*[A type system is a] tractable syntactic method for proving the absence of certain program behaviors by classifying phrases according to the kinds of values they compute.*
— Benjamin Pierce

# Lambda calculus 4

Bolo:

- viac o rekurzii – trochu technickejšie rozprávanie bez kódenia ☹
- de Bruijnove indexy (odstránenie mien premenných) – slajd 28..
- logika kombinátorov SKi (odstránenie mien premenných inak)

Dnes:

- jednoducho typovaný λ-calcul, $F_1$
- type-checking & inference, typové rovnice (constraints)
- algoritmus ich riešenia: unifikačný algoritmus
- pohľad do okolia $F_1$

Cvičenie:

- unifikácia v prázdnej teórii
- Curry-Howardov izomorfizmus

*Well-typed programs don't go wrong, but not every program that never goes wrong is well-typed. It's easy to exhibit programs that don't go wrong but are ill-typed in … any … decidable type system. Many such programs are useful, which is why dynamically-typed languages like Erlang and Lisp are justly popular.*
— Simon Peyton Jones

# Typy

- motto: *každý slušný programovací jazyk je typovaný*

- napriek tomu, mnoho beztypových jazykov sa teší veľkej obľube (Basic, PHP, Prolog, Smalltalk, Scheme, Python, Ruby, …)

- typy však obmedzujú programátora v písaní nezmyselných konštrukcií,
- ich úlohou je odhaliť chyby už v čase kompilácie, najmä tie, ktoré by sa objavili v run-time (možno..., ak by tou vetvou program išiel)
- typy obmedzujú vyjadrovaciu (event. výpočtovú ?) silu jazyka (True or False)?

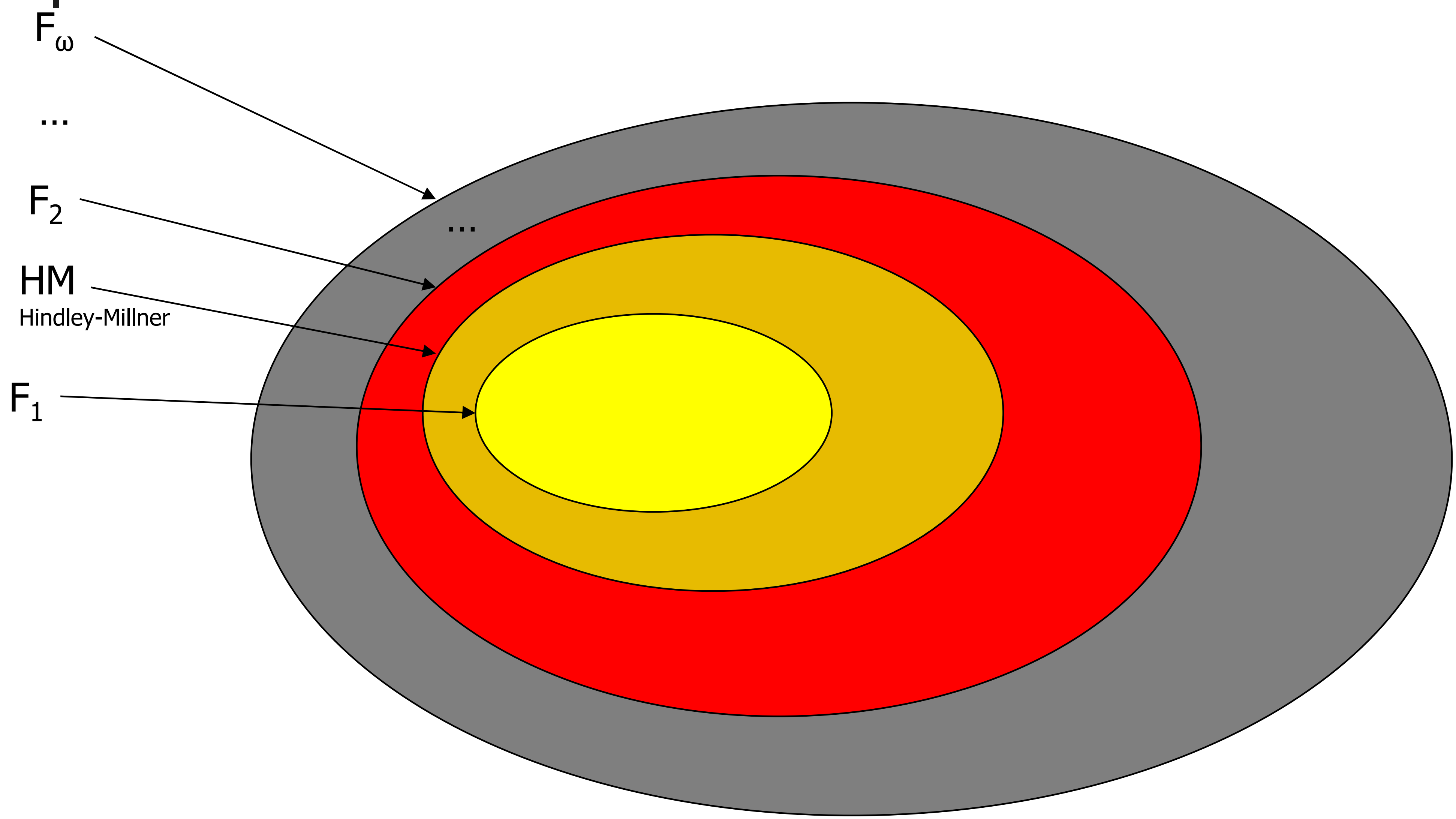
Dnes bude:

- jednoduchý typovaný λ-calcul (Simply typed lambda calculus - F1) https://en.wikipedia.org/wiki/Simply_typed_lambda_calculus
  - rozdiel medzi type-checking a type-inference
  - unifikácia ako nástroj riešenia typových rovníc

- Curry-Howardov izomorfizmus
- zložitejšie typovacie systémy (Hindley-Millner a F2)

*Well-typed programs cannot "go wrong".*
— Robin Milner

# Hierarchia



# Jednoduchý typovaný λ-calcul

Základná neformálna predstava o typoch:

- Typy sú základné a funkčné-funkcionálne:
  - základné: A, B, …
  - funkcionálne: $t_1 \rightarrow t_2$

