Lezione_13_fis

1.6.3. Forza magnetica su una carica in moto

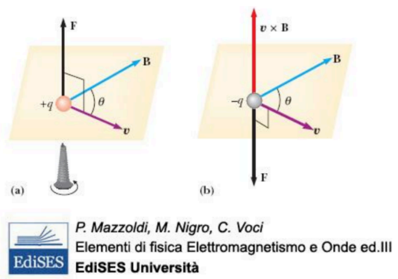
Dai paragrafi precedenti possiamo concludere che sistema di cariche in moto genera, in una certa regione, un campo magnetico, che indichiamo con il simbolo $\vec{B}$, e che l'altro sistema di cariche in moto risente di una forza in quanto immerso in $\vec{B}$.

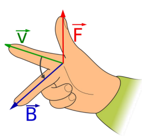
Consideriamo ora una particella di massa m e carica q, posta in un campo magnetico $\vec{B}$. Se la particella è "ferma", su di essa non agisce alcuna forza. Se invece la particella è in moto con velocità $\vec{v}$, si verifica che su di essa agisce la *forza di Lorentz*

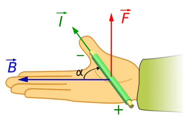
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

il cui modulo vale $F = qvB\sin\theta$, con θ l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Allora avrà valore massimo quando $\vec{v}$ è ortogonale a $\vec{B}$, mentre sarà nulla se saranno parallele.

La direzione della forza è ortogonale al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{B}$ e il suo verso è determinato dalla regola del prodotto vettoriale quando la carica è positiva (altrimenti dal suo opposto se è negativa).
Mnemonicamente, per individuare il verso si può usare la regola della mano destra o della vite.







1.6.3.1. Teorema dell'energia cinetica

La differenza di energia cinetica tra due punti nella traiettoria di una carica in movimento all'interno di una regione con campo magnetico non nullo è data dalla seguente formula:
$\Delta E_k = \frac{1}{2}, v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{s}$
Ovvero la differenza di energia è data dal lavoro compiuto dalla forza di Lorentz, in particolare dal prodotto scalare tra la forza e lo spostamento infinitesimo.

Come è stato detto nel paragrafo precedente, la forza di Lorentz $\vec{F}$ è sempre ortogonale alla velocità $\vec{v}$, che è sempre parallela allo spostamento infinitesimo $d\vec{s}$. Allora il prodotto scalare tra forza e spostamento è nullo $(\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0)$.

Concludiamo che *la forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella*, comunica soltanto un'accelerazione centripeta ad essa, quindi *una particella carica che si muove in un campo magnetico, ha una velocità che cambia in direzione, ma non in modulo*.

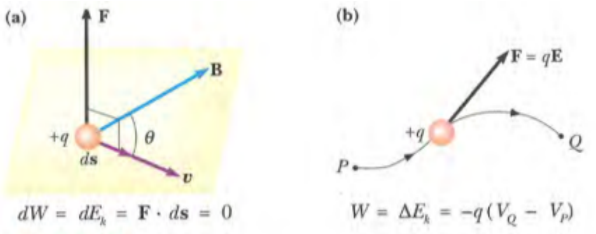


Figura 6.15
Il campo magnetico (a) *non accelera* una particella carica, mentre il campo elettrostatico (b) la *accelera*.

Unità di misura

L'unità del campo magnetico nel sistema internazionale si ricava grazie alla formula della forza di Lorentz:
$\frac{N}{C\frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$
e le si dà il nome di *tesla*

$$T = \frac{kg}{As^2}$$

Un sottomultiplo comune, ma non standard, è il *gauss*, definito come $1G = 10^{-4}T$.

Approfondimento

Il campo magnetico terrestre, sulla superficie terrestre, vale circa $0,4G$. I normali magneti da laboratorio possono generare campi magnetici fino a $2T$. Campi magnetici fino a $10T$ sono attualmente prodotti utilizzando la tecnologia della *superconduttività*.

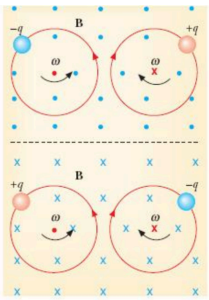
1.6.5. Moto di una particella carica in un campo magnetico

Consideriamo il seguente problema (esempio 5.9): un fascio di elettroni viene accelerato da fermo con una differenza di potenziale V e inviato in una regione in cui agisce un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, perpendicolare alla direzione di volo degli elettroni.
Descrivere il moto degli elettroni.

