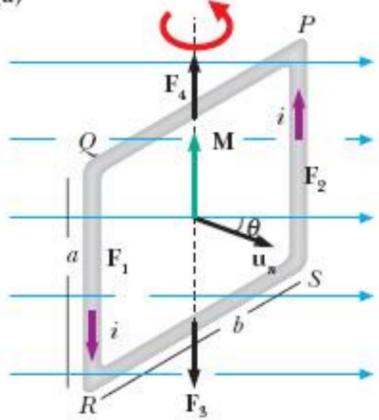


## Lezione\_14\_fis

### 6.7. Moto meccanico su circuiti piani

(a)



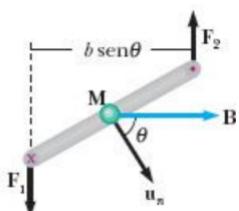
Consideriamo una spira rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , percorsa da corrente  $i$ , immersa in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme, come in figura. Orientiamo il versore  $\vec{u}_n$  della normale al piano della spire usando la regola della mano destra, allora  $\vec{u}_n$  forma un angolo  $\theta$  con  $\vec{B}$ .

Le forze che agiscono sulla spira sono:

- Sul lato  $\overrightarrow{RS}$  agisce una forza  $\vec{F}_3$  di modulo  $|\vec{F}_3| = ibB$  che punta verso il basso;
- Sul lato  $\overrightarrow{QP}$  agisce una forza  $\vec{F}_4$  di modulo  $|\vec{F}_4| = ibB$  che punta verso l'alto.

Le forze magnetiche  $\vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  sono uguali e contrarie e hanno la stessa retta di azione: nel loro insieme formano una coppia di braccio nullo, quindi di momento nullo.

(b)



- Sul lato  $\overrightarrow{QR}$  agisce una forza  $\vec{F}_1$  di modulo  $|\vec{F}_1| = iaB$  che punta verso fuori;
- Sul lato  $\overrightarrow{PS}$  agisce una forza  $\vec{F}_2$  di modulo  $|\vec{F}_2| = iaB$  che punta verso dentro.

Le forze magnetiche  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  sono anch'esse uguali e contrarie, ma hanno diversa retta d'azione: costituiscono una coppia di braccio

$b \sin \theta$ . Il loro momento meccanico vale

$$M = b \sin \theta F = iabB \sin \theta = i\Sigma B \sin \theta$$

definendo il momento magnetico  $\vec{m}$  della spira otteniamo

$$\vec{m} = i\Sigma \vec{u}_s \quad \vec{M} \times \vec{m} \times \vec{B}$$

### 💡 Osservazione

Le formule dedotte per la spira, valgono in realtà per un circuito piano di qualsiasi forma.

In analogia con quanto visto per il dipolo elettrico, anche per il dipolo magnetico (spira o ago magnetico) si definisce un'*energia potenziale*, legata alla posizione angolare rispetto alla direzione di  $\vec{B}$ .

$$U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -|\vec{m}| |\vec{B}| \cos \theta$$

Tra momento meccanico e energia potenziale sussiste la relazione

$$\vec{M} = \frac{dU_p}{d\theta} = -mB \sin \theta$$

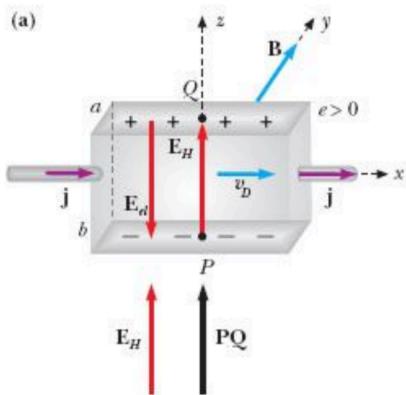
### ⚡ Unità di misura

Nel sistema internazionale, l'unità di misura del *momento di dipolo magnetico* è

$$\frac{A}{m^2} = \frac{J}{T}$$

## 6.8. Effetto Hall

Consideriamo un conduttore a forma di nastro sottile, di sezione  $\Sigma = ab$ , è percorso da una corrente di intensità  $i$  con verso concorde all'asse  $x$ . Il nastro è sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  concorde con l'asse  $y$ , allora su ciascun portatore di carica agisce la forza di Lorentz  $\vec{F} = e\vec{v}_d \times \vec{B}$ .