Pravidlá (2 intuitívne):

- Aplikácia: ak $M:t_1 \rightarrow t_2$, $N:t_1$, potom $(M\ N):t_2$
- Abstrakcia: ak $x:t_1$, $M:t_2$, potom $(\lambda x.M):t_1 \rightarrow t_2$
- Konvencia:
  operátor funkčného typu $\rightarrow$ je asociatívny doprava (ako v Haskelli):
  - $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 = t_1 \rightarrow (t_2 \rightarrow t_3)$

# Jednoduchý λ-calcul, $F_1$

λ-Termy (LExp) $t ::= x \mid \lambda x.t \mid (t\ t) \mid n \mid +$

Typy (typové termy) $\alpha, \beta ::= Int \mid \alpha \to \beta$

Definujeme reláciu $\Gamma \vdash t{:}\alpha$, znamená, že λ-term t je v kontexte Γ typu α
Kontext Γ obsahuje informáciu o typoch rôznych premenných x:α,
Kontext Γ je zoznam/množina tvaru [(String,Typ)], resp. Map String Typ

$\{x{:}\alpha\}{:}\Gamma \vdash x{:}\alpha$ [VAR]

$$\frac{\{x{:}\alpha\}{:}\Gamma \vdash N{:}\beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.N){:}\alpha\to\beta}$$ [ABS]

$$\frac{\Gamma \vdash M{:}\alpha\to\beta,\ \Gamma \vdash N{:}\alpha}{\Gamma \vdash (M\ N){:}\beta}$$ [APPL]

$\Gamma \vdash n{:}Int$ [INT]

$\Gamma \vdash +{:}Int\to Int\to Int$ [PLUS]

# Tipujme typy

S intuitívnou predstavou o typoch sa (bezhlavo) vrhnime do typovania:

- k rovnakým premenným napíšme rovnaké typové dekorácie (grécke písmená pri hornom indexe)
- typovacími pravidlami ich propagujeme cez abstrakcie a aplikácie

- $I = \lambda x.x$
  - $(\lambda x^\alpha.x^\alpha)^\beta$, potom $\beta = \alpha\to\alpha$
- $K = \lambda x.\lambda y.x$
  - $(\lambda x^\alpha.\lambda y^\beta.x^\alpha)^\delta$, potom $\delta = \alpha\to(\beta\to\alpha)$
- $((\lambda x.x)\ y)$
  - $((\lambda x^\alpha.x^\alpha)^\beta\ y^\delta)$, potom $\beta = \alpha\to\alpha$, $\delta = a$
  - $((\lambda x^\alpha.x^\alpha)^{\alpha\to\alpha}\ y^\alpha)^\alpha$
- $S = \lambda x.\lambda y.\lambda z.((x\ z)\ (y\ z))$

Sústava rovníc

  - $\lambda x^\alpha y^\beta z^\delta.[(x^\alpha z^\delta)^\eta(y^\beta z^\delta)^\varepsilon]^\theta$, $\alpha = \delta\to\eta$, $\beta = \delta\to\varepsilon$, $\eta = \varepsilon\to\theta$
  - $x{:}\alpha=\delta\to(\varepsilon\to\theta)$, $y{:}\beta = \delta\to\varepsilon$, $z{:}\delta$
  - $(\delta\to(\varepsilon\to\theta))\to(\delta\to\varepsilon)\to\delta\to\theta$, výsledok je typu $\theta$
- $\omega = \lambda x.(x\ x)$
  - $\lambda x^\alpha.(x^\alpha\ x^\alpha)^\beta$, potom $\alpha =^? \alpha\to\beta$, … asi nemá riešenie...

# Prečo $\alpha =^? \alpha\to\beta$ nemá

- $x = x + 5$
- $x = x + 0$
- $x = x * 1$
- $x = x * 2$
- $x = f(x)$
- je toto riešenie $x = f(f(f(f(f(\ldots)))))$

- $\alpha \quad =^? \alpha\to\beta$
- $\beta \quad =^? \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \ldots$
- $\alpha\to \beta =^? \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \alpha\to \ldots$

# Vlastnosti $F_1$

- niektoré λ-termy nie sú otypovateľné, Y= λf.(λx. f(x x)) (λx. f(x x)) :-) ☹
  - dôvod: podobne ako λx.(x x) – tzv. *self-application*,
  - neformálne: sústava zodpovedajúcich typových rovníc nemá riešenie
- Church-Rosserova vlastnosť platí aj pre typovaný λ-kalkul ☺
  - typované λ-termy sú podmnožinou λ-termov, a β-redukcia je rovnaká
- typovaný λ-kalkul je silne normalizovateľný = noetherovský = neexistuje nekonečné odvodenie ☺
  dokázané až 1966-1968, a to >= 6x.
  Dôkaz: napr. v H. Barendregt – Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics
- **Dôsledok**:
  žiaden operátor pevného bodu nie je otypovateľný, X=F X=F (F X)= F (F (F X))...
- $F_1$ nemá nekonečný výpočet, cyklus/rekurziu, pevný bod, nie je Turing complete
- **Dôsledok:**
  jednoducho-typovateľný λ-kalkul nemá žiaden fix-point operátor.

# Normálne formy
## (stupeň termu)

Cieľ: typovaný λ-term má normálnu formu = neexistuje nekonečné odvodenie

- **stupeň typu :**
  - pre základné: A, B, … je 1,
  - pre funkcionálne: $\alpha \to \beta$ je 1+max(stupeň $\alpha$, stupeň $\beta$)

- **stupeň redexu :**
  - $[(\boldsymbol{\lambda x^{\alpha}.M^{\beta}})^{\alpha \to \beta}\ \mathbf{N}^{\alpha}]^{\beta}$ je stupeň typu $(\alpha \to \beta)$