Dopo l'accelerazione dovuta al potenziale elettrostatico V, gli elettroni avranno velocità $|v| = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$.
Entrando nella regione con il campo magnetico, istante per istante la forza li Lorentz, sempre perpendicolare alla velocità e al campo, è diretta verso il centro

$$F = evB = m\frac{v^2}{r}$$

La forza di Lorentz è una forza *centripeta* e gli elettroni compiono una *traiettoria circolare*.



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

Dalla formula della forza si possono ricavare:

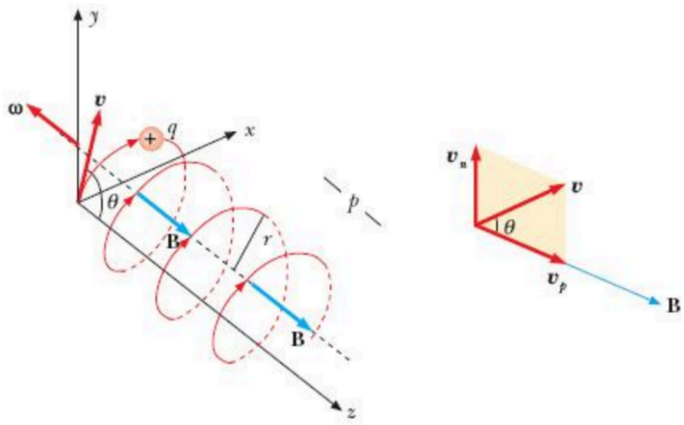
- Il *raggio* della curvatura: $r = \frac{mv}{eB}$;
- La *velocità angolare*: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{eb}{m}$;
- Il *periodo* della traiettoria: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$

Osservazione

Abbiamo potuto ricavare le formule con semplicità perché il valore della velocità, quindi a cascata anche i valori ricavati, sono costanti nel tempo.

1.6.5.1. Caso con angolo generico tra velocità e campo magnetico

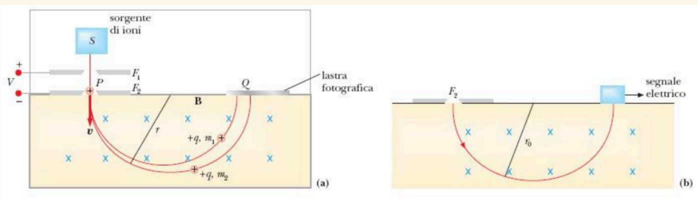
Nel caso in cui ci sia un angolo generico θ tra $\vec{v}$ e $\vec{B}$, scomponiamo la velocità nelle sue componenti $\vec{v}_\perp = \vec{v}\sin\theta$ (ortogonale a $\vec{B}$) e $\vec{v}_\parallel = \vec{v}\cos\theta$ (parallela a $\vec{B}$).
Osserviamo che $\vec{F}_\parallel = q\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = 0$, quindi $\vec{v}_\parallel$ resta costante e il moto lungo la direzione del campo è *rettilineo uniforme*.
Lungo il piano ortogonale al campo, la forza vale $\vec{F}_\perp = q\vec{v}_\perp \times \vec{B}$, cioè il moto descritto è analogo a quello del caso precedente, sarà perciò *circolare uniforme* con velocità $\vec{v}_\perp$.
Complessivamente, la particella compie un *moto elicoidale uniforme* avente come asse la stessa direzione di $\vec{B}$, raggio $r = \frac{mv\sin\theta}{qB}$ e passo $p = \vec{v}_\perp T = 2\pi\frac{mv\cos\theta}{qB}$



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

Applicazioni del moto di particelle cariche in un campo magnetico uniforme

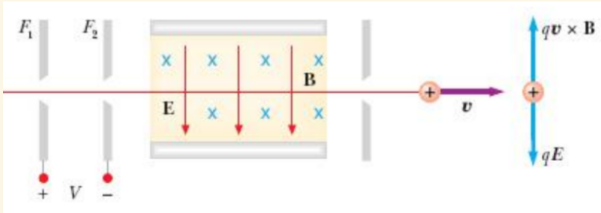
Lo *spettrometro di massa* è uno strumento che separa ioni aventi la stessa carica, ma massa diversa.



