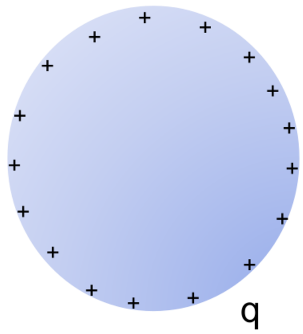
Lezione_08_fis

4.1.2. Esempio 4.1

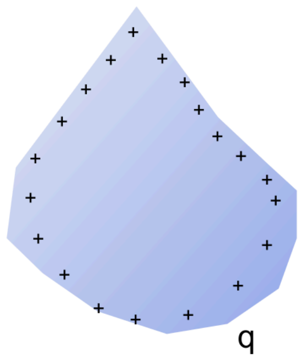
Due sfere conduttrici, di raggi R_1 e R_2, sono poste a distanze molto grandi rispetto ai due raggi e sono collegate tramite un filo conduttore. La carica complessiva è q. Trascurando la carica presente sul filo, calcolare le cariche q_1 e q_2 presenti sulle due sfere e il rapporto tra i campi elettrostatici uscenti dalle stesse.

Depositiamo una carica q su un conduttore. Vale sempre $\vec{E}=0$, quindi: l'eccesso di carica può stare solo sulla superficie del conduttore; il potenziale elettrostatico è constante su tutto il conduttore; il campo elettrostatico in un punto nelle vicinanze alla superficie del conduttore è perpendicolare e ha intensità $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ con σ la densità di carica superficiale in quel punto.

Il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore q, quindi il punto di riferimento del potenziale del conduttore è la superficie.

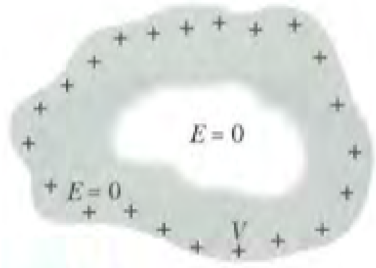


Il campo elettrostatico in un punto nelle vicinanze della superficie del conduttore è perpendicolare e ha intensità $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ con σ la densità di carica superficiale in quel punto: come abbiamo visto nell'esempio 4.1, σ è più elevata nelle zone dove il raggio di curvatura è minore. Questo si chiama l'*effetto punta*. Viene utilizzato per creare scintille tra elettrodi.

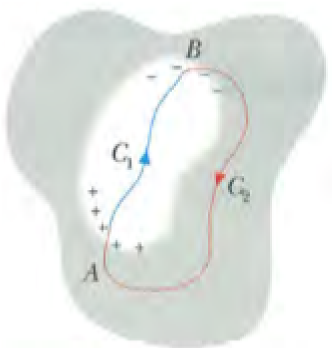


4.2. Conduttore cavo

All'*interno della cavità il campo elettrostatico è nullo*. Questo è dimostrabile con il teorema di Gauss applicato su una qualunque superficie chiusa racchiusa nella cavità: la carica totale è zero, quindi anche il campo è zero.



Sulle *pareti della cavità la carica è nulla*. Questo è dimostrabile con il teorema di Gauss applicato su una qualunque superficie chiusa che racchiuda la cavità: il campo è nullo dentro al conduttore e all'interno della cavità.
Potrebbe essere composta da una distribuzione di cariche positive e una distribuzione di cariche negative la cui somma è zero. Proviamo a verificare quest'ipotesi.



Ipotesi: Sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche, infatti:
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
Su C_2 l'integrale di linea è zero perché il campo (interno al conduttore) è nullo.
Se ci fossero cariche positive e negative, le linee di campo sarebbero tutte all'interno della cavità. Quindi $\vec{E} \neq 0$ e anche l'integrale di linea su C_1 sarebbe diverso da zero.
Questo è un assurdo perché si violerebbe la proprietà del campo conservativo.

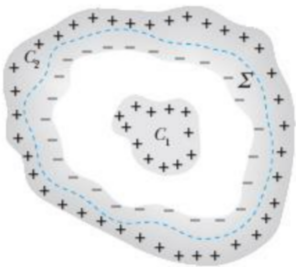
4.2.1. Proprietà

- La *carica* di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla *superficie esterna*, anche in presenza di una o più cavità;

- Il campo elettrostatico è nullo e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore, anche in presenza di cavità;
- Il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno e spazio esterno.

