

Lezione_19_fis

8.4. Autoinduzione

Un circuito di forma qualunque percorso da corrente produce un campo magnetico.

Il flusso di questo campo concatenato con il circuito stesso, chiamato *autoflusso*, secondo la legge di Ampère-Laplace vale

$$\Phi(\vec{B}) = \int \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\text{circuito}} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_n d\Sigma = Li$$

dove L è il *coefficiente di autoinduzione* o *induttanza* del circuito, che dipende dalla forma del circuito (costante se il circuito è indeformabile) e dalle proprietà magnetiche del mezzo.

🔗 Unità di misura

Il coefficiente di autoinduzione è dato come rapporto tra un flusso magnetico e una corrente, quindi l'unità di misura è

$$\frac{Wb}{A} = \frac{V/s}{A} = \frac{\Omega}{s} = H$$

tale unità si chiama *henry*, di simbolo H .

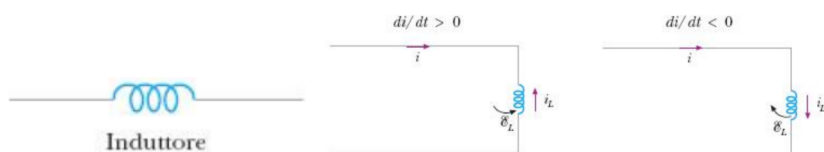
8.4.1. Forza elettromotrice di autoinduzione

Quando la corrente di un circuito *non* è costante nel tempo, l'autoflusso concatenato varia e nel circuito compare una *forza elettromotrice indotta*, detta di *autoinduzione*:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

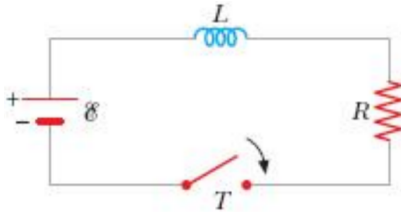
assumendo L costante.

Un circuito con induttanza non nulla si dice *induttivo*.



8.4.2. Circuito RL in serie

Consideriamo il circuito costituito da un generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} e di resistenza interna trascurabile, da un induttore con induttanza L e da un resistore di resistenza R . Le variazioni di corrente sono causate inizialmente dall'apertura e dalla chiusura dell'interruttore T .



La legge di Ohm per il circuito è

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri \implies \mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = Ri$$

intergradandola si ottiene

$\frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L} \implies \ln(\mathcal{E} - Ri) = -\frac{R}{L}t + \text{cost} \implies \mathcal{E} - Ri = Ae^{-Rt/L}$ dove A è una costante da determinare in base alle condizioni iniziali.

8.4.2.1. Chiusura del circuito

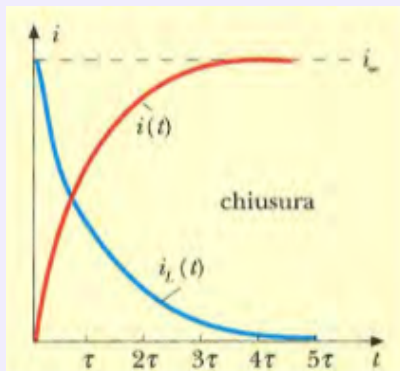
Quando si chiude l'interruttore, la corrente non può variare bruscamente, quindi deve restare nulla, ovvero a $t=0$ vale $i=0$. Da ciò risulta che $A=\mathcal{E}$ e la corrente vale

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R}(e - e^{-t/\tau})$$

dove $\tau = \frac{L}{R}$ è la *costante di tempo* del circuito.

❗ Osservazione

La corrente $i(t)$ tende asintoticamente al valore di *regime* $i_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R}$, minore è l'induttanza, meno è il tempo necessario per lo stabilizzarsi della corrente.



Se fosse $R = 100\Omega$ e $L = 10^{-6}H$ si avrebbe $\tau = 10^{-6}s$, il regime di corrente costante verrebbe raggiunto in tempo molto brevi, con valori di L presenti in un normale circuito resistivo. Se invece dovessimo chiudere un circuito contenente l'avvolgimento di un elettromagnete, che può avere $L \sim 1H$ e $R \sim 1\Omega$, la costante di tempo risulterebbe dell'ordine del secondo.

