Lambda calculus 2

Štruktúra prednášok:

- úvod do syntaxe (gramatika + konvencie)
- sémantika (redukčné pravidlá)
- programovací jazyk nad λ-kalkulom

domáca úloha: interpreter λ-kalkulu, ...

- rekurzia a pevný bod
- de Bruijn indexy (miesto mien premenných)
- vlastnosti β-redukcie

Domáca úloha (nepovinná)

Pri práci s vašim interpretrom vám bude chýbať:

- vstup λ termu – funkcia fromString :: String -> LExp, ktorá vám vytvorí vnútornú reprezentáciu z textového reťazca, príklad:

  fromString "\x.xx" = (LAMBDA "x" (LExp [(Id "x"), (Id "x")]))

  takejto funkcii sa hovorí syntaktický analyzátor a musíte sa vysporiadať s problémom, keď je vstupný reťazec nekorektný

- výstup λ termu – funkcia toString :: LExp -> String, ktorá vám vytvorí textovú (čitateľnú) reprezentáciu pre λ term.

Fold na termoch

```
foldLambda lambda var apl con cn lterm
    | lterm == (LAMBDA str exp) =
                      lambda str (foldLambda lambda var apl con cn exp)
    | lterm == (VAR str) = var str
    | lterm == (APL exp1 exp2) =
                      apl       (foldLambda lambda var apl con cn exp1)
                                (foldLambda lambda var apl con cn exp2)
    | lterm == (CON str) = con str
    | lterm == (CN int) = cn int

vars = foldLambda (\x y->y) (\x->[x]) (++) (\_->[]) (\_->[])

show :: LExp -> String
show = foldLambda (\x y->"(\\"++x++"->"++y++")")
          (\x->x) (\x y->"("++x++" "++y++")") (\x->x) (\x->x)
```

β a η-redukcia

- β-redukcia: $(\lambda\ x.B)\ E \ {->}_{\beta}\ B[x:E]$
- η-redukcia: $\lambda\ x.(B\ x)\ {->}_{\eta}\ B$ ak $x \notin Free(B)$

podmienka je podstatná, lebo ak napr. B=x, teda $x \in Free(B)$, $\lambda x.(x\ x) \neq x$

- $\rightarrow_{\beta\eta}$ je uzáver $\rightarrow_{\beta} \cup \rightarrow_{\eta}$ vzhľadom na podtermy, čo znamená:
  - ak $M \rightarrow_{\beta} N$ alebo $M \rightarrow_{\eta} N$, potom $M \rightarrow_{\beta\eta} N$,
  - ak $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, potom $(P\ M) \rightarrow_{\beta\eta} (P\ N)$ aj $(M\ Q) \rightarrow_{\beta\eta} (N\ Q)$,
  - ak $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, potom $\lambda x.M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.N$.

Vlastnosti β-redukcie

- známe λ-termy
  - $\omega = \lambda x.xx$
  - $\Omega = \omega\omega$
  - $\omega_3 = \lambda x.xxx$
- existuje nekonečná sekvencia
  - $\Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \dots$
- existuje neobmedzene puchnúca sekvencia
  - $\omega_3\ \omega_3 \to_\beta \omega_3\ \omega_3\ \omega_3 \to_\beta \omega_3\ \omega_3\ \omega_3\ \omega_3$
- nejednoznačný výsledok – existuje term s konečným a nekonečným odvodením
  - $KI\Omega \to_\beta I$ ale aj
  - $KI\Omega \to_\beta KI\Omega \to_\beta KI\Omega \to_\beta \dots$
- existuje term s dvomi rôznymi normálnymi formami ?