- **stupeň termu M :**
  - 0 ak neobsahuje redex,
  - max.stupeň redexu v **M**

**Lemma (stupeň termu po substitúcii/ β-redukcii):** $(\lambda x^{\alpha}.M)\ N$

- **stupeň termu $M[x^{\alpha}:N]$ <= max(stupeň M, stupeň N, stupeň $\alpha$)**
  - redexy v $M[x^{\alpha}:N]$ buďto boli už v M, resp. N, alebo vznikli substitúciou
  - ak v M je podterm niekde tvaru (x Q) a za N dosadíme N =λy.P, tak vznikne nový redex ((λy.P) Q)
  - $\alpha = \beta \to \eta$, $Q::\beta$, $(x\ Q)::\eta$, $\lambda y.P::\alpha = \beta \to \eta$, $y::\beta$, $P::\eta$
  - stupeň (x Q) = stupeň $(\beta \to \eta)$ = stupeň ((λy.P) Q)

# Normálne formy
## (stupeň termu)

**Lemma (stupeň termu po substitúcii/ β-redukcii):**

- **stupeň termu $M[x^{\alpha}:N]$ <= max(stupeň M, stupeň N, stupeň α)**
  - redexy v $M[x^{\alpha}:N]$ sú v
  - z M,
  - z N
  - ak v M je podterm tvaru (x Q) a za N dosadíme N =λy.P, tak vznikne nový redex ((λy.P) Q)

Poďme merať stupeň:

- $\mathbf{x^{\alpha}}$ ··· $\alpha = \beta \rightarrow \eta$, $Q::\beta$, $(x\ Q)::\eta$,
- $\lambda y.P::\alpha = \beta \rightarrow \eta$, $y::\beta$, $P::\eta$
- stupeň (x Q) = stupeň α = stupeň (β →η)
- stupeň ((λy.P) Q) = stupeň (λy.P) = stupeň α = stupeň (β →η)

# Normálne formy
## (konečné odvodenie)

**Veta:** (každý) typovaný λ-term má normálnu formu

Nájdeme R je redex v M maximálneho stupňa, ktorý obsahuje len redexy ostro menších stupňov, t.j.

- je taký,
- stupeň M = stupeň R,
- R už neobsahuje redexy stupňa (stupeň R), … ale len menšie !

- Pri β-redukcii redexu R v M sa redexy
  - mimo R nezmenia,
  - vnútri R sa nahradia sa inými, ale stupeň termu M nevzrastie (viď lemma),
  - R zmizne a je nahradený redexami s menším stupňom.

**Dôsledok**: β-redukciou nevzrastie stupeň termu a klesne počet redexov max.stupňa

Dvojica(max.stupeň, počet redexov max.stupňa) klesá v lexikografickom usporiadaní

Keďže je to dobre usporiadanie, **nemôže existovať nekonečná postupnosť**.

# Type checking vs. inference

```
data LExp = LAMBDA String LExp |
            ID String |
            APP LExp LExp |
            CON String | CN Integer
            deriving(Show, Read, Eq)
data Type =  Tvar Integer |
             Type :→ Type
             deriving(Show, Eq)
```

**checkType :: LExp → Type → Bool**

Problém (rozhodnuteľný):

- checkType (A B) $T_2$ = checkType A ($T_1 \to T_2$) && checkType B $T_1$
- nevieme, ako uhádnuť typ $T_1$ v aplikácii ???

**typeInference :: LExp → Maybe Type = (Just Type | Nothing)**

Problém (rozhodnuteľný) :

- inferType (λx.M) = $T_1 \to$ (inferType M)
- ako zistiť typ premennej x viazanej v λ-abstrakcii, teda $T_1$ ???

**inhabitation :: Type → Maybe LExp = (Just LExp | Nothing)**

Problém (rozhodnuteľný) :

- ako zistiť term M predpísaného typu ?

# Anotácie premenných

(typovaný λ-kalkul podľa Churcha)

```
data LExp = LAMBDA String Type LExp |
            ID String |
            APP LExp LExp |
            CON String | CN Integer
            deriving(Show, Read, Eq)

data Type =  Tvar Integer |
             Type :→ Type
             deriving(Show, Read, Eq)
```

Termy

t ::= x | λx:α.t | (t t) | n | +

- ak $x:T_1$, $M:T_2$, potom $(\lambda x{:}T_1.M){:}\ T_1 \rightarrow T_2$

```
type Context = [(String, Type)]                         -- premenná a jej typ
inferType :: Context → LExp → Maybe Type

inferType ctx (ID var) = lookup var ctx                 -- [VAR]

inferType ctx (APP m n) = t2 where                      -- [APPL]
    t1 :→ t2 = inferType ctx m     -- môže výjsť Nothing, potom propaguj
    t3 = inferType ctx n           -- Nothing aj do výsledku
    {t1 == t3}                     -- tieto dva typy musia byť rovnaké

inferType ctx (LAMBDA x t1 m) = t1 :→ inferType ((x,t1):ctx) m     -- [ABS]
```

Tento kód nie je v Haskelli, len ilustruje ideu

# Typovaný λ-kalkul podľa Churcha

$$\text{(axiom)} \qquad \Gamma \vdash x : \sigma, \qquad \text{if } (x{:}\sigma) \in \Gamma;$$

$$(\to\text{-elimination}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : (\sigma \to \tau) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\,N) : \tau};$$

$$(\to\text{-introduction}) \qquad \frac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}\sigma.M) : (\sigma \to \tau)}.$$

$\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash x:\alpha$ [VAR]

$$\frac{\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash N:\beta}{\Gamma \vdash (\lambda x\underline{:\alpha}.N):\alpha\to\beta}$$ [ABS]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\alpha\to\beta,\ \Gamma \vdash N:\alpha}{\Gamma \vdash (M\ N):\beta}$$ [APPL]

http://plato.stanford.edu/entries/type-theory-church/

# Typovaný λ-kalkul Church vs. Curry

$$\begin{tikzcd} \lambda\text{-Church}:\lambda x{:}\alpha.t \arrow[d, "|M|"] \\ \lambda\text{-Curry}:\lambda x.t \end{tikzcd}$$

Nech $|M|$ je term $M$ bez typových anotácií, t.j. zobrazenie $\text{Church}_\lambda \rightarrow \text{Curry}_\lambda$

- Ak $\Gamma \vdash M{:}\alpha$ podľa Church, potom $\Gamma \vdash |M|{:}\alpha$ podľa Curry.
- Ak $\Gamma \vdash M{:}\alpha$ podľa Curry, potom existuje anotovaný $M'$ taký, že
  - $\Gamma \vdash M'{:}\alpha$ podľa Church,
  - $|M'| = M$.

