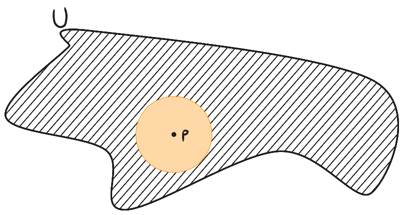
Lezione_02

1.1.7. Intorno - definizione

> Dico $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *intorno* di $p \in \mathbb{R}^n$ se contiene una palla di centro p:
> $$\exists \delta > 0 : B(p, \delta) \subseteq U$$



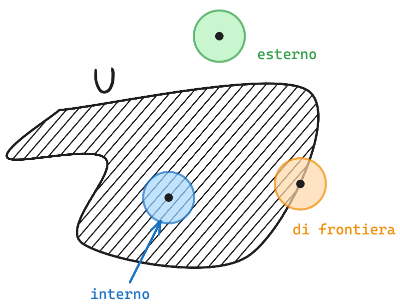
1.1.7.1 Esempi

Sono intorni di $(0,0)$ gli insiemi $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq \frac{1}{10^6}\}$,
$Q\left((0,0), \frac{1}{10^6}\right]$.
Invece l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$ non è un intorno dell'origine.

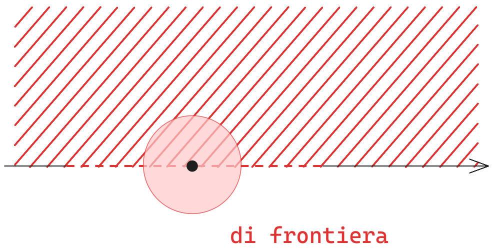
1.1.8. Punti interni, esterni, di fontiera - definizione

> Dico $p \in U$ *interno* a U se U è un intorno di p.
> Dico $p \notin U$ *esterno* a U se $\mathbb{R}^n \setminus U$ è un intorno di $\underline{p}$.
> Dico $p \in \mathbb{R}^n$ *di frontiera* per U se $\forall \delta > 0 \;\; B(p,\delta) \cap U \neq 0$ e $B(p,\delta) \setminus U \neq \emptyset\}$ (tutti i casi rimanenti).

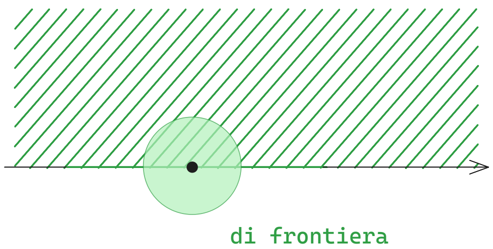
1.1.8.1. Esempi



$U = \{y > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$U = \{y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$



1.1.9. Insiemi di U - definizione

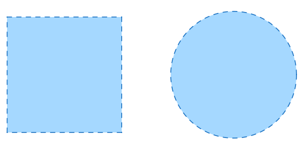
Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$, si dicono

> $IntU = U^0 = \{\text{punti interni di } U\}$
> $EstU = \{\text{punti esterni di } U\}$
> **Frontiera**: $\partial U = \{\text{punti di frontiera di } U\}$
> **Chiusura**: $Clos(U) = \bar{U} = U \cup \partial U$

1.1.9.1. Proposizione

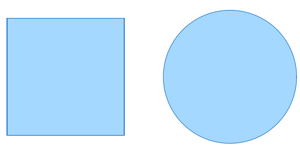
$EstU = \mathbb{R}^n \backslash Clos(U) = (\mathbb{R}^n \setminus U)^0$
$\partial U \cup IntU \cup EstU = \mathbb{R}^n$
$Int(U) = U \backslash \partial U$

$B(p, r)$ o $Q(p, r)$ hanno tutti punti interni.



1.1.10. Insiemi aperti e chiusi - definizione

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è *aperto* se ogni suo punto è interno, *chiuso* se $\mathbb{R}^n \backslash D$ è aperto

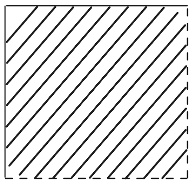


$B(p, r]$ e $Q(p, r]$ sono chiusi

1.1.10.1. Proposizione

Se $\partial D \subseteq D$ allora D è chiuso.
Se $D \cap \partial D = \emptyset$ allora D è aperto.
$Clos(D) = D \cup \partial D$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene la frontiera.

