Lezione_21_fis

9.4. Potenza nei circuiti alternati

La potenza istantanea erogata dal generatore (dopo $t \gg \frac{1}{\gamma}$) è

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(t)i(t) = \mathcal{E}\sin\omega t\frac{\mathcal{E}_0}{Z}\sin(\omega t - \phi)$$

Il valore medio in un periodo vale

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 i_0\cos\phi = \mathcal{E}_{eff}i_{eff}\cos\phi$$

il cui ultimo termine è detto "legge di Galileo-Ferraris".
Ricordando infine che $\phi = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ otteniamo che $\cos\phi = \frac{R}{Z}$, quindi

$$\mathcal{P} = i_{eff}^2 R$$

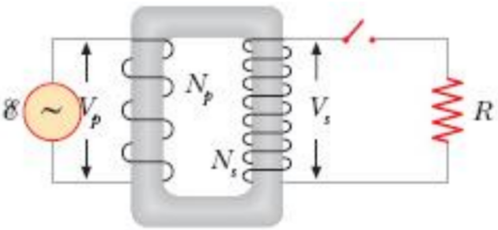
che ci dice che *la potenza viene dissipata solo nei resistori*.

9.5. Il trasformatore ideale

Per effettuare un passaggio da alta tensione e bassa corrente a bassa tensione e corrente elevata, senza apprezzabile perdita di potenza, si realizza, normalmente a passi successivi, con un *trasformatore*.

> Un trasformatore consta di due avvolgimenti su un nucleo di ferro dolce, isolati tra loro e composti da N_p e N_s spire rispettivamente.

La funzione del nucleo di ferro è di aumentare il flusso $\Phi(\vec{B})$ per una data corrente e far sì che le linee di $\vec{B}$ restino all'interno del ferro.



💡 **Trasformatore generico**

I due circuiti sono *accoppiati*, quindi il flusso del campo magnetico attraverso le bobine è

$$\Phi_p(\vec{B}) = L_p i_p + M i_s, \quad \Phi_s(\vec{B}) = L_s i_s + M i_p$$

e dalla legge di Kirchoff si ottengono le formule

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t - L_p \frac{di_p}{dt} - M \frac{di_s}{dt} = r i_p, \quad - L_s \frac{di_s}{dt} - M \frac{di_p}{dt} = R i_s$$

dove r è la resistenza interna del generatore. Sono due equazioni differenziali accoppiate. Noi semplificheremo considerando $r = 0$ e $i_s = 0$ (quindi un trasformatore ideale e aperto)

Considerando il caso ideale, non c'è campo magnetico disperso e superficie di ciascuna spira è identica. Se il circuito secondario è aperto, il flusso attraverso le singole spire del circuito primario e secondario è lo stesso, quindi le differenze di potenziale ai capi dei circuito sono

$$V_p = -\frac{d\Phi_p(\vec{B})}{dt} = -N_p \frac{d\Phi_1(\vec{B})}{dt}, \quad V_s = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt} = -N_s \frac{d\Phi_1(\vec{B})}{dt}$$

dove $\Phi_1(\vec{B})$ è il flusso attraverso una spira.
Vale quindi

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

Siccome non c'è resistenza nel circuito primario, vale $\mathcal{E}(t) = -V_p$, dunque

$$V_s = -\frac{N_s}{N_p \mathcal{E}(t)}$$

A circuito secondario aperto, il rapporto tra tensione in uscia e tensione in entrata è eguale al rapporto tra le spire del secondario e del primario. È detto *rapporto di trasformazione*.

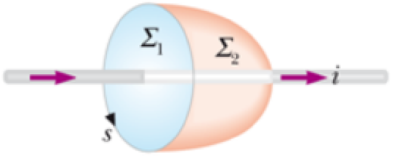
Quando si chiude l'interruttore nel circuito secondario circola la corrente i_s. Il variare di i_s comporta una variazione di flusso nel primario, però la variazione totale di flusso deve essere sempre eguale a $\mathcal{E}$ e quindi il generatore deve erogare un'ulteriore corrente per compensare. Questa potenza è eguale alla potenza spesa nel circuito secondario sulla resistenza R.
Siamo in presenza di un *trasferimento di potenza* dal primario al secondario non per via conduttiva, ma *attraverso le variazioni del campo magnetico*.

10. Le equazioni di Maxwell

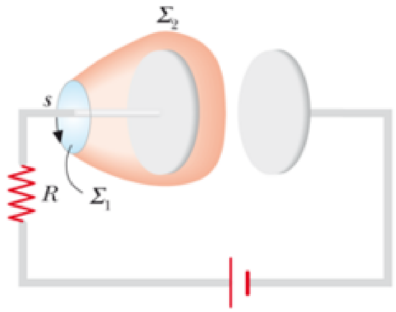
10.1. Legge di Ampère-Maxwell

Il campo magnetico nel vuoto soddisfa la legge di Ampère:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{concatenate}}$$

> Si definisce *condizione di stazionarietà* la seguente condizione: la legge di Ampère vale, senza nessuna riserva, quando considerata una superficie chiusa qualunque, l'intensità di corrente di conduzione i_c che entra è uguale all'intensità di corrente di conduzione i_c che esce.
>
> 
>

Consideriamo ora un circuito RC, nel suo processo di carica e scarica.



