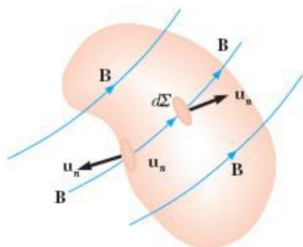


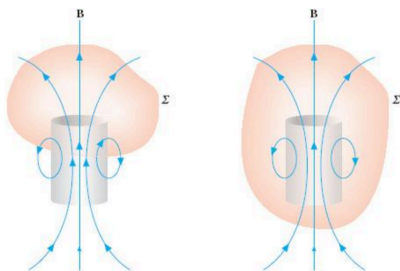
### 1.7.5. Teorema di Gauss per il campo magnetico

Abbiamo visto che le linee di campo magnetico sono sempre linee continue senza inizio né fine e che lungo esse il campo  $\vec{B}$  è sempre nello stesso verso. Questo ha una conseguenza quando calcoliamo il *flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa*:

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$$



Infatti ogni linea di campo entrante in una superficie *chiusa* deve necessariamente uscirne. Ne segue che il flusso entrante e quello uscente hanno modulo uguale, perciò il flusso complessivo deve essere nullo.



#### 1.7.5.1. Forma locale del Teorema di Gauss per il campo magnetico

Usando il teorema della divergenza ( $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{B})}{\Delta V}$ ), si può dimostrare facilmente che da  $\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$  segue la corrispondente forma locale:

$$\text{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

#### 🔗 Forme integrali e forme differenziali

Forma integrale	Forma differenziale (locale)
$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{concatenate}}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

### 1.7.6. Proprietà magnetiche della materia

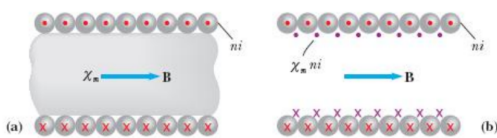
Discutiamo le proprietà magnetiche della materia, ovvero il comportamento della stessa in presenza di un campo magnetico prodotto da correnti elettriche, procedendo, in analogia con quanto fatto per i dielettrici, con una descrizione fenomenologica.

Supponiamo di avere un solenoide indefinito con densità di spira  $n$  e corrente  $i$ . Supponiamo inoltre di riempire completamente il solenoide con un mezzo omogeneo e di misurare il campo magnetico all'interno.

Definiamo la permeabilità magnetica come il rapporto tra il modulo dei campi magnetici misurati

$$k_m = \frac{B}{B_0}$$

dove  $B_0$  è il campo del solenoide vuoto.



La variazione del campo magnetico dovuta alla presenza del mezzo è

$$\vec{B}_m = \vec{B} - \vec{B}_0 = (k_m - 1)\vec{B}_0 = \chi_m \vec{B}_0$$

dove  $\chi_m$  è la *suscettività magnetica*.

Interpretiamo questo risultato nel seguente modo: l'effetto del mezzo magnetizzato risulta identico a quello che sarebbe prodotto da un secondo solenoide eguale al primo, ma percorso da corrente di densità lineare  $\chi_m n i$ .

La presenza di un campo magnetico crea delle correnti di magnetizzazione all'interno del materiale, dette *amperiane*, che scorrono sulla *superficie* del mezzo.

Definiamo la magnetizzazione del mezzo, ovvero il momento di dipolo per unità di volume

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}_0 = \chi_m \vec{H}$$

dove  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$  è il *campo magnetizzante*.

### 1.7.6.1. Sostanze diamagnetiche

Nelle *sostanze diamagnetiche* la permeabilità magnetica relativa è costante al variare di  $B$  e minore di 1:

$$k_m < 1 \implies \chi_m < 0$$

Ogni molecola della sostanza acquista un momento di dipolo magnetico indotto che a sua volta dipende da un campo magnetico indotto. La magnetizzazione  $\vec{M}$  del campo indotto è *antiparallela* al campo inducente  $\vec{B}_0$ , ovvero ha un contributo negativo e il campo magnetico totale è minore di quello inducente.

$$B < B_0$$

Dal momento che  $B < B_0$ , le *correnti amperiane* devono dare un contributo opposto a  $\vec{B}_0$ .

