



Lambda calculus 2

Štruktúra prednášok:

- úvod do syntaxe (gramatika + konvencie)
- sémantika (redukčné pravidlá)
- programovací jazyk nad λ -kalkulom

domáca úloha: interpretér λ -kalkulu, ...

- rekurzia a pevný bod
- de Bruijn indexy (miesto mien premenných)
- vlastnosti β -redukcie



Domáca úloha (nepovinná)

Pri práci s vašim interpretrom vám bude chýbať:

- vstup λ termu – funkcia `fromString :: String -> LExp`, ktorá vám vytvorí vnútornú reprezentáciu z textového reťazca, príklad:

```
fromString "\x.xx" = (LAMBDA "x" (LExp [(Id "x"), (Id "x")]))
```

takejto funkcii sa hovorí syntaktický analyzátor a musíte sa vysporiadať s problémom, keď je vstupný reťazec nekorektný

- výstup λ termu – funkcia `toString :: LExp -> String`, ktorá vám vytvorí textovú (čitateľnú) reprezentáciu pre λ term.



Fold na termoch

```
foldLambda lambda var apl con cn lterm
| lterm == (LAMBDA str exp) =
    lambda str (foldLambda lambda var apl con cn exp)
| lterm == (VAR str) = var str
| lterm == (APL exp1 exp2) =
    apl      (foldLambda lambda var apl con cn exp1)
             (foldLambda lambda var apl con cn exp2)
| lterm == (CON str) = con str
| lterm == (CN int) = cn int
```

```
vars = foldLambda (\x y->y) (\x->[x]) (++) (\_->[]) (\_->[])
```

```
show :: LExp -> String
```

```
show = foldLambda (\x y->"(\\"++x++"->"++y++")")
    (\x->x) (\x y->"("++x++" "++y++")") (\x->x) (\x->x)
```



β a η -redukcia

- β -redukcia: $(\lambda x.B) E \rightarrow_{\beta} B[x:E]$
- η -redukcia: $\lambda x.(B x) \rightarrow_{\eta} B$ ak $x \notin \text{Free}(B)$
podmienka je podstatná, lebo ak napr. $B=x$, teda $x \in \text{Free}(B)$, $\lambda x.(x x) \neq x$
- $\rightarrow_{\beta\eta}$ je uzáver $\rightarrow_{\beta} \cup \rightarrow_{\eta}$ vzhľadom na podtermíny, čo znamená:
 - ak $M \rightarrow_{\beta} N$ alebo $M \rightarrow_{\eta} N$, potom $M \rightarrow_{\beta\eta} N$,
 - ak $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, potom $(P M) \rightarrow_{\beta\eta} (P N)$ aj $(M Q) \rightarrow_{\beta\eta} (N Q)$,
 - ak $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, potom $\lambda x.M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.N$.



Vlastnosti β -redukcie

- známe λ -termy
 - $\omega = \lambda x.xx$
 - $\Omega = \omega\omega$
 - $\omega_3 = \lambda x.xxx$
- existuje nekonečná sekvencia
 - $\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \dots$
- existuje neobmedzene puchnúca sekvencia
 - $\omega_3 \omega_3 \rightarrow_{\beta} \omega_3 \omega_3 \omega_3 \rightarrow_{\beta} \omega_3 \omega_3 \omega_3 \omega_3$
- nejednoznačný výsledok – existuje term s konečným a nekonečným odvodením
 - $KI\Omega \rightarrow_{\beta} I$ ale aj
 - $KI\Omega \rightarrow_{\beta} KI\Omega \rightarrow_{\beta} KI\Omega \rightarrow_{\beta} \dots$
- existuje term s dvomi rôznymi normálnymi formami ?



Stratégia redukcie

(na výbere záleží)

- $\beta\eta$ -redex je podterm λ -termu, ktorý môžeme prepísať β alebo η redukciou
- normálna forma λ -termu nemá redex
- reducibilný λ -term nie je v normálnej forme
- Stratégia redukcie μ je čiastočné zobrazenie λ -termov, že $M \rightarrow_{\beta\eta} \mu(M)$
- μ výpočet je postupnosť $M, \mu(M), \dots, \mu^i(M), \dots$ a môže byť (ne)konečná



Najznámejšie stratégie

- leftmost-innermost – najľavejší redex neobsahuje iný redex
$$(\lambda x. (\lambda y. y) x) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} (\lambda z. z)$$
- leftmost-outermost – najľavejší redex neobsiahnutý v inom redexe
$$(\lambda x. (\lambda y. y) x) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} ((\lambda y. y) (\lambda z. z)) \rightarrow_{\beta} (\lambda z. z)$$
- leftmost – vyhodnotí funkciu skôr ako argumenty
$$(\lambda x. x) (\lambda y. ((\lambda z. z) y)) \rightarrow_{\beta} (\lambda y. ((\lambda z. z) y)) \rightarrow_{\beta} (\lambda y. y)$$
- rightmost – vyhodnotí argumenty skôr ako funkciu
$$(\lambda x. x) (\lambda y. ((\lambda z. z) y)) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x) (\lambda y. y) \rightarrow_{\beta} (\lambda y. y)$$



- $$\text{nf} \quad :: \text{LExp} \rightarrow \text{LExp}$$

$$\begin{aligned} \text{oneStep}_{\beta}(\text{APL } m \ n) &= \text{if } m == m' \text{ then} \\ &\quad (\text{APL } m \ (\text{oneStep}_{\beta} n)) \\ &\quad \text{else} \\ &\quad (\text{APL } m' \ n) \\ &\quad \text{where } m' = \text{oneStep}_{\beta} m \end{aligned}$$

- je to innermost či outermost ? Ako vyzerá to druhé ??