1.1.10.1.1 Esempio



Non è né chiuso né aperto

1.1.11. Prodotto scalare

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ due vettori

> Il prodotto scalare è un numero dato da
> $$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Si vede quindi che $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$.

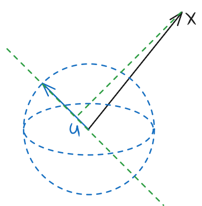
Nota bene

Due vettori si dicono ortogonali se $x \cdot y = 0$.

1.1.11.1. Esempio

$(1, 2) \cdot (3, 2) = 1 * 3 + 2 * 2 = 3 + 4 = 7 \leq ?$
$\square$

1.1.11.2. Visualizzazione

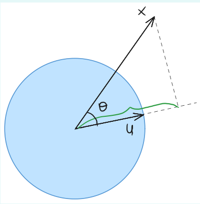


Osservazione

Se u è unitario, ossia $||u|| = 1$, $x \cdot u$ è la "lunghezza" della proiezione di x lungo la retta passante per u.

Nota bene

In $\mathbb{R}^2$ $x \cdot u = ||x|| \cos\theta$, $x \cdot y = ||x|| \cdot ||y|| \cos\theta$, con θ angolo compreso tra i due vettori.



1.1.11.3. Proposizione (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale $x \cdot y \leq ||x|| \cdot ||y||$. La disuguaglianza vale anche con il valore assoluto, quindi il prodotto scalare è compreso tra il prodotto delle norme e il suo opposto.
L'uguaglianza vale soltanto quando x e y sono proporzionali

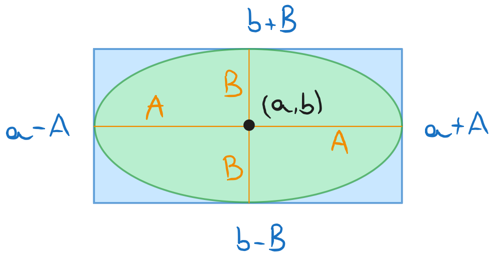
Osservazione

Quando $x \cdot y$ è massimo, se $x, y \neq 0$?
Se $y = \lambda x$, $\lambda > 0$
Quando è minimo?
Se $y = \lambda x$, $\lambda < 0$

1.1.12. Insiemi notevoli di $\mathbb{R}^n$

1.1.12.1. Ellisse

> $\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$, $A, B > 0$



1.1.12.2. Esercizio

$x^2 - 4x + 3y^2 + 18y + 6 = 0$

Prima studio le coppie di termini:
$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
$3(y+3)^2 = 3(y^2 + 6y + 9) = 3y^2 + 18y + 27$
Ora rimetto insieme:
$(x-2)^2 + \frac{(y+3)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}^2} = 25$ che diventa $\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+3)^2}{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

1.1.12.2. Retta

Sia r una retta in $\mathbb{R}^2$ perpendicolare al vettore (a, b), ha equazione $ax + by = c$.

1.1.12.3. Piano

Sia π piano in $\mathbb{R}^3$ perpendicolare al vettore (a, b, c), ha equazione $ax + by + cz = d$.

1.1.12.4 Cilindro

Sia γ un cilindro di asse parallelo all'asse z per $(a, b, 0)$, ha equazione $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $r \geq 0$.

1.2. Curve parametriche

1.2.1. Curva parametrica - definizione

> Dico *curva parametrica* una *funzione* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,
>
> $$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), .., \gamma_n(t))$$
>
> con $\gamma_1, \dots, \gamma_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue*, I intervallo.
> $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ continua.

Se il dominio ha una sola variabile, allora la funzione vettoriale è continua se ogni componente è continua.

> Chiamo *sostegno/supporto/immagine* l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ visitati dalla curva, cioè l'immagine della curva, ovvero $\gamma(I) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in I : \gamma(t) = x\}$

> Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, si chiama $\gamma(a)$ punto iniziale e $\gamma(b)$ punto finale.

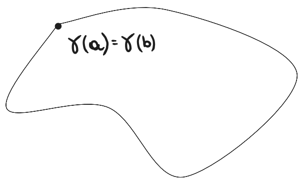
Osservazione

Mentre una curva ha un unico sostegno, la sua immagine, un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ può essere il sostegno di varie curve.
Ad esempio il cerchio unitario è sostegno di $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, ma anche di $g(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, 200\pi]$

1.2.2. Proprietà

1.2.2.1. Chiusa

> Una curva si dice chiusa se $I = [a,b]$, $\gamma(a) = \gamma(b)$, con $\gamma(a)$ punto iniziale e $\gamma(b)$ punto finale.



