

Fisica 1

#università/esami/fisica_1

Le interazioni fondamentali

1. Gravità (è l'unica che ancora non è capita a pieno);
2. Elettromagnetica;
3. Interazione debole (chiamata così perché più debole rispetto a (4), è responsabile della radioattività);
4. Interazione forte (si trova dentro i costituenti degli atomi, quindi protoni, neutroni, in particolare i quark).

Applicazioni di fisica quantistica: led, televisore, pannelli fotovoltaici, computer quantistici.

Il concetto di energia unisce la meccanica e la termodinamica.

Lezione 01

Meccanica

È lo studio del moto di oggetti soggetti a forze.

La meccanica permette di descrivere con precisione il moto.

Cinematica del "punto materiale"

Il punto materiale è un'astrazione:

1. Non ha dimensione (è un punto)
2. Ha una massa ("materiale")

Finché non interessa il moto di un oggetto per sé stesso ma in base all'ambiente circostante ed esso è piccolo rispetto all'ambiente, il punto materiale è una buona approssimazione.

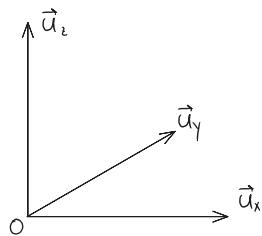
È descritto da una *massa* m ,

$$[m] = kg$$

e dalla sua *posizione* (*istante per istante*), che è una terna di numeri (un vettore)

$\vec{r}(t)$ = il vettore r all'istante di tempo t .

Prendiamo un sistema di riferimento Cartesiano

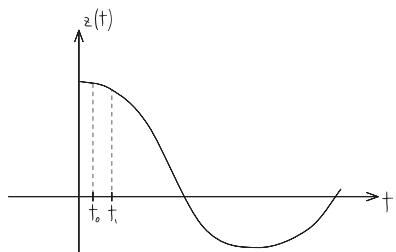


$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

dove $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono le coordinate del punto nell'istante t . Chiamo O l'origine e $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ gli assi.

Variazione della posizione del punto materiale

Consideriamo $z(t)$ al variare di t .



La velocità (lungo \vec{u}_z) del punto ci dice quanto rapidamente cambia $z(t)$ tra due istanti vicini nel tempo.

$$v_z(t_0) \approx \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} \text{ se } t_1 - t_0 \text{ è piccolo}$$

$$v_z(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Unità di misura

$$[x] = [y] = [z] = m$$

$$[t] = s$$

$$[v_z] = [v_y] = [v_x] = \frac{m}{s}$$

$$[a_x] = [a_y] = [a_z] = \frac{m}{s^2} \text{ (metri al secondo, per secondo)}$$

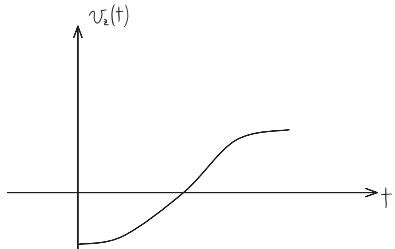
Tutte queste formule valgono anche per i vettori.

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \\ (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) &= \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

è molto importante scrivere i segni di vettore, perché tutto abbia l'appropriato significato fisico.

Variazione della velocità del punto materiale

Consideriamo $v_z(t)$



La variazione della velocità nel tempo è l'accelerazione

$$a_z(t_0) = \left. \frac{dv_z(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Abbiamo che

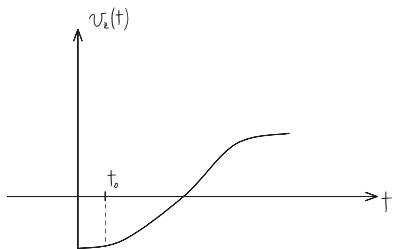
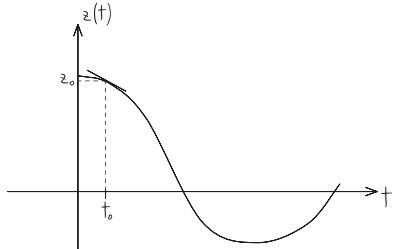
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Osservazione

In meccanica, le leggi del moto si scrivono interamente in termini di \vec{r} , \vec{v} e \vec{a} .

□

Se conosciamo $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$ sappiamo che (lungo \vec{u}_z)
 $z(t_1) \approx z(t_0) + (t_1 - t_0)v_z(t_0)$ se $t_1 - t_0$ è piccolo.



Posso iterare questa procedura

$$z(t_n) \approx z(t_0) + (t_1 - t_0)v_z(t_0) + (t_2 - t_1)v_z(t_1) + \dots$$

Prendendo tanti intervalli piccoli, ottengo le somme di Riemann.

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau$$

Moto uniformemente accelerato

Sia $\vec{a}(t) \equiv \vec{a}_0$. Ad esempio $\vec{a}(t) = (0, 0, -g)$, $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$.

Voglio descrivere il moto di un punto materiale.

- $v_z(t) = v_{z,0} + \int_{t_0}^t a_z d\tau = v_{z,0} + a_z \int_{t_0}^t 1 d\tau = v_{z,0} + a_z [\tau]_{t_0}^t = v_{z,0} + a_z(t - t_0)$
- $z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau = z_0 + \int_{t_0}^t (v_{z,0} + a_z(\tau - t_0)) d\tau =$
 $= z_0 + \int_{t_0}^{t_0} (v_{z,0} - a_{z,0}t_0) d\tau + \int_{t_0}^t a_z \tau d\tau = z_0 + (v_{z,0} - a_z t_0) \int_{t_0}^t 1 d\tau + a_z \int_{t_0}^t \tau d\tau =$
 $= z_0 + (v_{z,0} - a_z t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a_z (t^2 - t_0^2) =$
 $= z_0 + v_{z,0}(t - t_0) - a_z t_0 t + a_z t_0^2 + \frac{1}{2} a_z t^2 - \frac{1}{2} a_z t_0^2 = \text{(riscrivo la formula in modo che dipenda solo dall'intervallo di tempo)}$
 $= z_0 + v_{z,0}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_z (t^2 - 2t_0 t + t_0^2) = z_0 + v_{z,0}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_z (t - t_0)^2$
- $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0$
 \vec{a} è costante
 $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$

Facendo la derivata di $\vec{r}(t)$ trovo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \vec{a} 2(t - t_0) + \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0) + \vec{v}_0 .$$

Questa è una verifica.

Esercizio

Un punto materiale viene lasciato cadere da fermo dalla quota h . Conoscendo $\vec{a} = (0, 0, -g)$, trovare dopo quanto tempo tocca terra.

Siccome il corpo parte da fermo $\vec{v}_0 = \vec{0}$ (scritto così indica i tre zeri, valori delle componenti del vettore).

$$\vec{r}_0 = (0, 0, h)$$

$$t_0 = 0$$

(porre i valori uguali a zero è una scelta nostra, fatta perché conveniente)

$$x(t) = 0 + 0 + x_0 = 0$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 + h$$

Al tempo di caduta t_c deve essere $z(t_c) = 0$

$$z(t_c) = 0 \iff -\frac{1}{2}gt_c^2 + h = 0$$

$$t_c^2 = \frac{2h}{g} \left(= \frac{[m]}{\frac{[m]}{[s]^2}} = [s^2] \checkmark \right)$$

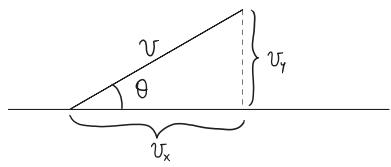
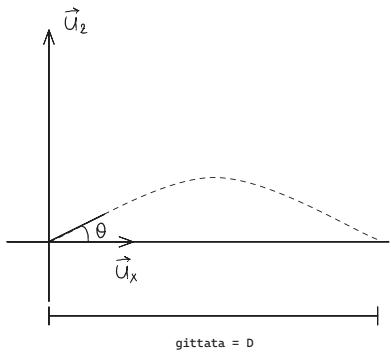
$$t_c = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La soluzione fisica è $t_c > 0 \implies t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

□

Esercizio

Un cannone spara un proiettile con velocità che vale $v = 30 \frac{m}{s}$ all'imbocco. Il cannone fa un angolo θ con l'orizzontale. Conoscendo g , determinare la gittata in funzione di θ . Per che valore di θ è massima?



$$\vec{a} = (0, 0, -g)$$

$$\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$$

$$v_{x,0} = v \cos(\theta)$$

$$v_{y,0} = 0 \text{ (per la scelta degli assi)}$$

$$v_{z,0} = v \sin(\theta)$$

Lungo \vec{u}_z :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t$$

$$x(t) = v_{x,0}t$$

Se t_c è il tempo di caduta ($z(t_c) = 0$), allora la gittata è

$$D = x(t_c) - \cancel{x(t_0)} = x(t_c)$$

$$z(t_c) = -\frac{g}{2}t_c^2 + v_{z,0}t_c = 0 = t_c(-\frac{g}{2}t_c + v_{z,0})$$

Le due soluzioni sono $t_c = 0$ e $t_c = \frac{2v_{z,0}}{g}$. La seconda è maggiore di zero, quindi è la soluzione fisica.

Allora la gittata è

$$D = v_{x,0}t_c = v_{x,0} \frac{2v_{z,0}}{g} = \frac{2v^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{g} = \frac{v^2 \sin(2\theta)}{g} .$$

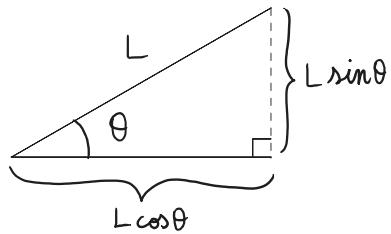
Per trovare l'angolo per cui la gittata è massima bisogna porre $\frac{dD(\theta)}{d\theta} = 0$.

Dalla riscrittura della formula di D in funzione di $\sin(2\theta)$, si trova facilmente che il massimo è in $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

□

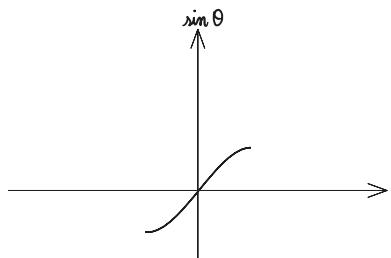
Lezione 02

Funzioni trigonometriche

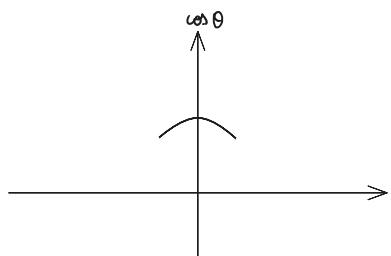


$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \sin \theta = -\sin \theta$$



$$\frac{d^2}{d\theta^2} \cos \theta = -\cos \theta$$



Se conosco una funzione che soddisfa

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) = -f(\theta)$$

allora $f(\theta) = c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta$.

Controllo:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta) = -(c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta)$$

$$c_1 \frac{d^2}{d\theta^2} \sin \theta + c_2 \frac{d^2}{d\theta^2} \cos \theta = -c_1 \sin \theta - c_2 \cos \theta$$

Potevo calcolare un caso più generale

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \sin(k\theta) = \frac{d}{d\theta} k \cos(k\theta) = -k^2 \sin(k\theta)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \cos(k\theta) = -k^2 \cos(k\theta)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) = -k^2 f(\theta) \implies f(\theta) = c_1 \sin(k\theta) + c_2 \cos(k\theta)$$

(si rivedranno queste cose con la forza elastica).

Domanda: qual è la soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} f(\theta) &= f(\theta) \implies f(\theta) = c \cdot e^\theta \\ \frac{d}{d\theta} f(\theta) &= \lambda f(\theta) \implies f(\theta) = c \cdot e^{\lambda\theta} \end{aligned}$$

Per risolvere le equazioni basta ricordare che tutte le equazioni con derivata prima o seconda del tipo

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) + \lambda_1 \frac{d}{d\theta} f(\theta) + \lambda_2 f(\theta) = 0$$

si risolvono con l'esponenziale.

Definizione (sin e cos con il numero di Nepero)

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ i^2 &= -1 \end{aligned}$$

Definizione (numero di Nepero)

Definiamo

$$e^{\lambda\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\theta)^n}{n!}$$

$$\sin(\lambda\theta) = \lambda\theta - \frac{(\lambda\theta)^3}{3!} \dots$$

$$\cos(\lambda\theta) = 1 - \frac{1}{2}(\lambda\theta)^2 + \dots$$

Definizione (numeri complessi)

Un numero complesso z è espresso in termini di due numeri reali a, b come $z = a + ib$.

Il coniugato di z è $\bar{z} = a - ib$.

La parte reale è $a = \frac{z+\bar{z}}{2}$.

La parte immaginaria è $b = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

L'argomento di una funzione trascendente (come $\sin \theta$) è *sempre* un numero puro (non ha grandezza dimensionale).

Un numero complesso z è reale se è uguale alla propria parte reale (e la propria parte immaginaria è zero).

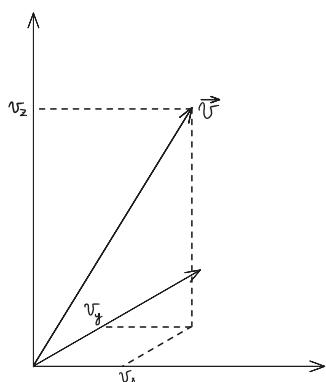
Lezione 03

Vettori (parentesi matematica)

Definizione (vettore)

Fino ad ora, sono stati introdotti i vettori come una terna, ad esempio

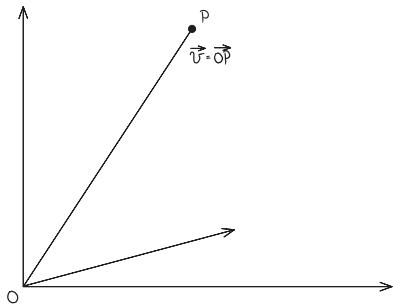
$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$



Esiste anche una definizione che prescinde dalla scelta degli assi: Un vettore è un "segmento orientato", cioè è caratterizzato da

1. lunghezza
2. direzione

3. verso



Vettori con la stessa lunghezza, direzione e verso sono equivalenti.

Operazioni sui vettori

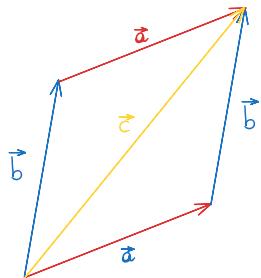
Moltiplicazione di vettori per numeri reali

Se \vec{v} è un vettore e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{v}$ è un vettore

$$\lambda\vec{v} = \begin{cases} \text{se } \lambda > 0 & \lambda\vec{v} \text{ ha direzione e verso come } \vec{v} \text{ e lunghezza } \lambda\text{-volte quella di } \vec{v} \\ \text{se } \lambda < 0 & \lambda\vec{v} \text{ ha direzione come } \vec{v}, \text{ verso opposto a } \vec{v} \text{ e lunghezza } \lambda\text{-volte quella di } \vec{v} \\ \text{se } \lambda = 0 & \lambda\vec{v} = \vec{0} \text{ (vettore nullo)} \end{cases}$$

Somma di vettori

Se \vec{a}, \vec{b} sono vettori, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è un vettore definito dalla "regola del parallelogramma", cioè \vec{c} si ottiene concatenando \vec{a} e \vec{b} :

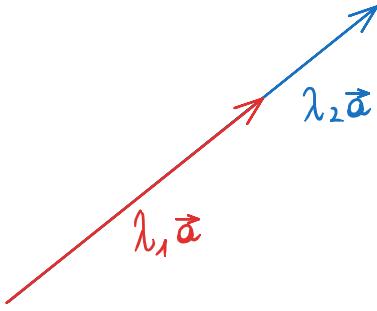


si vede subito che $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Proprietà

Valgono le seguenti proprietà:

- **Associativa:** $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$



Osservazioni/nota bene

è importante scrivere il segno di vettore!

Ad esempio $\vec{a} + \vec{b}$ è definita, mentre $\vec{a} + b$ non ha senso.

Notazione

In futuro, definiremo la differenza di due vettori come

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + ((-1)\vec{b}).$$

Versore (definizione)

Sia \vec{a} un vettore la cui lunghezza denotiamo con $\|\vec{a}\|$. Se $\vec{a} \neq \vec{0}$, allora $\|\vec{a}\| > 0$.

Il vettore

$$\vec{u}_a = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

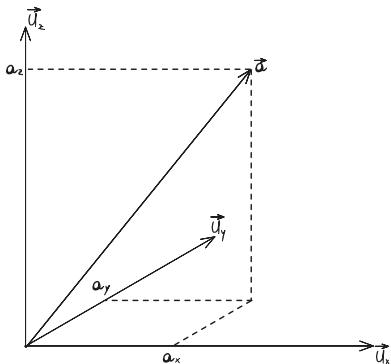
ha direzione e verso di \vec{a} , ma lunghezza $\|\vec{u}_a\| = 1$. Tale vettore si dice il "versore" del vettore \vec{a} .

In generale un "versore" è un vettore di lunghezza unitaria.

.

□

Una terna di assi cartesiani corrisponde a tre versori \vec{u}_x , \vec{u}_y , \vec{u}_z .



Scrivevamo che $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

In termini di versori la stessa espressione diventa

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z.$$

□

Operazioni sui vettori (prodotti tra vettori)

Esistono due nozioni di prodotto tra vettori, che non vanno confuse!

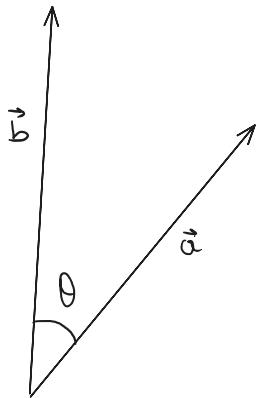
1. Prodotto scalare
2. Prodotto vettore

Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori \vec{a} e \vec{b} si indica con

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

Quindi non si può scrivere $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ né $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

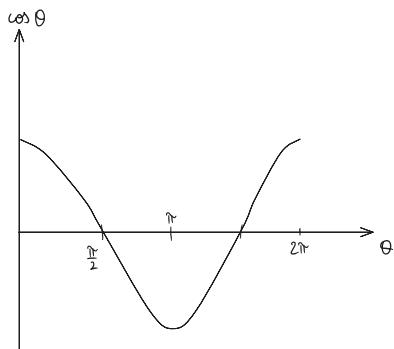


Detto l'angolo che va da \vec{a} a \vec{b} in senso antiorario nel piano individuato da \vec{a}, \vec{b} , allora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \cos \theta$$

Viene naturale chiedersi cosa sia $\vec{b} \cdot \vec{a}$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = ||\vec{b}|| ||\vec{a}|| \underbrace{\cos(2\pi - \theta)}_{\cos \theta}$$



$$\implies \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Si può dire che è COMMUTATIVO.

Proprietà

Valgono le proprietà

- **Commutativa:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- **Distributiva:** $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ e $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Prodotto scalare dei versori ortonormali $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \|\vec{u}_x\| \|\vec{u}_x\| \cos(0) = 1$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \|\vec{u}_x\| \|\vec{u}_y\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = 0 = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = 1 = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z$$

□

$$\text{Sia } \vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z \text{ e } \vec{b} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{a} = \vec{u}_x \cdot (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) = a_x \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x + \underbrace{a_y \vec{u}_y \cdot \vec{u}_x}_{=0} + \underbrace{a_z \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x}_{=0} = a_x$$

$$\text{Similmente } \vec{u}_y \cdot \vec{a} = a_y \text{ e } \vec{u}_z \cdot \vec{a} = a_z$$

Similmente voglio calcolare il prodotto scalare usando le coordinate:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \cdot (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z)$$

$$\text{Osservo che } (a_x \vec{u}_x)(b_y \vec{u}_y) = 0$$

Quindi, continuando

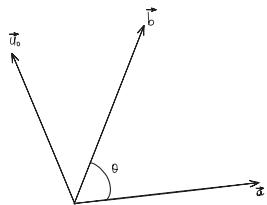
$$= a_x b_x \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x + 0 + 0 + a_y b_y \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y + 0 + 0 + a_z b_z \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\text{In particolare } \vec{a} \cdot \vec{a} = (a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2 = \|\vec{a}\| \|\vec{a}\| \cos(0) = \|\vec{a}\|^2$$

$$\implies \|\vec{a}\| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

Prodotto vettore

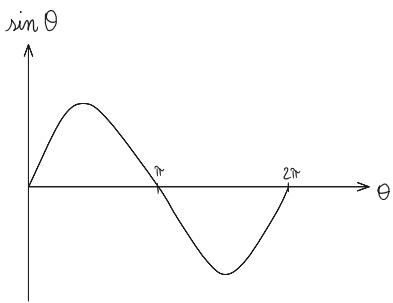
Il prodotto vettore di \vec{a} e \vec{b} è un vettore,



$$\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta \vec{u}_0$$

Nota bene

Se \vec{a} e \vec{b} sono paralleli $\theta = 0$ ($\circ \theta = \pi$) $\sin 0 = \sin \pi = 0$



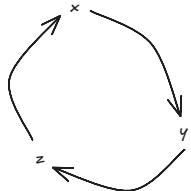
Quindi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se sono paralleli.

In generale $\vec{b} \times \vec{a} = ||\vec{a}|| ||\vec{b}|| \underbrace{\sin(2\pi - \theta)}_{= -\sin \theta} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

Prodotto vettore dei versori ortonormali

$$\begin{aligned}\vec{u}_x \times \vec{u}_x &= \vec{0} \\ \vec{u}_x \times \vec{u}_y &= \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_x &= -\vec{u}_z \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_z &= \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_y &= -\vec{u}_x \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_x &= \vec{u}_y \\ \vec{u}_x \times \vec{u}_z &= -\vec{u}_y\end{aligned}$$

Trucchetto mnemonico



Seguendo le frecce si ha un risultato positivo, andando al contrario negativo.

Proprietà

- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (non è associativo)

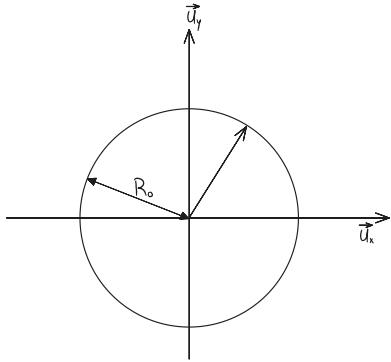
Esempio: $\vec{u}_x \times \vec{u}_z = -\vec{u}_y = \vec{u}_x \times (\vec{u}_x \times \vec{u}_y) \neq (\vec{u}_x \times \vec{u}_x) \times \vec{u}_y = \vec{0}$

$$\begin{aligned}\text{Calcoliamo } \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \times (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z) = \\ &= \vec{0} + a_x b_y \vec{u}_z + a_x b_z (-\vec{u}_y) + a_y b_x (-\vec{u}_z) + \vec{0} + a_y b_z \vec{u}_x + a_z b_x \vec{u}_y + a_z b_y (-\vec{u}_x) + \vec{0} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x + (-a_z b_z + a_z b_x) \vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Lezione 04

La cinematica del "punto materiale" (continuo)

Moto circolare uniforme



Questo moto si svolge in un piano lungo un cerchio, con legge oraria

$$\vec{r}(t) = R_0 \cos(\omega(t - t_0)) \vec{u}_x + R_0 \sin(\omega(t - t_0)) \vec{u}_y$$

In effetti

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{R_0^2 \cos^2(\omega(t - t_0)) + R_0^2 \sin^2(\omega(t - t_0))} = \sqrt{R_0^2 [(\cos^2(\omega(t - t_0)) + \sin^2(\omega(t - t_0)))]} = \sqrt{R_0^2} = R_0$$

Quindi $\forall t$ vale che $\|\vec{r}(t)\| = R_0$.

Si scrive anche

$$\vec{r}(t) = R_0 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x + R_0 \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_y \quad \text{con } \phi = -\omega t_0$$

Interpretazione

Prima formula

$[t] = s \implies [\omega] = \frac{1}{s} = \frac{\text{rad}}{s}$ (perché l'argomento del seno e coseno deve essere un numero puro)

ω si chiama "velocità angolare" \sim angolo/secondo.

Nella prima formula, t_0 è l'istante in cui il moto è in $\vec{r}(t_0) = R_0 \vec{u}_x$. Questo accade anche se $t = t_0 + \frac{2\pi}{\omega} N$ con $N \in \mathbb{Z}$. Infatti

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\left(t + \frac{2\pi N}{\omega}\right)$$

Dimostrazione

Si osserva che $\cos(\omega t - \omega t_0) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi N}{\omega}\right) - \omega t_0\right) = \cos(\omega t + 2\pi N - \omega t_0) \quad \checkmark$
Idem per il seno.

□

Il moto si ripete ogni

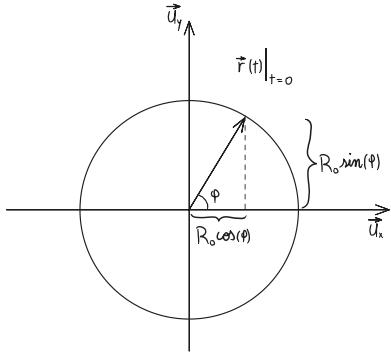
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e T si chiama *periodo*.

Seconda formula

Nella seconda formula (con ϕ) .

$$\vec{r}(0) = R_0(\cos \phi) \vec{u}_x + R_0 \sin(\phi) \vec{u}_y$$



ϕ è la "fase" o offset del moto a $t = 0$.

Velocità

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

Calcolo la derivata

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} (R_0 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x) + \frac{d}{dt} (R_0 \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_y) = \\ &= -R_0 \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_x + R_0 \omega \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_y = \\ ||\vec{v}(t)|| &= \sqrt{R_0^2 \omega^2 (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi))} = R_0 \omega \end{aligned}$$

Accelerazione

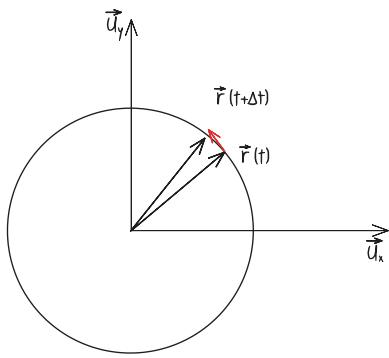
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

Calcolo la derivata

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} (-R_0 \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_x) + \frac{d}{dt} (R_0 \omega \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_y) = \\ &= -R_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x - R_0 \omega^2 \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_y = \\ &= -\omega^2 \vec{r}(t) \end{aligned}$$

L'accelerazione è proporzionale alla velocità.

Facciamo uno zoom



Δt è piccolo (se ω è positivo)

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

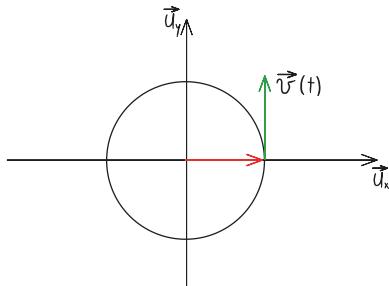
$\vec{v}(t)$ è tangente alla circonferenza.

Esempio

Ad esempio se $\phi = 0$ e $t = 0$

$$\vec{r}(t) = R_0 \vec{u}_x$$

$$\vec{v}(t)|_{t=0} = R_0 \omega \vec{u}_y$$



Moto armonico (semplice)

Il moto armonico è la proiezione del moto circolare uniforme lungo un asse, ad esempio \vec{u}_x .

$$\vec{r}(t) = R_0 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x$$

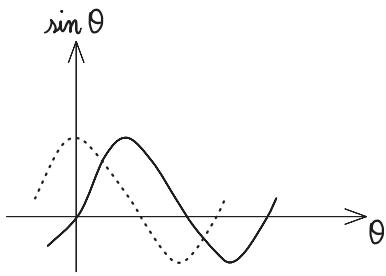
$$\vec{v}(t) = -R_0 \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_x$$

$$\vec{a}(t) = -R_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

Proiettando rispetto \vec{u}_y avrei trovato

$$\vec{r}(t) = R_0 \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_y$$

Ricordo che



Ricordo che $\phi = \tilde{\phi} + \frac{\pi}{2}$, perciò

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R_0 \sin\left(\omega t + \tilde{\phi} + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y = R_0 \cos(\omega t + \tilde{\phi}) \vec{u}_y \\ \vec{r}(t) \cdot \vec{u}_x &= \vec{r}(\tilde{t}) \cdot \vec{u}_y \quad \text{con } \tilde{t} = t + \frac{\pi}{2\omega} \\ R_0 \cos(\omega t + \phi) &= R_0 \sin(\omega \tilde{t} + \phi) = R_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \phi\right) = R_0 \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Si può anche scrivere per il moto armonico

$$R_1 \sin(\omega t) + R_2 \cos(\omega t) = R_0 \sin(\omega t + \phi) =$$

usando le formule di addizioni degli angoli

$$= R_0 \sin(\omega t) \cos(\phi) + R_0 \cos(\omega t) \sin(\phi) \quad \text{con } R_1 = R_0 \cos(\phi) \text{ e } R_2 = R_0 \sin(\phi)$$

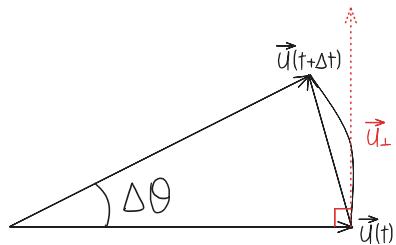
che è equivalente a fare l'equazione differenziale che da come risultato

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t) \iff a_x(t) = -\omega^2 x(t)$$

□

Derivata di un versore rotante

Sia $\vec{u}(t)$, $\|\vec{u}\| = 1$ un versore rotante



$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) \approx \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} \approx \frac{\text{distanza percorsa}}{\Delta t} \vec{u}_{\perp} \approx \frac{\Delta \theta \|\vec{u}(t)\|}{\Delta t} \vec{u}_{\perp}(t)$$

Siccome $\|\vec{u}(t)\| = 1$ ($\vec{u}(t)$ è un versore)

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \vec{u}_{\perp}(t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{\perp}(t)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t)$$

è la velocità angolare.

Si può vedere anche la derivata seconda

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \vec{u}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp(t) \right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\perp(t) + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\perp(t)}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\perp(t) + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_\perp(t) \\ &\quad \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{\perp,\perp}(t)\end{aligned}$$

Ritroviamo il moto circolare se assumiamo che $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ è costante ($\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$). Definiamo

$$\vec{r}(t) = R_0 \vec{u}(t) \implies \vec{a}(t) = -R_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

Lezione 05

La dinamica (del punto materiale)

La dinamica vuole spiegare le cause e la maniera del moto a partire dal *Principio di inerzia* e sulla base del concetto di forza.

Principio di inerzia (prima legge della dinamica)

Se su un corpo non agisce alcuna forza, allora questo si muove a velocità costante \vec{v} .

Nota bene

Può essere che $\vec{v} = \vec{0}$, ma non è necessario.

(idea che si deve a Galileo, che cambia il paradigma precedente di Aristotele, che sosteneva che per mantenere un oggetto a velocità costante bisognasse continuare ad applicare una forza).

Il primo principio della dinamica si può assorbire nel secondo.

Quantità di moto

Per formulare matematicamente la prima e seconda legge della dinamica, si introduce la quantità di moto \vec{p} .

Per un punto materiale

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$[\vec{p}] = kg \cdot \frac{m}{s}.$$

Legge di Newton (secondo principio della dinamica)

La Legge di Newton dice che

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{variazione nel tempo}} \underbrace{\vec{p}(t)}_{\text{quantità di moto}} = \underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)}_{\text{forza agente sul corpo, dipendente dai parametri}}$$

Cioè che la variazione della quantità di moto nel tempo di un corpo, è uguale alla forza agente sul corpo (che in generale dipende dalla posizione e la velocità del corpo, potrebbe dipendere anche dal tempo).

$$[\vec{F}] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

Per un punto materiale

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a}$$

se m è cost., $\frac{d}{dt}(m) = 0$

(ad esempio: nel caso di un razzo la massa non è costante, perché il carburante viene bruciato e la massa diminuisce)

Nella maggior parte dei casi la massa è costante, quindi la formula si può scrivere come

$$\implies " \vec{F} = m\vec{a}"$$

Interpretazione

Se conosco la massa di un punto materiale e la forza \vec{F} che agisce su di esso, allora so che l'accelerazione è $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$ e facendo due integrali posso trovare la legge oraria $\vec{r}(t)$.

(non è completamente corretto perché servono due condizioni iniziali come costanti di integrazione, ad esempio $\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$).

Commento

m è la massa ed è la *massa **inerziale***, che ostacola il cambiamento del moto (quindi della velocità, quando la massa è costante). A parità di forza, più m è grande, più l'accelerazione è piccola.

Interpretazione alternativa

L'equazione $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ è la definizione della forza.

Osservando il moto $\vec{r}(t)$ deduco quanto vale $\frac{d\vec{p}}{dt}$ (oppure \vec{a}) e se $\vec{a} \neq 0$ deve esserci una forza \vec{F} che agisce sul corpo.

Sapendo il valore di m , posso calcolare \vec{F} .

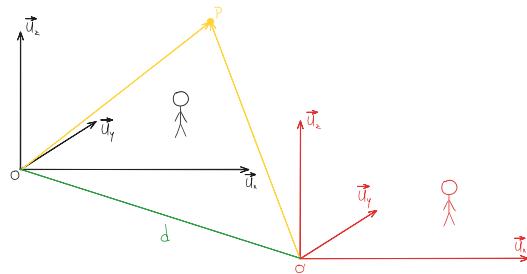
Legge o Principio di azione e reazione (terza legge della dinamica)

Se un corpo A esercita una forza \vec{F}_{AB} su un corpo B , allora B esercita la forza

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

(che ha la stessa intensità, la stessa direzione e verso opposto) su A .

Validità delle leggi della dinamica



Le leggi del moto hanno la stessa forma in O e O' se questi due sistemi sono "inerziali" l'uno rispetto all'altro, cioè che si muovono a velocità costante l'uno rispetto all'altro.

In O : $\vec{r}(t) = \vec{OP}(t)$.

In O' : $\vec{r}'(t) = \vec{O'P}(t)$

Se i sistemi sono inerziali $\vec{O'O}(t) = \vec{d} + \vec{v}_{OO'}t$, infatti $\frac{d}{dt}\vec{O'O}(t) = \vec{v}_{OO'}$ e $\frac{d^2}{dt^2}\vec{O'O}(t) = \vec{0}$.

Nota: $\vec{OP}(t) = \vec{O'O}(t) + \vec{O'P}(t)$

Quindi riscrivendo l'equazione trovo $\vec{r}(t) = \vec{d} + \vec{v}_{OO'}t + \vec{r}'(t)$.

Facendo la derivata $\vec{v}(t) = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}'(t)$.

Facendone un'altra $\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$.

(la relatività ristretta è una conseguenza di ciò).

Esempi di forze

Forza elastica

È la forza più importante.

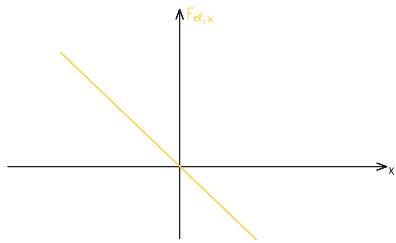
$$\vec{F}_{el} = -k\vec{r}$$

k è la costante elastica, $[k] = \frac{N}{m}$.

Esempio con interpretazione

Per fare un esempio di questa forza, considero un corpo che può muoversi solo in una direzione.

$$F_{el,x} = -kx$$



Se $x = 0$, $F_{el,x} = 0$

Se $x > 0$, $F_{el,x} < 0$ (mi "riporta indietro")

Se $x < 0$, $F_{el,x} > 0$ (mi "porta avanti")

(la forza "vuole riportare" verso l'origine)

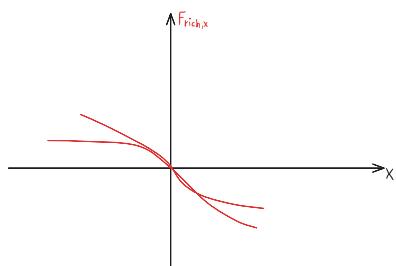
Forza elastica come forza di richiamo

Qualitativamente, questo è il comportamento di una "forza di richiamo", cioè la forza che è nulla se si è in un punto zero, mentre se il sistema viene turbato, la forza cerca di riportarlo allo stato iniziale.

Se $\vec{F}_{ric,x}(x)$ è una forza di richiamo tale che $\vec{F}_{ric,x}(0) = 0$, allora

$$F_{rich,x}(x) = \underbrace{0}_{\text{in } x=0 \text{ il corpo è a riposo}} + \underbrace{\frac{d}{dx} F_{rich,x} \Big|_{x=0}}_{-k} \cdot x + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} F_{rich,x} \Big|_{x=0} \cdot x^2$$

$$F_{rich,x} = -kx + o(x^2)$$



\Rightarrow qualsiasi forza di richiamo è approssimata dalla forza elastica per piccoli spostamenti.

□

Formula per la forza in una sola dimensione

Non è importante che la posizione "di riposo" (dove $F(x) = 0$) sia proprio $x = 0$.

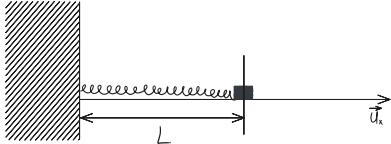
In generale

$$F_{el,x} = -k(x - x_0)$$

□

Esempio

Per una molla attaccata a un muro:

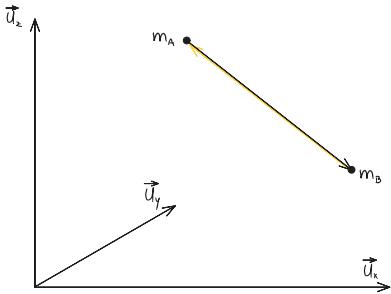


allora $F_{el,x} = -k(x - L)$ (cioè la forza è zero se $x = L$) .

□

Forza di gravitazione universale

La forza di gravitazione universale tra i due corpi A e B è la forza che A (di massa inerziale m_A) esercita su B (di massa inerziale m_B)



$$\vec{F}_{AB} = -G_N \frac{m_A m_B}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{AB}$$

G_N è la costante di gravitazione universale, $[G_N] = \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Il segno meno indica che è una forza attrattiva lungo $\vec{u}_{AB} = -\vec{u}_{BA}$, da cui individuo

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Infatti

$$\vec{F}_{BA} = -G_N \frac{m_A m_B}{\|\vec{r}_B - \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{BA} = \vec{F}_{AB} = -G_N \frac{m_A m_B}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|^2} (-\vec{u}_{AB}) = -\vec{F}_{AB}$$

Accelerazione

$$\begin{cases} \cancel{m_A} \vec{a}_A = \vec{F}_{AB} = -G_N \frac{\cancel{m_A} m_B}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{AB} \implies \vec{a}_A = -G_N \frac{m_B}{\|\vec{r}_A + \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{AB} \\ \cancel{m_B} \vec{a}_B = \vec{F}_{BA} = G_N \frac{\cancel{m_A} m_B}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{BA} \implies \vec{a}_B = G_N \frac{m_A}{\|\vec{r}_A + \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{BA} \end{cases}$$

L'accelerazione di A non dipende da m_A , allo stesso modo l'accelerazione di B non dipende da m_B .

□

Massa gravitazionale

La massa inerziale è definita dalla Legge di Newton indipendentemente dalla forza che consideriamo. È un fatto inaspettato che la stessa massa abbia anche il ruolo di "massa gravitazionale", che determina l'intensità della forza di gravitazione universale.

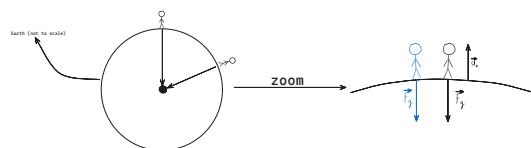
È il risultato di un esperimento (di Eötvös).

□

$$G_N = 6,6743 \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$$

Studio di un caso particolare

Vogliamo stimare \vec{F}_{AB} nel caso di un corpo sulla superficie terrestre.



La forza punta verso il centro della Terra.

Prendiamo come distanza $||\vec{r}_A - \vec{r}_B|| = \text{raggio Terra}$.

$r_T \approx 6,4 \cdot 10^6 m$;

m_A = la massa dell'oggetto (non serve specificarla, come abbiamo visto prima si cancella);

$m_B = m_T$ = massa Terra;

$m_T \approx 6,0 \cdot 10^{24} kg$.

Quindi, in modulo, l'accelerazione dovuta all'attrazione della Terra è

$$||\vec{a}_A|| = \frac{G_N m_T}{r_T^2} \approx \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6)^2} \approx 1 \cdot 10^1 \approx 10 \frac{m}{s^2} \approx 9,8 \frac{m}{s^2}$$

La forza peso sulla superficie terrestre vale

$$\vec{F}_p = -mg\vec{u}_z \quad g \approx 9,8 \frac{m}{s^2} \quad m \text{ è la massa del corpo sul quale la forza agisce}$$

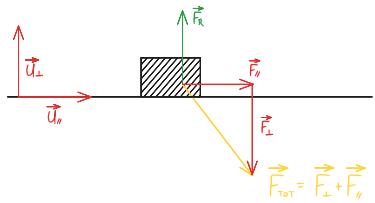
□

Terminologia e Reazione vincolare

- La somma di tutte le forze agenti su un corpo si chiama *risultante*.

Ad esempio: $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_P + \vec{F}_{el}$

- Per un corpo su un piano è utile decomporre le forze (e/o la risultante)



dove \vec{F}_\perp è perpendicolare al piano e \vec{F}_\parallel parallela al piano.

Posso anche dire che $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_\perp \vec{u}_\perp + \vec{F}_\parallel \vec{u}_\parallel$

- La *forza di reazione vincolare* è diretta in maniera ortogonale al piano e ha intensità pari alla risultante delle forze entranti nel piano.

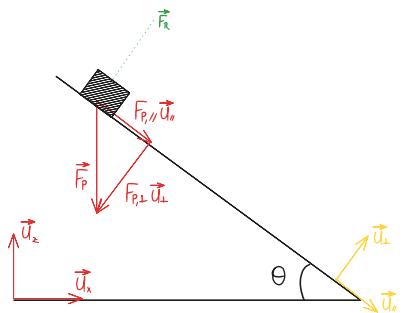
Forza d'attrito ("radente")

$$\vec{F}_a = \begin{cases} -\vec{F}_\parallel & \text{se } \|\vec{F}_\parallel\| \leq \mu_s \|\vec{F}_\perp\| \\ -\mu_d \|\vec{F}_\perp\| |\vec{u}_v| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

μ_s è il coefficiente di attrito statico.

μ_d è il coefficiente di attrito dinamico.

Il piano inclinato (liscio)



I versori (\vec{u}_x, \vec{u}_z) sono ruotati dell'angolo θ rispetto a $(\vec{u}_\parallel, \vec{u}_\perp)$.

$$\vec{F}_p = -mg\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_R = F_R \vec{u}_\perp$$

vogliamo quindi decomporre

$$\vec{F}_p = F_{p,\perp} \vec{u}_\perp + F_{p,\parallel} \vec{u}_\parallel$$

Trucco per ricordare a quale assegnare il seno e a quale il coseno

Se θ è quasi zero $F_{p,\perp} = -mg$ e $F_{p,\parallel} \approx 0$.

Quindi $F_{p,\parallel} = mg \sin(\theta)$ e $F_{p,\perp} = -mg \cos(\theta)$.

□

Descrizione del moto

$$m\vec{a} = \vec{F}_P + \vec{F}_R$$

Scomponiamo questa equazione lungo \vec{u}_\perp , \vec{u}_\parallel .

Lungo \vec{u}_\perp :

$$a_\perp = 0$$

$$ma_\perp = F_{p,\perp} + F_R \implies F_R = -F_{p,\perp} = mg \cos(\theta)$$

Lungo \vec{u}_\parallel :

$$ma_\parallel = F_{p,\parallel}$$

$a_\parallel = \frac{1}{m}F_{p,\parallel} = \frac{1}{m}mg \sin(\theta) = g \sin(\theta)$. (il modo in cui galileo studiava la caduta dei gravi).

Il piano inclinato (scabro)

Le \vec{F}_P e \vec{F}_R seguono il caso liscio. In più abbiamo \vec{F}_a (forza d'attrito).

$$\vec{F}_P = -mg\vec{u}_z = -mg \cos \theta \vec{u}_\perp + mg \sin \theta \vec{u}_\parallel$$

$$\vec{F}_R = F_R \vec{u}_\perp$$

Ci aspettiamo che per θ piccolo non ci sia alcun moto. Questo avviene se $\|\vec{F}_\parallel\| = \|\vec{F}_{P,\parallel}\| \leq \mu_s \|\vec{F}_{P,\perp}\|$.

Quindi se $mg \sin(\theta) \leq \mu_s mg \cos(\theta) \iff \tan(\theta) \leq \mu_s$ non c'è moto.

Descrizione del moto per $\tan \theta > \mu_s$

Lungo \vec{u}_\perp :

$$a_\perp = 0$$

$$ma_\perp = F_{P,\perp} + F_R \implies F_R = mg \cos(\theta)$$

Lungo \vec{u}_\parallel :

Ora abbiamo anche $\vec{F}_a = -\mu_d mg \cos(\theta) \vec{u}_v$, $\vec{u}_v = \pm \vec{u}_\parallel$ a seconda delle condizioni iniziali.

Moto in discesa ($\vec{u}_v = \vec{u}_\parallel$):

Lungo \vec{u}_\parallel :

$$ma_\parallel = F_{P,\parallel} + F_a$$

$$ma_\parallel = mg \sin(\theta) - \mu_d mg \cos(\theta)$$

$$a_\parallel = g \sin(\theta)(1 - \mu_d \cot(\theta))$$

Moto in salita ($\vec{u}_v = -\vec{u}_\parallel$):

Lungo \vec{u}_\parallel :

$$ma_\parallel = F_{P,\parallel} + F_a$$

$$ma_\parallel = mg \sin(\theta) + \mu_d mg \cos(\theta) \quad (\text{il più viene da } -\vec{u}_v = +\vec{u}_\parallel)$$

$$a_\parallel = g \sin(\theta)(1 + \mu_d \cot(\theta))$$

Forza d'attrito (viscoso, in assenza di vortici)

$$\vec{F}_{visc} = -b\vec{v}$$

b è il coefficiente di attrito viscoso

$$[b] = \frac{Ns}{m}$$

In questo caso $m\vec{a} = b\vec{v}$

Lungo \vec{u}_v : $ma = -b\vec{v}$

$$a = -\frac{b}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v$$

La soluzione di quest'equazione differenziale è $v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$.

$[\frac{b}{m}] = \frac{Ns}{m \cdot kg} = \frac{1}{s}$, l'esponente di e è un numero puro, quindi l'equazione ha dimensioni fisiche corrette.