Stratégia redukcie

(na výber záleží)

- $\beta\eta$-redex je podterm λ-termu, ktorý môžeme prepísať β alebo η redukciou
- normálna forma λ-termu nemá redex
- reducibilný λ-term nie je v normálnej forme
- Stratégia redukcie μ je čiastočné zobrazenie λ-termov, že $M \to_{\beta\eta} \mu(M)$
- μ výpočet je postupnosť $M, \mu(M), \ldots, \mu^i(M), \ldots$ a môže byť (ne)konečná

Najznámejšie stratégie

- leftmost-innermost – najľavejší redex neobsahuje iný redex

  $(\lambda x.\underline{(\lambda y.y)}\ x)\ (\lambda z.z) \to_\beta \underline{(\lambda x.x)}\ (\lambda z.z) \to_\beta (\lambda z.z)$

- leftmost-outermost – najľavejší redex neobsiahnutý v inom redexe

  $\underline{(\lambda x.(\lambda y.y)\ x)}\ (\lambda z.z) \to_\beta ((\lambda y.y)\ (\lambda z.z)) \to_\beta (\lambda z.z)$

- leftmost – vyhodnotí funkciu skôr ako argumenty

  $\underline{(\lambda x.x)}(\lambda y.(\lambda z.z)\ y) \to_\beta (\lambda y.\underline{(\lambda z.z)}\ y) \to_\beta (\lambda y.y)$

- rightmost – vyhodnotí argumenty skôr ako funkciu

  $(\lambda x.x)(\lambda y.\underline{(\lambda z.z)}\ y) \to_\beta \underline{(\lambda x.x)}(\lambda y.y) \to_\beta (\lambda y.y)$

Ako to programujeme

- Extrémne drahé riešenie (prečo) ?

```
nf       :: LExp -> LExp
nf t     = if t == t′ then t else nf t′ where t′=oneStepβ t
-----------------------------------------------------
oneStepβ (App (Lambda x m) n)      = substitute m x n

oneStepβ (App m n)    = if m == m′ then
                                 (App m (oneStepβ n))
                            else
                                 (App m′ n)
                            where m′ = oneStepβ m

oneStepβ (Lambda x m)= (Lambda x (oneStepβ m))
```

- je to innermost či outermost ? Ako vyzerá to druhé ??

Stratégie β-redukcie

- kdekoľvek, až kým nie je v n.f.
- **leftmost-innermost** (nie je normalizujúca stratégia)
  - argumenty funkcie sú zredukované skôr ako telo funkcie
  - $K I \Omega \to_\beta K I \Omega \to_\beta K I \Omega \to_\beta \ldots$
  - $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ y) \to_\beta (\lambda x.x\ x) y \to_\beta yy$
- **leftmost-outermost** (je normalizujúca stratégia)
  - ak je možné dosadiť argumenty do tela funkcie, urobí sa tak ešte pred ich vyhodnotením, ale tým aj kopíruje redexy ☹
  - $K I \Omega \to_\beta I$
  - $(\lambda x.x\ x)\ \underline{(\lambda x.x\ y)} \to_\beta \underline{(\lambda x.x\ y)}\ \underline{(\lambda x.x\ y)} \to_\beta y\ \underline{(\lambda x.x\ y)} \to_\beta y\ y$

    Call by need (lazy)
    - pri aplikácii funkcie sa do jej tela nedosadzuje argument, ale pointer na hodnotu argumentu, ktorý sa časom event. vyhodnotí

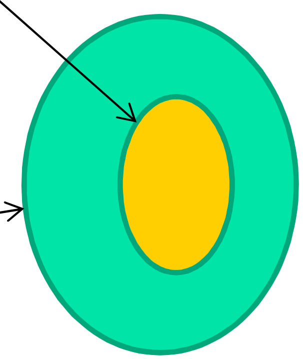
Weak head normal form
(slabo hlavová normálna forma)

Head normal form (h.n.f)

- $(\lambda x_1.\ \lambda x_2.\ \dots\ .\ \lambda x_k.\ v)\ M_1\ M_2 \dots M_n$ $(k, n \in N)$
- v je premenná (resp. konštanta),
- pre ľubovoľné $r \leq n$, $(\dots((v\ M_1)\ M_2)\dots\ M_r)$ nie je redex .

Ak k=0, konštanta či premenná s málo argumentami

Ak k>0, λ-abstrakcia s nereducibilným telom



Weak head normal form (w.h.n.f)

- $v\ M_1\ M_2 \dots M_n$ $(n \in N)$
- v je premenná alebo λ-abstrakcia (resp. konštanta),
- pre ľubovoľné $r \leq n$, $(\dots((v\ M_1)\ M_2)\dots\ M_r)$ nie je redex .

