# Elementi di Fisica 2

# 0. Indice

Lezione 01

# 1. Elettrostatica

## 1.1. La carica elettrica

### 1.1.1. Esperimento 1 - Elettrizzazione per strofinio

Mettendo il panno vicino alla bacchetta sul sostegno nel momento iniziale, viene mostrato che gli elementi sono neutri, mentre in seguito allo sfregamento hanno acquisito una carica.
Avvicinando una bacchetta di plexiglas a quella sul sostegno (fatta dello stesso materiale) senza che si tocchino, queste si respingono,

quindi la bacchetta sul sostegno inizia a ruotare. Avvicinando poi una bacchetta di ebanite, si nota che questa volta si attraggono.
☐

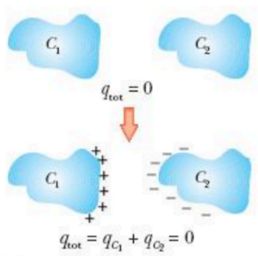
### 1.1.2. Proprietà fondamentale

L'elettromagnetismo è lo studio della fisica cariche elettriche. Ne esistono di due varietà (scelte inizialmente in modo arbitrario): le *cariche positive* e le *cariche negative*.
Le cariche dello stesso segno si respingono, mentre quelle di segno opposto di attraggono.

### 1.1.3. Legge di conservazione della carica

In un sistema isolato, *la carica elettrica totale*, cioè la somma delle cariche positive e negative presenti in un qualsiasi istante, *non cambia mai*.
Possono essere create delle particelle cariche, ma questa creazione implica la creazione anche di una carica uguale ma opposta.

Il nostro universo appare come una miscela molto bilanciata di cariche elettriche.




▲ Figura 1.5 Trasferimento di elettroni, per strofinio, da un materiale isolante ad un altro.

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

$$q_{tot} = 0$$

### 1.1.4. Quantizzazione della Carica

Tutte le particelle elementari cariche possiedono la stessa carica: la carica elementare

$$e = 1.6022 * {}^{-}10^{-19} C$$

| Particella | Carica ($C$) | Massa (kg) |
|---|---|---|
| Elettrone | $-1.6022 * 10^{-19}$ | $9.1094 * 10^{-31}$ |
| Protone | $1.6022 * 10^{-19}$ | $1.6726 * 10^{-27}$ |

Nota bene

Esistono i "Quark" con carica frazionaria, ma non possono esistere isolati. Compongono sempre particelle con cariche uguali a multipli interi di $e$.

Nel corso tratteremo le particelle cariche come portatrici di cariche dove la loro estensione e la loro struttura si possono considerare trascurabili.

Approfondimento

Il neutrone ha circa la stessa massa del protone e ha carica nulla.

### 1.1.5. Legge di Coulomb

Due cariche elettriche si respingono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle intensità delle cariche e inversamente al quadrato della loro distanza.

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$$

La forza è newtoniana: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$\epsilon_0$ è la *costante dielettrica (o permettività) del vuoto* e ha valore

$$\epsilon_0 = 8.5542 * 10^{-19}\frac{C^2}{Nm^2}$$

La costante $\epsilon_0$ è molto più "forte" dell'analoga della legge di gravitazione ($\gamma = 6.67 * 10^{-11}$), ma nell'universo le masse dei pianeti sono molto grandi e le cariche in genere sono neutre, perciò la legge di gravità si nota maggiormente.

#### 1.1.5.1. Esempio 1.2

L'elettrone e il protone di un atomo di idrogeno si trovano a una distanza media di $r = 0.53 * 10^{-10} m$, che coincide con la dimensione dell'atomo.
**Calcolare l'intensità della forza di gravitazione e della forza elettrostatica tra il protone e l'elettrone.**

$|\vec{F}_e| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}||\hat{r}|| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} = 8.2 * 10^{-8}N$
$F_g = \gamma\frac{m_em_p}{r^2} = 3.62 * 10^{-47}N$

La forza di gravità è trascurabile rispetto alla forza elettrostatica, infatti hanno una differenza di 39 ordini di grandezza.
□

### 1.1.6. Esperimento 2 - Elettroscopio a foglie

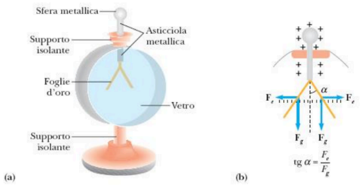

Avvicinando una bacchetta elettrizzata ad un elettroscopio scarico, le foglioline divergono per poi richiudersi quando si allontana il corpo elettrizzato.
Avviene una repulsione: gli elettroni sul pomello vengono spinti verso il basso, dove sono le foglie, che a loro volta si respingono e si allontanano. In cima al pomello si troverà una carica positiva, mentre in basso una negativa.

