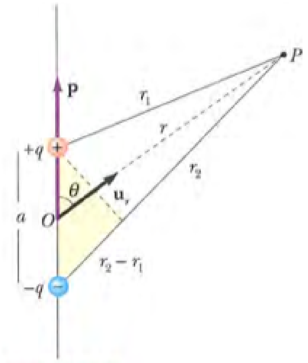
Lezione_05_fis

2.11. Dipolo elettrico

Due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti a formano un dipolo elettrico.
Ricordo che $V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$



Poniamo P molto lontano, cioè $P \gg a$, otteniamo $r_2 - r_1 = a\cos\theta$, $r_1 r_2 = r^2$, perciò

$$V(p) = \frac{q_1 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q\vec{a}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

con $\vec{a}$ il vettore che punta dalla carica negativa alla carica positiva. Il suo modulo è pari alla distanza tra le cariche.

2.11.1 Momento del dipolo elettrico

> Definiamo il momento del dipolo elettrico come
>
> $$\vec{p} = q\vec{a}$$

Osservazione

La quantità $\vec{p}$ non da informazioni sulla costituzione del sistema: hanno lo stesso momento di dipolo due cariche $2q$ a distanza $\frac{a}{2}$ rispetto a due cariche q a distanza a.

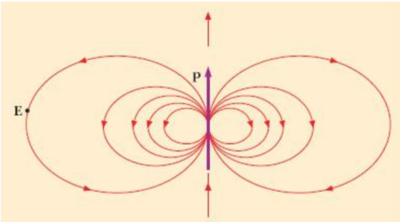
2.11.2. Campo elettrico generato dal dipolo

Ricordando che $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ e il risultato appena ottenuto $V(P) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, potrei calcolare il gradiente come $\vec{\nabla}V = \frac{dV}{dx}\hat{x} + \frac{dV}{dy}\hat{y} + \frac{dV}{dz}\hat{z}$, ma considerato che $V(P)$ è scritto come coordinate polari, quindi conviene calcolare il gradiente come

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\hat{\theta}$$

Ottengo quindi alla fine

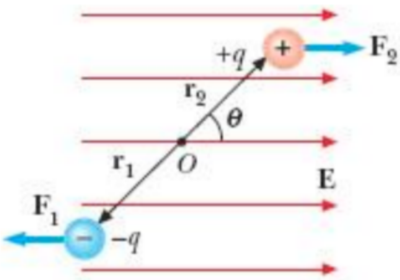
$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$



Lungo l'asse del dipolo ($\theta = 0$ o $\theta = \pi$) il campo è parallelo e con corde a p e vale $\vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.
Lungo l'asse mediano ($\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3\pi}{2}$) il campo è parallelo e discorde a $\vec{p}$ e vale $\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

2.11.3. Dinamica del dipolo

Consideriamo un dipolo di momento $\vec{p}$ posto in una regione in cui agisce un campo elettrostatico $\vec{E}$ uniforme.
Avrò che $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$ e $\vec{F}_2 = q\vec{E}$, cioè sono uguali ma discordi. La risultante delle forze è uguale a zero, quindi non c'è movimento del centro di massa (notare che le cariche del dipolo sono vincolate, non si possono separare ulteriormente).



Le forze hanno un momento meccanico diverso da zero:
$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} = -pE\sin\theta\hat{z}$. Questo momento meccanico tende a far ruotare $\vec{p}$ fino a renderlo parallelo e concorde al campo. è una "bussola" del campo elettrico.

2.11.4. Espansione a multipolo

Una distribuzione complessivamente neutra, genera comunque un campo elettrico e ne subisce gli effetti.
In generale il potenziale di una distribuzione arbitraria di carica (con $r \gg a$) può essere scritta come:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\hat{r}\cdot\vec{Q}\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

usando l'espansione a multipolo.

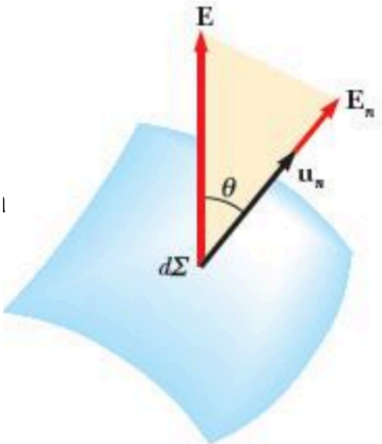
I dipoli atomici e molecolari sono molto importanti nello studio della materia. Alcuni dipoli si formano quando un forte campo elettrico deforma (polarizza) un atomo o una molecola. Lo vedremo quando studieremo i dielettrici.
Altre molecole hanno una struttura a dipolo anche in assenza di un campo elettrico, come as esempio la molecola di acqua H_2O.