Konštanta, premenná alebo λ-abstrakcia s málo argumentami.

$\lambda x.((\lambda y.y)\ z)$ nie je h.n.f. (až po red. $((\lambda y.y)\ z) \to_\beta z$), ale je w.h.n.f.

Najznámejšie stratégie

- weak leftmost outermost (call by need/output driven/lazy/full lazy)

  $\underline{(\lambda x.\ \lambda y.(x\ y))}\ (\lambda z.z) \rightarrow_{\beta} \lambda y.((\lambda z.z)\ y)$ w.h.n.f.

  redukuje argumenty funkcie, len ak ich treba

  Keďže w.h.n.f. môže obsahovať redex, tak nenormalizuje úplne...

- strong leftmost outermost (call by name/demand driven)

  $\underline{(\lambda x.\ \lambda y.(x\ y))}\ (\lambda z.z) \rightarrow_{\beta} \lambda y.(\underline{(\lambda z.z)\ y)} \rightarrow_{\beta} \lambda y.y$ n.f.

  redukuje argumenty funkcie, len ak ich treba, ale pokračuje v hľadaní redexov, kým nejaké sú

  normalizuje úplne...

- eager - argumenty najprv (call by value/data driven/strict)

  nenormalizuje...

Lazy

- $(\lambda x.\ \lambda y.(*\ (+\ x\ x)\ y)\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ )\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6) \rightarrow_\beta$
- $(\ \lambda y.(*\ (+\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4)))\ y)\ )\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4)))\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ (*\ 3\ 4)\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4)))\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ 12\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4)))\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ 12\ (*\ 3\ 4))\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ 12\ 12)\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ 24\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ 24\ (+2\ 6)\ \ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ 24\ 8\ ) \rightarrow_\beta$
- 192

Full lazy

- $(\lambda x.\ \lambda y.(*\ (+\ x\ x)\ y)\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ )\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6) \rightarrow_\beta$
- $(\ \lambda y.(*\ (+\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4)))\ y)\ )\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4)))\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ (*\ 3\ 4)\ (*\ 3\ 4))\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ 12\ 12)\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ 24\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6)\ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ 24\ (+2\ 6)\ \ ) \rightarrow_\beta$
- $(*\ 24\ 8\ ) \rightarrow_\beta$
- 192

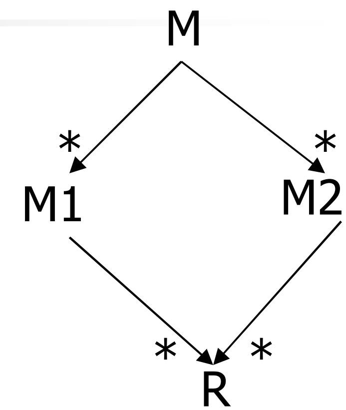
Strict

- $(\lambda x.\ \lambda y.(*\ (+\ x\ x)\ y)\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ )\ (\lambda x.(+2\ x)\ 6) \rightarrow_\beta$
- $(\lambda x.\ \lambda y.(*\ (+\ x\ x)\ y)\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ )\ (+2\ 6) \rightarrow_\beta$
- $(\lambda x.\ \lambda y.(*\ (+\ x\ x)\ y)\ ((\lambda x.x)(*\ 3\ 4))\ )\ 8 \rightarrow_\beta$
- $(\lambda x.\ \lambda y.(*\ (+\ x\ x)\ y)\ (*\ 3\ 4)\ )\ 8 \rightarrow_\beta$
- $(\lambda x.\ \lambda y.(*\ (+\ x\ x)\ y)\ 12\ )\ 8 \rightarrow_\beta$
- $(\lambda y.(*\ (+\ 12\ 12)\ y))\ 8 \rightarrow_\beta$
- $(*\ (+\ 12\ 12)\ 8)\ \rightarrow_\beta$
- $(*\ 24\ 8)\ \rightarrow_\beta$
- 192