8.4.2.2. Apertura del circuito

All'istante di apertura, nel circuito scorre la corrente con il valore di regime, che si azzerava secondo la legge

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Lt/R} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

8.5. Energia magnetica

La presenza di una forza elettromotrice in un circuito implica, per definizione, un lavoro sulle cariche che costituiscono la corrente.

8.5.1. Bilancio energetico del circuito RL

La potenza erogata dal generatore vale

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

e il lavoro nel tempo dt vale

$$dW = \mathcal{P}dt = Ri^2 dt + Li di$$

è il lavoro compiuto dal generatore.

Il termine $Ri^2 dt$ rappresenta il lavoro speso per far circolare la corrente nel circuito e trasformato in calore (*effetto Joule*), mentre il termine $Li di$ è il lavoro speso contro la forza elettromotrice di autoinduzione.

8.5.2. Energia intrinseca della corrente

La corrente passa da zero al valore i in un tempo t quindi il lavoro speso contro la forza elettromotrice di autoinduzione vale

$$W = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2$$

Possiamo quindi definire l'*energia intrinseca della corrente*, immagazzinata nell'induttanza, come

$$U_L = \frac{1}{2} Li^2$$

Consideriamo un tratto di solenoide rettilineo indefinito lungo d , si vede che $U_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau$, dove τ è il volume. Si vede che questo risultato vale anche per il solenoide toroidale.

Si definisce allora la *densità di energia magnetica* come

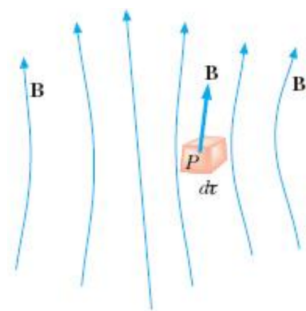
$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

In un volume $d\tau$ attorno a un punto in cui il campo magnetico vale \vec{B} c'è l'energia magnetica

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

quindi l'*energia magnetica totale* si ottiene integrando su tutto lo spazio

$$U_m = \int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$



Si vede allora che, in quanto dovuta ad un effetto magnetico, l'*energia intrinseca della corrente appare come un'energia magnetica*, dipendente dal valore locale del campo magnetico.

8.6. Mutua induzione

Il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito (1) attraverso un secondo circuito (2) vale

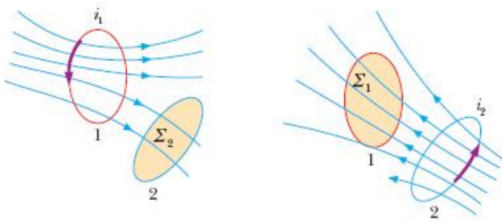
$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2$$

dove Σ_2 è una qualsiasi superficie che si appoggia sul secondo circuito.

Dal momento che B_1 è proporzionale a i_1 (e la situazione è analoga per (2)) possiamo scrivere

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} i_1, \quad \Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2$$

conglobando in M tutti i fattori geometrici e l'eventuale dipendenza dalle proprietà magnetiche del mezzo in cui sono immersi i circuiti.



È possibile dimostrare che $M_{1,2} = M_{2,1}$

Si definisce allora M come il *coefficiente di mutua induzione*.
La sua unità di misura è l'henry (H).

8.6.1. Circuiti accoppiati

Due circuiti si dicono *accoppiati* se $M \neq 0$.

In base alla legge di Faraday si ha una forza elettromotrice indotta in un circuito dalla variazione di corrente nell'altro

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M\frac{di_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$$

L'espressione dell'energia magnetica del sistema di due circuiti accoppiati è

$$U_m = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$

dove Mi_1i_2 rappresenta il lavoro necessario per contrastare la forza elettromotrice indotta.

≡ Forma locale della legge di Faraday-Lenz

Ricordiamo che la legge di Faraday-Lenz è $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{dt}$ e che la forza elettromotrice indotta vale $\mathcal{E}_i = \int_C \vec{E} \cdot \vec{s}$. Applicando quindi il teorema di Stokes

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

si ottiene

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$