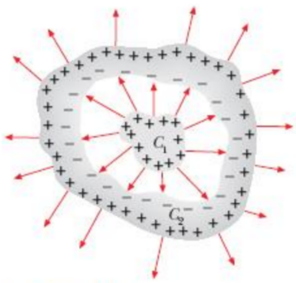
4.3. Conduttore cavo contenente un conduttore carico

Il campo elettrostatico all'interno di un conduttore cavo è zero, quindi non ci può essere una carica totale all'interno che sia diversa da zero. Ponendo un conduttore nella cavità, sulla superficie interna del conduttore cavo compare una carica $-q$. Allo stesso tempo il conduttore è neutro, quindi è comparsa una carica $+q$ sulla superficie esterna.



> Questo si chiama *induzione completa*: tutte le linee di forza che partono dal conduttore interno, terminano sul conduttore esterno.

Il campo all'esterno è indistinguibile da quello che si creerebbe se avessimo depositato la carica sul conduttore cavo (è infatti uno schermo elettrostatico perfetto).



4.4. Il condensatore

Un oggetto che sfrutta le proprietà dei conduttori cavi sono i condensatori.

> Viene definita *capacità* del condensatore C il rapporto tra la carica presente sulle sue armature e la differenza di potenziale

> tra le stesse
>
> $$C = \frac{q}{\Delta V}, \quad q = C\Delta V, \quad \Delta V = \frac{q}{C}$$

4.4.1. Condensatore sferico (esempio 4.2)

Consideriamo il sistema formato da un conduttore sferico di raggio R_1 al centro di un conduttore cavo di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3. Depositiamo una carica q sul conduttore interno. Calcolare la differenza di potenziale tra i due conduttori.

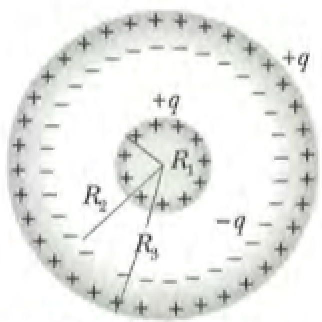
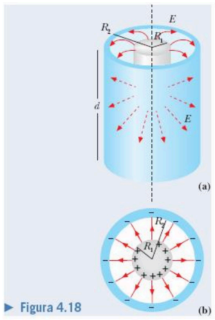


Figura 4.17
Condensatore sferico.

4.4.2. Condensatore cilindrico (esempio 4.3)

Le armature di un condensatore cilindrico sono due porzioni di superficie cilindriche coassiali, una di raggio R_1 e l'altra di raggio R_2 di eguale lunghezza d grande rispetto ai raggi. Si realizza così un'ulteriore situazione di conduttore all'interno di un altro conduttore cavo, con induzione approssimativamente completa. Calcolare la capacità del condensatore.



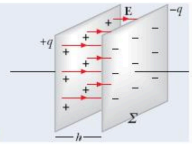
▸ Figura 4.18

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

Nella cavità del conduttore il campo corrisponde a quello di un filo infinito carico $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$, che è radiale.
La differenza di potenziale è $\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_1} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$.
Allora la capacità del condensatore è: $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$.

4.4.3. Condensatore piano (esempio 4.4)

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani paralleli, di area Σ e distanti h. La carica positiva q è distribuita con densità uniforme σ sull'armatura positiva e quella negativa $-q$ con densità uniforme $-\sigma$ sull'armatura negativa. Calcolare la capacità del condensatore.



▶ Figura 4.20

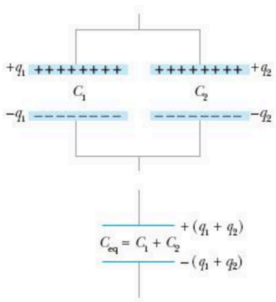
P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

Il campo tra le due armature è $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_n$.
La differenza di potenziale è $\Delta V = Eh = \frac{\sigma}{\epsilon_0}h$. Usando i dati forniti, quindi la superficie delle armature, riscrivo la formula come:
$\Delta V = \frac{\sigma\Sigma}{\epsilon_0\Sigma}h = \frac{q}{\epsilon_0\Sigma}h$.
La capacità è allora: $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0\Sigma}{h}$.

