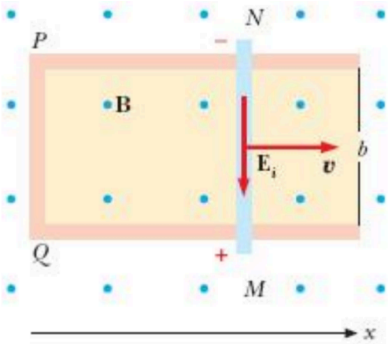
Lezione_18_fis

1.8.2. Origine della forza elettromotrice indotta e del campo elettrico indotto

> **Possibili modi per causare l'induzione elettromagnetica**
>
> Una variazione del flusso del campo magnetico può avere più cause, ad esempio può *variare* il *campo magnetico* nel tempo, può avvenire un *cambio del circuito* s che definisce la superficie Σ attraverso la quale si considera il flusso (il circuito potrebbe essersi mosso o deformato) oppure può *cambiare l'angolo* tra il campo magnetico e la superficie Σ.
> Questi cambi si possono vedere nella seguente formula
>
> $$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_C \vec{B}\cdot\vec{u}_n d\Sigma\right) = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta)$$

Consideriamo un circuito rettangolare conduttore in cui un lato è costituito da una sbarretta conduttrice di lunghezza b mobile; esso è posto in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante, ortogonale al piano contenente il circuito. Supponiamo che la sbarretta si muova di moto traslatorio con velocità v, verso destra, mantenendo un buon contatto elettrico col resto del circuito.



Sugli elettroni di conduzione, che sono in moto con la velocità v della sbarretta, agisce la forza di Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v}\times\vec{B}$, che sposta gli elettroni verso l'alto, generando un accumulo di carica. Il campo elettromotore vale $\vec{E}_i = \vec{F}(-e) = \vec{v}\times\vec{B}$.

La circuitazione del campo elettromotore vale $\mathcal{E}_i = \int_{MNPQ}\vec{E}_i = \int_{MN}\vec{v}\times\vec{B} = -vBb$. Ricordando poi che $v = \frac{dx}{dt}$ e che il flusso del campo magnetico sulla superficie vale $\Phi(\vec{B}) = \int\vec{B}\cdot\vec{u}_n d\Sigma = Bbx$

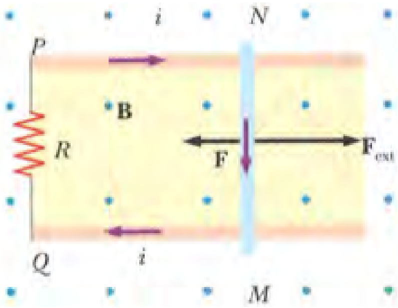
abbiamo che

$$\mathcal{E}_i = -vBb = -\frac{dx}{dt}Bb = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

1.8.3. Applicazioni della legge di Faraday

1.8.3.1. Attrito elettromagnetico

Prendiamo in esame un circuito simile a quello del paragrafo precedente e inseriamovi una resistenza interna di valore R.



Siccome la barretta viene mantenuta in moto a velocità costante $\vec{v}$, compare la forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}_i$ che genera un corrente sul circuito. *Sulla barretta agisce una forza*

$$\vec{F} = i\vec{b} \times \vec{B} = -\frac{(Bb)^2}{R}\vec{v}$$

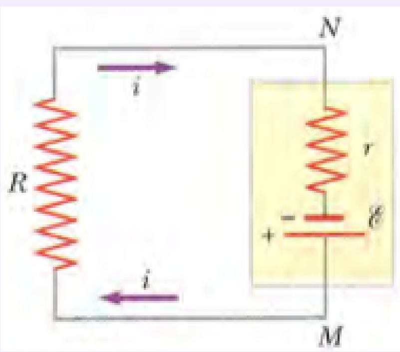
ovvero una *forza resistente di tipo viscoso*, proporzionale alla velocità, chiamata *resistenza di attrito elettromagnetico*.

Osservazione

Per vincere la resistenza di attrito bisogna applicare una forza esterna, eguale e contraria a $\vec{F}$, spendendo la potenza

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = \frac{(Bbv)^2}{R} = Ri^2 = \mathcal{E}_i i$$

Il sistema può essere considerato come un generatore in cui la potenza erogata proviene da un'azione meccanica esterna.