Dopo il contatto, l'elettroscopio acquisisce una carica dello stesso segno di quello della bacchetta.

Se il pomello dell'elettroscopio viene toccato mentre la bacchetta è vicina, l'elettroscopio acquisisce una carica con segno opposto a quella della bacchetta.

L'elettroscopio a foglia è stato uno dei primi strumenti per misurare la carica presente sugli oggetti, misurando l'angolo delle foglie (a parità di distanza).

### 1.1.7. Esempio 1.4




◄ Figura 1.4 Elettroscopio a foglie d'oro (o di alluminio) (a); equilibrio delle forze che agiscono sulle foglie di un elettroscopio carico (b).

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

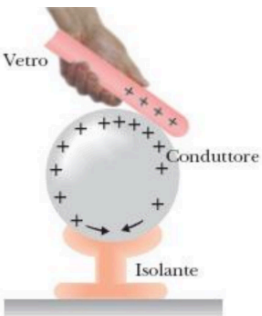
Due sferette conduttrici eguali, di massa $m$ e carica $q$ sono sospese ciascuna ad un filo lungo $l$. In equilibrio i fili sono disposti simmetricamente rispetto alla verticale, ciascuno ad angolo $\theta$.
**Calcolare la relazione tra $q$ e $\theta$.**

In questo esercizio il sistema non è un universo isolato in cui solo le due cariche esistono, ma invece posizioniamo le cariche "nei pressi" di un corpo massivo, la Terra. Perciò la forza peso non è trascurabile (nonostante avessimo visto che la differenza degli ordini di grandezza era molto grande).

$\tan\theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2}\frac{1}{mg} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg\sin^2\theta}$
$\tan\theta \sim \theta$ e $\sin\theta \sim \theta$ per angoli piccoli, quindi trovo:
$q \approx \sqrt{mg16\pi\epsilon_0 l^2\theta^3}$
□

Lezione 02

### 1.1.8. Elettrizzazione per contatto - conduttore isolato

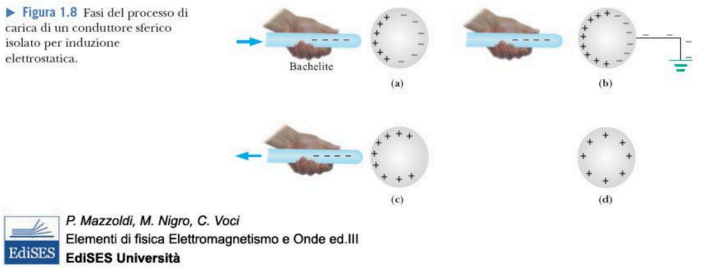



▲ Figura 1.6 Carica di una sfera di materiale conduttore isolato per contatto e ridistribuzione sulla superficie.

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

La carica che era presente nella bacchetta si trasferisce nel conduttore, così la bacchetta si scarica e il conduttore si carica.

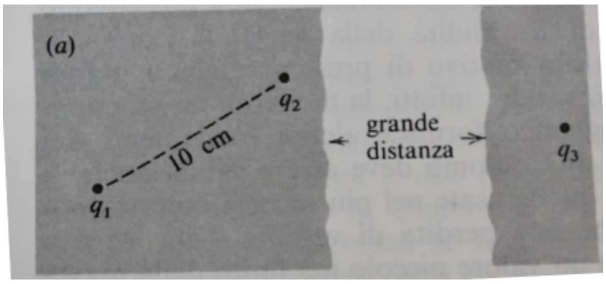
## 1.1.9. Elettrizzazione per contatto - conduttore a terra

