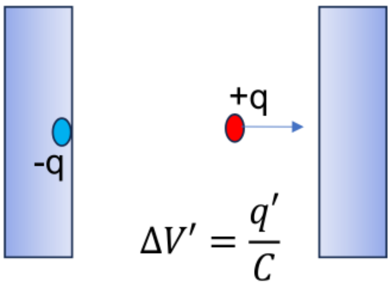
Lezione_09_fis

1.4.6. Energia del campo elettrostatico

Caricare un condensatore è un processo che richiede lavoro. Visto che il campo elettrostatico è conservativo, il lavoro non dipende dal percorso, ma dipende soltanto dallo stato iniziale e lo stato finale.
Possiamo immaginare di caricare il condensatore portando una carica $+q$ da un'armatura all'altra, lasciando indietro una carica $-q$.



$dW = \Delta V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$, allora $W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}\, dq' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2q\Delta V}$.

Consideriamo il caso del condensatore piano: $C = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{h}$, $\Delta V = Eh$, allora $U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tau$.
Questa è una formula generale applicabile in qualsiasi situazione:

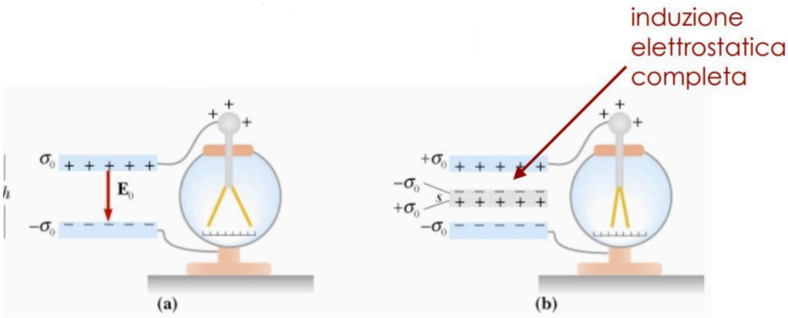
$$dU = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau \quad U = \int dU = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau$$

1.4.7. Dielettrici

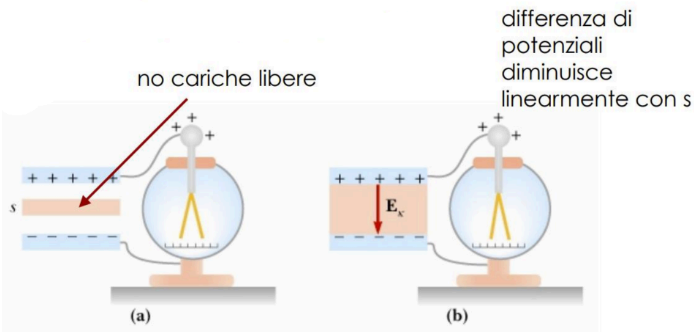
Studiamo come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene parzialmente o totalmente riempito con un materiale isolante.

Preso un condensatore piano carico e isolato ($E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$, $V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$), introduciamo parallelamente una lastra *conduttrice* di spessore s.
Notiamo che sulla superficie della lastra si formano, per induzione elettrostatica completa, delle distribuzioni di densità di carica σ_0, tali che il campo all'interno della lastra sia nullo. Vediamo allora che la differenza di potenziale diminuisce, mentre il campo totale rimane invariato. La posizione della lastra non influisce sul

potenziale, che quindi diventa $V = E_0(h-s) < V_0$



Introducendo invece una lastra *isolante*, non si formerebbero distribuzioni di densità, visto che questa non ha cariche libere di muoversi al suo interno.
Osserviamo allora che diminuisce la differenza di potenziale, ma l'effetto rispetto alla lastra conduttrice è minore (a parità di spessore), quindi $V < V_0$.
La differenza di potenziale diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore della lastra e assume il valore minimo V_K quando tutto lo spazio tra le armature è riempito da materiale isolante.



Grazie a una serie di esperienze di carattere sistematico, possiamo concludere che gli *isolanti* hanno la proprietà di *ridurre la differenza di potenziale* tra le armature dei condensatori; la differenza di potenziale misurata con un condensatore vuoto e la differenza di potenziale misurata con un condensatore completamente riempito con un materiale isolante *dipende solo dal materiale*; infine il rapporto tra la differenza di potenziale misurata nel vuoto V_0 e quella misurata con il condensatore completamente riempito di isolante è sempre maggiore di 1.

> Chiamiamo le *sostanze isolanti* che *riducono* la differenza di potenziale tra le armature, e quindi il campo elettrico, *sostanze dielettriche* o *dielettrici*.