Fissata la linea s concatenata al filo e le superfici Σ_1 e Σ_2, calcoliamo la circuitazione di $\vec{B}$ lungo s. Se usassimo la superficie Σ_1, useremmo l'intensità di corrente di conduzione che attraversa il filo; se invece usassimo la superficie Σ_2, che poggia sempre su s, non incontreremmo il filo, quindi la corrente sarebbe nulla. Non è più realizzata la condizione di stazionarietà.

Come già visto in paragrafi precedenti, durante i processi di carica e scarica su un'armatura del condensatore si verifica una variazione di carica nel tempo $\frac{dq}{dt}$, corrispondente alla corrente i entrante nell'armatura, e sull'altra armatura c'è una variazione, eguale in modulo e opposta in segno, $-\frac{dq}{dt}$, che corrisponde a una corrente uscente $i = -\left(-\frac{dq}{dt}\right) = \frac{dq}{dt}$.
Possiamo affermare che ci sarà una variazione netta della carica contenuta nella superficie chiusa formata da Σ_1 e Σ_2. Ricordiamo inoltre il teorema di Gauss, per cui vale $1 = \mathcal{E}_0 \Phi(\vec{E})$.

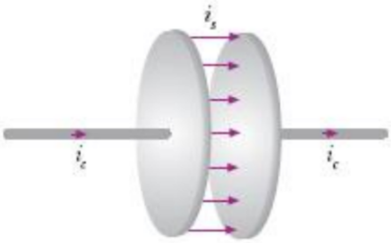
> Definiamo allora la corrente di spostamento come
>
> $$i_s = \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Allora la corrente che percorre il circuito durante la carica è di conduzione i_c attraverso i fili e di spostamento i_s tra le due armature del condensatore.

L'incongruenza che avevamo scoperto nella legge di Ampère viene risolta se consideriamo l'intensità di corrente come somma della corrente di conduzione e della corrente di spostamento

$$i = i_c + i_s$$

Questa intensità soddisfa la condizione di stazionarietà.



> Si modifica la legge di Ampère, trovando la legge di Ampère-Maxwell
>
> $$\oint_s = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i_c + \mathcal{E}_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$
>
> che stabilisce che che i campi magnetici sono prodotti sia dalle correnti di conduzioni che da variazioni temporali del campo elettrico.

Attenzione

Non bisogna essere tratti in inganno: il termine di spostamento coniato da Maxwell non è collegato a nessun moto di carica.

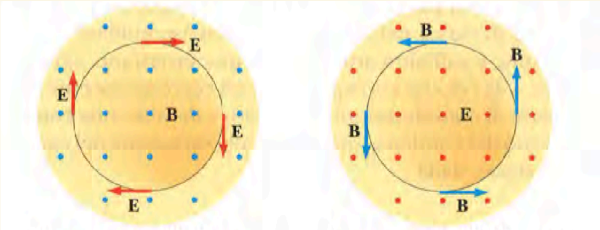
Approfondimento

Anche quando non ci sono correnti di conduzione, ma ci sono variazioni del campo elettrico nel tempo, si individua un campo magnetico

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Si stabilisce quindi una simmetria di comportamento con la legge di Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$



10.2. Le equazioni di Maxwell (forma integrale)

Legge	Formula
Legge di Gauss	$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\vec{\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0}$
Legge di Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$
Legge di Gauss	$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\vec{\Sigma} = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i + \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$

La legge di Gauss per il campo elettrico stabilisce il legame tra carica elettrica e campo elettrico: la struttura è la stessa sia per campi statici che per campi variabili nel tempo. La legge di Faraday mostra che anche un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico. La legge di Gauss per il campo magnetico afferma che il campo magnetico è sempre solenoidale e che quindi non esistono cariche magnetiche libere (monopòli magnetici). Infine la legge di Ampère-Maxwell individua come sorgenti del campo magnetico le correnti di conduzione e le variazioni temporali del campo elettrico.

L'azione che il campo magnetico e il campo elettrico compiono su una carica q_0 si manifesta con la *forza di Lorenz generalizzata*

$$\vec{F} = q_0(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Il moto della carica obbedisce alla *legge di Newton*, quindi $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Ai campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ è associata una *densità di energia elettromagnetica*

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

10.3. Le equazioni di Maxwell (forma differenziale)

Le forme differenziali permettono di ottenere una relazione *locale* tra carica e campo elettrico e corrente e campo magnetico. In questo modo le proprietà dei campi elettrici e magnetici non sono più legate ad interi circuiti o intere superfici chiuse, ma sono valide punto per punto nello spazio. Per passare dalle equazioni integrali scritte qui sopra alle equazioni differenziali si usano il *teorema della divergenza* per le equazioni dei flussi e il *teorema di Stokes* per le equazioni delle circuitazioni.

Legge	**Formula**
Legge di Gauss	$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
Legge di Faraday	$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
Legge di Gauss	$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
Legge di Ampère-Maxwell	$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Le equazioni di Maxwell nel vuoto

Legge	**Forma integrale**	**Forma differenziale**
Legge di Gauss	$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$	$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Legge	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Faraday	$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$	$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
Legge di Gauss	$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\vec{\Sigma} = 0$$	$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
Legge di Ampère-Maxwell	$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i + \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$	$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Lontano dalle sorgenti dei campi le formule assumono una forma interessante:

Legge	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss	$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\vec{\Sigma} = 0$$	$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
Legge di Faraday	$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$	$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
Legge di Gauss	$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_s d\vec{\Sigma} = 0$$	$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
Legge di Ampère-Maxwell	$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$	$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$