Stratégie β -redukcie

- kdekoľvek, až kým nie je v n.f.
 - **leftmost-innermost** (nie je normalizujúca stratégia)
 - argumenty funkcie sú zredukované skôr ako telo funkcie
 - $KI\Omega \rightarrow_{\beta} KI\Omega \rightarrow_{\beta} KI\Omega \rightarrow_{\beta} \dots$
 - $(\lambda x.x x) (\lambda x.x y) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.x x)y \rightarrow_{\beta} yy$
 - **leftmost-outermost** (je normalizujúca stratégia)
 - ak je možné dosadiť argumenty do tela funkcie, urobí sa tak ešte pred ich vyhodnotením, ale tým aj kopíruje redexy ☹
 - $KI\Omega \rightarrow_{\beta} I$
 - $(\lambda x.x x) (\lambda x.x y) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.x y) (\lambda x.x y) \rightarrow_{\beta} y (\lambda x.x y) \rightarrow_{\beta} y y$
- Call by need (lazy)
- pri aplikácii funkcie sa do jej tela nedosadzuje argument, ale pointer na hodnotu argumentu, ktorý sa časom event. vyhodnotí



Churchove čísla

- $\underline{0} := \lambda f. \lambda x. x$
- $\underline{1} := \lambda f. \lambda x. f x$
- $\underline{2} := \lambda f. \lambda x. f (f x)$
- ...
- $\underline{n} := \lambda f. \lambda x. f^n x$
- $\text{succ} := \lambda n. \lambda f. \lambda x. f(n f x)$
- $\text{plus} := \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. m f (n f x)$

definujte mult

$\text{mult} := \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. n (m f) x$

lebo $(m f) = \lambda x. (f^m x)$, potom $(n (m f)) = \lambda x. ((f^m)^n x) = \lambda x. (f^{m*n} x)$

•definujte m^n

$\text{exp} := \lambda m. \lambda n. n m$

$\text{exp } m \ n \ f = m \ n \ f = ((n \ m) f) = (m^n f)$

•definujte n-1 (na rozmýšľanie)



Už ste to raz videli

(prvá prednáška)

```
true  x y = x
false x y = y

ifte  c t e = c t e

two   f x = f (f x)
one   f x = f x
zero  f x = x

incr n f x = f (n f x)

add   m n f x = m f (n f x)
mul   m n f x = m (n f) x

isZero n =  n (\_ -> false) true

decr n = n (\m f x -> f (m incr zero))
        zero
        (\x -> x)
        zero
```

```
fact :: (forall a. (a->a)->a->a) -> (a->a) -> a -> a
fact n =
    ifte (isZero n)
        one
        (mul n (fact (decr n)))

main =
    -- print $ (decr (add (mul two two) one)) (+1) 0
    -- print $ (fact (add (mul two two) one)) (+1) 0
    print $ (fact (add two
                    (add (mul two two) (mul two two))))
            (+1) 0

-- 3628800
-- (4.75 secs, 2,598,673,208 bytes)
```

Pokúste sa dokázať $\text{decr } n = n-1$.

$$n(+1) 0 = n$$

$$n f x = f^n x$$

Testovanie domácej úlohy

Potrebuje prirodzené čísla, použijeme konštrukciu podľa A.Churcha:

- $0 := \lambda f. \lambda x. x$
- $1 := \lambda f. \lambda x. f x$
- $2 := \lambda f. \lambda x. f (f x)$

- $\text{succ} := \lambda n. \lambda f. \lambda x. f (n f x) = \lambda n. \lambda f. \lambda x. (f ((n f) x))$
- $\text{plus} := \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. m f (n f x) = \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. ((m f) ((n f) x))$
-- idea: $f^m(f^n x) = f^{m+n} x$

Zadáme tieto dve konštrukcie:

```
zero = (LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (ID "x")))  
succ = (LAMBDA "n" (LAMBDA "f" (LAMBDA "x"  
    (APL (ID "f") (APL (APL (ID "n") (ID "f")) (ID "x"))))))
```

potom vypočítame:

```
one = (APL succ zero) = LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (APL (ID "f") (ID "x")))  
two = (APL succ one) = LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (APL (ID "f") (APL (ID "f") (ID "x"))))  
three = (APL succ two)  
    = LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (APL (ID "f") (APL (ID "f") (APL (ID "f") (ID "x")))))
```



Logika a predikáty

TRUE	$:= \lambda x. \lambda y. x$	$:= \lambda xy. x$	(vráti 1.argument)
FALSE	$:= \lambda x. \lambda y. y$	$:= \lambda xy. y$	(vráti 2.argument)

AND	$:= \lambda x. \lambda y. x \ y \ \text{FALSE}$	$:= \lambda xy. x \ y \ \text{FALSE}$
OR	$:= \lambda x. \lambda y. x \ \text{TRUE} \ y$	$:= \lambda xy. x \ \text{TRUE} \ y$
NOT	$:= \lambda x. x \ \text{FALSE} \ \text{TRUE}$	
IFTHENELSE	$:= \lambda c. \lambda x. \lambda y. (c \ x \ y)$	

Príklad:

AND TRUE FALSE

$\equiv (\lambda x \ y. x \ y \ \text{FALSE}) \ \text{TRUE} \ \text{FALSE} \rightarrow_{\beta} \text{TRUE} \ \text{FALSE} \ \text{FALSE}$

$\equiv (\lambda x \ y. x) \ \text{FALSE} \ \text{FALSE} \rightarrow_{\beta} \text{FALSE}$

definujte XOR



Kartézsky súčin typov (pár)

PAIR := $\lambda x. \lambda y. (\lambda c. c \ x \ y) := \lambda x y c. c \ x \ y$

LEFT := $\lambda x. x \ \text{TRUE}$

RIGHT := $\lambda x. x \ \text{FALSE}$

TRUE := $\lambda x. \lambda y. x := \lambda x y. x$

FALSE := $\lambda x. \lambda y. y := \lambda x y. y$

LEFT (PAIR A B) \equiv

LEFT (($\lambda x y c. c \ x \ y$) A B) \rightarrow_{β}

LEFT ($\lambda c. c \ A \ B$) \rightarrow_{β}

($\lambda x. x \ \text{TRUE}$) ($\lambda c. c \ A \ B$) \rightarrow_{β}

($\lambda c. c \ A \ B$) ($\lambda x y. x$) \rightarrow_{β}

(($\lambda x y. x$) A B) \rightarrow_{β} A

definujte 3-ticu.

