



# Lambda calculus 3

---

Bolo:

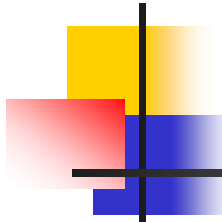
- vlastnosti  $\beta$ -redukcie
- $\lambda$ -kalkul ako programovací jazyk (Church's numerals, ...)
- rekurzia a operátor pevného bodu

Dnes:

- viac o rekurzii – trochu technickejšie rozprávanie
- de Bruijnove indexy (odstránenie mien premenných) – slajd 28..
- logika kombinátorov SKI (odstránenie mien premenných inak)

Cvičenie:

- de Bruijn indexy – cesta tam a späť a  $\beta$ -redukcia v teórii dB
- logika kombinátorov – cesta tam a späť a  $\beta$ -redukcia v teórii SKI



# Rekurzia

To, čo stále nevieme, je definovať rekurzívnu funkciu, resp. cyklus.  
Na to sa používa konštrukcia pomocou operátora pevného bodu.

Príklad:

$$\text{FAC} := \lambda n. (\text{if } (= n 0) 1 (* n (\text{FAC } (- n 1))))$$

$$\text{FAC} := \lambda n. \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } (n * \text{FAC } (n - 1))$$

... trik:  $\eta$ -redukcia  $(\lambda x. M x) = M$ , ak  $x$  nie je  $\text{Free}(M)$

$$\text{FAC} := (\lambda \text{fac}. (\lambda n. (\text{if } (= n 0) 1 (* n (\text{fac } (- n 1))))) \text{FAC})$$

$$H := \lambda \text{fac}. (\lambda n. (\text{if } (= n 0) 1 (* n (\text{fac } (- n 1)))))$$

hľadáme funkciu FAC, ktorá má túto vlastnosť:

$$\text{FAC} := (H \text{ FAC}) \quad f x = x$$

hľadaná funkcia FAC je *pevný bod* funkcie H

■ Aký je typ Y ??

# Pevný bod

Potrebuje trochu teórie:

## Veta:

Pre ľubovoľný  $\lambda$ -term  $F$  existuje pevný bod, t.j.  $X$  také, že  $X = F X$ .

Dar nebies (operátor pevného bodu):

$$Y = \lambda f. (\lambda x. (f(x x))) (\lambda x. f(x x))$$

potom

$(Y F)$  je pevný bod  $F$ , t.j.  $(Y F) = F (Y F)$ .

Skúsme to (aspoň) overiť:

$$Y F = (\lambda f. (\lambda x. f(x x)) (\lambda x. f(x x))) F \rightarrow_{\beta} (\lambda x. F(x x)) (\lambda x. F(x x)) \rightarrow_{\beta}$$

$$\quad (\lambda x'. F(x' x')) (\lambda x. F(x x)) \rightarrow_{\beta} F(x' x')[x':\lambda x. F(x x)] \rightarrow_{\beta}$$

$$\quad F(\lambda x. F(x x) \lambda x. F(x x)) =$$

$$\quad F (Y F)$$

preto  $(Y F)$  je naozaj pevný bod  
a je jediný ?



# Operátor Y

$FAC := (H\ FAC)$

$FAC := Y\ H$

$H := \lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))$

Platí

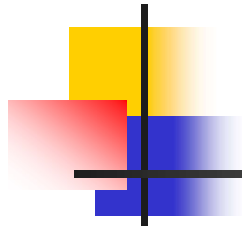
$Y\ H = H\ (Y\ H)$

Presvedčíme sa, že Y nám pomôže definovať rekurzívnu funkciu:

$FAC = Y\ H = Y\ (\lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))$   
 $(\lambda f. (\lambda x. f(x\ x)))\ (\lambda x. f(x\ x)))\ (\lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))$

– toto je faktoriál – verzia nevhodná pre slabšie povahy

$FAC\ 1 = (Y\ H)\ 1$  ... z vlastnosti pevného bodu  $Y\ H = H\ (Y\ H)$   
 $= (H\ (Y\ H))\ 1$   
 $= \lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))\ (Y\ H)\ 1$   
 $= \lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ ((Y\ H)\ (-\ n\ 1))))\ 1$   
 $= if\ (= 1\ 0)\ 1\ (*\ 1\ ((Y\ H)\ (-\ 1\ 1)))$   
 $= (*\ 1\ ((Y\ H)\ (-\ 1\ 1)))$   
 $= (*\ 1\ ((Y\ H)\ 0))$   
 $= (*\ 1\ (H\ (Y\ H)\ 0))$  ... trochu zrýchlene  
 $= (*\ 1\ 1)$   
 $= 1$



# 1+2+3+...+n

SUM =  $\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))$

DON'T DRINK  
AND DERIVE

(Y SUM) 2 =

- $Y (\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) 2$
- $(\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y \text{ SUM}) 2$
- $(\lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- n 1)))) 2$
- $\text{if } (= 2 0) 0 (+ 2 ((Y \text{ SUM}) (- 2 1)))$
- $(+ 2 ((Y \text{ SUM}) 1))$
- $(+ 2 ((\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y \text{ SUM}) 1))$
- $(+ 2 ((\lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- n 1)))) 1))$
- $(+ 2 ((\text{if } (= 1 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- 1 1))))))$
- $(+ 2 (+ 1 ((Y \text{ SUM}) 0)))$
- $(+ 2 (+ 1 ((\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y \text{ SUM}) 0)))$
- $(+ 2 (+ 1 ((\lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- n 1)))) 0)))$
- $(+ 2 (+ 1 ((\text{if } (= 0 0) 0 (+ 0 ((Y \text{ SUM}) (- 0 1)))))))$
- $(+ 2 (+ 1 0)) = 3$



