Dati e algoritmi

0. Indice

Lezione 01

1. Nozioni

1.1. Problema computazionale

Un problema computazionale è costituito da

- un insieme I di *istanze* (i *possibili input*)
- un insieme S di *soluzioni* (i *possibili output*)
- una relazione Π che a ogni istanza $i \in I$ associa *una o più* soluzioni $s \in S$

> **Osservazione**
>
> Π è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $I \times S$

1.1.1. Esempi

Somma di Interi (Z)

- $\mathcal{I}= \{(x, y) \ : \ x, y \in Z\}$;
- $\mathcal{S}= Z$;
- $\Pi = \{((x, y), s) \ : \ (x, y) \in \mathcal{I}, s \in \mathcal{S}, s = x + y\}$.
  Ad es: $((1, 9), 10) \in \Pi$; $((23, 6), 29) \in \Pi$ $((13, 45), 31) \notin \Pi$

Ordinamento di array di interi

- $\mathcal{I}= \{A \ : \ A =$ array di interi$\}$;
- $\mathcal{S}= \{B \ : \ B =$ array ordinati di interi$\}$;
- $\Pi = \{(A, B) \ : \ A \in \mathcal{I}, B \in \mathcal{S}, B$ contiene gli stessi interi di $A\}$.
  Ad es.

$$(<43, 16, 75, 2>, <2, 16, 43, 75>) \quad \in \quad \Pi$$
$$(<7, 1, 7, 3, 3, 5>, <1, 3, 3, 5, 7, 7>)$$
$$(<13, 4, 25, 17>, <11, 27, 33, 68>)$$

Ordinamento di array di interi (ver.2)

- $\mathcal{I}= \{A \ : \ A =$ array di interi$\}$;
- $\mathcal{S}= \{P \ : \ P =$ permutazioni$\}$;
- $\Pi = \{(A, P) \ : \ A \in \mathcal{I}, P \in \mathcal{S}, P$ ordina gli interi di $A\}$.
  Ad es.

$$(<43, 16, 75, 2>, <4, 2, 1, 3>) \quad \in \quad \Pi$$
$$(<7, 1, 7, 3, 3, 5>, <2, 4, 5, 6, 1, 3>) \quad \in \quad \Pi$$
$$(<7, 1, 7, 3, 3, 5>, <2, 5, 4, 6, 1, 3>) \quad \in \quad \Pi$$
$$(<13, 4, 25, 17>, <1, 2, 4, 3>)$$

> **Osservazione**
>
> - Istanze diverse possono avere la stessa soluzione (come la somma)
> - Un'istanza può avere diverse soluzioni (come l'ordinamento ver. 2)

1.1.2. Esercizi

Esercizio

Specificare come problema computazionale Π la verifica se due insiemi finiti di oggetti da un universo U sono disgiunti oppure no.

$I \equiv \{(A, B) : A, B \subseteq U, \ A, B \text{ finiti}\}$

$S \equiv \{true, \ false\}$

$\Pi \equiv \{((A, B), s) \text{ se } A \cap B = \emptyset \text{ allora } s = true, \text{ se } A \cap B \neq \emptyset \text{ allora } s = false\} \quad {\scriptstyle s \in S, \, (A, B) \in I}$

Esercizio

Specificare come problema computazionale Π la ricerca dell'inizio e della lunghezza del più lungo segmento di 1 consecutivi in una stringa binaria.

$$I \equiv \{A : A \text{ è una stringa binaria}\}$$
$$S \equiv \{(i,l) : i,l \in \mathbb{N}_0\}$$
$$\Pi \equiv \{(A,(i,l)) : i \text{ la casella di inizio del segmento di 1 consecutivi più numeroso}, l \text{ la lunghezza del segmento di 1 consecutivi più lungo}\}$$

1.2. Algoritmo e modello di calcolo

1.2.1. Algoritmo

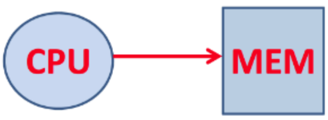
Un *algoritmo* procedura computazionale ben definita che trasforma un dato *input* in un *output* eseguendo una sequenza finita di *operazioni elementari*.

□

L'algoritmo fa riferimento a un *modello di calcolo*, ovvero un'astrazione di computer che definisce l'insieme di operazioni elementari.

Le operazioni elementari sono: assegnamento, operazioni logiche, operazioni aritmetiche, indicizzazione di array, return di un valore da parte di un metodo, ecc.

1.2.2. Modello di calcolo RAM (Random Access Machine)



In questo modello input, output, dati intermedi (e il programma) si trovano in memoria.

Un algoritmo A risolve un *problema computazionale* $\Pi \subseteq I \times S$ *se*:

1. A calcola una funzione da I a S e quindi,
   - riceve come input istanze $i \in I$
   - produce come output soluzioni $s \in S$
2. Dato $i \in I$, A produce in output $s \in S$ tale che $(i,s) \in \Pi$.
   Se Π associa più soluzioni a una istanza i, per tale istanza A ne calcola una (quale dipende da come è stato progettato).

[Lezione 02]

1.3. Pseudocodice

Per semplicità e facilità di analisi, descriviamo un algoritmo utilizzando uno pseudocodice strutturato come segue:

> **Algoritmo** nome(parametri)
> **Input**: breve descrizione dell'istanza di input
> **Output**: breve descrizione della soluzione restituita in output
> Descrizione chiara dell'algoritmo tramite costrutti di linguaggi di programmazione e, se utile ai fini della chiarezza, anche tramite linguaggio naturale, dalla quale sia facilmente determinabile la sequenza di operazioni elementari eseguita per ogni dato input.

"Algoritmo nome (parametri)" è la firma (signature) dell'algoritmo; i parametri sono l'input.
Si può usare il linguaggio naturale per cose semplici, che sarebbero lunghe da scrivere con i costrutti del linguaggio di programmazione.

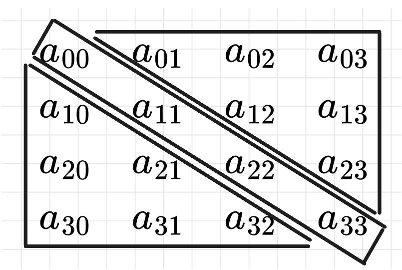
Usare *sempre* questa struttura per lo pseudocodice!

Per maggiori dettagli fare riferimento alla dispensa sulla [Specifica di Algoritmi in Pseudocodice](), disponibile sul Moodle del corso.

1.3.1. Esempio – Trasposta di una matrice $n \times n$ di interi

Problema computazionale: $\Pi \subseteq I \times S$
$I \equiv \{A : \text{matrice } n \times n \text{ di interi}\}$
$S \equiv \{B : \text{matrice } n \times n \text{ di interi}\}$
$\Pi \equiv \{(A, B) : A \in I, B \in S, B = A^t\}$

Algoritmo: idea per $n = 4$



Scambio ciascuna entry a_{ij} della matrice triangolare superiore ($a_{ij} : i = 0, \ldots, n-2, j > i$) con a_{ji} (l'omologa del triangolo inferiore)

Algoritmo `transpose(A)`
Input: matrice A $n \times n$ di interi a_{ij}, $0 \leq i, j \leq n$.