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

Gli ioni prodotti nella sorgente S passano attraverso una coppia di fenditure strette che ne definiscono la traiettoria e tra le quali è applicata una differenza di potenziale V. All'uscita dalla seconda fenditura tutti gli ioni, indipendentemente dalla loro massa se hanno la stessa carica e considerando trascurabile la velocità iniziale, possiedono la stessa energia cinetica. Si ottiene così un fascetta di ioni isoenergetici, che viene introdotta in un campo magnetico $\vec{B}$ costante. Il raggio della loro traiettoria sarà deciso solo dalla loro velocità, carica e massa; allora differirà solo in base alla massa.

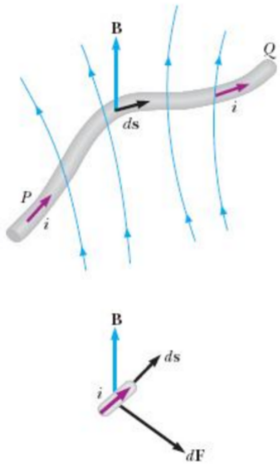
Il *selettore di velocità* è uno strumento che permette di ottenere un fascio di ioni diversi con la stessa velocità $\vec{v}$. Si fanno agire contemporaneamente nella stessa regione un campo elettrostatico $\vec{E}$ e un campo magnetico $\vec{B}$, entrambi uniformi e ortogonali tra loro.



In questo modo solo le particelle con velocità iniziale pari a $v = \frac{E}{B}$ proseguono con un moto rettilineo e sono in grado di uscire dal selettore.

1.6.6. Forza su un conduttore percorso da corrente

Immergiamo un conduttore in un campo magnetico $\vec{B}$.



Su ciascun elettrone che scorre dentro il conduttore si applica la legge di Lorentz. In un tratto di conduttore lungo $d\vec{s}$ e di sezione Σ sono contenuti $N = n\Sigma d\vec{s}$ elettroni, la forza risultante è quindi $d\vec{F} = (\Sigma d\vec{s})n(-e)\vec{v}_d \times B = (\Sigma d\vec{s})\vec{j} \times \vec{B} = id\vec{f} \times \vec{B}$, dove ho usato che $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_d$ e $i = \Sigma j$.

La relazione

$$d\vec{F} = id\vec{s} \times \vec{B}$$

si chiama *seconda legge elementare di Laplace* ed esprime il fatto

che la forza magnetica su un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente è ortogonale al campo magnetico.
Anche qui vale la regola della vite.

Per ottenere la forza su un tratto di filo indeformabile di lunghezza finita, percorso dalla corrente (stazionaria) i integriamo

$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times B$$

con P e Q gli estremi del filo.
Su questo tratto $\vec{B}$ può variare in modulo, direzione e verso, ma si assume sia lo stesso all'interno di ogni sezione infinitesima del filo. La corrente si porta fuori dal segno di integrale in quanto costante su ciascuna sezione del filo.

1.6.6.1. Casi interessanti

Consideriamo un campo magnetico uniforme e un conduttore rettilineo, allora la formula per la forza diventa

$$\vec{F} = i\left(\int_P^Q d\vec{s}\right) \times B = i\vec{l} \times \vec{B}$$

Se invece il campo è uniforme, ma il conduttore è curvilineo (contenuto in un piano) si ottiene

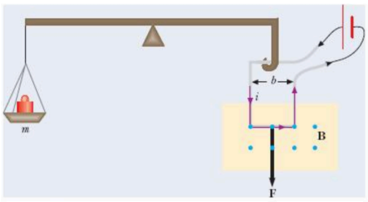
$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B} = i\ \overrightarrow{PQ}\ \times B$$

> Si può concludere quindi che la *forza* su un filo percorso da corrente che giace in un piano in cui agisce un campo magnetico uniforme B *non dipende dalla forma del filo*, ma *solo dalla lunghezza* del segmento che unisce i suoi estremi.

Considerando infine il caso in cui il campo magnetico è uniforme e il conduttore è chiuso, si ha che gli estremi del filo sono coincidenti, quindi la forza è *nulla*.

1.6.6.2. Esempio 6.1

Al giogo di una bilancia è sospesa una spira rigida larga $b = 5cm$. La parte inferiore è immersa in un campo magnetico uniforme B ortogonale al piano della spira. Se nella spira circola una corrente di intensità $i = 1A$ con verso opportuno, si osserva che per riequilibrare la bilancia occorre mettere una massa $m = 0.5g$ sul piatto. **Calcolare il valore del modulo di $\vec{B}$.**



P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università