Lezione_03

1.3.4. Velocità scalare - definizione

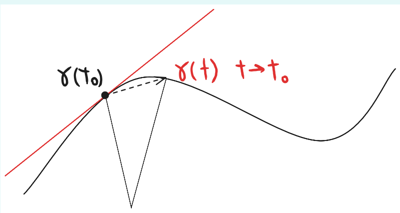
Sia $\gamma : I \to Rr^n$, $t \in I$

> Dico
>
> $$||\gamma'(t)|| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_n'^2(t)}$$
>
> la *velocità scalare*.

> t è un *valore regolare* per la curva se $\exists \gamma'(t)$ e inoltre $\gamma'(t) \neq 0 \iff ||\gamma(t)|| > 0$ (quindi se esiste ed è non nullo).

> Se γ è regolare al parametro t, definisco
>
> $$\frac{\gamma'(t)}{|||\gamma(t)||}$$
>
> il *versore tangente* o *versore velocità*.

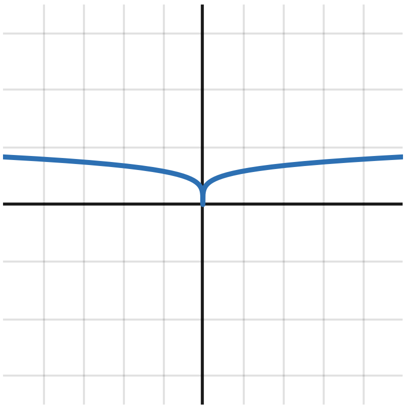
> Definisco la retta tangente alla curva γ in $\gamma(t_0)$:
>
> $$r : x(t) = p + v(t - t_0)$$
>
> con $p = \gamma(t_0)$ e $v = \gamma'(t_0)$

> **Idea**
>
> Posso approssimare γ vicino a t_0 con la retta tangente
>
> $$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + R(t)$$
>
> con $\lim_{t \to t_0} \frac{||R(t)||}{t - t_0} \to 0$.
>
> 
>

1.3.4.1. Esercizio

$\gamma(t) = (t^9, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

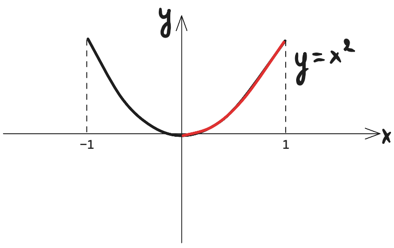
Svolgo:
$x = t^9$, $y = t^2 = x^{2/9}$
$Supp\,\gamma =$ grafico di $f(x) = x^{2/9}$ per il tratto in $[-1, 1]$.



Eppure $\gamma_1(t) = t^9$ e $\gamma_2(t) = t^2$ cono $\mathcal{C}^\infty$, tuttavia $\gamma'(t) = (9t^8, 2t)$ si annulla in $t = 0$, parametro corrispondente al punto $\gamma(0) = (0, 0)$.

> **Osservazione**
>
> Ecco perché chiediamo $\gamma'(t_0) \neq 0$ per dire che t_0 sia un valore regolare.

1.3.5. Esercizio



$\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in I = [0, 1]$

Svolgo:
$t, t^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
$\gamma'(t) = (1, 2t)$
$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2} \geq 1$, quindi è regolare.
$r : p = \gamma(0) = (0, 0)$, $v = \gamma'(0) = (1, 0)$
$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \to \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \; t \in \mathbb{R} \iff \{y = 0\}$

> **Osservazione**
>
> Posso anche scrivere le "equazioni cartesiane" della retta, eliminando il parametro:

$\gamma(t) = (t, f(t))$
$\gamma'(t) = (1, f'(t))$ vettore velocità
$||\gamma_0(t)|| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ velocità scalare > 0
$r : \begin{cases} x = x_0 + 1 \cdot t \\ y = f(x_0) + f'(x_0)t \end{cases} \implies t = x - x_0$, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1.4. Lunghezza di curve

1.4.1. Lunghezza - definizione

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in C^1(I)$, $I = [a, b]$

> Chiamo *lunghezza* di γ
>
> $$L(\gamma, [a, b]) := \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt$$

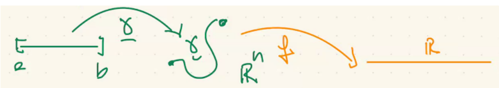
1.4.2. Integrale curvilineo

Sia $f : R^n \to \mathbb{R}$ continua

> Chiamo *integrale curvilineo di prima specie* di f lungo γ
>
> $$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma_1(t), \ldots \gamma_n(t))\, ||\gamma'(t)||\, dt$$

Osservazione

Se $f(x, y, z) \equiv 1$ allora $\int_\gamma 1 ds = \int_a^b 1 ||\gamma'(t)||\, dt = L(\gamma, [a, b])$



1.4.3. Esercizio

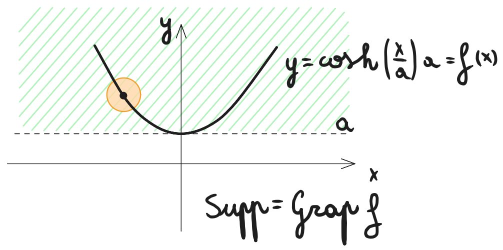
$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ dove $a > 0$.