Output: matrice A^t.

```
for i <- 0 to n-2 do{
    for j <- i+1 to n-1 do{
        scambia a_ij con a_ji
    }
}
return A
```

1.4. Taglia di un'istanza

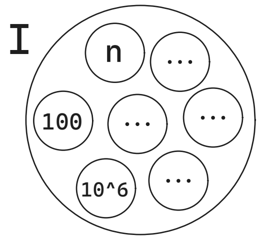
L'analisi di un algoritmo (ad esempio la determinazione della sua complessità) viene solitamente fatta *partizionando le istanze in gruppi in base alla loro taglia (size)*, in modo che le istanze di un gruppo siano tra loro *confrontabili*.

> La *taglia di un'istanza* è espressa da uno o più valori che ne caratterizzano la grandezza.

1.4.1. Esempi

- Se ho n elementi da ordinare con un `MergeSort`, la taglia è n. In questo caso fa riferimento alla dimensione fisica dell'istanza.

La taglia serve per dividere in gruppi omogenei da analizzare separatamente.



- Ordinamento di un array:
  Taglia n = numero di elementi dell'array
- Trasposta di una matrice:
  Prendendo una generica matrice $n \times m$ ho più modi di definire la taglia, in base al tipo di analisi che si vuole condurre:
  - Taglia $x = n * m$
  - Taglia (n, m), con n e m rispettivamente il numero di righe e numero di colonne
  - (Se $n = m$) Taglia $n =$ numero di righe/colonne

1.5. Struttura dati

Le strutture dati sono usate dagli algoritmi per organizzare e accedere in modo sistematico ai dati di input e ai dati generati durante l'esecuzione.

1.5.1. Struttura dati - definizione

> Una *struttura dati* è una collezione di oggetti corredata di *metodi* di accesso e/o modifica.

Vi sono due *livelli di astrazione*:

1. *Livello logico*: specifica l'organizzazione logica degli oggetti della collezione, e la relazione input-output di ciascun metodo (a questo livello si parla di *Abstract Data Type* o ADT)
2. *Livello fisico*: specifica il layout fisico dei dati e la realizzazione dei metodi tramite algoritmi.

1.5.1.1. Esempio

In Java a livello logico ho (gerarchia di) *interfacce*, mentre a livello fisico ho (gerarchia di) *classi*.
□

1.5.2. Esercizio

Siano A e B due array di n e m interi, rispettivamente. Scrivere un algoritmo in pseudocodice per calcolare il seguente valore:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (A[i] \cdot B[j])$$

1.5.3. Esercizio

Sia A un array di n interi distinti, ordinato in senso crescente, e x un valore intero. Scrivere due algoritmi in pseudocodice che implementano la ricerca binaria per trovare x in A. Entrambi gli algoritmi restituiscono l'indice i tale che $A[i] = x$, se x appare in A, e -1 altrimenti. Il primo algoritmo deve essere iterativo e usare un solo ciclo, e il secondo algoritmo deve essere ricorsivo.

2. Analisi degli algoritmi

L'analisi di un algoritmo A mira a studiarne l'*efficienza* e l'*efficacia*. In particolare, essa può valutare la ***complessità*** di *tempo* e *spazio*, e la ***correttezza*** di *terminazione* (se termina o rimane in un loop) e della *soluzione del problema computazionale*.

Noi ci concentreremo sulla complessità di tempo e sulla correttezza della soluzione del problema computazionale.

2.1. Complessità in tempo

L'*obiettivo* è *stimare il tempo di esecuzione ("running time") di un algoritmo* al fine di valutarne l'efficienza e poterlo confrontare con altri algoritmi per lo stesso problema.

2.1.1. Requisiti per la complessità in tempo

La complessità in tempo deve:

1. Riguardare *tutti gli input*;
2. Permettere di *confrontare algoritmi* (senza necessariamente determinare il tempo di esecuzione esatto);
3. Essere *derivabile dallo pseudocodice*.

2.1.1.1. Esempio

Stimare sperimentalmente il tempo di esecuzione di un algoritmo (ad esempio in Java con `System.currentTimeMillis()`) è utile, ma non soddisfa i requisiti. **Perché?**

- Non si possono considerare tutti gli input (se infiniti);
- Richiede di implementare l'algoritmo con un programma e l'impatto dell'implementazione può influenzare il confronto tra algoritmi;
- La stima dipende dall'ambiente hardware/software.

2.1.1.2. Approccio che soddisfa i requisiti

- Analisi al *caso pessimo* (*worst-case*) in funzione della taglia dell'istanza (requisiti 1 e 2)
- Conteggio delle operazioni elementari nel modello RAM (requisiti 2 e 3)
- Analisi asintotica (per semplificare il conteggio)

> **Osservazione**
>
> Esiste anche l'analisi al caso medio (*average case*) e l'analisi probabilistica.

2.1.2. Complessità (in tempo) al caso pessimo – definizione

Sia A un algoritmo che risolve $\Pi \subseteq I \times S$.

> La complessità (in tempo) al caso pessimo di A è una funzione $t_A(n)$ definita come *il massimo numero di operazioni elementari che A esegue per risolvere un'istanza di taglia n*.

In altre parole, se chiamiamo $t_{A,i}$ il numero di operazioni eseguite da A per l'istanza i, abbiamo che

$$t_A(n) = max\{t_{A,i} : \text{ istanza } i \in I \text{ di taglia } n\}$$

La definizione rispetta [i tre requisiti]() definiti sopra.

2.1.3. Difficoltà nel calcolo di $t_A(n)$

Determinare $t_A(n)$ per ogni n è arduo, se non impossibile, perché è *difficile identificare l'istanza peggiore di taglia n* e perché è *difficile contare il massimo numero di operazioni richieste per risolvere tale istanza* peggiore (il conteggio richiederebbe anche una specifica dettagliata del set di operazioni elementari del modello RAM).
Ma *non è necessario determinare esattamente $t_A(n)$*, infatti il tempo di esecuzione, che la complessità vuole stimare, dipende da tanti fattori che è impossibile quantificare in modo preciso, in più le diverse operazioni elementari del modello RAM possono avere impatto diverso sui tempi di esecuzione a seconda delle architetture.
Ci accontentiamo dei *limiti superiori* e i *limiti inferiori* a $t_A(n)$.

2.1.4. Esempio (`arrayMax`)

Algoritmo `arrayMax(A)`
Input: array $A[0 \div n-1]$ di $n \geq 1$ interi.
Output: max intero in A.

```
currMax<-A[0]
for i<-1 to n-1 do{
     if(currMax < A[i]) then currMax<-A[i];
}
return currMax
```

Taglia dell'istanza: n (ragionevole)

2.1.4.1. Stima di $t_{\text{arrayMax}}(n)$

È facile vedere che per una qualsiasi istanza di taglia n:

- al di fuori del ciclo for `arrayMax` esegue un numero costante (rispetto a n) di operazioni;
- in ciascuna delle $n-1$ iterazioni del ciclo for si esegue un numero costante di operazioni.
  Esistono allora quattro costanti $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ tali che per ogni n valga $t_{\text{arrayMax}}(n) \le c_1 n + c_2$ (cioè il *limite superiore*) e $t_{\text{arrayMax}}(n) \ge c_3 n + c_4$ (cioè il *limite inferiore*). Non è necessario stimare le quattro costanti per le stesse ragioni per cui non è necessario stimare esattamente la complessità.