3. La legge di Gauss

3.1 Flusso del campo elettrostatico

Consideriamo l'elemento di superficie infinitesimo $d\Sigma$.

> Definiamo il flusso del campo elettrostatico $\vec{E}$ attraverso questo elemento di superficie come
>
> $$d\Phi = \vec{E}\cdot\vec{u}_n d\Sigma$$
>
> dove $\vec{u}_n$ è il versore normale alla superficie, $\vec{E}_n$ è la proiezione del campo elettrostatico lungo la normale della superficie.



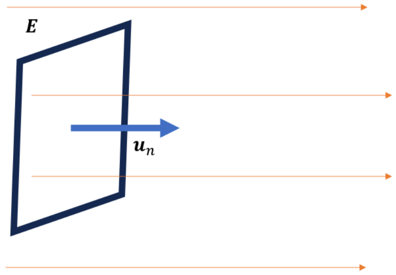
💡 **Analogia**

Immaginiamo che il campo $\vec{E}$ rappresenti la velocità di un fluido in movimento, per esempio di un fiume, dove la velocità varia da un posto all'altro ma si mantiene costante nel tempo.
$\vec{u}_n d\Sigma$ rappresenta allora un'area orientata di una telaio immerso nell'acqua.

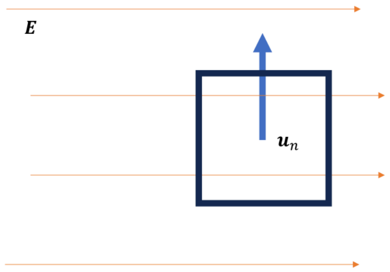
Allora $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$ rappresenta la "rapidità" con cui fluisce l'acqua attraverso la cornice del telaio.

Consideriamo l'elemento di superficie così piccolo che possa essere considerato piano, così il campo $\vec{E}$ non varia:

1. **Superficie e campo paralleli:** $d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = Ed\Sigma$



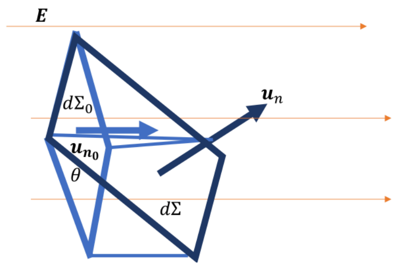
2. **Superficie e campo ortogonali:** $d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot u_n d\Sigma = 0$



3. **In generale:**

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = E \cos\theta d\Sigma = Ed\Sigma_0$$

Ciò è equivalente a calcolare il flusso attraverso la superficie $d\Sigma_0$, che è perpendicolare al campo elettrostatica poiché è la proiezione di $d\Sigma$ sul piano perpendicolare al campo, ma ha un'area minore uguale a $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos\theta$

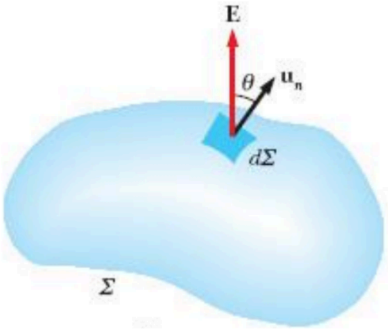


Consideriamo il flusso attraverso la superficie finita Σ, che è anche chiusa. Suddividiamo Σ in elementi infinitesimi di superficie $d\Sigma$ e sommiamo i contributi infinitesimi:

$$\Phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

Orientiamo le normali delle superfici infinitesime verso l'esterno. Se $\vec{E} \cdot \vec{u}_n > 0$ si dice che il flusso è *uscente*, invece se $\vec{E} \cdot \vec{u}_n < 0$ si dice che il flusso è *entrante*.

Se il flusso è *nullo* vuol dire che il *flusso entrante eguaglia quello uscente*.