Lezione 06

Risoluzione equazione differenziale

Abbiamo visto

$$F_{visc} = -bv$$

in una dimensione $ma = -bv \implies a = -\frac{b}{m}v$

$$\implies \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{b}{m}v(t)$$

Si prova a scrivere $v(t) = v_0 e^{\lambda t}$, con $[\lambda] = \frac{1}{s}$ e $[v_0] = \frac{m}{s}$, allora

$$\frac{d}{dt}(v_0 e^{\lambda t}) = -\frac{b}{m}(v_0 e^{\lambda t}) \implies v_0 \lambda e^{\lambda t} = -\frac{b}{m}v_0 e^{\lambda t}$$

Se questa è una soluzione, deve valere $\forall t \in \mathbb{R} \implies \lambda = -\frac{b}{m}$.

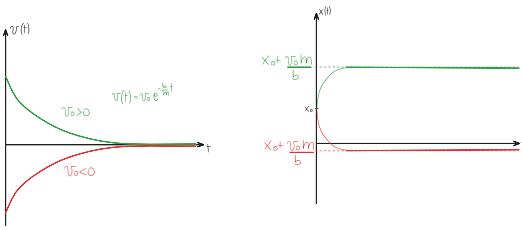
La costante v_0 è fissata da $v(t)|_{t=0} = v_0 e^0 = v_0$ (è la velocità al tempo $t = 0$).

Legge oraria

Per trovare la posizione $x(t)$ risolvo

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = x_0 \int_0^t v_0 e^{-\frac{b}{m}\tau} d\tau = x_0 + v_0 \int_0^t e^{-\frac{b}{m}\tau} d\tau \\ &= x_0 + v_0 \left[-\frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}\tau} \right]_0^t = x_0 + v_0 \left(-\frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{m}{b} e^0 \right) = x_0 + \frac{v_0 m}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t}) \end{aligned}$$

In presenza di F_{visc} , in una dimensione



Questo moto può apparire simile a quello dovuto alla forza elastica in una dimensione, che ricordiamo essere

$$F_{el} = -kx \implies ma = -kx, a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Risoluzione equazione differenziale

Proviamo a risolvere con $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$.

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0 e^{\lambda t}) = -\frac{k}{m}x_0 e^{\lambda t} \implies x_0 \lambda^2 e^{\lambda t} = -\frac{k}{m}x_0 e^{\lambda t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Posso semplificare perché $e^{\lambda t} \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Se $x_0 \neq 0 \implies \lambda^2 = -\frac{k}{m}$

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(due soluzioni complesse).

\implies una soluzione è $x(t) = x_0 e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$, mentre l'altra soluzione è $x(t) = x_1 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$.

In generale, $x(t) = x_0 e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + x_1 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ è una soluzione per ogni x_0, x_1 . È complessa!

Per trovare le soluzioni reali, bisogna scegliere $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$ in maniera opportuna:

$x_0 = A_0 + iB_0; x_1 = A_1 + iB_1;$ con $A_0, A_1, B_0, B_1 \in \mathbb{R}$.

$$x(t) = (A_0 + iB_0)e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + (A_1 + iB_1)e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

Ora impongo che $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x(t) \in \mathbb{R} \iff x(t) = (x(t))^*$$

Allora ottengo

$$\begin{aligned} x(t) &= (A_0 + iB_0)e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + (A_1 + iB_1)e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ &= (x(t))^* = (A_0 - iB_0)e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + (A_1 - iB_1)e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{aligned}$$

Impongo $x(t) = (x(t))^*$

$$\begin{cases} (A_0 + iB_0) = (A_1 - iB_1) \\ (A_1 - iB_1) = (A_0 - iB_0) \end{cases} \implies \begin{cases} A_0 = A_1, B_0 = -B_1 \\ A_0 = A_1, B_0 = -B_1 \end{cases}$$

$$A \equiv A_0 \equiv A_1, \quad B \equiv B_0 \equiv B_1$$

$$x(t) = (A + iB)e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + (A + iB)e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = 2A \left(\frac{e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}}}{2} \right) + 2B \left(\frac{e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}} - e^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}}}{2i} \right)$$

$$x(t) = 2A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) - 2B \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) = C \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi \right)$$

che è la soluzione dell'equazione del moto armonico.

Quando abbiamo trovato $x(t) = x_0 e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ avremmo potuto prendere $x_0 = 0 \implies x(t) = 0 \forall t$, che è una soluzione! (quella in cui la molla sta ferma in $x = 0$) .

□

Le equazioni della dinamica (in una dimensione)

Le equazioni della dinamica (in una dimensione) sono del tipo $ma = F_{tot}$ e abbiamo visto che in generale può essere

$$F_{tot} = \underbrace{-bv - kx}_{F_{visc} \quad F_{el}} + \underbrace{F_{ex}(t)}_{\text{può dipendere dal tempo } t}$$

In termini di derivate $a = \frac{1}{m}F_{tot}$

$$(*) \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{b}{m} \frac{d}{dt}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}F_{ex}(t)$$

è un'equazione differenziale lineare (cioè con x^1) a coefficienti costanti *affine* (cioè il termine non dipendente da x è diverso da zero) .

La stessa equazione con zero al membro di destra è detta *equazione omogenea associata*:

$$(**) \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{b}{m} \frac{d}{dt}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Nota

- $x(t) = 0$ risolve sempre l'equazione omogenea.
- Se $x_1(t)$ risolve $(**)$ e $x_2(t)$ risolve $(**)$, allora $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ risolve $(**)$

- Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ risolvono $(**)$ e $x_0(t)$ risolve $(*)$, allora
 $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ risolve $(*)$

Dimostrazione

Calcoliamo $(*)$ per una tale $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}(x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)) + \frac{b}{m} \frac{d}{dt}(x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)) + \\ & + \frac{k}{m}(x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{d^2}{dt^2}x_0(t) + c_1 \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) + c_2 \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) + \\ & + \frac{b}{m} \frac{d}{dt}x_0(t) + c_1 \frac{b}{m} \frac{d}{dt}x_1(t) + c_2 \frac{b}{m} \frac{d}{dt}x_2(t) + \\ & + \frac{k}{m}x_0(t) + \frac{k}{m}c_1x_1(t) + \frac{k}{m}c_2x_2(t) = \end{aligned}$$

La somma dei termini con c_1 è uguale a zero, perché $x_1(t)$ soddisfa $(**)$ (cioè è la soluzione dell'equazione associata).

Avviene l'analogo con c_2 e $x_2(t)$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \frac{d^2}{dt^2}x_0(t) + \frac{b}{m} \frac{d}{dt}x_0(t) + \frac{k}{m}x_0(t) = \frac{1}{m}F_{ex}(t)$$

E quindi $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ risolve $(*)$.

□

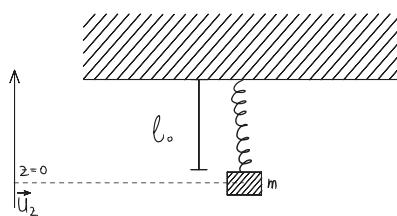
Lezione 07

Oscillazioni

Ricaviamo le equazioni tramite la risoluzione di un problema (x) .

Una massa m è appesa a una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 . Per il momento si trascuri attrito e forza peso.

Si scomponga il moto lungo l'asse verticale \vec{u}_z e lo si studi in una dimensione.



1.

Verificare che per una scelta appropriata dell'origine dell'asse z , la legge oraria è

$$(1) \quad z(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

determinando ω e spiegando se questa è la soluzione più generale

Se la molla è ferma, la massa è a distanza l_0 dal soffitto.

In (1) la molla è ferma se $A=0 \Rightarrow$ è necessario che $z=0$ sia la quota che dista l_0 dal soffitto.

Con questa scelta di z , la forza elastica vale $F_{el} = -kz$.

$$\cancel{\frac{m}{m}} a = -\frac{k}{m} z.$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(z(t)) = -\frac{k}{m} z(t) \text{ uso (1)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(A \cos(\omega t + \phi)) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi)$$

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (scelgo la soluzione positiva per } \omega).$$

È la più generale perché è un'equazione di secondo grado e ha due parametri liberi A e ϕ .

2.

Assumendo che a $t=0$ la posizione e la velocità valgano z_0, v_0 , determinare A e ϕ .

Ci serve ricordare quanto vale $v(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt} z(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi).$$

Metto $t=0$ nelle espressioni:

$$v(0) = -\omega A \sin(\phi) = v_0$$

$$z(0) = A \cos(\phi) = z_0$$

Facendo il rapporto trovo:

$$\frac{-\omega \sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{v_0}{z_0}$$

$$\tan(\phi) = -\frac{v_0}{\omega z_0}$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega z_0}\right)$$

Riscrivo $v(0)$: $A \sin(\phi) = -\frac{v_0}{\omega}$, così che entrambe le equazioni hanno l'unità di misura del metro, quindi ne posso sommare i quadrati.

Sommendo i quadrati delle due equazioni sopra trovo che:

$$A^2 \cos^2(\phi) + A^2 \sin^2(\phi) = z_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$A = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \text{ (ho scelto la soluzione positiva)}$$

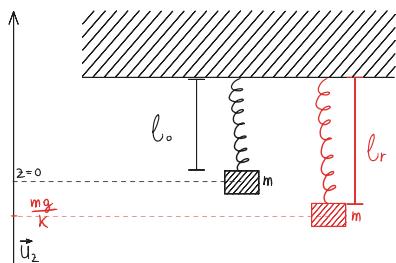
Excusus

Se avessi scelto $\omega' = -\omega = -\sqrt{\frac{k}{m}}$ avrei trovato:
 $z(t) = A \cos(\omega't + \phi) = A \cos(-\omega t + \phi) =$
 Ma ricordo che $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$
 Quindi: $= A \cos(\omega t - \phi)$.

Le scelte del segno sono quindi ridondanti, infatti potendo scegliere un qualsiasi ϕ e A , posso arrivare alle soluzioni volute.

□

Prendiamo in considerazione anche F_p .



1.

Sia l_r la lunghezza a riposo della molla in presenza della forza peso. Trovare $\Delta l = -|l_r - l_0| < 0$.

A riposo, $a = 0$. Quindi:

$$0 = ma = F_{tot} = -kz - mg \Big|_{z=z_{\text{riposo}}} \implies z_{\text{riposo}} = -\frac{m}{k}g$$

$$\Delta l = -\frac{mg}{k}$$

2.

Verificare che la legge oraria è ora

$$(2) \quad z(t) = \Delta l + A \cos(\omega t + \phi)$$

e spiegare l'interpretazione fisica della coordinata $\tilde{z}(t) = z(t) - \Delta l$

.

$$\cancel{\frac{m}{m}} a = -\frac{k}{m} z - \cancel{\frac{m}{m}} g$$

$\frac{d^2}{dt^2} z(t) + \frac{k}{m} z(t) = -g$ è un'equazione affine

$\frac{d^2}{dt^2} z_0(t) + \frac{k}{m} z_0(t) = 0$ è l'equazione associata (che abbiamo appena risolto)

La soluzione più generale dell'equazione affine è $z(t) = z_*(t) + z_0(t)$, dove z_* è una particolare soluzione dell'equazione affine (quella che preferisco!) e $z_0(t)$ è la più generale soluzione dell'equazione omogenea associata, ovvero $z_0(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

Una soluzione particolare dell'equazione affine è quella in cui la molla è ferma nella posizione di riposo $z(t) = \Delta l$.

Verifico:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\Delta l) + \frac{l}{m}\Delta l &= -g \\ 0 + \frac{k}{m}\Delta l &= -g \\ \implies \Delta l &= -\frac{mg}{k} \quad \checkmark \end{aligned}$$

La legge oraria si può scrivere:

$$\underbrace{z(t) - \Delta l}_{\tilde{z}(t)} = A \cos(\omega t + \phi)$$

Notare che $\tilde{z}(t) = 0$ se la molla è ferma.

Si può anche verificare che $\tilde{z}(t)$ soddisfa l'equazione omogenea (senza $-mg$).

Noto che il moto della molla è lo stesso al netto di uno spostamento.

Consideriamo inoltre l'effetto della forza dei attriti viscosi.

$$F_{\text{visc}} = -bv.$$

1.

Scrivere la risultante delle forze e le equazioni del moto in termini di z e \tilde{z}

In termini di z :

$$ma = F_{\text{tot}} = \underbrace{-bv}_{F_{\text{visc}}} - \underbrace{kz}_{F_{\text{el}}} - \underbrace{mg}_{F_p}$$

In termini di \tilde{z} :

$$\tilde{z} = z - \Delta \quad \text{e} \quad z = \tilde{z} + \Delta l$$

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{z}}{dt} = \frac{d}{dt}(z - \Delta l) = v; \quad \tilde{a} = a \quad \text{analogamente.}$$

Quindi:

$$m\tilde{a} = -b\tilde{v} - k(\tilde{z} + \Delta l) - mg = -b\tilde{v} - k\tilde{z} - k\Delta l - mg$$

Ricordando $\Delta l = -\frac{mg}{k}$ trovo che:

$$m\tilde{a} = -b\tilde{v} - k\tilde{z} - k\left(-\frac{mg}{k}\right) - mg$$

$$m\tilde{a} = -b\tilde{v} - k\tilde{z}$$

Spiegare perché la soluzione più generale del moto deve essere

2.

$$\tilde{z}(t) = Be^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_2 t}$$

Per opportuni $\lambda_1, \lambda_2, B, C$, anche complessi:

- $\tilde{z}(t)$ tiene conto della forza peso
- L'esponenziale va bene perché l'equazione è lineare
- Ci aspettiamo due soluzioni $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$, poi facciamo combinazioni lineari

È un'equazione con due parametri liberi di variare.

3. **Trovare λ_1 e λ_2 in termini di $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\gamma = \frac{b}{2m}$.**

$$\begin{aligned}\tilde{a} + \frac{b}{m}\tilde{v} + \frac{k}{m}\tilde{z} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}\tilde{z}(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) + \omega^2\tilde{z}(t) &= 0\end{aligned}$$

Proviamo che in generale $\tilde{z} = Ae^{\lambda t}$:

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{\lambda t}) + 2\gamma\frac{d}{dt}(Ae^{\lambda t}) + \omega^2Ae^{\lambda t} = 0$$

$$A\lambda^2e^{\lambda t} + 2\gamma A\lambda e^{\lambda t} + \omega^2Ae^{\lambda t} = 0$$

$$Ae^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2) = 0$$

Ci sono due possibilità: $A = 0$, dove la molla è ferma, altrimenti se $A \neq 0$:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Di conseguenza $\tilde{z}(t) = Be^{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t} + Ce^{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}t}$

Nota bene: può essere che $\gamma^2 - \omega^2 < 0 \iff \gamma^2 < \omega^2 \iff \frac{b^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$

Lezione 08

1. **Distingui i tre tipi di soluzione** $\gamma > \omega$, $\gamma < \omega$, $\gamma = \omega$

Oscillazioni smorzate

Ricordiamo le formule:

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{z}(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) + \omega^2\tilde{z}(t) = 0$$

$$\tilde{z}(t) = Be^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_2 t}$$

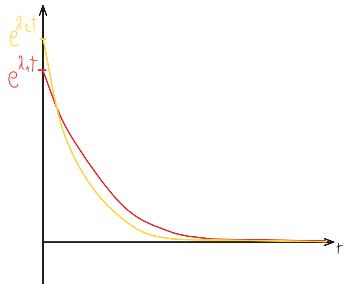
$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Caso $\gamma > \omega$ (forte smorzamento)

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$



I valori B e C dipendono dalle condizioni iniziali del moto

$$\tilde{z}(0) = \tilde{z}_0 \quad \frac{d}{dt}\tilde{z}(t)\Big|_{t=0} = \tilde{v}_0$$

ma a valori grandi di t mi aspetto che $Ce^{\lambda_2 t} \ll Be^{\lambda_1 t}$.

Vediamo la relazione tra B, C e \tilde{z}_0, \tilde{v}_0 :

$$\tilde{z}_0 = B + C$$

$$\tilde{v}_0 = \lambda_1 B e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C e^{\lambda_2 t} \implies \tilde{v}_0 = \lambda_1 B + \lambda_2 C$$

Caso $\gamma < \omega$ (oscillazioni smorzate, F_a è meno forte di F_{el})

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm \sqrt{-|\gamma^2 - \omega^2|} = -\gamma \pm i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}$$

$$\tilde{z}(t) = Be^{-\gamma t + i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t} + Ce^{\gamma t - i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t} = e^{-\gamma t}(Be^{i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t} + Ce^{-i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t})$$

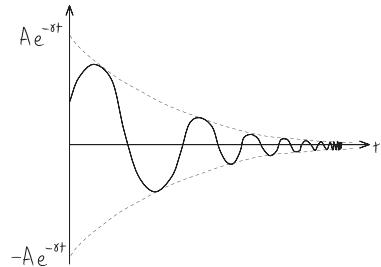
In questa espressione, siccome la soluzione è complessa ($e^{i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t}$), anche B e C devono essere complessi

$$B = x + iy, C = r + iw$$

, con $x, y, r, w \in \mathbb{R}$.

Imponendo che $\tilde{z}(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}$, troviamo (come già visto) $x = r$ e $y = -w$ e si può riscrivere $\tilde{z}(t)$ in termini di una combinazione lineare di $\sin(\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t)$ e $\cos(\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t)$ oppure (con le formule di addizione)

$$\tilde{z}(t) = e^{-\gamma t} A \cos(\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t + \phi)$$



Es: oscillazione corda di chitarra

Caso $\gamma = \omega$

Nota: $\gamma = \omega$ non accade mai (fisicamente)

Assumiamo ora che sul sistema agisca una forza esterna, periodica, diretta lungo l'asse z e del valore

$$F_{ex} = F_0 \sin(\Omega t)$$

9. Spiegare perché possiamo assumere che la soluzione più generale del problema abbia la forma

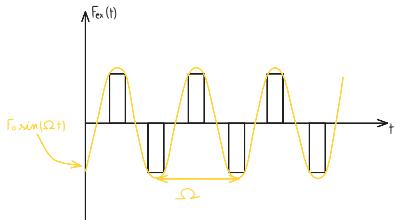
$$\tilde{z}(t) = A \sin(\Omega t + \phi) + Be^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_2 t},$$

per opportuni valori di $A, B, C, \phi, \lambda_1, \lambda_2$.

Risonanza

La risonanza si può verificare quando un oggetto elastico è soggetto a una forza periodica.

Una forza periodica può essere del tipo



Noi la approssimeremo con una funzione periodica del tipo

$$F_{ex}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

dove $[F_0] = N$ e $[\Omega] = s^{-1}$ e $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ è il periodo della forza.

Ora abbiamo l'equazione del moto

$$ma = F_{el} + F_{visc} + F_p + F_{ex} \implies \frac{d^2}{dt^2} \tilde{z}(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) + \omega^2 \tilde{z}(t) = \frac{1}{m} F_{ex}(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

L'equazione omogenea associata è quella risolta prima! Rimane solo da trovare una particolare soluzione dell'equazione affine.

\tilde{z}_* , la soluzione particolare, deve essere una combinazione di $\sin(\Omega t)$ e $\cos(\Omega t)$.

Proviamo $\tilde{z}_*(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{z}_*(t) + \frac{d}{dt} \tilde{z}_*(t) + \omega^2 \tilde{z}_*(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (A \sin(\Omega t + \phi)) + 2\gamma \frac{d}{dt} (A \sin(\Omega t + \phi)) + \omega^2 A \sin(\Omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$-A\Omega^2 \sin(\Omega t + \phi) + 2\gamma A\Omega \cos(\Omega t + \phi) + \omega^2 A \sin(\Omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$-A\Omega^2 (\sin(\Omega t) \cos(\phi) + \cos(\Omega t) \sin(\phi)) + 2A\Omega\gamma (\cos(\Omega t) \cos(\phi) - \sin(\Omega t) \sin(\phi)) +$$

$$+A\omega^2 (\sin(\Omega t) \cos(\phi) + \cos(\Omega t) \sin(\phi)) - \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) = 0$$

Raccolgo i termini con $\sin(\Omega t)$ e $\cos(\Omega t)$

$$\begin{aligned} & \sin(\Omega t) \underbrace{\left(-A\Omega^2 \cos(\phi) + A\omega^2 \cos(\phi) - 2A\Omega\gamma \sin(\phi) - \frac{F_0}{m} \right)}_{**} + \\ & + \cos(\Omega t) \underbrace{\left(-A\Omega^2 \sin(\phi) + A\omega^2 \sin(\phi) + 2A\Omega\gamma \cos(\phi) \right)}_{*} = 0 \end{aligned}$$

L'equazione deve valere $\forall t$. In particolare a $t = 0 \implies * = 0$ e a $t = \frac{\pi}{2\Omega} \implies ** = 0$.

$$A \cos(\phi)(\omega^2 - \Omega^2) - 2A\Omega\gamma \sin(\phi) = \frac{F_0}{m} \quad **$$

$$A \sin(\phi)(\omega^2 - \Omega^2) + 2A\Omega\gamma \cos(\phi) = 0 \quad *$$

Sono due equazioni nelle due incognite A e ϕ . Vanno risolte per A e ϕ in funzione di ω , Ω , $\frac{F_0}{m}$, γ .

Nota: $A \neq 0$, perché non potrebbe risolvere la prima equazione altrimenti.

Lezione 09

Divido * per A e trovo

$$(\omega^2 - \Omega^2) \sin(\phi) + 2\gamma\Omega \cos(\phi) = 0$$

$$\frac{(\omega^2 - \Omega^2) \sin(\phi)}{(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\phi)} = -\frac{2\gamma\Omega \cos(\phi)}{(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\phi)}$$

$$\tan(\phi) = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Per trovare A , considero $**^2$, $*^2$:

$$**: A^2(\omega^2 - \Omega^2)^2(\cos(\phi))^2 + 4A^2\gamma^2\Omega^2(\sin\phi)^2 - 4A^2\gamma\Omega(\omega^2 - \Omega^2)\cos\phi\sin\phi = \frac{F_0^2}{m^2}$$

$$*: A^2(\omega^2 - \Omega^2)^2(\sin\phi)^2 + 4A^2\gamma^2\Omega^2(\cos\phi)^2 + 4A^2(\omega^2 - \Omega^2)\gamma\Omega\sin\phi\cos\phi = 0$$

Faccio $**^2 + *^2$:

(i doppi prodotti si cancellano, mentre i sin e cos alla seconda si combinano, infatti ricordo che $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$)

$$A^2((\omega^2 - \Omega^2) + 4\gamma^2\Omega^2) = \frac{F_0^2}{m^2}$$

Divido e prendo la radice

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$$

Ho scelto la radice positiva perché per convenzione avevo preso $A > 0$

.

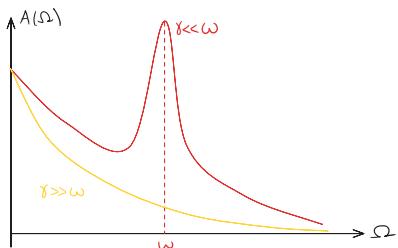
Fissati B e C in termini di \tilde{z}_0, \tilde{v}_0 , il moto è $\tilde{z}(t)$. Dopo un po' di tempo $|Be^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_2 t}| \leq |Be^{\lambda_1 t}| + |Ce^{\lambda_2 t}| \ll A$ che va a zero esponenzialmente.

$$\tilde{z}(t) \approx A \sin(\Omega t + \phi)$$

che è un'oscillazione di ampiezza A .

A dipende dalla forza esterna e dalle caratteristiche della molla (in particolare la costante elastica e la forza d'attrito che agisce sulla molla).

Come varia A al variare della forza?



Se $\gamma \gg \omega$ decresce come $\frac{1}{\Omega}$

Se $\gamma \ll \omega$ ha un picco quando $\Omega = \omega$.

Per trovare il massimo (quindi il picco), risolviamo $\frac{d}{d\Omega} A(\Omega) = 0$

$$\frac{d}{d\Omega} A = \frac{F_0}{m} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2(-2)\Omega(\omega^2 - \Omega^2) + 2\Omega^2\gamma^2)}{((\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{F_0}{m} \frac{\left(\frac{4}{2}\right) \Omega ((\omega^2 - \Omega^2) - 2\gamma^2)}{((\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2F_0}{m} \frac{\Omega (\omega^2 - 2\gamma^2 - \Omega^2)}{((\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega^2 = \omega^2 - 2\gamma^2 \end{cases}$$

Nota bene: Il secondo caso richiede che $\omega^2 - 2\gamma^2 > 0$.

Quando la frequenza delle oscillazioni è molto simile alla frequenza caratteristica, allora vengono amplificate le oscillazioni.

Esaminiamo cosa succede all'angolo quando Ω è molto vicino a ω :

$\tan \phi = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - (\omega^2 - 2\gamma^2)} = -\frac{2\gamma\Omega}{2\gamma^2}$, cioè per un γ molto piccolo l'angolo è $\phi \approx \frac{\pi}{2}$.

Quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, la forza è più efficace (esempio dell'altalena).

ϕ indica che c'è uno sfasamento tra quando l'oscillazione è massima e quando la forza è massima.

Ricordiamo che le **condizioni per la risonanza** sono:

- $\Omega^2 = \omega^2 - 2\gamma^2$

- $\gamma \ll \omega$

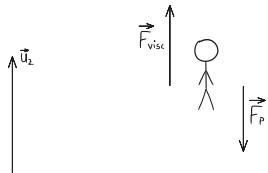
!! CORREGGI LA FINE DELLA FORMULA SOTTO

$$\tan \phi = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \Big|_{\text{risonanza}} = \frac{-2\gamma\sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}}{\omega^2 - (\omega^2 - 2\gamma^2)} = \frac{-2\gamma\sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}}{2\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma} \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$$

$$= -\frac{\omega}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega^2}} = -\frac{\omega}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega^2} + o\left(\frac{\gamma^4}{\omega^4}\right)\right) = -\frac{\omega}{\gamma} + \frac{\gamma}{\omega} + o\left(\frac{\gamma^3}{\omega^3}\right) = -\frac{\omega}{\gamma} + o\left(\frac{\omega}{\omega}\right)$$

$$\tan \phi \approx -\frac{\omega}{\gamma} \approx -\infty \implies \phi \approx -\frac{\pi}{2}$$

Velocità limite



Un paracadutista cade soggetto alla forza peso e di attrito (viscoso)

$$F_p = -mg\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{visc} = -b\vec{v} = +b||\vec{v}||\vec{u}_z$$

se cade in verticale con $\vec{v} = -||\vec{v}||\vec{u}_z$

Dopo un certo tempo, il paracadutista si muove alla velocità costante v_{limite} . **Trovare** v_{limite} .

Osservo che $\vec{F} = \vec{0}$ se $\vec{v} = \vec{v}_{\text{limite}}$

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_p + \vec{F}_{visc} = -mg\vec{u}_z + b||\vec{v}||\vec{u}_z \Big|_{\vec{v}=\vec{v}_{\text{limite}}} = \vec{0}$$

$$-mg + b\|\vec{v}_{\text{limite}}\| = 0$$

$$\|\vec{v}_{\text{limite}}\| = \frac{mg}{b}$$

Descrivi il moto

Lungo \vec{u}_z :

$$ma = -bv - mg$$

$$m\frac{d}{dt}v + bv = -mg$$

$$\frac{d}{dt}v + \frac{b}{m}v = -g \quad *$$

La soluzione generale è una particolare soluzione di * più la soluzione generale dell'equazione omogenea associata: $\frac{d}{dt}v + \frac{b}{m}v = 0$ **

Nota: $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_z = -\|\vec{v}(t)\|\vec{u}_z$

Soluzione particolare: $v(t) = v_{\text{limite}}$

$$* \implies 0 + \frac{b}{m}v_{\text{limite}} = -g \implies v_{\text{limite}} = -\frac{gm}{b}$$

Soluzione generale di **:

$$v(t) = v_0 e^{\lambda t}$$

$$** \lambda e^{\lambda t} + \frac{b}{m}e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda = -\frac{b}{m}$$

$$\vec{v}(t) = -\frac{gm}{b} + v_0 e^{-\frac{b}{m}t}\vec{u}_z$$

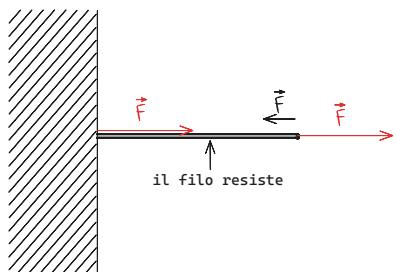
Lezione 10

L'esercizio che vedremo oggi sarà tipo da esame/compitino

Tensione dei fili

Un filo ideale ha *massa trascurabile* ed è *inestensibile*.

Il filo può essere messo in tensione da una forza \vec{F}



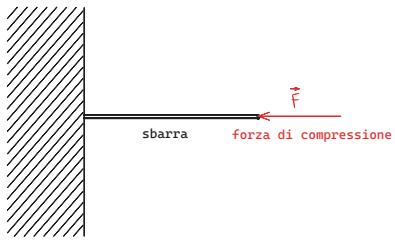
Il filo "scarica" la forza sull'altro capo.

Definizione (tensione)

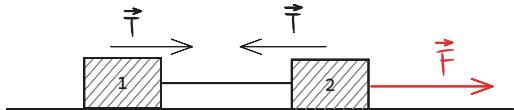
La forza lungo il filo si dice anche "tensione" e si indica con \vec{T} .

□

La stessa cosa si può fare con una sbarra inestensibile e la forza può essere sia in tensione che in compressione.



Esempio



Due punti materiali si trovano su un piano orizzontale liscio, collegati da un filo. Applichiamo una forza \vec{F} al corpo due, come in figura. **Scrivere le equazioni del moto per i corpi di massa m_1 e m_2** .

Per il corpo 2:

\vec{F} tira verso destra e \vec{T} verso sinistra.

Per il corpo 1:

\vec{T} tira verso destra.

Scomponendo lungo \vec{u}_x il moto, abbiamo che

$$\begin{cases} m_2 a_2 = \vec{F} - \vec{T} & F > 0, T > 0 \\ m_1 a_1 = \vec{T} \end{cases}$$

Per determinare T ricordiamo che il filo è inestensibile: la lunghezza l_{filo} non cambia.

$$x_2(t) = x_1(t) + l_{filo} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v_2(t) = v_1(t)$$

$$\text{Quindi } v_2(t) = v_1(t) \implies \underbrace{a_2(t)}_{=a(t)} = a_1(t)$$

Le equazioni diventano quindi

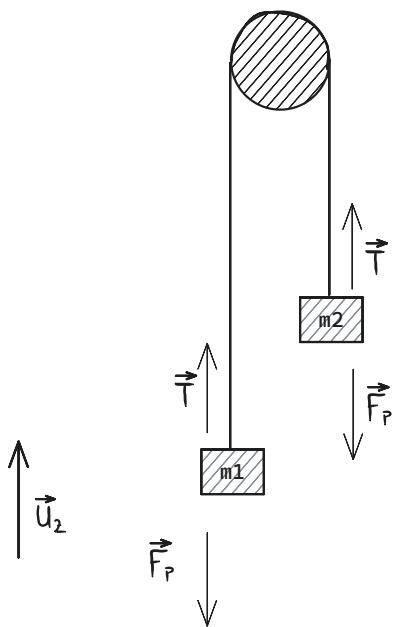
$$\begin{cases} m_2 a = F - T \\ m_1 a = T \end{cases} \implies (m_1 + m_2)a = F \cancel{/T} \cancel{+T} \implies a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Sostituisco a per trovare T :

$$m_1 \frac{F}{m_1 + m_2} = T$$

□

Macchina di Atwood



Due masse sono appese a un filo, soggette alla forza peso.

Determinare le equazioni del moto di m_1 e m_2 e la tensione del filo.

Scomponendo lungo \vec{u}_z :

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -m_1 g + T & T > 0 \\ m_2 a_2 = -m_2 g + T & T > 0 \end{cases}$$

Nota bene: Il risultato, qualunque esso sia, deve essere simmetrico se scambio "1" e "2".

Siccome il filo è inestensibile, se $z_1(t)$ aumenta, $z_2(t)$ diminuisce della stessa quantità, cioè $z_1(t) + z_2(t) = \text{costante}$.

$$\Rightarrow v_1(t) + v_2(t) = 0 \quad (\text{ho fatto la derivata})$$

$$\Rightarrow a_1(t) + a_2(t) = 0$$

$$a_1 \equiv a \equiv -a_2$$

Ora riscrivo le formule:

$$\begin{aligned} m_1 a &= -m_1 g + T \\ -m_2 a &= -m_2 g + T \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\text{faccio la differenza, eliminando } T \\ &m_1 a + m_2 a = -m_1 g + T + m_2 g - T \end{aligned} \right\}$$

$$m_1 a + m_2 a = -m_1 g + m_2 g$$

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = a_1$$

$$a_2 = -a_1 = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

per trovare T sostituisco:

$$m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = -m_1 g + T$$

$$T = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + m_1 \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} g$$

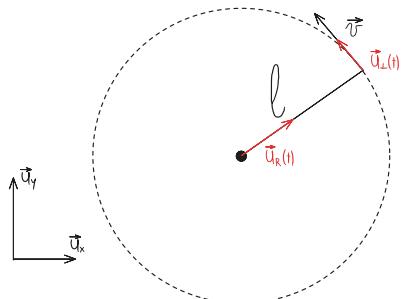
$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g (m_2 - m_1 + m_1 + m_2)$$

$$T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

(l'espressione si chiama "massa ridotta", la si rivedrà con il problema di Keplero).

□

Moto circolare



Un filo vincolato in un piano (x, y) al quale è attaccata una massa m descrive un moto circolare.

\vec{u}_R e \vec{u}_\perp sono versori rotanti: \vec{u}_R è lungo il filo e \vec{u}_\perp è perpendicolare a esso, come in figura.

Posizione

A un dato istante t la posizione è

$$\vec{r}(t) = l\vec{u}_R(t)$$

(prendendo l'origine degli assi nel centro del cerchio).

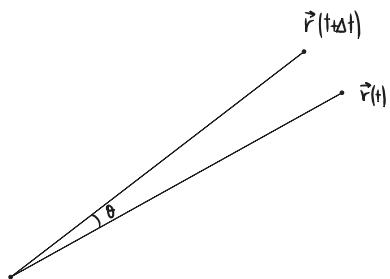
Velocità

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = l \frac{d}{dt} \vec{u}_R(t) =$$

la derivata è perpendicolare al moto

$$\vec{v}(t) = l \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp(t)$$

, con Δ come in figura



si dice anche che $\frac{d\theta}{dt} \equiv \omega(t)$ è la "velocità angolare".

Accelerazione

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left(l \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp(t) \right) = l \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp(t) \right) = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\perp(t) + l \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d}{dt} \vec{u}_\perp(t) \right) = \\ &= l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\perp(t) - l \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_R(t) = \underbrace{l \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\perp(t)}_{l\alpha(t)\vec{u}_\perp(t)} - \underbrace{l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_R(t)}_{-l\omega(t)^2 \vec{u}_R(t)}\end{aligned}$$

la prima derivata del versore dà un angolo retto, la seconda ne dà un altro, quindi l'angolo totale è di 180° .

Con $\alpha(t)$ l'accelerazione angolare.

$$\vec{a}(t) = l\alpha(t)\vec{u}_\perp(t) - l(\omega(t))^2\vec{u}_R(t)$$

Velocità e accelerazione angolare

Ricordo che la velocità angolare è

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

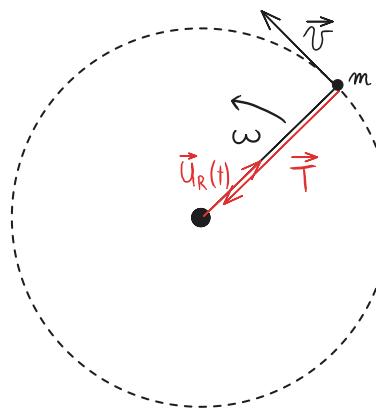
e l'accelerazione angolare è

$$\alpha(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

□

Esercizio

Se l è la lunghezza del filo (come nella figura sopra) e la massa m compie un moto circolare a velocità angolare ω costante, qual è la tensione del filo?



La tensione del filo "costringe" il corpo a muoversi su un cerchio (circonferenza), quindi $m\vec{a} = \vec{T}$.

$$m\vec{a} = \vec{T} = -T\vec{u}_R \quad T > 0$$

$$\vec{a} = l\alpha(t)\vec{u}_\perp - l(\omega(t))^2\vec{u}_R$$

$$\text{In questo caso } \alpha(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\omega(t) = 0, \text{ quindi } \vec{a} = -l(\omega(t))^2\vec{u}_R.$$

Perciò

$$m(-l(\omega(t))^2 \vec{u}_R)(t) = \vec{T}(t) = -T\vec{u}_R(t)$$

$$T = ml\omega^2.$$

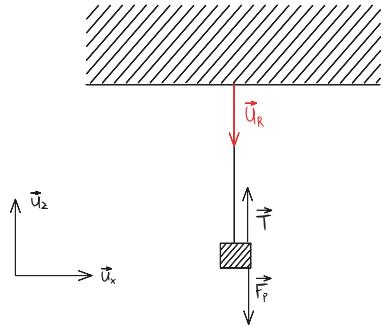
□

Pendolo semplice

1.

Pendolo fermo

Una massa m è appesa a un filo di lunghezza l , soggetta a \vec{F}_p , ferma



\vec{u}_R è il versore lungo il filo

\vec{u}_\perp è perpendicolare a \vec{u}_R

Lungo \vec{u}_R :

$$ma_R = 0 = F_{tot,R} = mg - T, \quad T > 0$$

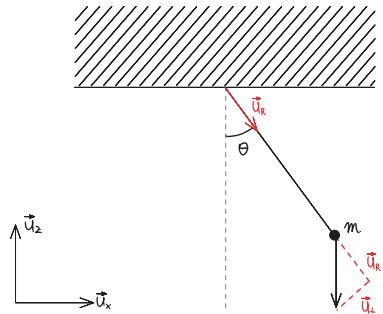
Lungo \vec{u}_\perp non c'è nessuna forza.

Il corpo è fermo e $T = mg$

2.

Caso generale

\\



Ora \vec{F}_p ha: una componente lungo \vec{u}_R e una lungo \vec{u}_\perp (la tensione è sempre lungo \vec{u}_R)

$$\begin{cases} \vec{F}_p = mg \cos \theta \vec{u}_R - mg \sin \theta \vec{u}_\perp \\ \vec{T} = -T \vec{u}_R \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{T} \\ \vec{a} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\perp - l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_R \end{cases}$$

Lungo \vec{u}_R :

$$m \left(-l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = mg \cos \theta - T$$

Lungo \vec{u}_\perp :

$$m \left(l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = -mg \sin \theta$$

Semplificando:

$$\vec{u}_\perp: l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$\vec{u}_R: T = mg \cos(\theta(t)) + ml \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2$$

La prima formula indica come si muove il pendolo, la seconda indica la tensione del filo

Noto che se la velocità è grande metto in tensione in filo: non è detto che il filo non si rompa quando muovo la massa.

$\theta(t)$ mi dà il moto del pendolo.

La prima equazione è non-lineare (difficile), ma se le oscillazioni del pendolo sono piccole $|\theta(t)| \ll 1$ posso dire che $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t) + o(\theta^3)$ (serie di Taylor).

Allora dalla prima equazione trovo:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta(t) \text{ che è la stessa equazione per la molla (moto armonico)}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ω è la pulsazione del moto armonico.

(valida per $\theta(t) \ll 1$)

Lezione 11 - esercizi

Esercizi

Settimana 03 esercizi 1 e 2

Un corpo si trova su un piano inclinato liscio a quota $h > 0$. Il corpo scivola da fermo a quota $h' = 0$.

Con che velocità passa da h' ? Come cambia la risposta se la velocità iniziale $v_0 \neq 0$?

□

Settimana 03 esercizio 10

Un corpo si trova ai piedi di un piano inclinato con velocità $v_0 = -v < 0$ verso l'alto.

Qual è la quota massima che raggiunge?

Una volta arrivato ad h_{max} , il corpo scende e ripassa per $h = 0$.

Che velocità ha?

□

Settimana 03 esercizio 8

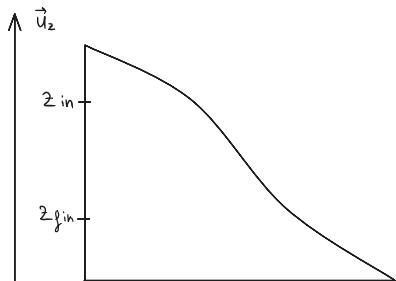
Un automobile compie una curva di raggio R . Il pilota mantiene costante il modulo della velocità v .

Che forza devono esercitare gli pneumatici perché non sbandi?

□

Lezione 12

Abbiamo derivato una relazione tra v^2 e la quota nel moto lungo un piano inclinato liscio.



$$v_{fin}^2 - v_{in}^2 = -2g(z_{fin} - z_{in})$$

$$\frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2 = -mg(z_{fin} - z_{in})$$

è una relazione scalare (più semplice) e non compare \vec{a} , ma solo $v = \|\vec{v}\|$. Si può generalizzare!

Il lavoro

Definizione

Il lavoro W di una forza \vec{F} è definito lungo una curva $\Gamma = \{\vec{\gamma}(\tau) \in \mathbb{R}, \tau \in [\tau_0, \tau_1]\}$.

Il lavoro è uno scalare.

\vec{F} è un vettore.

Γ è una generale curva, che potrebbe essere la legge oraria $\vec{r}(t)$ di un corpo soggetto alla forza \vec{F} , ma non necessariamente.

Il lavoro è l'integrale

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{F} \left(\underbrace{\vec{\gamma}(\tau)}_{\text{posizione}}, \underbrace{\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}}_{\text{velocità}}, \underbrace{\tau}_{\text{tempo}} \right) \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Nei libri si trova $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

□

Proprietà

Date due forze \vec{F}_1, \vec{F}_2 vale che $W_{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}[\Gamma] = W_{\vec{F}_1}[\Gamma] + W_{\vec{F}_2}[\Gamma]$.

Possiamo calcolare quindi il lavoro separatamente per

$\vec{F}_p, \vec{F}_{el}, \vec{F}_{Grav}, \vec{F}_{attr}, \dots$ e sommarli (è vero perché la curva Γ è generale).

□

Nel caso speciale in cui $\vec{\gamma}(\tau)$ è proprio $\vec{r}(t)$ (la legge oraria del moto per \vec{F}), allora si dimostra il teorema dell'energia cinetica.

Teorema dell'energia cinetica

Osserviamo che se $\vec{\gamma}(\tau) \equiv \vec{r}(t)$, allora

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}(\tau) &= \vec{v}(t), \quad \frac{d^2\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{a} \\ \vec{F} \left(\vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}, \tau \right) &\equiv \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) = m\vec{a}(t) \end{aligned}$$

Riscrivo quindi il lavoro lungo Γ nel caso in cui è la legge oraria:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] \Big|_{\Gamma=\text{legge oraria}} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \cdot \vec{v}(t) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) dt =$$

$$= m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) dt =$$

Nei calcoli uso: $\frac{d}{dt}(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$.

Se $\vec{a}(t) = \vec{b}(t) = \vec{v}(t) \implies \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$.

$$= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2) dt$$

Ricordo che il prodotto scalare di un vettore per sé stesso è la somma dei quadrati delle sue componenti.

$$= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2 + (v_z(t))^2] dt = \\ = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (v_x(t))^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (v_y(t))^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (v_z(t))^2 dt =$$

Ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{df(t)}{dt} dt = f(t_1) - f(t_0). \text{ Nel nostro caso, } f(t) \equiv [v_x(t)]^2$$

$$= \frac{m}{2} + (v_x(t_1)^2 - v_x(t_0)^2) + \frac{m}{2} + (v_y(t_1)^2 - v_y(t_0)^2) + \frac{m}{2} + (v_z(t_1)^2 - v_z(t_0)^2) = \\ = \frac{m}{2} [(v_x(t_1)^2 + v_y(t_1)^2 + v_z(t_1)^2) - (v_x(t_0)^2 + v_y(t_0)^2 + v_z(t_0)^2)] = \\ = \frac{m}{2} \|\vec{v}(t_1)\|^2 - \frac{m}{2} \|\vec{v}(t_0)\|^2 = E_{k,1} - E_{k,0} = \Delta E_k$$

Perciò il lavoro lungo la legge oraria è uguale alla variazione di energia cinetica:

$$\Delta E_k = W_{\vec{F}}[\Gamma] \Big|_{\Gamma=\text{legge oraria per } \vec{F}} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_{fin}\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_{in}\|^2$$

Dove ho definito l'energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$$

$$[W_{\vec{F}}[\Gamma]] = [E_k] = kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = J.$$

(il caso che avevamo trovato per il piano inclinato era un caso particolare per il teorema dell'energia cinetica)

□

Esempi di calcolo del lavoro (senza assumere nulla su Γ)

Forza peso

$$\vec{F}_p = -mg\vec{u}_z$$

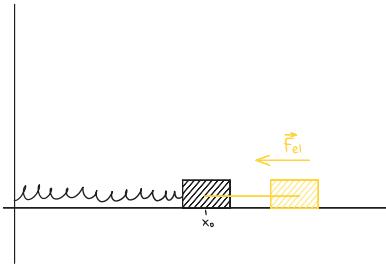
$$W_{\vec{F}_p}[\Gamma] = \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} (-mg\vec{u}_z) \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau = -mg \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \vec{u}_z \cdot \left(\frac{d\gamma_x}{d\tau}(\tau) \vec{u}_x + \frac{d\gamma_y}{d\tau}(\tau) \vec{u}_y + \frac{d\gamma_z}{d\tau}(\tau) \vec{u}_z \right) d\tau = \\ = -mg \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \left[\underbrace{0}_{=\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x} + \underbrace{0}_{=\vec{u}_z \cdot \vec{u}_y} + \underbrace{\frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau}}_{=\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z} \right] d\tau \\ = -mg \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \frac{d}{d\tau} (\gamma_z(\tau)) d\tau = -mg (\gamma_z(\tau_{fin}) - \gamma_z(\tau_{in})) = -mg(z_{fin} - z_{in}) = W_{\vec{F}_p}[\Gamma].$$

$$W_{\vec{F}_p}[\Gamma_{01}] = -mgz_1 + mgz_0$$

□

Forza elastica lungo \vec{u}_x

$\vec{F}_{el}(\vec{r}) = -k(x - x_0)$, con x_0 il punto di riposo della molla.



$$\begin{aligned}
 W_{\vec{F}_{el}}[\Gamma] &= \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} [-k(\gamma_x(\tau) - x_0)\vec{u}_x] \cdot \frac{(d\vec{\gamma})}{d\tau} d\tau = \\
 &= -k \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} (\gamma_x(\tau) - x_0) \vec{u}_x \cdot \left(\frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x + \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x + \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x \right) d\tau = \\
 &= -k \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \frac{[\gamma_x(\tau) - x_0](d\gamma_x(\tau))}{d\tau} d\tau = \\
 &= -k \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \frac{\gamma_x(\tau)(d\gamma_x(\tau))}{d\tau} d\tau + kx_0 \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \frac{(d\gamma_x(\tau))}{d\tau} d\tau = \\
 &= -\frac{k}{2} \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \frac{d}{d\tau} (\gamma_x(\tau)^2) d\tau + kx_0 \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \frac{d}{d\tau} (\gamma_x(\tau)) d\tau = \\
 &= -\frac{k}{2} [(\gamma_x(\tau_{fin}))^2 - (\gamma_x(\tau_{in}))^2] + kx_0 (\gamma_x(\tau_{fin}) - \gamma_x(\tau_{in})) = \\
 &= -\frac{k}{2} (x_{fin}^2 - x_{in}^2) + kx_0 (x_{fin} - x_{in}) - k(x_0^2 - x_0^2) = \\
 &= -\frac{k}{2} (x_{fin}^2 - 2x_0 x_{fin} + x_0^2) + \frac{k}{2} (x_{in}^2 - 2x_0 x_{in} + x_0^2) = \\
 &= -\frac{k}{2} (x_{fin} - x_0)^2 + \frac{k}{2} (x_{in} - x_0)^2
 \end{aligned}$$

Quindi

$$W_{\vec{F}_{el}}[\Gamma] = -\frac{k}{2}(x_{fin} - x_0)^2 + \frac{k}{2}(x_{in} - x_0)^2$$

□

Forza di reazione vincolare

$$\vec{F}_R = F_r \vec{u}_\perp$$

$W_{\vec{F}_R}[\Gamma] = \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} F_R \vec{u}_\perp \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} F_R \vec{u}_\perp \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \vec{u}_\parallel d\tau = 0$ (perché \vec{u}_\perp e \vec{u}_\parallel sono ortogonali).

$$W_{\vec{F}_R}[\Gamma] = 0$$

□

Forza di attrito statico

Similmente, l'attrito statico non compie lavoro perché il corpo è fermo: $\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} = \vec{0}$ (la velocità) \implies

$$W_{\vec{F}_{stat}}[\Gamma] = 0$$

□

Forza di attrito dinamico

$$\vec{F}_{din} = \mu_d F_R \vec{u}_v$$

$$W_{\vec{F}_{din}}[\Gamma] = \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} \left(-\mu_d F_R \vec{u}_{\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}} \right) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau =$$

$$= -\mu_d \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} F_R \vec{u}_{\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau =$$

Per un vettore \vec{v} , $\vec{u}_{\vec{v}} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}_{\vec{v}}|| ||\vec{v}|| \cos(0) = ||\vec{v}||$

$$= -\mu_d \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} F_R ||\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}|| d\tau$$

Se F_R è costante:

$$= -\mu_d F_R \int_{\tau_{in}}^{\tau_{fin}} ||\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}|| d\tau = -\mu_d F_R L(\Gamma) \quad (\text{matematicamente è la definizione della lunghezza della curva})$$

$$W_{\vec{F}_{din}}[\Gamma] = -\mu_d F_R L(\Gamma)$$

□

Il lavoro di \vec{F}_p e \vec{F}_{el} dipende solo dalla posizione iniziale e finale, mentre il lavoro di $\vec{F}_{att.din}$ dipende da come vado dalla posizione iniziale a quella finale.

