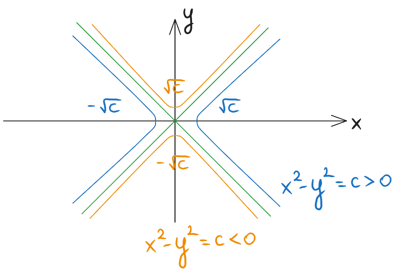
Lezione_05_famp

2.1.4. Esercizio

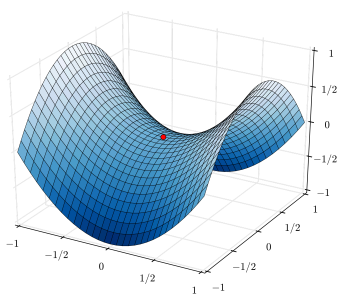
$z = x^2 - y^2$. Come disegnare il grafico?

Profili:
$x = 0$, $h_1(x) = f(x,0) = x^2$
$y = 0$, $h_2(y) = f(0,y) = -y^2$
Ottengo due iperboli, una sull'asse x e una sull'asse y:



Livelli:

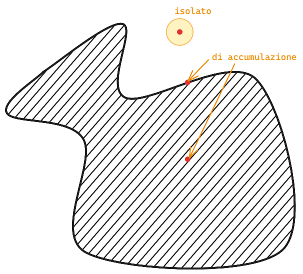
$$x^2 - y^2 = c : \begin{cases} c = & x = y \text{ o } y = -x \\ c > 0 & \text{iperbole con vertice } y = 0, x = \pm\sqrt{c} \\ c < 0 & \text{iperbole con vertice } x = 0, y = \pm\sqrt{c} \end{cases}$$



2.2. Limiti di funzioni in più variabili

2.2.1. Punti di accumulazione e isolati - definizione

> Un punto è di *accumulazione* per $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se $\forall U_p$ intorno di p
>
> $$U_p \cap D \setminus \{p\} \neq \emptyset$$
>
> cioè se ogni intorno di p contiene punti di D diversi da p.
> Si dice p *isolato* per D se $\exists U_p$ intorno di p tale che
>
> $$U_p \cap D = \{p\}$$
>
> cioè se non è di accumulazione.



2.2.1.1. Proposizione

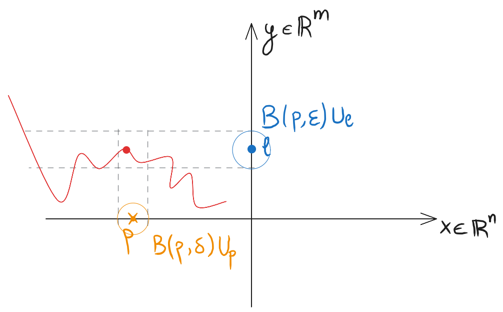
Se $p \in D$, allora o è di accumulazione, o è isolato (considerando che la definizione di punto isolato è la negazione di quella di punto di accumulazione, questa conclusione risulta banale).
Se $p \notin D$, allora o è esterno o è di accumulazione per D.

> **Terminologia**
>
> $Acc(D) = \{\text{punti di accumulazione di } D\} = \bar{D} \setminus \{\text{punti isolati di } D\}$

2.2.2. Limite (reale) - definizione

> Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $p \in Acc(D)$dico che $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l$ se $\forall U_l$ intorno di l $\exists U_p$ intorno di p tale che $\forall x \in D \cap U_p \setminus \{p\}$ $f(x) \in U_l$.

2.2.2.1. Visualizzo



2.2.3. Funzione continua - definizione

> Se $p \in D$ dico f continua in p quando $l = f(p)$ ossia $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.
> Definisco f continua nei punti isolati.

Significa che la funzione è continua in un punto se $\forall U_{f(p)}$ $\exists U_p : x \in D \cap U_p \implies f(x) \in U_l$ (notare che non viene tolto il punto).

