Midterm

Rekurzia 3.86/5

Zajko 2.60/5

Lambdy 1.78/4

Funkcionály 5/5

Stromy 3.35/4

priemer: 16.6/25

Syntaktická analýza v Haskelli

úlohou syntaktickej analýzy je zistiť, či vstupný stream lexém patrí do nejako popísaného jazyka. Side-effect toho je/môže byť vnútorná reprezentácia.

- Jeroen Fokker: Functional Parsers, LNCS 925, 1996, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.138.6885&rep=rep1&type=pdf
- Graham Hutton: Functional Parsing <u>Computerphile</u> https://www.youtube.com/watch?v=dDtZLm7HIJs
- Johan Jeuring, Doaitse Swierstra: Grammars and Parsing, <u>http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/gont/diktaat.pdf</u>
- Daan Leijen: Parsec, a fast combinator parser, <u>http://research.microsoft.com/en-us/um/people/daan/download/parsec/parsec-letter.pdf</u>
- Doaitse Swierstra: Combinator Parsers: From Toys to Tools, http://people.cs.uu.nl/doaitse/Papers/2000/HaskellWorkshop.pdf

Pozn.:

v celom texte sa mimovoľne objavuje rôzne vy(s)kloňované slovo *parser*, čoho slovenským ekvivalentom je syntaktický analyzátor





Jazykovedné okienko

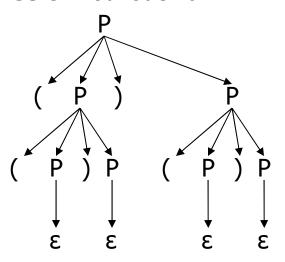
- Gramatika (konečná množina pravidiel): P -> (P) P | ε
- Odvodenie (konečná postupnosť krokov odvodenia):

$$P \rightarrow (P) P \rightarrow ((P)P)P \rightarrow ((P)P)(P)P \rightarrow (())()$$

Jazyk (množina odvoditeľných slov):

$$L = \{ w \in \{(,)\}^* | P \rightarrow^* w \}$$

strom odvodenia:



```
Aké sú to jazyky?

R -> a R a | b R b | c R c | \epsilon

T -> (T) | TT | \epsilon

S -> S S | a

V -> a V a | \epsilon

L -> (LL) | \lambda id.L | id
```



$\{w \in \{a,b\}^* | 2|\#_a w, 3|\#_b w\}$

$$\bullet$$
 S -> aS_a

$$S_a -> aS$$

$$S_b \rightarrow aS_{ab}$$
 $S_b \rightarrow bS_{bb}$

$$S_{ab} \rightarrow S_{b}$$
 $S_{ab} \rightarrow S_{abb}$

$$S_{abb} \rightarrow aS_{bb}$$
 $S_{abb} \rightarrow bS_{abb}$

$$S_{bb} \rightarrow aS_{abb}$$

regulárny jazyk regulárna gramatika konečný automat

$$S \rightarrow bS_b$$

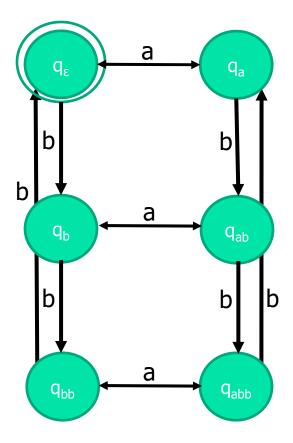
$$S_a \rightarrow bS_{ab}$$

$$S_b \rightarrow bS_{bb}$$

$$S_{ab} \rightarrow bS_{abb}$$

$$S_{abb} \rightarrow bS_a$$

$$S_{bb} \rightarrow bS$$

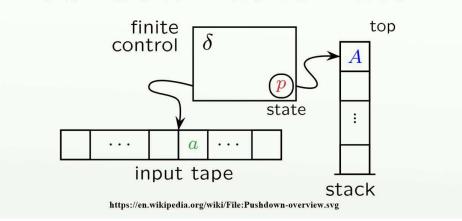




$\{ w \in \{a,b\}^* | w = a^n b^n \}$

- Je to regulárny jazyk ?
- S -> aSb
- S -> ε

Pushdown automaton



bezkontektový jazyk – stikne viac ako regulárny bezkontextová gramatika zásobníkový automat