Lezione 13

Esempi più generali

Forza "posizionale"/direzionale lungo x

Sia $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = f(x) \vec{u}_x$ una forza "posizionale" (non dipende da \vec{v}, t) che dipende da x ed è diretta lungo \vec{u}_x (abbiamo già visto il caso $f(x) = -kx$, la forza elastica).

Calcoliamo $W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}]$:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_x(\tau)) \vec{u}_x \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau = \text{dove ho usato } \vec{\gamma}(\tau) = \gamma_x(\tau) \vec{u}_x + \gamma_y(\tau) \vec{u}_y + \gamma_z(\tau) \vec{u}_z,$$

$$\frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\vec{\gamma}_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x + \frac{d\vec{\gamma}_y(\tau)}{d\tau} \vec{u}_y + \frac{d\vec{\gamma}_z(\tau)}{d\tau} \vec{u}_z$$

Sostituisco:

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \tau_1 f(\gamma_x(\tau)) \vec{u}_x \cdot \left(\frac{d\vec{\gamma}_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x + \frac{d\vec{\gamma}_y(\tau)}{d\tau} \vec{u}_y + \frac{d\vec{\gamma}_z(\tau)}{d\tau} \vec{u}_z \right)$$

Ricordo che $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1$, $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = 0$

Quindi il lavoro è

$$W_{\vec{F}}[\gamma_{01}] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_x(\tau)) \frac{d\vec{\gamma}_x(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Sia $\mathcal{F}(x)$ una primitiva di $f(x)$, allora $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ (anche $F(x) + c$ è una primitiva).

$$\text{Allora } \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(\gamma_x(\tau)) = f(\gamma_x(\tau)) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau}.$$

$$\Rightarrow W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\mathcal{F}(\gamma_x(\tau))}{d\tau} d\tau = [\mathcal{F}(\gamma_x(\tau))]_{\tau_0}^{\tau_1} = \mathcal{F}(\gamma_x(\tau_1)) - \mathcal{F}(\gamma_x(\tau_0)) = \mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_0)$$

Avevamo visto il caso

$$f(x) = -k(x - x_{riposo})\vec{u}_x$$

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + kxx_{riposo} + c$$

$$Scelgo \ c = -\frac{1}{2}kx_{riposo}^2$$

E quindi $\mathcal{F}(x)$ diventa:

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + kxx_{riposo} - \frac{1}{2}kx_{riposo}^2 = -\frac{1}{2}k(x^2 - 2xx_{riposo} + x_{riposo}^2) = -\frac{1}{2}k(x - x_{riposo})^2$$

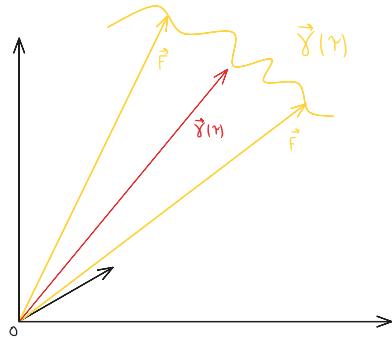
(ho verificato che il caso visto in precedenza fosse corretto).

□

Forza centrale

È una forza *posizionale* che dipende solo dalla distanza da un centro ed è diretta verso di esso

$$F(\vec{r}, \vec{v}, t) = f(||\vec{r}||)\vec{u}_r$$



Ad esempio, $\vec{F}_{el} = -k\vec{r} = -k||\vec{r}||\vec{u}_r$

(vedremo in futuro che la forza di attrazione gravitazionale è centrale)

Nel caso di $\vec{\gamma}(\tau)$ possiamo scrivere

$$\vec{\gamma}(\tau) = \gamma_r(\tau)\vec{u}_r(\tau) \quad (\gamma_r(\tau) = ||\vec{\gamma}(\tau)||)$$

Calcolandone la derivata troviamo:

$$\frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\gamma_r \vec{u}_r) = \frac{d\gamma_r}{d\tau} \vec{u}_r + \gamma_r \frac{d\theta}{d\tau} \vec{u}_\perp(\tau)$$

Calcoliamo il lavoro:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_r(\tau)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_r(\tau)) \vec{u}_r(\tau) \cdot \left(\frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} \vec{u}_r + \gamma_r \frac{d\theta}{d\tau} \vec{u}_\perp(\tau) \right) d\tau = \end{aligned}$$

Osservo che $\vec{u}_r(\tau) \cdot \vec{u}_r(\tau) = 1$, $\vec{u}_r(\tau) \cdot \vec{u}_\perp(\tau) = 0 \ \forall \tau$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_r(\tau)) \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Sia $\mathcal{F}(r)$ una primitiva di $f(r)$, $\mathcal{F}'(r) = f(r)$

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(\gamma_r(\tau)) = \mathcal{F}'(\gamma_r(\tau)) \frac{d\gamma_r(\tau)}{d\tau} = f(\gamma_r(\tau)) \frac{d\gamma_r(\tau)}{d\tau}$$

$$\implies W_{\vec{F}_c}[\Gamma_{01}] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} (\mathcal{F}(\gamma_r(\tau))) d\tau = [\mathcal{F}(\gamma_r(\tau))]_{\tau_0}^{\tau_1} = \mathcal{F}(\underbrace{r_1}_{\gamma_r(\tau)}) - \mathcal{F}(\tau_0)$$

Forza conservativa

Definizione

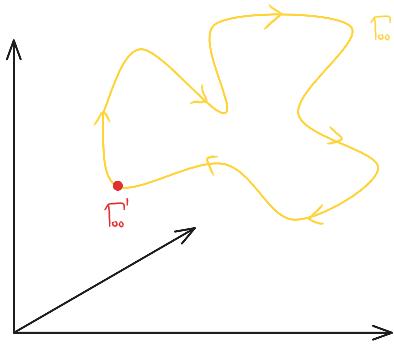
Una forza è *conservativa* se il suo lavoro dipende solo dalla posizione iniziale $\vec{\gamma}(\tau_0)$ e finale $\vec{\gamma}(\tau_1)$ e non dalla curva Γ_{01} .

□

$\vec{F}_p, \vec{F}_{el}, \vec{F}_R, \vec{F}_x, \vec{F}_c$ sono conservative, $\vec{F}_{attr.}$ non lo è.

Definizione equivalente

Equivalentemente, \vec{F} è conservativa se e solo se $W_{\vec{F}}[\Gamma_{00}] = 0$, dove Γ_{00} è un percorso chiuso (si scrive anche $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$).



Dimostrazione

" \implies "

Assumo che \vec{F} sia conservativa, allora $W_{\vec{F}}[\Gamma_{00}] = 0$.

Se \vec{F} è conservativa, il lavoro non dipende dalla curva, ma solo dai punti iniziali/finali.

Posso calcolare $W_{\vec{F}}[\Gamma_{00}]$ usando una qualsiasi curva Γ'_{00} che abbia gli stessi punti iniziali/finali.

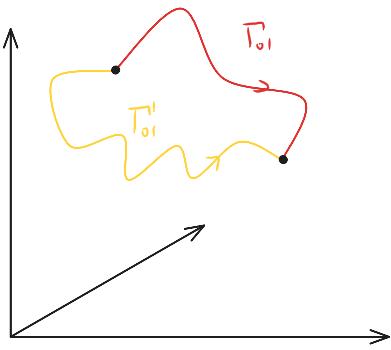
Sceglio Γ'_{00} costante $\implies \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} = \vec{0} \implies W_{\vec{F}}[\Gamma'_{00}] = 0$.

" \Leftarrow "

Viceversa, assumo che $W_{\vec{F}}[\Gamma_{00}] = 0$, Γ_{00} è un qualsiasi percorso chiuso.

Voglio dimostrare che:

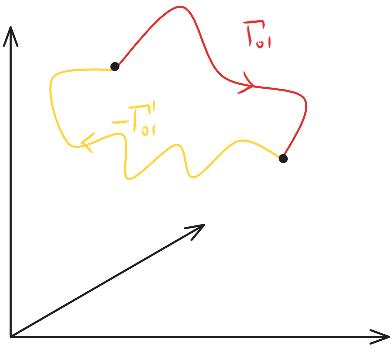
$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = W_{\vec{F}}[\Gamma'_{01}]$$



Calcolo

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] - W_{\vec{F}}[\Gamma'_{01}] = W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] + W[-\Gamma'_{01}] = W_{\vec{F}}[\Gamma_{01} - \Gamma'_{01}]$$

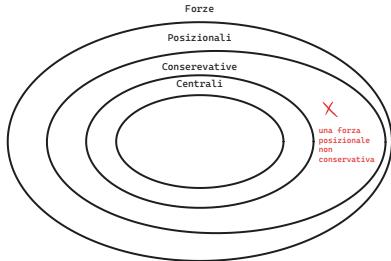
$\Gamma_{01} - \Gamma'_{01}$ è il percorso totale: viene percorso prima Γ_{01} , poi $-\Gamma'_{01}$ (che è Γ'_{01} in senso inverso, $\tau \rightarrow -\tau$), che è un percorso chiuso!



□

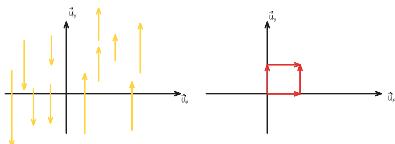
Quali sono le forze conservative?

Le forze conservative sono tutte posizionali (non dipendono da \vec{v}, t).
Non tutte le forze posizionali sono conservative.



Esempio

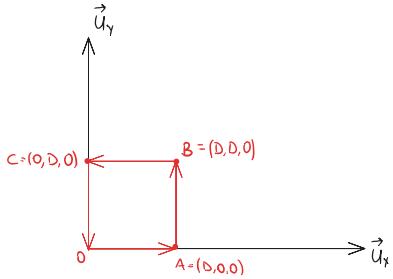
$\vec{F} = kx\vec{u}_y$ è posizionale, ma non conservativa.



Lezione 14

Dimostrazione

Consideriamo, nel piano (x, y)



La forza non è conservativa se $W_{\vec{F}}[\Gamma_{0AB}] \neq W_{\vec{F}}[\Gamma_{0CB}] \iff W_{\vec{F}}[\Gamma_{0ABC0}]$.

Calcolo il lavoro sui segmenti $\Gamma_{0A}, \Gamma_{AB}, \Gamma_{BC}, \Gamma_{C0}$:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{0A}] = \int_{\tau_0}^{\tau_A} k \gamma_x(\tau) \vec{u}_y \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}}_{= \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}, \text{ lungo } \Gamma_{0A}} d\tau = 0$$

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{AB}] = \int_{\tau_A}^{\tau_B} k \underbrace{\gamma_x(\tau)}_{=D} \vec{u}_y \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}}_{= \frac{d\gamma_y}{d\tau} \vec{u}_y} d\tau = kD \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau} d\tau = kD[\gamma_y(\tau)]_{\tau_A}^{\tau_B} =$$

$$= kD[\underbrace{\gamma_y(\tau_B)}_D - \underbrace{\gamma_y(\tau_A)}_0] = kD^2$$

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{BC}] = \int_{\tau_B}^{\tau_C} k \gamma_x(\tau) \vec{u}_y \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}}_{= \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}} d\tau = 0$$

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{C0}] = \int_{\tau_C}^0 k \underbrace{\gamma_x(\tau)}_{=0} \vec{u}_y \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau = 0$$

Quindi $W_{\vec{F}}[\Gamma_{0AB}] = W_{\vec{F}}[\Gamma_{0A}] + W_{\vec{F}}[\Gamma_{AB}] = kD^2$

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{0CB}] = -W_{\vec{F}}[\Gamma_{C0}] - W_{\vec{F}}[\Gamma_{BC}] = 0$$

La forza perciò non è conservativa.

□

Forze posizionali conservative

Sia $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{u}_x + f_y(x, y, z)\vec{u}_y + f_z(x, y, z)\vec{u}_z$ una forza posizionale. Perché sia conservativa vogliamo che $W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{F}(x_0, y_0, z_0) =$ (per una qualche \mathcal{F})

Gradiente (excursus)

Che significa:

$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} (\mathcal{F}(\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))) d\tau =$ è la derivata di una funzione a più variabili, che diventa:

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dx} \Big|_{\substack{x=\gamma_x(\tau), \\ y=\gamma_y(\tau), \\ z=\gamma_z(\tau)}} \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} + \frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dy} \Big|_{\substack{x=\gamma_x(\tau), \\ y=\gamma_y(\tau), \\ z=\gamma_z(\tau)}} \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau} + \frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dz} \Big|_{\substack{x=\gamma_x(\tau), \\ y=\gamma_y(\tau), \\ z=\gamma_z(\tau)}} \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau} \right] d\tau$$

Il prodotto tra parentesi quadra sembra un prodotto scalare $\vec{V} \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau}$, con $\vec{V} = \left(\frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dx}, \frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dy}, \frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dz} \right) \Big|_{\substack{x=\gamma_x(\tau), \\ y=\gamma_y(\tau), \\ z=\gamma_z(\tau)}}$

Il vettore \vec{V} si chiama gradiente di \mathcal{F} e si scrive

$$\vec{\nabla}\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dx} \vec{u}_x + \frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dy} \vec{u}_y + \frac{d\mathcal{F}(x,y,z)}{dz} \vec{u}_z$$

La forza è conservativa se:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{\nabla}\mathcal{F} \Big|_{\substack{x=\gamma_x(\tau), \\ y=\gamma_y(\tau), \\ z=\gamma_z(\tau)}} \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau$$

e ciò accade solo se

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\mathcal{F}$$

□

Le forze conservative sono alcune tra le forze posizionali e per esse vale

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0) \quad *$$

$$(e \vec{F} = \vec{\nabla}\mathcal{F}).$$

Energia potenziale

La relazione * vale per ogni percorso.

Se il percorso è la traiettoria sotto la forza \vec{F} vale il teorema dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}}[\text{traiettoria}] &= E_k(\vec{v}_1) - E_k(\vec{v}_0) \quad ** \\ E_k(\vec{v}) &= \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2 \end{aligned}$$

Quindi usando * e **:

$$\mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0) = E_k(\vec{v}_1) - E_k(\vec{v}_0)$$

Riscrivo:

$$E_k(\vec{v}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_1) = E_k(\vec{v}_0) - \mathcal{F}(\vec{r}_0)$$

Si definisce, per ogni forza conservativa, l'*energia potenziale* $E_p(\vec{r}) = -\mathcal{F}(\vec{r})$

$$E_k(\vec{v}_1) + E_p(\vec{r}_1) = E_k(\vec{v}_0) + E_p(\vec{r}_0)$$

e si definisce l'*energia (meccanica) totale* $E_{tot}(\vec{r}, \vec{v}) = E_k(\vec{v}) + E_p(\vec{r})$

$$E_{tot}(\vec{r}_1, \vec{v}_1) = E_{tot}(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

\implies Se \vec{F} è conservativa, l'energia totale si **conserva** (è costante lungo la traiettoria).

□

Abbiamo definito l'energia potenziale come $E_p = -\mathcal{F}(\vec{r})$, dove $\mathcal{F}(\vec{r})$ appare in $W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0)$, ma $\mathcal{F}(\vec{r})$ è definita a meno di una costante. Perciò anche E_p è definita a meno di una costante, quindi anche E_{tot} è definita a meno di una costante.

$\vec{F} = \vec{\nabla}\mathcal{F} = -\vec{\nabla}E_p$ anche questa relazione non cambia se $E_p \rightarrow E_p + \text{costante}$.

Fisicamente, si misura la forza, mentre l'energia potenziale non si può misurare. Solo la *differenza* di energia potenziale ha significato fisico.

Esempi

Forza peso

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = -mgz_1 + mgz_0$$

$$\mathcal{F}(\vec{r}) = -mgz + \text{costante}$$

$$E_{p,peso}(\vec{r}) = +mgz + \text{costante}$$

Interpretazione della costante

$$E_{p,peso}(\vec{r}) \Big|_{\substack{\text{per me} \\ \text{per Tizio}}} = mg \underbrace{z}_{\substack{\text{misurato dal pavimento} \\ \text{misurato dalla strada } \tilde{z}=z+h}}$$

□

Forza elastica

$$W_{\vec{F}_{el,x}}[\Gamma_{01}] = -\frac{k}{2}(x_1 - x_{riposo})^2 + \frac{k}{2}(x_0 - x_{riposo})^2$$

$$E_p(\vec{r}) = +\frac{k}{2}(x - x_{riposo})^2$$

$$\text{scelta così che } E_p \Big|_{x=x_{riposo}} = 0$$

Forza centrale

$$\vec{F}_c = f(||\vec{r}||)\vec{u}_r$$

$$W_{\vec{F}_c} = \mathcal{F}(||\vec{r}_1||) - \mathcal{F}(||\vec{r}_0||)$$

$$\mathcal{F}' = f \text{ (nota: } (\mathcal{F} + \text{costante})' = f)$$

$$E_p(\vec{r}) = -\mathcal{F}(||\vec{r}||)$$

□

Forza elastica

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{r} = -k||\vec{r}||\vec{u}_r$$

$$f(r) = -kr, \quad \mathcal{F}(r) = -\frac{1}{2}kr^2 + \text{costante}$$

$$E_p(\vec{r}) = \frac{1}{2}k||\vec{r}||^2$$

Forza di gravitazione universale

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{||\vec{r}||^2} \vec{u}_r$$

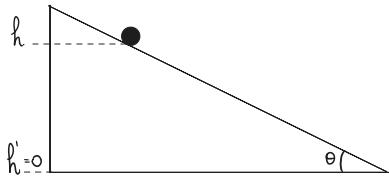
$$f(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \implies \mathcal{F}(r) = \frac{Gm_1 m_2}{r} + \text{costante}$$

$$E_p(\vec{r}) = -\frac{Gm_1 m_2}{||\vec{r}||}$$

Rivisitazione esercizi

Rivisitiamo qualche esercizio.

Piano inclinato



Il piano inclinato è liscio. Il corpo parte con $\vec{v} = \vec{v}_0$ alla quota $h > 0$. Con che velocità raggiunge $h' = 0$?

Forze tutte conservative $\implies E_{tot}$ si conserva.

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2 + mgz$$

$$E_{tot,in} = \frac{1}{2}m||\vec{v}_0||^2 + mgh$$

$$E_{tot,fin} = \frac{1}{2}||\vec{v}_1||^2 + \cancel{mgh'}$$

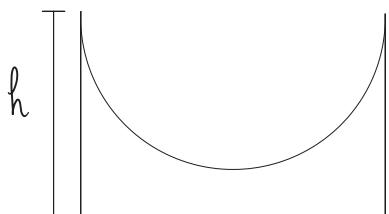
$$E_{tot,in} = E_{tot,fin}$$

$$\frac{1}{2}m||\vec{v}_1||^2 = \frac{1}{2}m||\vec{v}_0||^2 + mgh$$

$$||\vec{v}_1|| = +\sqrt{||\vec{v}_0||^2 + 2gh} \quad (\text{il più della radice è perché il moto va verso destra}).$$

□

Moto su guida circolare



Un corpo è su una guida circolare liscia. Parte da fermo a quota h .

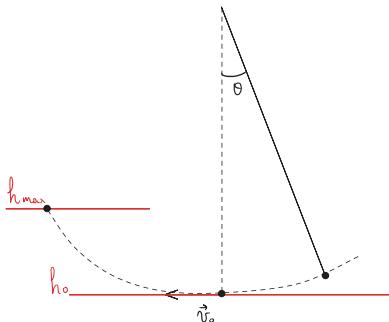
A che quota arriva dall'altro lato della guida?

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_0\|^2 + mgh$$

$\vec{v}_0=0$

□

Pendolo semplice



Un pendolo passa da $\theta = 0$ con velocità che vale in modulo v_0 . **A che quota massima arriva il pendolo?**

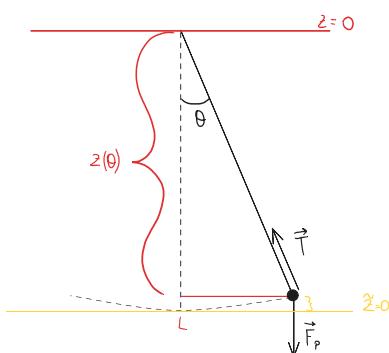
Se non c'è attrito, E_{tot} si conserva.

$$\begin{aligned} E_{tot}\Big|_{\theta=0} &= E_{tot}\Big|_{\theta=\theta_{max}} \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= 0 + mgh_{max} \\ \Rightarrow mg(h_{max} - h_0) &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ h_{max} &= \frac{v_0^2}{2g} + h_0 \end{aligned}$$

Lezione 15

Esercizi (sul lavoro)

Pendolo semplice



L = lunghezza filo.

Dato un pendolo semplice, conoscendo la velocità nel punto più basso ($\theta = 0$) che si indichi con \vec{v}_0 , **determinare $\vec{v}(\theta)$ per qualsiasi θ .**

In generale $\vec{v}(\theta) = \pm v(\theta)\vec{u}_\perp$ con $v(\theta) > 0$ e il segno dipende dalla direzione del pendolo.

Sia $v_0 = \|\vec{v}_0\| = v(\theta)|_{\theta=0}$, $z(\theta) = -L \cos(\theta)$ (e $\tilde{z}(\theta) = L - L \cos(\theta)$).

Sappiamo che E_{tot} si conserva (è facile vedere che \vec{T} è conservativa, perché $W_{\vec{T}}(\Gamma_{01} = 0)$).

$$E_{tot}(\theta) = E_{tot}(0)|_{\theta=0}$$

$$E_{tot}(\theta) = \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz(\theta)$$

$$E_{tot}(\theta)|_{\theta=0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$$

$$z_0 = z(\theta)|_{\theta=0}$$

Uguagliando le due equazioni dell'energia totale e usando $z(\theta)$:

$$E_{tot}(\theta) = E_{tot}(0)$$

$$\frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mg(-L \cos(\theta)) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(-L)$$

Usando invece $\tilde{z}(\theta)$:

$$\frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mg(L - L \cos(\theta)) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

A prescindere, poi trovo:

$$\frac{1}{2}\cancel{mv}(\theta)^2 + \cancel{mg}L - \cancel{mg}L \cos(\theta) = \frac{1}{2}\cancel{mv}_0^2$$

$$v(\theta)^2 = v_0^2 + 2gL(\cos \theta - 1)$$

$$v(\theta) = \sqrt{v_0^2 + 2gL(\cos \theta - 1)}$$

Deve essere $v_0^2 + 2gL(\cos \theta - 1) \geq 0$, cioè:

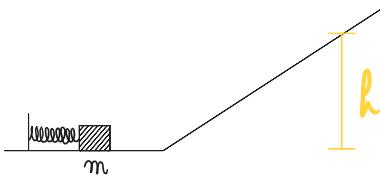
$$\frac{v_0^2}{2gL} + \cos(\theta) - 1 \geq 0$$

$\cos(\theta) \geq 1 - \frac{v_0^2}{2gL}$ (cioè: non posso raggiungere un θ grande se parto con una v_0 molto piccola).

$$\theta_{max} = \arccos \left(1 - \frac{v_0^2}{2gL} \right)$$

□

Molla e piano inclinato



Una massa m è appoggiata a una molla di costante elastica k che è compressa di Δx . La molla è posta ai piedi di un piano inclinato liscio. **Determinare $v(h)$ dopo che la massa è "lanciata" dalla molla.**

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + mgh \text{ si conserva.}$$

Prima del "lancio":

$$E_{tot} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{v_0=0} + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \underbrace{mgh_0}_{h_0=0}$$

Dopo il lancio:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m||v(h)||^2 + \underbrace{\frac{1}{2}k(\Delta x)^2}_{\text{la massa è staccata}} + mgh$$

Mettendo insieme le equazioni, trovo:

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}m||v(h)||^2 + mgh$$

$$||v(h)||^2 = \frac{k}{m}(\Delta x)^2 - 2gh$$

$$v(h) = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta x)^2 - 2gh}$$

E ho bisogno che $\frac{k}{m}(\Delta x)^2 - 2gh \geq 0$, cioè

$$h \leq \frac{k}{2gm}(\Delta x)^2$$

(ovvero l'altezza raggiunta sarà maggiore tanto più la molla sarà compressa).

□

Energia potenziale in una dimensione

Consideriamo $\vec{F}_x(x) = f(x)\vec{u}_x$

$$W_{\vec{F}_x}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_0) = -E_p(x_1) + E_p(x_0)$$

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}(x) = f(x) \iff \frac{d}{dx}(-E_p(x)) = -f(x)$$

$$\text{Ad esempio } f(x) = -kx, \quad E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Se conosco $E_{tot,in}$ allora conosco (al netto di un segno) $v(x) \forall x$.

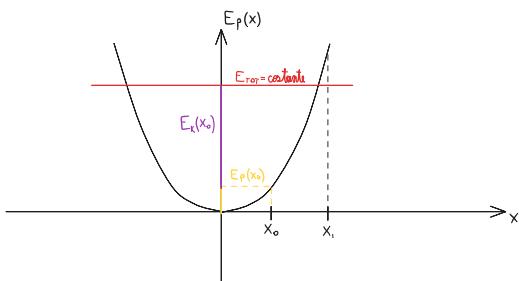
$$E_{tot,in} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$v^2 = \frac{2}{m}E_{tot,in} - \frac{k}{m}x^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}E_{tot,in} - \frac{k}{m}x^2}$$

e deve valere $\frac{2}{m}E_{tot,in} - \frac{k}{m}x^2 \geq 0$

$\frac{k}{2}x^2 \leq E_{tot}$, altrimenti non c'è soluzione per $v(x)$.



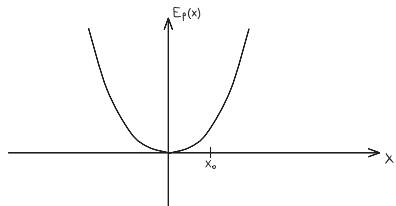
$$E_{tot} = E_k + E_p$$

In x_1 , $E_p(x_1) > E_{tot}$, ma deve essere $E_{tot} = E_p + E_k \geq E_p$, $E_k \geq 0$ impossibile!

È permesso il moto solo nelle parti del grafico dove $E_p \leq E_{tot}$ e quando $E_p(x) = E_{tot}$ allora $E_k = 0$ e quindi $v = 0$.

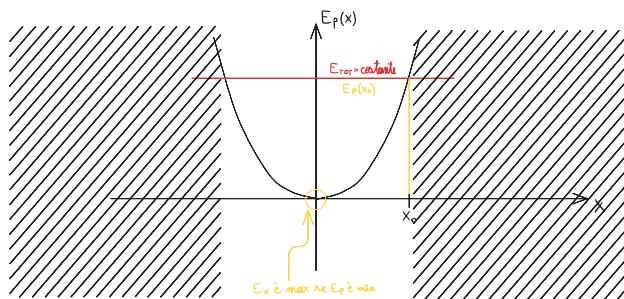
□

Esercizio



Un punto si trova in x_0 fermo.

1. **Disegnare E_{tot} ;**
2. **Disegnare dove è permesso il moto;**
3. **Disegnare dov'è massima E_k .**

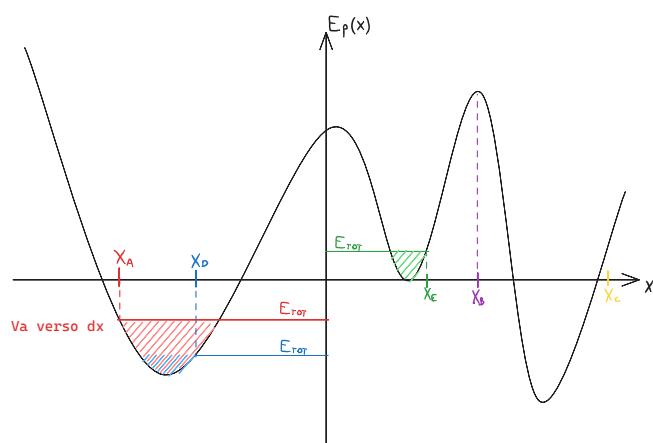


In x_0 , $E_{tot} = E_p(x_0)$

□

Le osservazioni che abbiamo fatto per $\vec{F}_{el,x} = -kx\vec{u}_x$, sono valide in generale.

Ad esempio:



Cambiando il punto di riferimento da cui si misura (cioè lo zero) non cambia nulla, infatti conta soltanto la differenza tra E_{tot} e E_p . Se ci fosse l'attrito, salendo di nuovo lungo la curva, il corpo non arriverebbe alla stessa altezza, ma un poco più in basso. Questo andrebbe avanti fino a fermarsi. Parte del lavoro viene dissipato (in rumore e calore).

In x_E e x_D la forza tira verso sinistra. È più forte in x_E visto che la derivata (che è la forza) ha modulo maggiore.

□

La potenza

Ricordiamo che il lavoro di una forza tra l'istante t_0 e $t_1 = t_0 + \Delta t$ è

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{\Delta t}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} dt$$

La potenza *media* della forza \vec{F} nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ è

$$P_{medio} = \frac{W_{\vec{F}}[\Gamma_{\Delta t}]}{\Delta t}$$

La potenza istantanea in t_0 è

$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_{\vec{F}}[\Gamma_{\Delta t}]}{\Delta t}$$

La potenza si misura in Watt W .

Di conseguenza si usa spesso il $kWh = (10^3 W)(3600 s) = 3,6 \cdot 10^6 J$ (è un'unità di energia, non nel S.I.)

Tipica domanda da esame

Un pendolo semplice ha lunghezza L , massa m e un filo ideale che può supportare la tensione massima T_{max} .

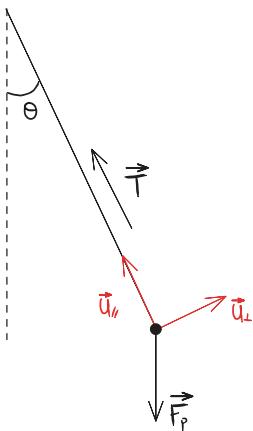
Il pendolo parte da $\theta_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ con velocità v_0 diretta verso $\theta = 0$ ($v_0 < 0$).

Trovare quanto vale il massimo del modulo di v_0 che permette al filo di non spezzarsi.

1. Ricavare T in funzione di v, g .
2. Osservare che T è massima quando $\theta = 0$
3. Usare la conservazione dell'energia totale ($E_{tot} = 0$) per trovare $v(\theta)|_{\theta=0}$ in funzione di v_0 (o più precisamente, $\frac{1}{2}mv_0^2$)
 $T(v_0) \leq T_{max}$.
 (vedi giù)

□

Altri esercizi sul lavoro



$$\vec{T} = T \vec{u}_{\parallel}, \quad T > 0$$

$$\vec{F}_p = -mg \cos \theta \vec{u}_{\parallel} - mg \sin \theta \vec{u}_{\perp}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{T}$$

Ci interessa trovare T . È lungo \vec{u}_{\parallel} e vale $ma_{\parallel} = -mg \cos \theta + T$.

a_{\parallel} si trova ricordando la derivata dei versori:

$$\vec{r}(t) = L \vec{u}_{\parallel}(t) (-1)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = -L \frac{d\vec{u}_{\parallel}(t)}{dt} = -L \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega(t)} \vec{u}_{\perp}(t) = -v(t) \vec{u}_{\perp}(t) \quad (v(t) = L\omega(t)) .$$

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{a}(t) = -\frac{d}{dt} \left(L \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{\perp}(t) \right) = -L \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_{\perp}(t) + L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_{\parallel}(t)$$

Dalla formula si vede che la componente parallela di \vec{a} è:

$$a_{\parallel} = +L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = +L\omega^2 = +\frac{v^2}{L}$$

$$ma_{\parallel} = +\frac{m}{L}v^2 = -mg \cos \theta + T$$

$T = mg \cos \theta + \frac{m}{L}v^2$ (il segno è più, infatti non avrebbe senso con il meno, perché significherebbe che la tensione diminuirebbe con l'aumentare della velocità con cui il corpo gira).

Vogliamo trovare $v(\theta)$ (sapendo che a $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ la velocità era $v_0 > 0$ in modulo).

$$E_{tot} = E_{tot} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz = \frac{1}{2}mv(\theta)^2 - mgL \cos \theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - Lmg \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}v_0^2 - Lmg \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{2(E_{tot} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}})}{L} = 2 \frac{1}{2} \frac{(mv_0^2)}{L} - \frac{2mgL \cos \theta}{L}$$

$$\frac{mv^2}{L} = \frac{2}{L} E_{tot} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} + 2mg \cos \theta$$

Quindi posso riscrivere la formula di T come:

$$T = \frac{2}{L} \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mg \frac{\sqrt{2}}{2} L \right) + 3mg \cos \theta$$

$$T = \frac{m}{L}v_0^2 + 3mg \cos \theta - mg\sqrt{2} *$$

Sappiamo che $T \leq T_{max}$ e che il filo si spezza se $T = T_{max}$. **Vogliamo trovare** $v_{0,max}$ **tale che il filo non si spezza.**

Da * vediamo che $T(\theta)$ è massima a $\theta = 0$.

$$T(\theta) \leq T(\theta)|_{\theta=0} < T_{max}$$

$$T(\theta)|_{\theta=0} = \frac{m}{L}v_0^2 + (3 - \sqrt{2})mg < T_{max}$$

$$v_{0,max}^2 < T_{max} \frac{L}{m} - (3 - \sqrt{2})gL$$

Quando l'argomento della radice è minore di zero (ad esempio quando T_{max} è molto piccolo rispetto alla massa) si spezza in ogni caso, a prescindere dalla velocità.
□

(Non) conservazione dell'energia

Realisticamente, dobbiamo tenere in considerazione l'esistenza di forze "dissipative" come l'attrito.

Se $F_{tot} = \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{diss}$,

$$W_{tot}[\Gamma_{01}] = W_{cons}[\Gamma_{01}] + W_{diss}[\Gamma_{01}] = -E_{p,cons}(\vec{r}_1) + E_{p,cons}(\vec{r}_0) + W_{diss}[\Gamma_{01}]$$

$$\text{Lungo la traiettoria vale sempre } W[\Gamma_{01}]|_{traiett.} = E_k(\vec{v}_1) - E_k(\vec{v}_0)$$

Quindi lungo la traiettoria trovo che

$$-E_{p,cons}(\vec{r}_1) + E_{p,cons}(\vec{r}_0) + W_{diss}[\Gamma_{01}] = E_k(\vec{v}_1) - E_k(\vec{v}_0)$$

$$E_{p,cons}(\vec{r}_0) + E_k(\vec{v}_0) + W_{diss}[\Gamma_{01}] = E_{p,cons}(\vec{r}_1) + E_k(\vec{v}_1)$$

$$W_{diss}[\Gamma_{01}] \leq 0 \text{ ("perdiamo" energia).}$$

È consistente con il fatto che le forze di attrito si oppongono al moto.

Esempi/esercizi

Es. 1

Un punto materiale si muove su un piano scabro con velocità iniziale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. **Quanta distanza percorre prima di fermarsi?**

In questo caso, $E_p = 0$ (moto in piano).

$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 + W_{att}[\Gamma_{01}] = 0 + 0$ (anche l'energia cinetica finale è nulla perché ci interessa il momento in cui il corpo si ferma)

Ricordiamo la formula del lavoro per la forza di attrito:

$$W_{att}[\Gamma_{01}] = -\mu_d mg \mathcal{L}[\Gamma_{01}] = -\mu_d mg \Delta x$$

Quindi

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mg \Delta x = 0$$

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}$$

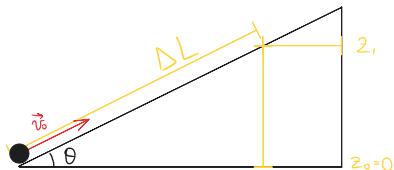
Nota

Se il problema avesse chiesto dopo quanto tempo si ferma avremmo dovuto usare le equazioni del moto.

□

Es. 2

Stesso problema di prima, ma il corpo sta risalendo un piano inclinato di angolo θ . **Trovare ΔL in funzione di v_0 .**



$$E_p = mgz$$

$$\underbrace{mgz_0}_{z_0=0} + \frac{1}{2}mv_0^2 + W_{att}[\Gamma_{01}] = mgz_1 + 0 \quad (\text{come prima, l'energia cinetica finale è zero perché nel punto finale è fermo}).$$

$$z_1 = \Delta L \sin \theta$$

$$W_{att}[\Gamma_{01}] = -\mu_d \underbrace{mg \cos \theta}_{F_\perp} \cdot \Delta L$$

Mettendo assieme le formula:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_d mg \cos \theta \Delta L = mg \sin \theta \Delta L$$

$$\Delta L = \frac{v_0^2}{2g \sin \theta (1 + \mu_d \cot \theta)}$$

□

Es. 3

Un corpo, che cade dalla quota h_0 partendo da fermo, è soggetto all'attrito dell'aria e passa per la quota $h_1 < h_0$ con velocità v_1 .

Determinare il lavoro dell'attrito.

Indipendentemente dai dettagli di \vec{F}_{att} vale:

$$E_{p,cons}(\vec{r}_0) + E_k(\vec{v}_0) + W_{att}[\Gamma_{01}] = E_{p,cons}(\vec{r}_1) + E_k(\vec{v}_1)$$

$$mgh_0 + \cancel{\frac{1}{2}mv_0^2} + W_{att}[\Gamma_{01}] = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

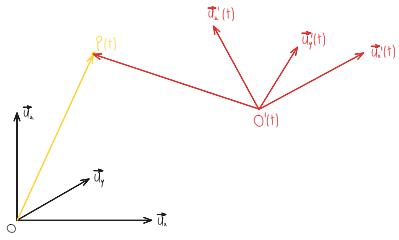
$W_{att}[\Gamma_{01}] = mg(h_1 - h_0) + \frac{1}{2}mv_1^2 < 0$ (è una forza dissipativa, quindi il lavoro deve essere negativo).

□

Lezione 16

Sistemi di riferimento non inerziali

La Terra ruota ed è pertanto un sistema non inerziale. Questo giustifica il nostro interesse per tali sistemi (che ovviamente sono più generali).



Il punto O' può spostarsi rispetto ad O . Gli assi $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$ possono ruotare rispetto a $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$.

Sia $P(t)$ un punto materiale.

$\vec{OP} = \vec{r}(t)$ = la posizione di $P(t)$ nel sistema di O .

Similmente $\vec{O'P}(t) = \vec{r}'(t)$ = la posizione di $P(t)$ nel sistema O' .

$\vec{OO'}(t) = \vec{r}_{OO'}(t)$ = la posizione di O' nel sistema di O .

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{OO'}(t) + \vec{r}'(t) \quad (*)$$

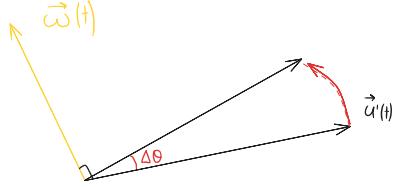
Per trovare le leggi di trasformazione di \vec{v} e \vec{a} basta fare la derivata della relazione (*).

In componenti possiamo scrivere:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z = r(t)\vec{u}(t)$$

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}'_x(t) + y(t)\vec{u}'_y(t) + z(t)\vec{u}'_z(t)$ in questa relazione i versori dipendono dal tempo (infatti possono ruotare).

Ci serviranno le derivate dei versori:



$\frac{d}{dt}\vec{u}'(t) = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}'_\perp(t)$ (ricordo che la lunghezza dell'arco percorso è la lunghezza del raggio moltiplicata per l'angolo, che in questo caso è proprio l'angolo).

Introduciamo un vettore $\vec{\omega}(t)$ con lunghezza $||\vec{\omega}(t)|| = |\frac{d\theta}{dt}|$ ortogonale al piano di rotazione di $\vec{u}'(t)$ tale che

$$\frac{d}{dt}\vec{u}'(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{u}'(t)$$

Notiamo che $||\vec{\omega}(t) \times \vec{u}'(t)|| = ||\vec{\omega}(t)|| ||\vec{u}'(t)|| |\sin \alpha|$ (con α l'angolo tra $\vec{\omega}$ e \vec{u}')

$$= \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

La direzione di $\vec{\omega} \times \vec{u}'$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$ e $\vec{u}' \implies$ ha la direzione di \vec{u}'_\perp .

Il verso si determina con la regola della mano destra o con la regola mnemonica.

Velocità

Calcoliamo, sapendo che $\vec{r}(t) = \vec{r}_{OO'}(t) + \vec{r}'(t)$ la relazione per la velocità.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}(t) &= \frac{d}{dt} (x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z) = \\ &= \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z = \\ &= v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z = \\ &= \vec{v}(t) \text{ che è la velocità del punto } P(t) \text{ in } O. \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} \vec{r}_{OO'}(t) = \frac{d}{dt} (x_{OO'}(t)\vec{u}_x + y_{OO'}(t)\vec{u}_y + z_{OO'}(t)\vec{u}_z) = \vec{v}_{OO'}(t)$ che è la velocità di O' in O .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r}'(t)) &= \frac{d}{dt} (x'(t)\vec{u}'_x(t) + y'(t)\vec{u}'_y(t) + z'(t)\vec{u}'_z(t)) = \\ &= \left(\frac{dx'(t)}{dt} \vec{u}(t) + x'(t) \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right) + \left(\frac{dy'(t)}{dt} \vec{u}'_y(t) + y'(t) \frac{d\vec{u}'_y(t)}{dt} \right) + \left(\frac{dz'(t)}{dt} \vec{u}'_z(t) + z'(t) \frac{d\vec{u}'_z(t)}{dt} \right) = \\ &= \frac{dx'(t)}{dt} \vec{u}'_x(t) + \frac{dy'(t)}{dt} \vec{u}'_y(t) + \frac{dz'(t)}{dt} \vec{u}'_z(t) + x'(t)\vec{\omega} \times \vec{u}'_x(t) + y'(t)\vec{\omega}(t) \times \vec{u}'_y(t) + z'(t)\vec{\omega}(t) \times \vec{u}'_z(t) = \\ &= v'_x(t)\vec{u}_x(t) + v'_y(t)\vec{u}_y(t) + v'_z(t)\vec{u}_z(t) + \vec{\omega}(t) \times [x'(t)\vec{u}'_x(t) + y'(t)\vec{u}'_y(t) + z'(t)\vec{u}'_z(t)] = \\ &= \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) \end{aligned}$$

$\vec{v}'(t)$ è la velocità di P rispetto al sistema di riferimento in O' (le componenti di \vec{v}' sono le derivate della posizione in O').

Riprendiamo la formula $\vec{r}(t) = \vec{r}_{OO'}(t) + \vec{r}'(t) \implies \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}'(t)}{dt}$

Sostituendo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{OO'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)$$

C'è sia una traslazione che una rotazione.

Accelerazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} (v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z) = \\ &= a_x(t)\vec{u}_x + a_y(t)\vec{u}_y + a_z(t)\vec{u}_z = \\ &= \vec{a}(t) \text{ che è l'accelerazione di } P \text{ rispetto a } O. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{OO'}(t) &= \frac{d}{dt} (v_{x,OO'}(t)\vec{u}_x + v_{y,OO'}(t)\vec{u}_y + v_{z,OO'}(t)\vec{u}_z) = \\ &= a_{x,OO'}\vec{u}_x + a_{y,OO'}\vec{u}_y + a_{z,OO'}\vec{u}_z = \\ &= \vec{a}_{OO'}(t) \text{ che è l'accelerazione di } O' \text{ rispetto ad } O. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v}'(t) &= \frac{d}{dt} (v'_x(t)\vec{u}'_x(t) + v'_y(t)\vec{u}'_y(t) + v'_z(t)\vec{u}'_z(t)) = \\ &= \frac{dv'_x(t)}{dt} \vec{u}'_x(t) + v'_x(t) \frac{d\vec{u}'_x(t)}{dt} + \frac{dv'_y(t)}{dt} \vec{u}'_y(t) + v'_y(t) \frac{d\vec{u}'_y(t)}{dt} + \frac{dv'_z(t)}{dt} \vec{u}'_z(t) + v'_z(t) \frac{d\vec{u}'_z(t)}{dt} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a'_x(t)\vec{u}'_x(t) + v'_x(t)\vec{\omega}(t) \times \vec{u}'_x(t) + a'_y(t)\vec{u}'_y(t) + v'_y(t)\vec{\omega}(t) \times \vec{u}'_y(t) + \\
&+ a'_z(t)\vec{u}'_z(t) + v'_z(t)\vec{\omega}(t) \times \vec{u}'_z(t) = \\
&= \vec{a}'(t) + \vec{\omega}(t) \times [v'_x(t)\vec{u}'_x(t) + v'_y(t)\vec{u}'_y(t) + v'_z(t)\vec{u}'_z(t)] = \\
&= \vec{a}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) \text{ che è l'accelerazione di } P \text{ nel sistema di } O'.
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)] = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{r}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} =$$

Definiamo

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}(t) &\equiv \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \\
&= \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \underbrace{[\vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)]}_{\text{già calcolato}} = \\
&= \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) \text{ (ricordo che il prodotto} \\
&\text{vettore **non** è associativo).}
\end{aligned}$$

Riprendendo la formula

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{OO'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) \implies \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}_{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)}{dt}$$

Sostituendo:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{OO'}(t) + \vec{a}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t))$$

$$\underbrace{\vec{a}(t)}_{\text{acc. di } P \text{ in } O} = \underbrace{\vec{a}_{OO'}(t)}_{\text{acc. di } O' \text{ in } O} + \underbrace{\vec{\alpha}(t) \times \vec{r}'(t)}_{\text{acc. angolare}} + \underbrace{2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)}_{\text{acc. di Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t))}_{\text{acc. centripeta}} + \underbrace{\vec{a}'(t)}_{\text{acc. di } P \text{ in } O'}$$

Osservazione (forza apparente)

$$\vec{a}(t) - \vec{a}'(t) \neq 0$$

$$m\vec{a}(t) - m\vec{a}'(t) \neq 0$$

$$\vec{F}_{tot} - \vec{F}'_{tot} \neq 0$$

Lezione 17

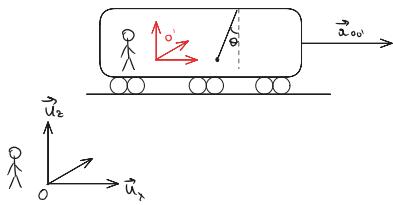
$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F} \\ m\vec{a}' = \vec{F}' \\ \vec{F} \neq \vec{F}' \end{cases}$$

Chiamiamo

$$\vec{F}' - \vec{F} = \vec{F}_{apparente} = m(\vec{a}' - \vec{a})$$

Esempi ed esercizi

Il filo a piombo



In O affermo che sul filo a piombo agiscono \vec{F}_p , \vec{T} e che (come il resto del treno) il filo a piombo accelera con \vec{a} .

$$\text{In } O: m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{T}$$

$$\vec{F}_p = -mg\vec{u}_z$$

$$\vec{T} = T\vec{u}_{||} = \sin\theta T\vec{u}_x + \cos\theta T\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = a\vec{u}_x$$

Lungo \vec{u}_z :

$$0 = -mg + \cos(\theta)T \implies T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Lungo \vec{u}_x :

$$ma = \sin(\theta)T = mg \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Quindi

$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$

Sul treno (in O') abbiamo $\vec{a}' = 0$.

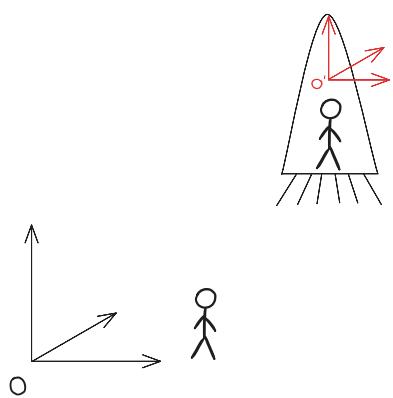
$$m\vec{a}' = \vec{0} = \vec{T} + \vec{F}_p + \vec{F}_{app}$$

$$\vec{F}_{app} = -ma\vec{u}_x = -m\vec{a}_{OO'}$$

$$\vec{0} = \vec{F}_p + \vec{T} - m\vec{a}_{OO'}$$

□

Il razzo



Una persona in un razzo che accelera con $\vec{a}_{OO'}$ (verso l'alto) sente una forza apparente che lo "schiaccia" nel pavimento e vale $-m\vec{a}_{OO'}$. Trovandosi su un razzo nello spazio che accelera con $a = 9,8 \frac{m}{s^2}$ si sente una forza apparente che è identica alla forza peso.

□

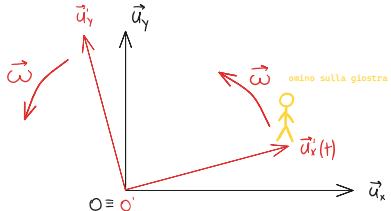
In generale

$$\vec{F}_{app} = m(\vec{a}' - \vec{a}) = -m\vec{a}_{OO'} - m\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) - m\vec{\alpha}(t) \times \vec{r}'(t) - m2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)$$

□

Consideriamo un corpo che ruota a velocità angolare costante $\vec{\omega}$. Assumiamo inoltre che il moto sia di sola rotazione, cioè in un sistema O' rotante il corpo è fermo.

Nel piano (x, y) ho



In O' :

$$\vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{v}' = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}(t) = \text{costante}$$

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{OO'} = \vec{0} \quad (O' \equiv O)$$

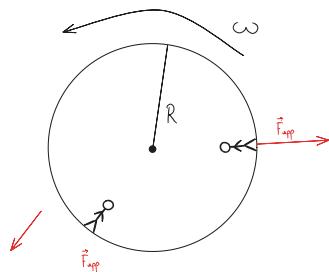
$$\vec{F}_{app} = -ma\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

R è la distanza da $O (= O')$

$$\vec{r}'(t) = R\vec{u}'_x(t)$$

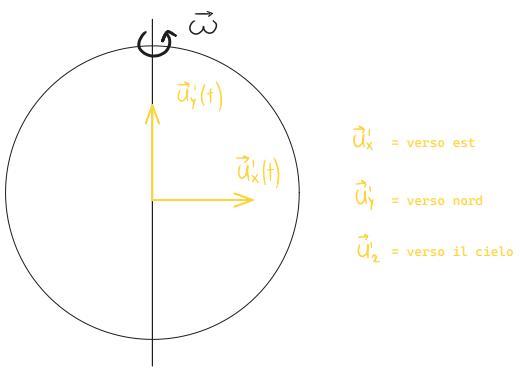
$$\vec{\omega} = \omega\vec{u}'_z$$

$$\vec{F}_{app} = -m\omega\vec{u}'_z \times (\omega\vec{u}'_z \times R\vec{u}_x(t)) = -m\omega^2 R\vec{u}'_z \times (\vec{u}'_y(t)) = m\omega^2 R\vec{u}'_x(t) = m\omega^2 \vec{r}'(t)$$



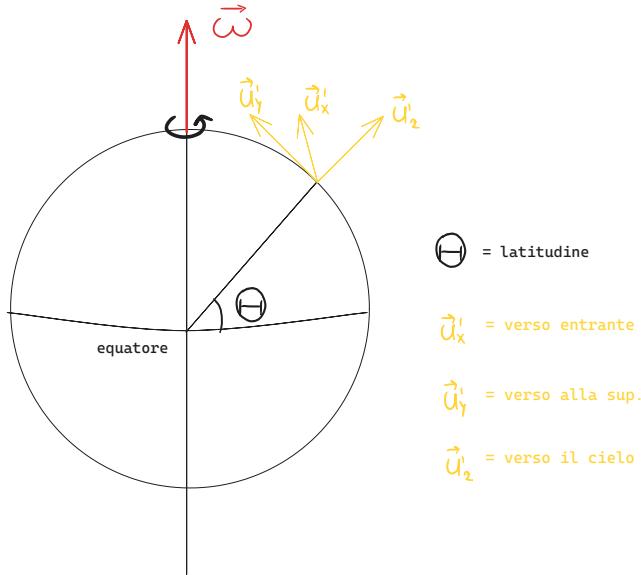
Su una stazione spaziale ad anello che ruota con $\omega = 0,1 rad$ e ha $R \approx 9,8m$ sento una forza centrifuga $\|\vec{F}_{app}\| = m\omega^2 R = (9,8m)N$

Il sistema (rotante!) della Terra



Sappiamo che sulla Terra ci sono forze apparenti.

Accelerazione apparente terrestre



$$||\vec{\omega}|| = \frac{2\pi}{24*3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

In O' (che dipende da Θ):

$$\vec{\omega} = \omega \cos \Theta \vec{u}'_y + \omega \sin \Theta \vec{u}'_z$$

Un punto materiale fermo alla latitudine Θ sulla superficie terrestre "sente" una forza apparente

$$\vec{F}_{app} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega}\vec{r}')$$

$$\vec{r}'(t) = R_{Terra} \vec{u}'_z(t)$$

$$R_{Terra} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Vogliamo calcolarci l'accelerazione dovuta a \vec{F}_{app} :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{app} &= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times R_{Terra} \vec{u}'_z) = \\ &= -(\omega \cos \Theta \vec{u}'_y + \omega \sin \Theta \vec{u}'_z) \times [(\omega \cos \Theta \vec{u}'_y + \omega \sin \Theta \vec{u}'_z) \times R_{Terra} \vec{u}'_z] = \\ &= \omega^2 R_T (\cos \Theta \vec{u}'_y + \sin \Theta \vec{u}'_z) \times [(\cos \Theta \vec{u}'_y + \sin \Theta \vec{u}'_z) \times \vec{u}'_z] = \\ &= -\omega^2 R_T (\cos \Theta \vec{u}'_y + \sin \Theta \vec{u}'_z) \times [\cos \Theta \vec{u}'_x + 0] \\ &= -\omega^2 R \cos \Theta (\cos \Theta \vec{u}'_y + \sin \Theta \vec{u}'_z) \times \vec{u}'_x = \end{aligned}$$

$$= -\omega^2 R_T \cos \Theta (-\cos \Theta \vec{u}'_z + \sin \Theta \vec{u}'_y) = \\ = \omega^2 R_T (\cos^2(\Theta) \vec{u}'_z - \cos \Theta \sin(\Theta) \vec{u}'_y)$$

Troviamo che $\Delta g = \omega^2 R_T \approx 0,034 \frac{m}{s^2}$.

In totale, sulla Terra, sentiamo (da fermi)

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_p + \vec{F}_{app} = -mg\vec{u}'_z + m\Delta g(\cos^2(\Theta) \vec{u}'_z - \cos \Theta \sin(\Theta) \vec{u}'_y) = \\ = -m(g - \Delta g \cos^2 \Theta) \vec{u}'_z - m\Delta g \cos \Theta \sin \Theta \vec{u}'_y.$$

L'effetto è massimo all'equatore.

Il modulo di \vec{F}_{tot} è :

$$\|\vec{F}_{tot}\| = \sqrt{m^2(g - \Delta g \cos^2 \Theta)^2 + m^2\Delta g^2 \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta} = \\ = mg\sqrt{\left(1 - \frac{\Delta g}{g} \cos^2 \Theta\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g} \cos \Theta \sin \Theta\right)^2} = \\ \text{Usando che } \frac{\Delta g}{g} \ll 1 \quad \frac{\Delta g}{g} = \epsilon \sim 10^{-3} \text{ e la serie della radice} \\ = mg\sqrt{(1 - \epsilon \cos \Theta)^2 + (\epsilon \cos \Theta \sin \Theta)^2} = \\ = mg\sqrt{1 - 2\epsilon \cos^2 \Theta + o(\epsilon^2)} = \\ = mg(1 - \epsilon \cos^2 \Theta + o(\epsilon^2)) = \\ = mg(1 - \epsilon \cos^2 \Theta + o(\epsilon^2)) = \\ = mg\left(1 - \frac{\Delta g}{g} \cos^2 \Theta + o(\epsilon^2)\right) = \\ = gm - \Delta g m \cos^2 \Theta$$

La forza peso viene corretta del termine centrifugo.

L'unico termine che importa è quello lungo z, l'altro non cambia tanto.

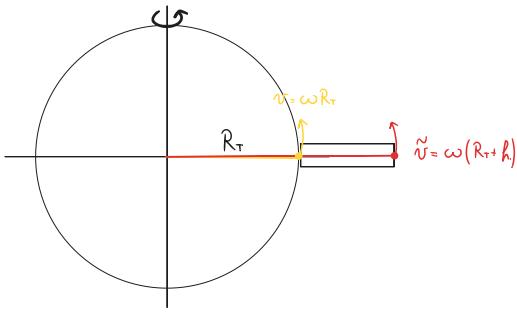
□

Lezione 18

Abbiamo visto che

- $\vec{\omega} = \omega \cos \Theta \vec{u}'_y + \omega \sin \Theta \vec{u}'_z$
- $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- La forza peso viene "corretta" del termine centrifugo
 $\vec{F}_p + (-m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}') = -mg\vec{u}'_z + m\Delta g(\cos^2(\Theta) \vec{u}'_z - \cos \Theta \sin(\Theta) \vec{u}'_y) = -mg_{eff,z} \vec{u}'_z - mg_{eff,y} \vec{u}'_y$
 $g_{eff,z} = g - \Delta g(\cos \Theta)^2$
 $g_{eff,y} = \Delta g \cos \Theta \sin \Theta$
 $\Delta g = R_T \omega^2$

Esperimento di Guglielmini



All'equatore, un oggetto lasciato cadere dalla sommità della torre (da fermo rispetto ad essa) ha una velocità iniziale non nulla rispetto al suolo $v_0 = \Delta v = h\omega$.

In generale, l'effetto dipende dalla latitudine Θ .

Deviazione della traiettoria del corpo

Vogliamo ricavare la deviazione di un corpo che cade da quota h rispetto al filo a piombo, usiamo le forze apparenti che abbiamo derivato.

Per il filo a piombo, tenendo conto di \vec{F}_{app} , abbiamo trovato:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{app} = \vec{F}_p - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -mg_{eff,z}\vec{u}'_z - mg_{eff,y}\vec{u}'_y$$

Per un corpo in caduta libera:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{app} = \vec{F}_p - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}}$$

La deviazione rispetto al filo a piombo è data dal termine di Coriolis.

Analisi del moto

$$m\vec{a}' = -mg_{eff,z}\vec{u}'_z - mg_{eff,y}\vec{u}'_y - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Siccome ω è piccolo, $\vec{v}' = v_z(t)\vec{u}'_z + o(\omega)$ (il contributo è piccolo).

A meno di termini piccoli, scrivo:

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &\approx -mg_{eff,z}\vec{u}'_z - mg_{eff,y}\vec{u}'_y - 2m\vec{\omega} \times v_z(t)\vec{u}'_z = \\ &= -mg_{eff,z}\vec{u}'_z - mg_{eff,y}\vec{u}'_y - 2m\omega \cos \Theta \vec{u}'_y \times v_z(t)\vec{u}'_z + \underbrace{\vec{0}}_{\vec{u}'_z \times \vec{u}'_z} = \\ &= -mg_{eff,z}\vec{u}'_z - mg_{eff,y}\vec{u}'_y - \underbrace{2m\omega v_z(t) \cos \Theta \vec{u}'_x}_{\text{Coriolis è lungo } \vec{u}'_x} \end{aligned}$$

Lungo \vec{u}'_z :

$$ma_z = -mg_{eff,z}$$

$$a_z = g_{eff,z}$$

$$v_z(t) = \int_0^t -g_{eff,z} d\tau = -g_{eff,z}t$$

$$z(t) = \int_0^t v_z(\tau) d\tau + \underbrace{h}_{z(t=0)} = h + \int_0^t -g - eff, z d\tau = -\frac{1}{2}g_{eff,z}t^2$$

Lungo \vec{u}'_x :

$$ma_x = -2m\omega \cos \Theta v_z(t)$$

$$a_x = -2\omega \cos \Theta (-g_{eff,z}t)$$

$$v_x(t) = \int_0^t a_x(\tau) d\tau + \underbrace{v_x(0)}_{=0} = \int_0^t 2g_{eff,z}\omega \cos \Theta \tau d\tau = 2g_{eff,z}\omega \cos \Theta \left[\frac{1}{2}\tau^2 \right]_0^t = g_{eff,z}\omega \cos \Theta t^2$$

$$x(t) = \int_0^t v_x(\tau) d\tau + \underbrace{x_0}_{=0} = g_{eff,z}\omega \cos \Theta \int_0^t \tau^2 d\tau = g_{eff,z}\omega \cos \Theta \frac{t^3}{3}$$

Per trovare la deviazione di Coriolis lungo \vec{u}'_x , calcoliamo $x(t)|_{t=T_c}$ dove il tempo di caduta è tale che $z(t)|_{T_c} = 0 \implies h - \frac{1}{2g_{eff,z}} t_c^2 = \sqrt{\frac{2h}{g_{eff,z}}}$

$$c(t_c) = \frac{1}{3}g_{eff,z}\omega \cos \Theta \left(\frac{2h}{g_{eff}} \right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{3}10 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2})^2(100)^{3/2}}{10^{3/2}} =$$

$$= \cancel{\frac{7}{8}}^{\frac{1}{10}} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^{-2} m \text{ che è qualche centimetro.}$$

Le leggi di conservazione

Teorema dell'impulso

La definizione del lavoro ($W_{\vec{F}[\Gamma_{01}]} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} dt$) ci ha immediatamente fornito il teorema dell'energia cinetica ($W_{\vec{F}[\Gamma_{traiettoria}]} = \Delta E_k$). Ci sono altre quantità che si comportano così. Ad esempio, l'*impulso*

$$\vec{I}_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \left(\vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{dt}, t \right) dt$$

e lungo la traiettoria

$$\vec{I}_{\vec{F}}[\Gamma_{traiettoria}] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = \Delta \vec{p}$$

(cioè la variazione della quantità di moto).

Teorema del momento angolare

Un'ulteriore quantità è il *momento di una forza* \vec{F}

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\gamma}(t) \times \vec{F} \left(\vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{dt}, t \right) dt$$

lungo la traiettoria

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}[\Gamma_{traiettoria}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{r}(t) \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}(t)) dt \quad \heartsuit$$

Osserviamo che vale

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)) = \underbrace{\vec{v}(t) \times m\vec{v}(t)}_{=\vec{0}} + \vec{r}(t) \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}(t))$$

Quindi \heartsuit è dato da

$$\heartsuit = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)}_{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{momento angolare}} \right) dt$$

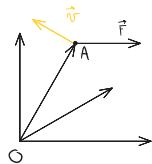
CURIOSITÀ

Queste leggi sono dovute dalle simmetrie.

Possiamo scegliere il tempo t_0 come vogliamo, così come l'origine e la rotazione degli assi, e non influenzano il risultato del calcolo. Il fatto che i risultati siano indipendenti dalla scelta dello zero del tempo, dello spazio e della rotazione si vedono e verificano nelle leggi della conservazione dell'energia.

□

SUL MOMENTO ANGOLARE \vec{L}



Il vettore $\vec{r} = \vec{OA}$ è detto "braccio" e il momento angolare si dice calcolato rispetto al "polo" O

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Il teorema angolare ci dice che la variazione di \vec{L} è uguale all'integrale $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}[\Gamma_{01}]$.

$$\Delta \vec{L} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\mathcal{M}} dt \quad \vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Prendendo $t_1 - t_0$ piccolo ($t_1 = t_0 + dt$) otteniamo una relazione in forma differenziale

$$\Rightarrow d\vec{L} = \vec{\mathcal{M}} dt \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}$$

(la stessa cosa si ottiene calcolando $\frac{d}{dt_1} (\vec{L}(t_1) - \vec{L}(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\mathcal{M}} dt$).

Ricordo che la relazione $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$ è il teorema del momento angolare in forma differenziale. (La forma integrale e differenziale sono equivalenti, ma è più semplice la seconda)

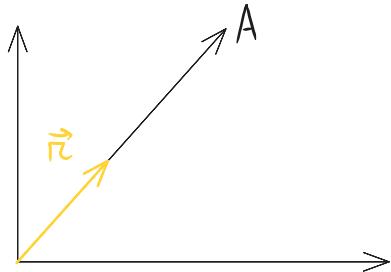
DIMOSTRAZIONE IN FORMA DIFFERENZIALE

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)) = \underbrace{\vec{v}(t) \times m\vec{v}(t)}_{=0} = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) \text{ lungo il moto.}$$

□

Momento angolare e forze centrali

$\vec{F}_c(\vec{r}) = f(||\vec{r}||)\vec{u}_r$ dipende solo da $\vec{r} = \vec{OA}$



Osservazione

Se un punto è soggetto a una forza centrale, il momento angolare rispetto al centro è costante nel tempo.

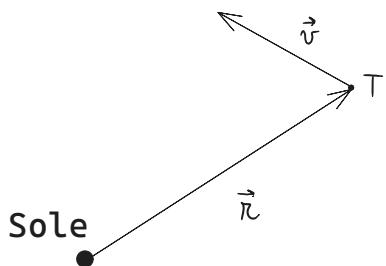
Dimostrazione

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}) = \vec{r} \times \vec{F}_c = \vec{r} \times f(||\vec{r}||)\vec{u}_r = \vec{0} \text{ perché } \vec{r} \text{ e } \vec{u}_r \text{ sono paralleli.}$$

□

Forza gravitazionale

La forza di gravitazione universale è una forza centrale.



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

\vec{L} è perpendicolare al piano individuato da \vec{r} e \vec{v} . Se \vec{L} non cambia, allora anche il piano individuato da \vec{r} e \vec{v} non cambia, quindi il moto è in piano.

□

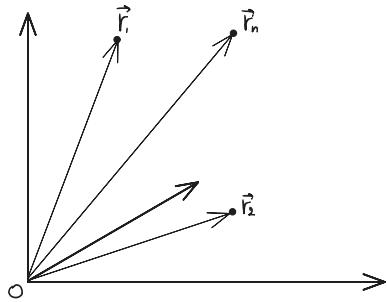
Sistemi di punti materiali

Per un punto materiale, lungo la traiettoria, abbiamo tre leggi:

- $\Delta E_k = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

- $\Delta \vec{p} = \int \vec{F} dt$
- $\Delta \vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{F} dt$

Queste leggi si generalizzano al caso dei **sistemi di punti materiali**.



Consideriamo n punti materiali con posizioni $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ e masse m_1, m_2, \dots, m_n . Per ciascuno di questi punti vale

$$m_1 \vec{a}_1 = F_{tot,1}, \dots, m_n \vec{a}_n = \vec{F}_{tot,n}.$$

Quantità per i punti materiali e centro di massa

Dati n punti, è utile introdurre le quantità:

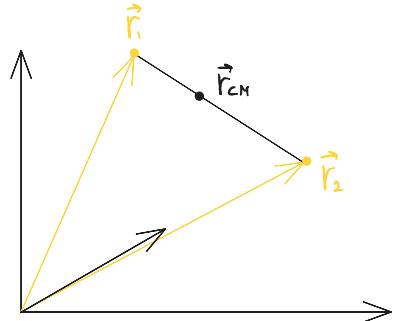
- $M = \sum_{j=1}^n m_j =$ massa totale
- $E_{k,tot} = \sum_{j=1}^n E_{k,j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j ||\vec{v}_j||^2 =$ energia cinetica totale
- $\vec{p}_{tot} = \sum_{j=1}^n \vec{p}_j = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j =$ quantità di moto totale
- $\vec{L}_{tot} = \sum_{j=1}^n \vec{L}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j =$ momento angolare totale

Si definisce inoltre il *centro di massa* (C.M.), un punto la cui posizione è la media pesata delle posizioni dei punti:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{M} \vec{r}_j$$

Esempio

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$$



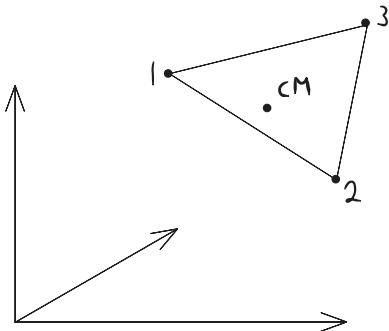
Calcoliamo la posizione di \vec{r}_1 rispetto a \vec{r}_{CM} :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} &= \vec{r}_1 - \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 = \frac{(m_1+m_2)\vec{r}_1 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{M} = \frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} &= \frac{m_1}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned}$$

Dunque $\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}$ è diretto lungo la congiungente di \vec{r}_1 e \vec{r}_2 ($\vec{r}_1 - \vec{r}_2$) e la distanza di \vec{r}_1 da \vec{r}_{CM} è $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}\| = \frac{m_2}{M} \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$.

Colloquialmente, il CM è vicino al punto più massivo.

Se avessi $n = 3$, il CM sarebbe dentro il triangolo individuato dai punti.



Per n punti è nell' "inviluppo convesso" dei punti.

□

Esempio

$$n = 2$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}_2$$

Allora notiamo che:

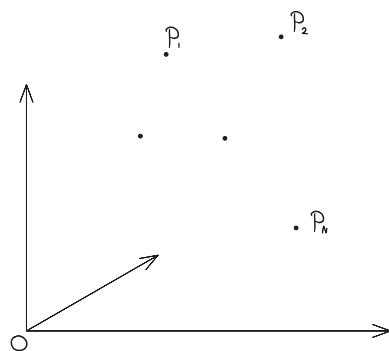
$$M \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{p}_{tot}$$

È come se il CM fosse un punto di massa M con $\vec{p}_{CM} = M \vec{v}_{CM} = \vec{p}_{tot}$

□

Lezione 19

Legge di Newton per il centro di massa



I punti hanno posizione $\vec{r}_1 = \vec{OP}_1$, $\vec{r}_2 = \vec{OP}_2$, ...; hanno velocità $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$, $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$, ...; accelerazione $\vec{a}_1 = \frac{d}{dt} \vec{v}_1$, $\vec{a}_2 = \frac{d}{dt} \vec{v}_2$,

Per ciascuno di questi corpi: $m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{tot,1}$, $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{tot,2}$,

Abbiamo anche introdotto il centro di massa: $\vec{r}_{CM} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j \vec{r}_j}{M}$, con $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$. Ne consegue, facendo la derivata dell'equazione sopra, $\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N \frac{m_j \vec{v}_j}{M}$. Possiamo riscrivere $\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j = \frac{1}{M} \vec{p}_{tot} \implies M \vec{v}_{CM} = \vec{p}_{tot}$.

Con un'ulteriore derivata:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \frac{m_j \vec{v}_j}{M} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j \vec{a}_j}{M}$$

Quindi $\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{a}_j$, oppure, equivalentemente,

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{tot,j} \quad \heartsuit$$

è una "legge di Newton" per il centro di massa.

Forze interne ed esterne

La formula \heartsuit si può semplificare distinguendo forze interne ed esterne.

Forze interne: forze esercitate da ciascuno dei punti P_1, \dots, P_N su ciascun altro.

Forze esterne: le altre.

Esempio

$$\vec{F}_{tot,1} = \underbrace{\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \dots + \vec{F}_{N,1}}_{\text{Interne}} + \underbrace{\vec{F}_{ext,1}}_{\text{Esterna}} \quad (\text{le forze esercitate da } P_N \text{ su } P_1)$$

$$\vec{F}_{tot,2} = \underbrace{\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,2} + \vec{F}_{4,2} + \dots + \vec{F}_{n,2}}_{\text{Interne}} + \underbrace{\vec{F}_{ext,2}}_{\text{Esterne}}$$

□

Teorema del moto del centro di massa

Considero $N = 3$ e l'equazione \heartsuit :

$$\begin{aligned} M \vec{a}_{CM} &= \vec{F}_{tot,1} + \vec{F}_{tot,2} + \vec{F}_{tot,3} = \\ &= \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,2} + \vec{F}_{ext,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{2,3} + \vec{F}_{ext,3} = \end{aligned}$$

Per il principio di azione e reazione $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$, $\vec{F}_{1,3} = -\vec{F}_{3,1}$, in generale $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$. Quindi

$$\cancel{\vec{F}_{2,1}} + \cancel{\vec{F}_{3,1}} + \vec{F}_{ext,1} + \cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{3,2}} + \vec{F}_{ext,2} + \cancel{\vec{F}_{1,3}} + \cancel{\vec{F}_{2,3}} + \vec{F}_{ext,3}$$

Rimane solo:

$$= \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} + \vec{F}_{ext,3}.$$

Questa considerazione vale per qualsiasi N e quindi

$$m \vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j}$$

Dimostrazione per N generico usando le sommatorie

$$\vec{F}_{tot,j} = \underbrace{\vec{F}_{ext,j}}_{\text{Esterne}} + \underbrace{\sum_{k=1, k \neq j}^N \vec{F}_{k,j}}_{\text{Interne}}$$

Definendo $\vec{F}_{j,j} \equiv \vec{0}$ posso scrivere

$$\vec{F}_{tot,j} = \vec{F}_{ext,j} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{k,j}$$

Inseriamo quest'espressione in \heartsuit :

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{tot,j} = \sum_{j=1}^N \left[\vec{F}_{ext,j} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{k,j} \right] = \\ = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{j,k} \vec{F}_{k,j} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{j,k=1, j < k}^N \vec{F}_{k,j} + \sum_{j,k=1, j > k}^N \vec{F}_{k,j} + \sum_{j,k=1, j=k}^N \vec{F}_{k,j} =$$

Siccome gli indici delle sommatorie sono muti, posso cambiargli nome.

$$= \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{a,b=1, a < b}^N \vec{F}_{b,a} + \sum_{a,b=1, a < b}^N \vec{F}_{a,b} + \sum_{j=1}^N \underbrace{\vec{F}_{j,j}}_{=\vec{0}} = \\ = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{a,b=1, a < b}^N [\underbrace{\vec{F}_{a,b} + \vec{F}_{b,a}}_{=\vec{0} \text{ per la III legge di Newton}}] = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j}$$

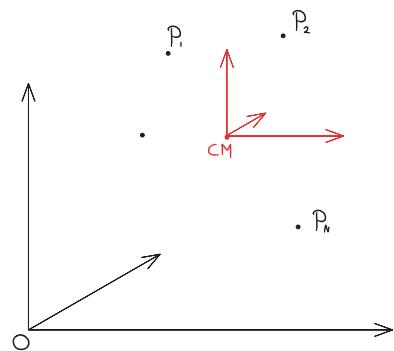
□

Osservazione (Sistema di riferimento del centro di massa)

In assenza di forze esterne, $M\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ e quindi un sistema di riferimento solidale al centro di massa è inerziale. Questo sistema è il Sistema del centro di massa.

□

Il sistema di riferimento del centro di massa



Quantità di moto nel sistema del centro di massa

Per i punti P_1, \dots, P_N vale $\underbrace{\vec{r}_j}_{\text{pos. di } P_j \text{ in } O} = \underbrace{\vec{r}'_j}_{\text{pos. di } P_j \text{ nel sistema } CM} + \underbrace{\vec{r}_{CM}}_{\text{pos. di } CM \text{ in } O}$ (in

particolare $\vec{r}'_{CM} = \vec{0}$ nel sistema del CM).

Ne consegue che $\vec{v}_j = \vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}$ e moltiplicando per m_j e sommandola ho:

$$\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j = \sum_{j=1}^N [m_j \vec{v}'_j + m_j \vec{v}_{CM}]$$

$$\vec{p}_{tot} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}'_j + \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_{CM}$$

$$\underbrace{\vec{p}_{tot}}_{\text{in } O} = \underbrace{\vec{p}'_{tot}}_{\text{in } CM} + M \vec{v}_{CM}$$

Ma abbiamo dimostrato che $M \vec{v}_{CM} = \vec{p}_{tot} \implies \vec{p}'_{tot} = 0$.

Nel sistema del centro di massa la quantità di moto totale è zero.

□

Energia cinetica nel sistema del centro di massa (secondo teorema di König)

$$\begin{aligned} E_{k,tot} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \|\vec{v}_j\|^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \|\vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}\|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} [\|\vec{v}'_j\|^2 + \|\vec{v}_{CM}\|^2 + 2\vec{v}'_j \cdot \vec{v}_{CM}] = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \|\vec{v}'_j\|^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \|\vec{v}_{CM}\|^2 + \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}'_j \cdot \vec{v}_{CM} = \\ &= \underbrace{E'_{k,tot}}_{E'_{k,tot} \text{ nel sis. del } CM} + \frac{1}{2} M \|\vec{v}_{CM}\|^2 + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}'_j \right) \cdot \vec{v}_{CM}}_{\vec{p}'_{tot} = \vec{0}} = \end{aligned}$$

$$E_{k,tot} = E'_{k,tot} + \frac{1}{2} M \|\vec{v}_{CM}\|^2$$

L'energia cinetica totale in O è uguale alla somma dell'energia cinetica nel centro di massa più quella del centro di massa.

Ciò che abbiamo dimostrato è il secondo teorema di König.

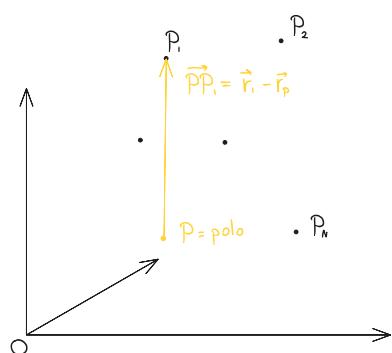
Corollario

Siccome il secondo termine dell'equazione è positivo, noto che l'energia cinetica nel centro di massa è sempre più piccola che in qualsiasi altro punto.

$$E'_{k,tot} \leq E_{k,tot}$$

□

Momento angolare per N punti materiali



Il momento angolare di un punto P_j rispetto a un polo P è dato da

$$\vec{L}_{j,P} = (\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j \vec{v}_j$$

(il braccio è il vettore \vec{PP}_j , invece che \vec{OP}).

Il momento angolare totale rispetto a P è

$$\vec{L}_{tot,P} = \sum_{j=1}^N \vec{L}_{j,P} = \sum_{j=1}^N (\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j \vec{v}_j$$

Lezione 20

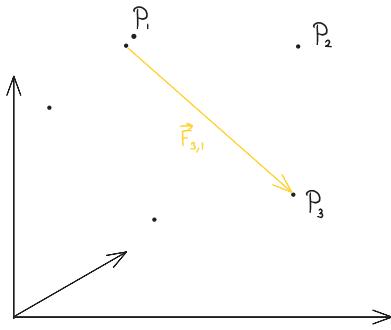
Dimostrazione

Vogliamo generalizzare il teorema del momento angolare al caso di N punti materiali. Calcoliamo quindi $\frac{d}{dt} \vec{L}_{tot,P}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^N (\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j \vec{v}_j \right] &= \sum_{j=1}^N (\vec{v}_j - \vec{v}_p) \times m_j \vec{v}_j + \sum_{j=1}^N ((\vec{r}_j - \vec{r}_p) \times m_j \vec{a}_j) = \\ &= \sum_{j=1}^N \underbrace{\vec{v}_j \times m_j \vec{v}_j}_{=0} - \sum_{j=1}^N \vec{v}_p \times m_j \vec{v}_j + \sum_{j=1}^N (\vec{r}_j - \vec{r}_p) \times \left[\vec{F}_{ext,p} + \sum_{k=1, k \neq j}^N \vec{F}_{k,j} \right] = \\ &= -\vec{v}_p \times \left(\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j \right) + \sum_{j=1}^N (\vec{r}_j - \vec{r}_p) \times \vec{F}_{ext,j} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \sum_{k=1, k \neq j}^N \vec{F}_{k,j} - \sum_{j=1}^N \vec{r}_p \times \sum_{k=1, k \neq j}^N \vec{F}_{k,j} = \\ &= -\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} + \sum_{j=1}^N \underbrace{\vec{M}_{ext,j,P}}_{\text{momento } \vec{F}_{ext,j} \text{ rispetto al polo } P} + \sum_{j,k=1, k \neq j}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{k,j} - \vec{r}_p \sum_{j,k=1, k \neq j}^N \vec{F}_{k,j} = \\ &= -\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} + \vec{M}_{ext,tot,p} + \\ &\quad + \sum_{j,k=1, j < k}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{k,j} + \sum_{j,k=1, k < j}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{k,j} + \\ &\quad - \vec{r}_p \times \left[\sum_{j,k=1, j < k}^N \vec{F}_{k,j} + \sum_{j,k=1, k < j}^N \vec{F}_{k,j} \right] = \\ &= -\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} + \vec{M}_{ext,tot,p} + \\ &\quad + \sum_{a,b, a < b}^N \vec{r}_a \times \vec{F}_{b,a} + \sum_{a,b, a < b}^N \vec{r}_b \times \vec{F}_{a,b} + \\ &\quad - \vec{r}_p \times \left[\sum_{a,b=1, a < b}^N \vec{F}_{b,a} + \sum_{a,b=1, a < b}^N \vec{F}_{a,b} \right] = \\ &= -\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} + \vec{M}_{ext,tot,p} + \\ &\quad + \sum_{a,b=1, a < b}^N [\vec{r}_a \times \vec{F}_{b,a} + \vec{r}_b \times (-\vec{F}_{b,a})] + \\ &\quad - \vec{r}_p \times \left[\sum_{a,b=1, a < b}^N \cancel{(\vec{F}_{b,a} \times \vec{F}_{b,a})} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} + \vec{M}_{ext,tot,p} + \sum_{a,b=1, a < b}^N (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{F}_{b,a} =$$

L'espressione si semplifica usando che $\vec{F}_{b,a}$ è per forza parallela a $\vec{r}_b - \vec{r}_a$ (il vettore che congiunge P_a e P_b). Allora $(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{F}_{b,a} = \vec{0}$



$$= -\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} + \vec{\mathcal{M}}_{ext,tot,p} + \underbrace{\sum_{a,b=1, a < b}^N (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{F}_{b,a}}$$

□

Il teorema del momento angolare dice che

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{tot,p} = -\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} + \vec{\mathcal{M}}_{ext,tot,p}$$

Osservazione

La formula si semplifica se $\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} = \vec{0}$. Questo avviene se:

1. Il polo è fermo: $\vec{v}_p = \vec{0}$;
2. IL polo è il centro di massa: $\vec{v}_p = \vec{v}_{CM}$ e siccome $\vec{p}_{tot} = M\vec{v}_{CM}$, allora $\vec{v}_p \times \vec{p}_{tot} = \vec{v}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} = \vec{0}$;
3. Siamo nel sistema di riferimento del centro di massa: $\vec{p}_{tot} \equiv \vec{p}'_{tot} = \vec{0}$.
In particolare, se le forze sono solo interne, $\frac{d}{dt} \vec{L}_{tot} = \vec{0}$.

□

Relazione tra \vec{L}_O e $\vec{L}_{O'}$ (Primo teorema di König)

\vec{L}_O è il momento angolare in O , $\vec{L}_{O'}$ è il momento angolare nel sistema del centro di massa.

Ricordiamo che $\vec{r}_j = \vec{r}'_j + \vec{r}_{CM}$ e che quindi $\vec{v}_j = \vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}$.

Il momento angolare totale in O rispetto all'origine

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot,O} &= \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j = \sum_{j=1}^N (\vec{r}'_j + \vec{r}_{CM}) \times m_j (\vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}) = \\ &= \sum_{j=1}^N \vec{r}'_j \times m_j \vec{v}'_j + \sum_{j=1}^N \vec{r}'_j \times m_j \vec{v}_{CM} + \sum_{j=1}^N \vec{r}_{CM} \times m_j \vec{v}'_j + \sum_{j=1}^N \vec{r}_{CM} \times m_j \vec{v}_{CM} = \\ &= \vec{L}_{tot,O'} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N M \frac{m_j \vec{r}'_j}{M} \right)}_{M \vec{r}'_{CM} = \vec{0}} \times \vec{v}_{CM} + \sum_{j=1}^N \vec{r}_{CM} \times \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}'_j \right)}_{\vec{p}'_{tot} = 0} + \vec{r}_{CM} \times \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N m_j \right)}_M \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

E quindi

$$\vec{L}_{tot,O} = \vec{L}_{tot,O'} + \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$$

□

Esercizio

Una pistola di massa $m_1 = 2\text{kg}$ spara un proiettile di massa $m_2 = 0,02\text{kg}$ con velocità che vale in modulo $v_2 = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

1. Che moto compie la pistola?
2. Quanto vale l'energia della cartuccia, assumendo che sia tutta trasferita in E_k ?

(1)

Osserviamo che per il teorema dell'impulso

$$\Delta \vec{p}_{tot} = \vec{I}_{tot} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{1,2}) dt = \vec{0}$$

$$\vec{p}_{tot,in} = \vec{p}_{tot,fin}$$

Nel CM:

$$\vec{p}'_{tot} = \vec{0}$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Lungo la direzione di sparo:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \implies v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(2)

Prima dello sparo $E_{k,tot} = 0$

Dopo lo sparo

$$E_{k,tot} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} 2(6)^2 + \frac{1}{2} 0,02(600)^2 = 36 + 0,01 * 36 * 10^4 = 3636\text{J}.$$

□

Lezione 21

Esercizio

Due masse m_1 e m_2 sono appoggiate su un piano liscio, ferme. Tra di esse si trova una molla di costante elastica k , compressa di Δx . A $t_0 = 0$ la molla viene lasciata libera. **Trovare v_1 e v_2 tralasciando gli attriti.**

Prima t_0



Dopo t_0



Niente attrito $\implies E_{tot}$ si conserva

$$E_{tot,prima} = E_{tot,dopo}$$

$$E_{tot,prima} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

$$E_{tot,dopo} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

\vec{p}_{tot} si conserva (tutte le forze esercitate sui corpi sono interne).

$\vec{p}_{tot,prima} = \vec{0}$ (siamo nel sistema di riferimento del centro di massa)

$$\implies m_1v_1 + m_2v_2 = 0$$

$$\implies v_1 = -\frac{m_2}{m_1}v_2 \text{ (ci torna, infatti le velocità hanno segno opposto)}$$

Le due equazioni messe assieme ci permettono di trovare:

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{m_2}{m_1}v_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$k(\Delta x)^2 = \frac{m_2^2}{m_1}v_2^2 + m_2v_2^2$$

$$k(\Delta x)^2 = \frac{m_2}{m_1}(m_2 + m_1)v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{km_1(\Delta x)^2}{m_2(m_1+m_2)}} > 0$$

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{km_1(\Delta x)^2}{m_2(m_1+m_2)}} = -\sqrt{\frac{km_2(\Delta x)^2}{m_1(m_1+m_2)}}$$

□

Urti elasticici, anelastici e completamente anelastici

Un urto è elastico se l'energia (cinetica) si conserva.

Un urto non elastico è detto "anelastico".

Un urto è detto "completamente anelastico" se dopo la collisione i due corpi rimangono attaccati.

Urto elastico

prima



dopo



Prima: $v_1 > 0, v_2 < 0$.

Dopo: $V_1 < 0, V_2 > 0$

Assumiamo che m_1, m_2, v_1, v_2 siano noti.

$$E_{tot} = E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$p_{tot} = m_1v_1 + m_2v_2$$

Siccome E_{tot} (E_k) e p_{tot} si conservano, so che dopo l'urto ho:

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \\ p_{tot} = m_1V_1 + m_2V_2 \end{cases}$$

Due equazioni in incognite (V_1, V_2) .

Le risolviamo:

$$V_1 = \frac{1}{m_1}p_{tot} - \frac{m_2}{m_1}V_2$$

$$\implies E_k = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{m_1}p_{tot} - \frac{m_2}{m_1}V_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$$

$$2E_k = \frac{1}{m_1}p_{tot}^2 + \frac{(m_2V_2)^2}{m_1} - 2\frac{m_2}{m_1}p_{tot}V_2 + m_2V_2^2$$

$$0 = -2E_k + \frac{1}{m_1}p_{tot}^2 + \frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1}V_2^2 - 2\frac{m_2}{m_1}p_{tot}V_2$$

È un'equazione del tipo: $aV_2^2 + bV_2 + c = 0$

$$V_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = \frac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)$$

$$b = -2\frac{m_2}{m_1}p_{tot}$$

$$c = \frac{1}{m_1}p_{tot}^2 - 2E_k$$

Dopo l'urto $V_2 > V_1$, quindi devo scegliere il segno più:

$$V_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$V_2 = \frac{\frac{2m_2}{m_1}p_{tot} + \sqrt{4\frac{m_2^2}{m_1^2}p_{tot}^2 - 4\left(\frac{m_2}{m_1}(m_1+m_2)\right)\left(\frac{1}{m_1}p_{tot}^2 - 2E_k\right)}}{2\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1}}$$

$$V_2 = \frac{\frac{2m_2}{m_1}p_{tot} + \frac{2}{m_1}\sqrt{m_2^2p_{tot}^2 - (m_2m_1)(m_1+m_2)\left(\frac{1}{m_1}p_{tot}^2 - 2E_k\right)}}{2\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1}}$$

$$V_2 = \frac{\cancel{\frac{m_2}{m_1}}\left(m_2p_{tot} + \sqrt{(m_2p_{tot})^2 - m_2(m_1+m_2)p_{tot}^2 + 2m_1m_2(m_1+m_2)E_k}\right)}{\cancel{\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1}}}$$

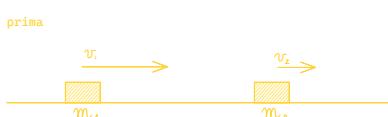
$$V_2 = \frac{m_2p_{tot} + \sqrt{(m_2p_{tot})^2 - m_2(m_1+m_2)p_{tot}^2 + 2m_1m_2(m_1+m_2)E_k}}{m_2(m_1+m_2)}$$

Mettendo la formula in $V_1 = \frac{1}{m_1}p_{tot} - \frac{m_2}{m_1}V_2$ sappiamo di dover trovare la stessa formula ma con gli 1 al posto dei 2 (e viceversa) e la radice negativa al posto di quella positiva, cioè:

$$V_1 = \frac{m_1p_{tot} + \sqrt{(m_1p_{tot})^2 - m_1(m_2+m_1)p_{tot}^2 + 2m_1m_2(m_1+m_2)E_k}}{m_1(m_1+m_2)}$$

Nota bene

In generale può essere



$v_1 > 0$ e $v_2 > 0$, basta che $v_1 > v_2$. Dopo ho che $V_2 > V_1$

□

Nel centro di massa

Ho che $p_{tot} = p'_{tot} = 0$ (quindi $v_1 > 0$ e $v_2 < 0$).

Nel centro di massa avrei trovato

$$a = \frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1}$$

$$b = 0$$

$$c = -2E'_k$$

La soluzione dell'equazione quadratica sarebbe stata più semplice e avremmo trovato:

$$V'_2 = +\sqrt{\frac{2m_1m_2(m_1+m_2)E'_k}{m_2(m_1+m_2)}}$$

$$V'_2 = \sqrt{2\frac{m_1E'_k}{m_2(m_1+m_2)}}$$

$$V'_1 = \frac{1}{m_1}p'_{tot} - \frac{m_2}{m_1}V'_2$$

$$V'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\sqrt{2\frac{m_1E'_k}{m_2(m_1+m_2)}} = -\sqrt{2\frac{m_2E'_k}{m_1(m_1+m_2)}}$$

□

Conoscendo V'_1 e V'_2 , possiamo usare che $V_1 = V'_1 + V_{CM}$ e $V_2 = V'_2 + V_{CM}$

$$V_{CM} = \frac{p_{tot}}{m_1+m_2} \text{ (perché } \vec{p}_{tot} = M\vec{v}_{CM})$$

$$E'_k = E_k - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 = E_k - \frac{1}{2}\frac{1}{m_1+m_2}p_{tot}^2 \text{ (II teorema di König)}$$

Che avrei potuto utilizzare per trovare le formule di V_1 e V_2 senza passare per l'equazione quadratica.