Studiarne le proprietà e calcolarne la lunghezza dell'arco per $t \in [0, 1]$.

γ è una curva? $t, a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \in \mathcal{C}^\infty$, quindi è una curva.

Calcolo il supporto:
$x = t$
$y = a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

$Supp(\gamma)$ è di punti interni a $\{y>0\}$?
Se $p \in Supp(\gamma)$, $p=\left(x, a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ ho che $B\left(p,\frac{a}{2}\right) \subseteq \{y>0\}$.



Verifico se è semplice:
$x(t)=t$ è strettamente crescente, quindi è iniettiva $\Longrightarrow t_1 \neq t_2$, $x(t_1)\neq x(t_2) \Longrightarrow (x(t_1),y(t_1),z(t_1)) \neq (x(t_2),y(t_2),z(t_2)) \Longrightarrow \gamma$ è iniettiva, quindi è semplice.

Controllo se è chiusa:
Siccome γ è iniettiva, non è chiusa.

$\gamma'(t)=\left(1, \cancel{a}\frac{1}{\cancel{a}}\sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right)=(1,f'(t))$

$||\gamma'(t)||=\sqrt{1+f'(t)^2}=\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)}=\cosh\left(\frac{t}{a}\right)$

$L(\gamma,[0,t])=\int_0^t||\gamma'(r)||\,dr=\int_0^t\cosh\left(\frac{r}{a}\right)dr=\left[\sinh\left(\frac{r}{a}\right)a\right]_0^t=a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$

Posso anche calcolare una nuova curva $\tilde{\gamma}$ in questo modo:
$l=\phi(t)=a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$
$\frac{t}{a}=\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)=\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)=\phi^{-1}(l)$
$t=a\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)$
$\tilde{\gamma}(l)=\left(a\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right),\ a\cosh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)\right)\right)$
Il parametro di $\tilde{\gamma}$ è la lunghezza percorsa.

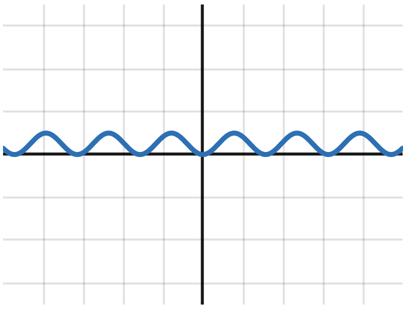
1.4.4. Grafico di funzione - definizione

> Sia $f: A\to B$, si definisce
>
> $$Graph\, f=\{(x,f(a):a\in A\}\subseteq A\times B$$
>
> il grafico di f.

> Si chiama $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,f(t))$ la *parametrizzazione canonica di grafico cartesiano*.

1.4.4.1. Esercizio

$\gamma(\theta)=(e^\theta,\sin^2(e^\theta))$, $\theta\in[1,\ln 4]$ non è la parametrizzazione canonica di un grafico cartesiano, tuttavia posso scrivere:
$t=e^\theta$, $\theta=\ln t$, $t\in[e,4]$, $\tilde{\gamma}(t)=\gamma(\ln t)=(t,\sin^2(t))$, $e\le t\le 4$
$\tilde{\gamma}$ è una prametrizzazione canonica.



1.4.4.2. Esercizio

Studiare $\tilde{\gamma}(r) = \begin{pmatrix} \ln r \\ a \cosh\left(\frac{\ln r}{a}\right) \end{pmatrix}$, $r > 0$, $I = \mathbb{R}^+$.

$t = \ln r$, $r = e^t$. $r \in \mathbb{R}$
$\gamma(r(t)) = (t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right))$, $\tilde{I} = \mathbb{R}$.
Quindi la curva è la stessa dell'[esercizio 1.3.8.](#).

1.4.5. Proposizione (derivata della composta)

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, $\phi : \tilde{I} \to I \in \mathcal{C}^1$
Se $\tilde{\gamma}(r) = \gamma(\phi(r))$, $\tilde{\gamma}_i(r) = \gamma_i(\phi(r))$, allora

$$\tilde{\gamma}'(r) = \gamma'(\phi(r)) \cdot \phi'(r)$$

1.4.5.1. Dimostrazione

Devo mostrare $\frac{d}{dr}\tilde{\gamma}_i(r) = \phi'(r) \cdot \gamma_i'(\phi(r))$, $i = 1, \ldots, n$

$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_i(r) = \gamma_i'(\phi(r)) \cdot \phi'(r)$ per la regola della catena!
$\square$