2.2. Analisi asintotica

Si ricorre quindi all'analisi asintotica, ignorando i *fattori moltiplicativi costanti* (rispetto alla taglia dell'istanza) e i *termini additivi non dominanti*.

2.2.1. Esempio (`arrayMax`)

Riprendendo l'esempio, nel caso di `arrayMax` possiamo affermare che $t_{\text{arrayMax}}(n)$ è *al più* proporzionale a n (limite superiore) ed è anche *almeno* proporzionale a n (limite inferiore), ne consegue quindi che $t_{\text{arrayMax}}(n)$ è *proporzionale* a n (limite stretto).
□

> Per esprimere affermazione come quelle fatte sopra si usano gli **ordini di grandezza**: $O(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $o(\cdot)$.

Lezione 03

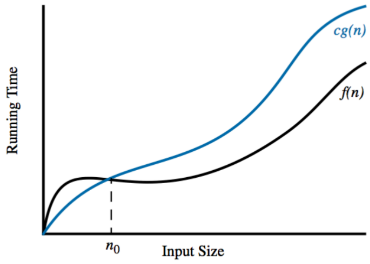
2.3. Ordini di grandezza

Siano $f(n)$, $g(n)$ funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

2.3.1. O-grande

> $f(n) \in O(g(n))$ se $\exists c > 0$ e $\exists n_0 \ge 1$, *costanti rispetto a n*, tali che
> $$f(n) \le c \cdot g(n) \quad \forall n \ge n_0$$

Cioè se $f(n)$ è al più proporzionale a $g(n)$, ovvero se $f(n)$ non cresce asintoticamente più di $c \cdot g(n)$.



2.3.1.1. Esempi

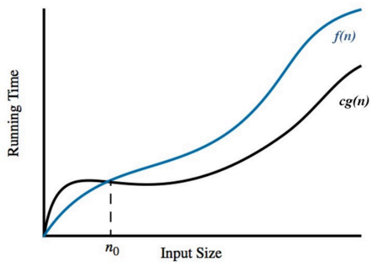
$f(n)$	$O(\cdot)$	c	n_0
$3n+4$ per $n \geq 1$	$O(n)$	4	4
$n+2n^2$ per $n \geq 1$	$O(n^2)$	3	1
2^{100} per $n \geq 1$	$O(1)$	2^{100}	1
$c_1 n + c_2$ per $n \geq 1$, $c_1, c_2 > 0$	$O(n)$	$c_1 + c_2$	1

Si può dire che $3n+4 \in O(n^5)$, $c = 7$, $n_0 = 1$, ma non sarebbe molto utile.

2.3.2. Omega-grande

> $f(n) \in \Omega(g(n))$ se $\exists c > 0$ e $\exists n_0 \geq 1$, *costanti rispetto a n*, tali che
> $$f(n) \geq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

Cioè $f(n)$ è almeno proporzionale a $g(n)$.



2.3.2.1. Esempi

$f(n)$	$\Omega(\cdot)$	c	n_0
$3n+4$ per $n \geq 1$	$\Omega(n)$	1	4
$n+2n^2$ per $n \geq 1$	$\Omega(n^2)$	1	1
2^{100} per $n \geq 1$	$\Omega(1)$	2^{100}	1
$c_1 n + c_2$ per $n \geq 1$, $c_1, c_2 > 0$	$\Omega(n)$	1	1

2.3.3. Theta

> $f(n) \in \Theta(g(n))$ se
>
> $$f(n) \in O(g(n)) \;\; \text{e} \;\; f(n) \in \Omega(g(n))$$

Cioè $f(n)$ è (*esattamente*) proporzionale a $g(n)$.

2.3.3.1. Esempi

- $f(n) = 3n + 4 \in \Theta(n)$;
- $f(n) = n + 2n^2 \in \Theta(n^2)$;
- $f(n) = 2^{100} \in \Theta(1)$;
- $t_{\text{arrayMax}}(n) \in \Theta(n)$.

2.3.4. o-piccolo

> $f(n) \in o(g(n))$ se
>
> $$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Cioè $f(n)$ è *asintoticamente* più piccola (cresce meno) di $g(n)$.

2.3.4.1. Esempi

- $f(n) = 100n$ per $n \geq 1 \implies f(n) \in o(n^2)$;
- $f(n) = \frac{3n}{\log_2 n}$ per $n \geq 1 \implies f(n) \in o(n)$.

2.3.5. Proprietà degli ordini di grandezza

1. $max\{f(n), g(n)\} \in \Theta(f(n) + g(n))$ per ogni $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
2. $\sum_{i=0}^{k} a_i n^i \in \Theta(n^k)$, se $a_k > 0$, k, a_i costanti, e $k \geq 0$.
   Ad esempio: $(n+1)^5 \in \Theta(n^5)$.
   Cioè tengo il termine con l'esponente maggiore;
3. $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, se $a, b > 1$ sono costanti;

   > **Osservazione**
   > La proprietà deriva dalla relazione $\log_b n = (\log_a n)(\log_b a)$ e, grazie a essa, *la base dei logaritmi*, se costante, *si omette negli ordini di grandezza*, a meno che il logaritmo non sia all'esponente.

4. $n^k \in o(a^n)$, se $k > 0$, $a > 1$ sono costanti;
5. $(\log_b n)^k \in o(n^h)$ se b, k, h sono costanti, con $b > 1$ e $h, k > 0$.

2.3.6. Strumenti matematici

2.3.6.1. Parte bassa

> $\forall x \in \mathbb{R}$, si definisce $\lfloor x \rfloor$ come il più grande intero tale che sia $\leq x$.

2.3.6.1.1. Esempi

- $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$;
- $\lfloor 3 \rfloor = 3$.

2.3.6.2. Parte alta

> $\forall x \in \mathbb{R}$, si definisce $\lceil x \rceil$ come il più piccolo intero tale che sia $\geq x$.

2.3.6.2.1. Esempi

- $\lceil \frac{3}{2} \rceil = 2$;
- $\lceil 3 \rceil = 3$.

2.3.6.3. Modulo

> $\forall x, y \in Z$, con $y \neq 0$, si definisce $x \bmod y$ come il resto della divisione intera x/y (l'operatore "%" in Java).

2.3.6.3.1. Esempi

- $29 \bmod 7 = 4$;
- $80 \bmod 4 = 0$.

2.3.6.4. Sommatorie notevoli

$\forall n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$, con $n \geq 0$ e $a > 0$ vale:

- $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$;
- $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \in \Theta(a^n)$ per $a > 1$;
- $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} - 1 \in \Theta(a^n)$ per $a > 1$.

2.4. Analisi di complessità in pratica

Dato un algoritmo A e detta $t_A(n)$ la sua complessità al caso pessimo, si cercano limiti asintotici superiori e/o inferiori a $t_A(n)$.

2.4.1. Limite superiore (upper bound) - definizione

> $$t_A(n) \in O(f(n))$$

Si prova argomentando che per ogni n "abbastanza grande" e per ciascuna istanza di taglia n l'algoritmo esegue $\leq c \cdot f(n)$ *operazioni*, con c costante (e che non serve determinare).