Eager

- (λx. λy.(* (+ x x) y) ((λx.x)(* 3 4))) (λx.(+2 x) 6) $\to_\beta$
- (λx. λy.(* (+ x x) y) ((λx.x) 12)) (λx.(+2 x) 6) $\to_\beta$
- (λx. λy.(* (+ x x) y) 12) (λx.(+2 x) 6) $\to_\beta$
- (λx. λy.(* (+ x x) y) 12) (+2 6) $\to_\beta$
- (λx. λy.(* (+ x x) y) 12) 8 $\to_\beta$
- (λy.(* (+ 12 12) y)) 8 $\to_\beta$
- (λy.(* 24 y)) 8 $\to_\beta$
- (* 24 8) $\to_\beta$
- 192

Church-Rosser vlastnosť
(konzistentnosť λ-kaklulu)



pre ľubovoľnú trojicu termov M, M_1, M_2 takých, že

$$M \to_{\beta}^{*} M_1 \text{ a } \to_{\beta}^{*} M_2$$

existuje R, že

$$M_1 \to_{\beta}^{*} R \text{ a } M_2 \to_{\beta}^{*} R$$

Inak:

$$(\leftarrow_{\beta}^{*} \circ \to_{\beta}^{*}) \subseteq (\to_{\beta}^{*} \circ \leftarrow_{\beta}^{*})$$

teda ak $M1 \leftarrow_{\beta}^{*} M \to_{\beta}^{*} M2$, potom existuje R, že $M1 \to_{\beta}^{*} R \leftarrow_{\beta}^{*} M2$

Veta: β-redukcia spĺňa Church-Rosserovu vlastnosť

Dôkazy sú technicky náročné:

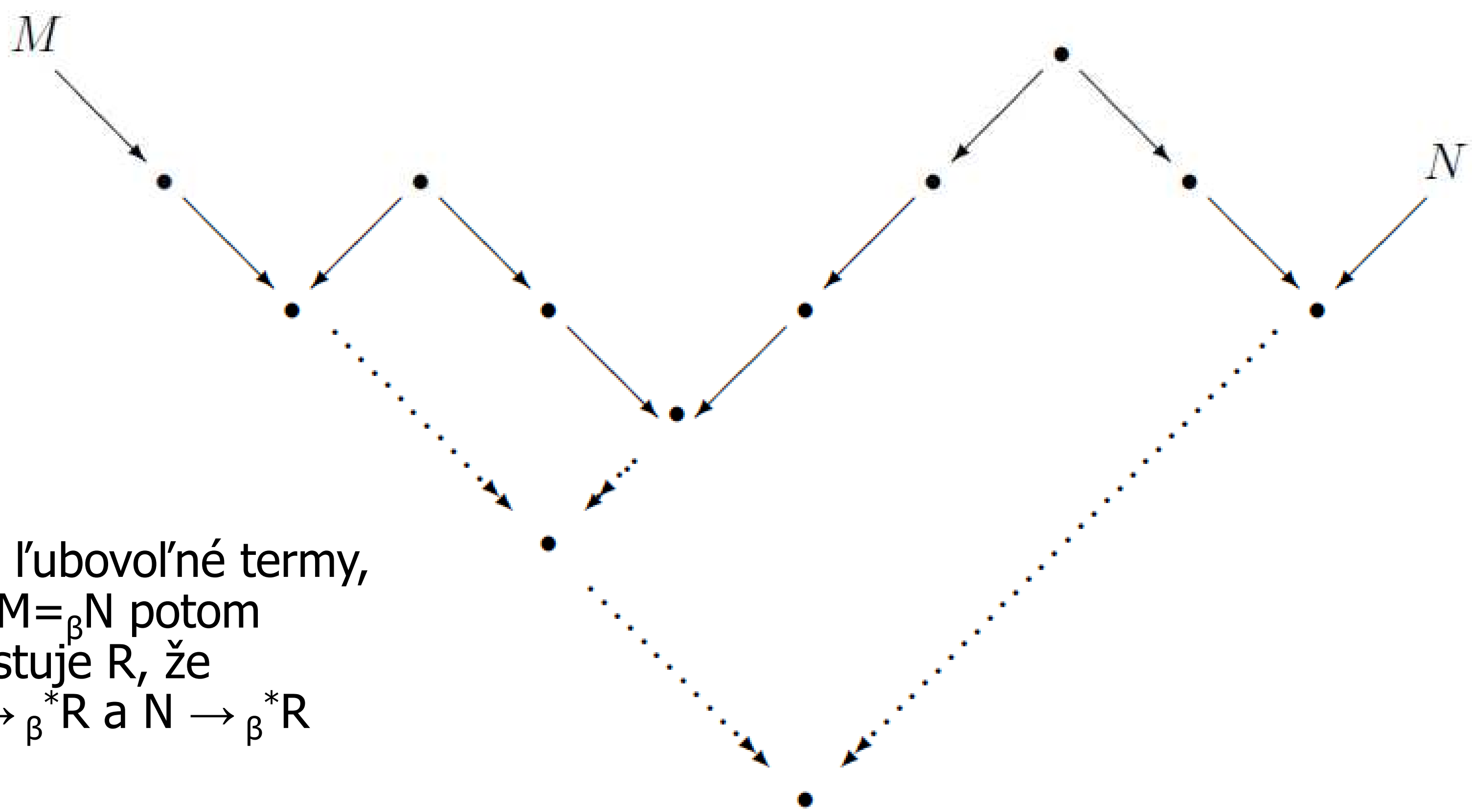
- 1936 Church, Rosser: Some properties of conversion
- 1981 Barendregt
- 1981 Löf, Tait