# Typové premenné

(typovaný λ-kalkul podľa Curry)

```
data LExp = LAMBDA String LExp |
            ID String |
            APP LExp LExp |
            CON String | CN Integer
            deriving(Show, Read, Eq)
data Type = Tvar Integer |
            Type :→ Type
            deriving(Show, Read, Eq)
```

- ak nepoznáme konkrétny typ, zavedieme typovú premennú,
- algoritmus zozbiera podmienky (rovnosti) pre typové premenné,
- ak máme šťastie, podarí sa nám ich vyriešiť,
- typové premenné: α, β, δ, η, δ, ε, θ budeme radšej indexovať

```
type Constraints = [(Type,Type)]                    -- zoznam rovností, eqs
inferType :: Context->LExp->Constraints-> (Type, Constraints)

inferType ctx (APP m n) eqs = (t2, {t1 = t3}:eqs") where         -- [APP]
                          (t3→t2, eqs') = inferType ctx m eqs
                          (t1, eqs") = inferType ctx n eqs'
inferType ctx (LAMBDA x m) eqs = (t1→t2, eqs')                   -- [ABS]
                          -- t1 je nová typová premenná
                          where (t2,eqs') = inferType ((x,t1):ctx) m eqs

inferType ctx (ID var) eqs = lookup var ctx, eqs                 -- [VAR]
```

Dostaneme sústavu rovníc (constraints), ktorú riešime ...

Tento kód nie je v Haskelli, len ilustruje ideu

# Inferencia typu – príklad

λf.λa.λb.λc. ((c (f a)) (f b)):T, Ø, Ø

4steps-in-1

((c (f a)) (f b)):T4, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {**T=T0**→**T1**→**T2**→**T3**→**T4**}

(c (f a)):T5, (f b):T6, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {T=T0→T1→T2→T3→T4, **T5=T6**→**T4**}

c:T3, (f a):T8, (f b):T6, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {T=T0→T1→T2→T3→T4, T5=T6→T4, **T3=T8**→**T5**}

c:T3, f:T0, a:T1, f:T0, b:T2, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {T=T0→T1→T2→T3→T4, T5=T6→T4, T3=T8→T5, **T0=T1**→**T8**, **T0=T2**→**T6**}

Sústava rovníc:

{T=T0→T1→T2→T3→T4,T5=T6→T4,T3=T8→T5,**T0=T1**→**T8**,**T0=T2**→**T6**}

{T=T0→T1→T2→T3→T4,T5=T6→T4,T3=T8→T5,T0=T1→T8,**T2=T1**, **T8=T6**}

Riešenie:

T=T0→T1→T2→T3→T4 =(T1→T8)→T1→T1→(T8→T5)→T4=

(T1→T8)→T1→T1→(T8→T8→T4) →T4

Domáca úloha 1:

inferType :: [(LExp,Type)]->Context->Constraint->Int->Constraint

# Inferencia typu – príklad 2

$\underline{\lambda xyz.(xz)(yz)}$:T, Ø, Ø

$\underline{\lambda yz.(xz)(yz)}$:T2, x:T1, {**T=T1→T2**}

$\underline{\lambda z.(xz)(yz)}$:T4, y:T3, x:T1, {T=T1→T2, **T2=T3→T4**}

$\underline{(xz)(yz)}$:T6, z:T5, y:T3, x:T1, {T=T1→T2, T2=T3→T4, **T4=T5→T6**}

$\underline{(xz)}$:T7, (yz):T8, z:T5, y:T3, x:T1, {T=T1→T2, T2=T3→T4, T4=T5→T6, **T7=T8→T6**}

x:T9, z:T10, $\underline{(yz)}$:T8, z:T5, y:T3, x:T1, {T=T1→T2, T2=T3→T4, T4=T5→T6, T7=T8→T6,**T9=T10→T7**, **T9=T1, T10=T5**}

y:T11, z:T12, z:T5, y:T3, x:T1, {T=T1→T2, T2=T3→T4, T4=T5→T6, T7=T8→T6,T9=T10→T7, T9=T1, T10=T5, **T11=T12→T8, T11=T3, T12=T5**}

Sústava rovníc:

{T=T1→T2, T2=T3→T4, T4=T5→T6, T7=T8→T6,T9=T10→T7, T9=T1, T10=T5, T11=T12→T8,T11=T3, T12=T5}

{T=T1→T2, T2=T3→T4, T4=T5→T6, T7=T8→T6, T1=T5→T7, T3=T5→T8}

Riešenie:

T=T1→T2=T1→(T3→T4)=T1→(T3→(T5→T6)=
(T5→T8→T6)→(T5→T8)→T5→T6

(δ→(ε→θ))→(δ→ε)→δ→θ

# Inferencia typu – príklad 3

Y = $\underline{\lambda f.(\lambda x.\ f(x\ x))\ (\lambda x.\ f(x\ x))}$:T, Ø, Ø

$\underline{(\lambda x.\ f(x\ x))\ (\lambda x.\ f(x\ x))}$:T2, f:T1, {**T=T1→T2**}

$\underline{(\lambda x.\ f(x\ x)):T3}$, (λx. f(x x)):T4, f:T1, {T=T1→T2 , **T3=T4→T2**}

$\underline{(f(x\ x)):T6}$, (λx. f(x x):T4, f:T1,x:T5, {T=T1→T2 , T3=T4→T2,**T3=T5→T6**}

$\underline{(x\ x):T7}$, (λx. f(x x):T4, f:T1,x:T5, {T=T1→T2 , T3=T4→T2,T3=T5→T6, **T1=T7→T6**}

(λx. f(x x):T4, f:T1,x:T5, {T=T1→T2 , T3=T4→T2,T3=T5→T6, T1=T7→T6,**T5=T5→T7**}

Riešenie:

nemá ∅

# Unifikácia

- unifikácia je spôsob riešenia rovníc v rôznych teóriach
- najjednoduchším prípadom je syntaktická (prázdna, či Herbrandova teória)
- v našom prípade je problém zredukovaný na jediný funkčný symbol →

https://en.wikipedia.org/wiki/Unification_(computer_science)#Syntactic_unification_of_first-order_terms

Unifikácia v syntaktickej teórii:

Termy $t_1$ a $t_2$ sú **unifikovateľné**, ak existuje substitúcia Θ, že $t_1 \Theta = t_2 \Theta$

Θ sa potom nazýva **unifikátorom.**

**Príklad**:

X = f(a, Y) sú unifikovateľné, lebo napr. Θ = {X/f(a,b), Y/b} viď XΘ = f(a,b) = f(a, Y)Θ

Θ sa nazýva **najvšeobecnejším** unifikátorom, ak každý iný η unifikátor je jeho inštanciou, teda $\eta = \Theta \circ \psi$

Pre X = f(a, Y) je **najvšeobecnejší** Θ = {X/f(a,Y)} a {X/f(a,b), Y/b} nie je najvšeobecnejší unif.