> Definiamo la *costante relativa del dielettrico* come
>
> $$\mathcal{K} = \frac{V_0}{V_k} > 1$$

1.4.7.1. Campo elettrostatico interno al dielettrico

Il campo elettrostatico all'interno del dielettrico deve valere $E_{\mathcal{K}} = \frac{V_K}{h} = \frac{V_0}{Kh} = \frac{E_0}{\mathcal{K}} = \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}\epsilon_0}$.
Quindi la variazione del campo è $E_0 - E_{\mathcal{K}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}\epsilon_0} = \frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\mathcal{X}}{1+\mathcal{X}}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$

> Chiamiamo *suscettività elettrica del dielettrico*
> $$\mathcal{X} = \mathcal{K} - 1$$

Possiamo quindi scrivere il campo nel dielettrico come

$$E_K = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

con $\sigma_p = \frac{K-1}{K}\sigma_0 = \frac{X}{X+1}\sigma_0$.

Allora il campo è uguale alla sovrapposizione del campo dovuto alle cariche libere sulle armature del condensatore e del campo di una distribuzione di carica con densità σ_p posto sulle facce del dielettrico con segno opposto a quello delle cariche libere.

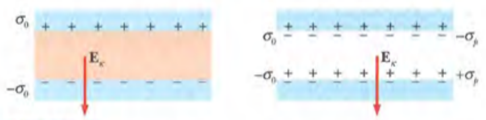


Figura 4.34
Densità di carica σ_p sulle superficie di una lastra di materiale isolante.

1.4.7.2. Costanti dielettriche relative e rigidità dielettriche

> La *rigidità dielettrica* è il *massimo valore del campo elettrostatico* che può essere applicato a un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno;

Una scarica danneggia irreparabilmente il dielettrico, nel senso che viene a mancare la sua proprietà isolante.

Sostanza	**Costante dielettrica relativa** $\mathcal{K}$	**Rigidità dielettrica** V/m
aria	$1,00059$	$3 \cdot 10^6$
acqua	80	$15 \cdot 10^6$
alcool etilico	28	$-$
olio per trasformatori	$2,5$	$20 \cdot 10^6$
ambra	$2,7$	$90 \cdot 10^6$
bachelite	$4,9$	$24 \cdot 10^6$

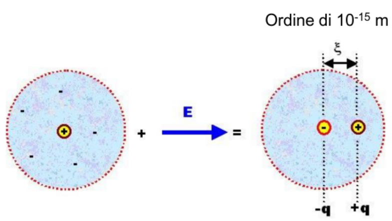
Sostanza	Costante dielettrica relativa $\mathcal{K}$	Rigidità dielettrica V/m
carta	$2 \div 5,5$	$16 \cdot 10^6$
polietilene	$2,3$	$50 \cdot 10^6$
polistirolo	$2,6$	$25 \cdot 10^6$
procellana	$6,5$	$4 \cdot 10^6$
teflon	$2,1$	$60 \cdot 10^6$
vetro	$4 \div 7$	$20 \cdot 10^6$

I materiali solidi che compaiono nella tabella sono materiali *amorfi*, dotati di simmetria in tutte le direzioni (*isotropi*). Per essi, come del resto per i gas e i liquidi, la costante dielettrica K non dipende né dal valore né dalla direzione del campo $\vec{E}$ cui vengono sottoposti.
Le proprietà elettrostatiche dei dielettrici di questo tipo sono completamente descritte dalle relazioni dedotte in questo paragrafo.

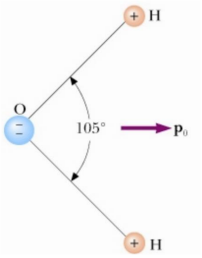
1.4.8. Polarizzazione dei dielettrici

I fenomeni osservati possono essere spiegati dalla struttura elettrica microscopica della materia: negli isolanti gli elettroni sono legati agli atomi e non possono allontanarsi spontaneamente. Applicando allora un campo esterno avviene uno *spostamento locale* delle cariche che costituiscono gli atomi (le cariche negative in verso opposto al campo, le cariche positive in senso concorde). L'atomo acquista un *momento di dipolo* elettrico microscopico, *indotto* dal campo $\vec{E}$:

$$\vec{p}_a = Ze\vec{X}$$

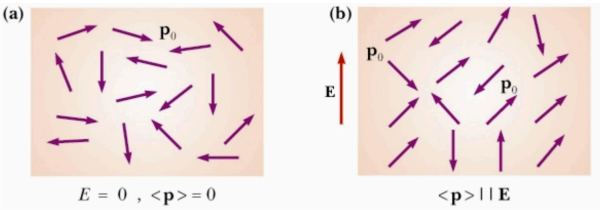


Altre sostanze presentano un momento di dipolo intrinseco, come l'acqua, infatti il loro centro delle cariche positive è diverso dal centro delle cariche negative.