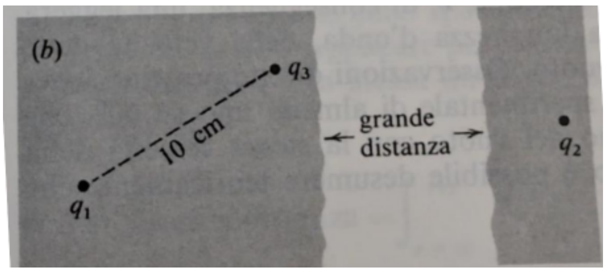


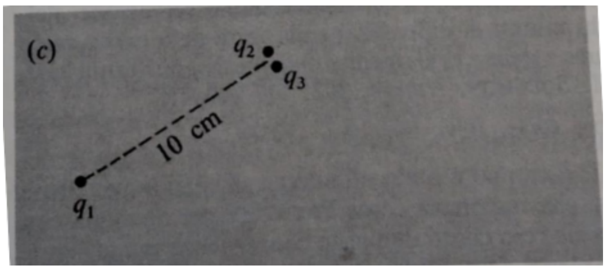

Avvicinando la bacchetta carica si creavano delle cariche positive vicino alla bacchetta. Una volta messo il sistema a terra, gli elettroni si possono spostare ancora di più. Una volta tolto il collegamento, gli elettroni non possono più tornare sul conduttore, quindi mantiene la carica acquisita.

## 1.1.10. Legge di Coulomb per più cariche

Supponiamo di avere cariche $q_1$, $q_2$, $q_3$ e ci facciamo tre esperimenti.

1. Misuriamo la forza che agisce su $q_1$ quando $q_2$ è a $10cm$ e $q_3$ è molto lontano ($r=\infty$). Troviamo $\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$



2. Misuriamo la forza che agisce su $q_1$ quando $q_3$ è a $10cm$ e $q_2$ è molto lontano ($r=\infty$). Troviamo $\vec{F}_{13}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13}$



3. Misuriamo la forza che agisce su $q_1$ quando $q_2$ e $q_3$ sono molto vicine ed entrambe a $10cm$ da $q_1$. Troviamo $\vec{F}_{tot}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13}$


Per il principio della linearità della forza, in generale la formula è

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_i}{r_{1i}^2} \hat{r}_{1i}$$

La forza con cui interagiscono due cariche non viene alterata dalla presenza di altre cariche: *la carica è additiva*.

Questo è la base del *principio di sovrapposizione*, ovvero la possibilità di combinare più insiemi di sorgenti in un unico sistema *sommandoli*, senza che vengano alterate le singole configurazioni.

## 1.1.11. Il campo elettrico

### 1.1.11.1. Campo elettrico - definizione

Supponiamo di avere cariche $q_1$, $q_2$, ..., $q_n$ fisse nello spazio. Ora avviciniamo una carica $q_0$. Siamo interessati solamente alla forza agente su $q_0$ posta nel punto $(x, y, z)$: $\vec{F}_0 = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i} = q_0 \vec{F}_{tot} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$, abbiamo fatto una generalizzazione matematica.
Osserviamo che la forza è proporzionale a $q_0$, quindi possiamo dividere per $q_0$. Così otteniamo il *campo elettrico*, una grandezza vettoriale che dipende soltanto dalla distribuzione delle cariche $q_1$, ..., $q_n$ e dal punto $(x, y, z)$.

Una possibile formula del campo elettrico è

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

### 1.1.11.2. Problema

Se la cariche non sono veramente inamovibili, l'introduzione di una certa carica $q_0$ può provocare uno spostamento delle cariche sorgenti rispetto alla loro posizione iniziale.
Allora una possibile definizione del campo elettrico è

$$\vec{E}(x, y, z) = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

### 1.1.11.3. Problema

L'operazione di limite ha senso solo matematicamente perché le cariche sono quantizzate, in natura non sono mai state osservate cariche più piccole di $e$.

Un'altra possibile definizione ancora è

$$\vec{E}(x,y,z)=\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_{0i}^2}\hat{r}_{0i}$$

In questa definizione non c'è nulla di nuovo, è solo un altro modo per descrivere un sistema di cariche. Comunque rimane molto utile in quanto ci permette di predire la forza che agirà su una qualsiasi carica posta nel punto $(x,y,z)$.