# Cvičenie

---

- (na zamyslenie) nájdite príklady funkcií s nekonečným počtom pevných bodov s práve jedným pevným bodom, fix-point :  $f\ x = x$
- realizujte interpreter  $\lambda$ kalkulu, pokračujte v kóde z minulého cvičenia tak, aby počítal hodnoty rekurzívnych funkcií

```
--sucet = \s -> \n -> (if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1))))
```

```
sucet =  LAMBDA "s"
        (LAMBDA "n"
          (APP
            (APP
              (APP
                (CON "IF")
                (APP (APP (CON "=") (ID "n")) (CN 0)) -- condition
              )
              (CN 0) -- then
            )
            (APP (APP (CON "+") -- else
                      (ID "n"))
                  (APP (ID "s")
                        (APP (APP (CON "-") (ID "n")) (CN 1))
                      )
                )
          )
        )
      )
    )
```



# Cvičenie

-- plati  $Y f = f(Y f)$

y = LAMBDA "f"

(APP (LAMBDA "x" (APP (ID "f") (APP (ID "x") (ID "x")))))  
(LAMBDA "x" (APP (ID "f") (APP (ID "x") (ID "x")))))

$Y = \lambda f.(\lambda x. f(x x)) (\lambda x. f(x x))$

Vyhodnoťte (APP (APP y sucet) CN 4)

1+2+3+4 = 10 ?

A čo faktorial ?

Poznámka:

Obohaťte Váš interpreter o vstavané celé čísla so základnými operáciami (+1, -1, +, \*), plus test (napr. na nulu). V opačnom prípade budete bojovať s Church.číslami a interpreter sa vám bude ťažšie ľadiť.



# Operátor pevného bodu

---

Dar nebies (operátor pevného bodu):

$$Y = \lambda f.(\lambda x. (f(x x))) (\lambda x. f(x x))$$

potom

$(Y F)$  je pevný bod  $F$ ,

t.j.

$$(Y F) = F (Y F).$$





# Viacnásobná rekurzia

(idea)

$\text{foo } x \ y = \dots (\text{goo } x' \ y') \dots (\text{foo } x'' \ y'') \dots$

$\text{goo } x \ y = \dots (\text{foo } x' \ y') \dots (\text{foo } x'' \ y'') \dots$

organizujem to vektorovo:

$\text{foogoo } (x, y) = ($   
     $\dots \text{snd } \$ (\text{foogoo } (x', y')) \dots \text{fst } \$ (\text{foogoo } (x'', y'')) \dots$   
     $,$   
     $\dots \text{fst } \$ (\text{foogoo } (x', y')) \dots \text{snd } \$ (\text{foogoo } (x'', y'')) \dots$   
     $)$

$\underline{X} = (x, y) = \lambda \underline{z}. (\text{foo } (\text{fst } \underline{z}, \text{snd } \underline{z}), \text{goo } (\text{fst } \underline{z}, \text{snd } \underline{z})) \underline{X}$

preto

$\underline{X} = \underline{Y} \ ( \ \lambda \underline{z}. (\text{foo } (\text{fst } \underline{z}, \text{snd } \underline{z}), \text{goo } (\text{fst } \underline{z}, \text{snd } \underline{z})) \ )$



# Viacnásobná rekurzia

Veta o pevnom bode:

Pre ľubovoľné  $F_1, F_2, \dots, F_n$  existujú  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , že

$$X_1 = F_1 X_1 X_2 \dots X_n$$

$$X_2 = F_2 X_1 X_2 \dots X_n$$

$$\dots$$

$$X_n = F_n X_1 X_2 \dots X_n.$$

vektorovo:

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (F_1 X_1 X_2 \dots X_n, F_2 X_1 X_2 \dots X_n, \dots, F_n X_1 X_2 \dots X_n)$$

$$\underline{\mathbf{X}} = (F_1(p_1 \underline{\mathbf{X}})(p_2 \underline{\mathbf{X}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{X}}), \dots, F_n(p_1 \underline{\mathbf{X}})(p_2 \underline{\mathbf{X}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{X}}))$$

$$\underline{\mathbf{X}} = \lambda \underline{\mathbf{z}}. (F_1(p_1 \underline{\mathbf{z}})(p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}}), \dots, F_n(p_1 \underline{\mathbf{z}})(p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}})) \underline{\mathbf{X}}$$

$p_i$  = i-ta projekcia vektora.

preto

$$\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{Y} (\lambda \underline{\mathbf{z}}. (F_1(p_1 \underline{\mathbf{z}})(p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}}), \dots, F_n(p_1 \underline{\mathbf{z}})(p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}})) ) )$$

# Primitívna rekurzia

(ideovo)



Rózsa Peter, founding mother of recursion theory

Due to the effects of the Great Depression, many university graduates could not find work and Péter began private tutoring. At this time, she also began her graduate studies.