> **Osservazione**
>
> Nel condensatore cilindrico e piano le formule sono valide lontano dai bordi, dove il campo non è più uniforme.

4.5. Collegamento tra condensatori

4.5.1. Collegamento in parallelo



▲ Figura 4.23 Capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo.

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo
EdiSES Università

Un conduttore (un cavo) collega le armature in alto, saranno quindi equipotenziali. Un altro conduttore collega le armature in basso, anch'esse equipotenziali fra loro. Allora la *differenza di potenziale* applicata ad entrambi i condensatori è *uguale*.

Trovo quindi che $q_1 = C_1 \Delta V$ e $q_2 = C_2 \Delta V$, e ottengo

$$q_{tot} = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)\Delta V$$

> Chiamo *capacità equivalente* del sistema la capacità che avrebbe un unico condensatore con carica $+q$ e $-q$ sulle armature, tale che $|q| = |q_1 + q_2 + \ldots + q_n|$.

Per condensatori caricati in parallelo ottengo

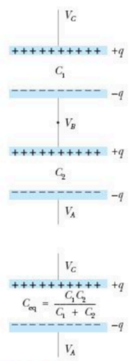
$$C_{eq} = \frac{q}{\Delta V} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

4.5.1.1. Esempio 4.7

Due condensatori di capacità C_1 e C_2 hanno un'armatura a terra e sono caricati con d.d.p. V_1 e V_2. Si collegano tra loro le due armature libere e il sistema assume una nuova condizione di equilibrio con una d.d.p. V rispetto alla terra. Calcolare V.

$q_1 = C_1 \Delta V_1$, $q_2 = C_2 \Delta V_2$
$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\Delta V$
$\Delta V = \frac{q_1+q_2}{C_1+C_2} = \frac{C_1\Delta V_1 + C_2 \Delta V_2}{C_1+C_2}$

4.5.2. Collegamento in serie



▲ Figura 4.24 Capacità equivalente di due condensatori collegati in serie.

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci
Elementi di fisica Elettromagnetismo e Onde ed.III
EdiSES Università

La differenza di potenziale tra le armature di C_1 vale $V_c - V_B$, quella tra le armature di C_2 è $V_B - V_A$, quindi la differenza di potenziale complessiva vale $\Delta V = V_C - V_A$.

La carica $+q$ sull'armatura superiore di C_1 induce una carica $-q$ sull'armatura inferiore di C_1. L'armatura inferiore di C_1 e quella superiore di C_2 formano un unico conduttore centrale che deve essere neutro, compare quindi una carica $+q$ sull'armatura superiore di C_2. La carica $+q$ sull'armatura superiore di C_2 induce una carica $-q$

sull'armatura inferiore di C_2. Allora la *carica* su entrambi i condensatori è *uguale*.

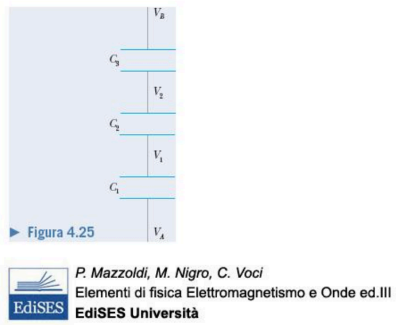
Trovo che $\Delta V_1 = V_c - V_B = \frac{q}{C_1}$, $\Delta V_2 = V_B = \frac{q}{C_2}$, allora ottengo

$$\Delta V = V_n - V_0 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \ldots + \frac{q}{C_n} = q\left(\frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right)$$

mentre ho che la capacità equivalente è

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

4.5.2.1. Esempio 4.6



Ai capi di tre condensatori in serie c'è una d.d.p. $V_B - V_A = 100V$ e la capacità equivalente del sistema è $C_{eq} = 100pF$. Calcolare i valori delle capacita C_1, C_2, C_3 tali che rispetto a V_A sia $V_1 = 50V$e $V_2 = 70V$.