### 1.1.12. Esercizio 1.5

Tre cariche positive eguali sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato $l$. **Calcolare la forza elettrica agente su ognuna delle cariche e il campo elettrostatico nel centro del triangolo.**

Chiamo le cariche $q_0$, $q_1$, $q_2$. Calcolo per $q_0$, in $q_1$ e $q_2$ il calcolo è analogo ma traslato.

$\vec{E}_0=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{01}^2}\hat{r}_{02}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{02}^2}\hat{r}_{02}$

$\hat{r}_{01}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

$\hat{r}_{02}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

$\hat{r}_{tot}=\hat{r}_{01}+\hat{r}_{02}=\begin{bmatrix}0\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$

$\vec{E}_{01}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=\frac{1}{l^2}\begin{bmatrix}0\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$

$\vec{E}_x=0$

$\vec{E}_y=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{l^2}\sqrt{3}$

Pongo una quarta carica al centro. Noto che per la geometria del problema le forze dovute alle tre cariche ai vertici si annullano a vicenda, quindi la forza totale è zero.

□

### 1.1.13. Il campo elettrico prodotto da una distribuzione continua di carica

Finora abbiamo solo studiato il campo elettrico generato da cariche puntiformi. Spesso però le cariche sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria.

Noi siamo interessati al campo elettrico generato da queste cariche in punti distanti dove vengono viste come una distribuzione continua.

La distribuzione continua di carica esiste solo nel mondo matematico, ma siccome le cariche e lo distanze fra loro sono infinitesimali rispetto al nostro punto di vista, possiamo considerare la carica come continua.

Una distribuzione di carica può essere:

- *Volumetrica*: Descritta da $\rho$ che rappresenta la carica per unità di volume. $\rho dxdydz$è la carica $dq$ contenuta nel cubetto di volume $dxdydz$. Per passare alla carica del volume bisogna integrare;
- *Superficiale*: Descritta da $\sigma$ che rappresenta la carica per unità di superfice. $\sigma d\Sigma$ è la carica $dq$ contenuta nel elemento di superfice $d\Sigma$. Anche questa volta bisogna fare l'integrale, ma di superficie;
- *Lineare*: Descritta da $\lambda$ che rappresenta la carica per unità di linea. $\lambda dl$ è la carica $dq$ contenuta nel elemento di curva $dl$.

**Nota bene**

In generale, le distribuzioni di cariche sono funzioni con valori diversi in ogni punto. Nel corso tratteremo solo distribuzioni uniformi.

Il campo elettrico generato da una distribuzione continua di carica è

$$\vec{E}(x,y,z) = \int_{\text{distribuzione}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{u}$$

dove $r$ è la distanza tra l'elemento di carica $dq$ e il punto $(x,y,z)$, $\hat{u}$ è il versore tra l'elemento di carica $dq$ e il punto $(x,y,z)$.

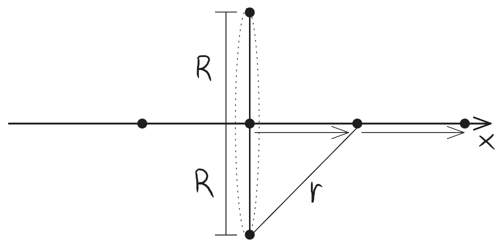
- Nel caso volumetrico ho $\vec{E}(x,y,z) = \int_{\text{volume}} dx'\,dy'\,dz'\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(x',y',z')}{4\pi\epsilon_0 r^2(x',y',z')}\hat{u}(x',y',z')$
- Nel caso superficiale ho $\vec{E}(x,y,z) = \int_{\text{superficie}} dx'\,dy'\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma(x',y',z')}{4\pi\epsilon_0 r^2(x',y',z')}\hat{u}(x',y',z')$
- Nel caso lineare ho $\vec{E}(x,y,z) = \int_{\text{curva}} dx'\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(x',y',z')}{4\pi\epsilon_0 r^2(x',y',z')}\hat{u}(x',y',z')$

### 1.1.14. Esercizio 1.6

Una carica $q$ è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio $R$. **Calcolare il campo elettrostatico sull'asse dell'anello.**