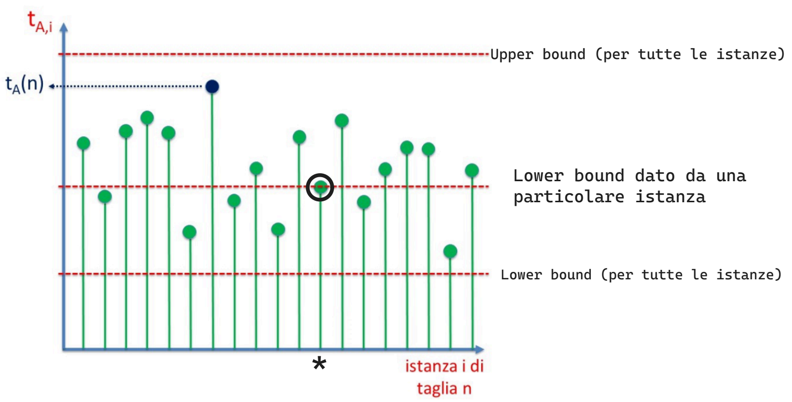
2.4.2. Limite inferiore (lower bound) – definizione

> $$t_A(n) \in \Omega(f(n))$$

Si prova argomentando che per ogni n "abbastanza grande", *esiste* un'istanza di taglia n per la quale l'algoritmo esegue $\geq c \cdot f(n)$ *operazioni*, con c costante (e che non serve determinare).
In alcuni casi è comodo argomentare che per *ciascuna* istanza di taglia n l'algoritmo esegue $\geq c \cdot f(n)$ operazioni.

> ⚠ **Attenzione**
>
> Sia che si provi $t_A(n) \in O(f(n))$ o che si provi $t_A(n) \in \Omega(f(n))$
>
> - $f(n)$ deve essere più vicino possibile alla complessità vera (*tight bound*)
> - $f(n)$ deve essere più semplice possibile, quindi senza costanti e termini additivi di ordine inferiore, solo con i *termini essenziali*!

2.4.3. Limiti superiori e inferiori



2.4.4. Terminologia per complessità

> - logaritmica: $\Theta(\log n)$, base 2 o costante > 1
> - lineare: $\Theta(n)$
> - quadratica: $\Theta(n^2)$
> - cubica: $\Theta(n^3)$
> - polinomiale $\Theta(n^c)$, $c > 0$ costante

- esponenziale: $\Omega(a^n)$, $a > 1$ costante
- polilogaritmica: $\Theta((\log n)^c)$, $c > 0$ costante

2.4.5. Esempio (prefix averages)

Si consideri il seguente problema computazionale.
Dato un array di n interi $X[0 \dots n-1]$ calcolare un array $A[0 \dots n-1]$ dove $A[i] = \left(\sum_{j=0}^{i} X[j]\right) \frac{1}{i+1}$, per $0 \leq i < n$.

Vedremo adesso due algoritmi di cui uno banale e inefficiente, poi uno più furbo ed efficiente. Per entrambi gli algoritmi vale la seguente specifica di input-output:
Input: $X[0 \dots n-1]$ array di n interi.
Output: $A[0 \dots n-1] : A[i] = \left(\sum_{j=0}^{i} X[j]\right) \frac{1}{i+1}$ per $0 \leq i < n$.

2.4.5.1. Algoritmo inefficiente

Algoritmo `prefixAverages1`

```
for i <- 0 to n-1 di{
     a <- 0;
     for j <- 0 to i do {
          a <- a+X[j];
     }
     A[i] <- a/(i+1);
}
return A
```

- Fuori dal for esterno: $\Theta(1)$ operazioni
- Per ciascuna iterazione i del for esterno ($i = 0, \dots, n-1$):
  - $\Theta(i+1)$ operazioni nel for interno
  - $\Theta(1)$ altre operazioni

La complessità è quindi:
$t_{pA1}(n) \in \Theta\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} i + 1\right) = \Theta\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) = \Theta\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = \Theta(n^2)$.

2.4.5.2. Algoritmo efficiente

Algoritmo `prefixAverages2`

```
s <- 0;
for i <- 0 to n-1 do{
     s <- s + X[i];
     A[i] <- s/(i+1);
```

```
    }
    return A
```

- Fuori dal for: $\Theta(1)$ operazioni
- Iterazioni i del for ($i = 0, \ldots, n-1$): $\Theta(1)$ operazioni

La complessità è quindi: $t_{pA2}(n) \in \Theta\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} 1\right) = \Theta(n)$

Possiamo affermare che $t_{pA2}(n) \in o(t_{pA1}(n))$, cioè è migliore.

Lezione 04

2.4.6. Esercizi

2.4.6.1. Analisi complessità in tempo

Sia A un algoritmo che ricevuto in input un array X di $n \geq 1$ interi esegue

- $c_1 n$ operazioni per ogni intero pari in X
- $c_2 \lceil \log_2 n \rceil$ operazioni per ogni intero dispari in X
  dove c_1 e c_2 sono costanti positive.
  Analizzare la complessità in tempo dell'algoritmo esprimendola con $\Theta(\cdot)$.

Per un'istanza particolare (es: array di tutti interi pari) ho $\Theta(n^2)$, ho quindi ricavato un lower bound.

- Taglia dell'istanza: n
- Complessità: $t_A(n)$
- Upper bound: $\forall$ istanza di taglia n, A esegue
  $\leq n\max\{c_1 m, c_2 \lceil \log_2 n \rceil\} \leq n\max\{c_1, c_2\}\max\{n, \log_2 n\} = n\max\{c_1, c_2\}n$ operazioni
  $\implies t_A(n) \in O(n^2)$ **(1)**
- Lower bound basato su una particolare istanza:
  Sia X un array di interi pari $\implies$ per tale X, A esegue
  $n \cdot c_1 \cdot n = c_1 n^2$ operazioni $\implies t_A(n) \in \Omega(n^2)$ **(2)**
- Lower bound basato su tutte le istanze:
  $\forall$ istanza di taglia n, A esegue
  $\geq n\min\{c_1 n, c_2 \lceil \log_2 n \rceil\} \geq n\min\{c_1, c_2\}\min\{n, \log_2 n\} = n\min\{c_1, c_2\}\lceil \log_2 n \rceil$
  operazioni $\implies t_A(n) \in \Omega(n \log n)$
  Questo lower bound è peggiore rispetto a quello trovato prima.

2.4.6.1. Descrizione insertion sort

Il seguente pseudocodice descrive l'algoritmo di ordinamento chiamato `InsertionSort` (Si assume che la sequenza S da ordinare sia una variabile globale che dopo la fine dell'algoritmo è accessibile e ordinata).

Algoritmo `InsertionSort(S)`
Input: Sequenza $S[0 \dots n-1]$ di n chiavi.
Output: Sequenza S ordinata in senso crescente.

```
for i<-1 to n-1 do{
     curr<-S[i];
     j<-i-1;
     while((j>=0) AND (S[j] > curr)) do{
          S[j+1]<-S[j];
          j<-j-1;
     }
     S[j+1]<-curr;
}
```

> **Notazione**
>
> Nel caso degli algoritmi di ordinamento, in analogia al libro di testo, usiamo il termine *sequenza* per denotare la collezione di elementi da ordinare che assumiamo rappresentata come array.