V syntaktickej teórii (Herbrandove Univerzum) najvšeobecnejší, ak existuje, je jednoznačne určený až na premenovanie premenných.

# Dnes

- inferType nám vráti sústavu typových rovníc
- prejdeme exponencialny unifikačný algo
- nakódime si ho
- pochopíme aký to ma súvis s typovými rovnicami

ideový vrchol (neprogramujete :)

- Curry-Howardov izomorfizmus
- zložitejšie typovacie systémy (Hindley-Millner a F2)

# Unifikácia algoritmický problém

https://www.researchgate.net/publication/221562903_Comparing_Unification_Algorithms_in_First-Order_Theorem_Proving

| | čas | pamäť |
|---|---|---|
| Robinson, 1965 | $exp(n)$ | $exp(n)$ |
| Boyer,Moore, 1972 | $exp(n)$ | $O(n)$ |
| Corbina,Bidoit, 1983 | $O(n^2)$ | $O(n)$ |
| Ružička,Prívara, 1989 | $O(n.\alpha(n))$ | $O(n)$ |
| Martelli,Montanari, 1982 | $O(n + m.\alpha(m))$ | $O(n)$ |
| Huet, 1973 | $O(n.\alpha(n))$ | $O(n)$ |
| Patterson,Wegman, 1978 | $O(n)$ | $O(n)$ |

https://core.ac.uk/download/pdf/82682021.pdf

# Unifikácia

$f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n), C$ =» $t_1=s_1, \ldots, t_n=s_n, C$ (DECOMPOSE)
$f(t_1, \ldots, t_n) = g(s_1, \ldots, s_m), C$ =» FAIL, C (FAILURE)
$x=t, C$ =» $x=t, C[x:t]$ if $x \notin t$ (SUBSTITUTE)
$x=t, C$ =» FAIL else, if $x \in t$ (OCCUR CHECK)
$x=x, C$ =» C

f(a, g(Y)) = f(Y,Z) =» a = Y, g(Y) = Z =» Y = a, g(a) = Z
f(X,X) = f(Y,g(Y)) =» X=Y, X = g(Y) =» X=Y, Y = g(Y) =» FAIL (OCCUR CHECK)

tento naivný algoritmus je exponenciálny (generuje exponenciálny výstup…)
Príklad: Vstup $\{ t_1=g(t_2, t_2), t_2=g(t_3, t_3), t_3=g(t, t) \}$
Riešenie:
SUBSTITÚCIA: $t_1=g(t_2, t_2), t_2=g(g(t, t), g(t, t)), t_3=g(t, t)$
dtto: $t_1=g(g(g(t, t), g(t, t)), g(g(t, t), g(t, t))), t_2=g(g(t, t), g(t, t)), t_3=g(t, t)$

Ak zovšeobecníme vstup pre $t_1..t_n$, výsledok bude exponenciálny od dĺžky vstupu čo sa dá stihnúť len v exponenciálnom čase...

# Unifikácia2

**Príklad**:
$X = f(X)$ nie sú unifikovateľné, a $\Theta = \{X/f(X)\}$ nie je unifikátor, lebo

$X\Theta = f(X)$ != $f(X)\Theta = f(f(X))$

a nie, ako by sa zdalo, že

$X\Theta = f(f(f(f(\ldots..))))$ == $f(X)\Theta = f(f(f(f(\ldots..))))$

A v algoritme to zachráni occur check
$x=t, C$ =» FAIL if $x \in t$ (OCCUR CHECK)

ale v naivnej implementácii occur check robí z lineárneho algoritmu kvadratický.
Preto mnoho nástrojov využívajúcich unifikáciu (napr. Prolog) neimplementuje korektne unifikáciu, len aby „algoritmus" ostal lineárny,
a „bug" prezentujú ako feature (nekonečné termy)

**Matching** ak existuje substitúcia $\Theta$, že $t_1 \Theta = t_2$

# Unifikácia v rôznych teóriach

Riešte rovnice

- X+3 = 5 má riešenie, lebo interpretujeme funkčné symboly

tušíte, že interpretácia + hovorí, že 2+3 je 5

Syntaktická/prázdna teória (Herbrandova) neinterpretuje symboly

x □ 3 = 5 nemá riešenie, lebo nikto netuší (interpretáciu □ )

a □ X = Y □ b má riešenie aj v prázdnej teórii, Y = a, X = b

Typové rovnice sú teória s jediným funkčným symbolom →

T8 = T3 → T7 =» SUBSTITUTE

**T8** = **T8** → T7, **T8** = T2 → **T8**, =» FAIL, occur check

T5 → T2 = T3 → T7, =» DECOMPOSE T5=T3, T2=T7

Komutatívna teória – nevieme, čo □ robí, ale vieme, že je komutatívne

a □ X = Y □ Z má 2 rôzne riešenia {Y = a, X = Z} {Z = a, X = Y}

# Unifikácia

- type Constraints = [(Type,Type)] -- [(Type=Type)]
- unify :: Constraints→ Constraints

unify [] = [] -- Just []
unify ( (S=T) : C′)
| $S == T$ = unify C′
| $S == t_i$ && not($t_i \in T$) = unify(C′[$t_i$:T]) ++ [$t_i$=T]
| $t_i == T$ && not($t_i \in S$) = unify(C′[$t_i$:S]) ++ [$t_i$=S]
| $S == (S_1 \to S_2)$ and $T == (T_1 \to T_2)$ = unify( $(S_1=T_1)$:$(S_2=T_2)$:C′ )
| otherwise = fail -- Nothing