Urto completamente anelastico



Prima: $v_1 > v_2$

Dopo: $V_1 = V_2 = V$

L'energia non si conserva, ma \vec{p}_{tot} si!

$$p_{tot} = m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V + m_2V = V(m_1 + m_2)$$

$$V = \frac{p_{tot}}{m_1+m_2} = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

In questo caso ho $V \equiv V_{CM}$

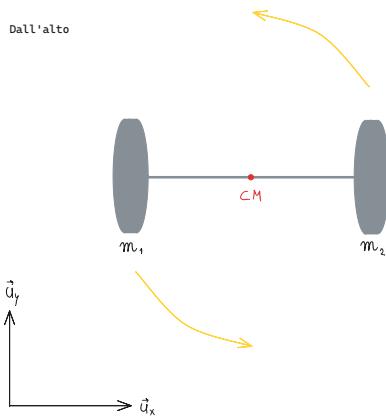
\Rightarrow Nel sistema del centro di massa, $V' = 0$.

L'energia dissipata nell'urto:

$$E'_k = \underbrace{E_k}_{\text{prima}} - \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2}_{\text{dopo}} \text{ (II teorema di König).}$$

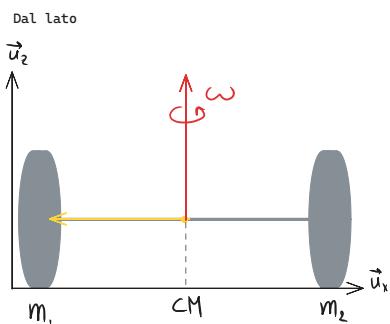
Esercizio

Un manubrio è costituito da una sbarra di massa trascurabile di lunghezza $L = 2m$ e due dischi di massa $m_1 = m_2 = 40kg$. Il manubrio ruota nel piano orizzontale senza attrito con $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$, $\omega = 2 \frac{rad}{s}$ intorno al centro di massa.



1. Trovare i momenti di tutte le forze (peso, reazione vincolare, tensione) rispetto al centro di massa
2. Trovare $E_{k,tot}$ e $\vec{L}_{tot,CM}$
3. Cosa succede se una forza lungo il manubrio cambia la lunghezza L in $L + \Delta L$ (ΔL positivo o negativo)

(1)



$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{p,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{p,2} = \\ &= \vec{r}_1 \times (m_1 g(-\vec{u}_z)) + \vec{r}_2 \times (m_2 g(-\vec{u}_z)) = -mg(\underbrace{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}_{=0 \text{ perche } \vec{r}_1 = -\vec{r}_2}) \times \vec{u}_z = \vec{0}\end{aligned}$$

Per la forza di reazione vincolare, è lo stesso: $\vec{\mathcal{M}}_R = \vec{0}$.

Per la tensione osserviamo che \vec{T} è lungo il manubrio, cioè parallela al braccio \vec{r}_1 o \vec{r}_2 . Quindi $\vec{r}_1 \times \vec{T} = \vec{r}_2 \times \vec{T} = \vec{0}$ e non c'è momento.

Lezione 22

(2)

$$E_k = \frac{1}{2}m_1||\vec{v}_1||^2 + \frac{1}{2}m_2||\vec{v}_2||^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2 = m\frac{L^2}{4}\omega^2$$

$$\vec{L}_{tot} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v} = -\vec{v}_2 = \frac{\omega L}{2} \vec{u}_\perp$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} = -\vec{r}_2 = \frac{L}{2} \vec{u}_r$$

$\implies \vec{L}_{tot} = \vec{r} \times m\vec{v} + (-\vec{r}) \times m(-\vec{v}) = 2\vec{r} \times m\vec{v} = 2||\vec{r}|| ||\vec{v}|| \sin(\frac{\pi}{2}) =$ (perché il vettore \vec{r} e \vec{v} sono perpendicolari fra loro, quindi l'angolo compreso è 90°)

$$= \frac{\omega L^2}{4} 2m\vec{u}_z = \frac{\omega L^2}{2} m\vec{u}_z$$

(3)

Osservazione: la forza lungo il manubrio non ha momento (perché parallela al braccio) $\implies \vec{L}_{tot}$ non cambia.

$$\text{In modulo } \frac{\omega L^2}{2} m = \frac{\omega_1(L+\Delta L)^2}{2} m$$

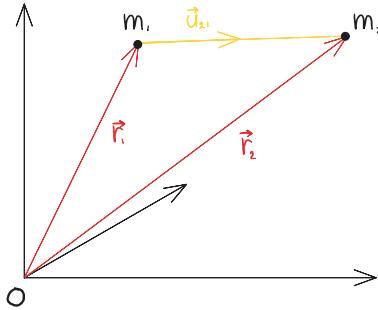
$$\implies \text{ho una nuova velocità angolare } \omega_1 = \frac{L^2}{(L+\Delta L)^2} \omega$$

Nota bene: ora l'energia cinetica è

$$E_k = \frac{m}{4} (L + \Delta L)^2 \omega_1^2 = \frac{m}{4} \frac{(L+\Delta L)^2 L^4}{(L+\Delta L)^2} \omega^2 = \frac{L^2}{(L+\Delta L)^2} \frac{m}{4} L^2 \omega^2 = \frac{L^2}{(L+\Delta L)^2} E_{k,prima}$$

Il problema di Keplero (o dei due corpi)

Due corpi di massa m_1, m_2 sono soggetti alla forza di gravitazione universale. **Determinare tutte le possibili orbite.**



La forza è lungo $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ o equivalentemente lungo \vec{u}_{21} (da 1 a 2).

Le leggi del moto sono:

$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_1 = -\frac{G m_1 m_2}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||^2} \vec{u}_{12}$ (è una forza attrattiva, le si dà il segno meno per convenzione)

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_2 = -\frac{G m_2 m_1}{||\vec{r}_2 - \vec{r}_1||^2} \vec{u}_{21}$$

Sono forze attrattive, interne. Siccome ci sono solo forze interne, \vec{p}_{tot} si conserva, quindi $\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \vec{p}_{tot}$ è costante ($M = m_1 + m_2$) e il sistema del centro di massa è inerziale.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$$

Nel sistema del centro di massa

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 - \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 = \underbrace{\frac{m_1 + m_2 - m_1}{M} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{M} \vec{r}_2}_{\frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} = \frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$\vec{r}'_2 = \frac{m_1}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ (posso scriverlo direttamente scambiando i pedici perché la formula deve essere simmetrica).

Massa ridotta

Consideriamo $m_1 \vec{r}'_1 = \frac{m_1 m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ e $m_2 \vec{r}'_2 = \frac{m_1 m_2}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

Chiamo

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

chiamata *massa ridotta* (ha infatti le dimensioni di una massa).

□

Nel centro di massa le equazioni del moto sono:

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_1 = \frac{d^2}{dt^2} \mu (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \text{ che si può anche scrivere come}$$

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}) = m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_1 - m_1 \underbrace{\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CM}}_{\vec{v}_{CM} \text{ è cost.}} = \\ = -G \frac{m_1 m_2}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||^2} \vec{u}_{12} = \mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Se fossi partito da $m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_2$, avrei trovato $\mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -G \frac{m_1 m_2}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||^2} \vec{u}_{21}$

Chiamo $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e $\vec{u}_r = \vec{u}_{12}$. Allora le equazioni per \vec{r}'_1 e \vec{r}'_2 (quelle appena trovate) diventano:

$$\begin{cases} \mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -G \frac{m_1 m_2}{||\vec{r}||^2} \vec{u}_r \\ -\mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -G \frac{m_1 m_2}{||\vec{r}||^2} (-\vec{u}_r) \end{cases}$$

Cioè non sono indipendenti (sono la stessa equazione).

Scrivo $\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \implies m_1 m_2 = \mu M$.

□

Seconda legge di Keplero

Siamo partiti da sei equazioni in sei incognite (le leggi del moto), che abbiamo riscritto come:

$$\vec{a}_{CM} = \vec{0}$$

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -\frac{GM\mu}{||\vec{r}||^2} \vec{u}_r$$

Abbiamo scomposto il moto di m_1 e m_2 in un moto del centro di massa, che ha massa M e moto a velocità costante ($M\vec{a}_{CM} = \vec{0}$) e intorno al centro di massa, che non è banale, e descrive

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \implies \mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -\frac{GM\mu}{||\vec{r}||^2} \vec{u}_r.$$

La parte non banale del moto descrive il moto di una massa μ in posizione \vec{r} intorno a una massa M posta nell'origine (cioè nel centro di massa).

Delle tre equazioni del moto per \vec{r} , solo due sono non banali.

$\vec{F} = -\frac{GM\mu}{||\vec{r}||^2} \vec{u}_r$ è centrale; la forza è parallela al braccio (cioè a \vec{r}) e quindi non ha momento, quindi \vec{L} si conserva (è costante).

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \mu \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) =$$

$$= \vec{r} \times \mu \left(\underbrace{\frac{dr}{dt} \vec{u}_r}_{\vec{r} \times \vec{r}_r = 0} + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp \right) =$$

$$= \mu \frac{d\theta}{dt} \vec{r} \times (r\vec{u}_\perp) =$$

$$= \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r \times \vec{u}_\perp$$

Se dico che il moto è nel piano (x, y) , allora $\vec{u}_r \times \vec{u}_\perp = \vec{u}_z$ e

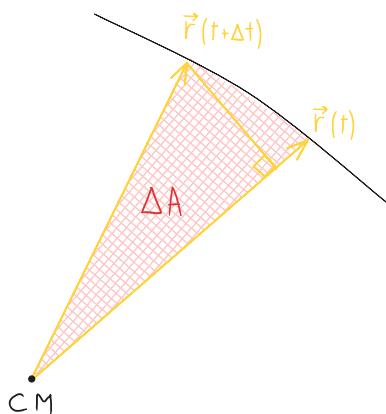
$$\vec{L} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z.$$

Siccome \vec{L} non cambia, il piano del moto non cambia.

Anche la quantità $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ è costante nel moto.

È una delle leggi di Keplero:

La velocità areolare $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ è costante.



L'area ΔA è circa uguale a quella del triangolo di cateti lunghi r e $r \tan(\Delta\theta)$, quindi $\frac{1}{2}r^2 \tan(\Delta\theta) = \frac{1}{2}r^2 \Delta\theta + o(\Delta\theta^2)$.

Il pezzo rimanente ha entrambi i cateti di lunghezza $o(\Delta\theta)$ e quindi ha un'area $o(\Delta\theta^2)$.

Quindi

$$\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta + o(\Delta\theta^2)$$

Perciò $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2r^2} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ è l'area spazzata nel tempo t . Con una derivata si trova la velocità areolare.

Quanto detto finora vale per qualsiasi forza centrale $\vec{F}_c = f(r)\vec{u}_r$, $r = ||\vec{r}||$.

□

Breve riassunto - 1

Abbiamo visto il sistema del centro di massa

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \vec{0} \text{ moto del centro di massa}$$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ moto rispetto al centro di massa}$$

$$k = Gm_1 m_2 = GM_M, \quad r = \|\vec{r}\| > 0$$

Inoltre $\vec{L} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$ è costante (il moto è nel piano di \vec{u}_r e \vec{u}_\perp)

□

Scomposizione rispetto \vec{u}_r e \vec{u}_\perp

Scomponiamo $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ rispetto a \vec{u}_r , \vec{u}_\perp :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}) = \frac{d}{dt}(r \vec{u}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp = \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp \right) = \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\perp - \underbrace{r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r}_{\text{termine centripeto}} = \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\perp - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r = \end{aligned}$$

Ricordo che

$$\vec{u}_z \cdot \vec{L} = L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{2L}{\mu r^2} \frac{dr}{dt} \vec{u}_\perp + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\perp - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \vec{u}_r$$

Lungo \vec{u}_\perp l'equazione $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$ è:

$$\frac{\mu 2L}{\mu r^2} \frac{dr}{dt} + \mu r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \implies \mu \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{2L}{r^3} \frac{dr}{dt}$$

Lungo \vec{u}_r :

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{\mu L^2}{\mu^2 r^3} = -\frac{k}{r^2} \implies \mu \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \quad \heartsuit$$

Calcolo dell'energia

♥ sembra l'equazione di un problema in una dimensione dovuto a una forza posizionale (e quindi conservativa).

Per capire meglio, calcoliamo l'energia totale nel problema di

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r :$$

$$E_{tot} = E_k(\vec{v}) + E_p(\vec{r}) = \frac{1}{2} \mu \|\vec{v}\|^2 - \frac{k}{r} = \text{ (perché } \vec{F}_G(\vec{r}) = -\frac{dE_p(r)}{dr} \vec{u}_r)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left\| \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp \right\|^2 - \frac{k}{r} = \text{ (il modulo quadro di un vettore è il prodotto scalare del vettore con sé stesso, il doppio prodotto è zero)}$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{k}{r} = \text{ (uso } \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\mu L^2}{\mu^2 r^2} - \frac{k}{r} = \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{E_{k,r}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}}_{E_{p,eff}}
\end{aligned}$$

Usando la conservazione di \vec{L} , l'energia cinetica di rotazione $\frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ può essere interpretata come un'energia potenziale per il moto lungo r (cioè per il problema unidimensionale relativo alla variazione di $r = \|\vec{r}\| = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$) .

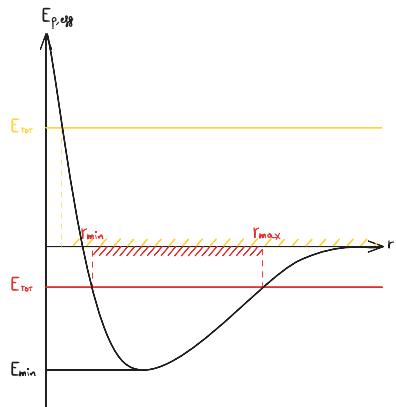
$\frac{L^2}{2\mu r^2}$ è detto termine centrifugo;

$E_{p,eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$ è detto potenziale efficace.

La forza derivante dal potenziale efficace è:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}E_{p,eff}(r) &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}\right) = \\
&= -\left[-2\frac{L^2}{2\mu r^3} - \left(-\frac{k}{r^2}\right)\right] = \\
&= \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \quad (\text{che è esattamente } \heartsuit).
\end{aligned}$$

Il potenziale efficace



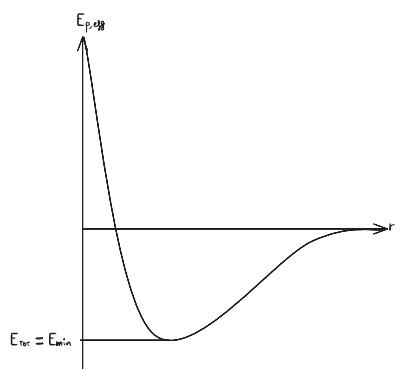
$$E_{tot} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p,eff} = \text{costante}$$

Se $E_{tot} > 0$: siccome $E_{tot} \geq E_{p,eff}$ deve essere $r > r_{min}$. È un' orbita aperta!

Se $E_{tot} < 0$: deve essere $r_{min} \leq r \leq r_{max}$. È un'orbita limitata.

Nota bene

Deve essere $E_{tot} \geq E_{min}$. Il caso estremo è $E_{tot} = E_{min}$:



in questo caso $r(t)$ è costante $\frac{dr}{dt} = 0$, $r_{min} = r_{max} = r_0$. L'orbita è circolare (r_0 è il raggio della circonferenza).

Orbita circolare

Siamo al minimo di $E_{p,eff}$ $\Rightarrow \frac{d}{dr}E_{p,eff}|_{r=r_0} = 0$
 $\frac{L^2}{\mu r_0^3} - \frac{k}{r_0^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{\mu k}$.

L'energia nell'orbita circolare è:

$$E_{p,eff}|_{r_0} = \frac{\frac{L^2}{2\mu r_0^2}}{\frac{k}{r_0}} = \frac{\frac{L^2 \mu^2 k^2}{2\mu L^4}}{\frac{k \mu k}{L^2}} = \\ = \frac{\frac{\mu k^2}{2L^2}}{\frac{\mu k^2}{L^2}} = -\frac{\mu k^2}{2L^2}$$

Queste quantità si possono esprimere in termini della costante $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$ (Ricordo che $L = \mu r_0^2 \omega_0$):

$$r_0 = \frac{\mu^2 r_0^4 \omega_0^2}{\mu k} \Rightarrow$$

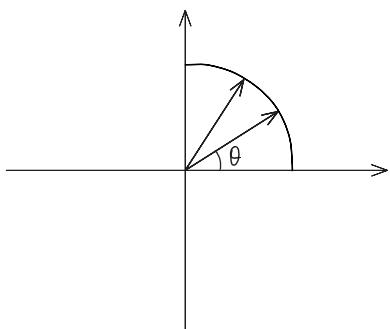
$$r_0^3 \omega_0^2 = \frac{k}{\mu}$$

(è la **terza legge di Keplero**).

$$E_{p,circ} = -\frac{\mu k^2}{2(\mu^2 r_0^4 \omega_0^2)} = -\frac{k^2}{2\mu r_0^4 \omega_0^2}$$

Forma delle orbite

Per trovare la forma delle orbite basta sapere $r(\theta)$. Questo è più semplice che trovare $r(t)$ e $\theta(t)$.



Ricordiamo che in generale posso pensare $r(t)$ come $r(\theta(t))$ e allora

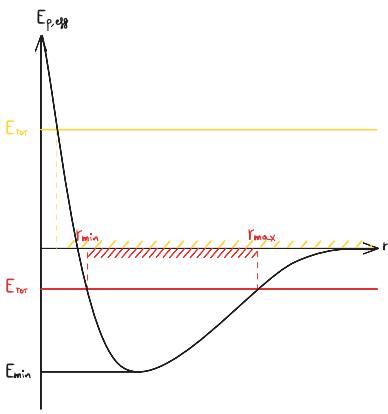
$$\frac{dt}{dt} r = \frac{d}{dt} r(\theta(t)) = \frac{d\theta(t)}{dt} \frac{d}{d\theta} r(\theta) \\ = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Lezione 24

Breve riassunto - 2

Abbiamo visto che la parte radiale dell'equazione del moto era del tipo:

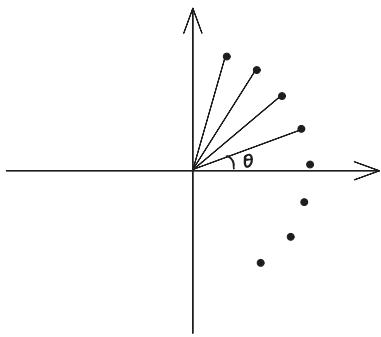
$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = F_{eff}(r) = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}$$



$$F_{eff}^{(r)} = -\frac{d}{dr}E_{p,eff}(r)$$

$$E_{p,eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

Per trovare la forma delle orbite invece di $r(t)$ e $\theta(t)$ ci serve $r(\theta)$



$$\frac{dr}{dt}(\theta(t)) = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

□

Questo suggerisce di usare una nuova variabile $u = \frac{1}{r} \implies \frac{dr}{dt} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}$

$$\text{Quindi } \frac{d^2}{dt^2}r = \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}f(\theta(t)) = \frac{d\theta}{dt} \frac{df}{d\theta}$$

$$\text{Per noi } f = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

$$= \frac{L}{\mu r^2} \left(-\frac{L}{\mu} \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = -\frac{L^2}{\mu^2} u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

L'equazione $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}$ diventa:

$$-\frac{L^2}{\mu} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{L^2}{\mu} u^3 - ku^2$$

Visto che $u \neq 0$ visto che, strettamente parlando, r non è mai ∞ ,

posso semplificare come

$$-\frac{L^2}{\mu} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{L^2}{\mu} u - k$$

Moltiplico per $-\frac{\mu}{L^2}$:

$$\implies \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{ku}{L^2}$$

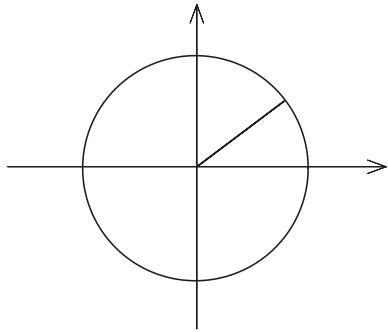
Conosciamo già la soluzione più generale di questa equazione differenziale affine (che è quella della molla con la forza peso). È data da una soluzione particolare, per esempio $u_0(\theta) = \frac{k\mu}{L^2} = \text{costante}$, più

la soluzione generale dell'equazione omogenea $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$, cioè $u(\theta) = \frac{k\mu}{L^2} + A \cos(\theta + \theta_0)$.

Quindi, l'equazione affine di partenza è risolta da $r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}$,

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{k\mu}{L^2} + A \cos(\theta + \theta_0)}$$

Per descrivere l'orbita, consideriamo qualsiasi valore di θ possibile. Possiamo scegliere $\theta_0 = 0$.



Di solito si scrive

$$r(\theta) = \frac{r_0}{e \cos(\theta) + 1}$$

$$\text{con } r_0 = \frac{L^2}{\mu k}, \quad e = \frac{AL^2}{\mu k}.$$

Orbita con $e = 0$

Il caso dell'orbita circolare è $e = 0$ (cioè $A = 0$) $\implies r(\theta) = r_0$. Questa soluzione è proprio la soluzione u_0 di prima.

Orbita con $e \neq 0$

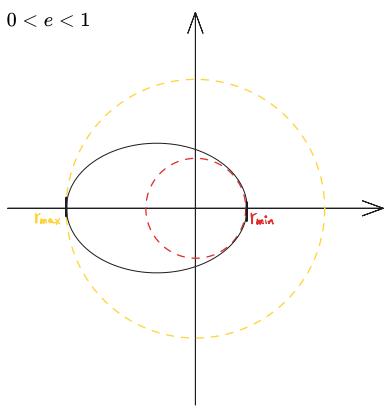
Orbita con $0 < e < 1$

Scegliamo $e \neq 0$ e in particolare $e > 0$

Se $0 < e < 1$ il denominatore di $r(\theta)$ non si annulla mai, quindi

$$\frac{r_0}{1+e} = r_{min} \leq r \leq r_{max} = \frac{r_0}{1-e}$$

è un'orbita limitata.

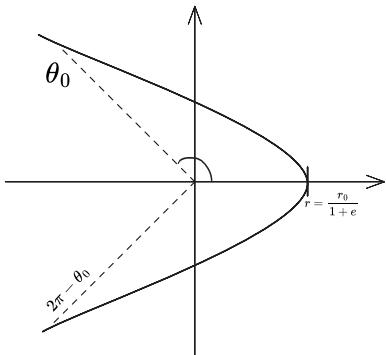


L'orbita vera rimarrà sempre tra quella di raggio minimo e quella di raggio massimo.

Orbita con $e > 1$

Se $e > 1$ il denominatore si annulla.

Se $\cos(\theta) = -\frac{1}{e}$, allora per tali valori di θ , $r(\theta) \rightarrow \infty$



$$\cos(\theta_0) = -\frac{1}{e}, \quad \cos(2\pi - \theta_0) = -\frac{1}{e}.$$

è un'orbita illimitata.

□

Per vedere che queste curve sono ellissi ($0 < e < 1$) e iperboli ($e > 1$) basta ricordare che:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$r = \frac{r_0}{e \cos(\theta) + 1} \implies re \cos(\theta) + r = r_0$$

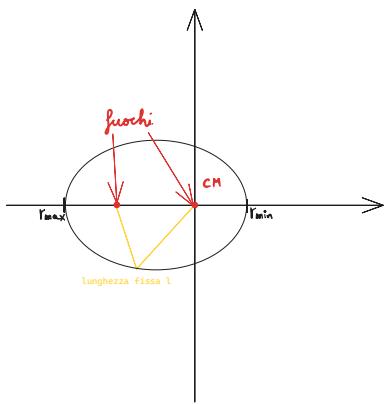
$$\implies ex + \sqrt{x^2 + y^2} = r_0$$

$$\implies \sqrt{x^2 + y^2} = r_0 + ex$$

$$\implies x^2 + y^2 = r_0^2 - 2er_0x + e^2x^2$$

$$\implies \frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{r_0^2}{(1-e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{r_0^2}{1-e^2}, \quad x_c = -\frac{er_0}{1-e^2}$$

$b^2 > 0$ se $0 < e < 1$, quindi viene un'iperbole.



Si dimostra che il centro di massa è in uno dei due "fuochi" dell'ellisse (dei punti geometrici naturali nella costruzione dell'ellisse).

$$l = r_{min} + r_{max} = \text{lunghezza del semiasse maggiore.}$$

□

Esempio: Terra-Sole

$$m_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{Distanza Terra-Sole} = \begin{cases} \text{minimo} = 1,47 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ \text{massimo} = 1,52 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{cases}$$

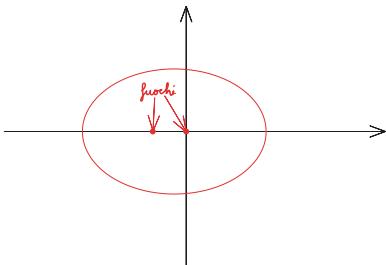
$$\text{Il centro di massa è in posizione } \vec{r}_{CM} = \frac{m_S}{m_T+m_S} \vec{r}_S + \frac{m_T}{m_S+m_T} \vec{r}_T$$

In un sistema di riferimento con origine al centro del Sole ho:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_T}{m_S+m_T} \vec{r}_{T-S} = 6 \cdot \frac{10^{24}}{2 \cdot 10^{30}} \vec{r}_{T-S}$$

$$\|\vec{r}_{CM}\| = 3 \cdot 10^{-6} \|\vec{r}_{T-S}\| = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^{11} = 4,5 \cdot 10^5$$

Il Sole ha raggio $R_S = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ (che significa che il centro di massa è dentro a Sole), quindi la Terra "gira intorno al Sole"



dove d_{min} = perielio, d_{max} = afelio.

Per Giove $m_G = 2 \cdot 10^{27} \text{ kg}$, $d_{S-G} \approx 8 \cdot 10^{11}$

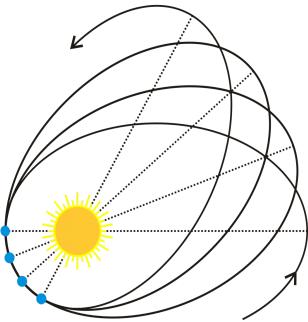
$$\|\vec{r}_{CM}\| \approx 8 \cdot 10^8 \text{ m}$$

□

Il problema dei tre corpi

È possibile dimostrare che in generale non ha soluzione, ma ha soluzione in casi particolari.

Per alcuni casi particolari trovo che



Si chiama precessione dell'afelio e del perielio

□

Accenni di Relatività Generale

La Relatività Generale prevede che la forza gravitazionale sia leggermente diversa da quanto proposto da Newton.

$$E_{p,grav}(r) = -\frac{G\mu M}{r}(1 + \frac{3GM}{c^2 r} + \dots), \text{ con } c \text{ la velocità della luce.}$$

$$-u^2 \frac{L^2}{\mu} \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu} u^3 - k\mu^2(1 + \mathcal{E}u), \text{ con } \mathcal{E} = \frac{6GM}{c^2}$$

$$-u^2 \frac{L^2}{\mu} \frac{d^2 u}{dt^2} = \left(\frac{L^2}{\mu} - k\mathcal{E}\right) u^3 - k\mu^2$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(1 - \frac{k\mu}{L^2} \mathcal{E}\right) u = \frac{k\mu}{L^2}$$

Da cui

$$u(\theta) = A \cos(\omega\theta + \theta_0) + \frac{k\mu}{L^2}, \quad \omega = \sqrt{1 - \frac{k\mu}{L^2} \mathcal{E}} \approx 1 - \frac{k\mu}{L^2} \frac{\mathcal{E}}{2} \quad (\text{è quasi 1, ma non del tutto})$$

$$r(\theta) = A \cos(\omega\theta) + \frac{k\mu}{L^2}$$

Torno al perielio (quando $\theta = 0$) dopo $\frac{2\pi}{\omega}$

□

Lezione 25

Teoria degli errori

Quando effettuiamo una misura usiamo uno strumento con una certa "sensibilità" (la misura più piccola che si può distinguere, per un metro graduato è il millimetro). Nel fare la misura possono verificarsi errori

1. Dovuti allo strumento (es: le tacche di un righello sono fatte male);

2. Dovuti a chi fa la misura (es: faccio partire il cronometro un po' prima o un po' dopo rispetto al momento esatto);
3. Dovuti a ciò che si misura (es: misurare il lato di un tavolo può essere complicato perché non è un quadrato perfetto, è un oggetto fisico e non matematico).

Per ottenere misure più precise si ripete tante volte la misura (approccio statistico).

Esempio



Come stimo il valore vero a partire da queste misure? Se gli errori sono "casuali" (cioè in eccesso o in difetto, con uguale probabilità) mi aspetto che il "valore vero" sia "in mezzo" alla misura.

□

Se gli errori sono solo casuali (perciò non sistematici) allora la media fornisce un'approssimazione del valore vero, per le ragioni che vedremo.

Media

Definizione

Dati N valori misurati x_1, \dots, x_n la loro media è

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$$

□

Scarto (definizione)

Lo scarto di x della misura x_i è

$$\mathcal{E}_i(x) = x_i - x$$

□

Proprietà

Somma degli scarti dalla media

Consideriamo la somma degli scarti $\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(x)$. Stima la distanza di x dai nostri dati misurati.

Se $x = \bar{x}$, allora

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = \\ &= N \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \right)}_{\bar{x}} - \bar{x} \sum_{i=1}^N 1 = N\bar{x} - N\bar{x} = 0\end{aligned}$$

La somma degli scarti dalla media è zero.

□

Somma minima dei quadrati degli scarti

Consideriamo ora $\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(x)^2 > 0$.

Si dimostra che questa somma è tale che

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(x)^2 \geq \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(\bar{x})^2$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $x = \bar{x}$.

La media quindi minimizza la somma degli scarti al quadrato.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(x)^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^N ((x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - x)^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - x)] = \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - x)^2 \sum_{i=1}^N 1 + 2(\bar{x} - x) \underbrace{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})}_{\sum \mathcal{E}_i(\bar{x}) = 0} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(\bar{x})^2 + N(\bar{x} - x)^2 + 0\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(x)^2 = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(\bar{x})^2 + N(\bar{x} - x)^2$$

□

Varianza

Si definisce la varianza come

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i(\bar{x})^2$$

□

Scarto quadratico medio (o errore)

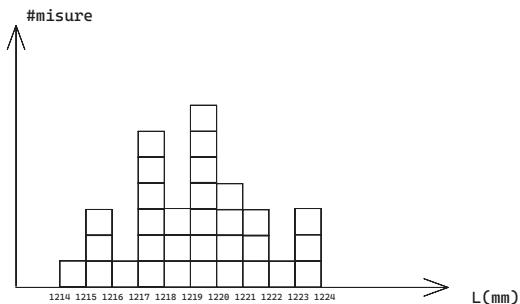
Intuitivamente, la varianza ci dice quanto "precisi" sono i nostri dati. Per avere una stima della bontà della mia misura espressa nella stessa unità della misura, introduco l'errore

$$\mu = \sqrt{S}$$

Se abbiamo misurato x_1, \dots, x_n dati diciamo che il risultato della misura è $\bar{x} \pm \mu$.

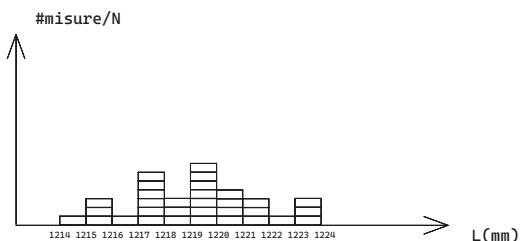
□

Istogramma delle misure



□

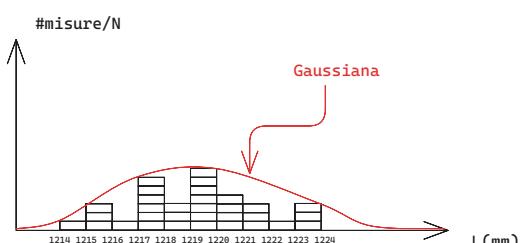
Istogramma delle frequenze



□

Teorema centrale del limite

Se definisco l'area dei quadrati così che un quadrato ha area 1, l'istogramma delle misure ha area N e quello delle frequenze ha area totale 1. L'istogramma delle frequenze, quando $N \rightarrow \infty$ (se gli errori sono casuali e se le misure sono indipendenti) ha un limite.



Ha validità per tutte le cose casuali.

□

Probabilità

Guardando l'istogramma delle frequenze di $N \gg 1$ misure, possiamo stimare la probabilità che una nuova misura x_{N+1} sia compresa tra l_0 e $l_0 + \Delta l$.

$$P(l, l + \Delta l) \approx \frac{\text{n}^{\circ} \text{ misure tra } l_0 \text{ e } l_0 + \Delta l}{N} = \frac{\text{area dell'istogramma tra } l_0 \text{ e } l_0 + \Delta l}{\underbrace{\text{area totale}}_{=1}}.$$

Chiamo la curva $p(l)$.

Se nel limite $N \rightarrow \infty$ l'istogramma della frequenza è approssimato da una funzione $p(l)$, allora la probabilità che una nuova misura cada tra l_0 e $l_0 + \Delta l$ è

$$P(l_0, l_0 + \Delta l) = \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} p(l) dl$$

Nota bene

È necessario che $p(l) \geq 0 \quad \forall l \in \mathbb{R}$ e che $\int_{-\infty}^{+\infty} p(l) dl = 1 \implies P(-\infty, +\infty) = 1$ (100%).

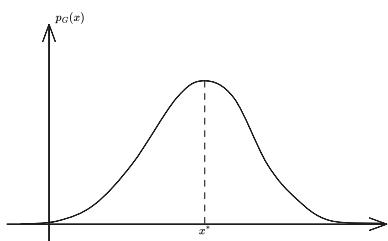
□

Distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità $p_G(x)$

$$p_G(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}$$

dipende da due parametri $\sigma > 0$ e $x^* \in \mathbb{R}$.

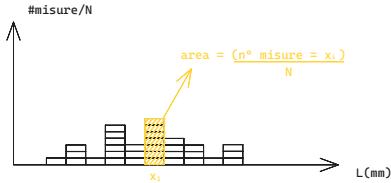


Il coefficiente $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ garantisce che $\int_{-\infty}^{+\infty} p_G(x) dx = 1$.

□

Media delle misure

Ricordiamo che la media è $\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$.



Per trovare la media voglio sommare $\sum_{i=1}^N x_i \cdot (\text{area colonna di } x_i) \rightarrow \rightarrow \int x p(x) dx$ (con $p(x) dx$ la colonna infinitesima).
 \Rightarrow La media di una distribuzione di probabilità vale $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-x^*+x^*}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ \text{pongo } x-x^* &= y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y+x^*}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{\text{integrale dispari}} + x^* \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{=1} = \\ &= x^*\end{aligned}$$

□

Usando il fatto che

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{x}^2}_{=\bar{x}^2} - 2\bar{x} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i}_{=\bar{x}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} \right) - \bar{x}^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \right)^2$ e si calcola che per la Gaussiana

$$S = \sigma^2$$

Lezione 26

Ricapitolando:

Dalle misure ripetute x_1, \dots, x_N ricaviamo $\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$ e la varianza $S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ (e $\mu = \sqrt{S}$).

Per $N \rightarrow \infty$ l'istogramma delle frequenze è una gaussiana $x^* = \bar{x}$ e $\sigma = \mu$ ($\sigma^2 = S$) (che sono calcolate dai dati x_1, \dots, x_N).

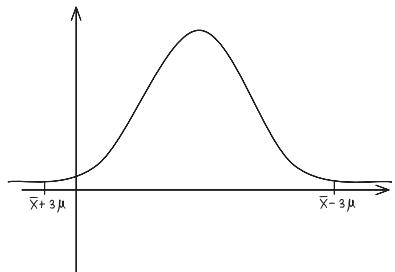
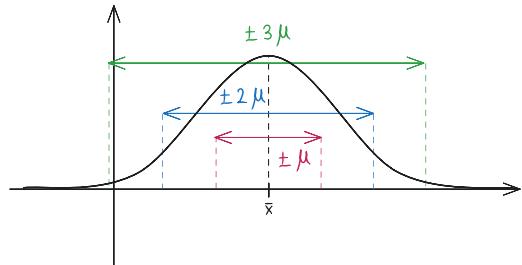
□

Interpretazione di $\bar{x} \pm \mu$

Possiamo dare un'interpretazione a " $\bar{x} \pm \mu$ ": vuol dire che ci possiamo aspettare che il valore vero della misura sia compreso tra

$[\bar{x} - \mu, \bar{x} + \mu]$ con probabilità $P = \int_{\bar{x}-\mu}^{\bar{x}+\mu} p_G(x) dx = \int_{x^*-\sigma}^{x^*+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}} dx = 0,67$ (che è l'area sotto la gaussiana). Questa probabilità non dipende né da x^* né da σ .

Avremmo potuto anche cercare la probabilità che il valore vero sia tra $[\bar{x} - 2\mu, \bar{x} + 2\mu] \rightarrow 0,95$ o $[\bar{x} - 3\mu, \bar{x} + 3\mu] \rightarrow 0,995$.



La Gaussiana, visto che non arriva mai a zero, garantisce che ci siano *per forza* dei dati nell'intervallo meno probabile. Se non ci fossero non sarebbe una Gaussiana, perché i dati non sarebbero soggetti ad errori casuali.

□

Propagazione degli errori

Caso lineare (o affine)

Supponiamo di aver preso misure di due quantità fisiche (ovviamente possono essere di più), ad esempio X, Y i lati di un rettangolo. Ci interessa il perimetro $2X + 2Y$. **Qual è l'errore sul perimetro, noti quelli su X e Y ?**

Supponiamo di voler trovare $Z = \alpha X + \beta Y + \gamma$.

Ho misurato x_1, \dots, x_N e y_1, \dots, y_N . Per ogni x_i e y_i sia $z_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma$.

$$\begin{aligned} \text{La media degli } z_i \text{ è } \bar{z} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma) = \\ &= \frac{\alpha}{N} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N y_i + \frac{\gamma}{N} \sum_{i=1}^N 1 = \\ &= \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \end{aligned}$$

Nello stesso modo si vede che, se $\mathcal{E}_{z,i}(\bar{z}) = z_i - \bar{z}$, allora $\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{z,i} = 0$ (dimostrazione per esercizio).

$$\begin{aligned} \text{Invece la varianza rispetto a } z, \text{ che chiamo } S_{zz}, \text{ è } S_{zz} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i - (\bar{z})^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - \bar{z})^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma - \alpha \bar{x} - \beta \bar{y} - \gamma)^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\alpha(x_i - \bar{x}) + \beta(y_i - \bar{y})]^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\underbrace{\alpha^2(x_i - \bar{x})^2}_{\mathcal{E}_{x,i}} + \underbrace{\beta^2(y_i - \bar{y})^2}_{\mathcal{E}_{y,i}} + 2\alpha\beta \underbrace{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}_{\mathcal{E}_{xy,i}}] = \\
&= \frac{\alpha^2}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{x,i}(\bar{x})^2 + \frac{\beta^2}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{y,i}(\bar{y})^2 + \frac{2\alpha\beta}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{x,i}(\bar{x}) \mathcal{E}_{y,i}(\bar{y}) = \\
&= \alpha^2 S_{xx} + \beta^2 S_{yy} + 2\alpha\beta S_{xy}
\end{aligned}$$

E chiamo S_{xy} covarianza di x e y .

Correlazione

$\mathcal{E}_{x,i}(\bar{x})$ e $\mathcal{E}_{y,i}(\bar{y})$ possono essere positivi o negativi. Se non c'è correlazione, allora il loro prodotto è positivo o negativo con la stessa probabilità.

In questo caso, la "correlazione" è

$$\rho = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \approx \sigma$$

e possiamo concludere che

$$S_{zz} = \alpha^2 S_{xx} + \beta^2 S_{yy}$$

quindi

$$\mu_z = \sqrt{\alpha^2 \mu_x^2 + \beta^2 \mu_y^2}$$

Nota bene

La correlazione è sempre $-1 \leq \rho \leq 1$. E ho che se

- $\rho \approx 0$ le variabili non sono correlate;
- $\rho \approx 1$ le variabili sono fortemente correlate;
- $\rho \approx -1$ le variabili sono fortemente anti-correlate.

Nel caso lineare, le misure non sono correlate fra loro, quindi $\rho = 0 \implies S_{xy} = 0$.

□

Caso non lineare

Noi vogliamo considerare relazioni non lineari!

Ad esempio $V = L^3 = L_1 L_2 L_3$, oppure $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, etc.

Sappiamo che per una funzione $f(x)$ vale

$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} + o((x - x_0)^2)$. Questa formula si generalizza a funzioni di più di una variabile:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{df}{dx} \Big|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0) \frac{df}{dy} \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

Se abbiamo tre variabili legate dalla legge $Z = f(X, Y)$ e abbiamo misurato x_i, y_i :

$$f(X, Y) - f(\bar{x}, \bar{y}) = (X - \bar{x}) \frac{df}{dx} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} + (Y - \bar{y}) \frac{df}{dy} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} + \dots$$

Questa è la stessa formula (tralasciando i termini di resto) del caso lineare al netto di identificare $\alpha = \frac{df}{dX} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})}$ e $\beta = \frac{df}{dY} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})}$.

Esempio

La velocità è $V = \frac{X}{T}$. Abbiamo misurato x_i, t_i e abbiamo trovato $\bar{x}, \bar{t}, \mu_x, \mu_t$. La miglior stima di V è $\bar{v} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}}$.

Per trovare l'errore:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \frac{X}{T} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} &= \frac{1}{\bar{t}} \\ \frac{d}{dT} \frac{X}{T} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} &= -\frac{\bar{x}}{\bar{t}^2} \\ \mu_v &= \sqrt{\mu_x^2 \frac{1}{\bar{t}^2} + \mu_t^2 \frac{\bar{x}^2}{\bar{t}^4}} \end{aligned}$$

□

Errore della media

Supponiamo di avere X_1, \dots, X_N quantità, ciascuna misurata con errore μ_1, \dots, μ_N .

La media $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ e quindi

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{X}} &= \sqrt{\frac{1}{N^2} \mu_1^2 + \frac{1}{N^2} \mu_2^2 + \dots + \frac{1}{N^2} \mu_N^2} = \\ &= \frac{1}{N} \sqrt{\mu_1^2 + \dots + \mu_N^2} = \end{aligned}$$

Se $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_N$

$$= \frac{1}{N} \sqrt{\mu^2 + \dots + \mu^2} = \frac{1}{N} \sqrt{N\mu^2} = \frac{\mu}{\sqrt{N}}$$

Quindi l'errore cala come $\frac{1}{\sqrt{N}}$

□

Interpolazione lineare

$Y = aX + b$. Abbiamo misurato x_1, \dots, x_N e y_1, \dots, y_N . Vogliamo stimare a, b .

Cerco di risolvere $ax_i + b - y_i = r_i$ per $i = 1, \dots, N$ (r_i sarebbe zero se i dati fossero perfetti).

I valori ottimali di a, b minimizzano i resti. In particolare, minimizzano

$$R^2 = \sum_{i=1}^N (r_i)^2$$

(metodo dei minimi quadrati).

$$\begin{aligned}
R^2 &= \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2 = \\
&\sum_{i=1}^N (y_i)^2 + a^2 \sum_{i=1}^N (x_i)^2 + Nb^2 + 2ab \sum_{i=1}^N x_i - 2a \sum_{i=1}^N x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^N y_i = \\
&\text{Ricordando che } NS_{xx} = \sum_{i=1}^N [\mathcal{E}_{x,i}(\bar{x})]^2 = \sum_{i=1}^N [(x_i)^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2]^2 = \sum_{i=1}^N (x_i)^2 - N\bar{x}^2 \text{ e} \\
&\text{ricordando che} \\
NS_{xy} &= \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{x,i}(\bar{x}) \mathcal{E}_{y,i}(\bar{y}) = \sum_{i=1}^N [x_i y_i - x_i \bar{x} - y_i \bar{y} + \bar{x} \bar{y}] = \sum_{i=1}^N x_i y_i - N\bar{x} \bar{y} \text{ ricavo:} \\
&= N[S_{yy} + \bar{Y}^2 + a^2(S_{xx} + \bar{X}^2) + b^2 + 2ab\bar{X} - 2a(S_{xy} + \bar{X}\bar{Y}) - 2b\bar{Y}]
\end{aligned}$$

Quando $|a|, |b| \rightarrow \infty$ questa funzione va a $+\infty$. Ci aspettiamo un minimo per a, b finiti. $\frac{d}{da} R^2 = \frac{d}{db} R^2 = 0$ è la condizione per il minimo:

$$\frac{d}{da} R^2 = N[2a(S_{xx} + \bar{X}^2) + 2b\bar{X}] - 2(S_{xy} - \bar{X}\bar{Y}) = 0$$

$$\frac{d}{db} R^2 = N[2b + 2a\bar{X} - 3\bar{Y}] = 0$$

$$\begin{cases} (S_{xx} + \bar{X}^2) & a + \bar{X} & b = S_{xy} - \bar{X}\bar{Y} \\ \bar{X} & a + & b = \bar{Y} \end{cases}$$

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{xy} - \bar{X}\bar{Y} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} S_{xx} + \bar{X}^2 & \bar{X} \\ \bar{X} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} S_{xy} - \bar{X}\bar{Y} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$$

Si trova:

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}; \quad b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

Per capire quanto buona è l'interpolazione, calcoliamo R^2 :

$$R^2 = NS_{yy} \left(1 - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} S_{yy}}\right) = NS_{yy}(1 - r^2), \text{ con } r^2 \text{ il coefficiente di correlazione.}$$

Vogliamo $r^2 \approx 1$ (si dimostra $0 \leq r^2 \leq 1$).

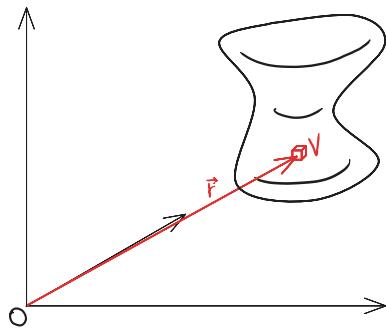
□

Lezione 27

Meccanica (continuo)

Il corpo rigido

È un oggetto la cui forma non cambia quando applichiamo delle forze.