1. Trovare opportune funzioni $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$ tali che le seguenti affermazioni siano vere, per una qualche costante $c > 0$ e per n abbastanza grande.
   - Per ciascuna istanza di taglia n l'algoritmo esegue $\leq cf_1(n)$ operazioni.
   - Per ciascuna istanza di taglia n l'algoritmo esegue $cf_2(n)$ operazioni.
   - Esiste un'istanza di tagli a n per la quale l'algoritmo esegue $\geq cf_3(n)$ operazioni
     La funzione $f_1(n)$ deve essere la più piccola possibile, mentre le funzioni $f_2(n)$ e $f_3(n)$ devono essere le più grandi possibili.
2. Sia $t_{IS}(n)$ la complessità al caso pessimo dell'algoritmo. Sfruttando le affermazioni del punto precedente trovare un upper bound $O(\cdot)$ e un lower bound $\Omega(\cdot)$ per $t_{IS}(n)$.

2.4.7. Regola di buon senso

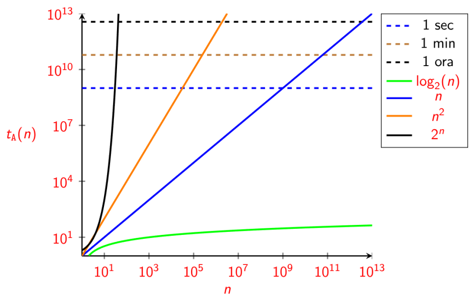
Una complessità polinomiale (o migliore) implica un algoritmo efficiente, mentre una complessità esponenziale implica un algoritmo inefficiente.
Supponiamo che la complessità $t_A(n)$ sia espressa in nanosecondi e definiamo

$$n_\tau \equiv \text{max taglia di un'istanza risolvibile in tempo } \tau$$

Per ottenere n_τ, risolviamo $t_A(n_\tau) = \tau$ rispetto a n_τ.

2.4.7.1. Esempi

$t_A(n)$	n_τ **per** $\tau = 10^9$ **(1 sec)**	n_τ **per** $\tau = 60 * 10^9$ **(1 min)**	n_τ **per** $\tau = 3600 * 10^9$ **(1 ora)**
$\log_2 n$	$2^{10^9} = \infty$	∞	∞
n	10^9	$6 * 10^{10}$	$3.6 * 10^{12}$
n^2	$10^{4.5}$	$\approx 8 * 10^{4.5}$	$\approx 1.8 * 10^6$
2^n	≈ 30	≈ 36	≈ 42



2.4.7.2. Esempio

La crittografia a chiave pubblica è molto usata dai protocolli di sicurezza.
L'invio di un messaggio cifrato da Alice a Bob funziona (in maniera approssimata) in questo modo:

- Bob possiede una chiave privata k_1 e una chiave pubblica k_2;
- Alice invia a Bob un messaggio m cifrato con k_2;
- Bob decifra il messaggio ricevuto da Alice con k_1;

L'*Algoritmo RSA* sviluppato nel 1977 da Rivest, Shamir, Adleman (*Turing Award 2002*) è il più famoso algoritmo di crittografia a chiave pubblica. La sua "sicurezza" si basa sulla difficoltà di risolvere il seguente problema.

2.4.7.2.1. Integer factorization (per interi prodotti di 2 primi)

> Dato un intero N prodotto di due primi p, q, determinare p e q.

Che taglia dell'istanza scelgo?

Posso scrivere, ad esempio, questo algoritmo banale per risolvere il problema:

```
for p<-2 to floor{sqrt{N}} do{
    if(N mod p = 0) then return {p, N/p};
}
```

Esprimiamo la complessità in funzione del numero n bit che servono per rappresentare N. Se $p, q \in \Theta(\sqrt{N})$ la complessità è $\Theta(\sqrt{N}) = \Theta(2^{n/2})$

2.4.7.2.1.1. Esempio numerico

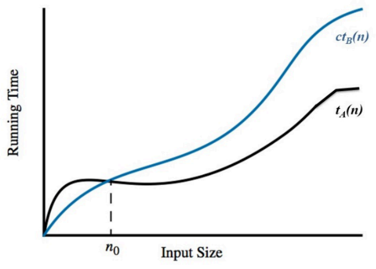
Prendendo $n = 1024$ ottengo $2^{n/2} = 2^{512} \geq 10^{154}$. Sul computer più potente del mondo ($< 10^{19}$ flop/sec) l'algoritmo banale richiederebbe circa $\frac{10^{154}}{10^{19}} = 10^{135}$ secondi. Considerando che un anno ha meno di 10^8 secondi, sarebbero più di 10^{127} anni di calcolo.

> **Nota bene**
>
> Esistono algoritmi più efficienti, ma sempre con complessità esponenziale.

> **Dalla motivazione del A.M. Turning Award 2002 assegnato a Rivest, Shamir e Adleman**
>
> RSA is used in almost all internet-based commercial transactions. Without it, commercial online activities would not be as widespread as they are today. It allows users to communicate sensitive information like credit card numbers over an unsecure internet without having to agree on a shared secret key ahead of time. Most people ordering items over the internet don’t know that the system is in use unless they notice the small padlock symbol in the corner of the screen. RSA is a prime example of an abstract elegant theory that has had great practical application.

2.4.8. Efficienza asintotica degli algoritmi

Dati A, B due algoritmi che risolvono il problema computazionale Π, $t_A(n)$ e $t_B(n)$ sono le complessità rispettivamente di A e B al caso pessimo. Se $t_A(n) \in o(t_B(n))$, allora A è "*asintoticamente più efficiente*" di B.



Nota bene: n_0 potrebbe essere *molto* grande.

> **Caveat sull'analisi asintotica al caso pessimo**
>
> 1. *Le costanti trascurate potrebbero essere elevate* e, in pratica, potrebbero avere un impatto elevato sulle prestazioni.
> 2. *Il caso pessimo potrebbe essere costituito solo da* ***istanze patologiche*** mentre per tutte le istanze di interesse la complessità potrebbe essere asintoticamente migliore.
>   Cosa fare in questo caso?
>   - Restringere il dominio delle istanze, mantenendo quelle di interesse ed escludendo quelle patologiche.
>   - Fare un'analisi al caso medio.

2.5. Analisi di correttezza

2.5.1. Induzione

Per provare che una proprietà $Q(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$ si procede così:

- Si sceglie un intero $k \geq 0$;
- **Base:** si dimostra $Q(n_0)$, $Q(n_0+1)$, ..., $Q(n_0+k)$;
- **Passo induttivo:** si fissa un valore $n \geq n_0 + k$ *arbitrario* e si dimostra che $Q(m)$ vera $\forall m : n_0 \leq m \leq n \implies Q(n+1)$ vera.

> **Osservazioni**
>
> - "$Q(m)$ vera $\forall m : n_0 \leq m \leq n$" è chiamata *ipotezi induttiva*.

- La dimostrazione deve valere *per ogni* $n \geq n_0 + k$
- Di solito, ma non sempre, $k = 0$ (il libro di testo descrive l'induzione con $n_0 = 1$).

2.5.1.1. Esempio

$$Q(n) : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 0$$

Nota bene: Implica che $Q(n) \in \Theta(n^2)$.

