

## Lezione\_21\_fis

### 9.4. Potenza nei circuiti alternati

La potenza istantanea erogata dal generatore (dopo  $t \gg \frac{1}{\gamma}$ ) è

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(t)i(t) = \mathcal{E} \sin \omega t \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \sin(\omega t - \phi)$$

Il valore medio in un periodo vale

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 \cos \phi = \mathcal{E}_{eff} i_{eff} \cos \phi$$

il cui ultimo termine è detto "legge di Galileo-Ferraris".

Ricordando infine che  $\phi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$  otteniamo che  $\cos \phi = \frac{R}{Z}$ , quindi

$$\mathcal{P} = i_{eff}^2 R$$

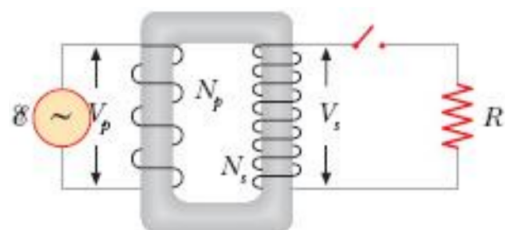
che ci dice che *la potenza viene dissipata solo nei resistori*.

### 9.5. Il trasformatore ideale

Per effettuare un passaggio da alta tensione e bassa corrente a bassa tensione e corrente elevata, senza apprezzabile perdita di potenza, si realizza, normalmente a passi successivi, con un *trasformatore*.

Un trasformatore consta di due avvolgimenti su un nucleo di ferro dolce, isolati tra loro e composti da  $N_p$  e  $N_s$  spire rispettivamente.

La funzione del nucleo di ferro è di aumentare il flusso  $\Phi(\vec{B})$  per una data corrente e far sì che le linee di  $\vec{B}$  restino all'interno del ferro.



#### 💡 Trasformatore generico

I due circuiti sono *accoppiati*, quindi il flusso del campo magnetico attraverso le bobine è

$$\Phi_p(\vec{B}) = L_p i_p + M i_s, \quad \Phi_s(\vec{B}) = L_s i_s + M i_p$$

e dalla legge di Kirchhoff si ottengono le formule

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t - L_p \frac{di_p}{dt} - M \frac{di_s}{dt} = r i_p, \quad -L_s \frac{di_s}{dt} - M \frac{di_p}{dt} = R i_s$$

dove  $r$  è la resistenza interna del generatore. Sono due equazioni differenziali accoppiate. Noi semplificheremo considerando  $r=0$  e  $i_s=0$  (quindi un trasformatore ideale e aperto)

Considerando il caso ideale, non c'è campo magnetico disperso e superficie di ciascuna spira è identica. Se il circuito secondario è aperto, il flusso attraverso le singole spire del circuito primario e secondario è lo stesso, quindi le differenze di potenziale ai capi del circuito sono

$$V_p = -\frac{d\Phi_p(\vec{B})}{dt} = -N_p \frac{d\Phi_1(\vec{B})}{dt}, \quad V_s = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt} = -N_s \frac{d\Phi_1(\vec{B})}{dt}$$

dove  $\Phi_1(\vec{B})$  è il flusso attraverso una spira.

Vale quindi

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

Siccome non c'è resistenza nel circuito primario, vale  $\mathcal{E}(t) = -V_p$ , dunque

$$V_s = -\frac{N_s}{N_p} \mathcal{E}(t)$$

A circuito secondario aperto, il rapporto tra tensione in uscita e tensione in entrata è eguale al rapporto tra le spire del secondario e del primario. È detto *rapporto di trasformazione*.

Quando si chiude l'interruttore nel circuito secondario circola la corrente  $i_s$ . Il variare di  $i_s$  comporta una variazione di flusso nel primario, però la variazione totale di flusso deve essere sempre eguale a  $\mathcal{E}$  e quindi il generatore deve erogare un'ulteriore corrente per compensare. Questa potenza è eguale alla potenza spesa nel circuito secondario sulla resistenza  $R$ .

Siamo in presenza di un *trasferimento di potenza* dal primario al secondario non per via conduttiva, ma *attraverso le variazioni del campo magnetico*.

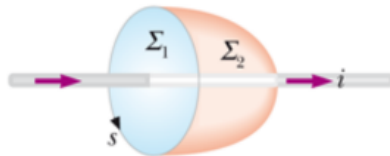
## 10. Le equazioni di Maxwell

### 10.1. Legge di Ampère-Maxwell

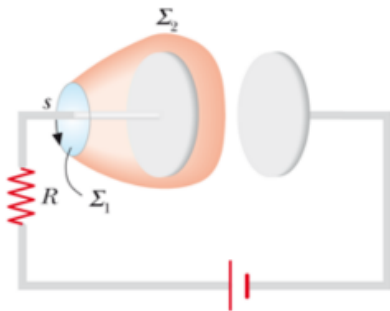
Il campo magnetico nel vuoto soddisfa la legge di Ampère:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{concatenate}}$$

Si definisce *condizione di stazionarietà* la seguente condizione: la legge di Ampère vale, senza nessuna riserva, quando considerata una superficie chiusa qualunque, l'intensità di corrente di conduzione  $i_c$  che entra è uguale all'intensità di corrente di conduzione  $i_c$  che esce.



