Lezione_03

1.1.15. Esercizio 1.7

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superfice. **Calcolare il campo elettrostatico sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui R tende all'infinito** (piano uniformemente carico).

$\vec{E}_x^{\text{anello}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{(x+R^2)}\right]^{3/2}$

Il disco non è altro che un insieme di anelli infinitesimi, quindi si può usare l'additività per sommare i singoli contributi di tutti gli anelli, ognuno di raggio diverso.

$q = \sigma\pi R^2$
$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$
$dE = \frac{\sigma r r d}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\right]$
$E_x = \int_0^R \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[\frac{r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}\right] = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r}{(x^2+r^2)}^{3/2} dr = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$

Per $R \to \infty$ il campo diventa $E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}$

1.1.16. Linee di forza del campo elettrostatico

> Le linee di forza del campo elettrostatico sono una rappresentazione grafica complessiva del campo in tutto lo spazio, ottenuta dalle curve le cui tangenti in ogni punto hanno la stessa direzione del campo in quel punto.

Sono curve regolari e continue, tranne che nei punti corrispondenti a posizioni occupate dalle cariche puntiformi.
Non forniscono direttamente l'intensità del campo.

Nella rappresentazione delle linee di campo si perde l'informazione sull'intensità.

1.1.16.1. Proprietà

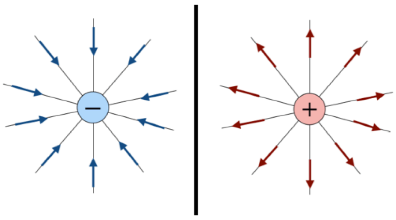
Queste sono proprietà universalmente valide per le linee di forza:

- Una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto;

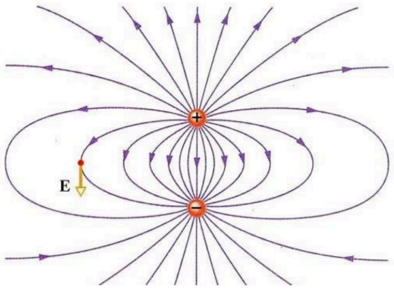
- Le linee di forza si addensano dove l’intensità di campo è maggiore (si recuperano quindi alcune informazioni sull'intensità);
- Le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo elettrostatico è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- Le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative. Si chiudono all’infinito se ci sono solo cariche dello stesso segno.

1.1.17. Esempi di linee di campo elettrostatico

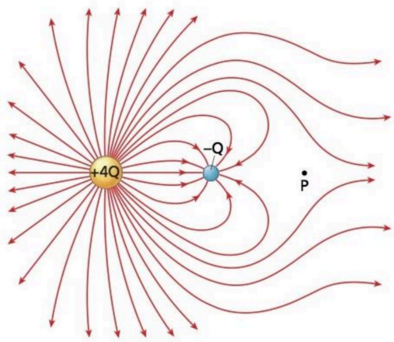
Per cariche puntiformi:



Per un dipolo:



Per due cariche di segno opposto e differente modulo:



1.2. Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico

1.2.1. Lavoro della forza elettrostatica

Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica per uno spostamento finito di una carica q dalla posizione A alla posizione

B

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{s} = -q(V_B - V_A)$$

Dove abbiamo definito la *differenza di potenziale elettrostatica*

$$-(V_B - V_A) = \int_A^B E \cdot ds$$

1.2.1.1. Conservatività del campo elettrico

La differenza di potenziale elettrostatica è indipendente dal percorso scelto per arrivare dal punto A al punto B:
$-(V_B - V_A) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\xi \vec{E} \cdot d\vec{s}$
Infatti il campo elettrostatico è conservativo, così come la forza elettrostatica.

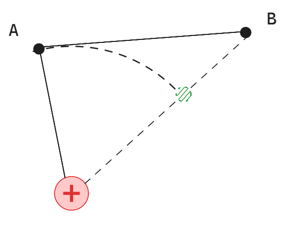
La circuitazione del campo elettrostatico è sempre uguale a zero.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

> **Osservazione**
>
> In questo caso per circuitazione si intende l'integrale di linea lungo il percorso chiuso, indicato con il simbolo "$\oint$".

1.2.2. Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

Siccome il potenziale non dipende dalla scelta del percorso, scegliamo il percorso che ci permetta di semplificare il calcolo.



Posso "spostarmi" in un punto più vantaggioso sfruttando il fatto che forza e campo siano sempre a 90° fra di loro, quindi il lavoro dello spostamento è zero. Ottengo quindi una formula del tipo:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

quindi che dipende solamente dalla distanza dei punti dalla carica.

Se imponiamo che all'infinito il potenziale sia nullo abbiamo

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

1.2.2.1. Additività del potenziale elettrostatico

Vige il principio di sovrapposizione, quindi se il campo elettrostatico è generato da i cariche, quello totale avrà la seguente formula:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{A,i}}^{r_{B,i}} \frac{dr_i}{r_i^2}$$

Se imponiamo che all'infinito il potenziale sia nullo abbiamo

$$V(x, y, z) = -\int_\infty^P \vec{E}\, d\vec{s} = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

dove r_i è la distanza tra il punto $P(x, y, z)$ e la carica q_i.

1.5.3.1. Esercizio 2.1

Calcolare il potenziale elettrostatico nel centro di un triangolo equilatero di lato l se in ogni vertice è presente una carica q.

$V = -\int_\infty^{\text{centro}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$
$V_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}$
$r = \frac{l}{\sqrt{3}}$

Per simmetria ho che $V_1 = V_2 = V_3$ (in modulo).
$V_{tot} = \sum V_i = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}$

1.5.3.2. Generalizzazione

Nel caso in cui le cariche siano distribuite in modo continuo il potenziale elettrostatico diventa

$$V(x, y, z) = -\int_\infty^P \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distribuzione}} \frac{dq}{r}$$

dove r è la distanza tra il punto $P(x, y, z)$ e l'elemento infinitesimo di carica dq.

Unità di misura

Poiché la *differenza di potenziale* è un lavoro diviso per una carica, l'unità di misura nel SI è `joule/coulomb`, J/C. Questa unità è molto importante e si chiama *volt*, di simbolo V; quindi

$$V = \frac{J}{C}$$

La differenza di potenziale di $1V$ è quella che dà luogo al lavoro di $1J$ per il trasporto di una carica di $1C$.
Si noti che il volt è l'unità di misura anche delle tensioni elettriche e delle forze elettromotrici.