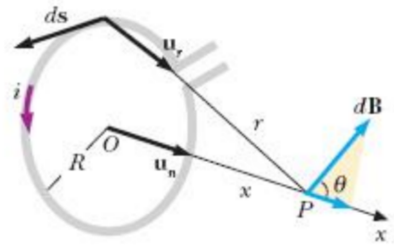
1.7.2. Campi magnetici di circuiti particolari (applicazioni della prima legge di Laplace)

1.7.2.1. Campo di una spira lungo il suo asse normale

Al centro di una spira di raggio R, percorsa da una corrente i, il campo è $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} ds\vec{u}_n$, quindi

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\vec{u}_n \oint ds = \frac{\mu_0 i}{2R}\vec{u}_n$$

visto che $\oint s = 2\pi R$.



Spostandosi lungo l'asse x, che coincide con l'asse normale della spira, vale sempre $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{u}_r}{r^2}$, ma adesso $d\vec{B}$ avrà una componente sia lungo x, sia una trasversale.
Consideriamo l'elemento infinitesimo di circuito posto in maniera simmetrica rispetto a $d\vec{s}$: le componenti di $d\vec{B}$ parallele all'asse x si sommano, mentre quelle trasversali si annullano due a due, per la simmetria del problema. Possiamo quindi limitare il calcolo alla componente lungo l'asse x. Notiamo inoltre che $d\vec{s} \times \vec{u}_r$ sono sempre ortogonali. Otteniamo dunque la formula

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{r^2}\cos\theta$$

dove θ è l'angolo formato tra l'asse x e $d\vec{B}$.
Infine, otteniamo la formula totale per il campo lungo l'asse della spira: $\vec{B}(x) = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\cos\theta\vec{u}_n \oint s = \frac{\mu_0 i}{2r^2}R\cos\theta\vec{u}_n =$ usando $\theta = \frac{R}{r}$
$= \frac{\mu_0 i}{2r^3}R^2\vec{u}_n$ usando $r^2 = x^2 + R^2$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{u}_n$$

Lontano dalla spira ($x \gg R$) si ha $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}\vec{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i\pi R^2}{x^3}\vec{u}_n = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2\vec{m}}{r^3}$, indicando con $\vec{m} = i\pi R^2\vec{u}_n$ il momento magnetico della spira, si nota che la struttura è identica a quella del campo elettrostatico sull'asse di un dipolo ($\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$),quindi il campo generato vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$$

ed è un *campo di dipolo magnetico*.
Si può generalizzare a una spira di qualsiasi forma.

1.7.2.1.1. Linee di campo generate dal dipolo magnetico

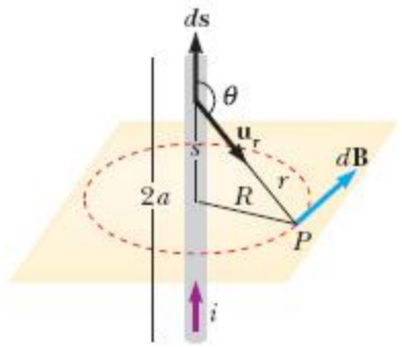
Esiste una differenza sostanziale tra le linee del campo elettrico e del campo magnetico di una spira, che è la caratteristica peculiare che contraddistingue in generale di due campi:

- le linee di forza del campo elettrostatico $\vec{E}$ escono ed entrano nelle cariche sorgenti;
- le linee del campo magnetico $\vec{B}$ sono linee chiuse, senza inizio e senza fine.

Le linee di campo magnetico sono *concatenate con la sorgente* che le ha prodotte. Inoltre, prendendo un percorso chiuso coincidente con una delle linee del campo, si può osservare che il campo è sempre equiverso lungo tale linea e quindi la sua *circuitazione non* può essere *nulla*.

1.7.2.2. Campo di un file rettilineo - legge di Biot-Savart

Consideriamo il campo generato da un filo rettilineo di lunghezza $2a$, in cui scorre corrente continua i, sul piano bisettrice; ci poniamo sul punto P a distanza R dal filo.



Un elemento di filo produce campo magnetico

$$d\vec{B} = \frac{\mu o i}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta ds}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{R}$$

usando che $r\sin(\pi-\theta) = r\sin\theta = R$ e $s\tan(\pi-\theta) = -s\tan\theta = R$.

Quindi il campo generato in totale da un file di lunghezza a si calcola integrando tra $\frac{\pi}{2}$ e θ_{max}, dove θ_{max} corrisponde all'angolo

formato dalla quota massima $s = a$: $B_a = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos\theta_{max}$.
Allora si ha

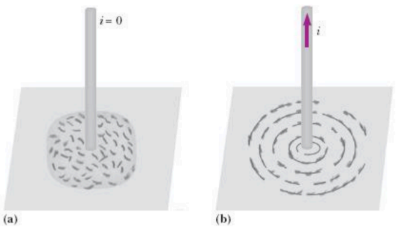
$$B_a = \frac{\mu_0 i a}{4\pi R\sqrt{R^2 + a^2}}$$

Prendendo tutto il filo iniziale in esame si ottiene il campo

$$\vec{B} = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R\sqrt{R^2 + a^2}} \vec{u}_\phi$$

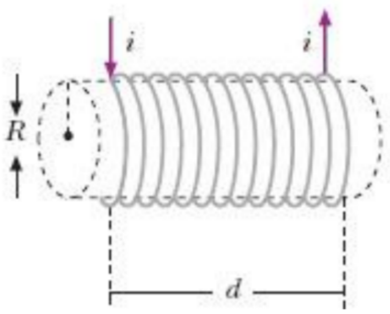
con $\vec{u}_\phi$ il versore tangente alla circonferenza orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite.