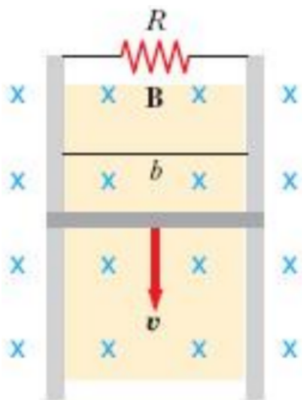


💡 **Approfondimento**

Grazie a questa applicazione si può anche comprendere il *significato energetico* del *segno meno* della legge di Faraday, cioè della *legge di Lenz*. Se infatti il segno meno non ci fosse, basterebbe un impulso per mettere in moto la sbarretta, che verrebbe mantenuta in movimento dalla stessa forza $\vec{F}$. Ma questo non rispetterebbe il *principio di conservazione dell'energia*.

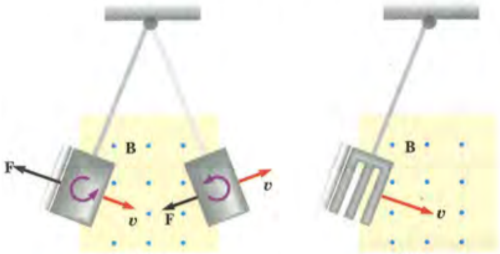
1.8.3.1.1. Esercizio 8.5

Due guide conduttrici verticali parallele, distanti $b = 20cm$, sono chiusa ad un estremo da un resistore $R = 4\Omega$. Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione della forza peso, una sbarretta di massa $m = 0.01kg$. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico $B = 1T$ uniforme e costante, ortogonale al piano del circuito. Calcolare il valore della velocità limite v_∞ della sbarretta, il calore della corrente limite i_∞ e l'energia W_X dissipata nel circuito per ogni centimetro percorso dalla sbarretta in queste condizioni.



1.8.3.2. Correnti di Foucault

Quando il campo magnetico è variabile all'interno di un *conduttore metallico* il campo elettrico indotto dà origine a *correnti concatenate alle linee di $\vec{B}$*, che possono essere molto intense dato che la resistività del metallo è piccola. Se si vogliono ridurre le correnti indotte, si lamina la massa del conduttore in fogli paralleli alle linee di $\vec{B}$ e separati da un isolante, in modo che le correnti debbano attraversarlo.
Tecnicamente tali correnti si chiamano *correnti parassite* o *di Foucault*.

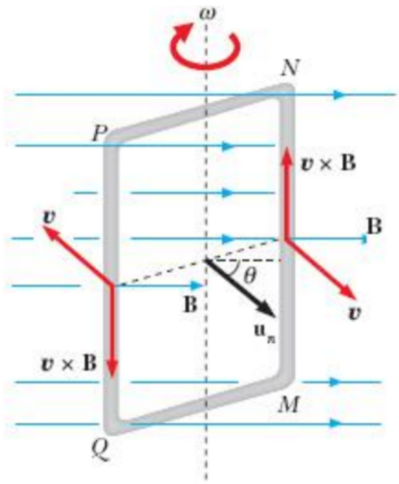


Nell'esempio in figura, la piastrina viene rallentata all'entrata e all'uscita dalla regione in cui è presente il campo magnetico; mentre la sua velocità non viene frenata (dal campo elettromagnetico) mentre si trova al suo interno o all'esterno. Nella figura di destra si può osservare l'assenza delle correnti di Foucault nella piastrina.

Alcune applicazioni degli effetti di riscaldamento delle correnti di Foucault si possono trovare nel forni ad induzione e nei freni elettromagnetici.

1.8.3.3. Generatore di corrente alternata

Una spira rettangolare ruota con velocità angolare costante ω attorno a un asse verticale passante per il centro di massa. Sulla spira agisce un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante, orizzontale; indichiamo con θ l'angolo formato dalla normale alla spira con $\vec{B}$.