Konštrukcia n-tice nás oprávňuje písať n-árne funkcie, t.j. funkcie, ktorých argumentom je n-tica – tzv. currying, na počesť pána Haskell Curry:

curry :: ((a,b) -> c) -> a -> b -> c

uncurry :: (a -> b -> c) -> (a,b) -> c

$\lambda(x,y).M$ vs. $(\lambda x. \lambda y. M)$

$\lambda(x,y).M \rightarrow \lambda p. (\lambda x. \lambda y. M) (\text{LEFT } p) (\text{RIGHT } p)$

PAIR $:= \lambda x. \lambda y. (\lambda c. c \times y) := \lambda x y c. c \times y$



Súčet typov (disjunkcia)

A+B reprezentujeme ako dvojicu Bool x (A|B)

1^{st}	$:= \lambda x. \text{PAIR TRUE } x$	konštruktor pre A
2^{nd}	$:= \lambda y. \text{PAIR FALSE } y$	B
$1^{\text{st}-1}$	$:= \lambda z. \text{RIGHT } z$	deštruktor pre A
$2^{\text{nd}-1}$	$:= \lambda z. \text{RIGHT } z$	B
$?1^{\text{st}-1}$	$:= \lambda z. \text{LEFT } z$	test, či A ?

$1^{\text{st}-1} 1^{\text{st}} A \equiv$
 $(\lambda z. \text{RIGHT } z) (\lambda x. \text{PAIR TRUE } x) A \rightarrow_{\beta}$
 $\text{RIGHT } (\text{PAIR TRUE } A) \rightarrow_{\beta} A$



Zoznamy

- List t = Nil | Cons t (List t)

Nil = $\lambda z.z$ TRUE FALSE FALSE

Cons = $\lambda x.\lambda y.\lambda z.z$ FALSE x y

head = $\lambda p.p$ ($\lambda x.\lambda y.\lambda z.y$)

tail = $\lambda p.p$ ($\lambda x.\lambda y.\lambda z.z$)

isNil = $\lambda p.p$ ($\lambda x.\lambda y.\lambda z.x$)

Odvod'me, napr.:

isNil Nil = $(\lambda p.p (\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)) (\lambda z.z \text{ TRUE FALSE FALSE}) \rightarrow_{\beta}$
 $((\lambda z.z \text{ TRUE FALSE FALSE}) (\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)) \rightarrow_{\beta}$
 $((\lambda x.\lambda y.\lambda z.x) \text{ TRUE FALSE FALSE}) \rightarrow_{\beta}$
TRUE

Domáca úloha (vaším interpretrom):

"null? (cons a Nil) \rightarrow_{β}^*

"head (cons a Nil) \rightarrow_{β}^*

"tail (cons a Nil) \rightarrow_{β}^*

"head (tail (cons a (cons b Nil)))



Binárne stromy

- $\text{BinTree } t = \text{Empty} \mid \text{Node } t \ (\text{BinTree } t) \ (\text{BinTree } t)$

$\text{Empty} = \lambda g.g \ \text{TRUE} \ (\lambda x.x) \ (\lambda x.x) \ (\lambda x.x)$

$\text{Node} = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda g.g \ \text{FALSE} \ x \ y \ z$

$\text{isEmpty} = \lambda t.t \ (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.u)$

$\text{root} = \lambda t.t \ (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)$

$\text{left} = \lambda t.t \ (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.y)$

$\text{right} = \lambda t.t \ (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.z)$



Binárne stromy

Odvodíme, napr.:

$$\begin{aligned} & \text{root (Node a Empty Empty)} \rightarrow_{\beta} \\ & (\lambda t.t (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)) (\text{Node a Empty Empty}) \rightarrow_{\beta} \\ & ((\text{Node a Empty Empty}) (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)) \rightarrow_{\beta} \\ & (((\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda g.g \text{ FALSE } x y z) a \text{ Empty Empty}) (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)) \rightarrow_{\beta} \\ & ((\lambda g.g \text{ FALSE } a \text{ Empty Empty}) (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)) \rightarrow_{\beta} \\ & ((\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x) \text{ FALSE } a \text{ Empty Empty}) (\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x)) \rightarrow_{\beta} \\ & ((\lambda u.\lambda x.\lambda y.\lambda z.x) \text{ FALSE } a \text{ Empty Empty})) \rightarrow_{\beta} \\ & a \end{aligned}$$



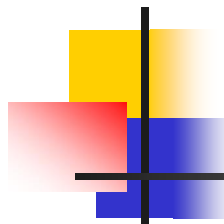
where

$M \text{ where } v = N \quad \rightarrow (\lambda v.M) N$

$M \text{ where } \begin{array}{l} v_1 = N_1 \\ v_2 = N_2 \dots \\ v_n = N_n \end{array} \quad \rightarrow (\lambda(v_1, v_2, \dots, v_n).M) (N_1, \dots, N_n)$

zložený where

$n^*(x+n) \text{ where } \begin{array}{l} n = 3 \\ x = 4*n+1 \end{array} \quad \rightarrow (\lambda n. (\lambda x.n^*(x+n)) (4*n+1)) 3$



Rekurzia

To, čo stále nevieme, je definovať rekurzívnu funkciu, resp. cyklus.
Na to sa používa konštrukcia pomocou operátora pevného bodu.

Príklad:

$\text{FAC} := \lambda n. (\text{if } (= n 0) 1 (* n (\text{FAC } (- n 1))))$

$\text{FAC} := \lambda n. \text{if } (n = 0) \text{ then } 1 \text{ else } (n * \text{FAC } (n - 1))$

... trik: η -redukcia $(\lambda x. M x) = M$, ak x nie je $\text{Free}(M)$

$\text{FAC} := (\lambda \text{fac}. (\lambda n. (\text{if } (= n 0) 1 (* n (\text{fac } (- n 1))))) \text{FAC})$

$H := \lambda \text{fac}. (\lambda n. (\text{if } (= n 0) 1 (* n (\text{fac } (- n 1)))))$

hľadáme funkciu FAC , ktorá má túto vlastnosť:

$\text{FAC} := (H \text{FAC})$

hľadaná funkcia FAC je *pevný bod* funkcie H

■ Aký je typ Y ??

Pevný bod

Potrebuje trochu teórie:

Pre ľubovoľný λ -term F existuje pevný bod, t.j. X také, že $X = F X$.

Dar nebies (operátor pevného bodu):

$$Y = \lambda f. (\lambda x. f(x x)) (\lambda x. f(x x))$$

potom

$(Y F)$ je pevný bod F , t.j. $(Y F) = F (Y F)$.

Skúsme to (aspoň) overiť:

$$Y F = (\lambda f. (\lambda x. f(x x)) (\lambda x. f(x x))) F = (\lambda x. F(x x)) (\lambda x. F(x x)) \rightarrow_{\beta}$$

- $F(x x)[x:\lambda x. F(x x)] \rightarrow_{\beta}$
- $F(\lambda x. F(x x) \lambda x. F(x x)) =$
- $F(Y F)$

preto $(Y F)$ je naozaj pevný bod
a je jediný ?