1.4.5.2. Esercizio

Considero $\gamma(t) = (e^{t^2}, \sin(t^2))$, $t > 0$.
Derivando componente per componente calcolo:
$\frac{d}{dt}\gamma(t) = (e^{t^2} \cdot 2t, \cos(t^2) \cdot 2t) = (e^{t^2}, \cos(t^2)) \cdot 2t$
Applico ora la regola della catena alla composizione:
$\tilde{\gamma}(r) = (e^r, \sin(r))$, $r = \phi(t) = t^2$, $r > 0$ e trovo lo stesso risultato
$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\gamma ilde = \phi'(t) \cdot \tilde{\gamma}(r)\big|_{r=\phi(t)}$

1.4.6. Curve equivalenti - definizione

> Si dice $\tilde{\gamma}(t)$, $t \in \tilde{I}$, *equivalente* a $\gamma(r)$, $r \in I$, se $\phi \in \mathcal{C}^1(I; \tilde{I})$ biunivoco con $\phi' \neq 0$.

1.4.6.1. Proposizione

Due curve equivalenti hanno

- Stessa immagine;
- Stesso versore velocità, quindi retta tangente;
- Stessa lunghezza/stesso integrale curvilineo.

1.4.6.2. Esercizio

$f(x,y,z) = e^{x+y+z}$
$\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [1, e] = I$; $\tilde{\gamma}(t) = (e^t, e^{2t}, e^{3t})$, $t \in [0,1] = \tilde{I}$
$\phi(t) = e^t \in \mathcal{C}^1$, $\phi'(t) = e^t > 0$, $t = \ln r$

Ho verificato che sono equivalenti: ora calcolo l'integrale curvilineo di f lungo le due curve:

1. $\int_\gamma f\, ds = \int_1^e e^{t+t^2+t^3}\sqrt{1+4t^2+9t^4}\, dt$
2. $\int_g f\, ds = \int_0^1 e^{e^r+e^{2r}+e^{3r}\sqrt{1+4e^{2r}+9e^{4r}}} e^r\, dr$
   Facendo la sostituzione $r = \phi(t) = e^t$ mi accorgo che sono uguali, quindi hanno la stessa lunghezza.

1.4.7. Curve associate a grafici di funzione

Data $f: I \to \mathbb{R}$ *continua*, I intervallo, $\gamma: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$, $t \in I$.
Allora γ è:

- *Mai chiusa*, siccome $x(t)$ è crescente, quindi iniettiva;
- *Sempre semplice* siccome $x(t)$ è crescente, quindi iniettiva;
- *Se f derivabile in I^0* $\implies \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \implies$ sempre *regolare*
- La *retta tangente* a tempo $t = x_0$ è $\begin{cases} x_0 = \cancel{x_0} + 1(s - \cancel{x_0}) \\ y = f(x_0) + f'(x_0)(s - x_0) \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$,
  cioè *$y = f(x{0}) + f'(x{0})*(x-x_{0})$*;
- $L(\gamma; I) = \int_I \sqrt{q + (f'(t))^2}\, dt$

1.4.8. Esercizio (spirale logaritmica)

$\rho(\theta) = e^{-\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ $(\theta \in [-M, M])$
$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

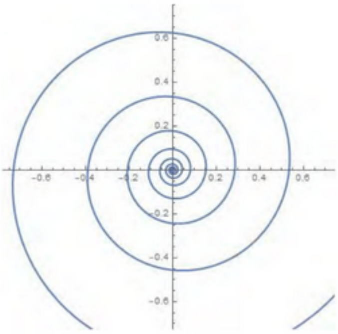


Figura 1.22: La spirale logaritmica

$x^2 + y^2 = \rho^2(\theta)\cos^2\theta + \rho^2(\theta)\sin^2(\theta) = \rho^2(\theta) = e^{-2\theta}$

$\rho(\theta) = ||\gamma(\theta)|| =$ distanza del punto dall'origine

$\theta =$ angolo con l'asse delle x

$\gamma(0) = (e^0 \cos 0, e^0 \sin 0) = (1, 0)$

$\rho(\theta) = e^{-\theta}$ è decrescente $\implies$ se θ cresce, tende a zero.

γ è *non* chiusa e semplice siccome è iniettiva (ed è piana, banalmente, perché ha due componenti).

Iniettività: $\theta_1 < \theta_2 \to \gamma(\theta_1) \in \partial B(0, e^{-\theta_1})$, $\gamma(\theta_2) \in \partial B(0, e^{-\theta_2}) \implies \gamma(\theta_1) \neq \gamma(\theta_2)$

(sono su circonferenze di stesso centro ma raggio diverso, quindi non si intersecano mai)

Velocità vettoriale:

$\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta,\ \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta) = e^{-\theta}(-\cos\theta - \sin\theta,\ -\sin\theta + \cos\theta)$

$||\gamma'(\theta)||^2 = \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)^2 + (\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)^2 = (\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2 = e^{-2\theta} + e^{-2\theta} =$

$\int_0^L ||\gamma'(\theta)||\, d\theta = \int_0^L \sqrt{2}e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{2}[-e^{-\theta}]_0^L = \sqrt{2}[1 - e^{-L}]$