Massa e densità

Ha una massa M e un volume V . Possiamo pensarla come una collezione di punti materiali, ma li approssimiamo con un continuo, un'infinità di volumetti infinitesimi dV .

Se chiamo \vec{r} la posizione del volumetto dV , allora

$$M = \int_V \rho dV = \int_V dm(\vec{r}) dx \quad \rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV}$$

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

Se la densità è costante, $\rho(\vec{r}) = \rho$, $M = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \rho V$.

Può essere utile considerare oggetti che hanno (approssimativamente) due o una dimensione (invece di tre). Allora si parla di *densità superficiale* o *lineare*.

In due dimensioni ho $M = \int_S dm = \int_S \rho s(\vec{r}) dS$ (con S la superficie).

In una dimensione ho $M = \int_L dm = \int_L \rho_l(\vec{r}) dl$ (con L la lunghezza).

$$[\rho_s] = \frac{kg}{m^2}$$

$$[\rho_l] = \frac{kg}{m}$$

Il centro di massa

Il centro di massa per N punti materiali è dato da $\vec{r}_{CM} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \vec{r}_j$ (la media pesata delle posizioni).

Nel caso del corpo rigido, passiamo all'integrale ($N \rightarrow \infty$)

$$\vec{r}_{CM} = \int_V \frac{dm(\vec{r}) \vec{r}}{M} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm(\vec{r}) = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

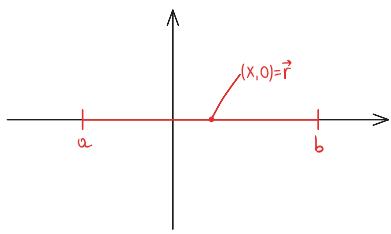
Se $\rho(\vec{r}) = \rho$ è costante, allora $M = \rho V$ e inoltre

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{\rho V} \cancel{\rho} \int_V \vec{r} dv = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \text{ (quantità geomertica).}$$

Esempio

Una sbarra omogenea è posta nel piano (x, y) come in figura.

Determinare le coordinate del centro di massa.



Sia L la lunghezza della sbarra.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{L} \int_L \vec{r} dl = \frac{1}{L} \int_a^b (x, 0) dx = \left(\frac{1}{L} \int_a^b x dx \right) \vec{u}_x + \underbrace{\left(\frac{1}{L} \int_a^b 0 dx \right) \vec{u}_y}_{=0} = \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b \vec{u}_x = \frac{1}{L} \frac{b^2 - a^2}{2} \vec{u}_x$$

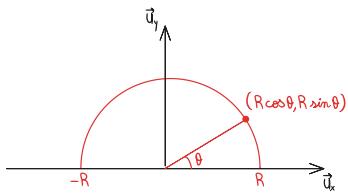
Osservo che $L = b - a > 0$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} \vec{u}_x = \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b+a)}{2} \vec{u}_x = \frac{a+b}{2} \vec{u}_x$$

□

Esercizio

Una sbarra omogenea semicircolare di raggio R è disposta come in figura nel piano \vec{u}_x, \vec{u}_y . Determinare la posizione del centro di massa nel piano.



Cominciamo con il calcolare L , la lunghezza della sbarra:

$$L = \int_L dl = \int_0^\pi R d\theta = R \Big|_0^\pi d\theta = \pi R$$

$dl = R d\theta$ = lunghezza arco.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{1}{L} \int_L \vec{r} dl = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi [R \cos \theta \vec{u}_x + R \sin \theta \vec{u}_y] R d\theta = \\ &= \frac{R^2}{\pi R} \int_0^\pi [\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y] d\theta = \\ &= \frac{R}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos \theta d\theta \right) \vec{u}_x + \frac{R}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \vec{u}_y = \\ &= \underbrace{\frac{R}{\pi} [\sin \theta]_0^\pi \vec{u}_x}_{=0} - \frac{R}{\pi} [\cos \theta]_0^\pi \vec{u}_y = \\ &= -\frac{R}{\pi} (-1 - 1) \vec{u}_y = \frac{2}{\pi} R \vec{u}_y \end{aligned}$$

□

Azione della forza peso

Ciascun volumetto dV contribuisce alla forza peso con una forza infinitesima $d\vec{F}_p = -gdm\vec{u}_z$.

La forza totale è la risultante dei $d\vec{F}_p$

$$\vec{F}_p = \int_V d\vec{F}_p = -g \int_V dm \vec{u}_z = -M g \vec{u}_z$$

È importante calcolare anche il momento di \vec{F}_p perché se $\vec{\mathcal{M}} \neq \vec{0}$, allora $\frac{d\vec{L}}{dt} \neq \vec{0}$ cioè il corpo ruota.

Ciascun volumetto dV ha un momento infinitesimo $d\vec{\mathcal{M}}$ (rispetto all'origine) :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times d\vec{F}_p = -g \vec{r} \times dm \vec{u}_z$$

Il momento totale è dato da

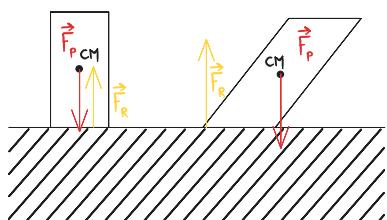
$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= \int_V d\vec{\mathcal{M}} = \int_V (-g dm \vec{r} \times \vec{u}_z) = \\ &= -g \left(\int_V dm \vec{r} \right) \times \vec{u}_z = \\ &= -g M \underbrace{\left(\int_V \frac{\vec{r} dm}{M} \right)}_{\vec{r}_{CM}} \times \vec{u}_z = \\ &= -g M \vec{r}_{CM} \times \vec{u}_z = \\ &= \vec{r}_{CM} \times (-g M \vec{u}_z) = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_p \end{aligned}$$

Quindi

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_p$$

È come se la forza peso totale fosse applicata tutta nel centro di massa.

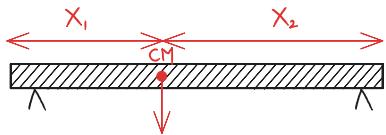
Conseguenza



□

Esempio/esercizio

Una sbarra è appoggiata a due cunei come in figura. Siano x_1 , x_2 le distanze tra il centro di massa e i due cunei ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$). I cunei esercitano forze $\vec{F}_1 = F_1 \vec{u}_z$, $\vec{F}_2 = F_2 \vec{u}_z$. Data la massa M della sbarra, **determinare per quali valori F_1, F_2 essa rimane ferma.**



Perché la sbarra sia ferma, il centro si massa non deve muoversi e la sbarra non deve ruotare intorno al centro di massa.

Quindi $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{M}}_{tot,CM} = \vec{0}$

$$\vec{F}_{tot} = -Mg\vec{u}_z + (F_1 + F_2)\vec{u}_z = \vec{0} \implies F_1 + F_2 = Mg$$

I momenti delle forze, rispetto al centro di massa:

$$\vec{\mathcal{M}}_p = \vec{r}'_{CM} \times \vec{F}_p = \vec{0} \times \vec{F}_p = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_1 = (-x_1\vec{u}_x) \times F_1\vec{u}_z = +x_1F_1\vec{u}_z$$

$$\vec{\mathcal{M}}_2 = (x_2\vec{u}_x \times F_2\vec{u}_z = -x_2F_2\vec{u}_y$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{tot} = \vec{0} \implies x_1F_1 = x_2F_2 \implies F_2 = \frac{x_1}{x_2}F_1$$

$$F_1 + \frac{x_1}{x_2}F_1 = Mg \implies \frac{x_2+x_1}{x_2}F_1 = Mg$$

$$F_1 = \frac{x_2}{x_1+x_2}Mg, \quad F_2 = \frac{x_1}{x_1+x_2}Mg$$

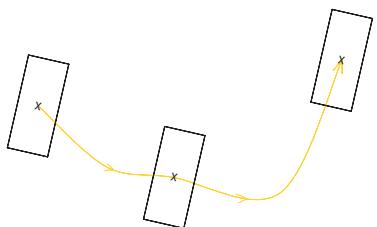
□

Lezione 28

Moti del corpo rigido

1. Moto di traslazione

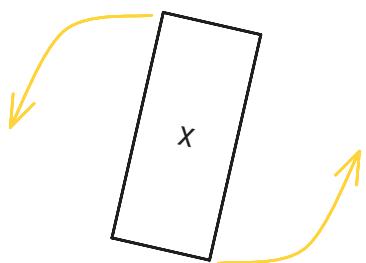
Il centro di massa del corpo si sposta (senza che il corpo ruoti)



(simile al punto materiale)

2. Moto di rotazione

Avviene intorno al centro di massa, che rimane fisso (è una novità: non è possibile per il punto materiale)



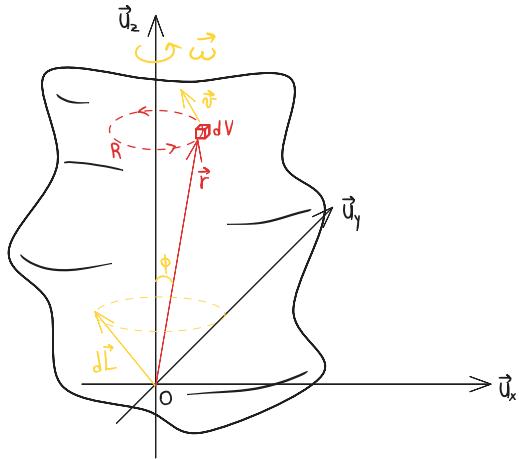
3. Moto di traslazione e rotazione

È il più generale.

□

Concentriamoci sulla rotazione, il secondo caso.

Rotazione intorno a un asse fisso



Consideriamo un volumetto dV la cui posizione è data dal vettore \vec{r} . Durante la rotazione, il volumetto compie una traiettoria circolare di raggio R intorno all'asse \vec{u}_z .

Se chiamo ϕ l'angolo tra \vec{r} e l'asse \vec{u}_z , allora $R = \|\vec{r}\| \sin \phi$.

Se il corpo rigido ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$, allora il volumetto ha velocità \vec{v} tangente alla traiettoria circolare, e $\|\vec{v}\| = R\|\vec{\omega}\|$.

Il volumetto ha $d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} dm$.

Nel caso del disegno:

$$\vec{r} = \sin \phi \|\vec{r}\| \vec{u}_x + \cos \phi \|\vec{r}\| \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{u}_y$$

Usando le formule appena derivate possiamo scrivere:

$$\vec{r} = R \vec{u}_x + \cot \phi R \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = R \omega \vec{u}_y$$

Quindi calcolo:

$$\begin{aligned} d\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{v} dm = (R \vec{u}_x + \cot \phi R \vec{u}_z) \times R \omega \vec{u}_y dm = \\ &= R^2 \omega dm \vec{u}_z - \cot \phi R^2 \omega dm \vec{u}_x \end{aligned}$$

Il risultato è valido per il dato istante che ho considerato, quindi cambia in base alla posizione.

Osservo che \vec{r} ha sempre la stessa componente lungo \vec{u}_z , mentre le componenti lungo \vec{u}_x e \vec{u}_y rispettivamente della posizione e della velocità cambiano durante la rotazione, ma rimangono sempre a 90° nel piano (x, y) l'una rispetto all'altra. Perciò a prescindere il loro prodotto vettore sarà \vec{u}_z . Ho quindi dunque che la componente

del momento angolare lungo \vec{u}_z non cambia, mentre la componente lungo \vec{u}_x ruota nel tempo.

Ne consegue che

$$d\vec{L} = dL_z \vec{u}_z + dL_{\perp} \vec{u}_{\perp}$$

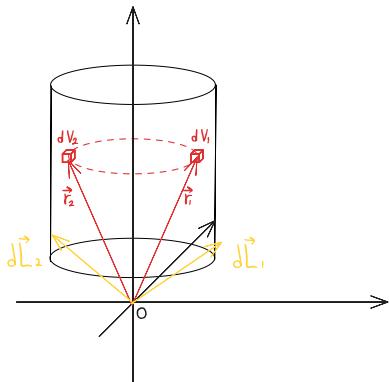
dove $dL_z = R^2 \omega dm$ ed è fissa durante la rotazione, mentre \vec{u}_{\perp} ruota nel piano (x, y) .

A partire da $d\vec{L}$ trovo $\vec{L} = \int_V d\vec{L} = \int_V dL_z \vec{u}_z + \int_V dL_{\perp} \vec{u}_{\perp}$.

Siccome \vec{u}_z è fisso, scrivo:

$$\vec{L} = (\int_V dL_z) \vec{u}_z + \underbrace{\int_V (\vec{u}_{\perp} dL_{\perp})}_{\text{complicato}}$$

In molti casi, il secondo termine è zero. In particolare in presenza di una simmetria



Per un corpo simmetrico sotto rotazioni intorno a \vec{u}_z , per ogni volumetto dV_1 con $\vec{r}_1 = R\vec{u}_{xy} + \cot \phi R\vec{u}_z$ e $\vec{v}_1 = \omega R\vec{u}_{xy,\perp}$ ce n'è un altro con $\vec{r}_2 = -R\vec{u}_{xy} + \cot \phi R\vec{u}_z$ (diametralmente opposto) e $\vec{v}_2 = -\omega R\vec{u}_{xy,\perp}$.

Allora

$$d\vec{L}_1 = dL_z \vec{u}_z + dL_{\perp} \vec{u}_{\perp}$$

$$d\vec{L}_2 = dL_z - dL_{\perp} \vec{u}_{\perp}$$

Vediamo il calcolo:

$$\begin{aligned} d\vec{L}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 dm = (R\vec{u}_{xy} + \cot \phi R\vec{u}_z) \times (\omega R\vec{u}_{xy,\perp}) dm = \\ &= R^2 \omega dm \vec{u}_z + \cot \phi R^2 \omega dm (\underbrace{\vec{u}_z \times \vec{u}_{xy,\perp}}_{-\vec{u}_{xy}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{L}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 dm = (-R\vec{u}_{xy} + \cot \phi R\vec{u}_z) \times (-\omega R\vec{u}_{xy,\perp}) dm = \\ &= \omega R^2 dm \vec{u}_z - \cot \phi R^2 \omega dm (\vec{u}_z \times \vec{u}_{xy,\perp}) \end{aligned}$$

In presenza di simmetria assiale, abbiamo

$$\vec{L} = (\int_V dL_z) \vec{u}_z = \int_V \omega R^2 dm \vec{u}_z = (\int_V R^2 dm) \omega \vec{u}_z$$

$$\implies \vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

con

$$I_z = \int_V R^2 dm = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

(cioè la posizione del volumetto rispetto all'asse zeta, è una proprietà geometrica del corpo) e $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

□

Conseguenze

Da questa formula e dal teorema del momento angolare abbiamo che:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \vec{\mathcal{M}}_z = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = I_z \vec{\alpha}$$

I_z è il *momento di inerzia* rispetto all'asse \vec{u}_z , è una quantità che dipende dal corpo ed è l'analogia della massa inerziale. Potremmo **quasi** dire che $\vec{\mathcal{M}}$ sia l'analogia della forza nella rotazione.

In una rotazione intorno a \vec{u}_z , $dE_k = \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 dm$ (è l'energia cinetica infinitesima di un volumetto) e abbiamo visto che $\|\vec{v}\|^2 = \omega^2 R^2$.

Allora:

$E_k = \int_V dE_k = \int_V \frac{1}{2} \omega^2 R^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V R^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ (ω esce dall'integrale perché tutti i volumetti ruotano con la stessa velocità angolare).

Vale anche $E_k = \frac{1}{2} \frac{I_z^2 \omega^2}{I_z} = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}\|^2}{I_z}$

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Per il teorema dell'energia cinetica

$$W[\Gamma_{01}] = E_k(t_1) - E_k(t_0) = \frac{1}{2} I_z (\omega(t_1))^2 - \frac{1}{2} I_z (\omega(t_0))^2.$$

Se fissiamo t_0 , e consideriamo come varia W al variare di t_1 ,

$$\frac{dW[\Gamma_{01}]}{dt_1} = \frac{d}{dt_1} \left(\frac{1}{2} I_z (\omega(t_1))^2 - \frac{1}{2} I_z (\omega(t_0))^2 \right) = \cancel{\frac{1}{2} I_z} \cancel{\omega(t_0)} \alpha(t_1) \omega(t_1)$$

$$\implies \frac{dW}{dt} = I_z \alpha(t) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\implies W = \int dW = \int \frac{dW}{dt} dt = \int I_z \alpha \frac{d\theta}{dt} dt = I_z \int_{\theta_0}^{\theta_1} \alpha d\theta$$

$$W[\Gamma_{01}] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} I_z \alpha d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathcal{M}_z d\theta$$

con $\mathcal{M}_z = I_z \alpha$ (come dire $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$)

□

Lezione 29

Calcolare I_z

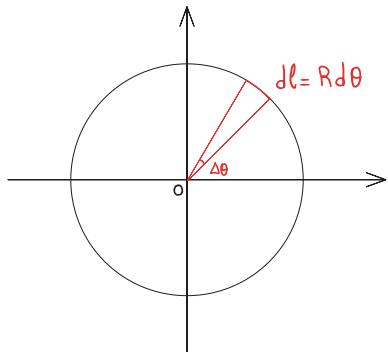
Il momento di inerzia si può misurare, ad esempio, conoscendo \vec{M} e $\vec{\alpha}$ e facendo un "fit". Ma per solidi omogenei e di forma regolare, si può calcolare usando la definizione.

$$I_z = \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_V (x^2 + y^2) \rho(\vec{r}) dV, \text{ con } x^2 + y^2 \text{ la distanza di } \vec{u}_z.$$

Se ρ è costante $I_z = \rho \int_V dV$ dipende solo dalla forma del corpo.

Esempio

Calcolare il momento di inerzia (I_z) di un anello rispetto al centro in funzione del raggio R e di ρ_l costante.



$$M = \int_L \rho_l dl = \rho_l \int_L dl = \rho_l \underbrace{2\pi R}_L$$

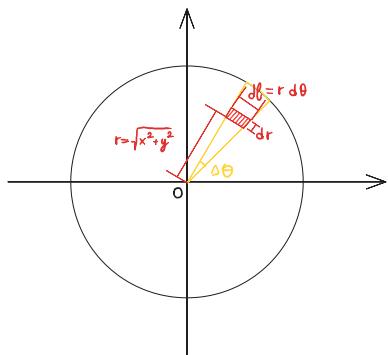
$$\text{Che posso calcolare anche come } M = \int_L \rho_l dl = \rho_l R \int_0^{2\pi} d\theta = \rho_l 2\pi R$$

$$I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho_l dl = \int_L R^2 \rho_l dl = R^2 \rho_l \int_L dl = R^2 2\pi R \rho_l = 2\pi R^3 \rho_l = R^2 M$$

□

Esempio

Calcolare il momento di inerzia rispetto al centro per un disco omogeneo di densità ρ_S e raggio R .



$$M = \int_S \rho_S dS = \rho_S \int_S dS = \rho_S R^2 \pi$$

Che posso calcolare anche come

$$M = \rho_S \int_S dS = \rho_S \int_S r d\theta dr = \rho_S \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr = \rho_S 2\pi \frac{1}{2} R^2 = \rho_S R^2$$

Analogamente, calcoliamo I_z :

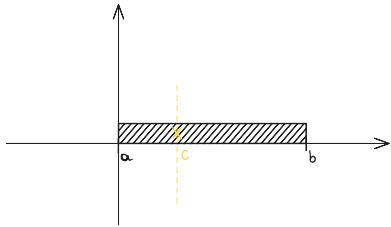
$$I_z = \int_S \rho_S r^2 dS = \rho_S \int_S r^2 \underbrace{r d\theta dr}_{dS} = \rho_S \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \rho_S \frac{2\pi}{4} R^4 = \rho_S \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

□

Possiamo osservare che a parità di M e di R , un anello ha momento d'inerzia maggiore, perché la massa è concentrata lontano dall'asse di rotazione.

Esempio

Una sbarra omogenea ha lunghezza L e densità ρ_l . Calcolare I_c rispetto ad un asse passante per un punto generico c .



Scegliamo $a = 0$, $b = L$ ($L = b - a$) .

$$M = \int_L \rho_l dl = \int_{a=0}^{b=L} \rho_l dx = \rho_l L$$

Chiamo r_c la distanza dall'asse passante per c

$$\begin{aligned} I_z &= \int_L r_c^2 \rho_l dl = \int_{a=0}^{b=L} (x - c)^2 \rho_l dx = \rho_l \int_0^L x^2 - 2xc + c^2 dx = \\ &= \rho_l \left(\frac{1}{3} L^3 - 2c \frac{L^2}{2} + c^2 L \right) = \rho_l L \left(\frac{L^2}{3} - cL + c^2 \right) = M \left(\frac{L^2}{3} - cL + c^2 \right) \end{aligned}$$

Faccio delle verifiche

Se l'asse passa per un'estremità troviamo:

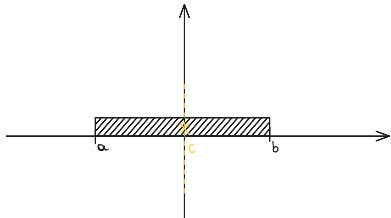
$$I_c \Big|_{c=0} = M \left(\frac{L^2}{3} - 0 + 0 \right) = \frac{ML^2}{3} \checkmark$$

$$I_c \Big|_{c=L} = M \left(\frac{L^2}{3} - L^2 + L^2 \right) = \frac{ML^2}{3} \checkmark$$

Il valore di c per cui I_c è minimo è il centro di massa

$$I_c \Big|_{c=\frac{L}{2}} = M \left(\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{4} \right) = \frac{M}{12} (4 - 6 + 3) L^2 = \frac{ML^2}{12}$$

Rifacciamo il calcolo rispetto al centro di massa:



$$M = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho_l dx = L \rho_l$$

$$I_c = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x - c)^2 \rho_l dx = \rho_l \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2 - 2cx + c^2) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_l \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx - \underbrace{2c\rho_l \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x dx}_{=0 \text{ perch\'e siamo del } CM} + \rho_l c^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx = \\
&= \rho_l \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \rho_l c^2 L = \\
&= \rho_l \frac{1}{3} \left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8} \right) \right) + \rho_l c^2 L = \\
&= \frac{1}{12} \rho_l L^3 + \rho_l c^2 L = \\
&= \frac{1}{12} M L^2 + c^2 M = I_{c,CM} + c^2 M
\end{aligned}$$

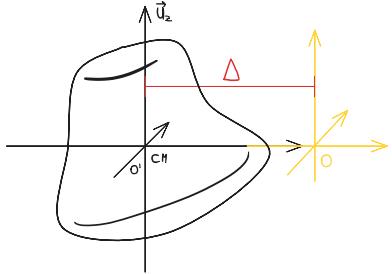
Teorema di Huygens-Steiner

Il teorema di Huygens-Steiner afferma che, dato un asse che passa dal CM e un asse parallelo a distanza Δ dal precedente vale la relazione

$$I_z = I_{z,CM} + \Delta^2 M$$

Dimostrazione

Diciamo che vale la relazione tra i due sistemi di riferimento $x = x' + \Delta$, $y = y'$, $z = z' + \Delta_z$.



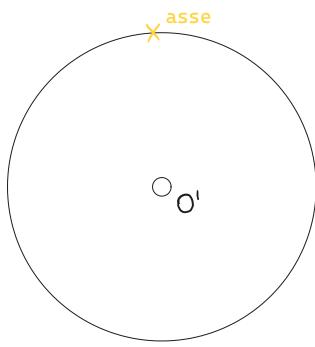
Calcoliamo I_z in O :

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_V (x^2 + y^2) \rho dV = \int_V [(x' + \Delta)^2 + (y')^2] \rho dV = \\
&= \int_V [(x')^2 + (y')^2 + 2x'\Delta + \Delta^2] \rho dV = \\
&= \int_V [(x')^2 + (y')^2] \rho dV + \underbrace{2\Delta \int_V x' \rho dV + \Delta^2 \int_V \rho dV}_{=0, x'_{CM}=0} = \\
&= I_{z,CM} + \Delta^2 M
\end{aligned}$$

□

Applicazione

Calcoliamo il momento di inerzia di un disco uniforme di raggio R e massa M rispetto a un asse passante per il bordo.

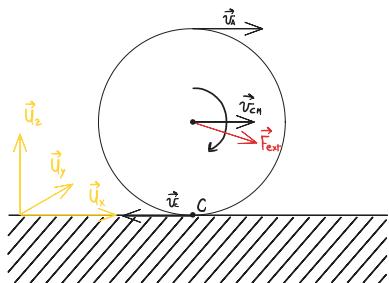


$I_z = I_{z,CM} + \Delta^2 M$ dove Δ è la distanza tra l'asse e il centro di massa
(in questo caso $\Delta = R$ e $I_{z,CM} = \frac{1}{2}MR^2$)

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 + R^2M = \frac{3}{2}MR^2$$

□

Applicazione: il moto di (puro) rotolamento

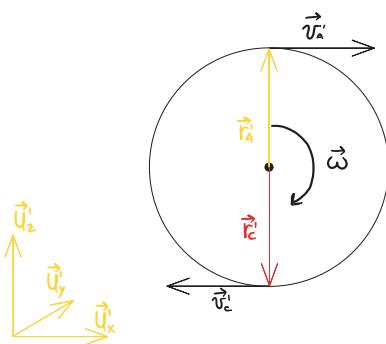


A è il punto apicale, C è il punto di contatto.

Nel punto di contatto agiscono forze $\vec{F} = F_{\parallel}\vec{u}_{\parallel} + F_{\perp}\vec{u}_{\perp}$.

Tra le forze ci aspettiamo \vec{F}_R , \vec{F}_A .

Nel CM $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$



$$\vec{v}'_A = \vec{\omega} \times \vec{r}'_A = (\omega \vec{u}'_y) \times (r \vec{u}'_z) = \omega r \vec{u}_x$$

$$\vec{v}'_C = \vec{\omega} \times \vec{r}'_C = -\vec{\omega} \times \vec{r}'_A - \omega r \vec{u}'_x$$

$$||\vec{v}_A|| = |\omega r|$$

Nel sistema di O (solidale al pavimento):

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v} = v\vec{u}_x$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_A = v\vec{u}_x + \omega r\vec{u}_x = (v + \omega r)\vec{u}_x$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_C = (v - \omega r)\vec{u}_x$$

Le equazioni del rotolamento

La condizione di puro rotolamento è $\vec{v}_C = 0$.

$$\vec{v}_C = 0 \text{ garantisce } W = \int \vec{F} \cdot \vec{v}_C dt = 0$$

\implies

$$v \equiv v_{CM} = \omega r \quad \heartsuit$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{tot} \quad \diamondsuit$$

$$I\vec{\alpha} = \vec{\mathcal{M}}_{tot} \quad \spadesuit$$

Dalla equazione \heartsuit , deriviamo $a_{CM} = \alpha r$, che lega le altre due equazioni tra di loro.

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_R + \vec{F}_A$$

$$\text{In generale } \vec{F}_{ext} = F_{ext,\parallel} \vec{u}_{\parallel} + F_{ext,\perp} \vec{u}_z$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{tot} = \vec{\mathcal{M}}_{ext} + \underbrace{\vec{0}}_{\vec{F}_{ext} \text{ applic. in } CM} + \underbrace{\vec{r}_C \vec{F}_R}_{\vec{r}_C = -r\vec{u}_z, \vec{F}_R = F_R \vec{u}_z} + \underbrace{\vec{r}_C \times \vec{F}_A}_{(-r\vec{u}_z \times (F_A \vec{u}_x) = -rF_A \vec{u}_y)}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{tot} = \mathcal{M}_{ext} \vec{u}_y - rF_A \vec{u}_y$$

$$\vec{F}_{tot} = F_{ext,\parallel} \vec{u}_x + (F_{ext,\perp} + F_R) \vec{u}_z + F_A \vec{u}_x$$

Consideriamo \diamondsuit :

$$\text{Lungo } \vec{u}_z \text{ non c'è moto: } 0 = Ma_z = F_{ext,\perp} + F_R \implies F_R = -F_{ext,\perp}$$

$$\text{Lungo } \vec{u}_x \text{ abbiamo: } Ma_{CM} = F_{ext,\parallel} + F_A$$

\spadesuit è solo lungo \vec{u}_y :

$$I\alpha = \mathcal{M}_{ext} - rF_A$$

Sostituendo la condizione di rotolamento trovo

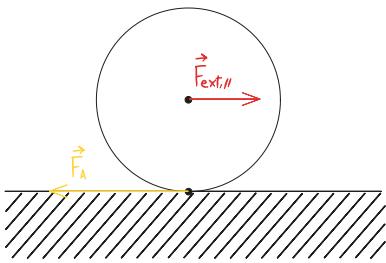
$$\begin{aligned} \cancel{\mathcal{M}\alpha} &= \frac{F_{ext,\parallel} + F_A}{Mr} \\ \cancel{J\alpha} &= \frac{\mathcal{M}_{ext} - rF_A}{I} \\ \implies \cancel{\frac{F_{ext,\parallel} + F_A}{Mr} I} &= Mr \cancel{\frac{\mathcal{M}_{ext} - rF_A}{J}} \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Risolviamo \clubsuit per F_A :

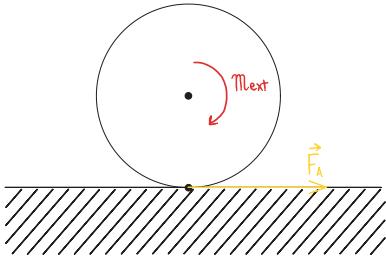
$$F_A(I + Mr^2) = Mr\mathcal{M}_{ext} - F_{ext,\parallel} I$$

$$F_A = \frac{Mr\mathcal{M}_{ext} - F_{ext,\parallel} I}{I + Mr^2}$$

Se $\mathcal{M}_{ext} = 0$, F_A ha segno opposto rispetto a $F_{ext,\parallel}$



Se $F_{ext} = 0$ e $\mathcal{M}_{ext} > 0$ (accelero la rotazione)



Usando l'espressione per F_A

$$\begin{aligned} Ma_{CM} &= F_{ext,||} + \frac{Mr\mathcal{M}_{ext} - F_{ext,||}I}{I+Mr^2} = \\ &= \frac{F_{ext,||}(I+Mr^2-I) + Mr\mathcal{M}_{ext}}{I+Mr^2} = \\ &= \frac{\cancel{Mr}}{I+Mr^2} (\mathcal{M}_{ext} + rF_{ext,||}) = \cancel{M} a_{CM} \\ \begin{cases} a_{CM} = \frac{r(\mathcal{M}_{ext} + rF_{ext,||})}{I+Mr^2} \\ a_{CM} = \alpha r \\ \alpha = \frac{\mathcal{M}_{ext} + rF_{ext,||}}{I+Mr^2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$F_A = \frac{Mr\mathcal{M}_{ext} - F_{ext,||}I}{I+Mr^2}$$

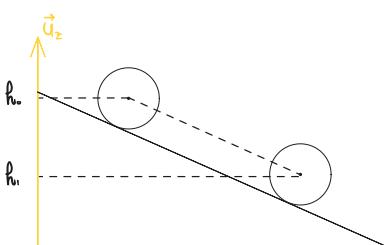
Proprio perché il punto C è fermo, la forza di attrito \vec{F}_A è data dall'attrito statico.

Deve essere $|F_A| < \mu_s |F_R|$.

$$\frac{|Mr\mathcal{M}_{ext} - F_{ext,||}I|}{I+Mr^2} < \mu_s |F_R|$$

Esercizio

Un disco omogeneo di massa M e raggio R si trova alla quota h_0 su un piano inclinato ed è fermo. Sapendo che il disco rotola senza strisciare, **calcolare la velocità del centro di massa a una quota $h_1 < h_0$** .



Sappiamo che nel puro rotolamento l'attrito non fa lavoro, quindi E_{tot} si conserva.

Inizialmente, $E_{tot} = Mgh_0 + 0$.

Alla quota h_1 , $E_{tot} = Mgh_1 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, dove $I = \frac{1}{2}MR^2$, e per la condizione di puro rotolamento $\omega^2 = \frac{v_{CM}^2}{R^2}$.

Uguagliando E_{tot} nei due momenti ho che

$$Mgh_0 = Mgh_1 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{CM}^2}{R^2}\right)$$

$$\implies Mg(h_0 - h_1) = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{4}Mv_{CM}^2 = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2$$

$$v_{CM}^2 = \frac{4}{3}g(h_0 - h_1) \implies |v_{CM}| = \sqrt{\frac{4}{3}g(h_0 - h_1)}$$

Nota bene: Per un punto materiale, $|v_{CM}| = \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$

□

Lezione 31

Esercizio

Uno scienziato inventa una macchina che rallenta la rotazione terrestre. La macchina è alimentata da una centrale che produce una potenza $P = 10^9 W$. Assumendo che tutta la potenza venga usata dalla macchina (senza sprechi).

Quanto tempo impiega la macchina ad aumentare la durata del giorno di $\Delta T = 1s$?

La Terra ruota intorno al proprio asse e ha $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ dove $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ e $I \approx \frac{2}{5}M_T R_T^2 = 7 \cdot 10^{37} kg$ ($M_T \approx 6 \cdot 10^{24} kg$, $R_T \approx 6 \cdot 10^6$, $T = 24 \cdot 3600 s$).

Assumiamo che nel tempo $\Delta T_{\text{macchina}}$.

$$P\Delta T_{\text{macchina}} \approx \Delta E_k$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\omega_{fin}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{in}^2 &= \frac{1}{2}I(\omega_{fin}^2 - \omega_{in}^2) = \frac{1}{2}I\left(\left(\frac{2\pi}{T \pm \Delta T}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right) = \\ &= 2\pi^2 I \left(\frac{1}{(T \pm \Delta T)^2} - \frac{1}{T^2} \right) = \frac{2\pi^2 I}{T^2} \left(\frac{T^2}{T \pm \Delta T} - 1 \right) = \\ &= \frac{2\pi^2 I}{T^2} \left(\frac{1}{(1 \pm \frac{\Delta T}{T})^2} - 1 \right) = \end{aligned}$$

Uso l'espansione asintotica

$$= \frac{2\pi^2 I}{T^2} \left(1 \mp 2\frac{\Delta T}{T} + o\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \nearrow 1 \right) =$$

$$\Delta E_k \approx \mp 2\pi^2 I \frac{\Delta T}{T^3} \approx \frac{10^{39}}{10^{15}} \approx 10^{24} J$$

$$T \sim 10^5, \quad I = 7 \cdot 10^{37}$$

$$P\Delta T_{\text{macchina}} \approx 10^{24} J$$

$$T_{\text{macchina}} = \frac{10^{24}}{10^9} s = 10^{15} s \approx 10^7 \sim 10^8 \text{ anni.}$$

□

Esercizio

La stazione spaziale internazionale orbita a quota $h \approx 400\text{km}$. **Stimare il periodo dell'orbita.**

Assumiamo un'orbita circolare di raggio $R = R_T + h = 6,37 \cdot 10^6 + 0,4 \cdot 10^6$
 $R = 6,77 \cdot 10^6\text{m}$.

Per un'orbita circolare

$$|F_{grav}| = |F_{centr}|$$

$$\frac{GM_T m_{staz.}}{R^2} = m_{staz.} R\omega^2 = m_{staz.} \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_T} \quad (\text{La seconda legge di Keplero})$$

$$T \approx 1,5h$$

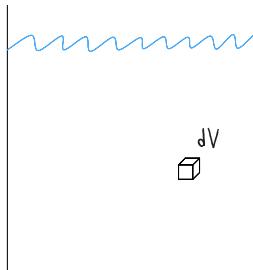
□

I fluidi

Un fluido non ha una forma definita (al contrario del corpo rigido) ma assume la forma del contenitore.

Al contrario dei gas, non si può comprimere.

Forze



Su dV possono agire delle forze

1. di volume (peso)
2. di pressione

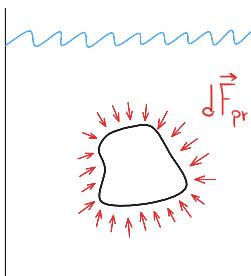
Forze di volume (peso)

$$d\vec{F}_p = -gdm\vec{u}_z = -g\rho dV\vec{u}_z \quad (\rho \text{ la densità del fluido})$$

$$\vec{F}_p = \int_V d\vec{F}_p = -g\rho\vec{u}_z \int_V dV$$

□

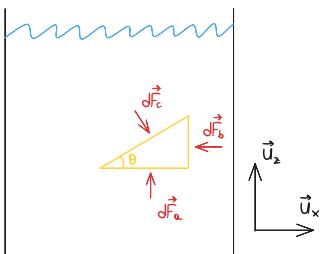
Forze di pressione (o di superficie)



Dato dV , il resto del fluido esercita una forza, che è ortogonale alla superficie di dV .

$$d\vec{F}_{pr} = dF_{\perp} \vec{u}_{\perp}$$

Questa forza si può esprimere in termini di una quantità fisica detta *pressione*.



Se il fluido in dV è in equilibrio:

$$d\vec{F}_A + d\vec{F}_B + d\vec{F}_C = \vec{0} \star$$

$d\vec{F}_A = dF_{A,\perp} \vec{u}_z = p_A dS_A \vec{u}_z$ (l'uguaglianza è dovuta del fatto che la forza è proporzionale alla superficie su cui agisce)

$$d\vec{F}_B = -p_B dS_B \vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_C = p_C dS_C (-\cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u}_x)$$

Ho introdotto i coefficienti di proporzionalità p_A , p_B , p_C . Questi non sono indipendenti per via di \star . Inoltre le superfici dS_A , dS_B , dS_C (le facce della sezione triangolare) non sono indipendenti, perché sono legate dalla geometria del problema.

$$\begin{cases} dS_A = \cos \theta dS_C \\ dS_B = \sin \theta dS_C \end{cases}$$

Ho che:

$$\begin{aligned} \star &= p_A \underbrace{\cos \theta dS_C \vec{u}_z}_{dS_A} - p_B \underbrace{\sin \theta dS_C \vec{u}_x}_{dS_B} + \sin \theta p_C dS_C \vec{u}_x - \cos \theta p_C dS_C \vec{u}_z = \\ &= (p_A \cos \theta - p_C \cos \theta) dS_C \vec{u}_x + (-p_B \sin \theta + p_C \sin \theta) dS_C \vec{u}_x = \vec{0} \end{aligned}$$

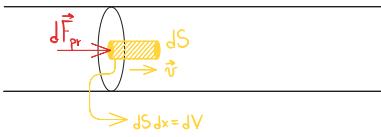
Per soddisfare \star deve essere che

$$p_A = p_C = p_B \equiv p \quad (\text{pressione})$$

La pressione di misura in

$$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Lavoro delle forze di pressione



Un fluido si muove sotto l'azione di una forza di pressione.

$$dW = d\vec{F}_{pr} \cdot \vec{v} dt = pdS \vec{u}_\perp \cdot \left(\frac{dx}{dt} \vec{u}_\perp \right) dt \\ = pdS \frac{dx}{dt} dt = pdS dx = pdV$$

$$dW = pdV$$

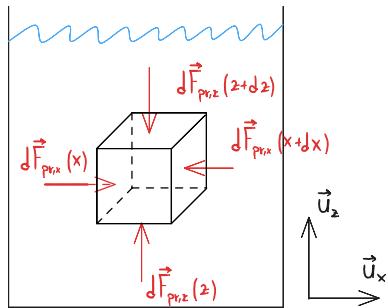
Il lavoro (non infinitesimo)

$$W = \int_V dW = \int_V p dV$$

dove in generale p non esce dall'integrale.

Lezione 32

Legge di Stevino (pressione in presenza della forza peso)



Sul volumetto agiscono le forze di pressione (sei termini) e la forza di volume $d\vec{F}_p$.

La condizione di equilibrio è $d\vec{F}_{pr} + d\vec{F}_p = \vec{0}$.

$$d\vec{F}_p = -g\rho dV u \vec{v}_z.$$

Imponiamo la condizione di equilibrio:

Lungo \vec{u}_x :

$$dF_{pr,x}(x) + dF_{pr,x}(x+dx) = 0 \\ \Rightarrow p(x)dS_x - p(x+dx)dS_x = 0 \\ \Rightarrow p(x+dx) - p(x) = 0$$

Posso scrivere $p(x+dx) = p(x) + \frac{dp}{dx}dx + \dots$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$$

Cioè p non varia con x .

Vale lo stesso lungo \vec{u}_y .

Lungo \vec{u}_z :

$$dF_{pr,z}(z) + dF_{pr,z}(z + dz) + dF_p = 0$$

$$p(z)dS_z - p(z + dz)dS_z - g\rho dV = 0$$

Osserviamo che $dV = dzdS_z$

$$(p(z) - p(z + dz) - g\rho dz)dS_z = 0$$

Posso scrivere $p(z + dz) = p(z) + \frac{dp}{dz}dz + \dots$

$$\Rightarrow \cancel{p(z)} - \left(\cancel{p(z)} + \frac{dp}{dz}dz \right) - g\rho dz = 0$$

$$\left(-\frac{dp}{dz} - g\rho \right) dz = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho$$

$$p(z) = -g\rho z + p_0$$

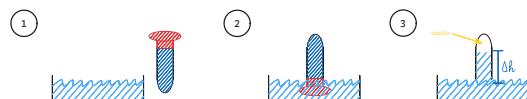
È la legge di Stevino.

□

Sappiamo che $\rho_{H_2O} \approx 1000 \frac{kg}{m^3}$.

Una variazione $\Delta h \approx 1m$ porta a una variazione di pressione di $g\rho\Delta h = 9,8 \cdot 1000 \cdot 1 = 9800 Pa$ ($1 Pa$ è la pressione che dà una forza di un Newton quando è applicata a $\Delta S = 1m^2$).

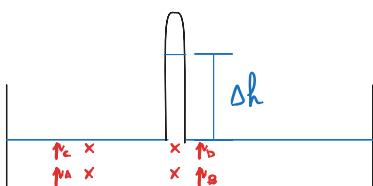
Esperimento di Torricelli



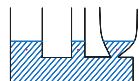
Capovolgendo un tubo pieno di fluido in una vasca, si osserva che nel tubo rimane una colonna di fluido alto Δh rispetto al "pelo" del fluido.

Facendo questo esperimento con il mercurio, Torricelli ha osservato una colonna di altezza $\Delta h \approx 760 mm$

Interpretazione



Sappiamo che in un fluido la pressione dipende solo dalla quota, indipendentemente dal recipiente (vasi comunicanti



)

Quindi $p_A = p_B$ e $p_C = p_D$.

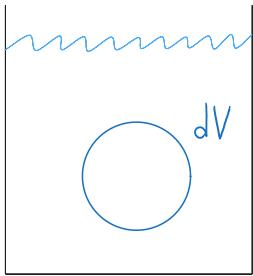
Ma se p_C è appena sotto il pelo del fluido e p_D è sotto il colmo del fluido, vuol dire che la pressione dovuta alla colonna di fluido (Hg) è uguale alla pressione dovuta alla colonna d'aria sopra il punto C (cioè la *pressione atmosferica*).

$$p_{atm} = 760 \text{ mmHg} = 1 \text{ Torr} = 1 \text{ atm}$$

□

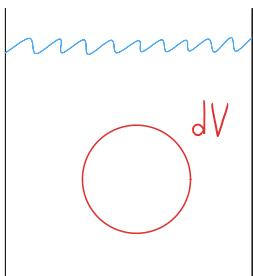
Conoscendo $\Delta h = 0,760m$, $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ e $\rho_{Hg} \approx 1,36 \cdot 10^4 \frac{kg}{m^3}$, trovo
 $p_{atm} = \rho_{Hg} g \Delta h \approx 1,01 \cdot 10^5 Pa$.

Principio di Archimede



Su dV agiscono le forze di pressione $d\vec{F}_{pr}$ e $d\vec{F}_p$. All'equilibrio $d\vec{F}_{pr} + d\vec{F}_p = \vec{0} \implies d\vec{F}_{pr} = -d\vec{F}_p = \rho g dV \vec{u}_z$.

Per un volume finito $\vec{F}_{pr} = \bar{\rho} g V \vec{u}_z$, dove $\bar{\rho} = \frac{m}{V}$ è la densità media.



Se sostituisco al volumetto di fluido un uguale volume di altra sostanza (ad esempio un solido), allora \vec{F}_{pr} non può cambiare, mentre \vec{F}_p cambia.

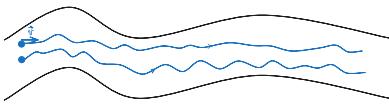
$$d\vec{F}_{pr} = \rho g dV \vec{u}_z, \quad \vec{F}_{pr} = g \bar{\rho} V \vec{u}_z, \quad \text{ma} \quad d\vec{F}_p = -g \rho' dV \vec{u}_z, \quad \vec{F}_p = -g \bar{\rho}' V \vec{u}_z.$$

La risultante è quindi

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{pr} + \vec{F}_p = g(\bar{\rho} - \bar{\rho}') V \vec{u}_z$$

, dove $\bar{\rho}$ è la densità del fluido spostato e $\bar{\rho}'$ è la densità del corpo.

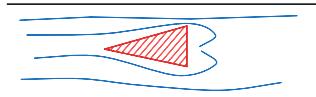
Fluidodinamica



Chiamiamo "linee di flusso" le traiettorie dei volumetti dV .

Ci limiteremo al caso in cui le linee di flusso non si intersecano né si interrompono.

(Esempio del contrario:



turbolenza (vorticci)).

Inoltre, trascureremo l'attrito (*Fluidi in regime stazionario*).

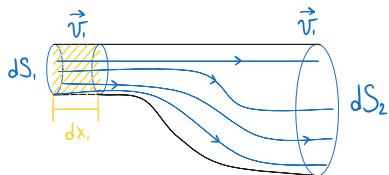
Portata

In regime stazionario, la "portata" " q " è data da

$$dq = vdS$$

(la quantità di fluido che passa attraverso dS in un tempo dt),

$q = \int_S dq$ ed è costante lungo il flusso.



$$dV_1 = dS_1 dx_1 = dS_1 v_1 dt$$

$$\text{dove ho usato } v_1 = \frac{dx_1}{dt}.$$

$$\text{Portando avanti } dV_1 \text{ con il flusso trovo } dV_2 = dS_2 dx_2 = dS_2 v_2 dt \equiv dS_1 v_1 dt$$

$$\implies dS_1 v_1 = dS_2 v_2 \implies q_1 = q_1.$$

Generalizzazione Stevino

Vogliamo generalizzare Stevino ai fluidi in regime stazionario.

Osserviamo che:

$$p(z) = -\rho g z + p_0$$

$$p(z) + \rho g z = \text{cost}$$

$$p(z)dV + g\rho dVz = \text{cost}$$

$$p(z)dV + gzdm = \text{cost}$$

$$pdV = dW_{pr}, \quad -gzdm = dE_p, \quad gzdm = dW_{peso}$$

$$dW = \Delta E_k = 0$$

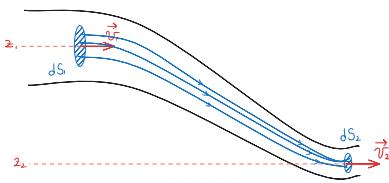
cioè si conserva la somma del lavoro delle forze di pressione e delle forze di volume, quindi l'energia cinetica.