Operátor Y

$FAC := (H\ FAC)$

$FAC := Y\ H$

$H := \lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))$

Platí

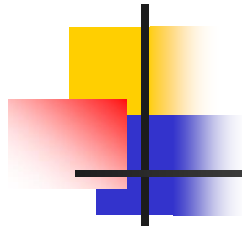
$Y\ H = H\ (Y\ H)$

Presvedčíme sa, že Y nám pomôže definovať rekurzívnu funkciu:

$FAC = Y\ H = Y\ (\lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))$
 $(\lambda f. (\lambda x. f(x\ x)))\ (\lambda x. f(x\ x)))\ (\lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))$

– toto je faktoriál – verzia nevhodná pre slabšie povahy

$FAC\ 1 = (Y\ H)\ 1$... z vlastnosti pevného bodu
 $= H\ (Y\ H)\ 1$
 $= \lambda fac. (\lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ (fac\ (-\ n\ 1)))))\ (Y\ H)\ 1$
 $= \lambda n. (if\ (= n\ 0)\ 1\ (*\ n\ ((Y\ H)\ (-\ n\ 1))))\ 1$
 $= if\ (= 1\ 0)\ 1\ (*\ 1\ ((Y\ H)\ (-\ 1\ 1)))$
 $= (*\ 1\ ((Y\ H)\ (-\ 1\ 1)))$
 $= (*\ 1\ ((Y\ H)\ 0))$
 $= (*\ 1\ (H\ (Y\ H)\ 0))$... trochu zrýchlene
 $= (*\ 1\ 1)$
 $= 1$



1+2+3+...+n

SUM = $\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))$

DON'T DRINK
AND DERIVE

(Y SUM) 2 =

- $Y (\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) 2$
- $(\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y \text{ SUM}) 2$
- $(\lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- n 1)))) 2$
- $\text{if } (= 2 0) 0 (+ 2 ((Y \text{ SUM}) (- 2 1)))$
- $(+ 2 ((Y \text{ SUM}) 1))$
- $(+ 2 ((\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y \text{ SUM}) 1))$
- $(+ 2 ((\lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- n 1)))) 1))$
- $(+ 2 ((\text{if } (= 1 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- 1 1))))))$
- $(+ 2 (+ 1 ((Y \text{ SUM}) 0)))$
- $(+ 2 (+ 1 ((\lambda s. \lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y \text{ SUM}) 0)))$
- $(+ 2 (+ 1 ((\lambda n. \text{if } (= n 0) 0 (+ n ((Y \text{ SUM}) (- n 1)))) 0)))$
- $(+ 2 (+ 1 ((\text{if } (= 0 0) 0 (+ 0 ((Y \text{ SUM}) (- 0 1)))))))$
- $(+ 2 (+ 1 0)) = 3$



Cvičenie

- (na zamyslenie) nájdite príklady funkcií s nekonečným počtom pevných bodov s práve jedným pevným bodom
- realizujte interpreter λ kalkulu, pokračujte v kóde z minulého cvičenia tak, aby počítal hodnoty rekurzívnych funkcií

```
--sucet = \s -> \n -> (if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1))))
```

```
sucet =  LAMBDA "s"  
        (LAMBDA "n"  
          (APL  
            (APL  
              (APL  
                (CON "IF")  
                (APL (APL (CON "=") (ID "n")) (CN 0)) -- condition  
              )  
              (CN 0) -- then  
            )  
            (APL (APL (CON "+") -- else  
                  (ID "n"))  
              (APL (ID "s")  
                (APL (APL (CON "-") (ID "n")) (CN 1)  
                  )  
                )  
              )  
            )  
          )  
        )  
      )  
    )
```




Cvičenie

```
-- plati  $Y f = f(Y f)$   
y = LAMBDA "h"  
    (APL (LAMBDA "x" (APL (ID "h") (APL (ID "x") (ID "x")))))  
    (LAMBDA "x" (APL (ID "h") (APL (ID "x") (ID "x")))))
```

Vyhodnoťte LExp [LExp [y, sucet], CN 4]

1+2+3+4 = 10 ?

A čo faktorial ?

Poznámka:

Obohaťte Váš interpreter o vstavané celé čísla so základnými operáciami (+1, -1, +, *), plus test (napr. na nulu). V opačnom prípade budete bojovať s Church.číslami a interpreter sa vám bude ťažšie ľadiť.



Viacnásobná rekurzia

Veta o pevnom bode: Pre ľubovoľné F_1, F_2, \dots, F_n existujú X_1, X_2, \dots, X_n , že

$$X_1 = F_1 X_1 X_2 \dots X_n$$

$$X_2 = F_2 X_1 X_2 \dots X_n$$

$$\dots$$

$$X_n = F_n X_1 X_2 \dots X_n.$$

vektorovo:

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (F_1 X_1 X_2 \dots X_n, F_2 X_1 X_2 \dots X_n, \dots, F_n X_1 X_2 \dots X_n)$$

$$\underline{\mathbf{X}} = (F_1 (p_1 \underline{\mathbf{X}}) (p_2 \underline{\mathbf{X}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{X}}), \dots, F_n (p_1 \underline{\mathbf{X}}) (p_2 \underline{\mathbf{X}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{X}}))$$

$$\underline{\mathbf{X}} = \lambda \underline{\mathbf{z}}. (F_1 (p_1 \underline{\mathbf{z}}) (p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}}), \dots, F_n (p_1 \underline{\mathbf{z}}) (p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}})) \underline{\mathbf{X}}$$

p_i = i-ta projekcia vektora.

preto

$$\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{Y} (\lambda \underline{\mathbf{z}}. (F_1 (p_1 \underline{\mathbf{z}}) (p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}}), \dots, F_n (p_1 \underline{\mathbf{z}}) (p_2 \underline{\mathbf{z}}) \dots (p_n \underline{\mathbf{z}}))))$$



Primitívna rekurzia

Primitívne rekurzívna funkcia je:

- nulová funkcia $N^n \rightarrow N$,
- $\text{succ}: N \rightarrow N$,
- projekcia $p_i: N^n \rightarrow N$, $p_i x_1 x_2 \dots x_n = x_i$
- kompozícia $f x_1 x_2 \dots x_n = g(h_1(x_1 x_2 \dots x_n) \dots h_m(x_1 x_2 \dots x_n))$
- primitívna rekurzia $g: N^n \rightarrow N$, $h: N^{n+2} \rightarrow N$, potom $f: N^{n+1} \rightarrow N$
$$f 0 \quad x_1 x_2 \dots x_n = g(x_1 x_2 \dots x_n)$$
$$f (n+1) x_1 x_2 \dots x_n = h(f(n x_1 x_2 \dots x_n) n x_1 x_2 \dots x_n)$$

Čiastočne vyčísliteľná (nemusí byť totálna):

- μ -rekurzia $r: N^{n+1} \rightarrow N$, potom $f: N^{n+1} \rightarrow N$
$$f y \quad x_1 x_2 \dots x_n = \min_z.(r(z x_1 x_2 \dots x_n) = y)$$



λ -vypočítateľná funkcia

Parciálna funkcia $f : N^n \rightarrow N$ je λ -vypočítateľná, ak existuje λ -term F taký, že $F \underline{x_1} \underline{x_2} \dots \underline{x_n}$ sa zredukuje na $\underline{f \ x_1 \ x_2 \dots x_n}$, ak n -tica $x_1 \ x_2 \dots x_n$ patrí do def.oboru f
 $F \underline{x_1} \underline{x_2} \dots \underline{x_n}$ nemá normálnu, ak n -tica $x_1 \ x_2 \dots x_n$ nepatrí do def.oboru f

Veta: Každá parciálne vyčísliteľná funkcia je λ -vypočítateľná.

Dôkaz:

- nulová fcia, succ, projekcie p_i , kompozícia priamočiaro
- primitívna rekurzia $g : N^n \rightarrow N$, $h : N^{n+2} \rightarrow N$, potom $f : N^{n+1} \rightarrow N$
 $f \ 0 \quad x_1 \ x_2 \dots x_n = g(x_1 \ x_2 \dots x_n)$
 $f \ (n+1) \ x_1 \ x_2 \dots x_n = h(f(n \ x_1 \ x_2 \dots x_n) \ n \ x_1 \ x_2 \dots x_n)$
 $F = \mathbf{Y} (\lambda f. \lambda y. \lambda x_1. \lambda x_2 \dots \lambda x_n. (\text{if } (\text{isZero } y) \ G(x_1 \ x_2 \dots x_n) \text{ then } \\ \text{else } H(f((\text{pred } y) \ x_1 \ x_2 \dots x_n) \ (\text{pred } y) \ x_1 \ x_2 \dots x_n))))$
- μ -rekurzia $r : N^{n+1} \rightarrow N$
 $F = \lambda y \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n. \mathbf{Y} (\lambda h. \lambda z. (\text{if } (\text{eq } y \ G(z \ x_1 \ x_2 \dots x_n)) \text{ then } z \text{ else } h \ (\text{succ } z))))$

Veta: Každá λ -vypočítateľná je parciálne vyčísliteľná funkcia.

Weak head normal form

(slabo hlavová normálna forma)

Head normal form (h.n.f)

- $(\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_k. v) M_1 M_2 \dots M_n$
- v je premenná (resp. konštanta),
- pre ľubovoľné $r \leq n$, $(\dots((v M_1) M_2) \dots M_r)$ nie je redex .

Ak $k=0$, konštanta či premenná s málo argumentami

Ak $k>0$, λ -abstrakcia s nereducibilným telom

Weak head normal form (w.h.n.f)

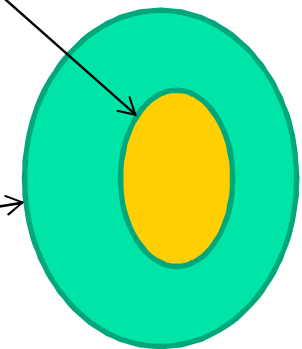
- $v M_1 M_2 \dots M_n$
- v je premenná alebo λ -abstrakcia (resp. konštanta),
- pre ľubovoľné $r \leq n$, $(\dots((v M_1) M_2) \dots M_r)$ nie je redex .

Konštanta, premenná alebo λ -abstrakcia s málo argumentami.

$\lambda x.((\lambda y.y) z)$ nie je h.n.f. (až po red. $((\lambda y.y) z) \rightarrow_{\beta} z$), ale je w.h.n.f.

$(k, n \in \mathbb{N})$

$(n \in \mathbb{N})$





Najznámejšie stratégie

- weak leftmost outermost (call by need/output driven/lazy/full lazy)
$$(\lambda x. \lambda y. (x \ y)) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} \lambda y. ((\lambda z. z) \ y) \quad \text{w.h.n.f.}$$

redukuje argumenty funkcie, len ak ich treba

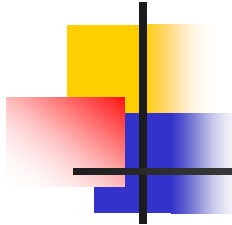
Keďže w.h.n.f. môže obsahovať redex, tak nenormalizuje úplne...

- strong leftmost outermost (call by name/demand driven)
$$(\lambda x. \lambda y. (x \ y)) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} \lambda y. ((\lambda z. z) \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda y. y \quad \text{n.f.}$$

redukuje argumenty funkcie, len ak ich treba, ale pokračuje v hľadaní redexov, kým nejaké sú

normalizuje úplne...

- eager - argumenty najprv (call by value/data driven/strict)
nenormalizuje...