- $n_0 = 0, \quad k = 0$
- Base: $Q(0) : \sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ ✓
- Passo induttivo: Fisso $n \geq n_0 + n = 0$ arbitrario.
  Ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2} \quad \forall 0 \leq m \leq n$
  Dimostriamo che $Q(n+1)$ è vera:
  $\sum_{i=0}^{n+1} i = n + 1 + \sum_{i0}^{n} i = n + 1 \frac{n(n+1)}{2}$ = per ipotesi induttiva
  $= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \implies Q(n+1)$ è vera

2.5.1.2. Esercizio

Dimostrare per induzione la seguente proprietà:

$$Q(n) : \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall \geq 0$$

Nota bene: Implica che $\sum_{i=0}^{n} i^2 \in \Theta(n^3)$

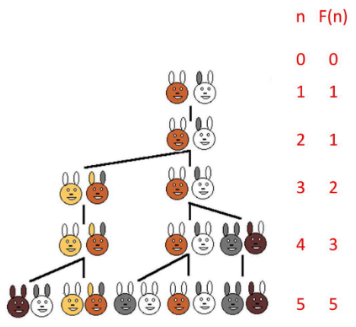
> **Osservazione**
>
> In generale $\sum_{i=0}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1})$, con k costante.

Lezione 05

2.5.1.3. Successione di Fibonacci - esempio

La *successione di Fibonacci* è definita così: $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \\ F(n+1) = F(n) + F(n-1) \end{cases}$ $\forall n \geq 1$.

Si può pensare a $F(n)$ come il numero di coppie di conigli all'inizio del mese n se una coppia genera un'altra coppia ogni mese, a partire dal terzo mese, i conigli non muoiono, all'inizio del mese 1 c'è una coppia neonata.



Dimostrare che

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) \quad (\implies F(n) \in \Theta(N\phi^n))$$

$\forall n \geq 0$, **dove** $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (***golden ratio***) **e** $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2.5.1.3.1. Induzione fallace

Dimostriamo $F(n) = 0$, $\forall n \geq 0$ $(n_0 = 0)$:

- $k = 0$
- Base: $F(0) = 0 \implies \checkmark$
- Passo induttivo: fissato $n \geq 0$ e assumendo $F(m) = 0$ pe rogni $0 \leq m \leq n$ (ipotesi induttiva), si ha $F(n+1) = F(n) + F(n-1) = 0 + 0$

Il passo induttivo non è corretto quando $n = 0$, perché $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$ vale solo per $n \geq 1$. Allora in questo caso devo usare una base più ampia: $n_0 = 0$, $k = 1$.

2.5.2. Correttezza

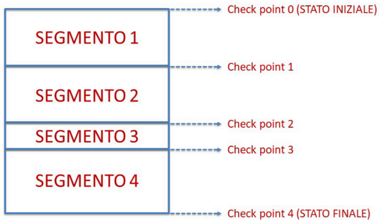
Per provare la correttezza di terminazione, cioè appunto la terminazione, è necessario assicurarsi che i cicli (inclusi i GOTO) e l'eventuale ricorsione abbiano termine.

Gli step dell'approccio generale alla soluzione del problema computazionale sono:

- *Definire lo stato iniziale* dell'algoritmo e quello *finale* che esso *deve raggiungere*;
- *Decomporre l'algoritmo in segmenti* e definire per ogni segmento lo stato in cui l'algoritmo si deve trovare del termine del segmento (*checkpoint*);
- *Dimostrare* che a partire dallo stato iniziale *si raggiungono* in successione *gli stati specificati* per la fine di ogni segmento. In particolare, lo stato che deve valere alla fine dell'ultimo

segmento deve coincidere (o implicare) lo stato finale desiderato.

I *segmenti notevoli* sono cicli (for, while, repeat-until).



Osservazione

I cicli sono i segmenti più difficili da analizzare (perché definiscono *implicitamente* molte operazioni) ma, insieme alla ricorsione, costituiscono gli strumenti essenziali per la scrittura di algoritmi o programmi interessanti.

2.5.3. Invariante

Per provare la correttezza di un ciclo (for, while, repeat-until, ...) bisogna dimostrare che al termine della sua esecuzione vale una certa *proprietà* $\mathcal{L}$ che rappresenta uno stato ed è *funzionale alla correttezza dell'algoritmo*. A tal fine si fa uso di un *invariante*.

> Un *invariante* per un ciclo è una *proprietà* espressa in funzione delle variabili usate nel ciclo, che descrive lo *stato* in cui si trova l'esecuzione alla fine di una generica iterazione del ciclo.

Nota bene

L'invariante deve essere scelto finalizzandolo alla correttezza e alla prova della proprietà $\mathcal{L}$.

2.5.4. Correttezza di un ciclo tramite invariante

Per dimostrare che alla fine del ciclo vale una certa proprietà $\mathcal{L}$, si individua un opportuno invariante e si dimostra che:

1. Esso *vale all'inizio del ciclo* (subito prima che il ciclo inizi);
2. Esso *vale alla fine di ciascuna iterazione*, che si dimostra induttivamente provando che se vale alla fine di una generica iterazione, vale alla fine della successiva;

3. *Alla fine dell'ultima iterazione, l'invariante implica la proprietà* $\mathcal{L}$ (in alcuni casi coincide con essa).

Terminologia

L'esecuzione di un *ciclo* consiste di più di zero iterazioni delle istruzione in esso contenute (*corpo del ciclo*).
Ad esempio `for i<-1 to n do {corpo del ciclo}` è un ciclo che esegue sempre n iterazioni.

2.5.4.1. Esempio (`arrayMax`)

Algoritmo `arrayMax(A)`
Input: Array $A[0 \div n-1]$ di $n \geq 1$ interi.
Output: massimo intero di A.

```
currMax<-A[0];
for i<-1 to n-1 do{
    currMax<-max{currMax, A[i]};
}
return currMax;
```

Proprietà $\mathcal{L}$: alla fine del ciclo, $currMax$ è il massimo intero in A (quindi il valore restituito è corretto).
Invariante: Alla fine della iterazione $i \geq 0$, $currMax = max\{A[0], A[1], \dots, A[i]\}$.

Osservazione

La fine dell'iterazione $i = 0$ corrisponde all'inizio del ciclo.

1. All'inizio del ciclo ($i = 0$) l'invariante è reso vero dall'assegnamento $currMax < -A[0]$;
2. Disponiamo l'invariante uguale a vero a fine iterazione $i < n-1 \implies currMax = max\{A[0], \dots, A[i]\}$ e dimostriamo che vale anche alla fine della successiva iterazione.
Nella iterazione $i+1$ l'istruzione $currMax$ <- $max\{currMax, A[i+1]\}$ assicura che alla fine di tale iterazione $currMax$ <- $max\{A[0], \dots, A[i+1]\}$;
3. Alla fine dell'ultima istruzione ($i = n-1$):
Se vale'invariante, cioè se $currMax = max\{A[0], \dots, A[n-1]\}$, allora $currMax$ è effettivamente il massimo intero, che è la proprietà $\mathcal{L}$.