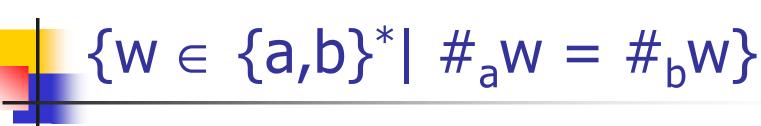


$\{w \in \{a,b\}^* | \#_a w = \#_b w\}$

- Je to regulárny jazyk?
- S -> aSb
- S-> ε
- ab -> ba
- ba -> ab
- S -> ASB
- S-> ε
- AB -> BA
- A -> a
- B -> b

-- kontext

kontextová gramatika ??bezkontektový jazyk?? Turingov stroj





- Je to bezkontextový jazyk ?
- S -> aSbS
- S -> bSaS
- S -> ε

Dôkaz:

- Ak S ->* w, tak $\#_a w = \#_b w \dots$ jasné z pravidiel
- 2) Ak $\#_a w = \#_b w$, tak S ->* w ?
- w = aw', zrejme $\#_a w' = \#_b w' 1$
- w' = ubv, tak, že $\#_a u = \#_b u$, $\#_a v = \#_b v$.



bezkontextová gramatika !!bezkontektový jazyk, zásobníkový automat



- Je gramatika "Javy" bezkontextový jazyk, alebo nie (ergo kontextový)
- Existuje algoritmus syntaktickej analýzy pre bezkontextové gramatiky:
- Earley https://en.wikipedia.org/wiki/Earley parser, O(n*n*n)
- A problém je redukovateľný na násobenie matíc https://en.wikipedia.org/wiki/Earley_parser

Rekurzívny zostup

Args -> Term
Args -> Term _Args
Term -> digit
Term -> variable
Term -> symbol
Term -> symbol (Args)

```
-- neprázdny zoznam termov oddelených čiarkou
-- Args := Term { , Term }*
fromStringArgs :: String -> ([Term], String)
from String Args xs = let(a, xs') = from String xs in
                if not (null xs') && head xs' == ',' then
                   let (as,xs") = fromStringArgs (tail xs') in
                     ((a:as), xs")
                else ([a], tail xs')
-- Term := digit | Variable | symbol [ ( Args ) ]
fromString :: String -> (Term, String)
from String (x:xs) | is Digit x = (CN \text{ (ord } x-48), xs)
fromString [x] | isAlpha x && isLower x = (Functor [x] [], [])
from String (x:y:xs) | is Alpha x && is Lower x && y == '(' = let (args, xs') =
                                            fromStringArgs xs in (Functor [x] args, xs')
from String (x:xs) | is Alpha x && is Upper x = (Var[x], xs)
fromString xs = error ("syntax error: " ++ xs)
```

Backus-Naurova forma

parser pre aritmetické výrazy

https://en.wikipedia.org/wiki/Backus%E2%80%93Naur_form

```
l'avo-rekurzívna gramatika:
<expression> ::=
    <expression> + <expression> |
    <expression> * <expression> |
    <expression> - <expression> |
    <expression> / <expression> |
   identifier |
   number |
   ( <expression> )
E -> E+E | E*E | E-E | E/E
E -> identifier
E -> number
E \rightarrow (E)
```

```
gramatika LL(1):
<expression> ::=
   <term>
    <term> + <expression> |
    <term> - <expression>
<term> ::=
   <factor> |
   <factor> * <term> |
   <factor> / <term>
<factor> ::=
   identifier |
   number |
   ( <expression> )
```

```
RD-Parser
      https://en.wikipedia.org/wiki/Recursive descent parser
fromString :: String -> (AExpr, String)
fromString xs =
        let (e1, xs') = fromString xs in
        let ('+', xs") = xs' in
        let (e2, xs''') = fromString xs'' in
          ((Plus e1 e2), xs"')
OR?
fromStringF :: String -> (AFactor, String)
from String F(x:xs) | is Digit x = ...
fromStringF (x:xs) | isAlpha x = ...
from String F(x:xs) \mid x = = '(' = 
     let (e, xs') = fromString xs in
```

