

## Lezione\_15\_fis

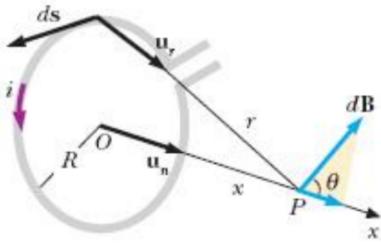
### 7.2. Campi magnetici di circuiti particolari (applicazioni della prima legge di Laplace)

#### 7.2.1. Campo di una spira lungo il suo asse normale

Al centro di una spira di raggio  $R$ , percorsa da una corrente  $i$ , il campo è  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} d\vec{s} \vec{u}_n$ , quindi

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \vec{u}_n \oint ds = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{u}_n$$

visto che  $\oint s = 2\pi R$ .



Spostandosi lungo l'asse  $x$ , che coincide con l'asse normale della spira, vale sempre  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$ , ma adesso  $d\vec{B}$  avrà una componente sia lungo  $x$ , sia una trasversale.

Consideriamo l'elemento infinitesimo di circuito posto in maniera simmetrica rispetto a  $d\vec{s}$ : le componenti di  $d\vec{B}$  parallele all'asse  $x$  si sommano, mentre quelle trasversali si annullano due a due, per la simmetria del problema. Possiamo quindi limitare il calcolo alla componente lungo l'asse  $x$ . Notiamo inoltre che  $d\vec{s} \times \vec{u}_r$  sono sempre ortogonali. Otteniamo dunque la formula

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato tra l'asse  $x$  e  $d\vec{B}$ .

Infine, otteniamo la formula totale per il campo lungo l'asse della spira:  $\vec{B}(x) = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos \theta \vec{u}_n \oint s = \frac{\mu_0 i}{2r^2} R \cos \theta \vec{u}_n =$  usando  $\theta = \frac{R}{r}$   
 $= \frac{\mu_0 i}{2r^3} R^2 \vec{u}_n$  usando  $r^2 = x^2 + R^2$

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_n$$

Lontano dalla spira ( $x \gg R$ ) si ha  $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \vec{u}_n = \frac{\mu_0 2i\pi R^2}{x^3} \vec{u}_n = \frac{\mu_0 2\vec{m}}{2\pi r^3}$ , indicando con  $\vec{m} = i\pi R^2 \vec{u}_n$  il momento magnetico della spira, si nota che la struttura è identica a quella del campo elettrostatico

sull'asse di un dipolo ( $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}$ ), quindi il campo generato vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

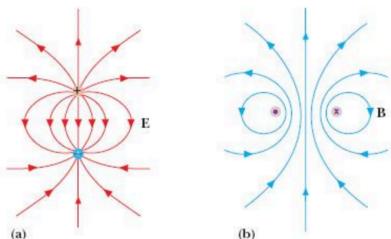
ed è un *campo di dipolo magnetico*.

Si può generalizzare a una spira di qualsiasi forma.

### 7.2.1.1. Linee di campo generate dal dipolo magnetico

Esiste una differenza sostanziale tra le linee del campo elettrico e del campo magnetico di una spira, che è la caratteristica peculiare che contraddistingue in generale di due campi:

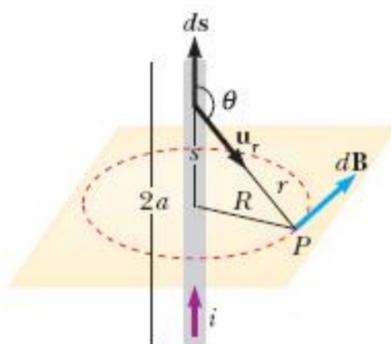
- le linee di forza del campo elettrostatico  $\vec{E}$  escono ed entrano nelle cariche sorgenti;
- le linee del campo magnetico  $\vec{B}$  sono linee chiuse, senza inizio e senza fine.



Le linee di campo magnetico sono *concatenate con la sorgente* che le ha prodotte. Inoltre, prendendo un percorso chiuso coincidente con una delle linee del campo, si può osservare che il campo è sempre equiverso lungo tale linea e quindi la sua *circuitazione non* può essere *nulla*.

### 7.2.2. Campo di un file rettilineo - legge di Biot-Savart

Consideriamo il campo generato da un filo rettilineo di lunghezza  $2a$ , in cui scorre corrente continua  $i$ , sul piano bisettrice; ci poniamo sul punto  $P$  a distanza  $R$  dal filo.



Un elemento di filo produce campo magnetico

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta ds}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{R}$$

usando che  $r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta = R$  e  $s \tan(\pi - \theta) = -s \tan \theta = R$ .

Quindi il campo generato in totale da un file di lunghezza  $a$  si calcola integrando tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\theta_{max}$ , dove  $\theta_{max}$  corrisponde all'angolo formato dalla quota massima  $s = a$ :  $B_a = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos \theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}}$ .

Allora si ha

$$B_a = \frac{\mu_0 i a}{4\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}$$

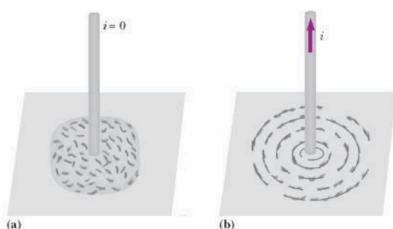
Prendendo tutto il filo iniziale in esame si ottiene il campo

$$\vec{B} = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} \vec{u}_\phi$$

con  $\vec{u}_\phi$  il versore tangente alla circonferenza orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite.