[https://en.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3zsa\\_P%C3%A9ter](https://en.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3zsa_P%C3%A9ter)

Primitívne rekurzívna funkcia je:

- 0, resp. nulová funkcia  $N^n \rightarrow N$ ,
- +1, resp. succ:  $N \rightarrow N$ ,
- $p_i x_1 x_2 \dots x_n = x_i$  resp. projekcia  $p_i: N^n \rightarrow N$ ,  $p_i x_1 x_2 \dots x_n = x_i$
- $f \cdot g$  resp. kompozícia  
 $f x_1 x_2 \dots x_n = g(h_1(x_1 x_2 \dots x_n) \dots h_m(x_1 x_2 \dots x_n))$
- číselná rekurzia z  $n+1$  na  $n$ :

primitívna rekurzia  $g : N^n \rightarrow N$ ,  $h : N^{n+2} \rightarrow N$ , potom  $f : N^{n+1} \rightarrow N$

operátor  
primitívnej  
rekurzíe

$$\begin{cases} f \mathbf{0} \quad x_1 x_2 \dots x_n & = g(x_1 x_2 \dots x_n) \\ f \mathbf{(n+1)} x_1 x_2 \dots x_n & = h(f(\mathbf{n} x_1 x_2 \dots x_n) \mathbf{n} x_1 x_2 \dots x_n) \end{cases}$$



Wilhelm Ackermann

# Primitívna rekurzia

Primitívne rekurzívne funkcia je totálna, resp. všade definovaná

- je akákoľvek číselná totálna funkcia ( $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ) primitívne rekurzívna ?
- je akákoľvek číselná "haskellovská" totálna funkcia primitívne rekurzívna ?  
(je predpoklad  $n+1 \rightarrow n$  vážne obmedzujúci ?)
- je, Ackermannova funkcia, je jednoduchým príkladom funkcie, ktorá nie je primitívne rekurzívna (1935):

$$A(0, n) = n + 1$$

$$A(m + 1, 0) = A(m, 1)$$

$$A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n))$$

- Ackermannova funkcia rastie rýchlejšie ako akákoľvek primitívne rekurzívna

[https://en.wikipedia.org/wiki/Primitive\\_recursive\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Primitive_recursive_function)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Fast-growing\\_hierarchy](https://en.wikipedia.org/wiki/Fast-growing_hierarchy)

# Viac než primitívna rekurzia

Primitívne rekurzívna funkcia je:

- nulová funkcia  $N^n \rightarrow N$ ,
- succ:  $N \rightarrow N$ ,
- projekcia  $p_i: N^n \rightarrow N$ ,  $p_i x_1 x_2 \dots x_n = x_i$
- kompozícia  $f x_1 x_2 \dots x_n = g(h_1(x_1 x_2 \dots x_n) \dots h_m(x_1 x_2 \dots x_n))$
- primitívna rekurzia  $g: N^n \rightarrow N$ ,  $h: N^{n+2} \rightarrow N$ , potom  $f: N^{n+1} \rightarrow N$   
 $f 0 \quad x_1 x_2 \dots x_n = g(x_1 x_2 \dots x_n)$   
 $f (n+1) x_1 x_2 \dots x_n = h(f(n x_1 x_2 \dots x_n) n x_1 x_2 \dots x_n)$

[Parciálne/Čiastočne] [vyčísliteľná/rekurzívna] (nemusí byť totálna):  
nech  $r: N^{n+1} \rightarrow N$  je primitívne rekurzívna funkcia

operátor  
 $\mu$ -rekurzcie

- $\mu$ -rekurzcia definuje  $f: N^{n+1} \rightarrow N$   
 $f y \quad x_1 x_2 \dots x_n = \min_z. (r(z x_1 x_2 \dots x_n) == y)$

pohľad programátora:

```
f y x1 x2 ... xn =  
    for (int z = 0; ; z++)  
        if ( r(z x1 x2 ... xn) == y ) return z;
```





# $\mu$ -rekurzia

operátor  
 $\mu$ -rekurzie

[Parciálne/Čiastočne] [vyčísliteľná/rekurzívna] (nemusí byť totálna):

nech  $r : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$  je primitívne rekurzívna funkcia

- $\mu$ -rekurzia definuje  $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $f \ y \quad x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n = \min_{z.} (r(z \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) == y)$

pohľad informatika:

Nech  $r(z \ x_1 \ x_2)$

- je funkcia, ktorá ku kódu TM  $x_1$ , kódu vstupnej pásky  $x_2$  kódu povie, v ktorom stave stojí TM po  $z$  krokoch
- chce to prax a chvíľku by to trvalo, ale zistili by sme, že to je primitívne rekurzívna funkcia...
- ---  $r \ \dots$  povie, či TM stojí v koncovom stave, alias, akceptuje slovo  $x_2$

Operátor  $\mu$ -rekurzia nás privedie k čiastočne rekurzívnej funkcii, ktorá

- vie zistiť, po koľkých krokoch TM zastaví, ak zastaví
- ak nie, nevie nič

Asi tušíte, že toto z princípu veci nemôže byť totálne funkcia, ani primitívne rekurzívna

- sme v inej galaxii...



# $\lambda$ -vypočítateľná funkcia

(technické – na dlhé letné večery)

Parciálna funkcia  $f : N^n \rightarrow N$  je  **$\lambda$ -vypočítateľná**, ak existuje  $\lambda$ -term  $F$  taký, že  $F \underline{x_1} \underline{x_2} \dots \underline{x_n}$  sa zredukuje na  $\underline{f \ x_1 \ x_2 \dots x_n}$ , ak  $n$ -tica  $x_1 \ x_2 \dots x_n$  patrí do def.oboru  $f$   
 $F \underline{x_1} \underline{x_2} \dots \underline{x_n}$  nemá normálnu, ak  $n$ -tica  $x_1 \ x_2 \dots x_n$  nepatrí do def.oboru  $f$

**Veta:** Každá parciálne vyčísliteľná funkcia je  $\lambda$ -vypočítateľná.

Dôkaz:

- nulová fcia, succ, projekcie  $p_i$ , kompozícia priamočiaro
- primitívna rekurzia  $g : N^n \rightarrow N$ ,  $h : N^{n+2} \rightarrow N$ , potom  $f : N^{n+1} \rightarrow N$   
 $f \ 0 \quad x_1 \ x_2 \dots x_n = g(x_1 \ x_2 \dots x_n)$   
 $f \ (n+1) \ x_1 \ x_2 \dots x_n = h(f(n \ x_1 \ x_2 \dots x_n) \ n \ x_1 \ x_2 \dots x_n)$   
 $F = \mathbf{Y} (\lambda f. \lambda y. \lambda x_1. \lambda x_2 \dots \lambda x_n. (\text{if } (\text{isZero } y) \ G(x_1 \ x_2 \dots x_n) \text{ then } \\ \text{else } H(f((\text{pred } y) \ x_1 \ x_2 \dots x_n) \ (\text{pred } y) \ x_1 \ x_2 \dots x_n))))$
- $\mu$ -rekurzia  $r : N^{n+1} \rightarrow N$   
 $F = \lambda y \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n. \mathbf{Y} (\lambda h. \lambda z. (\text{if } (\text{eq } y \ G(z \ x_1 \ x_2 \dots x_n)) \text{ then } z \text{ else } h \ (\text{succ } z))))$

**Veta:** Každá  $\lambda$ -vypočítateľná je parciálne vyčísliteľná funkcia.

# Weak head normal form

(slabo hlavová normálna forma)

Head normal form (h.n.f)

- $(\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_k. v) M_1 M_2 \dots M_n$
- $v$  je premenná (resp. konštanta),
- pre ľubovoľné  $r \leq n$ ,  $(\dots((v M_1) M_2) \dots M_r)$  nie je redex .

Ak  $k=0$ , konštanta či premenná s málo argumentami

Ak  $k>0$ ,  $\lambda$ -abstrakcia s nereducibilným telom

Weak head normal form (w.h.n.f)

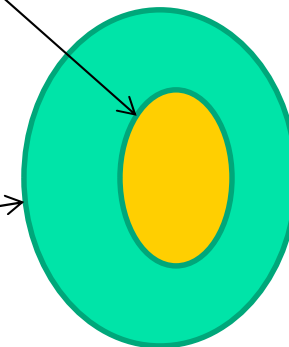
- $v M_1 M_2 \dots M_n$
- $v$  je premenná alebo  $\lambda$ -abstrakcia (resp. konštanta),
- pre ľubovoľné  $r \leq n$ ,  $(\dots((v M_1) M_2) \dots M_r)$  nie je redex .

Konštanta, premenná alebo  $\lambda$ -abstrakcia s málo argumentami.

$\lambda x.((\lambda y.y) z)$  nie je h.n.f. (až po red.  $((\lambda y.y) z) \rightarrow_{\beta} z$ ), ale je w.h.n.f.

$(k, n \in \mathbb{N})$

$(n \in \mathbb{N})$







# Najznámejšie stratégie

---

- weak leftmost outermost (call by need/output driven/lazy/full lazy)  
$$(\lambda x. \lambda y. (x \ y)) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} \lambda y. ((\lambda z. z) \ y) \quad \text{w.h.n.f.}$$

redukuje argumenty funkcie, len ak ich treba

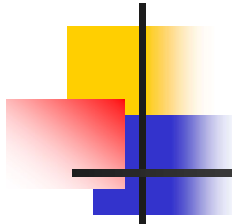
Keďže w.h.n.f. môže obsahovať redex, tak nenormalizuje úplne...

- strong leftmost outermost (call by name/demand driven)  
$$(\lambda x. \lambda y. (x \ y)) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} \lambda y. ((\lambda z. z) \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda y. y \quad \text{n.f.}$$

redukuje argumenty funkcie, len ak ich treba, ale pokračuje v hľadaní redexov, kým nejaké sú

normalizuje úplne...

- eager - argumenty najprv (call by value/data driven/strict)  
nenormalizuje...



# Lazy

---

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x.x)(* 3 4)) ) (\lambda x.(+2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $( \lambda y. (* (+ ((\lambda x.x)(* 3 4)) ((\lambda x.x)(* 3 4))) y) ) (\lambda x.(+2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ ((\lambda x.x)(* 3 4)) ((\lambda x.x)(* 3 4))) (\lambda x.(+2 x) 6) ) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ (* 3 4) ((\lambda x.x)(* 3 4))) (\lambda x.(+2 x) 6) ) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 ((\lambda x.x)(* 3 4))) (\lambda x.(+2 x) 6) ) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 (* 3 4)) (\lambda x.(+2 x) 6) ) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 12) (\lambda x.(+2 x) 6) ) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (\lambda x.(+2 x) 6) ) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (+2 6) ) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8 ) \rightarrow_{\beta}$
- 192



# Full lazy

---

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* (+ ((\lambda x. x) (* 3 4)) ((\lambda x. x) (* 3 4))) y) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ ((\lambda x. x) (* 3 4)) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ (* 3 4) (* 3 4)) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 12) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (+ 2 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8) \rightarrow_{\beta}$
- 192



# Strict

---

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (+ 2 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) (* 3 4)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* (+ 12 12) y)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 12) 8) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8) \rightarrow_{\beta}$
- 192



# Eager

---

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) 12)) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) (+ 2 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* (+ 12 12) y)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* 24 y)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8) \rightarrow_{\beta}$
- 192