2.5.4.2. Esempio (`arrayFind(A)`)

Algoritmo `arrayFind(A)`
Input: Elemento x, array $A[0 \div n-1]$ di n elementi.
Output: indice $i \in [0, n)$ tale che $A[i] = x$, se esiste, altrimenti -1.

```
i<-0;
while i < n do{
     if(x = A[i]) then return i;
     else i<-i+1;
}
return -1;
```

Proprietà $\mathcal{L}$: Il valore trovato è corretto.
Invariante: Alla fine di una generica iterazione $x \neq A[j]\ \ \forall 0 \leq j < i$ con i valore della variabile omonima alla fine dell'iterazione corrente.

1. All'inizio del ciclo ($i = 0$) l'invariante vale per *vacuità* dato che il range $0 \div i-1$ è vuoto;
2. Supponiamo l'invariante vero alla fine di una generica iterazione $\implies x \neq A[j]\ \ \forall 0 \leq j < i < n$.
   Alla fine della successiva iterazione:
   - Se $x = A[i] \implies i$ non cambia e si esce dal ciclo;
   - Se $x \neq A[i] \implies i$ diventa $i+1$.
     In entrambi i casi l'invariante continua a valere;
3. Fine ultima iterazione, ci sono due possibili uscite:
   - $u_1 : x = A[i]$: In questo caso si restituisce i e chiaramente $\mathcal{L}$ vale;
   - $u_2 : i = n$ in questo caso si restituisce -1.
     Dato che l'invariante mi dice che $x \neq A[j]\ \ \forall j : 0 \leq j < n = i$ so che x non è in A e quindi restituire -1 è corretto $\implies \mathcal{L}$ vale.

2.5.6. Ricorsione

> Un *algoritmo ricorsivo* è un algoritmo che invoca sé stesso (su istanze sempre più piccole) sfruttando la nozione di induzione.

La soluzione di un'istanza di taglia n è ottenuta *direttamente* se $n = n_0, n_0+1, \dots, n_0+k$ (casi base), altrimenti *riducendosi* alla soluzione di $r \geq 1$ istanze di taglia minore di n: se $n > n_0 + k$. Se $r = 1$ si parla di *linear recursion*.

2.5.6.1. Esempi

Algoritmo `linearSum(A,n)`
Input: array A, intero $n \geq 1$.
Output: $\sum_{i=0}^{n-1} A[i]$.

```
if (n = 1) then{
    return A[0];
}
else{
    return linearSum(A, n-1) + A[n-1];
}
```

Taglia dell'istanza: n; $n_0 = 1$ e $k = 0$.
Se voglio trovare la somma di tutti gli elementi di un array A, la prima invocazione sarà `linearSum(A,|A|)`.

Algoritmo `reverseArray(A,i,j)`
Input: array A, indici $i, j \geq 0$.
Output: array A con gli elementi in $A[i \div j]$ ribaltati.

```
if(i < j) then{
    swap(A[i], A[j]);
    reverseArray(A, i+1, j-1);
}
return
```

Taglia dell'istanza: $n = j - i + 1$.
Caso base: $n \leq 1$.
La prima invocazione per ribaltare tutto A è `reverseArray(A,0,|A|-1)`.

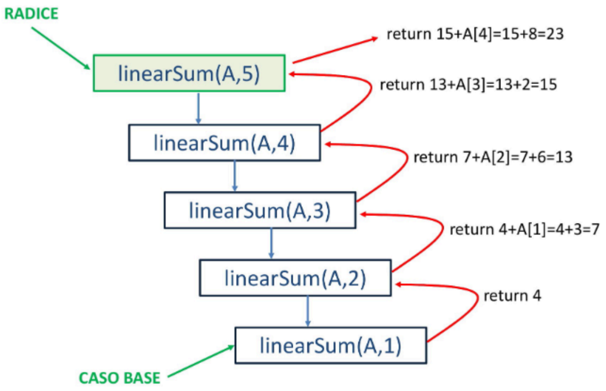
Lezione 06

2.5.6.2. Esecuzione di un algoritmo ricorsivo

All'esecuzione di un algoritmo ricorsivo su una data istanza è associato un *albero della ricorsione* (o *recursion trace*) tale che:

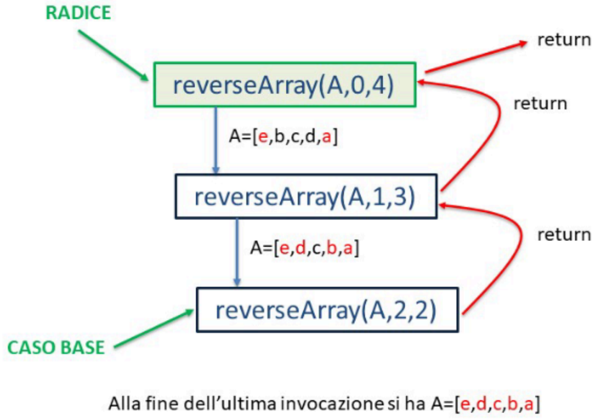
- Ogni nodo corrispondente a un'invocazione ricorsiva distinta fatta durante l'esecuzione dell'algoritmo;
- La *radice* dell'albero corrisponde alla prima invocazione, i *figli* di un nodo x sono associati alle invocazioni ricorsive fatte direttamente dall'invocazione corrispondente a x;
- Le *foglie* dell'albero rappresentano i *casi base*.

L'albero della ricorsione per `linearSum(A,5)`, con $A = [4, 3, 6, 2, 8]$ risulta:



Avvengono un numero costante di operazioni per chiamata, quindi il numero totale sarà proporzionale al numero di chiamate. La complessità è allora $\Theta(n)$ (giustificazione a seguire).

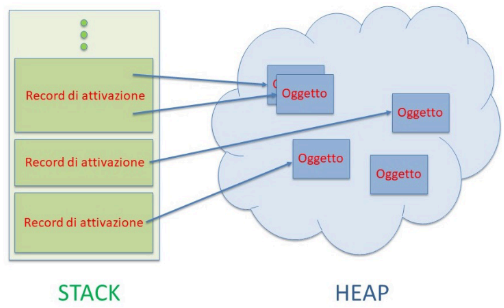
L'albero della ricorsione per `reverseArray(A,0,4)`, con $A = [a, b, c, d, e]$ sarà invece:



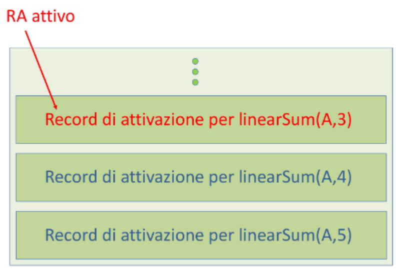
Nell'esecuzione di un programma (in Java) entrano di solito in gioco die spazi di memoria:

- *Stack*: spazio destinato a memorizzare variabili locali ai metodi e riferimenti a oggetti.
  - Per ogni invocazione di un metodo viene inserito un *record di attivazione* (abbreviato in RA; in inglese di usa il termine *activation record* o *activation frame*) contenente variabili e riferimenti a oggetti relativi a quell'invocazione.
  - Un RA viene eliminato quando l'invocazione del metodo corrispondente finisce l'esecuzione.
  - I RA sono inseriti/eliminati con politica LIFO (Last In First Out); in ogni istante possono essere acceduti i dati relativi all'ultimo RA inserito, ma non quelli di altri RA.

- *Heap*: spazio destinato a memorizzare gli oggetti.