Lazy

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x.x)(* 3 4))) (\lambda x.(+2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* (+ ((\lambda x.x)(* 3 4)) ((\lambda x.x)(* 3 4))) y)) (\lambda x.(+2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ ((\lambda x.x)(* 3 4)) ((\lambda x.x)(* 3 4))) (\lambda x.(+2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ (* 3 4) ((\lambda x.x)(* 3 4))) (\lambda x.(+2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 ((\lambda x.x)(* 3 4))) (\lambda x.(+2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 (* 3 4)) (\lambda x.(+2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 12) (\lambda x.(+2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (\lambda x.(+2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (+2 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8) \rightarrow_{\beta}$
- 192



Full lazy

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* (+ ((\lambda x. x) (* 3 4)) ((\lambda x. x) (* 3 4))) y) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ ((\lambda x. x) (* 3 4)) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ (* 3 4) (* 3 4)) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 12) (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (\lambda x. (+ 2 x) 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 (+ 2 6)) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8) \rightarrow_{\beta}$
- 192



Strict

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (+ 2 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) (* 3 4)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* (+ 12 12) y)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(* (+ 12 12) 8) \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8) \rightarrow_{\beta}$
- 192



Eager

- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) (* 3 4))) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) ((\lambda x. x) 12)) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) (\lambda x. (+ 2 x) 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) (+ 2 6) \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda x. \lambda y. (* (+ x x) y) 12) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* (+ 12 12) y)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(\lambda y. (* 24 y)) 8 \rightarrow_{\beta}$
- $(* 24 8) \rightarrow_{\beta}$
- 192

Church-Rosser vlastnosť

(konzistentnosť λ -kalkulu)

pre ľubovoľnú trojicu termov M, M_1, M_2 takých, že

$$M \rightarrow_{\beta}^* M_1 \text{ a } M \rightarrow_{\beta}^* M_2$$

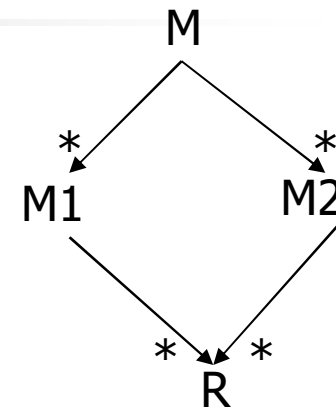
existuje R , že

$$M_1 \rightarrow_{\beta}^* R \text{ a } M_2 \rightarrow_{\beta}^* R$$

Inak:

$$(\leftarrow_{\beta}^* \circ \rightarrow_{\beta}^*) \subseteq (\rightarrow_{\beta}^* \circ \leftarrow_{\beta}^*)$$

teda ak $M_1 \leftarrow_{\beta}^* M \rightarrow_{\beta}^* M_2$, potom existuje R , že $M_1 \rightarrow_{\beta}^* R \leftarrow_{\beta}^* M_2$



Veta: β -redukcia spĺňa Church-Rosserovu vlastnosť

Dôkazy sú technicky náročné:

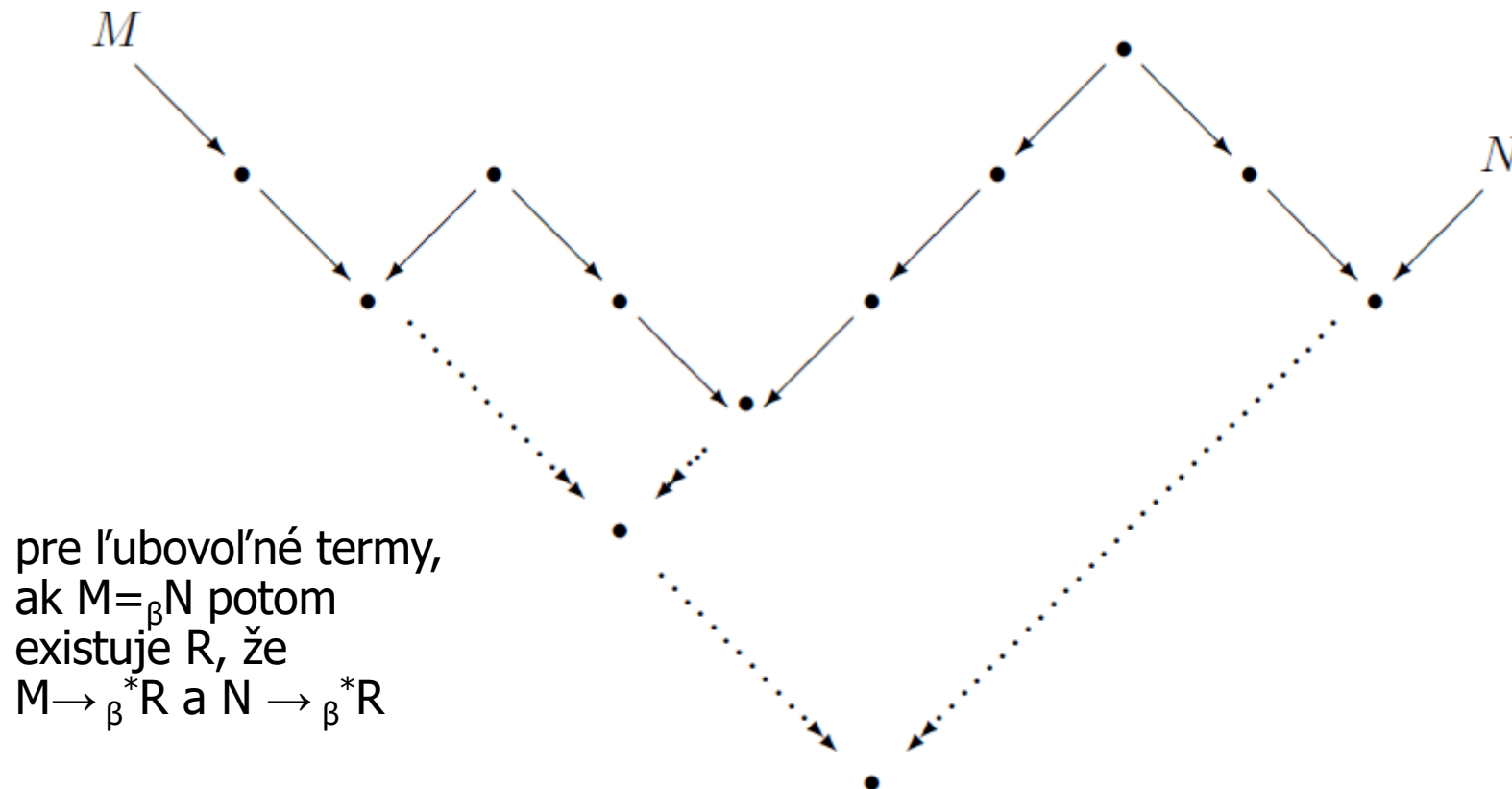
- 1936 Church, Rosser: Some properties of conversion
- 1981 Barendregt
- 1981 Löf, Tait

Dôsledok:

ak term má normálnu formu vzhľadom na \rightarrow_{β} , potom je jednoznačne určená

β ekvivalencia

■ $=_{\beta} \equiv (\rightarrow_{\beta} \cup \leftarrow_{\beta})^*$ Príklad: $KI\Omega =_{\beta} II$