(e, tail xs')

```
<expression> ::=
                                    <expression> ::=
     <expression> + <expression> |
                                         <term> |
     <expression> * <expression> |
                                          <term> + <expression> |
     <expression> - <expression> |
                                          <term> - <expression>
     <expression> / <expression> |
                                    <term> ::=
     identifier |
                                         <factor> |
                                         <factor> * <term> |
     number I
    ( <expression> )
                                         <factor> / <term>
                                    <factor> ::=
                                         identifier
                                         number I
                                         ( <expression> )
   fromStringE :: String -> (AExpr, String)
   fromStringE xs =
            let (t, xs') = fromStringT xs in
            if elem (head xs') [\+','-'] then
               let (e, xs") = fromStringE (tail xs') in
                    ((Plus/Minus t e), xs")
            else
                 (t, xs')
   fromStringT :: String -> (ATerm, String)
   fromStringT xs =
            let (f, xs') = fromStringF xs in
            if elem (head xs') [\*','/'] then
               let (t, xs'') = fromStringT (tail xs') in
                    ((Mult/Div f t), xs")
            else
                 (f, xs')
```

gramatika LL(1):

ľavo-rekurzívna gramatika:



- program, ktorý o vstupnej vete rozhoduje, či patrí alebo nie do jazyka,
- pre rôzne gramatiky to može byť rôzne ťažký problém,
- my nechceme riešiť ťažké problémy...
- ak gramatika nie je l'avo-rekurzívna, vieme napísať pomerne priamočiaro analyzátor metódou rekurzívneho zostupu,
- ak je ľavo-rekurzívna, tak ju najprv prerobíme, aby sme si uvarili *čaj*...
- cieľom tejto prednášky je vybudovať:
 - sériu jednoduchých atomických syntaktických analyzátorov,
 - sériu kombinátorov, ktorými z nich skladáme zložitejšie analyzátory,
 - pochopiť filozófiu kombinácie analyzátorov napr. tým, že napíšeme analyzátor pre lambda-výrazy.

Alternatívne prístupy:

- tzv. monadické parsery, špeciálny štýl písania kódu.
- Haskell obsahuje modul <u>Parsec</u> knižnica pre písanie analyzátorov,

Syntaktická analýza

Najprv si ujasnime typ funkcie, ktorá realizuje syntaktickú analýzu.

 p::Parser je funkcia, ktorá zoberie vstup a vráti vnútornú formu, ak patrí do jazyka.

type Parser = String -> Tree

 šikovnejšie je definovať p ako funkciu, ktorá zoberie vstup a vráti nezanalyzovanú časť vstupu (plus vnútornú reprezentáciu):

type Parser = String -> (String, Tree)

ak parametrizujeme typ vnútornej reprezentácie ako result, dostaneme:

type Parser result = String -> (String, result)

To funguje v prípade, ak pre nejaký prefix vstupného streamu existuje odvodenie v jazyku. Čo ak neexistuje ? Čo ak ich je viac ?

Nedeterministická analýza

čo ak analyzátor vráti viacero riešení, resp. žiadne (existuje viacero odvodení) ?... Pozbierame ich do zoznamu – tzv. nedeterministický parser

type Parser result = String -> [(String, result)]

keďže typ String = [Char], po úplnej parametrizácii dostaneme typ Parser, ktorý prestavuje nedeterministický analyzátor vstupného streamu objektov typu symbol (napr. Char), pričom výstupná reprezentácia je typu result:

type Parser symbol result = [symbol] -> [([symbol],result)]

príklad analyzátora na type String = [Char], ktorý vráti Char, resp. Int

```
p_2: Parser Char Int = [Char] -> [([Char], Int)]

p_2 "123" = [("123",0), ("23",1), ("3",12), ("",123)] -- viacero výsledkov

p_1:parser Char Char = [Char] -> [([Char], Char)]

p_1 "abc" = [] -- žiaden výsledok
```

type Parser symbol result = [symbol] -> [([symbol],result)]