La forza di Lorentz provoca una *deflessione nel moto* delle cariche, aggiungendo una componente perpendicolare alla velocità di deriva, di conseguenza tende ad accumulare cariche di segno opposto sulle due facce ortogonali all'asse  $z$ .

L'accumulo di cariche crea un campo elettrostatico che si oppone a un ulteriore accumulo e porta il sistema verso un equilibrio.

A questo proposito, definiamo il *campo elettromotore di Hall* come

$$\vec{E}_H = \vec{v}_d \times \vec{B} = \left( \frac{i}{\Sigma n e} \right) \vec{u}_x \times \vec{B}$$

ricordando che  $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_d$  e  $i = \Sigma j$ .

Questo campo elettromotrice è la sorgente di una forza elettromotrice, in quanto causa una forza di natura non elettrostatica, non conservativa, che determina il moto continuo delle cariche. La condizione di equilibrio è allora

$$\vec{E}_H + \vec{E}_{el} = 0 \quad \text{o} \quad q(\vec{v}_d \times \vec{B} + \vec{E}_{el}) = 0$$

### ! Osservazione

Il verso di  $\vec{E}_H$  dipende dal segno della carica: se  $e > 0$ ,  $\vec{E}_h$  è concorde all'asse  $z$ , mentre è discorde all'asse  $z$  se  $e < 0$ .

All'equilibrio, il sistema si comporta come un generatore in cui non circola corrente, la cui tensione è

$$\mathcal{E}_H = \int_P^Q E_h \cdot dz = E_h b = \frac{iB}{nea}$$

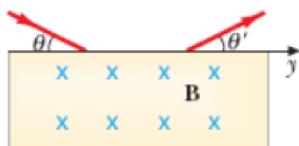
### Ω Approfondimento

Grazie all'*effetto di Hall trasversale* (il fenomeno appena descritto) si può determinare il segno dei portatori di carica e la densità di carica  $ne$  dei portatori.

Nella maggior parte dei metalli, i portatori sono gli elettroni, ma in alcuni metalli il segno di  $\mathcal{E}_H$  corrisponde a portatori positivi. Questo non rappresenta davvero un moto di particelle positive (che è solo *apparente*), ma un moto *in direzione inversa* di elettroni, che si spostano da una zona neutra a una con *lacune* (positive), andando a colmarle; rendono dunque la prima zona positiva e la seconda neutra.

## 6.9. Esercizio 6.1

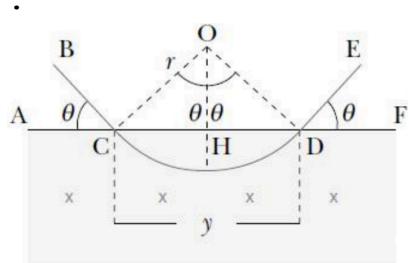
Un protone di energia cinetica  $E_K = 6\text{MeV}$  entra in una regione di spazio in cui esiste un campo magnetico  $B = 1\text{T}$  ortogonale al piano della traiettoria (verso entrante), formando con l'asse  $y$  l'angolo  $\theta = 30^\circ$ . Calcolare l'angolo  $\theta'$  della direzione di uscita con l'asse  $y$  e la distanza lungo  $y$  tra il punto di uscita e il punto di ingresso.



Il raggio di curvatura vale  $r = \frac{mv}{eB}$ .

L'angolo d'ingresso è uguale all'angolo di uscita.

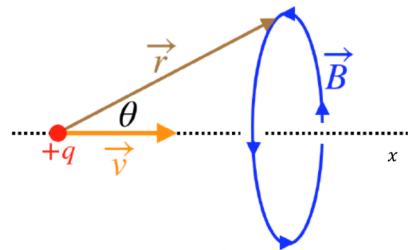
La distanza tra il punto d'ingresso e quello di uscita vale  $y = 2r \sin \theta$



Ciò si spiega visto che:  $C$  è il punto d'ingresso nella zona con campo magnetico e  $O$  è il centro del moto circolare uniforme; il segmento  $\overline{BC}$  è parallelo alla traiettoria iniziale e l'angolo  $\widehat{BCO}$  è di  $90^\circ$  perché la velocità lineare è sempre tangenziale in un moto circolare uniforme.