Infine, facendo tendere a infinito la lunghezza del filo si ottiene la *legge di Biot-Savart*, che afferma che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende *solo dalla distanza dal filo*, in modo inversamente proporzionale; le sue linee sono *circonferenze concentriche* al filo e risultano pertanto *concatenate alla corrente, sorgente del campo stesso*.

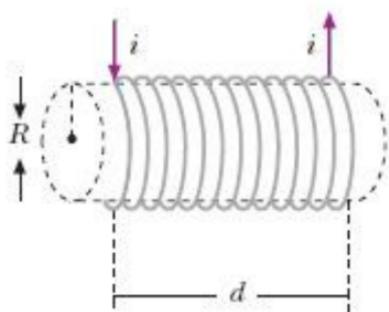
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi$$



### 7.2.3. Campo di un solenoide rettilineo lungo il suo asse

#### Ricorda

Un solenoide è una bobina formata da  $N$  spire circolari di raggio  $R$ , lunga  $d$ , in cui scorre una corrente  $i$ . È caratterizzato dalla densità di spire per unità di lunghezza  $n = \frac{N}{d}$ .

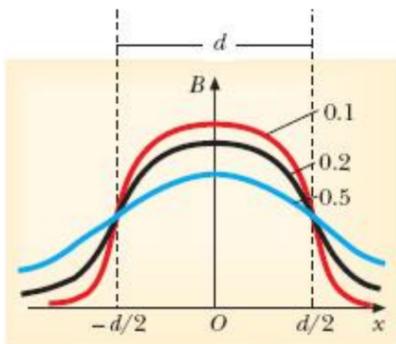


Si può dimostrare, sommando il campo generato da tutte le spire, che il campo magnetico generato da un solenoide rettilineo è pari a

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[ \frac{\frac{d}{2} + x}{\sqrt{(\frac{d}{2} + x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{d}{2} - x}{\sqrt{(\frac{d}{2} - x)^2 + R^2}} \right]$$

Al centro del solenoide ( $x = 0$ ) il campo è massimo e vale

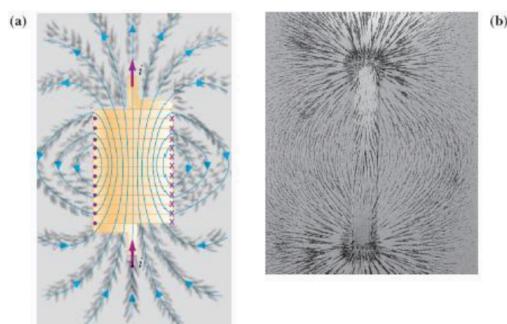
$$B_O = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}}$$



Se la lunghezza del solenoide è molto maggiore rispetto al raggio, il campo all'interno del solenoide (lontano dai bordi) si può approssimare con

$$B_\infty = \mu_0 n i$$

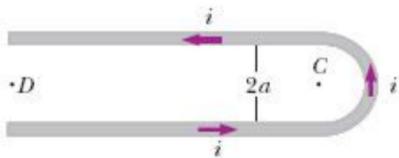
Le sue linee di campo sono molto simili a quelle di un magnete cilindrico



## 7.2.4. Esercizi

### 7.2.4.1. Esercizio 7.12

Un filo conduttore è piegato a "U", come in figura, la distanza tra i due fili paralleli è  $2a = 2\text{cm}$ , la corrente che vi scorre è  $i = 0,5\text{A}$ . Calcolare il campo magnetico in un punto  $D$ , molto lontano dal tratto di filo curvo, di cui si trascura l'effetto. Calcolare poi il campo magnetico nel punto  $C$ .



### 7.2.4.2. Esercizio 7.13

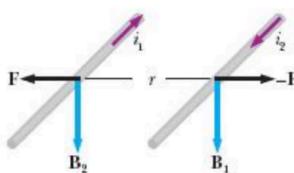
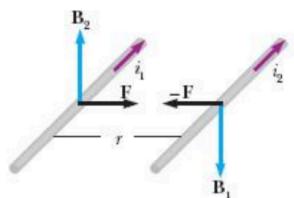
Una sottile lamina conduttrice di larghezza  $h = 2\text{cm}$  è percorsa dalla corrente  $i = 10\text{A}$ . Calcolare il valore del campo magnetico  $B(x)$  a distanza  $x$  dal bordo della striscia. Calcolare poi il momento meccanico  $\vec{M}$  che agisce su un piccolo ago magnetico di momento  $m = 0,1\vec{u}_x\text{Am}^2$ , posto a distanza  $x = 1\text{cm}$ .

## 7.3. Azioni elettrodinamiche tra i fili percorsi da corrente

Consideriamo due fili rettilinei paralleli molto lunghi e abbastanza vicini, così da poter essere considerati *indefiniti*, percorsi dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$ . Ciascun filo risente della forza esercitata dal campo magnetico prodotto dall'altro filo (dato dalla legge di Biot-Savart).

Le due forze sono uguali e contrarie, *attrattive* se le *correnti* sono *equiverte*, *repulsive* se *contrarie*. La formula è data da

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad | \vec{F} | = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$



### 7.3.1. Esempio 7.1

Due spire circolari di raggio  $R = 30\text{cm}$  aventi lo stesso asse sono poste in piani paralleli orizzontali distanti  $a = 3\text{mm}$ . La spira superiore è appesa al giogo di una bilancia.

Se nelle spire circola la stessa corrente  $i = 1A$  nello stesso verso, per ristabilire l'equilibrio occorre aggiungere sull'altro piatto della bilancia una massa  $m$ . Calcolare  $m$ .