#### Suscettività di sostanze diamagnetiche

Sostanza	$\chi_m$
Argento	$-2.39 \cdot 10^{-5}$
Bismuto	$-16.42 \cdot 10^{-5}$
Oro	$-3.46 \cdot 10^{-5}$
Piombo	$-1.58 \cdot 10^{-5}$
Rame	$-0.98 \cdot 10^{-5}$
Silicio	$-0.42 \cdot 10^{-5}$
Acqua	$-0.90 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	$-2.80 \cdot 10^{-5}$
Argon	$-1.10 \cdot 10^{-8}$
Azoto	$-1.35 \cdot 10^{-8}$
Idrogeno	$-0.45 \cdot 10^{-8}$

### 1.7.6.2. Sostanze paramagnetiche

Nelle *sostanze paramagnetiche* la permeabilità magnetica relativa è costante al variare di  $B$  e maggiore di 1:

$$k_m > 1 \implies \chi_m > 0$$

In questo caso i momenti delle molecole (e le correnti amperiane) sono *equiversi* al campo inducente (e alle correnti di conduzione),

quindi il campo magnetico risultante è maggiore di quello inducente.

$$B > B_0$$

#### Suscettività di sostanze paramagnetiche

Sostanza	$\chi_m$
Alluminio	$2.08 \cdot 10^{-5}$
Calcio	$1.94 \cdot 10^{-5}$
Magnesio	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Platino	$27.91 \cdot 10^{-5}$
Sodio	$0.85 \cdot 10^{-5}$
Titanio	$18.22 \cdot 10^{-5}$
Tungsteno	$7.92 \cdot 10^{-5}$
Uranio	$40.92 \cdot 10^{-5}$
Ossigeno	$387.4 \cdot 10^{-8}$

È importante sottolineare la dipendenza dalla temperatura della suscettività, che obbedisce alla *prima legge di Curie*

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T}$$

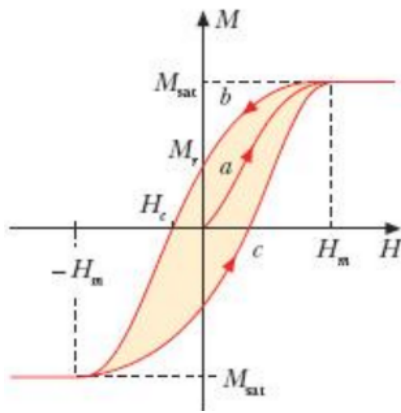
dove  $\rho$  è la densità,  $T$  la temperatura in Kelvin e  $C$  la *costante di Curie*. Pochi metalli paramagnetici non seguono la legge di Curie e hanno suscettività praticamente costante.

#### 1.7.6.3. Ferromagnetismo

Nelle sostanze ferromagnetiche la suscettività dipende dal *valore del campo magnetico* e anche dal *modo in cui viene raggiunto*.

Il ferro, il cobalto, il nichel e molte leghe (basate principalmente sul ferro) sono sostanze ferromagnetiche.

#### 1.7.6.3.1. Ciclo di isteresi

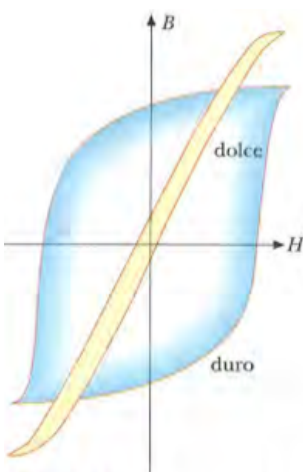


Prendendo una sostanza ferromagnetica nello *stato vergine* (cioè quando non è mai stata sottoposta a magnetizzazione) e facendo crescere  $H$ , i valori di  $B$  e  $M$  si spostano lungo la curva  $a$ , detta *curva di prima magnetizzazione*.

Aumentando il campo magnetizzante  $H$  aumenta anche la magnetizzazione  $M$  fino alla saturazione  $M_{sat}$  (poi rimane quasi costante, in realtà aumenta come una retta di pendenza  $\mu_0$ , quindi molto piccola).

Tornando verso  $H=0$ , rimane una magnetizzazione residua  $M_r$ , ovvero il materiale è diventato un *magnete permanente* (anche in assenza di corrente). Per eliminare la magnetizzazione bisogna applicare un *campo* magnetizzante *coercitivo*  $H_c$ .

Facendo diminuire ulteriormente  $H$  si nota che la situazione è speculare e si va a formare un ciclo, chiamato *ciclo di isteresi*, che rappresenta il diagramma di stato del materiale. I materiali "*duri*" hanno un ciclo largo (sono buoni magneti permanenti), mentre i materiali "*dolci*" uno più stretto (sono buoni elettromagneti).