Cioè la legge di Stevino è equivalente al teorema dell'energia

cinetica se $\Delta E_k = 0$.

□

Teorema di Bernoulli



Lungo il flusso dS_1 , v_1 , z_1 cambiano in dS_2 , v_2 , z_2 . Per il teorema dell'energia cinetica:

$p_1 dV_1 + g\rho z_1 dV_1 + dE_{k,1} = p_2 dV_2 + g\rho z_2 dV_2 + dE_{k,2}$ (che corrispondono al lavoro della pressione e del peso)

Osserviamo che $dE_{k,1} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$, cioè $dE_{k,1} = \frac{1}{2}\rho dV_1 v_1^2$ e $E_{k,2} = \frac{1}{2}\rho dV_2 v_2^2$ e in regime stazionario $dV_1 = dV_2 \equiv dV$.

$$p_1 dV + g\rho z_1 dV + \frac{1}{2}\rho v_1^2 dV = p_2 dV + g\rho z_2 dV + \frac{1}{2}\rho v_2^2 dV$$

⇒

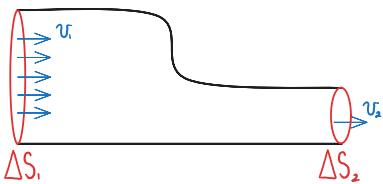
$$p + g\rho z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante lungo il flusso}$$

□

Se z è costante, troviamo $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$ (se $\|\vec{v}\|$ aumenta, p diminuisce). È il principio di Venturi.

Lezione 33

Tubo di Venturi



La portata è costante: $\Delta S_1 v_1 = \Delta S_2 v_2$, $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

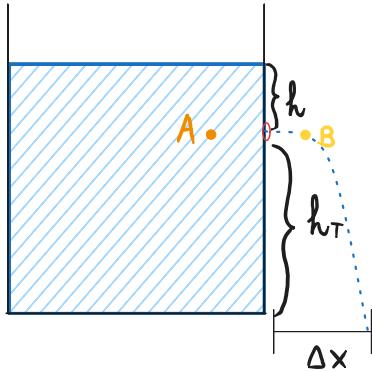
$$v_2 = \frac{\Delta S_1 v_1}{\Delta S_2}, \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\left(\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} \right)^2 - 1 \right) > 0.$$

È il principio che si usa per gli aerografi o per i vecchi profumi con la pompetta (la pressione sull'area piccola è più piccola, quindi c'è un risucchio).

□

Esercizio



Conoscendo ρ , h , h_T (e magari ΔS_{Botte} , ΔS_{Foro}), **trovare** Δx .

Deve essere che $p_A = p_B$.

In A , $p_A = \rho gh + p_{atm}$ (stiamo trascurando il movimento del fluido perché la velocità è piccolissima rispetto a quella dello zampillo, in più la superficie è molto più grande)

In B , $p_B = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2$.

$p_{atm} + \rho gh = \frac{1}{2}p_{atm} + \rho gv^2 \implies v^2 = 2gh$ (è proprio la formula della conservazione dell'energia potenziale dovuta alla forza peso).

Assumendo che $\vec{v} = v\hat{u}_x$, possiamo calcolare Δx come per un punto materiale con $v_{x,0} = \sqrt{2gh}$, $v_{z,0} = 0$:

$$\begin{cases} z(t) = h_T - \frac{1}{2}gt^2 \\ x(t) = v_{x,0}t \end{cases}$$

La gocciolina tocca terra a t_c tale che $z(t_c) = 0$.

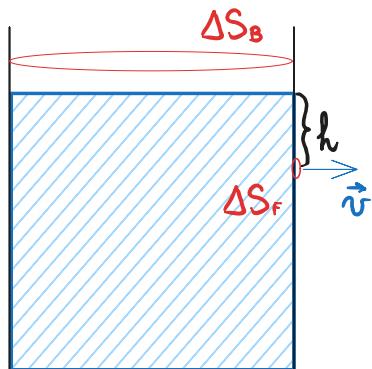
$$h_T - \frac{1}{2}gt_c^2 = 0 \implies t_c = \sqrt{\frac{2h_T}{g}}$$

All'istante $t = t_c$:

$$\Delta x = x(t_c) = v_{x,0}t_c = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2h_T}{g}} = 2\sqrt{hh_T}$$

□

Esercizio



Quanto tempo ci impiega a svuotarsi la botte?

La portata è costante, cioè:

$v\Delta S_F dt$ è il volume che esce, ed è uguale a $-\Delta S_B dh$ (cioè di quanto si abbassa il livello) ($dh < 0$ perché il livello scende).

Sbagliato:

Siamo tentati di dire che nel tempo Δt (non infinitesimo) il fluido scende di $\Delta h \Rightarrow v\Delta S_F \Delta t = -\Delta S_B \Delta h$

E nel caso in cui $\Delta h = 0 - h \Rightarrow v\Delta S_F \Delta t = +\Delta S_B h$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \frac{h}{v} = \frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \frac{h}{\sqrt{2gh}} = \frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Il procedimento precedente non tiene conto che v varia al variare di h , quindi di t .

□

$$-\Delta S_B \Delta h = v\Delta S_F dt = \sqrt{2gh} \Delta S_F dt$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = dt$$

$$-\int_{h_{in}}^{h_{fin}} \frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int_0^{t_{fin}} dt$$

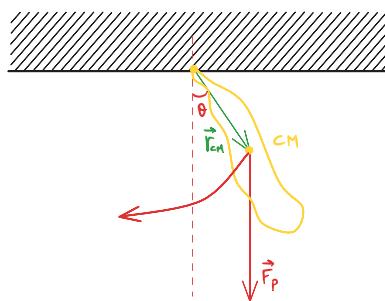
$$-\frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{h_{in}}^{h_{fin}} \frac{dh}{\sqrt{2h}} = \int_0^{t_{fin}} dt$$

$$-\frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \frac{1}{\sqrt{g}} [\sqrt{2h}]_{h_{in}=h}^{h_{fin}=0} = t_{fin}$$

$$\frac{\Delta S_B}{\Delta S_F} \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_{fin}$$

□

Pendolo fisico (esercizi sul corpo rigido)



Un corpo rigido appeso a un filo appeso a un perno e soggetto alla forza peso, si comporta come un pendolo.

La dinamica è data da $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{\alpha}$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_p$$

$\vec{\mathcal{M}}$ è ortogonale al piano del disegno, e così è $\vec{\alpha}$. Lungo quella direzione:

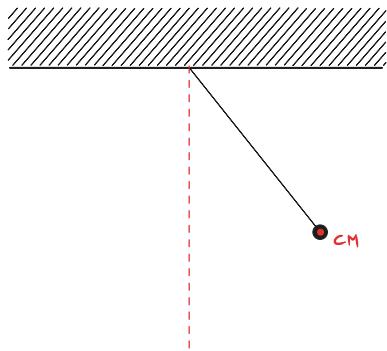
$$I\alpha = -||\vec{r}_{CM}|| Mg \sin \theta$$

$$\alpha \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mg r_{cm}}{I} \sin \theta$$

(Per $\theta \ll 1$, $\sin \theta \approx \theta$)

□

Nel caso del pendolo ideale di lunghezza L ,



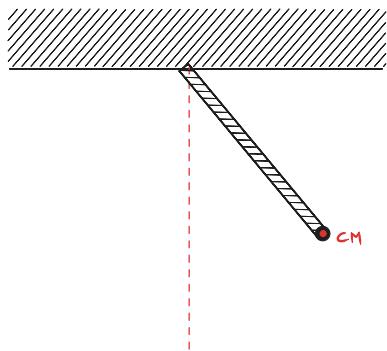
abbiamo che $r_{CM} = L$

$$I = L^2 M$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MgL}{ML^2} \sin \theta = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

□

Per una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M :



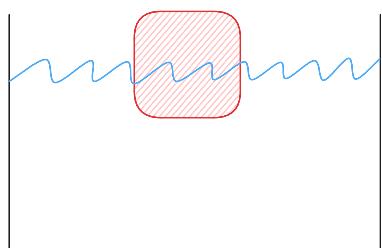
$$r_{CM} = \frac{L}{2}$$

$$I = I_{CM} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{1}{12}L^2 M + \frac{1}{4}L^2 M = \frac{1}{3}L^2 M$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\cancel{M} g \frac{L}{2}}{\frac{1}{3}L^2 \cancel{M}}$$

□

Esercizio



Un solido galleggia in acqua. Si misura che il 30% del volume è fuori dalla superficie dell'acqua. Assumendo che il solido sia omogeneo, **trovare la densità del solido**.

Deve essere che $||\vec{F}_p|| = ||\vec{F}_{Arch}||$

$$||\vec{F}_p|| = Mg = \rho_S V g$$

$$||\vec{F}_{Arch}|| = \rho_{H_2O} V_{immerso} g$$

$$V_{immerso} = 0,7V$$

$$\rho_S Y_g = \rho_{H_2O} Y_g$$

$$\rho_S = 0,7 \rho_{H_2O} = \frac{700 \text{ kg}}{\text{m}^3}$$

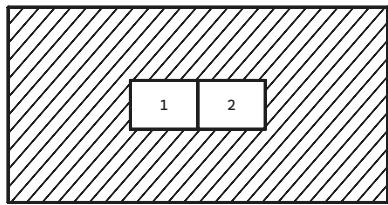
Lezione 34

Termodinamica

Studio del calore e trasformazioni (es: gas che si espande e contrae). Ha permesso la rivoluzione industriale.

Temperatura e calore

Legge zero della termodinamica



Ponendo due corpi (uno più caldo, l'altro più freddo) a contatto e aspettando un po', notiamo che quello caldo si raffredda (e viceversa) fino a raggiungere un equilibrio (sono "caldi uguali").

Il fatto che si possa raggiungere questa situazione di "equilibrio termico" è la base della termodinamica (**"Legge zero" della termodinamica**).

□

Temperatura

Diciamo che due corpi che sono in equilibrio *hanno la stessa temperatura*: $T_1 = T_2$.

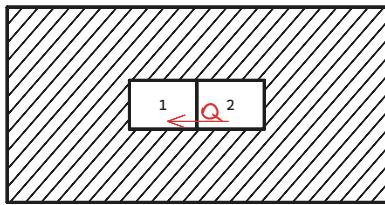
Vediamo meglio il processo che ci porta all'equilibrio termico.

Calore

Diciamo che il corpo caldo cede calore al corpo freddo. Il calore si indica con Q e si misura in calorie: $[Q] = Cal$ è la quantità di calore necessaria ad alzare la temperatura di $1kg$ di acqua da $14,5^{\circ}C$ a $15,5^{\circ}C$.

$Q > 0$ se il calore è assorbito, mentre $Q < 0$ se è ceduto.

□



$$T_2 > T_1$$

$$Q_2 < 0 \text{ ceduto a } 2$$

$$Q_1 > 0 \text{ assorbito da } 1$$

$$Q_1 = -Q_2$$

Attenzione (linguaggio)

Similmente alla meccanica, in cui un corpo *ha* massa, velocità, etc., ma non "ha" lavoro; un corpo *comple* lavoro; In termodinamica, un corpo *ha* una temperatura, ma non "ha" calore. Un corpo *scambia* calore (cioè il calore non è una proprietà del corpo).

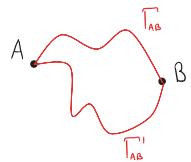
□

Funzioni di stato

Le quantità proprie di un corpo (massa, temperatura, pressione, volume, velocità, ...) che dipendono solo dallo stato del corpo, si dicono *funzioni di stato*.

Lavoro e calore *non* sono funzioni di stato, dipendono dalla trasformazione ($W[\Gamma_{AB}]$, con AB la trasformazione).

Se, per un qualche caso speciale, la dipendenza dalla trasformazione non c'è (



$W[\Gamma_{AB}] = W[\Gamma'_{AB}]$) e solo in questo caso, $W(\Gamma_{AB}) = E_p(A) - E_p(B)$ (con le energie potenziali che sono funzioni di stato).

Calore e calore specifico

Si trova che la quantità necessaria ad aumentare la temperatura di un corpo da T_0 a $T_0 + dT$ è

$$dQ = c(T_0) m dT$$

Il coefficiente di proporzionalità $c(T_0) = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \Big|_{T=T_0}$ si chiama *calore specifico* (per unità di massa), è positivo ed è una proprietà di ciascun materiale.

Si misura in $[c] = \frac{\text{Cal}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

In pratica, $c(T_0)$ è approssimativamente costante al variare di T_0 . In questo caso:

$$Q_{AB} = \int_A^B dQ = \int_{T_A}^{T_B} c(T)m dT =$$

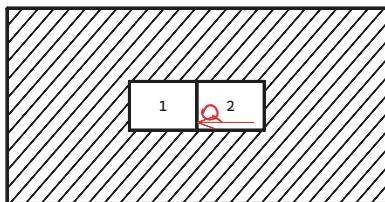
$$\text{se } c(T_A) \approx c(T_B) \approx c$$

$$= cm \int_{T_A}^{T_B} dT = cm(T_B - T_A)$$

$$Q_{AB} = cm(T_B - T_A)$$

□

Esercizio



I corpi 1 e 2 hanno (m_1, c_1, T_1) e (m_2, c_2, T_2) , $T_2 > T_1$. **Trovare la temperatura di equilibrio.**

Inizialmente $T_{1,in} = T_1$ e $T_{2,in} = T_2$.

All'equilibrio $T_{1,fin} = T_e$, $T_{2,fin} = T_e$.

Sappiamo che $Q_1 = \int_{T_{1,in}}^{T_{1,fin}} c_1 m_1 dT = c_1 m_1 (T_{1,in} - T_{1,fin}) = c_1 m_1 (T_e - T_1)$ e che $Q_2 = \int_{T_{2,in}}^{T_{2,fin}} c_2 m_2 dT = c_2 m_2 (T_{2,in} - T_{2,fin}) = c_2 m_2 (T_e - T_2)$.

Notiamo che, siccome $T_2 > T_1$, deve essere $T_2 > T_e > T_1$, che conferma $Q_1 > 0$ e $Q_2 < 0$.

Sappiamo inoltre che $Q_1 + Q_2 = 0 = c_1 m_1 T_e - c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_e - c_2 m_2 T_2$

$$\Rightarrow (m_1 c_1 + m_2 c_2) T_e = m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2$$

$$\Rightarrow T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

⇒ media pesata da $mc = \mathcal{C}$, detta la *capacità termica*.

□

Scale termometriche

Una sonda con C_{sonda} piccola rispetto a C_{corpo} misura

$$T_e = \frac{C_{sonda}T_{sonda} + C_{corpo}T_{corpo}}{C_{sonda} + C_{corpo}} \approx T_{corpo}.$$

Questo permette di costruire i termometri e definire le scale di temperatura.

Scala Celsius

- $100^\circ C$ acqua bolle;
- $0^\circ C$ acqua gela.

Scala Kelvin

Ha la stessa divisione della scala Celsius, ma:

- $0^\circ K = -273,15^\circ C$ zero assoluto.

Calore latente

Perché un solido alla temperatura di fusione (ad esempio ghiaccio a $0^\circ C$) passi allo stato liquido, è necessario fornire una quantità di calore Q (calore latente di fusione).

$$Q = \lambda m$$

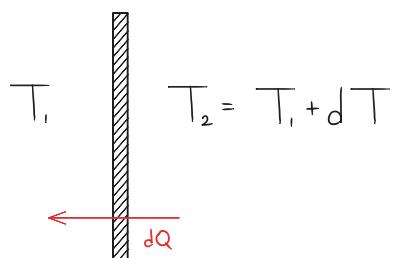
dove $[\lambda] = \frac{\text{cal}}{\text{kg}}$.

□

Modalità di trasmissione del calore

Per contatto

Dati due corpi e una barriera di spessore dn , la quantità di calore scambiato è



$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt$$

con k la conduttilità termica, dS la superficie di contatto.

Per irraggiamento

Il calore si può anche trasmettere per irraggiamento

$$\frac{dQ}{dt} \approx \sigma T^4$$

con σ la costante di Stefan-Boltzman.

□

Sistema termodinamico

Un sistema termodinamico è dato da solidi, o più spesso liquidi/gas, e si dice che è

1. "Aperto" se scambia materia, calore e lavoro con l'esterno;
2. "Chiuso" se non scambia materia con l'esterno (ma può scambiare calore o lavoro);
3. "Adiabatico" se non scambia calore o materia, ma può scambiare lavoro;
4. "Isolato" se non scambia materia, calore e lavoro con l'esterno.

Il sistema dell'"universo termodinamico" è isolato.

Equilibrio

Un sistema può essere in equilibrio

- Meccanico se $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$;
- Termico se $dQ = 0$;
- Chimico se "non ci sono reazioni chimiche".

Lezione 35

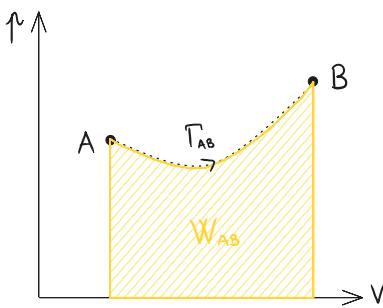
Un fatto importante sull'equilibrio - Equazione di stato e piano di Clapeyron

Un sistema all'equilibrio è identificato da T , p , V . Queste tre quantità all'equilibrio non sono indipendenti.

Esiste una funzione $f_{eq}(p, V, T) = 0$. Quindi possiamo determinare $p(V, T)$, $V(p, T)$ oppure $T(p, V)$.

La condizione $f_{eq}(p, V, T)$ si chiama *equazione di stato* (dipende dal tipo di sistema, ad esempio: gas ideali, gas reali, etc.).

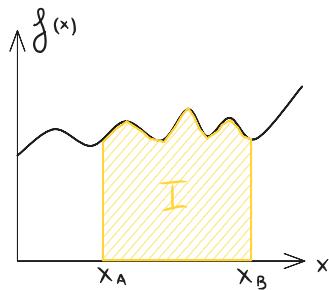
È particolarmente utile pensare a $T(p, V)$ perché così possiamo rappresentare il sistema nel piano $p - V$ (*Piano di Clapeyron*):



Lo stato di equilibrio A è dato da (V_A, p_A) e da lì conosciamo $T_A = T(p_A, V_A)$.

Consideriamo una trasformazione Γ_{AB} . Sappiamo che il lavoro delle forze di pressione è $dW = p dV \implies W_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} dW = \int_{\Gamma_{AB}} p dV$.

Questo è analogo a $I = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx$



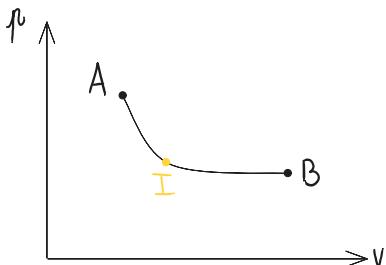
con $p \approx f(x)$ e $V \approx x$.

Trasformazioni

Tra le trasformazioni, ne distinguiamo due tipi:

- **Trasformazioni quasi-statiche**, nelle quali gli stati intermedi sono di equilibrio;
- Tra le trasformazioni quasi-statiche sono importanti quelle **reversibili**, che si possono percorrere in senso inverso (cioè nelle quali non c'è dissipazione).

Le trasformazioni reversibili sul piano di Clapeyron si indicano con una linea continua.

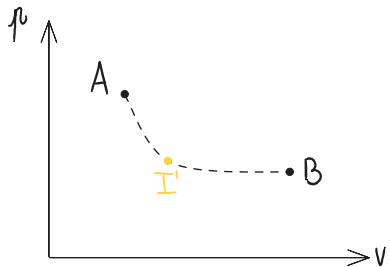


Nota bene

I è uno stato di equilibrio del sistema: $T_I = T(p_I, V_I)$.

Questo non è vero se la trasformazione è generica (le trasformazioni generiche sono generalmente "irreversibili").

Una trasformazione generica irreversibile si indica con una linea tratteggiata.

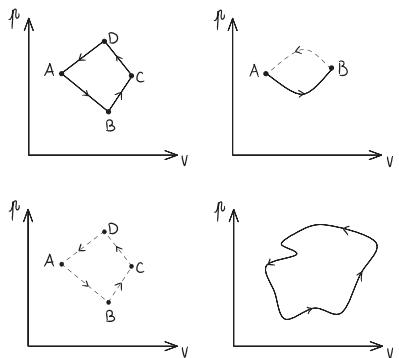


$T_{I'} \neq T(p_{I'}, V_{I'})$.

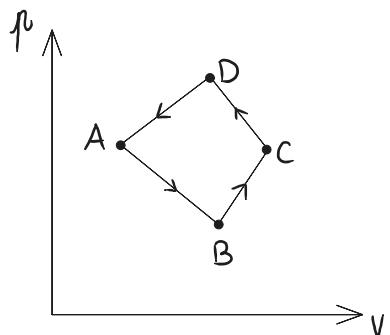
□

Cicli termici

Una sequenza di trasformazioni che riporta il sistema allo stato iniziale è un ciclo.

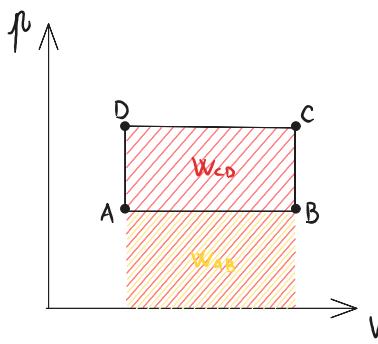


Se tutte le trasformazioni di un ciclo sono reversibili, il ciclo si dice *reversibile*. Altrimenti si dice *irreversibile*.



□

Lavoro di un ciclo



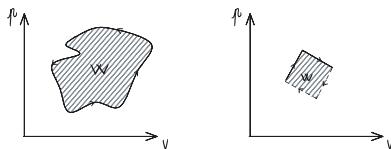
In questo ciclo ho che $W_{BC} = 0$, $W_{DA} = 0$ perché $dV = 0$. Inoltre $W_{AB} > 0$, $W_{CD} < 0$.

$$W_{tot} = W_{AB} + \cancel{W_{BC}} + W_{CD} + \cancel{W_{DA}} = \text{area del ciclo}.$$

Il lavoro in un ciclo è l'area dentro il ciclo con segno:

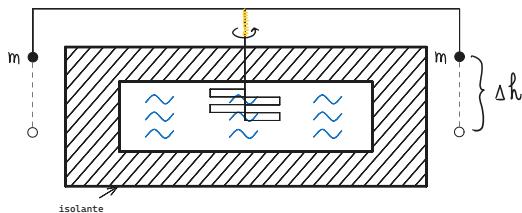
- **negativo**, se il ciclo è antiorario;
- **positivo**, se il ciclo è orario.

Ciò vale anche per cicli come:



Primo principio della termodinamica

Esperimento di Joule



Quando le masse vengono lasciate libere, mettono in rotazione il perno. Quando le masse vengono lasciate libere, mettono in rotazione il perno.

Il lavoro delle masse è $W = 2mg\Delta h$. Joule misura la temperatura del fluido prima della caduta delle masse e dopo che il perno di è fermato. Trova: $\Delta T > 0$, $\Delta T \propto W = 2mg\Delta h$.

Joule definisce l'energia interna U e dice che, in questo caso (sistema adiabatico),

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{AB}$$

Nelle nostre convenzioni ($W = \int p dV$) il lavoro è positivo se è compiuto dal sistema, mentre negativo se è subito.

In generale, si scrive

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{AB} + Q_{AB}$$

Quindi, il calore è una forma di energia e ho $[Q] = J$.

Primo principio della termodinamica

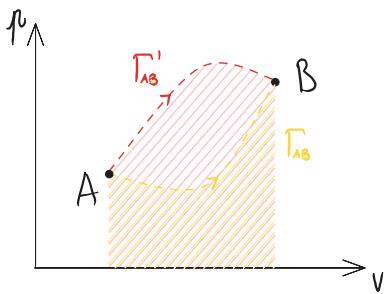
Esiste una funzione di stato U , detta energia interna, tale che

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{AB} + Q_{AB}$$

per ogni trasformazione Γ_{AB} .

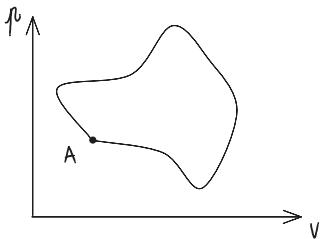
Nota bene

Date due trasformazioni Γ_{AB} , Γ'_{AB}



abbiamo che $W[\Gamma_{AB}] \neq W[\Gamma'_{AB}]$ e inoltre $Q[\Gamma_{AB}] \neq Q[\Gamma'_{AB}]$, ma la combinazione $-W+Q$ è la stessa, $-W[\Gamma_{AB}] + Q[\Gamma_{AB}] = -W[\Gamma'_{AB}] + Q[\Gamma'_{AB}]$ ed entrambi i termini sono uguali a $U_B - U_A$.

Lungo il ciclo, U non cambia: $\Delta U = U_{fin} - U_{in} = U_A - U_A = 0$



$W_{ciclo} \neq 0$, $Q_{ciclo} \neq 0$, $\Delta U = -W + Q$, quindi

$$W_{ciclo} = Q_{ciclo}$$

□

Riassumendo

- **Principio zero:** Esiste una funzione di stato T
- **Primo principio:** Esista una funzione di stato U

$$\Delta U = -W + Q$$

□

I gas (ideali)

I gas sono importanti in termodinamica perché possono cambiare volume e quindi compiere/subire lavoro $dW = p dV$.

I gas ideali sono quelli

- non troppo freddi;
- abbastanza rarefatti.

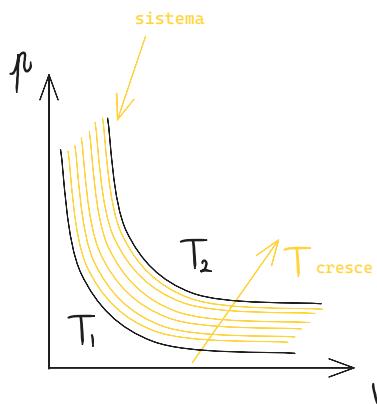
Tutti i gas con queste caratteristiche obbediscono ad alcune leggi sperimentali.

Leggi empiriche

Legge di Boyle (isoterma)

Lungo una trasformazione reversibile a temperatura costante si ha che

$$pV = \text{costante}$$



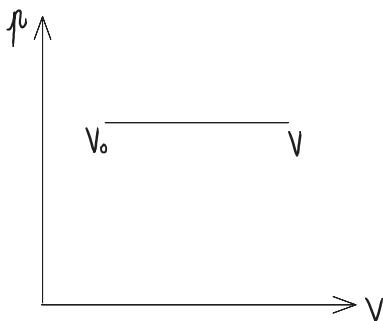
□

Legge di Gay-Lussac (isobara)

Lungo una trasformazione reversibile a pressione costante si ha che

$$V = V_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

dove V_0 e T_0 sono volume e temperatura di riferimento e α è costante.



Nota bene

V deve essere positivo.

$$\cancel{V_0[1 + \alpha(T - T_0)] > 0}$$

$$\alpha T - \alpha T_0 > -1 \implies T > -\frac{1}{\alpha} + T_0 \text{ dove ho usato che } \alpha > 0.$$

La quantità $-\frac{1}{\alpha} + T_0$ è lo zero assoluto (se andassi sotto quella temperatura, avrei un volume $V < 0$).

(Ad esempio: $T_0 = 0^\circ C$, $\alpha = \frac{1}{273,15^\circ C}$).

□

Lezione 36

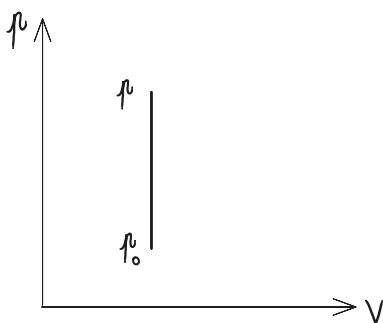
Legge (della trasformazione) isocora

Lungo una trasformazione reversibile a volume costante si ha che

$$p = p_0[1 + \beta(T - T_0)]$$

dove p_0 e T_0 sono di riferimento e β è costante e positiva.

Si trova $\beta = \alpha$.



□

Misurando la temperatura dallo zero assoluto $V(T)$ nell'isocora e $p(T)$ nell'isobara, si hanno funzioni lineari che si annullano a $T = 0^\circ K$.

In Kelvin: $V(T) = \alpha V_0 T$, $p(T) = \alpha p_0 T$

□

Legge di Avogadro

Due gas ideali che occupano lo stesso volume V alla stessa temperatura T e pressione p consistono dello stesso numero di molecole.

È un numero grande, e perciò si introducono le "moli". L'unità di conversione è il numero di Avogadro N_A .

$$1\text{mol} = N_A \text{ molecole}; \quad N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$$

Sono numeri puri.

□

Quantità di riferimento standard

Come riferimento standard, abbiamo preso

- $T_0 = 0^\circ C = 273,5^\circ K$;
- $p_0 = 1atm = 1,01 \cdot 10^5 Pa$;
- V_0 = volume di $n = 1\text{mol}$ di gas a T_0 , $p_0 = 0,0224m^3$. Si dice anche che questo è il *volume molare* $V_{mol} = 0,0224m^3$.

□

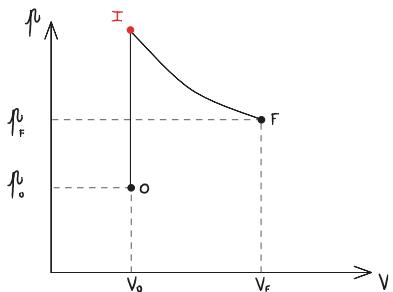
Equazione di stato dei gas ideali

Sappiamo che p , V , T all'equilibrio non sono indipendenti:

$f_{eq}(p, V, T) = 0$. Vogliamo trovare f_{eq} a partire dalle leggi empiriche che abbiamo enunciato.

Consideriamo un gas ideale a $p = p_0 = 1atm$ e $T = T_0 = 0^\circ C = 273,15^\circ K$; n moli di questo gas occupano un volume $V_0 = nV_{mol}$.

Vogliamo (usando una serie di trasformazioni reversibili, come quelle discusse prima) portare il gas da (p_0, V_0) a un generico (p_F, V_F) e usare le leggi empiriche per trovare $T(p_F, V_F)$.



Inizialmente ho $T_0 = 0^\circ C$, $p_0 = 1atm$, $V_0 = nV_{mol}$.

Andiamo a un punto intermedio a temperatura T_I (intermedia) con un'isocora reversibile:

T_I (scelta da noi), $p_I = p_0 \alpha T_I$, $V_I = V_0 = nV_{mol}$.

Scegliamo $T_I = T_F$, la temperatura finale che vogliamo.

Allora possiamo usare un'isoterma reversibile per arrivare a p_F , V_F . Sapendo che $p_F V_F = p_I V_I = p_0 \alpha T_I n V_{mol} = p_0 \alpha T_F n V_{mol}$, trovo che $p_F V_F = n(\alpha p_0 V_{mol}) T_F$, che vale per qualsiasi p_F , V_F , T_F .

$$pV = \underbrace{n(\alpha p_0 V_{mol})}_\text{è una costante} T = nRT$$

R è la costante dei gas ideali.

Abbiamo trovato la relazione $f_{eq}(p, V, T) = 0$: $pV - nRT = 0$ all'equilibrio, con n il numero di moli e R costante.

$$R = \alpha p_0 V_{mol} \approx 8,3144 \frac{J}{K mol}$$

Dalla formula abbiamo $p = \frac{nRT}{V}$, $V = \frac{nRT}{p}$, $T = \frac{pV}{nR}$, $n = \frac{pV}{RT}$ che valgono all'equilibrio.

□

Calore specifico dei gas

Il calore specifico ci dice come varia T (dT) se forniamo calore dQ a una certa quantità di materia. Per i solidi e liquidi si parla di calore specifico per unità di massa, per i gas si usa quello per numero di moli (calore specifico molare). Ci verrebbe da dire che $c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$, ma non è così.

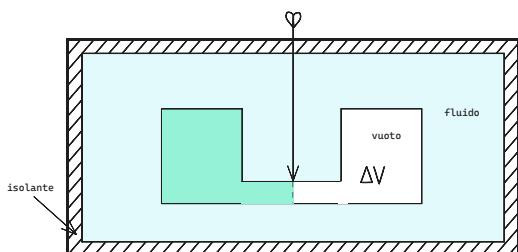
Possiamo fornire calore dQ a volume costante (come per i solidi e fluidi) o a volume variabile e pressione costante.

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Big|_{V \text{ costante}}$$

$$c_p = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Big|_{p \text{ costante}}$$

Ci aspettiamo una differenza tra le due quantità perché a p costante (al contrario che a V costante) parte del calore dQ è usato perché il gas si espanda, compiendo lavoro $p dV$. Questa porzione di energia non contribuisce ad aumentare dT .

Espansione libera del gas ideale



Un gas è in un contenitore di volume V a contatto con un fluido a temperatura T . Aprendo una valvola, il gas è libero di espandersi fino a occupare $V' = V + \Delta V$ (senza incontrare resistenza). Il sistema è isolato.

Quindi $Q_{gas} + Q_{fluido} = 0$ e $\Delta U_{gas} + \Delta U_{fluido} = 0$.

(Notiamo che il fluido non fa o subisce lavoro perché V_{fluido} non cambia. Il gas non fa o subisce lavoro perché l'espansione è libera $p_{vuoto} = 0 \implies p dV = 0$.)

Si osserva che, dopo l'espansione, T_{fluido} non è cambiata. Il fluido è nello stato di partenza, quindi $\Delta U_{fluido} = 0 \implies \Delta U_{gas} = 0$. Ma in questo processo, V_{gas} è cambiato e anche p_{gas} è cambiato. Solo T_{gas} non è cambiata. Quindi U_{gas} può dipendere **solo** da T .

□

Relazione di Meyer

$c_V = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Big|_{V \text{ costante}}, \quad c_p = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Big|_{p \text{ costante}}$ sono legate dalla relazione:

$$c_V = c_p - R$$

Lezione 37

Dimostrazione

Abbiamo definito $c_p = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} \neq c_V \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Big|_{V \text{ cost}}$

Vogliamo determinare la relazione tra c_p e c_V .

Sappiamo che $\frac{dU}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} = \frac{dU}{dT} \Big|_{V \text{ cost}}$ perché funzione di stato.

Sappiamo anche che $dU = dQ - dW$, $dW = pdV$ (il primo principio per variazioni piccole), notiamo che $\frac{dW}{dT} \Big|_{V \text{ cost}} = 0 \neq \frac{dW}{dT} \Big|_{p \text{ cost}}$.

Infine ricordo che $pV = nRT \implies \frac{d(pV)}{dT} = nR$.

Usando queste formule, troviamo che

$$nc_V = \frac{dQ}{dT} \Big|_{V \text{ cost}} = \frac{dU + dW}{dT} \Big|_{V \text{ cost}} = \frac{dU}{dT} \Big|_{V \text{ cost}} + \underbrace{\frac{dW}{dT}}_{=0} = \frac{dU}{dT}$$

$$\implies dU = nc_V dT \implies \Delta U = nc_V \Delta T$$

$nc_V = \frac{dU}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} = \frac{dQ - dW}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} =$ (infatti $nc_V = \frac{dU}{dT}$ vale per qualsiasi trasformazione, in particolare per quelle a p costante)

$$= \frac{dQ}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} - \frac{dW}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} = nc_p - \frac{pdV}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} =$$

Osservo che posso dire $\frac{d}{dT}(pV) \Big|_{p \text{ cost}} = \frac{pdV}{dT} \Big|_{p \text{ cost}}$

$$= nc_p - \frac{d(pV)}{dT} \Big|_{p \text{ cost}} = nc_p - nR = nc_V$$

$$\implies c_p = c_V + R$$

□

Rapporto di compressione

Se conosciamo uno tra c_v e c_p possiamo trovare l'altro. Di solito si considera $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, che è il *rapporto di compressione*.

Nota

γ è un numero puro e si misura

$$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{per gas monoatomici} \\ \frac{7}{5} & \text{per gas biatomici} \end{cases}$$

□

La funzione di stato entalpia

$$H = U + pV$$

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d(pV)}{dT} = nc_V + nR = n(c_V + R) = nc_p$$

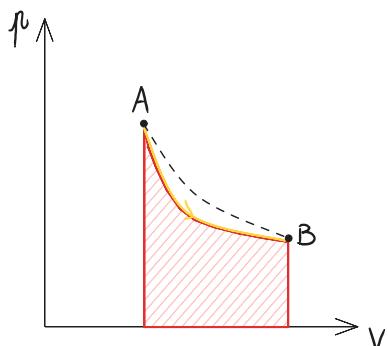
$$dH = nc_p dT \quad \Delta H = nc_p \Delta T$$

La variazione di entalpia sta alla variazione di temperatura a pressione costante, come la variazione di energia interna sta alla variazione di temperatura a volume costante.

□

Le trasformazioni (reversibili e non) dei gas ideali

Isoterma $dT = 0$



Se la trasformazione è irreversibile, non conosco $p(V)$. Se è reversibile, vale $pV = nRT \implies p = \frac{nRT}{V}$ (è un'iperbole sul piano di Clapeyron).

In generale (anche se non reversibile) U dipende solo da T , quindi $dT = 0 \implies dU = 0 \implies dQ = dW$. Posso scriverlo anche come $T_B = T_A \implies U_B = U_A \implies Q_{AB} = W_{AB}$.

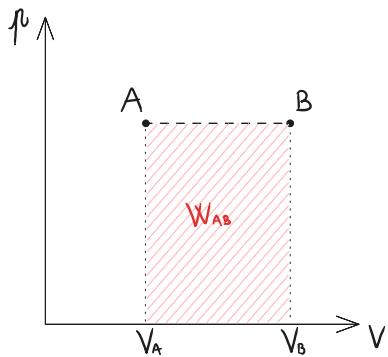
Se è reversibile, possiamo calcolare

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \text{(uso che è reversibile)} \\ &= \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = \text{(uso che } T \text{ è costante)} \\ &= nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \ln(V) \Big|_{V_A}^{V_B} = nRT(\ln V_B - \ln V_A) = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (\text{che è più}} \\ &\text{corretto fisicamente, perché non ha senso fare una funzione}} \\ &\text{trascendente su dimensioni fisiche. Facendo il rapporto si fa su}} \\ &\text{numeri puri)} \end{aligned}$$

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

□

Isobara $dp = 0$



È una linea orizzontale sul piano di Clapeyron sia se è reversibile, sia se è irreversibile.

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = p(V_B - V_A)$$

Se è reversibile, trovo T in funzione di V : $pV = nRT \implies T = \frac{p}{nR}V$.

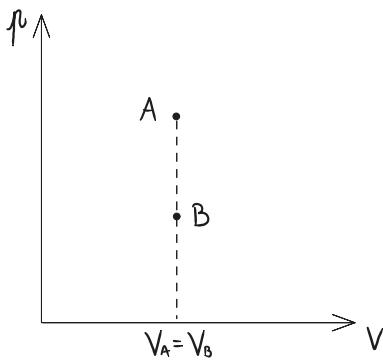
Quanto vale ΔU ?

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_A^B dU = \int_{T_A}^{T_B} n c_V dT = \underset{\text{rever.}}{n c_V} \int_{V_A}^{V_B} \frac{p}{nR} dV = \frac{c_V p}{R} \int_{V_A}^{V_B} dV = \frac{c_V p}{R} (V_B - V_A) \\ &\frac{c_V p}{R} (V_B - V_A) = \Delta U \end{aligned}$$

(vale solo se è reversibile)

□

Isocora $dV = 0$



In generale $dW = pdV = 0$ e

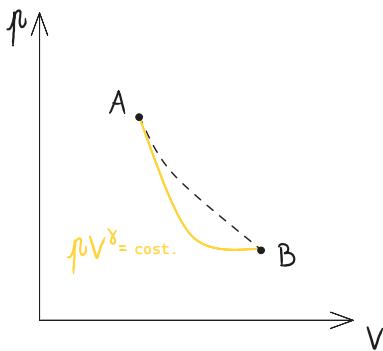
$$U_B - U_A = Q_{AB}$$

che è uguale a dire $\frac{dU}{dT} = \frac{dQ}{dT} \Big|_{V \text{ cost}} = nc_V$, di conseguenza
 $U_B - U_A = Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$.

Se è reversibile $pV = nRT$ e quindi $T = \frac{V}{nR}p$, $\Delta T = \frac{V}{nR}\Delta p$.

□

Adiabatica $dQ = 0$



In generale $dU = -dW$, $U_B - U_A = -W_{AB}$.

In generale, non conosco $p(V)$. Notiamo che p , V , T cambiano tutte e tre!

$$dU = nc_VdT = -dW = -pdV$$

$$nc_VdT = -pdV$$

Se inoltre è reversibile $p = \frac{nRT}{V}$, quindi:

$$\cancel{nc_VdT} = \cancel{\frac{nRT}{V}} dV$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V} \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_B}{T_A} = -\frac{R}{c_V} \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Ricordo che $R = c_p - c_V$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_B}{T_A} = -\left(\frac{c_p}{c_V} - \underbrace{\frac{c_V}{c_V}}_{=1}\right) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\implies \ln \frac{T_B}{T_A} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\implies \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{-(\gamma-1)}$$

In conclusione, per un'adiabatica reversibile:

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \iff V_B^{\gamma-1} T_B = V_A^{\gamma-1} T_A$$

cioè, la combinazione $V^{\gamma-1}T$ rimane costante.

Siccome $T = \frac{pV}{nR}$, anche la combinazione $V^{\gamma-1}pV$ è costante $\iff V^\gamma p$ è costante (sul piano di Clapeyron assomiglia a un'iperbole più pendente).

Per trovare il lavoro, se è reversibile, si può usare

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV$$

$$pV^\gamma = p_A V_A^\gamma \implies p = \frac{p_A V_A^\gamma}{V^\gamma} \equiv p(V)$$

$$W_{AB} = p_A V_A^\gamma \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^\gamma} = p_A V_A^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_A}^{V_B} \quad \star\star$$

Però spesso è più semplice osservare che $dQ = 0 \implies dU = -dW$

$$W_{AB} = -(U_B - U_A) = nc_V(T_A - T_B) \quad \star$$

(che vale sempre).

Esercizio

Se è reversibile, $\star \iff \star\star$.

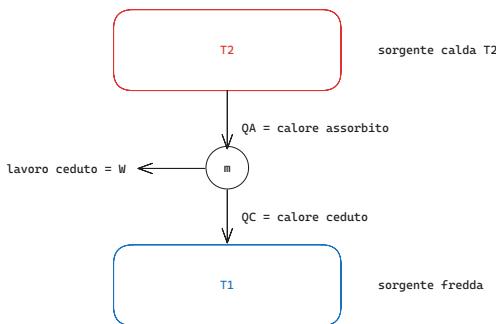
□

Mettendo insieme queste trasformazioni, si possono costruire i cicli termici e le macchine termiche.

Macchine termiche

Definizione

Le macchine termiche sono oggetti che compiono un ciclo termico, estraendo calore da una sorgente calda, cedendone una parte a una sorgente fredda e producendo lavoro.



Idealmente vogliamo che il rapporto tra lavoro prodotto W diviso calore assorbito Q_A sia grande

$$\eta = \frac{W}{Q_A}$$

si chiama *rendimento*.

È chiaro che $\eta \geq 0$ ($W \geq 0$, $Q_A > 0$, $Q_C \leq 0$).

Inoltre in un ciclo $\Delta U = 0$, quindi $W = Q_{tot} = Q_A + Q_C = Q_A - |Q_C|$.

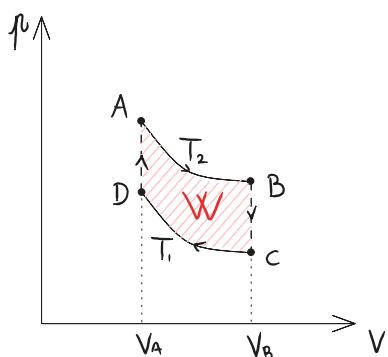
$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \leq 1$$

$\Rightarrow 0 \leq \eta \leq 1$ per il primo principio.

Lezione 38

Cicli termici

Ciclo di Stirling



AB è un'espansione isoterma reversibile.

BC è un raffreddamento isocoro.

CD è una compressione isoterma reversibile fino a $V_B = V_A$

DA riscaldamento isocoro.

$$T_A = T_B = T_2, \quad T_C = T_D = T_1, \quad T_1 < T_2.$$

$$V_B = V_C = V_2, \quad V_D = V_A = V_1, \quad V_1 < V_2$$

Voglio trovare il rendimento $\eta = \frac{W}{Q_A}$.

Per AB, BC, CD, DA calcoliamo W_{AB} e Q_{AB} , W_{BC} e Q_{BC} , W_{CD} e Q_{CD} ,

W_{DA} e Q_{DA} .

AB: $U_B = U_A$, $Q_{AB} = W_{AB}$

$$Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_2}{V} dV = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \text{ (il logaritmo ha argomento positivo)}$$

$W_{AB} > \Rightarrow$ il gas compie lavoro.

$Q_{AB} > 0 \Rightarrow$ il gas assorbe calore.

BC: $dV = 0 \Rightarrow W_{BC} = 0 \Rightarrow U_C - U_B = Q_{BC}$

$$Q_{BC} = U_C - U_B = nc_V(T_C - T_B) = nc_V(T_1 - T_2) < 0 \text{ (infatti } T_1 < T_2\text{)}.$$

In BC non c'è lavoro e Q_{BC} è ceduto.

CD: $U_C = U_D$ $Q_{CD} = W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} p dV$

$$Q_{CD} = W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} < 0$$

DA: $dV = 0 \Rightarrow W_{DA} = 0$

$$Q_{DA} = U_A - U_D = nc_V(T_A - T_D) = nc_V(T_2 - T_1) > 0$$

$W_{DA} = 0$ non c'è lavoro; $Q_{DA} > 0$ calore è assorbito.

$$\begin{aligned} \text{Il lavoro totale è } W &= W_{AB} + W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = \\ &= nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \left(nR \ln \frac{V_2}{V_1} \right) (T_2 - T_1) > 0 \end{aligned}$$

Il calore assorbito è

$$Q_{assor.} = Q_{AB} + Q_{DA} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} + nc_V(T_2 - T_1) > 0$$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{\left(nR \ln \frac{V_2}{V_1} \right) (T_2 - T_1)}{nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} + nc_V(T_2 - T_1)}$$

Risultato per il ciclo di Stirling non reversibile.

Osservazione

Il ciclo non è reversibile perché il primo corpo viene improvvisamente a contatto con uno di temperatura molto più alta. La trasformazione quindi non è reversibile, in particolare non è quasi statica.