Il flusso del campo magnetico attraverso la spira di area Σ vale $\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = B\Sigma\cos\theta = B\Sigma\cos\omega t$, quindi la forza elettromotrice indotta vale

$$\mathcal{E}_i = \omega B\Sigma\sin\omega t$$

con valore massimo $\mathcal{E}_{max} = \omega B\Sigma$.
La corrente ha valore

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B\Sigma}{R}\sin\omega t$$

mentre la potenza vale

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}_i i = \frac{(\omega B \Sigma)^2}{R} \sin^2 \omega t$$

Si può dimostrare che le formule ricavate per la spira rettangolare valgono per una spira di qualsiasi forma.

> **Osservazione**
>
> Il momento meccanico delle forze magnetiche $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ tende a orientare il momento magnetico $\vec{m} = i\Sigma\vec{u}_n$ parallelo a $\vec{B}$, infatti il valore di potenza appena calcolato corrisponde alla quantità necessaria da fornire per mantenere la spira in rotazione.

Su un periodo di tempo maggiore del periodo T, si può calcolare il valore medio della potenza, che corrisponde a

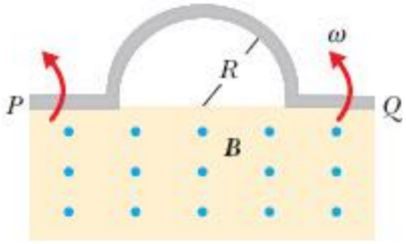
$$\mathcal{P}_m = \frac{(\omega B \Sigma)^2}{2R}$$

perché proporzionale al seno (il cui valore medio è $\frac{1}{2}$).
La potenza media coincide con quella che sarebbe erogata, sulla medesima resistenza R, da un generatore di corrente continua con forza elettromotrice $\mathcal{E}_{eff}$, tale che $\mathcal{E}_{eff}^2 = \frac{\mathcal{E}_{max}^2}{2R}$.
Infatti la media della forza elettromotrice su un periodo è nulla (proprietà di tutte le funzioni sinusoidali), per ovviare al problema di prende la media quadratica $\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_0^2 \sin^2 \omega t \, dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}$.

> Si definisce quindi il *valore efficace* (*root mean square*) è la quantità
>
> $$\mathcal{E}_{eff} = \sqrt{\langle \mathcal{E}^2 \rangle} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

1.8.3.3.1. Esercizio 8.17

Un conduttore di forma semicircolare di raggio $R = 20cm$, ruota attorno all'asse PQ come in figura, con velocità ω costante, compiendo 100 giri al secondo. Un campo magnetico uniforme $B = 1.3T$ agisce perpendicolarmente al foglio. Calcolare il valore massimo della forza elettromotrice $\mathcal{E}$ indotta nel conduttore e la forza elettromotrice media in un giro completo.



1.8.3.4. Legge di Felici

Quando una spira di resistenza R si muove in un campo magnetico $\vec{B}$ in essa viene indotta una corrente. Nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 nella spira fluisce una carica q data da

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i\, dt = -\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

quindi il valore della carica non dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solamente dal valore iniziale e finale.
Questa è nota come *legge di Felici*.

durante il processo l'unica forza elettromotrice agente è $\mathcal{E}_L$.%%

1.8.5. Energia magnetica

La presenza di una forza elettromotrice in un circuito implica, per definizione, un lavoro sulle carche che costituiscono la corrente.

1.8.5.1. Bilancio energetico del circuito RL

La potenza erogata dal generatore vale

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

e il lavoro nel tempo dt vale

$$dW = \mathcal{P}dt = Ri^2\, dt + Li\, di$$

è il lavoro compiuto dal generatore.
Il termine $Ri^2\, dt$ rappresenta il lavoro speso per far circolare la corrente nel circuito e trasformato in calore (*effetto Joule*), mentre il termine $Li\,id$ è il lavoro speso contro la forza elettromotrice di autoinduzione.

1.8.5.2. Energia intrinseca della corrente

La corrente passa da zero al valore i in un tempo t quindi il lavoro speso contro al forza elettromotrice di autoinduzione vale

$$W = \int_0^i Li\,di = \frac{1}{2}Li^2$$

> Possiamo quindi definire l'*energia intrinseca della corrente*, immagazzinata nell'induttanza, come
>
> $$U_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Consideriamo un tratto di solenoide rettilineo indefinito lungo d, si vede che $U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 \Sigma d)i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0}\tau$, dove τ è il volume. Si vede che questo risultato vale anche per il solenoide toroidale.