Slabá Church-Rosser vlastnosť

pre ľub.trojicu termov M, M_1, M_2 takých, že

$$M \rightarrow M_1 \text{ a } M \rightarrow M_2$$

existuje R , že

$$M_1 \rightarrow^* R \text{ a } M_2 \rightarrow^* R$$

Inak:

$$(\leftarrow \circ \rightarrow) \subseteq (\rightarrow^* \circ \leftarrow^*)$$

teda ak $M_1 \leftarrow M \rightarrow M_2$, potom existuje R , že $M_1 \rightarrow^* R \leftarrow^* M_2$

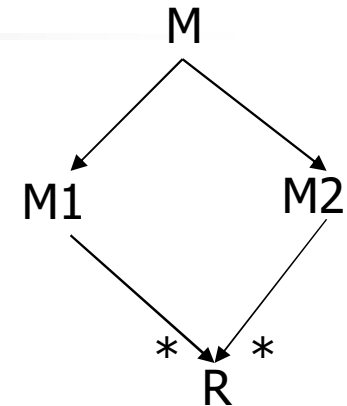
Veta: **Nech \rightarrow je noetherovská/silne normalizujúca/terminujúca relácia.**

- \rightarrow **má Church-Rosser vlastnosť (confluent) je ekvivalentné s**
- \rightarrow **má slabú Church-Rosser vlastnosť (local confluent)**

Dôkaz sporom (SCR implikuje CR, spor: SCR and \neg CR):

- Nech M má dve normálne formy, $M_1 <> M_2$, t.j. $M \rightarrow^* M_1$ a $M \rightarrow^* M_2$.
- M nie je v normálnej forme (ak by bolo, $M = M_1 = M_2$ a pritom $M_1 <> M_2$),
- potom existuje M' , že $M \rightarrow M'$,
- M' má tiež dve normálne formy, ak by nie, spor s lokálnou konfluentosťou,
- M'', M''', M'''' , a t.d' (noetherovskosť relácie vyrobí spor).

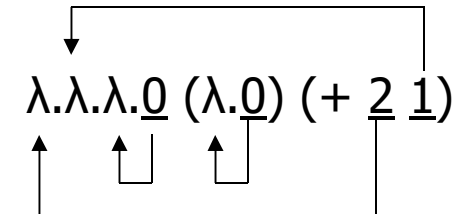
Zamyslenie: je noetherovská podmienka podstatná, neplatí veta aj bez nej ?



de Bruijn index

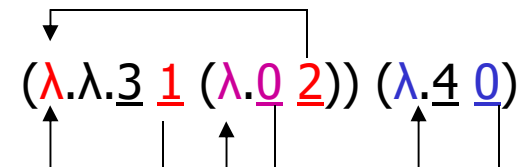
čo robilo problémy pri substitúcii, sú mená premenných
idea (pána de Bruijn): premenné nahradíme indexami

- $\lambda x. (+ x 1)$
 - $\lambda. (+ \underline{0} 1)$
- $\lambda x. \lambda y. \lambda f. f ((\lambda x. x) (+ x y))$
 - $\lambda. \lambda. \lambda. \underline{0} ((\lambda. \underline{0}) (+ \underline{2} \underline{1}))$



index: neform.: cez koľko λ treba vyskákať, aby sme našli λ danej premennej

- α -konverzia neexistuje lebo premenné nemajú mená
 - dôsledok: rôzne premenné môžu mať rovnaký index ($v \neq w$ kontextoch)
 - voľné premenné majú index $>$ hĺbkou λ -vnorenia
- $(\lambda x. \lambda y. ((z x) (\lambda u. (u x)))) (\lambda x. (w x))$
 - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3} \underline{1}) (\lambda. (\underline{0} \underline{2})))) (\lambda. (\underline{4} \underline{0}))$





β -redukcia s de Bruijn-indexami

Príklady:

- $K = \lambda x. \lambda y. x$
 - $\lambda. \lambda. \underline{1}$
- $S = \lambda x. \lambda y. \lambda z. ((x\ z)\ (y\ z))$
 - $\lambda. \lambda. \lambda. ((\underline{2}\ \underline{0})\ (\underline{1}\ \underline{0}))$

- $\lambda x. (+\ x\ 1)\ 5$
 - $\lambda. (+\ \underline{0}\ 1)\ 5 = (+\ 5\ 1)$

hypotéza, ako by to mohlo fungovať
 β -redukcia $(\lambda.M)\ N = M[\underline{0}:N]\ ???$
ale nefunguje...
- $K\ a\ b = (\lambda x. \lambda y. x)\ a\ b$
 - $(\lambda. \lambda. \underline{1}\ a)\ b = \lambda. a\ b = a$

skúsme intuitívne

- $(\lambda x. \lambda y. ((z\ x)\ (\lambda u. (u\ x))))\ (\lambda x. (w\ x))$
 - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3}\ \underline{1})\ (\lambda. (\underline{0}\ \underline{2}))))\ (\lambda. (\underline{4}\ \underline{0}))$
 - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3}\ \underline{\quad})\ (\lambda. (\underline{0}\ \underline{\quad}))))\ (\lambda. (\underline{4}\ \underline{0}))$
 - $(\lambda. (\underline{2}\ (\lambda. \underline{5}\ \underline{0}))\ (\lambda. (\underline{0}\ (\lambda. \underline{6}\ \underline{0}))))$

označíme si miesta, kam sa substituuje
nahrať, ale pozor na voľné premenné

$(\lambda y. \underline{z}\ (\lambda x. \underline{w}\ x)\ (\lambda u. \underline{u}\ (\lambda x. \underline{w'}\ x)))$

β s de Bruijn.indexami

Substitúcia $[t_0, t_1, \dots, t_n] = [0:t_0][1:t_1]\dots[n:t_n]$

- $k[t_0, t_1, \dots, t_n] = t_k, k \leq n$
- $(M N) [t_0, t_1, \dots, t_n] = (M[t_0, t_1, \dots, t_n] N[t_0, t_1, \dots, t_n])$
- $(\lambda M) [t_0, t_1, \dots, t_n] = (\lambda M[0, t_0^1, t_1^1, \dots, t_n^1])$

t^1 – pripočítaj 1 k voľným premenným

β: $(\lambda M) N = M[N, 0, 1, 2, 3, \dots]$

- $(\lambda. \lambda. 1 a) b = ((\lambda. 1) [a, 0, 1, 2, \dots]) b = (\lambda. (1 [0, a, 1, 2, \dots])) b = \lambda. a \quad b = a$
- a, b sú konštanty neobs. premenné