□

Osservazione (Ciclo di Stirling con "rigeneratore")

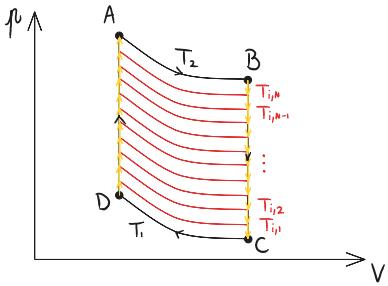
Osserviamo che il calore ceduto in BC è uguale e opposto a quello necessario per andare da D ad A.

Se potessi "riutilizzare" Q_{BC} non avrei bisogno di fornire Q_{DA} . Se così fosse:

$$Q_A = Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{\left(nR \ln \frac{V_2}{V_1} \right) (T_2 - T_1)}{nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} T_2}$$

che è maggiore di quanto trovato prima.

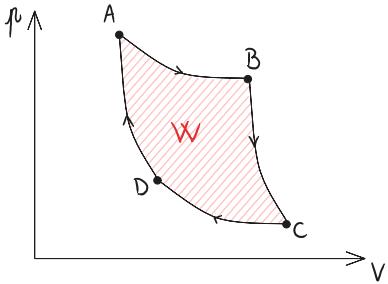


Considero N isoterme $T_1 < T_{i,1} < T_{i,2} < \dots < T_{i,N} < T_2$. Invece di raffreddare da T_2 a T_1 , lo raffreddo con una sorgente intermedia a $T_{i,N}$. Poi vado da $T_{i,N}$ a $T_{i,N-1}$, e così via.

Nella trasformazione DA uso le stesse sorgenti a $T_{i,1}$, $T_{i,2}$ in ordine inverso, fino a tornare a T_2 .

□

Ciclo di Carnot



AB isoterma reversibile.

BC adiabatica reversibile.

CD isoterma reversibile.

DA adiabatica reversibile.

Come prima, vogliamo trovare η .

$$\underline{AB}: U_B = U_A, \quad Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\underline{BC}: Q_{BC} = 0, \quad U_C - U_B = -W_{BC}$$

$$W_{BC} = U_B - U_C = nc_V(T_B - T_C)$$

$$\underline{CA}: U_D = U_C, \quad Q_{CD} = W_{CD}$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

$$\underline{DA}: Q_{DA} = 0, \quad U_A - U_D = -W_{DA}$$

$$W_{DA} = U_D - U_A = nc_V(T_D - T_A)$$

Le temperature non sono tutte indipendenti. $T_A = T_B = T_2$, $T_C = T_D = T_1$.

Anche i volumi non sono indipendenti:

$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$ perché sono legati da trasformazioni adiabatiche reversibili.

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}, \quad T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_D}{V_A} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A}$$

$$\Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

Ricapitolando:

$$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$Q_{BC} = 0, \quad W_{BC} = nc_V(T_2 - T_1) > 0$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = -nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} < 0$$

$$Q_{DA} = 0, \quad W_{DA} = nc_V(T_1 - T_2) < 0$$

Il lavoro totale è $W = W_{AB} + \cancel{W_{BC}} + W_{CD} + \cancel{W_{DA}} =$ (si cancellano perché sono opposti)

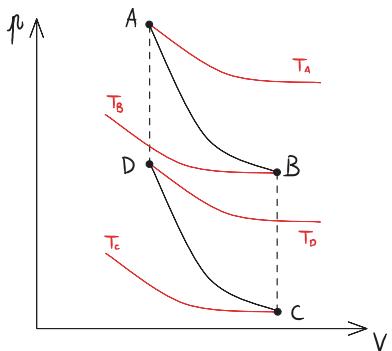
$$= W_{AB} + W_{CD} = nR(T_2 - T_1) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Il calore assorbito è $Q_A = Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$

$$\eta = \frac{(nR \ln \frac{V_B}{V_A})(T_2 - T_1)}{nR \ln \frac{V_B}{V_A} T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

□

Ciclo di Otto



AB adiabatica reversibile;

BC isocora irreversibile;

CD adiabatica reversibile;

DA isocora irreversibile.

AB: $Q_{AB} = 0, \quad W_{AB} = U_A - U_B = nc_V(T_A - T_B)$.

BC: $W_{BC} = 0, \quad Q_{BC} = U_C - U_B = nc_V(T_C - T_B)$.

CD: $Q_{CD} = 0, \quad W_{CD} = U_C - U_D = nc_V(T_C - T_D)$.

DA: $W_{DA} = 0, \quad Q_{DA} = U_A - U_D = nc_V(T_A - T_D)$.

Calore assorbito $Q_A = Q_{DA} > 0$

Calore ceduto: $Q_C = Q_{BC}$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = \frac{\frac{n c v |T_C - T_B|}{n e v (T_A - T_D)}}{1} = 1 - \frac{|T_B - T_C|}{T_A - T_D}$$

Usando che $TV^{\gamma-1}$ è costante nell'adiabatica

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \text{ (esercizio per casa in sostanza)}$$

Osservazione in 2 secondi da sistemare

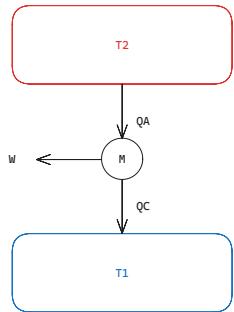
Al contrario del ciclo di Stirling, nel ciclo di Otto non si può utilizzare il rigeneratore perché il salto di temperatura tra le trasformazioni è diverso. Il calore che si riuscirebbe a salvare durante la prima isocora, non sarebbe sufficiente per la seconda.

□

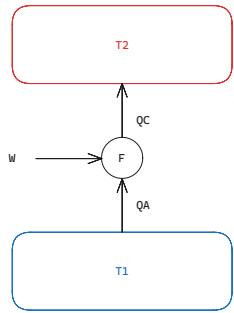
Lezione 39

Macchine termiche e frigorifere

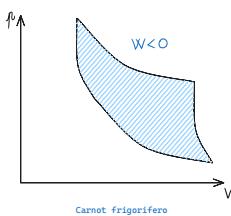
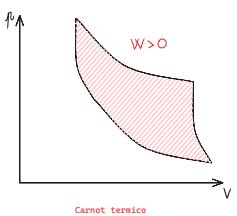
Una macchina termica assorbe $Q_A > 0$ dalla sorgente calda, produce lavoro $W > 0$ e cede parte del calore alla sorgente fredda ($T_1 < T_2$) .



Una macchina frigorifera estrae Q_A dalla sorgente fredda (raffreddandola) usando lavoro $W < 0$ e cede Q_C alla sorgente calda.



Se abbiamo un ciclo termico reversibile, possiamo costruire un ciclo frigorifero procedendo lungo il ciclo termico in ordine inverso.



Per i cicli termici è importante il rendimento η : $W = \eta Q_A$.

Per un ciclo frigorifero si definisce l'efficienza

$$\xi : Q_A = \xi |W|$$

.

Nel caso di Carnot e Stirling (reversibili), usando i risultati già trovati, abbiamo che $\xi = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$.

Se $T_2 \approx T_1$, l'efficienza è molto grande!

□

Secondo principio della termodinamica

Ci sono due enunciati equivalenti.

Enunciato di Clausius

È impossibile realizzare un processo termodinamico il cui **solo** risultato sia il trasferimento di calore da un corpo freddo a un corpo caldo.

□

Enunciato di Kelvin-Plank

È impossibile realizzare un processo termodinamico il cui **solo** risultato sia la produzione di lavoro da una sola sorgente a temperatura costante.

□

Logica (excursus)

Equivalenti: $A \implies B, B \implies A$

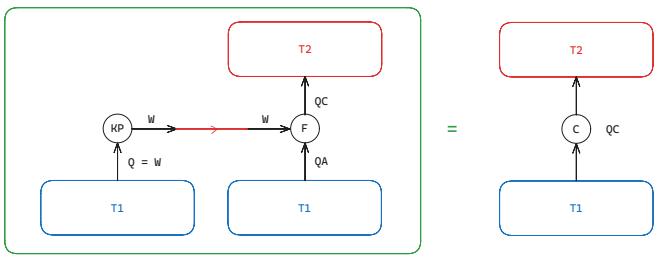
Ricordiamo che: $A \implies B \iff \bar{B} \implies \bar{A}$

□

Dimostrazione equivalenza

$\neg \text{Kelvin-Plank} \implies \neg \text{Clausius}$

Dimostriamo che se Kelvin-Plank è falso, allora Clausius è falso.

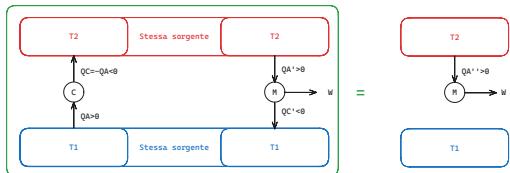


Se Kelvin-Plank è falso, posso usare il lavoro prodotto dalla sorgente a T_1 per alimentare una macchina frigorifera tra T_1 e T_2 . In totale l'unico risultato è trasferire calore tra T_1 e T_2 , che viola Clausius.

□

$\neg \text{Clausius} \implies \neg \text{Kelvin-Plank}$

Dimostriamo che se Clausius è falso, allora Kelvin-Plank è falso.

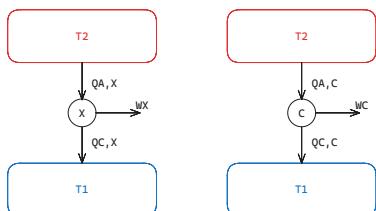


Scelgo $Q_A + Q'_C = 0$. Ottengo $Q''_A = Q_C + Q'_A$.

□

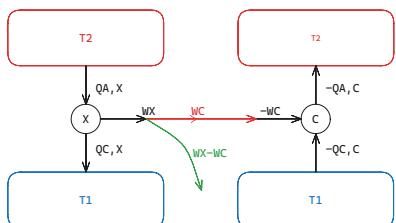
Teorema ci Carnot

Sia C una macchia di Carnot (reversibile) e X un'altra macchina (non necessariamente reversibile).



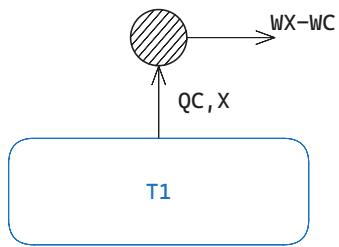
Vale η_X, η_C : $W_X = \eta_X Q_{A,X}$, $W_C = \eta_C Q_{A,C}$.

Siccome la macchia di Carnot è reversibile, posso trasformarla in una macchina frigorifera.



Assumiamo che sia $Q_{A,X} = Q_{A,C}$, rimane una macchina fatta così:

T2



Ma per il secondo principio (Kelvin-Plank) deve essere $W_X - W_C \leq 0$.

Quindi $\frac{W_X}{Q_{A,X}} - \frac{W_C}{Q_{A,C}} \leq 0$, ma per ipotesi $Q_{A,X} = Q_{A,C}$. Posso scrivere
$$\frac{W_X}{Q_{A,X}} - \frac{W_C}{Q_{A,C}} \leq 0$$
$$\implies \eta_X \leq \eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

□

Enunciato

Data una qualsiasi macchina X , che opera tra T_1 e T_2 ,

$$\eta_X \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

□

Osservazione

Mi chiedo quando vale l'uguaglianza.

Se anche X è reversibile, posso ripetere la dimostrazione scambiando il ruolo di X e C .

Trovo $\eta_C \leq \eta_X \implies \eta_C = \eta_X$.

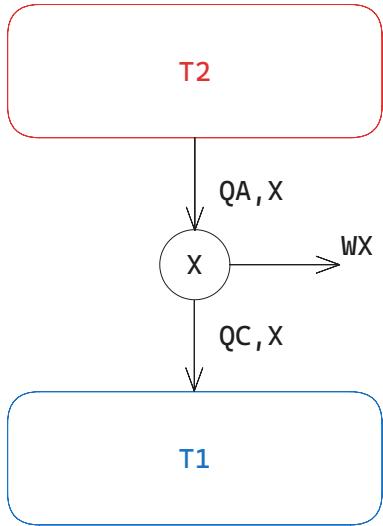
Tutte le macchine reversibili, che operano tra T_1 e T_2 , hanno rendimento

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

□

Teorema di Clausius

Ricordo il teorema di Carnot:

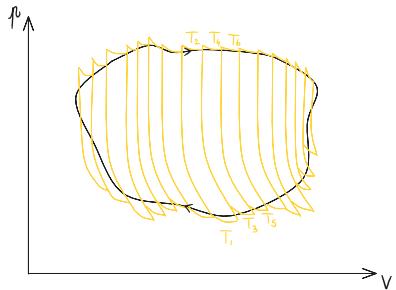


$$\eta_X = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \leq \eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}, \text{ quindi } 1 + \frac{Q_C}{Q_A} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \implies \frac{Q_C}{Q_A} + \frac{T_1}{T_2} \leq 0.$$

Chiamiamo $Q_A = Q_2$ (il calore scambiato con T_2) e $Q_C = Q_1$. Arriviamo quindi a $\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{T_1}{T_2} \leq 0 \implies \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ (e l'uguaglianza vale se è reversibile).

Questo vale per un ciclo che opera tra T_1 e T_2 .

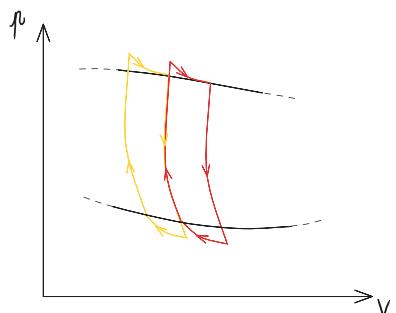
Vogliamo estendere questo risultato a un ciclo generico.



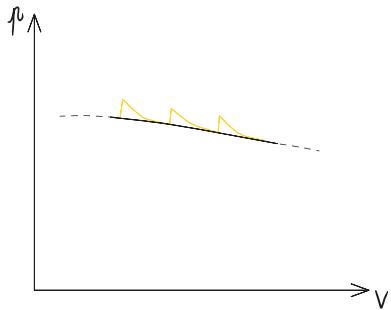
Dato un ciclo generico (reversibile o no) lo affettiamo con tanti cicli di Carnot.

Ci sono tante isoterme che operano tra T_1 e T_2 , T_3 e T_4 , ...; in generale tra T_{2j+1} e T_{2j+2} , $j = 0, \dots, N-1$ (per N "fette") e scambiano Q_{2j+1} e Q_{2j+2} calore.

Se il numero di "fette" $N \rightarrow \infty$, questa è una buona approssimazione del ciclo di partenza. Facciamo uno zoom:



Il risultato delle adiabatiche si cancella e approssimo il ciclo



Abbiamo approssimato il ciclo con N cicli, ciascuno che soddisfa
 $\frac{Q_{2j+i}}{T_{2j+1}} + \frac{Q_{2j+2}}{T_{2j+2}} \leq 0, \quad j = 0, \dots, N-1$ (uguaglianza se è reversibile)
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{2N} \frac{Q_k}{T_k} \leq 0$

Nel limite $N \rightarrow \infty$, prendiamo intervalli di T piccoli, e segmenti di isoterma piccoli (così che anche il calore scambiato sia piccolo):
 $Q \rightarrow dQ, \quad T_k \rightarrow T$ che cambia in maniera continua.

$\sum_{k=1}^{2N} \frac{Q_k}{T_k} \rightarrow \int_{T_{ciclo}} \frac{dQ}{T} < 0$ (è uguale se il ciclo è reversibile).

Enunciato

$$\oint_{T_{ciclo}} \frac{dQ}{T} \leq 0$$

(sono uguali se il ciclo è reversibile).

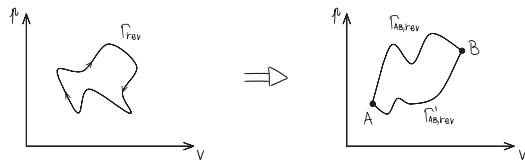
□

Lezione 40

Entropia

Abbiamo visto il teorema di Clausius, che dice:

$$\oint_{T_{rev}} \frac{dQ}{T} = 0, \quad \oint_{T_{irrev}} \frac{dQ}{T} < 0.$$

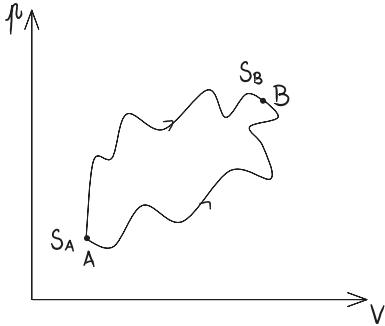


Date due trasformazioni reversibili $\Gamma_{AB,rev}, \Gamma'_{AB,rev}$, posso invertirne una e comporle ottenendo " $\Gamma_{ciclo,rev} = \Gamma_{AB,rev} - \Gamma'_{AB,rev}$ " (tra virgolette perché non è notazione matematica).

$0 = \oint_{T_{ciclo,rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} - \int_{\Gamma'_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} \Rightarrow \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma'_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} \Rightarrow \int_{\Gamma_{rev,AB}} \frac{dQ}{T}$ non dipende da Γ (purché sia reversibile!) ma solo dagli stati A, B .

Possiamo quindi introdurre una funzione di stato, l'*entropia S*, data da

$$S_B - S_A = \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T}$$



(questa definizione è a meno di una costante additiva).

□

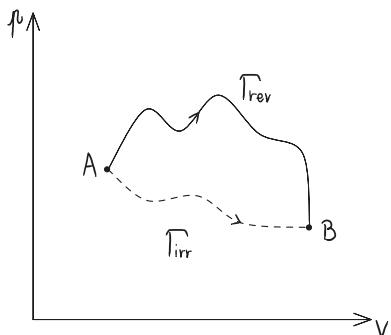
Ricapitolando, dai Principi abbiamo:

- **Principio zero:** Equilibrio termico $\Rightarrow T$
- **Primo principio:** $U_B - U_A = Q_{AB} - W_{AB} \Rightarrow U$
- **Secondo principio:** $\oint_{T_{rev}} \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow S, S_B - S_A = \int_{\Gamma_{rev,AB}} \frac{dQ}{T}$

Principio di aumento dell'entropia

In realtà è equivalente al secondo principio.

Consideriamo $\Gamma_{AB,rev}$, $\Gamma_{AB,irr}$



Posso costruire un ciclo irreversibile $\Gamma_{ciclo,irr} = \Gamma_{AB,irr} - \Gamma_{AB,rev}$, ho quindi $\oint_{\Gamma_{ciclo,irr}} \frac{dQ}{T} < 0$ (per Clausius)

$$0 > \oint_{\Gamma_{ciclo,irr}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{AB,irr}} \frac{dQ}{T} - \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{AB,irr}} \frac{dQ}{T} - (S_B - S_A)$$

$$\text{Quindi } S_B - S_A > \int_{\Gamma_{AB,irr}} \frac{dQ}{T}.$$

□

Se $\Gamma_{AB,irr}$ è un'adiabatica (irreversibile) $dQ = 0$. Allora $S_B - S_A > 0$ se consideriamo un sistema isolato (perché un sistema isolato non può scambiare calore).

Se A e B sono stati collegati da una trasformazione adiabatica irreversibile, $S_B - S_A > 0$ (se reversibile, $S_B = S_A$).

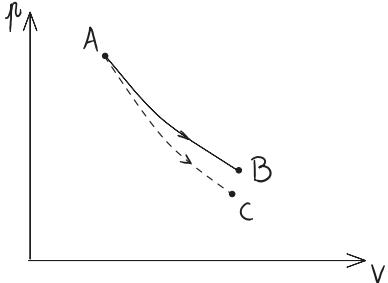
Sia $\Gamma_{AB,adiab.}$ un'adiabatica reversibile:

$$S_B - S_A = \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{AB,adiab.}} \frac{dQ}{T} = 0 \text{ uso che } dQ = 0.$$

Sia $\Gamma_{AC,irr}$ un'adiabatica irreversibile:

$$S_C - S_A = \int_{\Gamma_{AC,irr}} \frac{dQ}{T} > 0 \text{ per quanto dimostrato.}$$

Partendo da uno stato A , e facendo un'adiabatica irreversibile, finisco in uno stato C che non potrò mai raggiungere da A con un'adiabatica reversibile.



□

Perché è importante che $\Delta S > 0$ in un sistema isolato? (o anche $dS > 0$) (per trasformazioni irreversibili)

Perché l'universo è un sistema isolato.

Esempi di calcolo di ΔS

Esempio

Due serbatoi termici hanno temperature T_1 , T_2 ($T_2 > T_1$) e scambiano calore Q . **Calcolare ΔS per ciascun serbatoio.**

$$\Delta S^{(1)} = \int_{\Gamma_{rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{isot,rev} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_1} \int_{iso,rev} dQ = \frac{Q}{T_1} > 0$$

$$\Delta S^{(2)} = \int_{rev} \frac{dQ}{T} = -\frac{Q}{T_2} < 0$$

Il sistema ha $\Delta S^{(tot)} = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)} = Q \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$.

È un processo irreversibile, quindi è giusto che $\Delta S^{(tot)} > 0$.

È possibile scambiare calore Q tra una sorgente a T_2 e una sorgente a T_1 senza far aumentare l'entropia totale?

Posso mediare lo scambio di Calore con una macchina reversibile. In quel caso una parte del calore assorbito Q_A viene trasformato in lavoro $W = \eta_C Q_A$.

Q_A assorbito, $W = \eta_C Q_A$, $1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = \eta_C$ (notare che $Q_A - Q_C = \eta_C Q_A \implies |Q_C| = Q_A - \eta_C Q_A = Q_A - W$).

Nel caso di Carnot, $\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$, quindi $W = \frac{T_2 - T_1}{T_2} Q_A$, $|Q_C| = (1 - \eta_C) Q_A = \frac{T_1}{T_2} Q_A$.

Nel caso irreversibile, visto sopra, abbiamo trovato

$$\Delta S^{(irr)} = Q \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = Q \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

Confrontando con il ciclo di Carnot, abbiamo che $\Delta S^{(irr)} = \frac{W}{T_1}$ (se identifichiamo $Q^{(irr)} = Q_A^{(Carnot)}$).

(Alternativamente: $\Delta S^{(irr)} = \frac{W}{T_2}$, se identifichiamo $Q^{(irr)} = |Q_C|^{(Carnot)}$).

L'aumento di entropia segnala che abbiamo sprecato un lavoro W in un processo irreversibile.

$$W = \Delta S T_{fredda}$$

Questo è il lavoro che avremmo prodotto se avessimo assorbito la stessa quantità di calore da T_{calda} e l'avessimo usata per alimentare una macchina di Carnot.

L'entropia è una misura di quanto poco ottimale è un processo termodinamico.

□

Esempio

Due corpi di capacità termica $C_1 = m_1 c_1$, $C_2 = m_2 c_2$ a temperatura T_1 , T_2 ($T_1 < T_2$) sono messi a contatto. Raggiungono $T_e = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$, $T_1 < T_e < T_2$.

Trovare le variazioni $\Delta S^{(1)}$ e $\Delta S^{(2)}$.

$$\Delta S^{(1)} = \int_{rev} \frac{dQ}{T} = \int_{rev} \frac{C_1 dT}{T} = C_1 \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_1 \ln \frac{T_e}{T_1} > 0$$
$$\Delta S^{(2)} = \int_{rev} \frac{dQ}{T} = C_2 \ln \frac{T_e}{T_2} < 0$$

In totale, abbiamo:

$$\Delta S^{(tot)} = C_1 \ln \frac{T_e}{T_1} + C_2 \ln \frac{T_e}{T_2} = \ln \left(\frac{T_e}{T_1} \right)^{C_1} + \ln \left(\frac{T_e}{T_2} \right)^{C_2} = \ln \frac{T_e^{C_1 + C_2}}{T_1^{C_1} T_2^{C_2}} > 0.$$

Sappiamo che è positiva perché il processo è irreversibile.

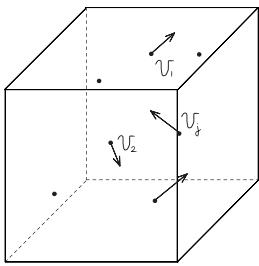
□

Lezione 41

Teoria cinetica dei gas

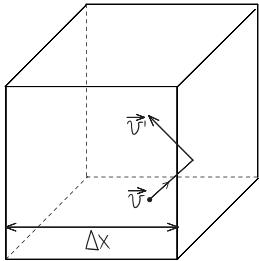
Vogliamo dare un'interpretazione "microscopica" a pressione, temperatura, entropia, energia interna, etc.

Pressione



La pressione è data dall'urto delle molecole con le pareti del contenitore.

Consideriamo l'urto di una singola molecola con la parete destra.



Se l'urto è elastico, abbiamo prima $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e dopo $\vec{v}' = (-v_x, v_y, v_z)$. L'impulso assorbito dalla parete destra è $\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v} = -2mv_x \vec{u}_x$.

La forza esercitata da una molecola sulla parete è, in modulo,

$$||\vec{F}_x|| = \frac{||\Delta \vec{p}_x||}{\Delta t} \text{ in media.}$$

Δt è il tempo che occorre tra una collisione sulla parete destra e la collisione successiva.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x}, \text{ quindi } ||\vec{F}_x|| = \frac{2mv_x^2}{2\frac{\Delta x}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{\Delta x}.$$

La pressione (sulla parete destra) è data dalla forza $||\vec{F}_x||$ diviso la superficie della parete $S = \Delta y \cdot \Delta z$.

Quindi $p_{\text{1 particella}} = \frac{mv_x^2}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y \cdot \Delta z} = \frac{mv_x^2}{V}$ è il contributo dovuto all'urto di una particella.

Se considero $N = nN_A$ molecole, ho che

$$p_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N \frac{mv_{x,j}^2}{V} = \frac{m}{V} N \sum_{j=1}^N \frac{v_{x,j}^2}{N} = \frac{m}{V} N \overline{(v_x^2)} \text{ (con } \overline{(v_x^2)}) .$$

Il membro di sinistra è completamente generale, ma il membro di destra dipende ancora da v_x .

Per semplificare la formula, notiamo che

$$\overline{E_k} = \sum_{j=1}^N \frac{\frac{1}{2}m||\vec{v}_j||^2}{N} = \frac{1}{2}m \sum_{j=1}^N \frac{v_{x,j}^2 + v_{y,j}^2 + v_{z,j}^2}{N}$$

Mi aspetto che, **in media**, la velocità lungo \vec{u}_x , \vec{u}_y , \vec{u}_z abbia la stessa distribuzione (si chiama *Isotropia*, cioè non c'è una direzione privilegiata).

$$\text{In formula, } \sum_{j=1}^N \frac{v_{x,j}^2}{N} = \sum_{j=1}^N \frac{v_{y,j}^2}{N} = \sum_{j=1}^N \frac{v_{z,j}^2}{N}$$

$$\implies \overline{E_k} = \frac{1}{2}m \cdot 3 \sum_{j=1}^N \frac{\frac{v_{x,j}^2}{N}}{N} = \frac{3}{2}m\overline{(v_x^2)}$$

$$\implies \overline{(v_x^2)} = \frac{2}{3}\frac{1}{m}\overline{E_k}$$

Ottengo che

$$p_{tot} = \frac{m}{V} N \overline{(v_x^2)} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \overline{E_k}$$

$$\implies pV = \frac{2}{3} N \overline{E_k} = nRT$$

Confrontando le due formule

$$T = \frac{2}{3} \left(\frac{N_A}{R} \right) \overline{E_k} = \frac{2}{3} k_B^{-1} \overline{E_k}, \text{ con } k_B = \frac{R}{N_A} \quad (\text{chiamata costante di Boltzman, detta microscopica}).$$

Energia interna

L'energia interna dipende solo da T ed è l'energia totale del gas:

$$U = \sum_{j=1}^N E_k = N \overline{E_k}.$$

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

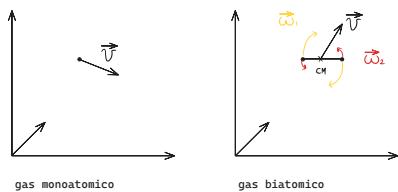
$$U = N \overline{E_k} = N \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

$$c_V = \cancel{\frac{1}{N} \frac{3}{2} N} \frac{R}{N_A} = \frac{3}{2} R$$

\implies il calore specifico dei gas monoatomici!

$$c_p = c_V + R = \frac{5}{2} R; \quad \frac{c_V}{c_p} = \frac{3}{5}.$$

Implicitamente, ho assunto che il gas fosse monoatomico!



$$E_{k,j} = \frac{1}{2}m(v_{x,j}^2 + v_{y,j}^2 + v_{z,j}^2) + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2, \quad I_1 = I_2 \text{ momento di inerzia.}$$

Per il teorema di equipartizione dell'energia ho che

$\frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$. Cioè l'energia è equipartita tra i diversi "gradi di libertà" (che significa "tutti i modi in cui qualcosa si può muovere").

Se ci sono g gradi di libertà $\overline{E_k} = \frac{g}{2}m\overline{(v_x^2)}$.

Riprendendo la formula $T = \frac{2}{3}k_B^{-1}\overline{E_k}$ vediamo che il gas monoatomico ha tre gradi di libertà.

In generale $T = \frac{2}{g} \frac{N_A}{R} \overline{E_k}$ (con $g = 5$ ho la formula per il gas biatomico).

Similmente, $c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{g}{2}R, \quad c_p = c_V + R = g + \frac{2}{2}R, \quad \frac{c_V}{c_p} = \frac{g}{g+2} = \begin{cases} \frac{3}{5} & g = 3 \\ \frac{5}{7} & g = 5 \end{cases}$

Interpretazione microscopica di S (entropia)

$$S = k \ln W$$

$k = k_B = \frac{R}{N_A}$, W è il numero di stati accessibili al sistema.

A parole dal prof

Fate finta di avere due molecole di gas e di discrertizzare la loro velocità: possono muoversi verso destra a una unità al secondo (multiplo di una velocità fondamentale), stessa cosa per le altre direzioni. Fate finta di avere 10 unità di energia; una delle due molecole è ferma, l'altra si muove a $\sqrt{10}$. Il numero di configurazioni possibili viene da tutti i modi in cui posso dividere l'energia tra le molecole e tutte le direzioni in cui si possono ruotare.

Questo viene da combinatoria e da Bernoulli, trovando quindi fattoriali e potenze. Ciò è accettabile, perché l'entropia deve aumentare linearmente, quindi W deve aumentare di molto visto che ne viene fatto il logaritmo.

In teoria dell'informazione, questo corrisponde alla quantità di informazione che si può mettere in un sistema. Il concetto di termodinamica è lo stesso di teoria dell'informazione.

Non c'è nulla di legato alle caratteristiche del sistema, dipende solo dal numero di stati accessibili da una certa energia, quindi solo da cose fondamentali. Perciò si trova in tanti contesti diversi.

□

Terzo principio della termodinamica

"Anche questo in realtà ha a che fare con la meccanica quantistica".

$$dS = \frac{dQ}{T} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

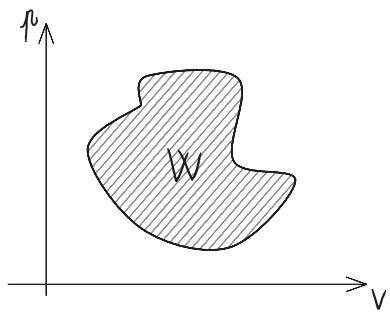
La quantità di calore che posso scambiare diminuisce allo scendere della temperatura.

A temperatura molto bassa il comportamento delle molecole è dato dalla meccanica quantistica, non classica.

□

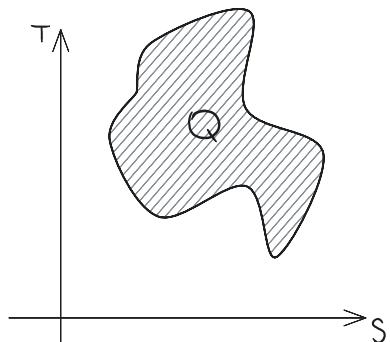
Il piano $T - S$

Abbiamo spesso usato il piano $p - V$.



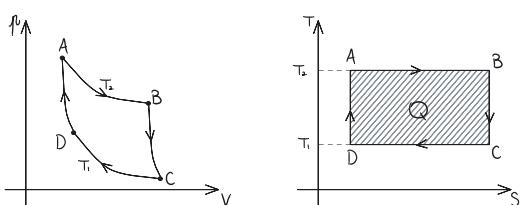
$$W = \oint_{\text{ciclo}} p dV.$$

È utile anche il piano $T - S$:



$$\oint T dS = \oint T \frac{dQ}{T} = Q_{\text{ciclo}}$$

Esempio (ciclo di Carnot)



$$\Delta U = 0 \text{ (nel ciclo)} \implies Q = W.$$

□

Esercizio

Due corpi di temperatura T_1, T_2 , e capacità termica C_1, C_2 sono posti a contatto finché raggiungono T_e .

$$T_e = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$$

Considerare il caso dove $C_2 = 2C_1$.

$$T_e = \frac{T_1 + 2T_2}{3}.$$

Calcolare la variazione di entropia totale.

$\Delta S^{(tot)} = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)} > 0$ (positiva perché il processo è irreversibile).

$$\Delta S^{(1)} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{C_1 dT}{T} = C_1 \ln \frac{T_e}{T_1} > 0$$

$$\Delta S^{(2)} = \int_{T_2}^{T_e} \frac{dQ}{T} = C_2 \ln \frac{T_e}{T_2} < 0$$

$$\Delta S^{(tot)} = C_1 \ln \frac{T_e}{T_1} + 2C_1 \ln \frac{T_e}{T_2} = C_1 \ln \frac{T_e^3}{T_1^2} = C_1 \ln \frac{\frac{(T_1+2T_2)^3}{27}}{T_1(T_2)^2} > 0$$

Attaccando i due oggetti a una macchina reversibile, la temperatura finale come sarà rispetto alla T_e trovata in precedenza?

Se avessi compiuto un processo reversibile, avrei trovato una temperatura finale $T'_e < T_e$ (perché parte del calore verrebbe disperso in lavoro) e avrei prodotto lavoro W .

Per trovare T'_e impongo che $\Delta S^{(tot)} = 0$

$0 = C_1 \ln \frac{T'_e}{T_1} + C_2 \ln \frac{T'_e}{T_2} = \ln \frac{T'_e^{C_1+C_2}}{T_1^{C_1} T_2^{C_2}}$ (matematicamente è corretto, ma fisicamente non si possono portare dentro costanti dimensionali)

Deve essere

$$\begin{aligned} \frac{T'_e^{C_1+C_2}}{T_1^{C_1} T_2^{C_2}} &= 1 \\ \implies T'_e &= (T_1^{C_1} T_2^{C_2})^{1/C_1+C_2} \end{aligned}$$

In questo caso ho $T'_e = (T_1^{C_1} T_2^{C_2})^{1/3C_1} = T_1^{1/3} T_2^{2/3}$ (invece di essere la media pesata è la media geometrica (si eleva alla potenza del peso, poi si moltiplica)).

Si dimostra che la media geometrica è sempre minore della media matematica/pesata, quindi $T'_e < T_e$.

□

Variazione di entropia per il gas ideale

In generale, $dS = \frac{dQ}{T}_{I\text{prin.}} = \frac{dU}{T} + \frac{dW}{T}$, quindi $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p dV}{T}$.

Per il gas ideale, $dU = nc_V dT$. Inoltre l'entropia si calcola lungo una trasformazione **reversibile**. Vale quindi $pV = nRT$.

$$dS = \frac{nc_V dT}{T} + \frac{nR}{V} \frac{dV}{T}$$

$$S_B - S_A = \int_A^B dS = \int_A^B \left(\frac{nc_V dT}{T} + \frac{nR dV}{V} \right) = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_V dT}{T} + \int_{V_A}^{V_B} \frac{nR dV}{V} = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta S^{(gas)} = nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Vale per qualsiasi trasformazione.

Da questa formula posso ottenerne altre:

$$pV = nRT \implies \frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B V_B}{p_A V_A}$$

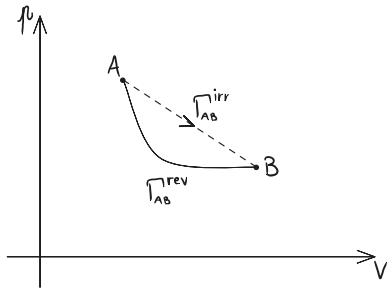
$$\Delta S = nc_V \ln \frac{p_B V_B}{p_A V_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} =$$

$$= nc_V \left(\ln \frac{p_B}{p_A} + \ln \frac{V_B}{V_A} \right) + nR \ln \frac{V_B}{V_A} =$$

$$\begin{aligned}
 &= n c_V \ln \frac{p_B}{p_A} + n c_p \ln \frac{V_B}{V_A} = \\
 &= n c_V \ln \frac{p_B}{p_A} + \frac{c_p}{c_V} \ln \frac{V_B}{V_A} = \\
 &= n c_V \ln \left(\frac{p_B V_B^{c_p/c_V}}{p_A V_A^{c_p/c_V}} \right)
 \end{aligned}$$

Così che, come deve essere, $\Delta S = 0$ per un'adiabatica reversibile

Esempio (domanda trabocchetto)



$$T_A = T_B$$

Sia Γ_{AB}^{irr} una trasformazione irreversibile isotermica.

Sia Γ_{AB}^{rev} una trasformazione reversibile isotermica.

Quanto vale la variazione di entropia del gas?

$\Delta S^{(gas)} = S_B - S_A$ perché è funzione di stato.

$$\Delta S^{(gas)} = \int_{A,rev}^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_{A,rev}^B dQ = \frac{Q_{AB}^{rev}}{T_A}$$

Tra l'altro, sappiamo che $U_B - U_A = 0$, quindi

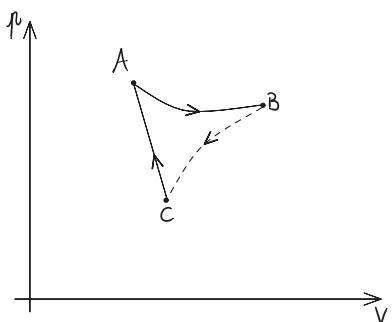
$$Q_{AB} = W_{AB} = \int_A^B p dV = \int_{A,rev}^B \frac{nRT_A}{V} dV = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$\Delta S^{(gas)} = \frac{nRT_A}{T_A} \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$ (che è esattamente la formula trovata sopra, valida per qualsiasi trasformazione).

Quello che cambia nella trasformazione reversibile da quella irreversibile è la variazione di entropia del sistema esterno.

Esempio (domanda trabocchetto)

Ho un ciclo irreversibile



Quanto vale $\Delta S^{(gas)}$ lungo il ciclo?

$$S_A - S_A = 0.$$

Siccome il gas è tornato allo stato iniziale, è tutto il resto che ha variato la sua entropia.

$$\Delta S^{(resto)} > 0.$$

□

Trasformazioni reversibili e irreversibili

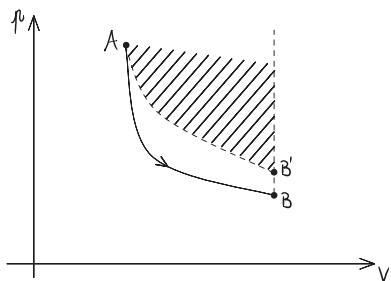
Una cosa da tenere a mente è che, a seconda del tipo di trasformazione che il sistema compie, possono cambiare gli stati ai quali posso accedere. Ad esempio, sappiamo che in un sistema isolato una trasformazione adiabatica (che non scambia calore con l'esterno)

$$\Delta S^{adiabatica} = \begin{cases} = 0 & \text{se reversibile} \\ > 0 & \text{se irreversibile} \end{cases}$$

Se il nostro sistema isolato è un gas perfetto, e parto da T_A, p_A, V_B , allora:

$$nc_V \ln \left(\frac{p_B V_B^{c_p/c_V}}{p_A V_A^{c_p/c_V}} \right) = \begin{cases} = 0 & \text{se reversibile} \\ > 0 & \text{se irreversibile} \end{cases}$$

Il caso *reversibile* è quello che conosciamo.



Nel caso *irreversibile* devo stare sopra la linea della trasformazione reversibile $B'_{(irr)} \neq B_{rev}$.

Questo spiega perché è non banale calcolare ΔS^{gas} per $\Gamma_{AB'}^{irr}$

$\Delta S_{AB'}^{gas} = \int_{A,rev}^{B'} \frac{dQ}{T} > 0$ perché $dQ = 0$ solo lungo l'adiabatica irreversibile, ma io ho bisogno di una trasformazione reversibile, che non sarà adiabatica!

□

Variazione entropia sorgente

Pensa di avere una sorgente a temperatura costante. Per calcolare la variazione dell'entropia della sorgente prendo una trasformazione reversibile per la sorgente, che porta dallo stato finale a quello iniziale.

Con un'adiabatica l'entropia non cambia, l'universo è nello stato in cui era prima.

Nel caso di prima, l'entropia del gas è maggiore di zero, mentre quella dell'universo è zero, perché non scambia calore, quindi è nello stesso stato di prima.

Lezione 43

Esercizi da esame

Termodinamica

Una macchina di rendimento $\eta = 0,25$ compie un ciclo ABC , così composto:

AB: espansione isoterma irreversibile $Q_{AB} = 1000J$;

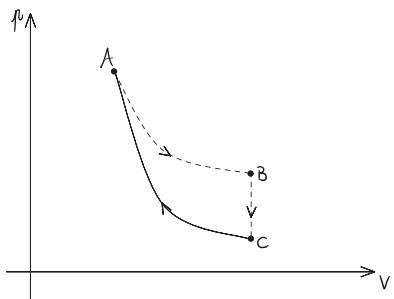
BC: raffreddamento isocoro irreversibile a contatto con un serbatoio con T_c ;

CA: compressione adiabatica reversibile.

$T_A = T_B = 400K$, $T_C = 200K$.

Il gas è monoatomico (quindi $c_V = \frac{3}{2}R$).

Trovare il lavoro, il numero di moli, $\frac{V_A}{V_C}$, le variazioni di entropia del gas e dell'ambiente in tutte le trasformazioni.



$Q_A = Q_{AB}$, infatti nell'adiabatica non cambia il calore, mentre in BC il calore è ceduto (diminuisce la temperatura).

$$W = \eta Q_A = 250J.$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \implies |Q_C| = \frac{3}{4}Q_A \quad (Q_C \text{ il calore ceduto})$$

$$Q_C = Q_{BC} = -750J$$

Per trovare il numero di moli n osservo che in BC $dV = 0 \implies dW = 0 \implies W_{BC} = 0 \implies Q_{BC} = U_C - U_B$.

$$Q_{BC} = U_C - U_B = ncv(T_C - T_B) = n\frac{3}{2}R(T_C - T_B)$$

$$n = \frac{2}{3} \frac{Q_{BC}}{R(T_C - T_B)} = 0,301mol$$

$$\Delta S_{BC}^{gas} = \int_{B,rev}^C \frac{dQ}{T} = \int_{\text{isocoro rev}} \frac{nc_v dT}{T} = nc_V \ln \frac{T_C}{T_B} = nc_V \ln \frac{1}{2} = -2,60 \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{BC}^{amb} = \int_{rev} \frac{dQ}{T_{serbatoio}} = \frac{1}{T_{serbatoio}} \int_{rev} dQ = \frac{-Q_{BC}}{T_C} = 3,75 \frac{J}{K}$$

$\Delta S_{CA}^{gas} = 0 = \Delta S_{CA}^{amb}$ perché la trasformazione non scambia calore ed è reversibile.

$$\Delta S_{AB}^{gas} = \Delta S_{ciclo}^{gas} - \Delta S_{BC}^{gas} - \Delta S_{CA}^{gas} = 0 - \Delta S_{BC}^{gas} - 0 = 2,60 \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{AB}^{amb} = \int_{rev} \frac{dQ}{T_{serbatoio}} = \frac{-Q_{AB}}{T_A} = -2,50 \frac{J}{K}$$

$$\Delta S_{ciclo}^{tot} = \cancel{\Delta S_{ciclo}^{gas}} + \Delta S_{ciclo}^{amb} = 1,25 \frac{J}{K}$$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_A}{V_C} = \left(\frac{T_C}{T_A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_C}{T_A} \right)^{3/2} = 0,354$$

Modo alternativo di calcolare la variazione di entropia su AB : usare la formula generale, usando il rapporto dei volumi.

Osservazione

Per diminuire l'entropia del gas do 2,6, ho aumentato quella dell'ambiente di 3,75. Se fosse stata fatta una trasformazione reversibile, allora le sue entropie si sarebbero bilanciate.

Se fosse stato un ciclo reversibile, $\eta_C = \frac{1}{2}$ (il rendimento sarebbe stato quello di Carnot) $W_{Carnot} = 500J$. Ho "sprecato" $W_{spr.} = 250J$, ai quali corrisponde $\Delta S = \frac{250J}{200K} = 1,25 \frac{J}{K}$ (il calore è andato alla sorgente fredda).

□

Meccanica

Un'asta di lunghezza $l = 0,500m$ ha densità lineare non costante, data da $\rho(x) = c_0 x$, $c_0 = 1,20 \frac{kg}{m^2}$, $0 \leq x \leq l$.

Calcolare M , x_{CM} , I_{CM} .

$$M = \int_0^l \rho(x) dx = \int_0^l c_0 x dx = c_0 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = c_0 \frac{l^2}{2} = 0,150kg$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^l x \rho(x) dx = (\text{è la media pesata delle posizioni})$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^l x^2 c_0 dx = \frac{1}{M} c_0 \frac{l^3}{3} = \frac{2}{3}l = 0,333m$$

$$I_{CM} = \int_0^l (x - x_{CM})^2 \rho(x) dx = \int_0^l \left(x - \frac{2}{3}l \right)^2 c_0 x dx = \frac{c_0 l^4}{36} = l^2 (18) M = 2,08 \cdot 10^{-3} kg m^2$$



L'asta è impenniata nel centro di massa. Un punto di massa $m = 0,01kg$ colpisce l'asta con $v_0 = 0,8 \frac{m}{s}$ e si conficca in essa.

Quando c'è un vincolo, in genere la quantità di moto non si conserva (es: sbattere contro un muro fa fermare la cosa sbattuta e anche il muro).

Si conserva solo il momento angolare \vec{L}_{tot} rispetto al perno (non \vec{p}_{tot} , $\vec{E}_{k,tot}$), questo perché le uniche forze esercitate sono lungo l'asta (parallela al braccio) e lungo il perno (che è nel centro di massa, quindi ha braccio nullo).

$$\text{Prima: } \vec{L}_{tot} = \vec{L}_{pto} + \underbrace{\vec{L}_{asta}}_{=0} = \vec{r} \times mv\vec{v}_0 \implies \|\vec{L}_{tot}\| = \frac{2}{3}lmv_0 = 0,00267 \frac{kgm^2}{s}$$

Dopo l'urto, l'asta+proiettile ruotano.

$$\|L\vec{v}_{tot}\| = I_{tot}\omega = \left(\frac{l^2}{18}M + \left(\frac{2}{3}l\right)^2m\right)\omega \implies \omega = 0,835 \frac{rad}{s}$$

Verificare che l'urto non è elastico calcolando la variazione di energia cinetica.

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0,00209J.$$

□