Dôsledok:

ak term má normálnu formu vzhľadom na $\to_{\beta}$, potom je jednoznačne určená

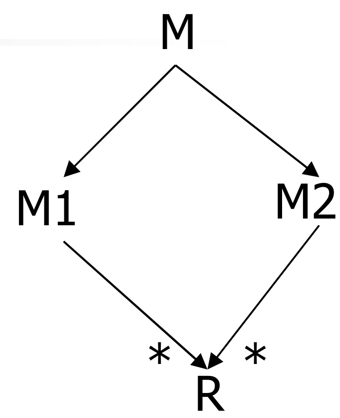
β ekvivalenica

- $=_\beta \equiv (\rightarrow_\beta \cup \leftarrow_\beta)^*$ Príklad: $K I \Omega =_\beta I I$



pre ľubovoľné termy,
ak $M =_\beta N$ potom
existuje R, že
$M \rightarrow_\beta^* R$ a $N \rightarrow_\beta^* R$

Slabá Church-Rosser vlastnosť



pre ľub.trojicu termov M, M_1, M_2 takých, že

$M \to M_1$ a $M \to M_2$

existuje R, že

$M_1 \to {}^{*}R$ a $M_2 \to {}^{*}R$

Inak:

$$(\leftarrow \circ \to) \subseteq (\to^{*} \circ \leftarrow^{*})$$

teda ak $M1 \leftarrow M \to M2$, potom existuje R, že $M1 \to^{*} R \leftarrow^{*} M2$

Veta: **Nech $\to$ je noetherovská/silne normalizujúca/terminujúca relácia.**

- **$\to$ má Church-Rosser vlastnosť (confluent) je ekvivalentné s**
- **$\to$ má slabú Church-Rosser vlastnosť (local confluent)**

Dôkaz sporom (SCR implikuje CR, spor: SCR and ¬CR):

- Nech M má dve normálne formy, M1<>M2, t.j. $M \to^{*} M_1$ a $M \to^{*} M_2$.
- M nie je v normálnej forme (ak by bolo, M=M1=M2 a pritom M1<>M2),
- potom existuje M', že $M \to M'$,
- M' má tiež dve normálne formy, ak by nie, spor s lokálnou konfluentosťou,
- M'', M''', M'''', a t.ď (noetherovskosť relácie vyrobí spor).

Zamyslenie: je noetherovská podmienka podstatná, neplatí veta aj bez nej ?