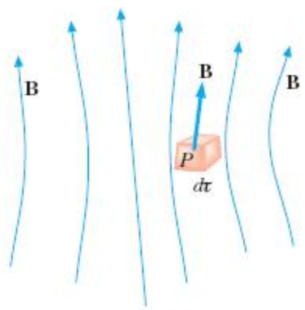
> Si definisce allora la *densità di energia magnetica* come
>
> $$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

In un volume $d\tau$ attorno a un punto in cui il campo magnetico vale $\vec{B}$ c'è l'energia magnetica

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0}dt$$

quindi l'*energia magnetica totale* si ottiene integrando su tutto lo spazio

$$U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0}d\tau$$



Si vede allora che, in quanto dovuta ad un effetto magnetico, l'*energia intrinseca della corrente appare come un'energia magnetica*, dipendente dal valore locale del campo magnetico.

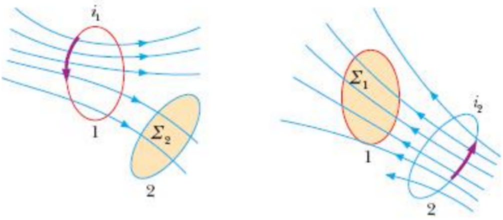
1.8.6. Mutua induzione

Il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito (1) attraverso un secondo circuito (2) vale

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2$$

dove Σ_2 è una qualsiasi superficie che si appoggia sul secondo circuito.

> Dal momento che B_1 è proporzionale a i_1 (e la situazione è analoga per (2)) possiamo scrivere
>
> $$\Phi_{1,2} = M_{1,2} i_1, \quad \Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2$$
>
> conglobando in M tutti i fattori geometrici e l'eventuale dipendenza dalle proprietà magnetiche del mezzo in cui sono immersi i circuiti.



È possibile dimostrare che $M_{1,2} = M_{2,1}$

> Si definisce allora M come il *coefficiente di mutua induzione*. La sua unità di misura è l'henry (H).

1.8.6.1. Circuiti accoppiati

> Due circuiti si dicono *accoppiati* se $M \neq 0$.

In base alla legge di Faraday si ha una forza elettromotrice indotta in un circuito dalla variazione di corrente nell'altro

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M\frac{di_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$$

L'espressione dell'energia magnetica del sistema di due circuiti accoppiati è

$$U_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

dove $M i_1 i_2$ rappresenta il lavoro necessario per contrastare la forza elettromotrice indotta.

Forma locale della legge di Faraday-Lenz

Ricordiamo che la legge di Faraday-Lenz è $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d\int \vec{B}\cdot\vec{u}_n d\Sigma}{dt}$ e che la forza elettromotrice indotta vale $\mathcal{E}_i = \int_C \vec{E}\cdot\vec{s}$. Applicando quindi il teorema di Stokes

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{E})\cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

si ottiene

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Lezione 20

1.9. Oscillazioni elettriche e correnti alternate

Già in precedenza abbiamo studiato delle correnti variabili nel tempo con i circuiti RC e LR, caratterizzati rispettivamente dalle leggi $V_C = \frac{q}{C} = Ri$, $i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$ e $\mathcal{E}_i = -L\frac{di}{dt} = Ri$, $i(t) = i_0 e^{-tL/R}$.

1.9.1. Oscillazioni elettriche

1.9.1.1. Circuito LC

Consideriamo un circuito LC ideale, il cui condensatore è carico con $V_0 = \frac{q_0}{C}$ ed è connesso all'induttore nel momento $t = 0$.