- unify :: Constraints→Maybe Constraints

| $S == t_i$ && not($t_i \in$ Free(T)) = Just ([$t_i$=T] : subst) where
Just subst = unify(C′[$t_i$:T])

type Maybe t = Just t | Nothing
Just [], Just [(T0, T1), (T1,(T2->T3))], Nothing :: Maybe Constraints

# Hlavné funkcie
## (návrh pre domácu úlohu)

So signatúrou:

```
data Type          = Tvar Int | Type :-> Type  deriving (Eq)
type Constraint    = (Type,Type)              typová rovnica
type Constraints   = [Constraint]
```

postupne definujte funkcie:

```
contains        :: Type -> Int -> Bool   -- typ obsahuje typovú premennú
                                    -- potrebujete na occur check
substitute      :: Int -> Type -> Type -> Type
substitute'     :: Int -> Type -> Constraints -> Constraints
unify           :: Constraints -> Maybe Constraints
```

Pomocná:

```
add2Maybe       :: Constraint -> Maybe Constraints -> Maybe Constraints
add2Maybe       :: a -> Maybe [a] -> Maybe [a]
```

# Domáca úloha

Domáca úloha 1: rozpracujte inferType do podoby

inferType :: [(LExp,Type)]->Context->Constraints->Int->Constraints

použitie: infType lt = inferType [(lt,Tvar 0)] [] [] 1

Domáca úloha 2: rozpracujte unify do podoby

unify :: [(Type, Type)] -> Maybe Constraints ->Maybe Constraints

použitie: unify constraint = unify constraint (Just [])

Demonštrujte spoločne 1 & 2:

```
typeExp lt = case unify (infType lt) of
                 Just subst -> lookup (Tvar 0) subst
                 Nothing -> Nothing
```

```
typeExp k = Just (T1->(T3->T1))
typeExp s = Just ((T5->(T7->T6))->((T5->T7)->(T5->T6)))
typeExp izero = Just (T1->(T3->T3))
typeExp ione = Just ((T5->T12)->(T5->T12))
```

# Typy a formule

- $K = (\lambda xy.x)^{\alpha\to\beta\to\alpha}$
- $S = \lambda xyz.(x\ z)(y\ z)^{(\delta\to\varepsilon\to\theta)\to(\delta\to\varepsilon)\to\delta\to\theta}$

Hilbertov axiomatický systém:

$A \to (B \to A)$

$((A \to (B\to C)) \to ((A\to B) \to (A\to C))$

Modus ponens:

$$\frac{A\to B \qquad A}{B}$$

Platí tu, že $A\to A$ ?

# Typy a formule

Hilbertov axiomatický systém:

Ax 1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax 2) $((A \rightarrow (B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow C))$

Platí tu, že $A\rightarrow A$ ?

1) $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ je šikovne zvolená inštancia axiomy Ax1, teda platí...

2) $((A \rightarrow ((B \rightarrow A)\rightarrow A)) \rightarrow ((A\rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A\rightarrow A))$ je inštancia axiomy Ax2, teda platí...

MP 1) a 2)

3) $((A\rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A\rightarrow A))$

MP 3) a Ax1)

4) A -> A q.e.d.

$K = (\lambda xy.x)\alpha \to \beta \to \alpha$
$S = \lambda xyz.xz(yz)(\delta \to \varepsilon \to \theta) \to (\delta \to \varepsilon) \to \delta \to \theta$

# Curry-Howardov izomorfizmus

- ((S K) K) = I

$S{:}(\delta \to \varepsilon \to \theta) \to (\delta \to \varepsilon) \to (\delta \to \theta)$
$K{:}\alpha \to \beta \to \alpha$
$K{:}\varphi \to \psi \to \varphi$
--------------
$(\delta \to \varepsilon \to \theta) = (\alpha \to \beta \to \alpha)$

- $\delta = \alpha$, $\varepsilon = \beta$

$(\delta \to \varepsilon) = (\varphi \to \psi \to \varphi)$

- $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \psi \to \varphi$

$\delta = \theta$

$S{:}(\delta \to (\psi \to \delta) \to \delta) \to (\delta \to (\psi \to \delta)) \to (\delta \to \delta)$
$K{:}(\delta \to (\psi \to \delta) \to \delta)$
$K{:}(\delta \to (\psi \to \delta))$

