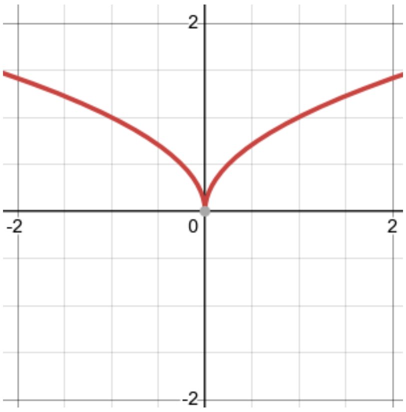
Lezione_04_famp

1.4.9. Esercizio

Studiare $\gamma(t) = (t^5, |t|^{5/2})$ $- \leq t \leq 1$

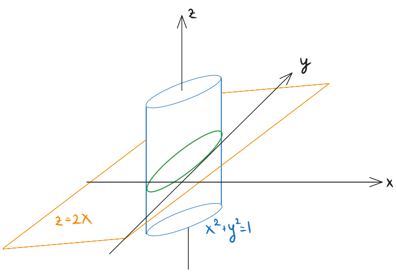
$Supp\,\gamma = Graph\, f(x)$ in $[-1, 1]$, $f(x) = \sqrt{|x|}$



t^5 è crescente, quindi iniettiva, quindi γ è semplice.
γ è non chiusa: $\gamma(-1) \neq \gamma(1)$ (si può vedere anche dall'iniettività).
$\gamma'(t) = (5t^4, \frac{5}{2}|t|^{3/2} sgn(t))$ in $[-1, 1]$
$||\gamma'(t)|| = (0, 0)$ in $t = 0 \implies$ regolare tranne che in $t = 0$, $\gamma(0) = (0, 0)$
Nota: $\phi(t) = t^5 = x$, $\phi'(t) = 5t^4 > 0$ se $t \neq 0 \implies \gamma \sim \tilde{\gamma}(x) = (x, \sqrt{|x|})$ solo in $[-1, -\epsilon]$ e $[\epsilon, 1]$.
$L(\gamma; (0, 1)) = L(\tilde{\gamma}, (0, 1)) = \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = \ldots$
$\tilde{\gamma}'(x) = (1, \frac{1}{2\sqrt{x}})$

1.4.10. Esercizio

Parametrizzare e studiare $\mathbb{R}^3 \supseteq \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{z = 2x\}$ + retta tangente in $\left(\frac{1}{\sqrt{2},}\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.
(Perché il testo del problema potrebbe essere sbagliato?)



$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

$Supp\,\gamma \subseteq \{z = 2x\} \implies$ piana

Verifico se è iniettiva:
$x(\theta_1) = x(\theta_2)$, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$, $\theta_1 = -\theta_2$
$y(\theta_1) = \sin\theta_1 = -\sin\theta_2 = -y(\theta_2) \implies \sin\theta_1 = 0$
Quindi $\theta_1 = 0 = \theta_2$ oppure $\theta_1 = -\pi = -\theta_2$
Quindi è chiusa e semplice.

$\gamma \in \mathcal{C}^\infty$
$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, -2\sin\theta) \neq 0$ regolare
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$r : x(s) = p + v\left(s - \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

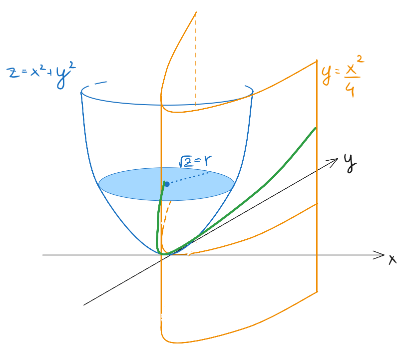
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}q \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}q \quad q \in \mathbb{R}, \quad q = t - \frac{\pi}{4} \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}q \end{cases}$$

$$q = 1 - \sqrt{2}x \quad \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - x - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}x) \end{cases}$$

Esercizio: correggere le coordinate cartesiane

1.4.11. Esercizio

Parametrizzare e studiare $\{z = x^2 + y^2\} \cap \{4y = x^2\}$ + "lunghezza".
(Perché il testo è sbagliato?)