Elementárne analyzátory

Začneme od veľmi jednoduchých analyzátorov, ktoré budeme neskôr kombinovať do zložitejších.

analyzátor, ktorý rozpoznáva jedno (konštantné) písmenko 'a':

```
symbola :: Parser Char Char symbola [] = [] -- ak nie je nič na vstupe symbola (x:xs) | x=='a'=[ (xs, 'a') ] -- ak je 'a' na vstupe | otherwise= [] -- ak nie je 'a' na vstupe
```

 parametrizujeme konštantu a zovšeobecníme pre stream symbolov ľub.typu:

```
symbol :: Eq s => s -> Parser s s
symbol a [] = []
symbol a (x:xs) | a==x = [(xs, x)]
| otherwise= []
```

```
P<sub>a</sub> -> a

Príklad:
> symbol 'a' "abcd"
[("bcd",'a')]
> symbol 'a' "bcd"
[]
```

type Parser symbol result = [symbol] -> [([symbol],result)]



Elementárne analyzátory

parser, ktorý analyzuje jeden symbol:

```
symbol :: Eq s => s -> Parser s s
symbol a [] = []
symbol a (x:xs) = [ (xs, a) | a == x ]
```

parser, ktorý analyzuje postupnosť lexém:

```
token :: Eq[s] => [s] -> Parser s [s]
token k xs | k==take n xs = [ (drop n xs, k)]
| otherwise = []
where n = length k
```

```
> token "abc" "abcdef"
[("def","abc")]
>token "abc" "abdef"
[]
>token "try" "try { } catch"
[(" { } catch","try")]
```

Elementárne analyzátory

po vzore definície symbol z minulého slajdu, definujme analyzátor, ktorý akceptuje jeden symbol spĺňajúci logickú podmienku:

```
satisfy :: (s \rightarrow Bool) \rightarrow Parser s s

satisfy p [] = []

satisfy p (x:xs) = [ (xs, x) | p x ]
```

```
Main> satisfy isDigit "123abc" [("23abc",'1')]
Main> satisfy isDigit "abc123"
[]
```

Cv1: Keďže satisfy je zovšeobecnením symbol, definujte symbol ako inštanciu satisfy.

Cv2: V Haskelli je funkcia isDigit. Definujte analyzátor digit10::Parser Char Char, ktorý analyzuje jednu desiatkovú cifru. Hint: pomocou satisfy.

Cv3: Definujte analyzátor hexa::Parser Char Char, ktorý analyzuje jednu šesnástkovú cifru, t.j. (0, 1, ..., F).

type Parser symbol result = [symbol] -> [([symbol],result)]

Triviálne analyzátory

(základné stavebné kamene)

ε-pravidlo

epsilon :: Parser s ()

epsilon xs = [(xs, ())]

-- () je ako typ void

-- () hodnota typu (), ako null

• ε-pravidlo s tým, že vráti vnútornú reprezentáciu

succeed :: r -> Parser s r

succeed v xs = [(xs, v)]

-- v je výst.hodnota typu r

epsilon :: Parser s ()

epsilon = succeed ()

parser, ktorý nič neakceptuje

failp :: Parser s r

failp xs = []

-- epsilon ako inštancia succeed

```
> epsilon "abc"
[("abc",())]
> (succeed 77) "abc"
[("abc",77)]
> failp "abc"
[]
```

Kombinátory analyzátorov

(pojivo)

definujme dva symboly v infixovej notácii

```
infixr 6 <*> -- sekvenčné zreťazenie analyzátorov 
infixr 4 <|> -- zjednotenie analyzátorov
```

sekvenčné zreťazenie analyzátorov:

dijsunkcia (zjednotenie) analyzátorov:

```
(<|>) :: Parser s a -> Parser s a -> Parser s a (p1 <|> p2) xs = p1 xs ++ p2 xs
```

```
> ((symbol 'a' <|> symbol 'b') <*> (symbol '1' <|> symbol '2')) "a2cd" [("cd",('a','2'))]
```

Cv4. Prečo je lepšie definovať operátor <|> ako infixr miesto infixl. Cv5. Definujte analyzátor, ktorý akceptuje reťazce začínajúce YES alebo NO.