Consideriamo ora un circuito RC, nel suo processo di carica e scarica.



Fissata la linea  $s$  concatenata al filo e le superfici  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , calcoliamo la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo  $s$ . Se usassimo la superficie  $\Sigma_1$ , useremmo l'intensità di corrente di conduzione che attraversa il filo; se invece usassimo la superficie  $\Sigma_2$ , che poggia sempre su  $s$ , non incontreremmo il filo, quindi la corrente sarebbe nulla. Non è più realizzata la condizione di stazionarietà.

Come già visto in paragrafi precedenti, durante i processi di carica e scarica su un'armatura del condensatore si verifica una variazione di carica nel tempo  $\frac{dq}{dt}$ , corrispondente alla corrente  $i$  entrante nell'armatura, e sull'altra armatura c'è una variazione, eguale in modulo e opposta in segno,  $-\frac{dq}{dt}$ , che corrisponde a una corrente uscente  $i = -\left(-\frac{dq}{dt}\right) = \frac{dq}{dt}$ .

Possiamo affermare che ci sarà una variazione netta della carica contenuta nella superficie chiusa formata da  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Ricordiamo inoltre il teorema di Gauss, per cui vale  $1 = \epsilon_0 \Phi(\vec{E})$ .

Definiamo allora la corrente di spostamento come

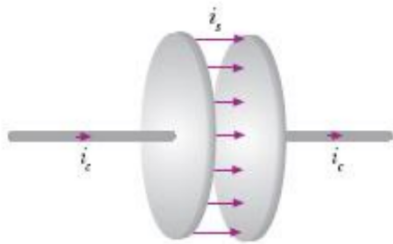
$$i_s = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Allora la corrente che percorre il circuito durante la carica è di conduzione  $i_c$  attraverso i fili e di spostamento  $i_s$  tra le due armature del condensatore.

L'incongruenza che avevamo scoperto nella legge di Ampère viene risolta se consideriamo l'intensità di corrente come somma della corrente di conduzione e della corrente di spostamento

$$i = i_c + i_s$$

Questa intensità soddisfa la condizione di stazionarietà.



Si modifica la legge di Ampère, trovando la legge di Ampère-Maxwell

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

che stabilisce che i campi magnetici sono prodotti sia dalle correnti di conduzione che da variazioni temporali del campo elettrico.

### ⚠ Attenzione

Non bisogna essere tratti in inganno: il termine di spostamento coniato da Maxwell non è collegato a nessun moto di carica.

### 💡 Approfondimento

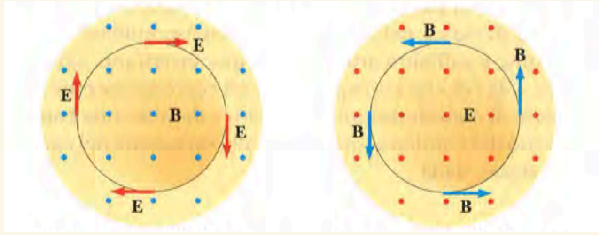
Anche quando non ci sono correnti di conduzione, ma ci sono variazioni del campo elettrico nel tempo, si individua un campo magnetico

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Si stabilisce quindi una simmetria di comportamento con la legge

di Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$



## 10.2. Le equazioni di Maxwell (forma integrale)

Legge	Formula
Legge di Gauss	$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$
Legge di Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$
Legge di Gauss	$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\Sigma = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$

La legge di Gauss per il campo elettrico stabilisce il legame tra carica elettrica e campo elettrico: la struttura è la stessa sia per campi statici che per campi variabili nel tempo. La legge di Faraday mostra che anche un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico. La legge di Gauss per il campo magnetico afferma che il campo magnetico è sempre solenoidale e che quindi non esistono cariche magnetiche libere (monopoli magnetici). Infine la legge di Ampère-Maxwell individua come sorgenti del campo magnetico le correnti di conduzione e le variazioni temporali del campo elettrico.

L'azione che il campo magnetico e il campo elettrico compiono su una carica  $q_0$  si manifesta con la *forza di Lorenz generalizzata*

$$\vec{F} = q_0(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Il moto della carica obbedisce alla *legge di Newton*, quindi  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

Ai campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  è associata una *densità di energia elettromagnetica*

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

### 10.3. Le equazioni di Maxwell (forma differenziale)

Le forme differenziali permettono di ottenere una relazione *locale* tra carica e campo elettrico e corrente e campo magnetico. In questo modo le proprietà dei campi elettrici e magnetici non sono più legate ad interi circuiti o intere superfici chiuse, ma sono valide punto per punto nello spazio. Per passare dalle equazioni integrali scritte qui sopra alle equazioni differenziali si usano il *teorema della divergenza* per le equazioni dei flussi e il *teorema di Stokes* per le equazioni delle circuitazioni.

Legge	Formula
Legge di Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Legge di Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Legge di Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

#### Le equazioni di Maxwell nel vuoto

Legge	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss	$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Legge	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Legge di Gauss	$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Lontano dalle sorgenti dei campi le formule assumono una forma interessante:

Legge	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss	$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
Legge di Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Legge di Gauss	$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$