Per ogni punto nell'anello, troverò sempre un altro punto simmetrico, quindi le forze lungo il piano dei due punti si annullano e il campo sarà uscente.
Sarà inutile allora calcolare il campo elettrico lungo $y$ e $z$

paralleli all'asse $x$ (l'asse dell'anello).
Allora:
$\vec{E}_{tot} = E_{\hat{x}} = \int \frac{dl}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta\int dl\hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta 2\pi R = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 r}\cos\theta\hat{x}$




Osservo che $\cos\theta = \frac{x}{x^2+R^2}$
$\vec{E}_{tot} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\hat{x} \overset{x\gg R}{\sim} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{x^2}$ dove $a = 2\pi R\lambda$

Lezione 03

## 1.1.15. Esercizio 1.7

Un disco sottile di raggio $R$ ha una carica $q$ distribuita uniformemente su tutta la sua superfice. **Calcolare il campo elettrostatico sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui $R$ tende all'infinito** (piano uniformemente carico).

$\vec{E}_x^{\text{anello}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{(x+R^2)}\right]^{3/2}$

Il disco non è altro che un insieme di anelli infinitesimi, quindi si può usare l'additività per sommare i singoli contributi di tutti gli anelli, ognuno di raggio diverso.

$q = \sigma\pi R^2$
$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$
$dE = \frac{\sigma r r d}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\right]$
$E_x = \int_0^R \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[\frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}\right] = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r}{(x^2+r^2)}^{3/2} dr = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$

Per $R \to \infty$ il campo diventa $E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}$

## 1.1.16. Linee di forza del campo elettrostatico

> Le linee di forza del campo elettrostatico sono una rappresentazione grafica complessiva del campo in tutto lo spazio, ottenuta dalle curve le cui tangenti in ogni punto hanno la stessa direzione del campo in quel punto.

Sono curve regolari e continue, tranne che nei punti corrispondenti a posizioni occupate dalle cariche puntiformi.
Non forniscono direttamente l'intensità del campo.

Nella rappresentazione delle linee di campo si perde l'informazione sull'intensità.

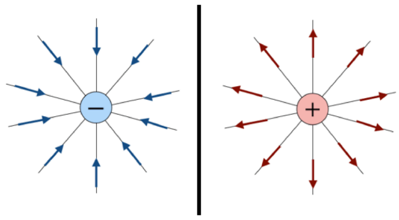
### 1.1.16.1. Proprietà

Queste sono proprietà universalmente valide per le linee di forza:

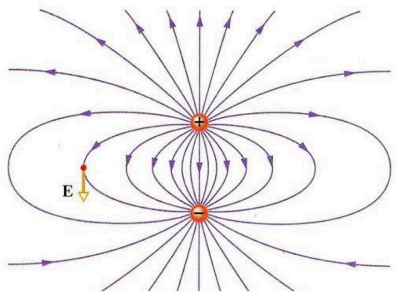
- Una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto;
- Le linee di forza si addensano dove l’intensità di campo è maggiore (si recuperano quindi alcune informazioni sull'intensità);
- Le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo elettrostatico è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- Le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative. Si chiudono all’infinito se ci sono solo cariche dello stesso segno.

## 1.1.17. Esempi di linee di campo elettrostatico

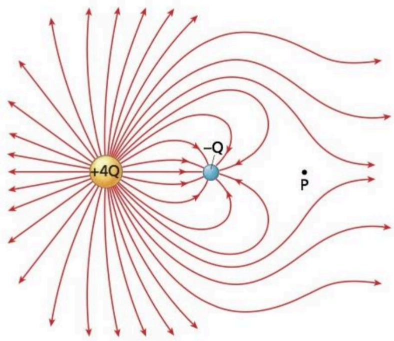
**Per cariche puntiformi:**




**Per un dipolo:**




**Per due cariche di segno opposto e differente modulo:**



# 1.2. Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico

## 1.2.1. Lavoro della forza elettrostatica

Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elettrica per uno spostamento finito di una carica $q$ dalla posizione $A$ alla posizione $B$

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{s} = -q(V_B - V_A)$$

Dove abbiamo definito la *differenza di potenziale elettrostatica*

$$-(V_B - V_A) = \int_A^B E \cdot ds$$

### 1.2.1.1. Conservatività del campo elettrico

La differenza di potenziale elettrostatica è indipendente dal percorso scelto per arrivare dal punto $A$ al punto $B$:
$-(V_B - V_A) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\xi \vec{E} \cdot d\vec{s}$
Infatti il campo elettrostatico è conservativo, così come la forza elettrostatica.

