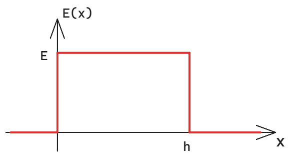
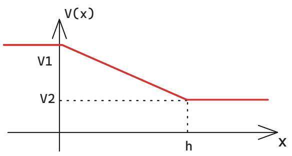
Lezione_04_fis

2.3. Esempio 2.8

Calcolare l'andamento del potenziale elettrostatico tra due piani indefiniti, paralleli, uniformemente carichi con densità di superficie $+\sigma$ e $-\sigma$ e a distanza h.

So che il campo tra i due piani ha modulo $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Se quindi prendo un punto A sulla superficie interna del piano positivo e un punto B sulla superficie interna del piano negativo, alla stessa altezza di A, calcolo il potenziale:
$V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B E\, ds = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, ds = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(B - A) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} h$





Osservo che il campo all'esterno dei piani è nullo, quindi il potenziale è costante.

2.4. Legge di conservazione dell'Energia

Durante il moto della particella, l'*energia totale*, ovvero la somma dell'energia cinetica e dell'energia elettrostatica, *rimane costante*

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + qV = \text{cost}$$

Nota bene

Dati $A = B$, si ha $V_A = V_B$, quindi alla fine di un percorso chiuso l'energia cinetica è la stessa che all'inizio, la velocità può aver cambiato direzione, ma non modulo.

Osservazione

Dato un campo uniforme, quindi constante in modulo, direzione e verso, si ottiene $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E(z_B - z_A)$ perciò $V_A = -Ez_A + c$, $V_B = -Ez_B + c$, con c costante, ovvero

$$V(z) = -Ez + c$$

Questo vuol dire che il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di un piano ortogonale alla direzione del campo (come avviene nell'esempio 2.8 e nell'esempio seguente).

Esempi 1.9 e 2.3

Una carica puntiforme q di massa m è liberata in quiete tra due piani indefiniti, paralleli, uniformemente carichi con densità di superficie $+\sigma$ e $-\sigma$ e a distanza h. Descrivere il moto della carica. **Calcolare l'energia cinetica acquisita.**

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$
$v(t) = v_0 + at$
$qE = F = ma \implies a = \frac{qE}{m}$

$E_I = \frac{1}{2} m v_0^2 + qV_I = qV_I$
$E_F = \frac{1}{2} m v_f^2 + qV_F$
Per la conservazione dell'energia ho:
$E_F = E_I \implies E_{F,K} = q(V_I - V_F) = q\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} h\right)$

Unità di misura

Quando una carica elementare viene accelerata dalla differenza di potenziale di $1V$ essa acquista energia cinetica pari a $e\Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} J$.
Questa quantità di energia, che è adeguata per descrivere le energie dei fenomeni su scala atomica, definisce l'unità di misura *elettronvolt*, di simbolo eV

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J \implies 1J = 6.25 \cdot 10^{18} eV$$

2.5. Energia potenziale elettrostatica

Supponiamo di avere una distribuzione di N cariche. QUal è il lavoro esterno necessario per "costruire" questa distribuzione partendo con tutte le cariche all'infinito?

Cominciando portando la prima carica. Non essendoci ancora nessun'altra carica, il campo è nullo, così come il lavoro esterno. La seconda carica risente il campo generato dalla prima carica, quindi il lavoro esterno è $\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_{el} = -\int_{\infty}^{p_2} q_2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_2 V_{p_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$.

> **Osservazione**
>
> Il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva della cariche, altrimenti è negativo.

La terza carica risente il campo generato dalla prima e seconda carica. Vige il principio di sovrapposizione, quindi il lavoro è
$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{13} + \mathcal{L}_{23} = -\int_{\infty}^{p_3} q_3 \vec{E}^{(1)} \cdot d\vec{s} - \int_{\infty}^{p_3} q_3 \vec{E}^{(2)} \cdot d\vec{s} = q_3 V_{p_3}^{(1)} + q_3 V_{p_3}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$
In generale il lavoro è

$$\mathcal{L}_{ext} = \sum_{j>i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

2.6. Gradiente di una funzione scalare

Sia $f(x, y, z)$ funzione continua e derivabile delle coordinate x, y, z; con le derivare parziali $\frac{d}{dx} f$, $\frac{d}{dy} f$, $\frac{d}{dz} f$.
Possiamo costruire un vettore le cui componenti siano uguali alle rispettive derivate parziali. Questo vettore viene chiamato gradiente

$$\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}} f = \frac{d}{dx} f \hat{x} + \frac{d}{dy} f \hat{y} + \frac{d}{dz} f \hat{z} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \\ \frac{df}{dz} \end{pmatrix}$$

Il gradiente indica la direzione di massima crescita.