# Church-Rosser vlastnosť

(konzistentnosť  $\lambda$ -kalkulu – *Janko/Marienka vlastnosť*)

pre ľubovoľnú trojicu termov  $M, M_1, M_2$  takých, že

$$M \rightarrow_{\beta}^* M_1 \text{ a } M \rightarrow_{\beta}^* M_2$$

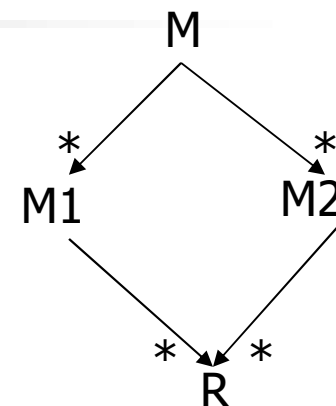
existuje  $R$ , že

$$M_1 \rightarrow_{\beta}^* R \text{ a } M_2 \rightarrow_{\beta}^* R$$

Inak:

$$(\leftarrow_{\beta}^* \circ \rightarrow_{\beta}^*) \subseteq (\rightarrow_{\beta}^* \circ \leftarrow_{\beta}^*)$$

teda ak  $M_1 \leftarrow_{\beta}^* M \rightarrow_{\beta}^* M_2$ , potom existuje  $R$ , že  $M_1 \rightarrow_{\beta}^* R \leftarrow_{\beta}^* M_2$



**Veta:**  $\beta$ -redukcia spĺňa Church-Rosserovu vlastnosť

Dôkazy sú technicky náročné:

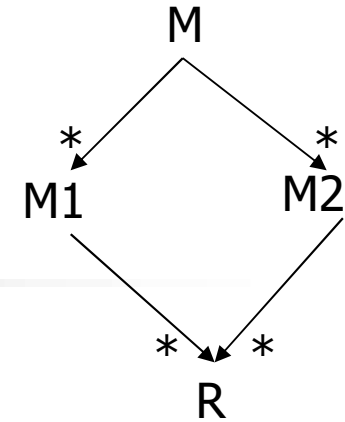
- 1936 Church, Rosser: Some properties of conversion
- 1981 Barendregt
- 1981 Löf, Tait

**Dôsledok:**

ak term má normálnu formu vzhľadom na  $\rightarrow_{\beta}$ , potom je jednoznačne určená