Churchove čísla

- $\underline{0} := \lambda f.\lambda x.x$
- $\underline{1} := \lambda f.\lambda x.f\ x$
- $\underline{2} := \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
- …
- $\underline{n} := \lambda f.\lambda x.f^n\ x$

- succ := $\lambda n.\lambda f.\lambda x.f(n\ f\ x)$
- plus := $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\ f\ (n\ f\ x)$

Domáca úloha
definujte mult

mult := $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ (m\ f)\ x$

lebo $(m\ f) = \lambda x.(f^m\ x)$, potom $(n\ (m\ f)) = \lambda x.((f^m)^n\ x) = \lambda x.(f^{m*n}\ x)$

•definujte m^n

exp := $\lambda m.\lambda n.\ n\ m$

exp m n f = m n f = ((n m) f) = $(m^n\ f)$

•definujte n-1 (na rozmýšľanie)

$n\,(+1)\ 0 = n$

$n\ f\ x = f^n\ x$

Testovanie domácej úlohy

Potrebujeme prirodzené čísla, použijeme konštrukciu podľa A.Churcha:

- *0* := λf.λx.x
- *1* := λf.λx.f x
- *2* := λf.λx.f (f x)

- succ := λn.λf.λx.f (n f x) = λn.λf.λx.(f ((n f) x))
- plus := λm.λn.λf.λx. m f (n f x) = λm.λn.λf.λx. ((m f) ((n f) x))

  -- idea: $f^m(f^n\ x) = f^{m+n}\ x$

Zadáme tieto dve konštrukcie:

```
zero = (LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (ID "x")))
succ = (LAMBDA "n" (LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (LExp [(ID "f"),(LExp [(LExp [(ID "n"),(ID
    "f")]), (ID "x")])]))))
```

potom vypočítame:

```
one = (succ zero)   = LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (LExp [ID "f",ID "x"]))
two = (succ one)    = LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (LExp [ID "f",LExp [ID "f",ID "x"]]))
three = (succ two)  = LAMBDA "f" (LAMBDA "x" (LExp [ID "f",LExp [ID "f",LExp [ID
    "f",ID "x"]]]))
```

Logika a predikáty

TRUE	:= $\lambda x.\lambda y.\ x$:= $\lambda xy.x$	(vráti 1.argument)
FALSE	:= $\lambda x.\lambda y.\ y$:= $\lambda xy.y$	(vráti 2.argument)

AND	:= $\lambda x.\lambda.y.\ x\ y$ FALSE := $\lambda xy.x\ y$ FALSE
OR	:= $\lambda x.\lambda y.\ x$ TRUE y := $\lambda xy.x$ TRUE y
NOT	:= $\lambda x.\ x$ FALSE TRUE
IFTHENELSE	:= $\lambda c.\lambda x.\lambda y.(c\ x\ y)$

Príklad:
AND TRUE FALSE
$\equiv$ (λ x y. x y FALSE) TRUE FALSE $\rightarrow_\beta$ TRUE FALSE FALSE
$\equiv$ (λ x y. x) FALSE FALSE $\rightarrow_\beta$ FALSE

Domáca úloha: definujte XOR

Kartézsky súčin typov (pár)

PAIR := $\lambda x.\lambda y.(\lambda c.\ c\ x\ y)$:= $\lambda xyc.\ c\ x\ y$
LEFT := $\lambda x.x$ TRUE
RIGHT := $\lambda x.x$ FALSE

TRUE := $\lambda x.\lambda y.x$:= $\lambda xy.x$
FALSE := $\lambda x.\lambda y.y$:= $\lambda xy.y$

LEFT (PAIR A B) ≡

LEFT (($\lambda xyc.\ c\ x\ y$) A B) $\rightarrow_\beta$
LEFT ($\lambda c.\ c$ A B) $\rightarrow_\beta$
($\lambda x.x$ TRUE) ($\lambda c.\ c$ A B) $\rightarrow_\beta$
($\lambda c.\ c$ A B) ($\lambda xy.x$) $\rightarrow_\beta$
(($\lambda xy.x$) A B) $\rightarrow_\beta$ A

Domáca úloha: definujte 3-ticu.