Alla chiusura del circuito inizia a scorrere una corrente e nell'induttore viene indotta una forza elettromotrice di autoinduzione $\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$ legata alla differenza di potenziale dalla legge

$$\frac{q}{C} - \frac{di}{dt} = 0$$

Derivando rispetto al tempo e ricordando che $i = -\frac{dq}{dt}$ si ottiene $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$, quindi la corrente segue la legge

$$i(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

mentre la differenza di potenziale ai capi del condensatore è

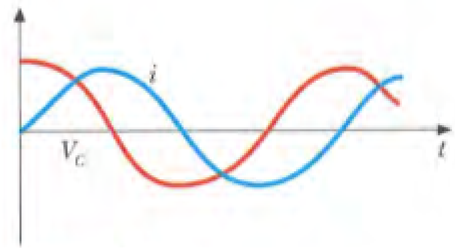
$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega LA\cos(\omega t + \phi)$$

Grazie alle condizioni iniziali, si possono determinare le costanti, quindi si ottengono le formule

$$i = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t, \quad V_C = V_L = V_0 \cos \omega t, \quad q = q_0 \cos \omega t$$

dove ω è la pulsazione e vale $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Si può osservare che la corrente e la differenza di potenziale sono in *quadratura di fase*, quindi quando la corrente è massima la differenza di potenziale è nulla, quando la differenza di potenziale è massima la corrente è nulla.
Il circuito LC è dunque sede di un'*oscillazione elettrica permanente* e per questa ragione viene anche chiamato *circuito oscillante*.



> 💡 **Analogia**
>
> Matematicamente, la situazione è identica a quella di una massa m sottoposta all'azione di una forza elastica, dove le corrispondenze sono solo formali. Si "equivalgono" in questo modo:
>
> - $q \leftrightarrow x$;
> - $i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt}$;
> - $L \leftrightarrow m$;
> - $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$.

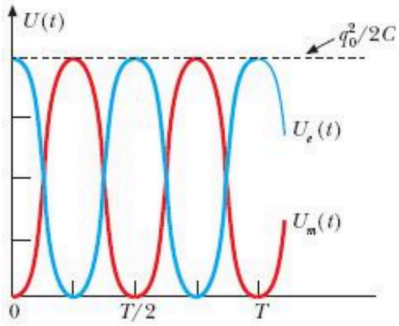
Quando il condensatore è carico, tutta l'energia del circuito è elettrica (non vi è energia magnetica poiché $i = 0$), quando è invece scarico l'energia è solo magnetica, nel momento in cui le armature del condensatore sono nuovamente cariche (ma con segno opposto) l'energia è nuovamente solo elettrica.
Il *bilancio energetico* in un dato istante è

$$U(t) = U_e(t) + U_m(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} L i_0^2 \sin^2 \omega t$$

Essendo $i_0 = \frac{V_0}{\omega L}$, si verifica che $CV_0^2 = Li_0^2$, quindi l'*energia totale è costante nel tempo* e vale

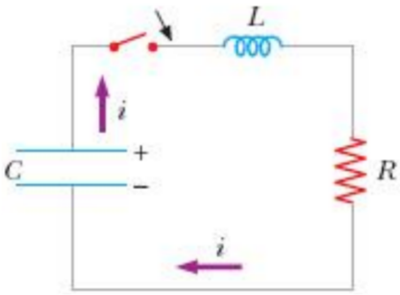
$$U(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} L i_0^2$$

quindi *in un circuito LC ideale l'energia totale si conserva*.



1.9.1.2. Circuito RLC in serie

Consideriamo questa volta un circuito con un condensatore carico, in induttore e un resistore collegati in serie.



Questa volta, alla chiusura del circuito, la differenza di potenziale tra le armature del condensatore e dell'induttore non è più la stessa, ma vale la formula

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

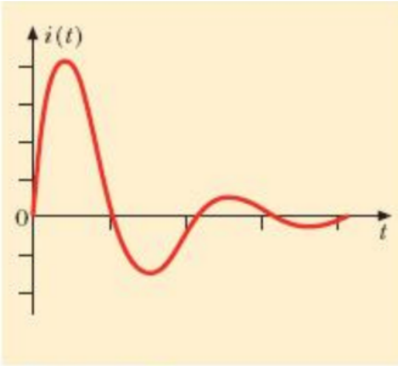
Derivando in maniere analoga a prima si ottiene $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$ che ha soluzione

$$i(t))Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

dove $\gamma = \frac{R}{2L}$ ha il significato di *costante di tempo* e indica la *rapidità di annullamento della corrente*, mentre ω è la pseudo-pulsazione con valore

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

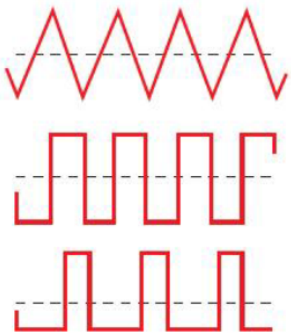
Si ha quindi che per $\gamma^2 \gg \omega_0^2$, cioè quando $R^2 < \frac{4L}{C}$ si ha una pulsazione reale, quindi la corrente si descrive con una sinusoide modulata.