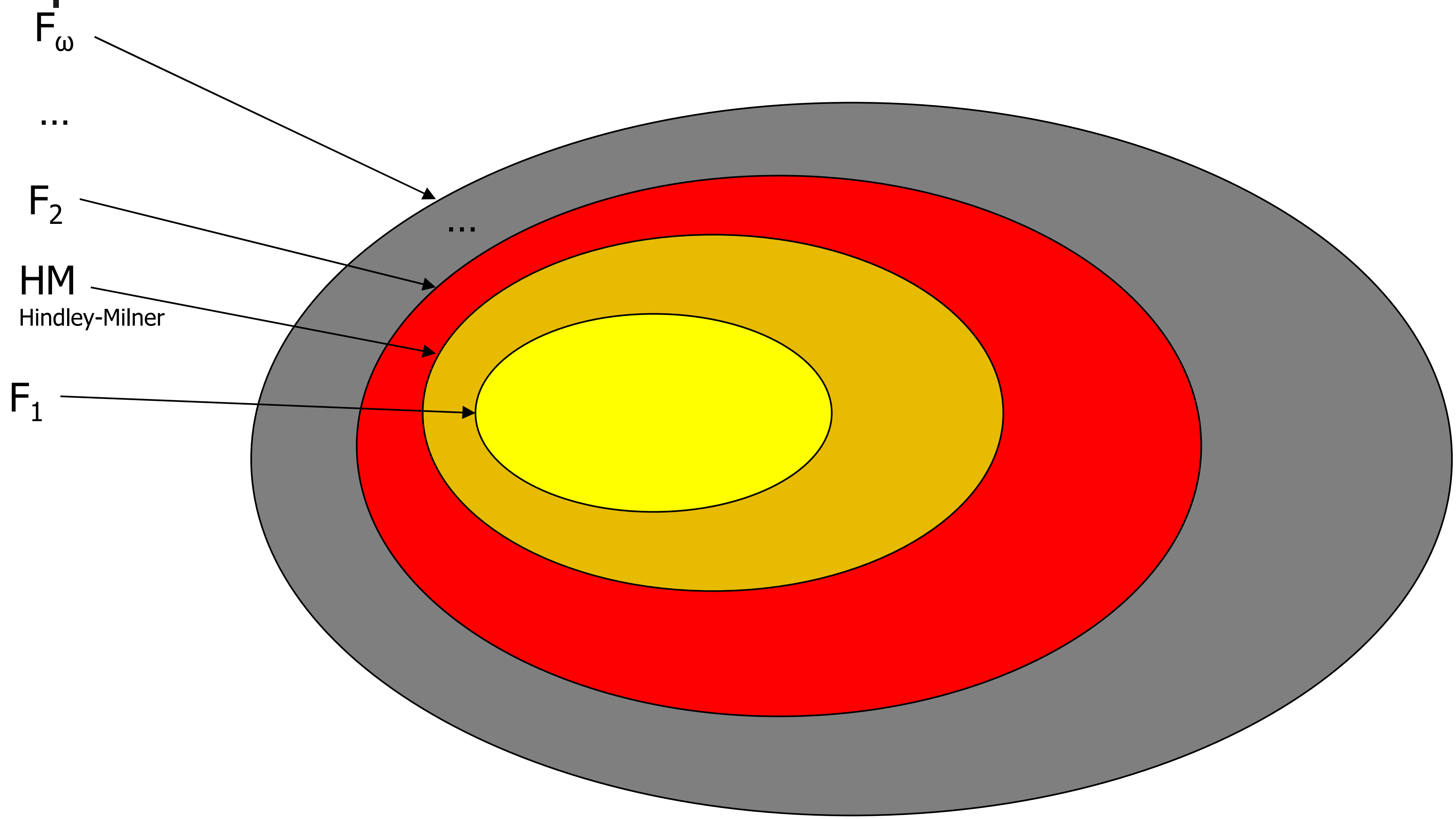
$K = (\lambda xy.x)\alpha\to\beta\to\alpha$
$S = \lambda xyz.xz(yz)(\delta\to\varepsilon\to\theta)\to(\delta\to\varepsilon)\to\delta\to\theta$

# Curry-Howardov izomorfizmus

$S:(\delta\to(\psi\to\delta)\to\delta) \to (\delta\to(\psi\to\delta)) \to (\delta\to\delta)$
$K:(\delta\to(\psi\to\delta)\to\delta)$
$K:(\delta\to(\psi\to\delta))$

$$\dfrac{\dfrac{S:(A\to(B\to A)\to A) \to (A\to(B\to A)) \to (A\to A) \qquad K:(A\to(B\to A)\to A)}{(S\ K):(A\to(B\to A)) \to (A\to A)} \qquad K:(A\to(B\to A))}{((S\ K)\ K):(A\to A)}$$

# Hierarchia



# Polymorfický (druhorádový) λ-kalkul, System $F_2$ (Girard-Reynold)

V jednoducho-typovanom λ-kalkule doménou premenných sú funkcie,
v druho-rádovom λ-kalkule doménou premenných sú typy:

Typ

$\sigma ::= Int \mid \sigma \to \sigma \mid \alpha \mid \forall\alpha.\sigma$

- všeobecne kvantifikovaný typ
- α je typová premenná
- v Haskelli, id :: $\alpha \to \alpha$

- I = $\lambda x.x : \forall\alpha.\alpha\to\alpha$
- NOT : $\forall\alpha.\alpha\to\alpha$
- K=TRUE = $(\lambda x.\lambda y.x) : \forall\alpha.\forall\beta.\alpha\to\beta\to\alpha$,
- FALSE = $(\lambda x.\lambda y.y) : \forall\alpha.\forall\beta.\alpha\to\beta\to\beta$
- $\underline{0},\underline{1},\underline{2}$ $(\lambda f.\lambda x.f(f\ x))$,… : $\forall\alpha.(\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha)$

Dôsledky:

- v takomto λ-kalkule vieme otypovať aj to, čo v $F_1$ nevieme (ω) ... uvidíme
- Typová inferencia v takomto kalkule (bez typových anotácií, Curry-style) je nerozhodnuteľný problém ☹, otvorený problém v čase 1970-1994
- I napriek tomu, teoretici študujú Martin-Löf hierarchiu: $F_1$, $F_2$, $F_3$, … → $F_\omega$
- dependent type (t:Type, t)

# System $F_2$

Typy

$$\sigma ::= Int \mid \sigma \rightarrow \sigma \mid \alpha \mid \forall\alpha.\sigma$$

$\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash x:\alpha$ [VAR]

$$\frac{\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash N:\beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.N):\alpha\rightarrow\beta}$$ [ABS]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\alpha\rightarrow\beta,\ \Gamma \vdash N:\alpha}{\Gamma \vdash (M\ N):\beta}$$ [APPL]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\beta}{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\beta}$$ [GEN] $\alpha$ not free in $\Gamma$

$$\frac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\beta}{\Gamma \vdash M:\beta[\alpha:\theta]}$$ [INST]

$\lambda x.x : \forall \alpha.\alpha\to\alpha$
AND : $\forall \alpha.\alpha\to\alpha\to\alpha$
$\underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots : \forall t.(t\to t)\to(t\to t)$

# Príklady v $F_2$

| | |
|---|---|
| $\{x:\alpha\} \vdash x:\alpha$ | [VAR] |
| $\vdash(\lambda x.x):\alpha\to\alpha$ | [ABS] |
| $\vdash(\lambda x.x): \forall \alpha.\alpha\to\alpha$ | [GEN] |
| $\vdash(\lambda x.x): Int\to Int$ | [INST] |

| | |
|---|---|
| $\{x:Int\} \vdash x:Int$ | [VAR] |
| $\vdash(\lambda x.x):Int\to Int$ | [ABS] |

$\{x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha$ [VAR]

**$\{x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:(\forall\beta.\beta\to\beta)\to(\forall\beta.\beta\to\beta)$ [INST]** -- α nahradíme za $(\forall\beta.\beta\to\beta)$