2.6.1. Esempio

Calcoliamo il gradiente della funzione $f(x, y, z) = x^2 y z^3$.

$\vec{\nabla} = (2xyz^3, x^2 z^3, 3x^2 y z^2)$
□

La componente lungo x è la derivata parziale di f rispetto a x e fornisce una misura della rapidità con cui varia f quando ci si muove lungo x. Vale l'analogo per la componente y e la z.
La direzione del campo coincide con quella lungo cui si muove per trovare il più rapido incremento della funzione f.

2.6.2. Teorema del differenziale totale

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = \vec{\nabla} f \cdot \vec{s}$$

2.7. Legame tra potenziale e campo elettrostatico

Ricordo che $V(r) = -\int_{-\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ e che $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$.
Usando il teorema di differenziale totale

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

Quindi

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Il campo elettrostatico è un campo vettoriale che è equivalente a un singolo numero per punto dello spazio, per quanto riguarda l'aspetto delle informazioni.

2.8. Esempio 2.6

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R. **Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse dell'anello.**

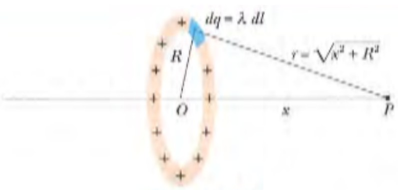


Figura 2.21

Definisco $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$, quindi $dq = \lambda dl$, mentre definisco la distanza tra un punto dell'anello e un punto P sull'asse $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ (come si può vedere in figura).
Calcolo il potenziale:
$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int dl = \frac{\lambda_2 \pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$

Osservazione

Il potenziale elettrostatico è massimo nel centro O e decresce simmetricamente rispetto al piano contenente l'anello all'aumentare della distanza di P dal centro.
Per $x \gg R$ il potenziale elettrostatico vale $\frac{q}{4\pi\epsilon_0|x|}$, come se la carica fosse al centro.

Posso anche calcolare $\vec{E}$ in maniera più semplice di quanto fatto nell'esercizio 1.6:
$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$
$E_y = -\frac{dV}{dy} = 0$
$E_z = -\frac{dV}{dz} = 0$.

2.9. Esempio 2.7

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita su tutta la sua superficie. **Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse del disco.**

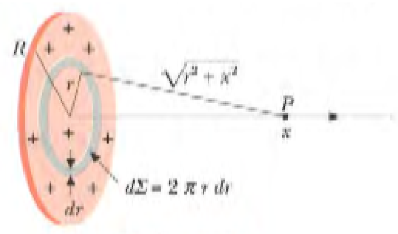


Figura 2.22

Chiamo la densità superficiale di carica $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$, quindi $dq = \sigma d\Sigma$, con $d\Sigma$ l'area di una superficie infinitesima.
Considero un anello, concentrico al disco, di raggio r e area $d\Sigma = 2\pi r dr$; allora il potenziale su questo anello è (calcolato come nell'esempio precedente):
$dV(x) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2\pi\sigma r\, dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{r\, dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$
Integro allora su tutto il disco e ottengo:
$V(x) = \int_\Sigma dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\, dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2} - x)$ù

ⓘ **Osservazione**

In $x = 0$ il potenziale elettrostatico è massimo e vale $V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$.
Per $x \gg R$ il potenziale è $V(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$, come se la carica fosse posta al centro del disco.

Come nell'esercizio precedente, si può calcolare il campo:
$E_x(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$.

2.10. Superfici equipotenziali

> Le *superfici equipotenziali* sono una rappresentazione grafica complessiva del potenziale elettrostatico.
> Sono superfici dello spazio tridimensionale, il *luogo geometrico dei punti il cui potenziale elettrostatico ha lo stesso valore*
>
> $$V(x, y, z) = \text{costante}$$

Non forniscono direttamente l'intensità del campo.

2.10.1. Proprietà

- Per un punto passa un ed una sola superficie equipotenziale;
- Le linee di forza in ogni punto sono ortogonali alle superfici equipotenziali.
  La prima proprietà dipende dal fatto che il potenziale elettrostatico è una funzione univoca, mentre la seconda è conseguenza del fatto che il campo elettrostatico $\vec{E}$ non può avere una componente tangente a una superficie equipotenziale.

> **Osservazione**
>
> Il verso del campo elettrostatico indica il verso in cui le superfici equipotenziali diminuiscono in valore.
> Inoltre, le superfici equipotenziali si infittiscono nello zone in cui il campo è maggiore (fissato un certo passo ΔV).