Si può concludere che, in questo circuito, a ogni ciclo viene dissipata dell'energia nella resistenza. Il processo termina quando tutta l'energia $U_e = \frac{q_0^2}{2C}$ viene assorbita dalla resistenza.
Per mantenere un'oscillazione permanente, bisognerebbe fornire costantemente potenza pari all'energia dissipata nel resistore.

1.9.2. Circuiti in corrente alternata

> Una forza elettromotrice e una corrente che variano nel tempo proporzionalmente a $\sin \omega t$ o $\cos \omega t$ sono dette *alternate*. Per definizione si chiama *alternata* una *grandezza periodica* che ha *valor medio nullo in un periodo*.



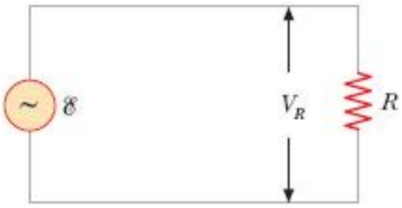
Ricorda

Per una grandezza alternata si definisce il valore efficace dalla relazione $\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$ e $i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$

1.9.2.1. Circuito con resistenza

Applicando ai capi di un resistore una forza elettromotrice $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ si ha un passaggio di corrente in accordo con la legge di Ohm

$$\mathcal{E} = Ri \implies i = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$



La corrente è *in fase* con la forza elettromotrice e il suo valore *non dipende* dalla frequenza della forza elettromotrice.
Possiamo affermare che ai capi del resistore compare la *tensione*

$$V_R = Ri = V_0 \cos \omega t$$

che vale anche per circuiti più complessi.

La potenza istantanea dissipata dalla resistenza vale

$$\mathcal{P}(t) = V_R i = \frac{\mathcal{E}_0^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

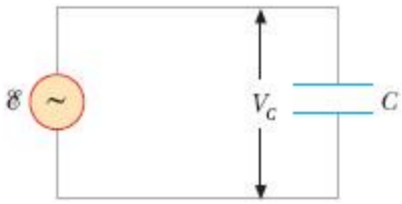
mentre la potenza media dissipata su un periodo vale

$$\mathcal{P}_m = V_{R,eff} i_{eff} = \frac{V_{R,eff}^2}{R} = R i_{eff}^2$$

1.9.2.2. Circuito con condensatore

Ai capi di un condensatore carico vi è la differenza di potenziale $V_C = \frac{q}{C}$, supponendo nulla la resistenza complessiva si ottiene

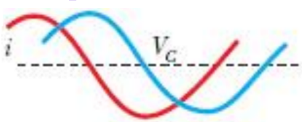
$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} \implies q = C\mathcal{E} = C\mathcal{E}_0 \cos \omega t$$



Uso la relazione $i = \frac{dq}{dt}$ per trovare la corrente

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\omega C\mathcal{E}_0 \sin \omega t = \omega C\mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

si vede dunque che è in *anticipo di una quadratura sulla forza elettromotrice* (ovvero $\frac{\pi}{2}$). Anche questa volta la relazione di fase è indipendente dalla pulsazione, ma la corrente *dipende dalla frequenza*.



Più generalmente, per un circuito qualsiasi, vale

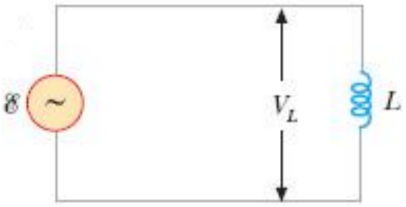
$$V_C = \frac{i_0}{\omega C}\sin\omega t = \frac{i_0}{\omega C}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

dove $\frac{1}{\omega C}$ è detto *reattanza del condensatore* (o *reattanza capacitiva*), che rappresenta un'opposizione al passaggio di corrente.