Konštrukcia n-tice nás oprávňuje písať n-árne funkcie, t.j. funkcie, ktorých argumentom je n-tica – tzv. currying, na počesť pána Haskell Curry:

$\lambda(x,y).M$ vs. $(\lambda x.\lambda y.M)$

$\lambda(x,y).M$ -> $\lambda p.\ (\lambda x.\lambda y.M)$ (LEFT p) (RIGHT p)

PAIR := $\lambda x.\lambda y.(\lambda c.\ c\ x\ y)$:= $\lambda xyc.\ c\ x\ y$

Súčet typov (disjunkcia)

A+B reprezentujeme ako dvojicu Bool x (A|B)

1^{st}	:= $\lambda x.$PAIR TRUE x	konštruktor pre A
2^{nd}	:= $\lambda y.$PAIR FALSE y	B
1^{st-1}	:= $\lambda z.$RIGHT z	deštruktor pre A
2^{nd-1}	:= $\lambda z.$RIGHT z	B
$?1^{st-1}$	:= $\lambda z.$LEFT z	test, či A ?

$1^{st-1}\ 1^{st}$ A ≡

($\lambda z.$RIGHT z) ($\lambda x.$PAIR TRUE x) A $\rightarrow_\beta$

RIGHT (PAIR TRUE A) $\rightarrow_\beta$ A

Zoznamy

Domáca úloha (vašim interpretrom):

- null? (cons a Nil) $\rightarrow_\beta^*$
- head (cons a Nil) $\rightarrow_\beta^*$
- tail (cons a Nil) $\rightarrow_\beta^*$
- head (tail (cons a (cons b Nil)))

- List t = Nil | Cons t (List t)

Nil = λz.z TRUE FALSE FALSE

Cons = λx.λy.λz.z FALSE x y

head = λp.p (λx.λy.λz.y)

tail = λp.p (λx.λy.λz.z)

isNil = λp.p (λx.λy.λz.x)

Odvoďme, napr.:

isNil Nil = (λp.p (λx.λy.λz.x)) (λz.z TRUE FALSE FALSE) $\rightarrow_\beta$

((λz.z TRUE FALSE FALSE) (λx.λy.λz.x)) $\rightarrow_\beta$

((λx.λy.λz.x) TRUE FALSE FALSE) $\rightarrow_\beta$

TRUE

Binárne stromy

- BinTree t = Empty | Node t (BinTree t) (BinTree t)

Empty	= λg.g TRUE (λx.x) (λx.x) (λx.x)
Node	= λx.λy.λz.λg.g FALSE x y z
isEmpty	= λt.t (λu.λx.λy.λz.u)
root	= λt.t (λu.λx.λy.λz.x)
left	= λt.t (λu.λx.λy.λz.y)
right	= λt.t (λu.λx.λy.λz.z)

Binárne stromy

Odvoďme, napr.:

root (Node a Empty Empty) $\rightarrow_\beta$

(λt.t (λu.λx.λy.λz.x)) (Node a Empty Empty) $\rightarrow_\beta$

((Node a Empty Empty) (λu.λx.λy.λz.x)) $\rightarrow_\beta$

(((λx.λy.λz.λg.g FALSE x y z) a Empty Empty) (λu.λx.λy.λz.x)) $\rightarrow_\beta$

((λg.g FALSE a Empty Empty) (λu.λx.λy.λz.x)) $\rightarrow_\beta$

((λu.λx.λy.λz.x) FALSE a Empty Empty) (λu.λx.λy.λz.x)) $\rightarrow_\beta$

((λu.λx.λy.λz.x) FALSE a Empty Empty)) $\rightarrow_\beta$

a

where

M where v = N -> (λv.M) N

M where $v_1 = N_1$ -> $(\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n).M)\ (N_1, \ldots, N_n)$

$v_2 = N_2 \ldots$

$v_n = N_n$

složený where

n*(x+n) where -> (λn. (λx.n*(x+n)) (4*n+1)) 3

n = 3

x = 4*n+1

Rekurzia

To, čo stále nevieme, je definovať rekurzívnu funkciu, resp. cyklus. Na to sa používa konštrukcia pomocou operátora pevného bodu.