Supponiamo di eseguire `linearSum(A,5)` e consideriamo l'invocazione ricorsiva `linearSu,(A,3)`. Quando viene creato il RA per tali invocazione ricorsiva, lo stato della Stack è il seguente:



> **Ricorda**
>
> Un algoritmo ricorsivo è un algoritmo che invoca sé stesso su istanze più piccole.

> Un *algoritmo iterativo* è un algoritmo non-ricorsivo.

> **Osservazione**
>
> Il termine *iterativo* è usato per evidenziare che (tranne per casi banali) *un algoritmo non-ricorsivo fa uso di cicli per poter elaborare istanze di qualsiasi taglia*.
> Mentre i cicli sono essenziali in un algoritmo iterativo, un algoritmo ricorsivo può non avere cicli (come `linearSum` e `reverseArray`), ma può anche averli (come `MergeSort`).

2.5.7. Complessità di algoritmi ricorsivi

La *complessità* di un algoritmo ricorsivo A può essere *stimata tramite l'Albero della Ricorsione*.

Consideriamo l'albero associato all'esecuzione di A su un'istanza i di taglia n:

- A ogni nodo è attribuito un *costo* pari al numero di operazioni eseguite dall'invocazione corrispondente a quel nodo, *escluse quelle fatte dalle invocazioni ricorsive al suo interno*;
- Il numero totale di operazioni eseguite da A per risolvere i si ottiene sommando i costi associati a tutti i nodi.
  Per ottenere un *upper bound a $t_A(n)$* si ricava una stima per eccesso del numero totale di operazioni che valga per tutte le istanze i di taglia n, mentre per ottenere un *lower bound a $t_A(n)$* si trova un'istanza particolare o si fa una stima inferiore che vada bene per tutte le istanze.

2.5.7.1. Esempi

2.5.7.1.1. Complessità di `linearSum(A,n)`

Algoritmo `linearSum(A,n)`
Input: array A, intero $n \geq 1$.
Output: $\sum_{i=0}^{n-1} A[i]$.

```
if (n = 1) then{
    return A[0];
}
else{
    return linearSum(A, n-1) + A[n-1];
}
```

L'albero della ricorsione associato a una generica istanza di taglia n:

- n nodi associati a `linearSum(A,j)`, $j = n-1, \ldots, 1$;
- Costo associato a ciascun nodo: $\Theta(1)$ operazioni (esclude quello delle chiamate ricorsive)-
  $\implies$ Ogni istanza di taglia n richiede $\Theta(n)$ operazioni.
  $\implies$ $t_{\text{linearSum}}(n) \in \Theta(n)$ è la complessità al caso pessimo.

2.5.7.1.2. Complessità di `reverseArray(A,i,j)`

Algoritmo `reverseArray(A,i,j)`
Input: array A, indici $i, j \geq 0$.
Output: array A con gli elementi in $A[i \div j]$ ribaltati.

```
if(i < j) then{
    swap(A[i], A[j]);
    reverseArray(A, i+1, j-1);
```

```
}
return
```

L'albero della ricorsione associato a una generica istanza di taglia n $(n = j - i + 1)$:

- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ nodi associati;
- Costo associato a ciascun nodo: $\Theta(1)$ operazioni (esclude quello delle chiamate ricorsive).
  $\implies$ Ogni istanza di taglia n richiede $\Theta(n)$ operazioni.
  $\implies$ $t_{\text{reverseArray}}(n) \in \Theta(n)$ è la complessità al caso pessimo.

2.5.7.2. Calcolo efficiente di potenze

Dato $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$ intero, calcolare $p(x, n) = x^n$.
È fondamentale osservare che

$$p(x,n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ x \cdot p\left(x, \frac{n-1}{2}\right)^2 & n > 0 \text{ dispari} \\ p\left(x, \frac{n}{2}\right)^2 & n > 0 \text{ pari} \end{cases}$$

Algoritmo `power(x,n)`
Input: $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$.
Output: $p(x, n)$.

```
if(n = 0) then{
    return 1;
}
if(n è dispari) then{
    y <- power(x, (n-1)/2);
    return x*y*y;
}
else{
    y <- power(x, n/2);
    return y*y;
}
```

2.5.7.2.1. Complessità di `power(x,n)`

Supponiamo $n \geq 1$ (consideriamo n come taglia dell'istanza):

- Alla i-esima chiamata ricorsiva l'algoritmo viene invocato per un esponente $n_i \leq \frac{n}{2^i}$. Di conseguenza l'albero della ricorsione avrà $O(\log n)$ nodi;

- Ogni invocazione di `power` esegue $\Theta(1)$ operazioni, esclusa l'eventuale chiamata ricorsiva. Quindi il costo associato a ciascun nodo è $\Theta(1)$.
  $\implies t_{\text{power}}(n) \in O(\log n)$.

2.5.7.2.2. Applicazione di `power` al calcolo di $F(n)$

Il seguente algoritmo efficiente sfrutta la formula $F(n))\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$ e l'algoritmo `power` visto in precedenza:

Algoritmo `powerFib(n)`
Input: intero $n \geq 0$.
Output: $F(n)$.

```
ψ <- ((1 + sqrt{5})/2);
ψ^ <- ((i - sqrt{5})/2);
return (power(ψ,n) - power(ψ^, n))/sqrt{5};
```

Da quanto provato per `power`, otteniamo che la complessità di `powerFib` è $O(\log n)$.

2.5.8. Correttezza di algoritmi ricorsivi

Per provare la correttezza (o una qualsiasi proprietà) di un algoritmo ricorsivo A si ricorre all'induzione.

Sia n la taglia dell'istanza:

1. Si dimostra la correttezza per i casi vase $n \in [n_0, n_0 + k]$;
2. Supponendo che A risolva correttamente tutte le istanze di taglia $m \in [n_0, n]$, per un qualche $n \geq n_0 + k$, si dimostra che esso risolve correttamente tutte le istanze di taglia $n + 1$.

2.5.8.1. Correttezza di `linearSum(A,n)` per $n \geq 1$

Caso base $(n = 1)$: correttezza banale.
Passo induttivo: Fisso $n \geq 1$ arbitrario.
Ipotesi induttiva: `linearSum(A,j)` sia corretto $\forall A$, $\forall 1 \leq j \leq n$.
Considero `linearSum(A,n+1)` con A array di $\geq n + 1$ elementi:
`linearSum(A,n+1)` restituisce $\text{linearSum}(A, n) + A[n] = \sum_{i=0}^{n-1} A[i] + A[n] = \sum_{i=0}^{n} A[i]$ per ipotesi induttiva.
$\implies$ Il valore restituito è corretto.

Riepilogo sulle nozioni di base

- Nozioni di: problema computazionale, algoritmo (che risolve un problema computazionale), taglia dell'istanza, struttura dati;
- Specifica di un algoritmo tramite pseudocodice;
- Complessità al caso pessimo di un algoritmo:
  - Definizione;
  - Analisi asintotica espressa tramite ordini di grandezza ($O(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$);
- Tecniche di dimostrazione: esempio, controesempio, per assurdo, induzione;
- Invarianti e loro uso per provare la correttezza di cicli;
- Algoritmi ricorsivi e loro analisi:
  - Complessità: tramite l'albero della ricorsione o tramite guess e induzione;
  - Correttezza: tramite induzione.