1.9.2.3. Circuito con induttore

In un circuito con una forza elettromotrice alternata, un induttore e resistenza nulla è descritto dall'equazione

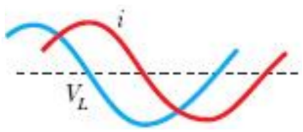
$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = 0 \implies \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos\omega t$$



Quindi la corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\sin\omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

perciò la corrente è *in quadratura* rispetto alla forza elettromotrice (ovvero è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$). La corrente *dipende dalla frequenza*.



In un circuito generico, la tensione ai capi dell'induttore vale

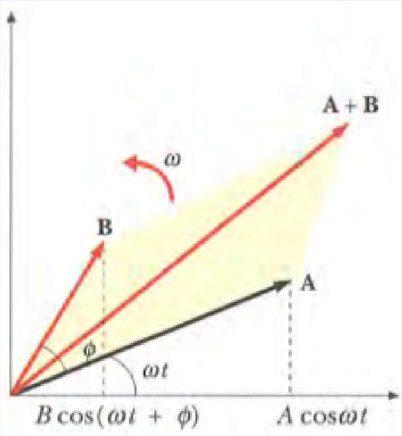
$$V_L = L\frac{di}{dt} = -\omega L i_0\sin\omega t = \omega L i_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

dove ωL è detto *reattanza dell'induttore* (o *reattanza induttiva*).

1.9.2.4. Circuiti RL e RC (in serie)

> **Metodo dei vettori rotanti o dei fasori di Fresnel**
>
> Un'oscillazione armonica viene rappresentata come proiezione lungo un asse di un vettore di modulo $\mathcal{E}_0$ ruotante con velocità angolare ω. Due oscillazioni sfasate di θ sono rappresentate da due vettori ruotanti che mantengono un angolo costante θ tra loro e la somma si esegue con la regola del parallelogramma; la proiezione del vettore somma è la somma cercata dalle due

oscillazioni.



Siccome la tensione totale dei seguenti circuiti è la somma delle tensioni dei loro elementi, che sono generalmente sfasati tra loro, useremo questo metodo per calcolare la tensione totale.

1.9.2.4.1. Circuito RL

Nel circuito in serie RL, attraversato dalla corrente $i = i_0 \cos \omega t$, le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = R i_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

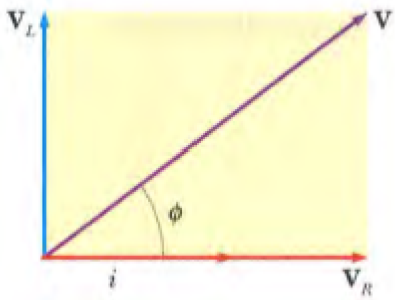
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} i_0$$

ed è sfasata di un angolo ϕ rispetto alla corrente, tale che $\tan \phi = \frac{\omega L}{R}$.

La tensione ai capi della serie vale

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



1.9.2.4.2. Circuito RC

Nel circuito in serie RC le tensioni ai capi dei componenti sono

$$V_R = Ri_0 \cos \omega t, \qquad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

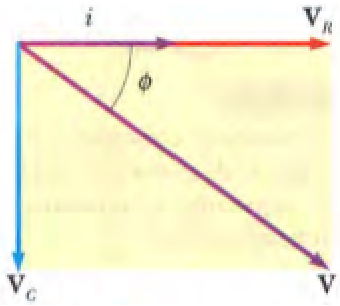
e la loro somma ha modulo

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} i_0$$

ed è sfasata di un angolo ϕ rispetto alla corrente, tale che $\tan \phi = -\frac{1}{\omega CR}$.

La tensione ai capi della serie vale sempre

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



> A questo punto si definisce l'*impedenza* Z dell'elemento o della serie il coefficiente di proporzionalità tale che
>
> $$V_0 = Zi_0$$
>
> In generale l'impedenza è in funzione della pulsazione.