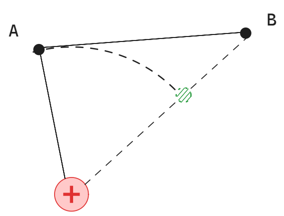
La circuitazione del campo elettrostatico è sempre uguale a zero.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

> **Osservazione**
>
> In questo caso per circuitazione si intende l'integrale di linea lungo il percorso chiuso, indicato con il simbolo "$\oint$".

## 1.2.2. Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

Siccome il potenziale non dipende dalla scelta del percorso, scegliamo il percorso che ci permetta di semplificare il calcolo.



Posso "spostarmi" in un punto più vantaggioso sfruttando il fatto che forza e campo siano sempre a 90° fra di loro, quindi il lavoro dello spostamento è zero. Ottengo quindi una formula del tipo:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

quindi che dipende solamente dalla distanza dei punti dalla carica.

Se imponiamo che all'infinito il potenziale sia nullo abbiamo

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

### 1.2.2.1. Additività del potenziale elettrostatico

Vige il principio di sovrapposizione, quindi se il campo elettrostatico è generato da $i$ cariche, quello totale avrà la seguente formula:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{A,i}}^{r_{B,i}} \frac{dr_i}{r_i^2}$$

Se imponiamo che all'infinito il potenziale sia nullo abbiamo

$$V(x,y,z) = -\int_\infty^P \vec{E}\, d\vec{s} = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

dove $r_i$ è la distanza tra il punto $P(x,y,z)$ e la carica $q_i$.

### 1.5.3.1. Esercizio 2.1

**Calcolare il potenziale elettrostatico nel centro di un triangolo equilatero di lato $l$ se in ogni vertice è presente una carica $q$.**

$V = -\int_\infty^{\text{centro}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$
$V_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}$
$r = \frac{l}{\sqrt{3}}$

Per simmetria ho che $V_1 = V_2 = V_3$ (in modulo).
$V_{tot} = \sum V_i = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}$

### 1.5.3.2. Generalizzazione

Nel caso in cui le cariche siano distribuite in modo continuo il potenziale elettrostatico diventa

$$V(x,y,z) = -\int_\infty^P \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distribuzione}} \frac{dq}{r}$$

dove $r$ è la distanza tra il punto $P(x, y, z)$ e l'elemento infinitesimo di carica $dq$.

**Unità di misura**

Poiché la *differenza di potenziale* è un lavoro diviso per una carica, l'unità di misura nel SI è `joule/coulomb`, $J/C$. Questa unità è molto importante e si chiama *volt*, di simbolo $V$; quindi

$$V = \frac{J}{C}$$

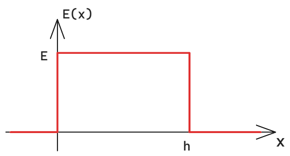
La differenza di potenziale di $1V$ è quella che dà luogo al lavoro di $1J$ per il trasporto di una carica di $1C$.
Si noti che il volt è l'unità di misura anche delle tensioni elettriche e delle forze elettromotrici.

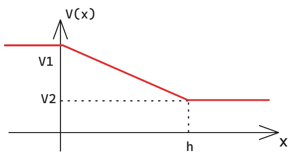
Lezione 04

### 1.2.3. Esempio 2.8

**Calcolare l'andamento del potenziale elettrostatico tra due piani indefiniti, paralleli, uniformemente carichi con densità di superficie $+\sigma$ e $-\sigma$ e a distanza $h$.**


So che il campo tra i due piani ha modulo $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Se quindi prendo un punto $A$ sulla superficie interna del piano positivo e un punto $B$ sulla superficie interna del piano negativo, alla stessa altezza di $A$, calcolo il potenziale:
$V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B E\, ds = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, ds = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(B - A) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} h$



Osservo che il campo all'esterno dei piani è nullo, quindi il potenziale è costante.