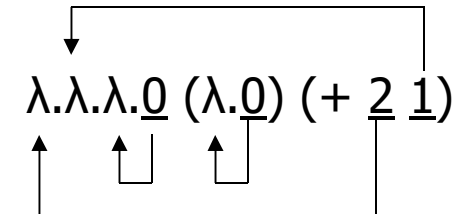
Príklad z predošlého slajdu:

- $(\lambda. \lambda. ((3 \ 1) (\lambda. (0 \ 2)))) (\lambda. (4 \ 0)) =$
 - $\lambda. ((3 \ 1) (\lambda. (0 \ 2))) [(\lambda. (4 \ 0)), 0, 1, 2, \dots] =$
 - $\lambda. (((3 \ 1) [0, (\lambda. (5 \ 0)), 1, 2, \dots]) ((\lambda. (0 \ 2)) [0, (\lambda. (5 \ 0)), 1, 2, \dots])) =$
 - $\lambda. ((2 (\lambda. (5 \ 0))) (\lambda. (0 \ 2) [0, (\lambda. (5 \ 0)), 1, 2, \dots])) =$
 - $\lambda. ((2 (\lambda. (5 \ 0))) (\lambda. (0 \ 2) [0, 1, (\lambda. (6 \ 0)), 2, 3, 4, \dots])))$
 - $\lambda. ((2 (\lambda. (5 \ 0))) (\lambda. (0 (\lambda. (6 \ 0)))))$
- $= (\lambda y. (z (\lambda x. (w \ x))) (\lambda u. (u (\lambda x. (w' \ x)))))$

de Bruijn index

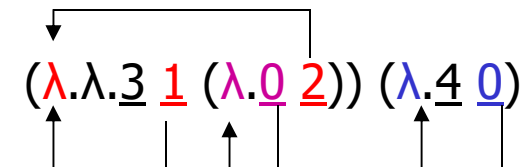
čo robilo problémy pri substitúcii, sú mená premenných
idea (pána de Bruijn): premenné nahradíme indexami

- $\lambda x. (+ x 1)$
 - $\lambda. (+ \underline{0} 1)$
- $\lambda x. \lambda y. \lambda f. f ((\lambda x. x) (+ x y))$
 - $\lambda. \lambda. \lambda. \underline{0} ((\lambda. \underline{0}) (+ \underline{2} \underline{1}))$



index: neform.: cez koľko λ treba vyskákať, aby sme našli λ danej premennej

- α -konverzia neexistuje lebo premenné nemajú mená
- dôsledok: rôzne premenné môžu mať rovnaký index ($v \neq$ kontextoch)
- voľné premenné majú index $>$ hĺbkou λ -vnorenia





β -redukcia s de Bruijn-indexami

Príklady:

- $K = \lambda x. \lambda y. x$
 - $\lambda. \lambda. \underline{1}$
- $S = \lambda x. \lambda y. \lambda z. ((x\ z)\ (y\ z))$
 - $\lambda. \lambda. \lambda. ((\underline{2}\ \underline{0})\ (\underline{1}\ \underline{0}))$

- $\lambda x. (+\ x\ 1)\ 5$
 - $\lambda. (+\ \underline{0}\ 1)\ 5 = (+\ 5\ 1)$

hypotéza, ako by to mohlo fungovať
 β -redukcia $(\lambda.M)\ N = M[\underline{0}:N]\ ???$
ale nefunguje...
- $K\ a\ b = (\lambda x. \lambda y. x)\ a\ b$
 - $(\lambda. \lambda. \underline{1}\ a)\ b = \lambda. a\ b = a$

skúsme intuitívne

- $(\lambda x. \lambda y. ((z\ x)\ (\lambda u. (u\ x))))\ (\lambda x. (w\ x))$
 - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3}\ \underline{1})\ (\lambda. (\underline{0}\ \underline{2}))))\ (\lambda. (\underline{4}\ \underline{0}))$
 - $(\lambda. \lambda. ((\underline{3}\ \underline{\quad})\ (\lambda. (\underline{0}\ \underline{\quad}))))\ (\lambda. (\underline{4}\ \underline{0}))$
 - $(\lambda. (\underline{2}\ (\lambda. \underline{5}\ \underline{0}))\ (\lambda. (\underline{0}\ (\lambda. \underline{6}\ \underline{0}))))$

označíme si miesta, kam sa substituuje
nahrať, ale pozor na voľné premenné

$(\lambda y. \underline{z}\ (\lambda x. \underline{w}\ \underline{x})\ (\lambda u. \underline{u}\ (\lambda x. \underline{w'}\ \underline{x})))$



- $K = \lambda x. \lambda y. x$
 - $\lambda. \lambda. \underline{1}$
- $S = \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z)$
 - $\lambda. \lambda. \lambda. \underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})$

Ďalší testovací příklad

- $S \ K \ K = ((\lambda. \lambda. \lambda. \underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})) \ \lambda. \lambda. \underline{1}) \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$
 - $(\lambda. \lambda. \underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})) [\lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots] \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$
 - $(\lambda. \lambda. (\underline{2} \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})) [\underline{0}, \underline{1}, \lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots]) \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$
 - $(\lambda. \lambda. ((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0}))) \ \lambda. \lambda. \underline{1} =$
 - $(\lambda. ((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0}))) [\lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots] =$
 - $\lambda. (((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\underline{1} \ \underline{0})) [\underline{0}, \lambda. \lambda. \underline{1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots]) =$
 - $\lambda. ((\lambda. \lambda. \underline{1}) \ \underline{0} \ (\lambda. \lambda. \underline{1} \ \underline{0})) =$
 - $\lambda. \underline{0} = I$



Cvičenie

Prepíšte do de Bruijn notácie

- $\lambda x. \lambda y. y (\lambda z. z x) x$
- $\lambda x. (\lambda x. x x) (\lambda y. y (\lambda z. x))$
- $(\lambda x. + x ((\lambda y. y) (- x (\lambda z. 3)(\lambda y. y y))))$

Definujte funkciu na prevod do de Bruijn notácie.

Implementujte β -redukciu s pomocnými funkciami