Transformátory analyzátorov

Transformátor analyzátora je funkcia (funkcionál), ktorá zoberie analyzátor a vráti nový analyzátor s odvodenými/zmenenými vlastnosťami.

 transformátor sp analyzátora p, ktorý funguje ako p ale ignoruje úvodné medzery:

```
sp :: Parser Char a -> Parser Char a
sp p = p . dropWhile (==' ')
```

 transformátor just analyzátora p akceptuje vstup podľa p len, ak bol dočítaný celý vstupný stream:

```
just :: Parser s a -> Parser s a just p = filter (null.fst) . p
```

```
> just (symbol 'a' <*> (symbol 'b' <|> symbol 'c' <|> succeed ' ')) "ac" [("",('a','c'))]
```

Cv5'. Definujte analyzátor, ktorý akceptuje reťazce YES alebo NO. Cv6. Definujte just pomocou list-comprehension, bez použitia filter.

type Parser symbol result = [symbol] -> [([symbol],result)]

Aplikátor analyzátorov

Aplikátor analyzátora je kombinátor, ktorý modifikuje typ reprezentácie tak, že aplikuje nejakú funkciu na výslednú internú reprezentáciu.

```
-- infixová notácia pre aplikátor

(<@) :: Parser s a -> (a->b) -> Parser s b

(p <@ f) xs = [ (ys, f v) | (ys, v) <- p xs ]
```

analyzátor digit akceptuje cifru a vráti jej desiatkovú hodnotu:

```
digit :: Parser Char Int
digit = satisfy isDigit <@ f
where f c = ord c - ord '0' -- char -> Int, '4' -> 4
```

```
> digit "12abc"
[("2abc",1)]
> satisfy isDigit "12abc"
[("2abc",'1')]
```

Skratky – rôzne klony <*>

kombinátor analyzátorov p a q, ktorý ignoruje výsledok q:

```
infixr 6 <* (p1 <* p2) xs = [ (xs2, v1) 
 (<*) :: Parser s a -> Parser s b -> Parser s a <math>| (xs1, v1) <- p1 xs 
 p <* q = p <*> q <@ fst <math>| (xs2, v1) |
```

kombinátor analyzátorov p a q, ktorý ignoruje výsledok p:

```
infixr 6 *>
(*>) :: Parser s a -> Parser s b -> Parser s b
p *> q = p <*> q <@ snd
```

 kombinátor analyzátorov p:a a q:[a], ktorý vytvára zoznam výsledkov typu [a]:

```
infixr 6 <:*>
(<:*>) :: Parser s a -> Parser s [a] -> Parser s [a]
p <:*> q = p <*> q <@ list

Cv7. Definujte <:*> bez list (x,xs) = (x:xs).
```

```
type Parser symbol result = [symbol] -> [([symbol],result)]
```

Iterátory analyzátorov

```
analyzátor p|\epsilon (vôbec alebo raz, reg.výraz {p}): single x = [x]
option
                :: Parser s a -> Parser s [a]
                                                single = \x -> [x]
                = p <@ single
option p
                                                  > (option (symbol 'a')) "abc"
                   <|> succeed []
                                                  [("bc","a"),("abc","")]
analyzátor p* (vôbec, raz alebo viackrát, reg.výraz {p}*):
          :: Parser s a -> Parser s [a]
many
                = p <:*> (many p) <|> succeed []
many p
 analyzátor p+ (aspoň raz, reg.výraz {p}+):
      :: Parser s a -> Parser s [a]
many1
many1 p = p <:*> many p
identifier
               = many1 (satisfy isAlpha)
```

```
> (many(symbol 'a') <*> symbol 'b') "aaabb"
[("b",("aaa",'b'))]
> (many(symbol 'a') <*> many1(symbol 'b')) "aaabb"
[("",("aaa","bb")),("b",("aaa","b"))]
```