Unità di misura

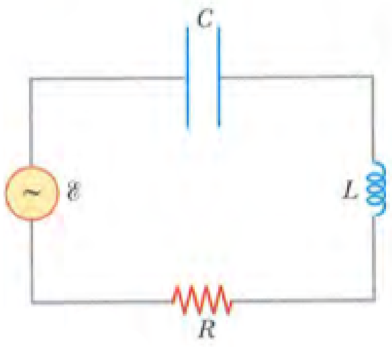
L'impedenza e la reattanza sono definite da un rapporto tra tensione e corrente, come la resistenza, quindi si misurano in ohm (Ω).

1.9.3. Circuito RLC in serie, risonanza

Nel circuito RLC in serie, in cui scorre la corrent e$i = i_0 \cos \omega t$, deve valere

$$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

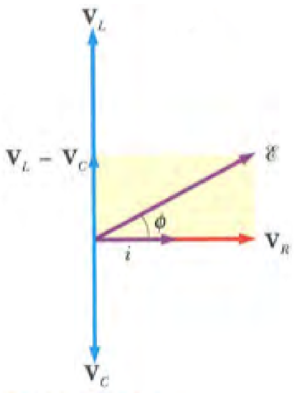
e deve essere che la tensione ai capi della serie coincida con la forza elettromotrice del generatore $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$.



Usando il metodo dei vettori rotanti si ottiene

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, i_0 = Z i_0$$

di fase ϕ tale che $\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.



Riprendendo l'equazione iniziale, si ottiene:
$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = \frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{\mathcal{E}_0 \omega}{L}\cos\omega t$, che permette di ricavare l'equazione della corrente

$$i(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \phi') + i_0 \sin(\omega t + \phi)$$

dove $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$ e $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. La corrente efficace dipende dalla frequenza.
L'equazione implica che, dopo un transiente, il circuito oscilla con pulsazione dettata dalla forza elettromotrice alternata inserita.

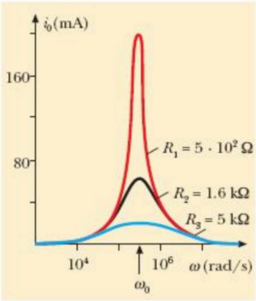
1.9.3.1. Risonanza

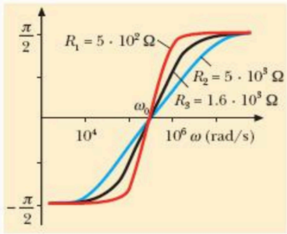
La corrente dell'oscillazione raggiunge il valore massimo quando Z è minimo, ovvero quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

In tali *condizioni*, dette di *risonanza*, lo *sfasamento* tra corrente e forza elettromotrice è *nullo*, l'impedenza è eguale alla resistenza e il circuito si comporta come se fosse puramente resistivo.

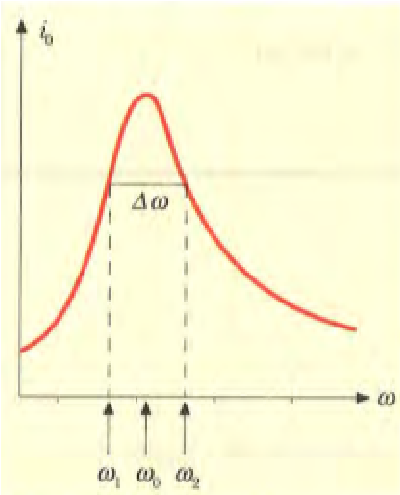
Nei seguenti grafici sono rappresentate delle *curve di risonanza*.





Prima della risonanza, il termine capacitivo è maggiore del termine induttivo, la fase varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e zero, quindi il comportamento è di tipo RC in serie.
Oltre la risonanza, predomina il termine induttivo su quello capacitivo, la fase varia tra zero e $\frac{\pi}{2}$, quindi il comportamento è di tipo RL in serie.

> Si definisce la *larghezza della risonanza* con la differenza
>
> $$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$
>
> dove ω_1 e ω_2 sono i valori della pulsazione tali che $i_0(\omega_1) = i_0(\omega_2) = \frac{i_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$.



> Si definisce *fattore di merito della risonanza* la quantità
>
> $$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$
>
> %%