Fondamenti di analisi matematica e probabilità

Indice

Lo spazio e le curve

Lo spazio e la distanza

Vettori e norma in $\mathbb{R}^n$

Un generico vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ si indica con $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ dove n sono le dimensioni dello spazio.

Esempi

$n = 1 \;\; x \in \mathbb{R}$
$n = 2 \;\; \underline{x} = (x, y)$
$n = 3 \;\; \underline{x} = (x, y, z)$.

Definizione (norma e distanza)

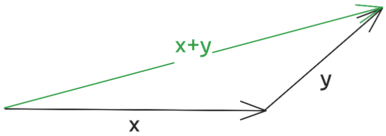
La norma di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è definita come $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_{n-1}^2 + x_n^2}$.

La distanza tra $x, y \in Rr^n$ è $(x, y) = ||x - y||$

Proposizione (disuguaglianza triangolare)

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, allora

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$



Definizione (palla aperta/chiusa)

Una "palla" chiusa di centro $p \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r \geq 0$ (se $r = 0$ è degenere, quindi un punto) è definita come l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ la cui distanza è minore uguale di r, cioè:

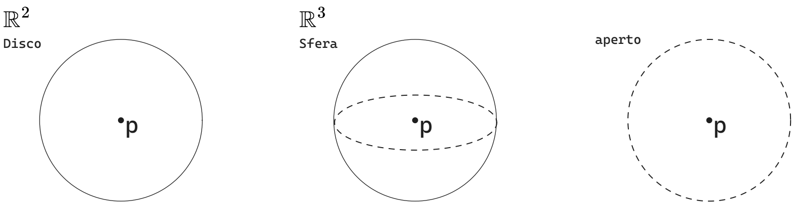
$$B(p,r] := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : ||x-p|| \leq r\}$$

Analogamente la palla aperta di stesso centro e raggio è indicata con

$$B(p,r[:= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : ||x-p|| < r\}$$

La differenza, chiamata *(iper)sfera* (cerchio se le dimensioni sono due), è

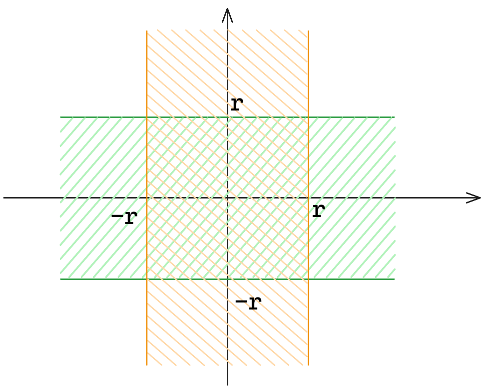
$$\partial B(p,r] = \partial B(p,r[:= \{\underline{x} \in \mathbb{R} : ||x-p|| = r\}$$

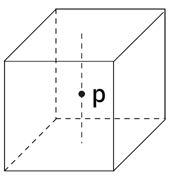


Definizione (quadrati/(iper)cubi chiusi/aperti)

Un cubo (quadrato se le dimensioni sono due, ipercubo se le dimensioni sono più di tre) chiuso di centro $q \in \mathbb{R}^n$ e semilato (o raggio) r si definisce come

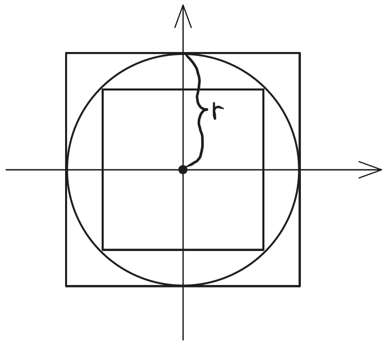
$$Q(q,r] = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1 - q_1| \leq r,\ \dots,\ |x_n - q_n| \leq r\}$$





Proposizione

Ogni palla contiene un cubo di stesso centro e viceversa ogni cubo contiene una palla con lo stesso centro. Infatti per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ e $r \geq 0$ si ha $B(p,r] \subseteq Q(p,r)$ e $Q(p,r] \subseteq B(p,r\sqrt{n}]$



Dimostrazione

a)

$B(p,r] \subseteq Q(p,r]$

Se $x \in B(p,r]$ allora $\forall i = 1,\ldots,n$ si ha $|x_i - p_i| \leq |x-p| \leq r$ da cui $x \in Q(p,r]$.

b)

$Q(p,r] \subseteq B(p,r\sqrt{n}]$
Se $x \in Q(p,r]$ allora $|x-p|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - p_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n r^2 = nr^2$.
Perciò $x \in B(p,r\sqrt{n}]$.
$\square$