### 1.2.4. Legge di conservazione dell'Energia

Durante il moto della particella, l'*energia totale*, ovvero la somma dell'energia cinetica e dell'energia elettrostatica, *rimane costante*

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{cost}$$

**Nota bene**

Dati $A = B$, si ha $V_A = V_B$, quindi alla fine di un percorso chiuso l'energia cinetica è la stessa che all'inizio, la velocità può aver cambiato direzione, ma non modulo.

**Osservazione**

Dato un campo uniforme, quindi constante in modulo, direzione e verso, si ottiene $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E(z_B - z_A)$ perciò $V_A = -Ez_A + c$, $V_B = -Ez_B + c$, con $c$ costante, ovvero

$$V(z) = -Ez + c$$

Questo vuol dire che il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di un piano ortogonale alla direzione del campo (come avviene nell'esempio 2.8 e nell'esempio seguente).

#### Esempi 1.9 e 2.3

Una carica puntiforme $q$ di massa $m$ è liberata in quiete tra due piani indefiniti, paralleli, uniformemente carichi con densità di superficie $+\sigma$ e $-\sigma$ e a distanza $h$. Descrivere il moto della carica. **Calcolare l'energia cinetica acquisita.**

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$
$v(t) = v_0 + at$
$qE = F = ma \implies a = \frac{qE}{m}$

$E_I = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_I = qV_I$
$E_F = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV_F$
Per la conservazione dell'energia ho:
$E_F = E_I \implies E_{F,K} = q(V_I - V_F) = q\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}h\right)$

**Unità di misura**

Quando una carica elementare viene accelerata dalla differenza di potenziale di $1V$ essa acquista energia cinetica pari a $e\Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} J$.
Questa quantità di energia, che è adeguata per descrivere le energie dei fenomeni su scala atomica, definisce l'unità di misura *elettronvolt*, di simbolo $eV$

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J \implies 1J = 6.25 \cdot 10^{18} eV$$

## 1.2.5. Energia potenziale elettrostatica

Supponiamo di avere una distribuzione di $N$ cariche. QUal è il lavoro esterno necessario per "costruire" questa distribuzione partendo con tutte le cariche all'infinito?

Cominciando portando la prima carica. Non essendoci ancora nessun'altra carica, il campo è nullo, così come il lavoro esterno. La seconda carica risente il campo generato dalla prima carica, quindi il lavoro esterno è $\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_{el} = -\int_{\infty}^{p_2} q_2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_2 V_{p_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$.

**Osservazione**

Il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva della cariche, altrimenti è negativo.

La terza carica risente il campo generato dalla prima e seconda carica. Vige il principio di sovrapposizione, quindi il lavoro è $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{13} + \mathcal{L}_{23} = -\int_{\infty}^{p_3} q_3 \vec{E}^{(1)} \cdot d\vec{s} - \int_{\infty}^{p_3} q_3 \vec{E}^{(2)} \cdot d\vec{s} = q_3 V_{p_3}^{(1)} + q_3 V_{p_3}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$
In generale il lavoro è

$$\mathcal{L}_{ext} = \sum_{j>i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

## 1.2.6. Gradiente di una funzione scalare

Sia $f(x, y, z)$ funzione continua e derivabile delle coordinate $x, y, z$; con le derivare parziali $\frac{d}{dx} f$, $\frac{d}{dy} f$, $\frac{d}{dz} f$.
Possiamo costruire un vettore le cui componenti siano uguali alle rispettive derivate parziali. Questo vettore viene chiamato

gradiente

$$\vec{\nabla} f = \vec{\operatorname{grad}} f = \frac{d}{dx} f \hat{x} + \frac{d}{dy} f \hat{y} + \frac{d}{dz} f \hat{z} = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \\ \frac{df}{dz} \end{pmatrix}$$

Il gradiente indica la direzione di massima crescita.

#### 1.2.6.1. Esempio

**Calcoliamo il gradiente della funzione $f(x,y,z) = x^2 y z^3$.**

$\vec{\nabla} = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$
□

La componente lungo $x$ è la derivata parziale di $f$ rispetto a $x$ e fornisce una misura della rapidità con cui varia $f$ quando ci si muove lungo $x$. Vale l'analogo per la componente $y$ e la $z$.
La direzione del campo coincide con quella lungo cui si muove per trovare il più rapido incremento della funzione $f$.