#### 1.7.6.3.2. Seconda legge di Curie

Un'altra proprietà fondamentale dei materiali ferromagnetici è che per ognuno di essi esiste una temperatura critica  $T_C$ , detta *temperatura di Curie*, al di sopra la quali il materiale diventa

*paramagnetico*, con suscettività che segue la *seconda legge di Curie*:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_C}$$

La temperatura di Curie del ferro è  $T_C = 1043K = 700^\circ C$

Sostanza	$\chi_m$	$k_m$	$\chi_m, k_m$	$\vec{M}$ e $\vec{H}$	$\vec{B}$ e $\vec{B}_0$
Diamagnetica	$< 0$	$< 1$	costanti	$\vec{M}$ opposto a $\vec{H}$	$B < B_0$
Paramagnetica	$> 0$	$> 1$	costanti	$\vec{M}$ concorde a $\vec{H}$	$B > B_0$
Ferromagnetica	$\gg 0$	$\gg 1$	funzioni di $H$	$\vec{M}$ dipende da $\vec{H}$	$B \gg B_0$

### 🔗 Unità di misura

Il vettore  $\vec{H}$  e il vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  hanno la stessa unità di misura e dato che un'espressione di  $H$  è *ni*, l'unità di misura è

$$\frac{A}{m}$$

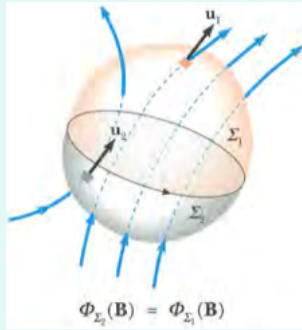
Ricordiamo che  $k_m$  e  $\chi_m$  sono adimensionali, mentre  $\mu$  e  $\mu_0$  si misurano in  $\frac{H}{m}$ .

## 1.8. Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

### 📅 Ricorda - Flusso concatenato

Poiché le linee di campo  $\vec{B}$  sono linee chiuse, considerate due qualunque superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  aventi la linea chiusa  $s$  come contorno, le linee che passano attraverso  $\Sigma_1$  passano tutte anche attraverso  $\Sigma_2$ , ovvero il flusso di  $\vec{B}$  è lo stesso attraverso qualunque superficie che poggia su  $s$ . Si parla quindi di flusso attraverso la linea chiusa  $s$  o flusso concatenato con la linea

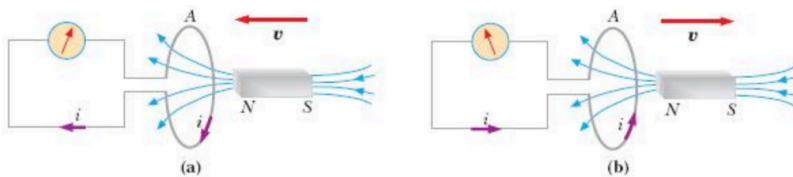
chiusa  $s$ .



### 1.8.1. Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica

Consideriamo una spira  $A$  di filo conduttore connessa con un galvanometro a zero centrale. Avvicinando un magnete o una spira  $A'$  in cui circola corrente alla spira  $A$ , l'indice del galvanometro si sposta in una direzione, mentre si sposta in quella opposta se si allontana il magnete/spira. L'effetto è uguale se si avvicina o allontana la spira  $A$ , tenendo fermo l'altro oggetto.

Da questi esperimenti si evince che in una spira compare una *corrente indotta* ogni qual volta c'è un *moto relativo* tra la spira e un campo magnetico  $\vec{B}$ . Siccome è necessario avere una sorgente di forza elettromotrice perché circoli una corrente in un circuito, affermiamo che *dal moto relativo tra una spira e un campo magnetico ha origine una forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  indotta*.



Venne condotto un altro esperimento da Faraday, che osservò lo stesso fenomeno di induzione in un circuito durante i processi di carica e scarica (in cui il valore di  $\vec{B}$  varia).

Ogni qualvolta il flusso del campo magnetico  $\Phi(\vec{B})$  concatenato con un circuito varia nel tempo di ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso nel tempo. Questa è conosciuta come *legge di Faraday* (o *legge di Faraday-Neumann* o di Faraday-Henry)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

### 1.8.1.1. Legge di Lenz

Il segno meno della legge di Faraday viene messo in evidenza dalla *legge di Lenz*.

L'effetto della forza elettromotrice indotta è sempre tale da opporsi alla causa che l'ha generata; pertanto la forza elettromotrice che si manifesta nel circuito è tale da produrre una corrente indotta i cui effetti magnetici si oppongono alle variazioni del flusso  $\Phi(\vec{B})$  concatenato con il circuito stesso.