3.1.1. Esempio

Calcoliamo il flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme. Scegliamo come superficie una sfera di raggio R concentrica con la carica.

3.2. Teorema di Gauss

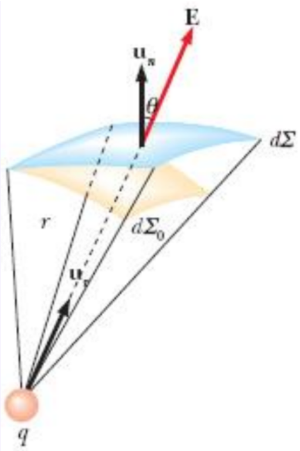
> Il flusso del campo elettrostatico $\vec{E}$, prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa, è uguale alla somma algebrica della cariche contenute al suo interno divisa per ϵ_0.
>
> $$\Phi(\vec{E}) = \oint \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \in \text{interne}} q_i$$

Notare che il flusso non dipende dalla superficie scelta.

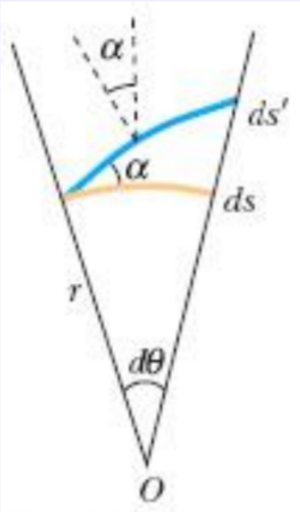
Angolo solido

Sia $d\Sigma$ un elemento di superficie, $\vec{u}_n$ la sua normale e $d\Sigma_0$ la sua proiezione ortogonale a $\vec{u}_r$, il versore di raggio r uscente da un punto di osservazione O.

> Si definisce *angolo solido infinitesimo* la quantità
>
> $$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos\alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$



Questa è l'estensione a tre dimensioni del concetto di angolo piano infinitesimo $d\theta = \frac{ds\cos\alpha}{r} = \frac{ds_0}{r}$.

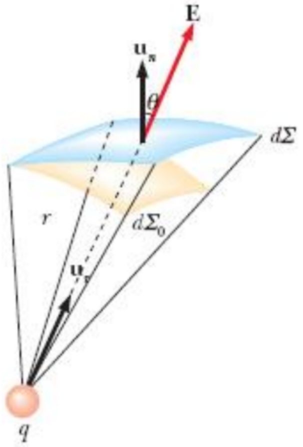


3.2.1. Dimostrazione del Teorema di Gauss

Prendiamo in esame il campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme attraverso un elemento di superficie $d\Sigma$.

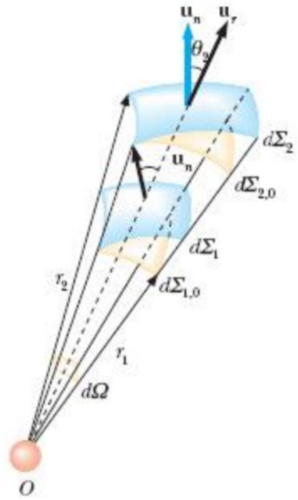
$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_n\cdot\vec{u}_r}{r^2}d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$$

Il flusso del campo elettrostatico di una carica puntiforme dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie o dalla distanza dalla carica.



Il flusso è lo stesso per qualsiasi superficie $d\Sigma$ il cui contorno si appoggi alla superficie del cono definito dall'angolo solido $d\Omega$ poiché

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_1 \cos\theta_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_{1,0}}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2 \cos\theta_2}{r_2 r} = \frac{d\Sigma_{2,0}}{r_2^2}$$



Una carica interna genera flusso solamente uscente:
$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$.
Una carica esterna genera sia flusso entrante, sia uscente:
$d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$
$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\Phi_1$
Quindi i flussi entranti e uscenti si annullano a vicenda e quello risultante sarà nullo.

Vige il principio della sovrapposizione, perciò:
$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \vec{u}_n d\Sigma$
Ciascun integrale vale $\frac{q}{\epsilon_0}$ per le cariche interne, mentre è nullo per quelle esterno. Segue quindi che

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \in \text{interne}} q_i$$

Generalizzato per funzioni continue ottengo

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau dq$$

dove τ è il volume racchiuso dalla superficie Σ.