1.2.2.2. Piana

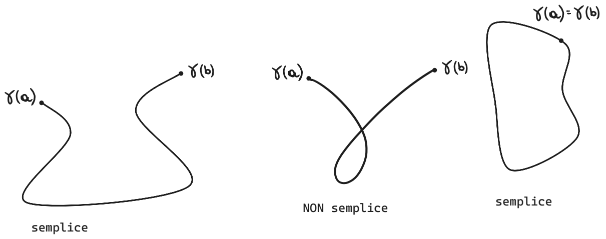
> Una curva si dive piana se esiste un piano $\subseteq \mathbb{R}^n$ che contiene il supporto.

1.2.2.3. Semplice

> Una curva si dice semplice se $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ è *iniettiva*, eccetto al più la possibilità $\gamma(a) = \gamma(b)$ se $I = [a,b]$.

Ricorda

In genere una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se $\forall x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$.



1.3. Derivate di curve

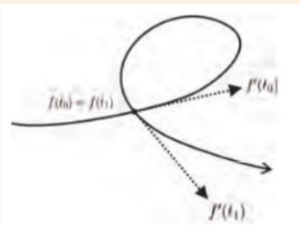
1.3.1. Vettore derivato - definizione

> Definisco *vettore derivato*/*vettore tangente*/*vettore velocità* di $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ il vettore $\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$, se $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sono derivabili in $t \in I$.
> Analogamente, la derivata seconda è $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \ldots, \gamma_n''(t))$, se $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sono derivabili due volte.

> La *retta tangente* a γ in t è l'insieme dei punti $\{\gamma(t) + \gamma'(t)\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$

⚠ Attenzione

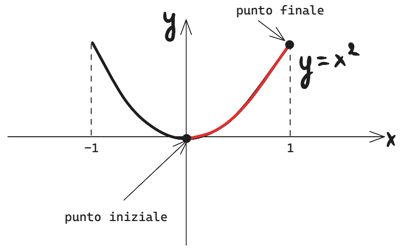
Si parla di tangente alla curva, non al suo sostegno. Può capitare che γ ripassi sullo stesso punto in due istanti diversi con derivate diverse.



1.3.1.1. Esercizio

$\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1] = I$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$
$\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = t^2$

Calcolo il sostegno:
$t = x$
$y = t^2 = x^2$
Vediamo facilmente che è piana (ha solo due componenti).



Semplice? Sì, la prima componente non si ripete $\implies \gamma$ non si ripete (è iniettiva). Altrimenti avrei trovato $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

Chiusa? No! $\gamma(0) = 0 \neq \gamma(1) = (1,1)$

Velocità? $\gamma'(t) = (1, 2t)$
Accelerazione? $\gamma''(t) = (0, 2)$

1.3.2. Derivata e approssimazione

> Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ derivabile in t_0, allora
>
> $$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$$
>
> dove con $o_{t_0}(s)$ si indica una funzione $R(t)$ tale che $\lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} = 0$.

Geometricamente si tratta di un'approssimazione (detta al primo ordine) di $\gamma(t)$ con il punto $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$ della retta tangente a γ in t_0.

1.3.3. Calcolo delle derivate di una curva

Come detto prima, una curva è derivabile solo se le sue componenti sono derivabili. Per calcolare quindi la derivata di una curva si deriva componente per componente.

1.3.3.1. Regole di derivazione

Siano $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\phi I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in $t \in \mathbb{R}$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $\frac{d}{dt}(cost = 0)$;
2. $\frac{d}{dt}(\alpha f) = \alpha f'$;
3. $\frac{d}{dt}(\phi(t) f(t)) = \phi'(t) f(t) + \phi(t) f'(t)$;
4. $\frac{d}{dt}(f + g) = f' + g +$;
5. $\frac{d}{dt}(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$;
6. Se $u : J \subset \mathbb{R} \to I$ è derivabile, $\frac{d}{dt}(f \circ u) = f'(u) u'$.

> ⚠ **Attenzione**

Nel punto 5. si parla di prodotto scalare, non di prodotto (che si trova al punto 3.).