Lezione_06_fis

3.3. Applicazioni del teorema di Gauss

Abbiamo studiato che in generale il campo elettrostatico per una distribuzione di carica si calcola con $\vec{E}(x,y,z) = \int_{\text{distribuzione}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{u}$ (con r la distanza tra il punto (x,y,z) e l'elemento di carica dq, $\hat{u}$ è il versore tra il punto e l'elemento di carica dq); questa è una soluzione formale, ma spesso - operativamente parlando - calcolare questo integrale è molto difficile.

Un'alternativa per il calcolo del campo elettrostatico è data dal teorema di Gauss, la cui espressione non fornisce una relazione diretta tra il campo elettrostatico e la distribuzione di carica. In alcune situazioni, studiando le simmetrie del sistema e scegliendo superfici opportune riusciamo a calcolare l'espressione del campo facilmente.

3.3.1. Esempio 3.2

Una carica q è distribuita con densità spaziale costante ρ su una sfera di raggio R. Calcolare il campo elettrostatico nei punti interi ed esterni alla sfera.

3.3.2. Esempio 3.3

Una carica è distribuita con densità di linea uniforme λ su un filo rettilineo molto lungo (al limite infinito). Calcolare il campo elettrostatico nei punti esterni al filo.

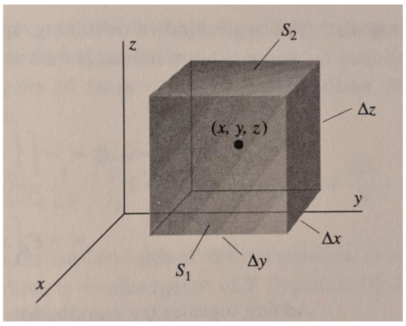
3.3.3. Esempio 3.4

Una carica è distribuita con densità di superficie σ su un piano indefinito. Calcolare il campo elettrostatico.

3.4. Divergenza del campo elettrostatico

Conosciamo le forme integrali del potenziale, il flusso e la circuitazione, ma conosciamo la forma differenziale (locale) solo per il potenziale, proviamo allora a calcolarla per il flusso.

Scegliamo un punto $P(x,y,z)$ e calcoliamo il flusso attraverso un cubo centrato in P.



$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau dq = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0}$, con ΔV il volume del cubo.

Ora prendiamo il limite per il cubo che tende a zero:
$\lim_{\Delta V \to 0} \Phi(\vec{E}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0} = 0$
Se dividiamo per ΔV il rapporto tende a un valore finito:
$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi(\vec{E})}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

> Definiamo quindi la divergenza
>
> $$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Svolgiamo l'integrale: $\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint_{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \sum_{i=1}^{6} \oint_{S_i} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$ con S_i la i−esima faccia del cubo.

Calcoliamo l'integrale su S_1: $\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$.
Il cubo è molto piccolo, quindi possiamo considerare il campo costante e uguale al suo valore al centro della faccia.
$\oint_{S_1} = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = E_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y \Delta z$

Calcoliamo l'integrale su S_2 sfruttando la stessa considerazione:
$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = -E_x(x - \Delta x, y, z)\Delta y \Delta z$.
Il segno meno viene dalla normale che punta verso il basso.

Calcoliamo: $\lim_{\Delta V \to 0}(E_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y \Delta z - E_x(x - \Delta x, y, z)\Delta y \Delta z)\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} =$
$= (E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x - \Delta x, y, z)\frac{1}{\Delta x} = \frac{d}{dx}E_x$

Il calcolo è analogo lungo S_3 e S_4, ottenendo quindi
$\lim_{\Delta V \to 0}(\oint_{s_3} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma + \oint_{S_4} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma)\frac{1}{\Delta V} = \frac{d}{dy}E_y$.
Lungo S_5 e S_6 ottengo invece $\lim_{\Delta V \to 0}(\vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma + \oint_{S_6} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma)\frac{1}{\Delta V} = \frac{d}{dz}E_z$

Sommando tutto ottengo perciò:
$\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma}{\Delta V} = \frac{d}{dx}E_x + \frac{d}{dy}E_y + \frac{d}{dz}E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Forma integrale	**Forma differenziale (locale)**
$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot ds$	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$
$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau dq$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Forma integrale	Forma differenziale (locale)
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	?

3.4.1. Equazione di Poisson

$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V \end{cases} \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \vec{\nabla}^2 V = \frac{d^2 x}{d^2 x} V + \frac{d^2}{d^2 y} V + \frac{d^2}{d^2 z} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ con $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ e $\vec{\nabla}^2$ Laplaciano

$\implies V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distribuzione}} \frac{dq}{r}$

L'equazione di Poisson riassume le proprietà fondamentali del campo elettrostatico, cioè la sua conservatività e la legge di Gauss con il suo andamento.