

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} i_0 = Z i_0$$

di fase ϕ tale che $\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.



Riprendendo l'equazione iniziale, si ottiene:
$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = \frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{\mathcal{E}_0 \omega}{L} \cos\omega t$, che permette di ricavare l'equazione della corrente

$$i(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \phi') + i_0 \sin(\omega t + \phi)$$

dove $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$ e $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Si ottiene quindi una *sinusoide con decadimento esponenziale* sommata a una sinusoide. La corrente efficace dipende dalla frequenza.
L'equazione implica che, dopo un transiente, il circuito oscilla con pulsazione dettata dalla forza elettromotrice alternata inserita.

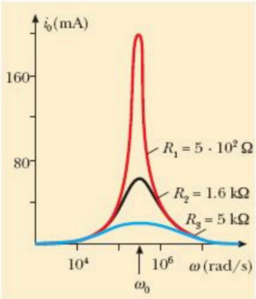
9.3.1. Risonanza

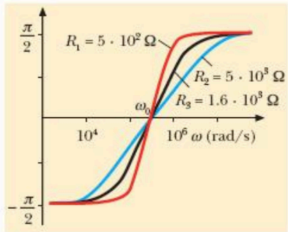
La corrente dell'oscillazione raggiunge il valore massimo quando Z è minimo, ovvero quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

In tali *condizioni*, dette di *risonanza*, lo *sfasamento* tra corrente e forza elettromotrice è *nullo*, l'impedenza è eguale alla resistenza e il circuito si comporta come se fosse puramente resistivo.

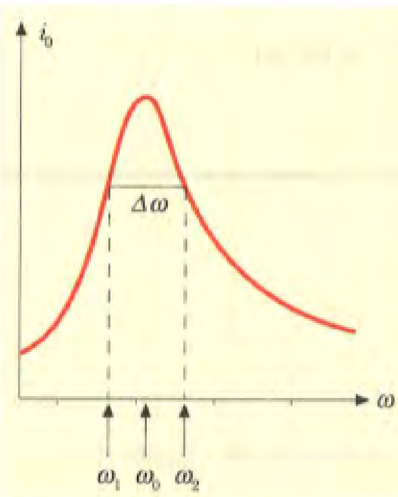
Nei seguenti grafici sono rappresentate delle *curve di risonanza*.





Prima della risonanza, il termine capacitivo è maggiore del termine induttivo, la fase varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e zero, quindi il comportamento è di tipo RC in serie.
Oltre la risonanza, predomina il termine induttivo su quello capacitivo, la fase varia tra zero e $\frac{\pi}{2}$, quindi il comportamento è di tipo RL in serie.

> Si definisce la *larghezza della risonanza* con la differenza
>
> $$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$
>
> dove ω_1 e ω_2 sono i valori della pulsazione tali che $i_0(\omega_1) = i_0(\omega_2) = \frac{i_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$.



> Si definisce *fattore di merito della risonanza* la quantità
>
> $$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$