1.4.8.1. Polarizzazione per orientamento

In assenza di campo elettrostatico esterno, i dipoli molecolari sono orientati a caso, per via degli urti dovuti al moto di agitazione termica che distruggono eventuali configurazioni ordinate dovute alle interazioni tra dipoli. Quando si applica un campo $\vec{E}$, su ciascuno dei dipoli elettrici di momento p_0 agisce il momento delle forze che ne causa un orientamento con il campo elettrostatico soltanto *parziale* perché disturbato dall'agitazione termica.
Il grado di allineamento aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare dell'intensità del campo elettrostatico esterno.

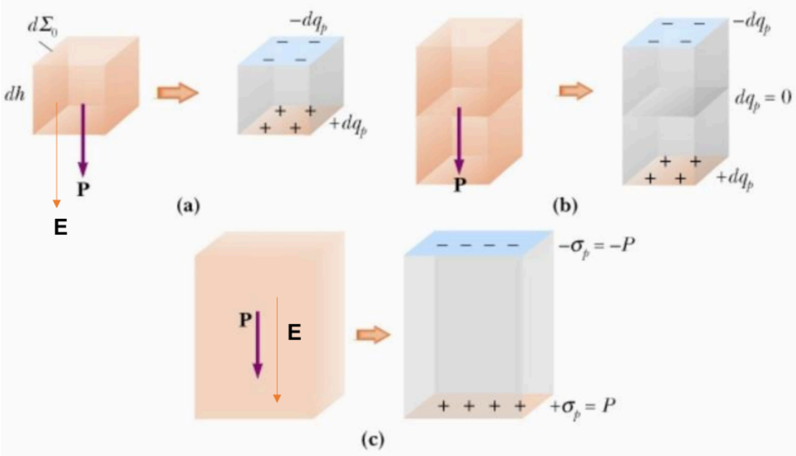


1.4.8.2. Vettore di polarizzazione

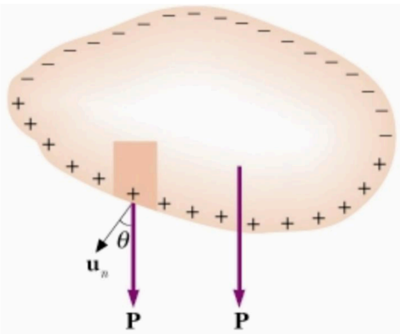
Consideriamo un volumetto τ nell'intorno di un punto O. Questo volumetto contiene un numero N (molto grande) di particelle. Il momento di dipolo risultante è $\vec{p}_{tot} = N\langle\vec{p}\rangle$.

> Definiamo il *vettore polarizzazione* come il momento di dipolo per unità di volume
>
> $$\vec{P} = \frac{\vec{p}_{tot}}{\tau} = \frac{N\langle\vec{p}\rangle}{\tau} = n\langle\vec{p}\rangle$$
>
> con n unità di particelle per unità di volume.

Nella maggior parte dei dielettrici risulta $\vec{P} = \epsilon_0 \mathcal{X} \vec{E}$, infatti ciascun momento di dipolo $\langle\vec{p}\rangle$ è parallelo al campo $\vec{E}$.



Suddividiamo una lastra in prismi infinitesimi di base $d\Sigma_0$, altezza dh e volume $d\tau = \Sigma_0 dh$: ciascuno di questi ha il momento di dipolo $dp = \vec{P} d\tau = P d\Sigma_0 d\vec{h}$, come visto nella figura (a).
Consideriamo ora due prismi consecutivi con una base in comune e consideriamo $\vec{P}$ costante, la carica $+dq_p$ di un prisma si annulla con la carica $-dq_p$ dell'altro sulla base in comune (come si vede nella figura (b)); ripetendo l'operazione per tutti i prismi alla fine rimangono solamente le cariche sulle basi dei prismi che appartengono alle facce della lastra, visto nella figura (c).



Considerando una superficie generica di superficie interna $d\Sigma_0$ e superficie esterna $d\Sigma$ si ha

$$dq_p = P\frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P\cos\theta = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

La densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di P lungo la normale della superficie.

1.4.9. Esercizi

1.4.9.1 Esercizio 4.35

Un condensatore piano, con armature quadrate si area $\Sigma = 400cm^2$ distanti $d = 2mm$, è riempito per metà di mica ($\mathcal{K}_1 = 5$) e metà di paraffina ($\mathcal{K}_2 = 2$), come mostrato in figura. **Calcolare la capacità C del condensatore.** Se tra le armature viene applicata una differenza di potenziale $V = 2 \cdot 10^3 V$, **calcolare il campo elettrostatico E, la carica q e l'energia elettrostatica U_e del sistema.**