> **Osservazione**

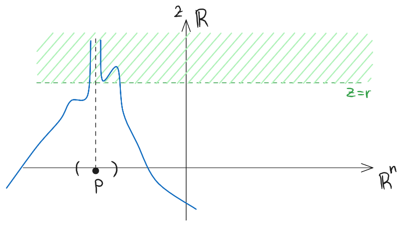
Rientrano in questa definizione i limiti di funzioni vettoriali $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to R^k$ considerati componente per componente.
Mostriamo ad esempio che se $\gamma_i(t) \to l_i$ per $t \to p$ $\forall i = 1, \ldots, k$, allora $\lim_{t \to p} \gamma(t) = l$ con la definizione sopra:
Se $\lim_{t \to p} \gamma_i = l_i$ per $i = 1, \ldots, k$, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_i < 0 : 0 < |t - p| < \delta_i$, $|\gamma_i - l_i| < \epsilon$
Scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$.
Se $0 < |t - p| < \delta$ ho allora $|\gamma_i - l_i| < \epsilon$ per tutte le componenti, ossia $\gamma(t) \in Q(l, \epsilon) \implies \gamma(t) \in B(l, \epsilon\sqrt{n})$.
Viceversa, se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta < 0$: se $0 < |t - p| < \delta$ allora $\gamma(t) \in B(l, \epsilon) \implies \gamma \in Q(l, \epsilon) \implies |\gamma_i - l_i| < \epsilon$ per $i = 1, \ldots, k \implies \lim_{t \to p} \gamma_i = l_i$

2.2.3.1. Caso $l \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to p} f(x) = l$?
Con $x \in D$ $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < ||x - p|| < \delta$: $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.

Caso $l = +\infty$, $p \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ se $\forall r > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < ||x - p|| < \delta$ con $x \in D$ ho $f(x) > r$

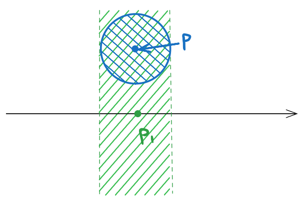


2.2.4. Esercizio

$f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1)$ con h continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f è continua in $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

Q: $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < ||x - p|| < \delta$, ho $f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$?

Siccome h continua
$\exists \tilde{\delta} : 0 < |x_1 - p_1| < \delta$, $\underbrace{h(p_1)}_{f(p)} - \epsilon < h(x) < h(p_1) + \epsilon$



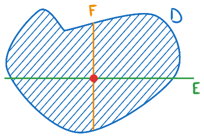
Ok! Posso prendere $\delta = \tilde{\delta}$

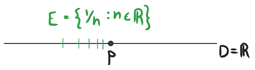
2.2.5. Proprietà dei limiti

2.2.5.1. Unicità del limite - teorema

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in AccD$, se $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l_1$ e se $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l_2 \implies l_1 = l_2$

Se $p \in AccD$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l$; se $E \subseteq D$, $p \in AccE$ allora $\exists \lim_{x \to p} f(x) = l$ in E.





2.2.5.2. Permanenza del segno - proposizione per i limiti

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione, $p \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per D e $\lim_{x \to p} f(x) > 0$ (eventualmente $+\infty$). Allora esiste un intorno U_p di p tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in U_p \cap D \setminus \{p\}$

2.2.5.3. Permanenza del segno - teorema per funzioni continue

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(p) > 0$ c'è un intorno U_p tale che $f > 0$ su $U_p \cap D$.

> **Osservazione**
>
> Come conseguenza sono continui i polinomi e composte di funzioni continue reali con polinomi (ad esempio $\log(1 + x + x^2 y + y^3)$).

2.2.5.3.1. Esempio

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \underbrace{e^x + y^2 e^x}_{f} = 1$

$\exists B(\underline{0}, \delta) : f(x,y) > \frac{1}{2}$

2.2.5.4. Algebra dei limiti - proposizione

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni, $p \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per D, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Sia $f(x) \underset{p}{\to} l_1$, $g(x) \underset{p}{\to} l_2$.

Allora

1. $f(x) + g(x) \underset{p}{\to} l_1 + l_2$:

2. $f(x)g(x) \underset{p}{\to} l_1 l_2$;
3. qualora $l_2 \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{p}{\to} \frac{l_1}{l_2}$.
4. Casi di limiti infiniti:
    - $c + \infty = +\infty$;
    - $(c > 0) \cdot (+\infty) = +\infty$;
    - $\frac{c>0}{0^+} = +\infty$.