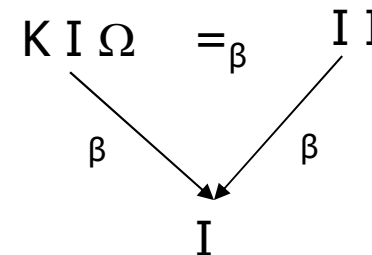


# Vysvetlenie

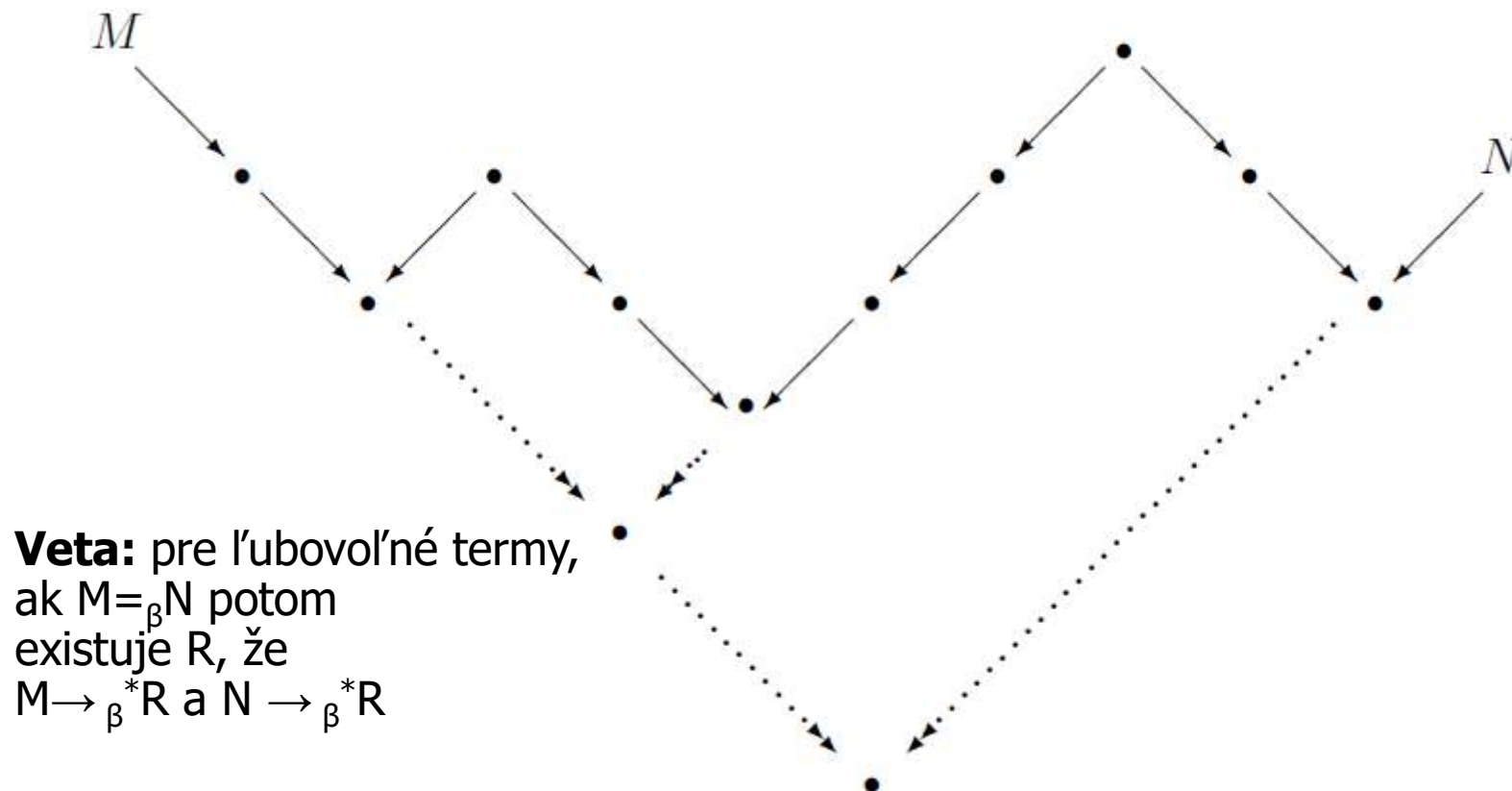


- $(\leftarrow_{\beta}^* \circ \rightarrow_{\beta}^*) \subseteq (\rightarrow_{\beta}^* \circ \leftarrow_{\beta}^*)$
- $x (\leftarrow_{\beta}^* \circ \rightarrow_{\beta}^*) y \Rightarrow x (\rightarrow_{\beta}^* \circ \leftarrow_{\beta}^*) y$
- $\forall m, \exists r:$   
$$x \leftarrow_{\beta}^* m \rightarrow_{\beta}^* y \Rightarrow x \rightarrow_{\beta}^* r \leftarrow_{\beta}^* y$$
- $\forall m \exists r:$   
$$x \leftarrow_{\beta}^* m \wedge m \rightarrow_{\beta}^* y \Rightarrow x \rightarrow_{\beta}^* r \wedge r \leftarrow_{\beta}^* y$$

# $\beta$ ekvivalencia



■  $=_{\beta}$  definujeme ako  $(\rightarrow_{\beta} \cup \leftarrow_{\beta})^*$  Príklad:  $KI\Omega =_{\beta} II$





# Slabá Church-Rosser vlastnosť

(*slabá Janko/Marienka vlastnosť*)

pre ľub. trojicu termov  $M, M_1, M_2$  takých, že

$$M \rightarrow M_1 \text{ a } M \rightarrow M_2$$

existuje  $R$ , že

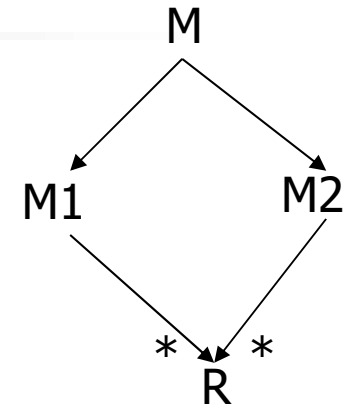
$$M_1 \rightarrow^* R \text{ a } M_2 \rightarrow^* R$$

Inak:

$$(\leftarrow \circ \rightarrow) \subseteq (\rightarrow^* \circ \leftarrow^*)$$

teda ak  $M_1 \leftarrow M \rightarrow M_2$ , potom existuje  $R$ , že  $M_1 \rightarrow^* R \leftarrow^* M_2$

■  $\forall m \exists r: x \leftarrow_{\beta} m \wedge m \rightarrow_{\beta} y \Rightarrow x \rightarrow_{\beta}^* r \wedge r \leftarrow_{\beta}^* y$



Veta: **Nech  $\rightarrow$  je noetherovská/silne normalizujúca/terminujúca relácia.**

- $\rightarrow$  **má Church-Rosser vlastnosť (confluent) je ekvivalentné s**
- $\rightarrow$  **má slabú Church-Rosser vlastnosť (local confluent)**

Dôkaz:  $CR \Rightarrow SCR$ , to je jasné...

preto zostáva  $SCR \Rightarrow ?? CR$

Zamyslenie: je noetherovská podmienka podstatná, neplatí veta aj bez nej ?

# Slabá Church-Rosser vlastnosť

Veta: **Nech  $\rightarrow$  je noetherovská/silne normalizujúca/terminujúca relácia:**

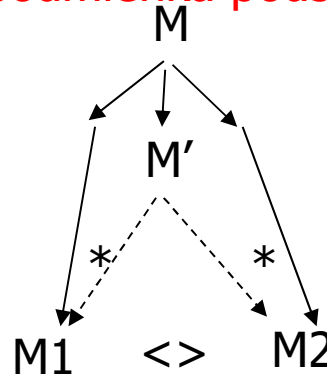
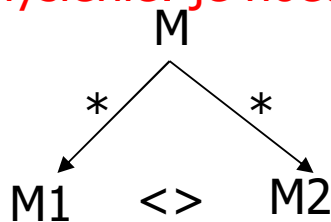
- **$\rightarrow$  má Church-Rosser vlastnosť (confluent) je ekvivalentné s**
- **$\rightarrow$  má slabú Church-Rosser vlastnosť (local confluent)**

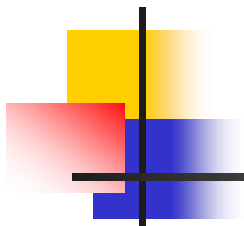
Dôkaz sporom:

NOE & SCR implikuje CR, ukážeme **spor**: NOE & SCR &  $\neg$ CR:

- ( $\neg$ CR): Nech  $M$  má dve normálne formy,  $M_1 <> M_2$ , t.j.  $M \rightarrow^* M_1$  a  $M \rightarrow^* M_2$ .
- $M$  nie je v normálnej forme (ak by bolo,  $M=M_1=M_2$  a pritom  $M_1 <> M_2$ ),
- potom existuje  $M'$ , že  $M \rightarrow M'$ ,
- $M'$  má tiež dve normálne formy, ak by nie, spor s lokálnou konfluentosťou,
- $M''$ ,  $M'''$ ,  $M''''$ , a t.d' (noetherovskosť relácie vyrobí spor).