Transformátor sequence

 sequence zoberie sekvenciu (zoznam) analyzátorov rovnakého typu a vráti analyzátor, ktorý vracia zoznam výsledkov

```
sequence :: [Parser s a] -> Parser s [a]
sequence xx = foldr(<:*>) (succeed []) <math>xx = {a}^{+}{b}^{*}{c}
```

```
> sequence [many1 (symbol 'a'), many (symbol 'b'), option (symbol 'c')] "abbb" [("",["a","bbb",""]),("bb",["a","bb",""]),("bbb",["a",""])]
```

Cv8. Definujte sequence bez foldr.

Cv8'. Definujte token pomocou sequence.

Cv9. Definujte analyzátor mobilného čísla (pre niektorého operátora), resp. PSČ Cv10. Definujte analyzátor korektného dátumu gregoriánskeho kalendára

 choice zoberie sekvenciu (zoznam) analyzátorov rovnakého typu a vráti analyzátor, ktorý reprezentuje zjednotenie/disjnukciu analyzátorov.

```
choice :: [Parser s a] -> Parser s a
choice = foldr (<|>) failp
```

Deterministický analyzátor

type DetPars symbol result = [symbol] -> result

 transformátor nedeterministického p analyzátora na deterministický tým, že vyberie prvú možnosť:

some :: Parser s a -> DetPars s a

some $p = snd \cdot head \cdot just p$

 transformátor nedeterministického p analyzátora na deterministický tým, nemení sa typ:

determ :: Parser a b -> Parser a b

determ p xs | null r = []

| otherwise= [head r]

where r = p xs

pažravý – z iterácie {}*, resp. {}+ vyberie prvú možnosť

```
greedy = determ . many
greedy1 = determ . many1
```

```
> many digit "1234"
[("",[1,2,3,4]),("4",[1,2,3]),("34",[1,2]),("234",[1]),("1234",[])]
> greedy digit "1234"
[("",[1,2,3,4])]
```

Čísla

```
    prirodzené čísla
```

natural :: Parser Char Int

natural = greedy1 digit <@ foldl f 0

where fab = a*10 + b

Cv11. Definujte natural pomocou foldr/l;-)

Celé čísla

integer :: Parser Char Int

integer = (option (symbol '-') <* > natural) <@ f

where f([],n) = n $f(_,n) = -n$

racionálne čísla

fract :: Parser Char Float

fract = integer <*>

(option (symbol '.') <*> natural <@ ???)

<@ ???

Cv12. Doprogramujte fract, aby fract "12.345" = [("",12.345)]

Cv13. Preštudujte si definíciu float

Zátvorkovanie

Analyzátor pre dobre uzátvorkované výrazy podľa gramatiky: P -> (P) P | ε

prvá idea: priamočiaro prepíšeme pravidlá gramatiky, problém výst.typ:

```
> parens "()"
[("",Bin (Nil,Nil)),("()",Nil)]
> just parens "()"
[("",Bin (Nil,Nil))]
> just parens "()()"
[("",Bin (Nil,Bin (Nil,Nil)))]
> just parens "(())"
[("",Bin (Bin (Nil,Nil),Nil))]
> just parens ")("
[]
```

Cv14. Prečo sme v lambda patterne nepoužili štvoricu?

Cv15. Načo je funkcia const x y = x? Prečo sme tam rovno nenapísali Nil?