2.2.5.4.1. Esempio

$f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$.
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f + g = 0 + 0 = 0$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} fg = 0 * 0 = 0$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f}{e^g} = \frac{x}{e^y} = \frac{0}{1} = 0$

2.2.5.5. Algebra delle funzioni continue - proposizione

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n\to\mathbb{R}}$, $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni continue in $p \in D$. Allora sono continue in p:

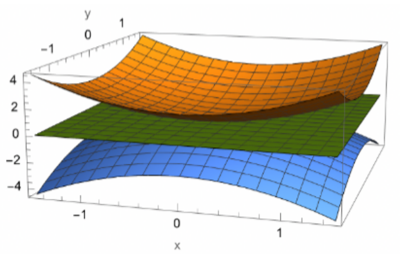
- cf, ($c \in \mathbb{R}$);
- $f + g$;
- fg;
- $\frac{f}{g}$, ($g(p) \neq 0$).
  Se poi h è una funzione di variabile reale continua in $f(p)$, la funzione composta $h \circ f(x) := h(f(x))$ è continua in $f(p)$ (cioè la composizione di funzioni continue produce funzioni continue dove ben definita).

2.2.5.6. Teorema dei carabinieri (o del confronto) - per funzioni continue e limiti

Siano f, g, h definite intorno a p (p escluso) e si supponga

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

attorno a p (p escluso). Se $f(x) \underset{p}{\to} l$, $h(x) \underset{p}{\to} l$, allora $g(x) \underset{p}{\to} l$



2.2.5.6.1. Esempio

$f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$-1x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{y} \leq 1x^2$
$-1y^2 \leq y^2 \sin\frac{1}{x} \leq 1y^2$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2?'$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -x^2 - y^2 = 0$
$-x^2 - y^2 \leq f \leq x^2 + y^2$, che applicando il limite per $(0,0)$ diventa $0 \leq l \leq 0$
.

2.2.6. Esercizio

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^3 y}-1}{x^3 y + o(x^3 y)} = ?$

Ricordo che $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^3 y}-1}{x^3 y + o(x^3 y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-z(x,y)}-1}{z(x,y)+o(z(x,y))} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{-z}-1}{z+o(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{-1}-1}{-z} \frac{z}{z+o(z)}(-1) = -1$

2.2.7. Esercizio

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{[\sin(3x^6)(y+4)]}-1}{x^6}$ ha dominio $\{x \neq 0\}$.
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{e^{(3x^6)(y+4)}-1}{\sin(3x^6)(y+4)}}_{\to 1} \underbrace{(y+4)}_{\to 4} \underbrace{\frac{\sin(3x^6)}{3x^6}}_{\to 1} \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

2.2.8. Teorema

- $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, U *aperto*, allora $\forall c \in \mathbb{R}$

  $$\{x \in U : f(x) > c\},\ \{x \in U : f(x) < c\},\ \{f(x) \neq c\}$$

  sono insiemi *aperti*;
- $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, C chiuso, allora $\forall c \in \mathbb{R}$

  $$\{x \in U : f(x) \geq c\},\ \{x \in U : f(x) \leq c\},\ \{f(x) \in [a,b]\}$$

  sono insiemi *chiusi*.

2.2.8.1. Dimostrazione del primo

Se $p \in U$ un punto del dominio dove $l = f(p) > c > 0$ allora $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0$ tale che $||x-p|| < \delta$ allora $-\epsilon < f(p) - l < \epsilon$ scelgo $\epsilon = \frac{l}{2}$ e ottengo
$f(p) > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$
$\implies x \in B\left(p, \frac{c}{2}\right)\ \ f(x) \in \{x \in U : f(x) > c\}$

2.2.8.2. Esempi

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 8y^2 \leq 5\}$ è chiuso (in particolare, è un'ellisse con il brodo compreso)
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 8y^2 < 5\}$ è aperto (in particolare, è un'ellisse senza il bordo).
$\{(x,y) : \ln(1 + x^2 e^y) > 2\}$ è aperto.

> **Osservazione**
>
> Se volessi considerare l'intersezione di due insiemi, dovrebbero essere entrambi aperti o entrambi chiusi.
> Vediamo un controesempio:
> $\{x^2 + y^2 < 9\} \cap \{x \geq 0\}$ non è né aperto né chiuso.
>
>