$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{4} \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t^2 + \frac{t^4}{16} \end{cases}$$

$\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{4}, \frac{t^4}{16}\right)$
$\gamma'(t) = \left(1, \frac{t}{2}, 2t + \frac{t^3}{4}\right)$
$\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $||\gamma'|| \neq 0 \implies$ regolare
$x(t)$ è crescente, quindi γ è iniettiva, perciò è semplice e non chiusa.
$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + \left(\frac{t^2}{4}\right) + \left(2t + \frac{t^3}{4}\right)^2}$
$L(\gamma, [a,b]) = \int_a^b ||\gamma'||\, dt = \dots$

2. Funzioni di più variabili

2.1. Funzione in più variabili - definizioni

> Una *funzione in più variabili* è una funzione
>
> $$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$$
>
> , $\forall \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $f(x) \in \mathbb{R}$, definita in un sottoinsieme D di uno spazio $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, detto dominio di funzione.

Se l'insieme D non è precisato a priori, si intende il più grande insieme sul quale l'espressione della funzione ha significato.

> Il *grafico di una funzione* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è l'insieme dello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$ definito come
>
> $$Graph\, f := \{(\underline{x}, f(x)), \underline{x} \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

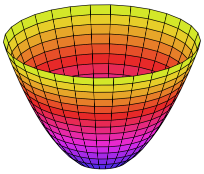
> Gli *insiemi di livello* (o *curve di livello* se $n = 2$) $c \in \mathbb{R}$ Sono quei sottoinsiemi tali che
>
> $$L_c(f) := \{\underline{x} \in D : f(x) = c\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$$
>
> data $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione.

> Dico che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha *simmetria radiale* (quindi è una *funzione radiale*) se $\exists h : f(x) = h(||x||^2)$
>
> **Osservazione**
>
> Se f è radiale, allora gli insiemi di livello sono circonferenze (o $\emptyset$) quando h è iniettiva.
> Questo avviene perché:
> $c = f(\underline{x}) = h(||x||^2) \iff ||x||^2 = h^{-1}(c) \iff ||\underline{x}|| = \sqrt{h^{-1}(c)}$, che è il bordo di una palla centrata in 0 di raggio $\sqrt{h^{-1}(c)}$.

2.1.1. Esempio

$f(x, y) = x^2 + y^2 = h(||\underline{x}||^2)$
$h(x) = f(x, 0) = x^2$

$$L_c(f) = \begin{cases} \emptyset & c < 0 \\ \{(0,0)\} & c = 0 \\ \partial B(0, \sqrt{c}) & c > 0 \end{cases}$$

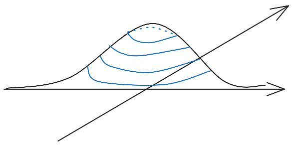


2.1.2. Esempio

$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} = h(||x||^2)$, $h(\omega) = e^{-\omega}$
$h(x)) f(x, 0) = e^{-x^2}$

$$L_c(f) = \begin{cases} \emptyset / c \le 0, \, c > 1 \\ \partial B\left(\underline{0}, \sqrt{\ln \frac{1}{c}}\right) & 0 < c < 1 \end{cases}$$

Infatti per $1 > c > 0$ ottengo $e^{-(x^2+y^2)} = c \iff -(x^2+y^2) = \ln c if x^2 + y^2 = \ln \frac{1}{c}$



2.1.3. Esempio

$f(x) = 1 = h(||x||^2)$, $x \in \mathbb{R}^n$
$L_1(f) = \mathbb{R}^n$
$L_c(f) = \emptyset$, $c \neq 1$