> Infine, facendo tendere a infinito la lunghezza del filo si ottiene la *legge di Biot-Savart*, che afferma che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende *solo dalla distanza dal filo*, in modo inversamente proporzionale; le sue *linee* sono *circonferenze concentriche* al filo e risultano pertanto *concatenate alla corrente*, *sorgente del campo stesso*.
>
> $$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi$$



1.7.2.3. Campo di un solenoide rettilineo lungo il suo asse

> **Ricorda**
>
> Un solenoide è una bobina formata da N spire circolari di raggio R, lunga d, in cui scorre una corrente i. È caratterizzato dalla densità di spire per unità di lunghezza $n = \frac{N}{d}$.

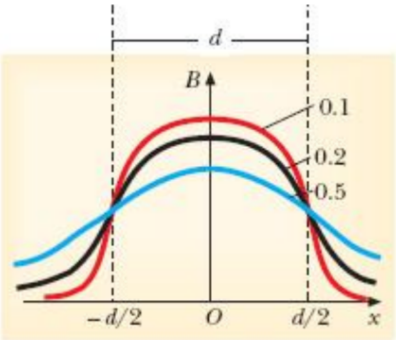


Si può dimostrare, sommando il campo generato da tutte le spire, che il campo magnetico generato da un solenoide rettilineo è pari a

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 n i}{2}\left[\frac{\frac{d}{2}+x}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2+R^2}} + \frac{\frac{d}{2}-x}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2+R^2}}\right]$$

Al centro del solenoide ($x=0$) il campo è massimo e vale

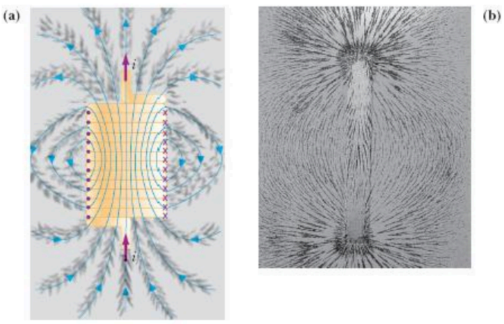
$$B_O = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2+4R^2}}$$



Se la lunghezza del solenoide è molto maggiore rispetto al raggio, il campo all'interno del solenoide (lontano dai bordi) si può approssimare con

$$B_\infty = \mu_0 n i$$

Le sue linee di campo sono molto simili a quelle di un magnete cilindrico

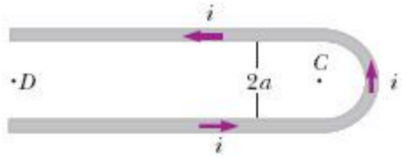


P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

1.7.2.4. Esercizi

1.7.2.4.1. Esercizio 7.12

Un filo conduttore è piegato a "U", come in figura, la distanza tra i due fili paralleli è $2a = 2cm$, la corrente che vi scorre è $i = 0,5A$. Calcolare il campo magnetico in un punto D, molto lontano dal tratto di filo curvo, di cui si trascura l'effetto. Calcolare poi il campo magnetico nel punto C.



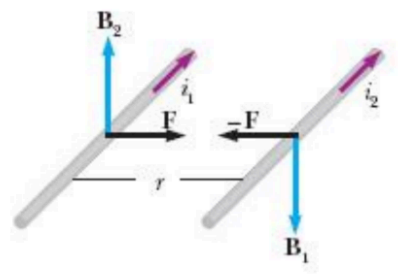
1.7.2.4.2. Esercizio 7.13

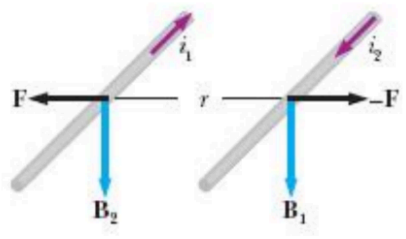
Una sottile lamina conduttrice di larghezza $h = 2cm$ è percorsa dalla corrente $i = 10A$. Calcolare il valore del campo magnetico $B(x)$ a distanza x dal bordo della striscia. Calcolare poi il momento meccanico $\vec{M}$ che agisce su un piccolo ago magnetico di momento $m = 0,1\vec{u}_x Am^2$, posto a distanza $x = 1cm$.

1.7.3. Azioni elettrodinamiche tra i fili percorsi da corrente

Consideriamo due fili rettilinei paralleli molto lunghi e abbastanza vicini, così da poter essere considerati *indefiniti*, percorsi dalle correnti i_1 e i_2. Ciascun filo risente della forza esercitata dal campo magnetico prodotto dall'altro filo (dato dalla legge di Biot-Savart).
Le due forze sono uguali e contrarie, *attrattive* se le *correnti* sono *equiverse*, *repulsive* se *contrarie*. La formula è data da

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \qquad |\vec{F}| = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$





1.7.3.1. Esempio 7.1

Due spire circolari di raggio $R = 30cm$ aventi lo stesso asse sono poste in piani paralleli orizzontali distanti $a = 3mm$. La spira superiore è appesa al giogo di una bilancia.
Se nelle spire circola la stessa corrente $i = 1A$ nello stesso verso,

per ristabilire l'equilibrio occorre aggiungere sull'altro piatto della bilancia una massa m. Calcolare m.