#### 1.2.6.2. Teorema del differenziale totale

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = \vec{\nabla} f \cdot \vec{s}$$

### 1.2.7. Legame tra potenziale e campo elettrostatico

Ricordo che $V(r) = -\int_{-\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ e che $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$.
Usando il teorema di differenziale totale

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

Quindi

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Il campo elettrostatico è un campo vettoriale che è equivalente a un singolo numero per punto dello spazio, per quanto riguarda l'aspetto delle informazioni.

### 1.2.8. Esempio 2.6

Una carica $q$ è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio $R$. **Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse dell'anello.**

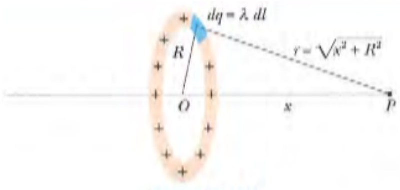


Figura 2.21

Definisco $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$, quindi $dq = \lambda dl$, mentre definisco la distanza tra un punto dell'anello e un punto $P$ sull'asse $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ (come si può vedere in figura).
Calcolo il potenziale:
$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int dl = \frac{\lambda_2 \pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2+x^2}}$

> **Osservazione**
>
> Il potenziale elettrostatico è massimo nel centro $O$ e decresce simmetricamente rispetto al piano contenente l'anello all'aumentare della distanza di $P$ dal centro.
> Per $x \gg R$ il potenziale elettrostatico vale $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x|}$, come se la carica fosse al centro.

Posso anche calcolare $\vec{E}$ in maniera più semplice di quanto fatto nell'esercizio 1.6:
$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}$
$E_y = -\frac{dV}{dy} = 0$
$E_z = -\frac{dV}{dz} = 0$.

### 1.2.9. Esempio 2.7

Un disco sottile di raggio $R$ ha una carica $q$ distribuita su tutta la sua superficie. **Calcolare il potenziale elettrostatico sull'asse del disco.**

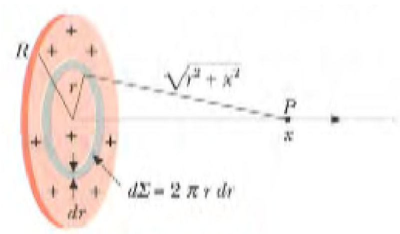


Figura 2.22

Chiamo la densità superficiale di carica $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$, quindi $dq = \sigma d\Sigma$, con $d\Sigma$ l'area di una superficie infinitesima.
Considero un anello, concentrico al disco, di raggio $r$ e area $d\Sigma = 2\pi r dr$; allora il potenziale su questo anello è (calcolato come nell'esempio precedente):
$dV(x) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2\pi\sigma r\, dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$

Integro allora su tutto il disco e ottengo:
$V(x) = \int_\Sigma dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\,dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$ù

> **Osservazione**
>
> In $x = 0$ il potenziale elettrostatico è massimo e vale $V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$.
> Per $x \gg R$ il potenziale è $V(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$, come se la carica fosse posta al centro del disco.

Come nell'esercizio precedente, si può calcolare il campo:
$E_x(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$.

## 1.2.10. Superfici equipotenziali

> Le *superfici equipotenziali* sono una rappresentazione grafica complessiva del potenziale elettrostatico.
> Sono superfici dello spazio tridimensionale, il *luogo geometrico dei punti il cui potenziale elettrostatico ha lo stesso valore*
>
> $$V(x, y, z) = \text{costante}$$

Non forniscono direttamente l'intensità del campo.

### 1.2.10.1. Proprietà

- Per un punto passa un ed una sola superficie equipotenziale;
- Le linee di forza in ogni punto sono ortogonali alle superfici equipotenziali.
  La prima proprietà dipende dal fatto che il potenziale elettrostatico è una funzione univoca, mentre la seconda è conseguenza del fatto che il campo elettrostatico $\vec{E}$ non può avere una componente tangente a una superficie equipotenziale.

> **Osservazione**
>
> Il verso del campo elettrostatico indica il verso in cui le superfici equipotenziali diminuiscono in valore.
> Inoltre, le superfici equipotenziali si infittiscono nello zone in cui il campo è maggiore (fissato un certo passo $\Delta V$).