## 7. Sorgenti del campo magnetico, legge di Ampère, proprietà magnetiche della materia

### 7.1. Campo magnetico generato da una carica in movimento



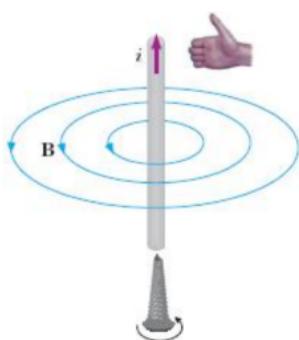
Supponiamo di avere una carica  $q$  che si muove con moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $x$  con velocità  $\vec{v}$ , essa genera un campo magnetico

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{q}{4\pi r^2} \vec{v} \times \vec{u}_r = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

ricordando che il campo elettrostatico generato dalla carica vale  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

La costante  $\mu_0$  è chiamata *permeabilità magnetica nel vuoto*.

Il modulo del campo magnetico vale  $|\vec{B}| = \mu_0 \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \theta$ , che ci dice che le linee di campo sono *circonferenze con l'asse x come centro*, orientate secondo la regola della mano destra.



#### ! Osservazione

Questa formula mostra che campo elettrico e magnetico sono collegati, dunque è un primo suggerimento dell'esistenza del *campo elettromagnetico*.

#### 7.1.1. Prima legge di Laplace

Generalizziamo il campo generato da un elettrone a quello di una corrente che scorre dentro un conduttore sfruttando l'additività del

campo. In un tratto di conduttore lungo  $d\vec{s}$  e di sezione  $\Sigma$  sono contenuti  $N = n\Sigma d\vec{s}$  elettroni, otteniamo allora la formula:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi r^2} (\Sigma ds) n(-e) \vec{v}_d \times \vec{u}_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\Sigma ds) \vec{j} \times \vec{u}_r = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \vec{u}_r, \text{ ricordando che } \vec{j} = n(-e) \vec{v}_d \text{ e } i = \Sigma j.$$

Dunque, grazie ai suoi esperimenti, Laplace formulò la legge

$$d\vec{B} = k_m \frac{i}{r^2} d\vec{s} \times \vec{u}_r$$

con  $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ .

Per ottenere il campo magnetico  $B$  prodotto da un circuito chiuso si usa la *legge di Ampère-Laplace*

$$\vec{B} = \oint_{\text{circuito}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\text{circuito}} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

che risulta verificata sperimentalmente in ogni situazione.

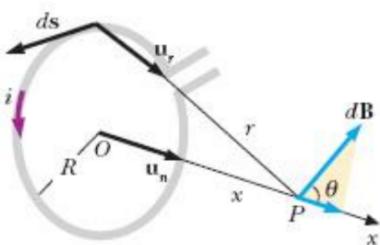
## 7.2. Campi magnetici di circuiti particolari (applicazioni della prima legge di Laplace)

### 7.2.1. Campo di una spira lungo il suo asse normale

Al centro di una spira di raggio  $R$ , percorsa da una corrente  $i$ , il campo è  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} ds \vec{u}_n$ , quindi

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \vec{u}_n \oint ds = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{u}_n$$

visto che  $\oint s = 2\pi R$ .



Spostandosi lungo l'asse  $x$ , che coincide con l'asse normale della spira, vale sempre  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$ , ma adesso  $d\vec{B}$  avrà una componente sia lungo  $x$ , sia una trasversale.

Consideriamo l'elemento infinitesimo di circuito posto in maniera simmetrica rispetto a  $d\vec{s}$ : le componenti di  $d\vec{B}$  parallele all'asse  $x$  si sommano, mentre quelle trasversali si annullano due a due, per la simmetria del problema. Possiamo quindi limitare il calcolo alla componente lungo l'asse  $x$ . Notiamo inoltre che  $d\vec{s} \times \vec{u}_r$  sono sempre

ortogonali. Otteniamo dunque la formula

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato tra l'asse  $x$  e  $d\vec{B}$ .

Infine, otteniamo la formula totale per il campo lungo l'asse della spira:  $\vec{B}(x) = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos \theta \vec{u}_n \oint s = \frac{\mu_0 i}{2r^2} R \cos \theta \vec{u}_n$  usando  $\theta = \frac{R}{r}$   
 $= \frac{\mu_0 i}{2r^3} R^2 \vec{u}_n$  usando  $r^2 = x^2 + R^2$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_n$$