**Zamyslenie: je noetherovská podmienka podstatná, neplatí veta aj bez nej ?**





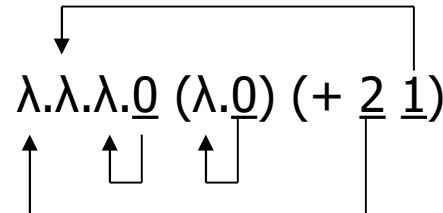
# de Bruijn index



Nicolaas Govert de Bruijn

čo robilo problémy pri substitúcii, sú mená premenných  
idea (pána de Bruijn): *premenné nahradíme de Bruijn - indexami*

- $\lambda x. (+ x 1)$ 
  - $\lambda. (+ \underline{0} 1)$
- $\lambda x. \lambda y. \lambda f. f ((\lambda x. x) (+ x y))$ 
  - $\lambda. \lambda. \lambda. \underline{0} ((\lambda. \underline{0}) (+ \underline{2} \underline{1}))$

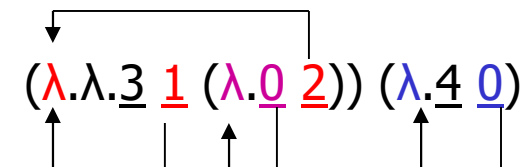


de Bruijn index: neformálne:

cez koľko  $\lambda$  treba preskákať hore, aby sme našli  $\lambda$ -príslušnej/danej premennej

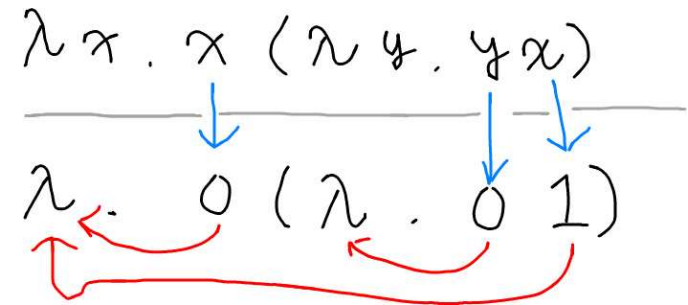
- Dôsledok 1:  $\alpha$ -konverzia tu neexistuje lebo premenné nemajú/stratili mená
- Dôsledok 2: rôzne premenné môžu mať rovnaký index v rôznych kontextoch
- Dôsledok 3: voľné premenné majú index  $>$  hĺbkou  $\lambda$ -vnorení

- $(\lambda x. \lambda y. ((\underline{z} x) (\lambda u. (u x)))) (\lambda x. (\underline{w} x))$ 
  - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3} \underline{1}) (\lambda. (\underline{0} \underline{2})))) (\lambda. (\underline{4} \underline{0}))$

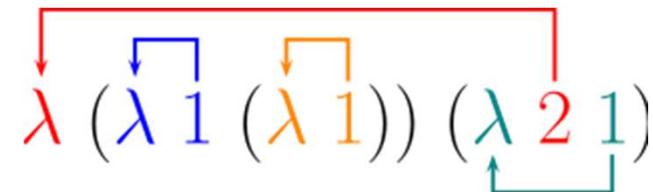


# de Bruijn index

(príklady)



- $\lambda x. \lambda y. x$  (K-kombinátor):  
 $\lambda \lambda 1$
- $\lambda x. \lambda y. \lambda z. ((x z) (y z))$  (S-kombinátor):  
 $\lambda \lambda \lambda 2 0 (1 0)$
- $\lambda z. ((\lambda y. y (\lambda x. x)) (\lambda x. (z x)))$   
 $\lambda ((\lambda 0 (\lambda 0)) (\lambda (1 0)))$



pekná grafika, ale my máme indexy od 0, preto decr 1

Syntax de Bruijnovej notácie:

$L_{dB} ::= n \mid (L_{dB} L_{dB}) \mid \lambda L_{dB}$

```
data LExpDB = LAMBDADB LExpDB |
  IDDB Int |
  APPDB LExpDB LExpDB deriving(Eq)
```

# β-redukcia s de Bruijn-indexami

(pointa)

Príklady:

- $K = \lambda x. \lambda y. x$ 
  - $\lambda. \lambda. \underline{1}$
- $S = \lambda x. \lambda y. \lambda z. ((x\ z)\ (y\ z))$ 
  - $\lambda. \lambda. \lambda. ((\underline{2}\ \underline{0})\ (\underline{1}\ \underline{0}))$

- $\lambda x. (+\ x\ 1)\ 5$ 
  - $\lambda. (+\ \underline{0}\ 1)\ 5 = (+\ 5\ 1)$

hypotéza, ako by to mohlo fungovať  
β-redukcia  $(\lambda.M)\ N = M[\underline{0}:N]\ ???$   
ale nefunguje... ☹

- $K\ a\ b = (\lambda x. \lambda y. x)\ a\ b$ 
  - $(\lambda. \lambda. \underline{1}\ a)\ b = \lambda. a\ b = a$

skúsme intuitívne

- $(\lambda x. \lambda y. ((z\ x)\ (\lambda u. (u\ x))))\ (\lambda x. (w\ x))$ 
  - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3}\ \underline{1})\ (\lambda. (\underline{0}\ \underline{2}))))\ (\lambda. (\underline{4}\ \underline{0}))$
  - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3}\ \underline{\square})\ (\lambda. (\underline{0}\ \underline{\square}))))\ (\lambda. (\underline{4}\ \underline{0}))$
  - $(\lambda. (\underline{2}\ (\lambda. \underline{5}\ \underline{0}))\ (\lambda. (\underline{0}\ (\lambda. \underline{6}\ \underline{0}))))\ (\lambda y. \underline{z}\ (\lambda x. \underline{w}\ x)\ (\lambda u. \underline{u}\ (\lambda x. \underline{w}'\ x)))$

označíme si miesta, kam sa substituuje  
nahradíme, ale pozor na voľné premenné  
tie sa *shiftujú* s indexom hore