Zátvorkovanie ešte raz

```
> nesting "((()())())"
        = symbol '('
open
                                                       [("",3),("((()())())",0)]
        = symbol ')'
close
                                                       > just nesting "((()())())"
                                                       [("",3)]
parens :: Parser Char Tree
parens = (open *> parens <* close) <*> parens <@ Bin <|> succeed Nil
Cv16. Načo sú potrebné zátvorky okolo open *> parens <*?
Cv17. Definujte analyzátor parens2, ktorý pozná dva druhy zátvoriek.
   hľbka dobre uzátvorkovaného výrazu
nesting :: Parser Char Int
          = (open *> nesting <* close) <*> nesting <@ f <|> succeed 0
nestina
             where f(x,y) = (1+x) \text{ 'max' } y
foldparens :: ((a,a)->a) -> a -> Parser Char a
foldparens f e = p
        where p = (open *> p <* close) <*> p <@ f <|> succeed e
Cv18. foldparens je zovšeobecnenie parens a nesting. Definujte ich s foldparens.
```

Zátvorkovanie poslednýkrát

listOf:: Parser s a -> Parser s b -> Parser s [a] listOf p s = p <:*> many (s *> p) <|> succeed []

> just (listOf natural (symbol ','))
"12,34,567,8"
[("",[12,34,567,8])]

```
commaList:: Parser Char a -> Parser Char [a]
commaList p= listOf p (symbol ',')

> just (commaList natural) "12,34,567,8"
[("",[12,34,567,8])]
```

Cv19. Definujte analyzátor pre λ-termy.

```
Main> lambda "(\\x.(x x) \\x.(x x))"
[("",APL (LAMBDA "x" (APL (ID "x") (ID "x"))) (LAMBDA "x" (APL (ID "x") (ID "x")))]
```

Cv20. Definujte analyzátor palindromy.

4

Cvičenie

Cv21. Definujte analyzátory pre tieto gramatiky/jazyky:

- R -> a R a | b R b | c R c | ε
- S-> SS | a
- V -> a V a | ε
- T->(T)|TT|ε
- W -> a W a | b W b | a | b | ε
- U -> aUbU | bUaU | ε
- $\{w \in \{a,b,c\}^* | \#_a w = \#_b w = \#_c w\}$

Cvičenia

- parser binárnej/hexa konštanty
- parser palindromov
- parser morseovej abecedy

parser pre aritmetické výrazy

l'avo-rekurzívna gramatika:

```
<expression> ::=
    <expression> + <expression> |
    <expression> * <expression> |
    <expression> - <expression> |
    <expression> / <expression> |
    identifier |
    number |
    ( <expression> )
```

gramatika LL(1):

```
data Expr = Con Int | Var String | Fun String [Expr] |
             Expr :+: Expr | Expr :*: Expr | ...
 fact :: Parser Char Expr
                                                            "?: " (just expr) "123"
                 integer <@ Con
 fact =
                                                            [("",Con 123)]
            <|> identifier
                   <*> ( option (paranthesized (commaList expr))
                           <?@ (Var, flip Fun)
                                                           "?: " (just expr) "foo(1,2)"
                                                           [("",Fun "foo" [Con 1,Con 2])]
                    <@ ap'
            <|> parenthesized expr
 term :: Parser Char Expr
 term :: chainr fact
                                                              "?: " (just expr) "1*3"
                  symbol '*' <@ const (:*:)
                                                              [("",Con 1 :*: Con 3)]
             <|> symbol '/' <@ const (:/:)
Cv20. Pozrite si definíciu chainr :: Parser s a -> Parser s (a->a->a) -> Parser s a
```

```
"?: " (just expr) "1+2*3"
expr :: Parser Char Expr
                                               [("",Con 1 :+: (Con 2 :*: Con 3))]
expr = chainr term
                                               "?: " (just expr) "1*2+3"
              symbol '+' <@ const (:+:)
                                               [("",(Con 1 :*: Con 2) :+: Con 3)]
         <|> symbol '-' <@ const (:-:)
type Op a = (Char, a->a->a)
        :: [Op a] -> Parser Char a -> Parser Char a
gen
gen ops p = chainr p (choice (map f ops))
              where f(s,c) = \text{symbol } s < @ \text{const } c
multis = [ ('*', (:*:)), ('/', (:/:)) ]
addis = [ ('+', (:+:)), ('-', (:-:)) ]
expr = gen addis term
term = gen multis fact
expr = addis 'gen' (multis 'gen' fact)
expr = foldr gen fact [addis, multis]
```