$\{x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha$ [VAR]

$\{x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:\forall\beta.\beta\to\beta$ -- α nahradíme za β

$\{x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash (x\ x): \forall\beta.\beta\to\beta$ [APP]

$\{x:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash (x\ x): \forall\alpha.\alpha\to\alpha$ -- β nahradíme za α

$\vdash \lambda x.(x\ x):(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)\to(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)$ [ABS]

- podarilo sa otypovať výraz ω, ktorý v jednoducho-typovanom kalkule nejde
- dostali sme však typ $(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)\to(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)$, ktorý vnútri obsahuje kvantifikátory (deep type) na rozdiel od tých, čo ich majú len na najvyššej úrovni, napr. $\forall t.(t\to t)\to(t\to t)$ – shallow type

Typ v $F_2$
$\sigma ::= Int \mid \sigma \to \sigma \mid \alpha \mid \forall\alpha.\sigma$

# Let polymorfizmus Hindley-Millner

chceme zakázať kvantifikáciu typov vnútri typového výrazu:

- zakázať **deep types** $(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)\to(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)$, vnútri obsahuje kvantifikátory
- povoliť len **shallow types** $\forall\alpha.(\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha)$ na najvyššej úrovni

Typy (formalizácia):

$\sigma ::= \psi \mid \forall\alpha.\sigma$ -- polymorfné, generické...

$\psi ::= Int \mid \psi \to \psi \mid \alpha$ -- základné, funkčné a typová premenná

Haskell: premenná viazaná λ výrazom nemôže byť polymofrického typu, napr.
f (λx.x) where f = λg.[... (g 1) .... (g True) ... ], alebo v Haskelli:

- idd = (\x->x)
- foo = f idd where f = \g->(if (**g True**) then (**g 2**) else (**g 1**))
- foo = let f g = (if (**g True**) then (**g 2**) else (**g 1**)) in f idd

Nahradíme pravidlo [GEN] pravidlom [LET]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\beta, \quad \Gamma, x:\forall\alpha.\beta \vdash N:\delta}{\Gamma \vdash \text{let } x=M \text{ in } N : \delta}$$

[LET] α in β, α not free in Γ

- http://dev.stephendiehl.com/fun/006_hindley_milner.html

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \qquad \text{(T-Var)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \qquad \Gamma \vdash e_2 : \tau_1}{\Gamma \vdash e_1\, e_2 : \tau_2} \qquad \text{(T-App)}$$

$$\frac{\Gamma,\ x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda\, x\ .\ e : \tau_1 \rightarrow \tau_2} \qquad \text{(T-Lam)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \sigma \qquad \Gamma,\ x : \sigma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{let}\ x = e_1\ \mathtt{in}\ e_2 : \tau} \qquad \text{(T-Let)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma \qquad \overline{\alpha} \notin \mathtt{ftv}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e : \forall\, \overline{\alpha}\ .\ \sigma} \qquad \text{(T-Gen)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \sigma_1 \qquad \sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2}{\Gamma \vdash e : \sigma_2} \qquad \text{(T-Inst)}$$

# Rekurzia v systeme Hindley-Millner

- v takomto λ-kalkule vieme otypovať aj to, čo v $F_1$ nevieme (ω)

Máme $Y_\alpha$ pre každé α:

$Y_\alpha : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \alpha$

a pridáme pravidlo typovanej Y konverzie:

$( Y_\alpha \;\; e^{\alpha \to \alpha} )^\alpha \quad \to_Y \quad (e^{\alpha \to \alpha}( Y_\alpha \;\; e^{\alpha \to \alpha})^\alpha )^\alpha$

napr. pre faktorial:

$Y_{Int} : (Int \to Int) \to Int$

pravidlo typovanej $Y_{Int}$ konverzie:

$( Y_{Int} \;\; e^{Int \to Int} )^\alpha \quad \to_Y \quad (e^{Int \to Int}( Y_{Int} \;\; e^{Int \to Int})^{Int} )^{Int}$

# self-application (MAP map)
## (na cvičenie)

vieme otypovať výraz map map ? DU4

- map :: (a->b)->[a]->[b] -- polymorický type

MAP :: (A -> B) -> [A] -> [B]

map :: (a -> b) -> ([a] -> [b])

- preto (A -> B) = (a -> b) -> ([a] -> [b])
- ergo A = (a -> b), B = [a] -> [b]

Dosadíme:

MAP :: ((a->b) -> ([a] -> [b])) -> [a->b] -> [[a] -> [b]]

(MAP map) :: [a->b] -> [[a] -> [b]]

ale chcelo by to vidieť a spustiť, tak nech a = b = Int

MAP :: ((Int->Int) -> ([Int] -> [Int])) -> [Int->Int] -> [[Int] -> [Int]]

(map map) [(+1),(+2),(*3)] -- nevypíše nič, lebo je to zoznam funkcií

length $ (map map) [(+1),(+2),(*3)] == 3

((map map) [(+1),(+2),(*3)]!!0) [1..10] == [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]

# Unifikácia

(odstránenie substitúcie)

```
unify::(Type,Type)→Maybe Constraints →Maybe Constraints

unify (_,_) Nothing              = Nothing
unify (a1→b1,a2→b2) subst        = subst2 where
                                        subst1 = unify (a1,a2) subst
                                        subst2 = unify (b1,b2) subst1
--dereferencia premennej miesto aplikacie substitúcie
unify (t_i,b) s@(Just subst)     = unify (a,b) s where a = deref t_i subst
unify (a,t_i) s@(Just subst)     = unify (a,b) s where b = deref t_i subst
--predpokladáme, že t_i je dereferencovaná a že platí occur check
unify (t_i,b) (Just subst)       = Just ((t_i,b):subst) if t_i not in b
unify (a,t_i) (Just subst)       = Just ((t_i,a):subst) if t_i not in b
– zabránenie vzniku cyklu medzi premennými
unify (t_i,t_j) s@(Just subst)   | i < j = Just ((t_i , t_j):subst)
                                 | j < i = Just ((t_j , t_i):subst)
                                 | otherwise s
– otherwise
unify (_,_) _                    = Nothing
```