# $\beta$ -redukcia s de Bruijn-indexami

(príklad)

Keďže nemáme mená premenných, substituujeme len za indexy

Substitúcia  $[t_0, t_1, \dots, t_n] = [\underline{0}:t_0][\underline{1}:t_1]\dots[\underline{n}:t_n]$

type SubstDB = [LExpDB]      --  $[t_0, t_1, \dots]$  znamená  $\{\underline{0}/t_0, \underline{1}/t_1, \dots\}$

Aplikácia substitúcie:

- $\underline{k}[t_0, t_1, \dots, t_n] = t_k, k \leq n$
- $(M N) [t_0, t_1, \dots, t_n] = (M[t_0, t_1, \dots, t_n] N[t_0, t_1, \dots, t_n])$
- $(\lambda M) [t_0, t_1, \dots, t_n] = (\lambda M[\underline{0}, t_0^{\wedge 1}, t_1^{\wedge 1}, \dots, t_n^{\wedge 1}])$   
 $t^{\wedge 1}$  – pripočítaj 1 k voľným premenným

Beta redukcia:

$\beta: (\lambda M) N = M[N, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots]$

Príklad:  $(K a) b = (\lambda. \lambda. \underline{1} a) b = ((\lambda. \underline{1}) [a, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots]) b$   
 $= (\lambda. (\underline{1} [\underline{0}, a, \underline{1}, \underline{2}, \dots])) b = \lambda. a b = a$

...ak  $a, b$  sú konštanty neobsahujúce premenné

# $\beta$ -redukcia s de Bruijn-indexami

(príklad vhodný do domácej úlohy)

- $(\lambda M) [t_0, t_1, \dots, t_n] = (\lambda M[\underline{0}, t_0^{\wedge 1}, t_1^{\wedge 1}, \dots, t_n^{\wedge 1}])$   
 $t^{\wedge 1}$  – pripočítaj 1 k voľným premenným
- $\beta$ :  $(\lambda M) N = M[N, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots]$

Príklad z predpredošlého slajdu:

- $(\lambda. \lambda. ((\underline{3} \ \underline{1}) (\lambda. (\underline{0} \ \underline{2})))) (\lambda. (\underline{4} \ \underline{0})) =$ 
  - $\lambda. ((\underline{3} \ \underline{1}) (\lambda. (\underline{0} \ \underline{2}))) [(\lambda. (\underline{4} \ \underline{0})), \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots] =$
  - $\lambda. (((\underline{3} \ \underline{1}) [\underline{0}, (\lambda. (\underline{5} \ \underline{0})), \underline{1}, \underline{2}, \dots]) ((\lambda. (\underline{0} \ \underline{2})) [\underline{0}, (\lambda. (\underline{5} \ \underline{0})), \underline{1}, \underline{2}, \dots]))) =$
  - $\lambda. ((\underline{2} (\lambda. (\underline{5} \ \underline{0}))) (\lambda. (\underline{0} \ \underline{2})) [\underline{0}, (\lambda. (\underline{5} \ \underline{0})), \underline{1}, \underline{2}, \dots])) =$
  - $\lambda. ((\underline{2} (\lambda. (\underline{5} \ \underline{0}))) (\lambda. (\underline{0} \ \underline{2}) [\underline{0}, \underline{1}, (\lambda. (\underline{6} \ \underline{0})), \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \dots]))) =$
  - $\lambda. ((\underline{2} (\lambda. (\underline{5} \ \underline{0}))) (\lambda. (\underline{0} (\lambda. (\underline{6} \ \underline{0})))))) =$
- $(\lambda y. (\underline{z} (\lambda x. (\underline{w} \ \underline{x}))) (\lambda u. (\underline{u} (\lambda x. (\underline{w}' \ \underline{x}))))$





- $K = \lambda x. \lambda y. x$ 
  - $\lambda. \lambda. \underline{1}$
- $S = \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z)$ 
  - $\lambda. \lambda. \lambda. \underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})$

Ďalší testovací příklad

- $S \ K \ K = ( (\lambda. \lambda. \lambda. \underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})) \ \lambda. \lambda. \underline{1} ) \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$ 
  - $(\lambda. \lambda. \underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})) [\lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots] \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$
  - $(\lambda. \lambda. (\underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0}))) [\underline{0}, \underline{1}, \lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots] \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$
  - $(\lambda. \lambda. ((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0}))) \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$
  - $(\lambda. ((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0}))) [\lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots] =$
  - $\lambda. (((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})) [\underline{0}, \lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots]) =$
  - $\lambda. ((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\lambda. \lambda. \underline{1} \ \underline{0})) =$
  - $\lambda. \underline{0} = I$



# Cvičenie

---

Prepíšte do de Bruijn notácie

- $\lambda x. \lambda y. y (\lambda z. z x) x$
- $\lambda x. (\lambda x. x x) (\lambda y. y (\lambda z. x))$
- $(\lambda x. + x ((\lambda y. y) (- x (\lambda z. 3)(\lambda y. y y))))$

Definujte funkciu na prevod do a z de Bruijn notácie

Implementujte aplikáciu substitúcie a  $\beta$ -redukciu v de Bruijn kalkule s pomocnými funkciami.