Príklad:
FAC := λn.(if (= n 0) 1 (* n (FAC (- n 1))))

FAC := λn.if (n = 0) then 1 else (n * FAC (n - 1))
... trik: η-redukcia (λx.M x) = M, ak x nie je Free(M)
FAC := (λfac.(λn.(if (= n 0) 1 (* n (fac (- n 1))))) FAC)

H := λfac.(λn.(if (= n 0) 1 (* n (fac (- n 1)))))

hľadáme funkciu FAC, ktorá má túto vlastnosť:
FAC := (H FAC)
hľadaná funkcia FAC je *pevný bod* funkcie H

- Aký je typ Y ??

Pevný bod

Potrebujeme trochu teórie:

Pre ľubovoľný λ-term F existuje pevný bod, t.j. X také, že X = F X.

Dar nebies (operátor pevného bodu):

Y = λf.(λx. f(x x)) (λx. f(x x))

potom

(Y F) je pevný bod F, t.j. (Y F) = F (Y F).

Skúsme to (aspoň) overiť:

Y F = (λf.(λx. f(x x)) (λx. f(x x))) F = (λx. F(x x)) (λx. F(x x)) $\rightarrow_\beta$

- F(x x)[x:λx. F(x x)] $\rightarrow_\beta$
- F(λx.F(x x) λx.F(x x)) =
- F (Y F) preto (Y F) je naozaj pevný bod F

Operátor Y

FAC := (H FAC)
FAC := Y H
H:=λfac.(λn.(if (= n 0) 1 (* n (fac (- n 1)))))
Platí
Y H = H (Y H)

Presvedčíme sa, že Y nám pomôže definovať rekurzívnu funkciu:

FAC = Y H = Y (λfac.(λn.(if (= n 0) 1 (* n (fac (- n 1))))))
(λf.(λx. f(x x)) (λx. f(x x))) (λfac.(λn.(if (= n 0) 1 (* n (fac (- n 1))))))
– toto je faktoriál – verzia nevhodná pre slabšie povahy

FAC 1 = (Y H) 1 ... z vlastnosti pevného bodu
= H (Y H) 1
= λfac.(λn.(if (= n 0) 1 (* n (fac (- n 1))))) (Y H) 1
= λn.(if (= n 0) 1 (* n ((Y H)(- n 1)))) 1
= if (= 1 0) 1 (* 1 ((Y H) (- 1 1)))
= (* 1 ((Y H) (- 1 1)))
= (* 1 ((Y H) 0))
= (* 1 (H (Y H) 0)) ... trochu zrýchlene
= (* 1 1)
= 1

1+2+3+…+n

SUM = λs.λn.if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))

(Y SUM) 2 =

- Y (λs.λn.if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) 2
- (λs.λn.if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y SUM) 2
- (λn.if (= n 0) 0 (+ n ((Y SUM) (- n 1)))) 2
- if (= 2 0) 0 (+ 2 ((Y SUM) (- 2 1)))
- (+ 2 ((Y SUM) 1))
- (+ 2 ((λs.λn.if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y SUM) 1))
- (+ 2 ((λn.if (= n 0) 0 (+ n ((Y SUM) (- n 1)))) 1))
- (+ 2 ((if (= 1 0) 0 (+ n ((Y SUM) (- 1 1))))))
- (+ 2 (+ 1 ((Y SUM) 0)))
- (+ 2 (+ 1 ((λs.λn.if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1)))) (Y SUM) 0)))
- (+ 2 (+ 1 ((λn.if (= n 0) 0 (+ n ((Y SUM) (- n 1)))) 0)))
- (+ 2 (+ 1 ((if (= 0 0) 0 (+ 0 ((Y SUM) (- 0 1)))))))
- (+ 2 (+ 1 0)) = 3

Cvičenie

- (na zamyslenie) nájdite príklady funkcií
  s nekonečným počtom pevných bodov
  s práve jedným pevným bodom

- realizujte interpreter λkalkulu, pokračujte v kóde z minulého cvičenia tak, aby počítal hodnoty rekurzívnych funkcii

```
--sucet = \s -> \n -> (if (= n 0) 0 (+ n (s (- n 1))))
sucet = LAMBDA "s"
            (LAMBDA "n"
              (LExp [CON "if",
                   (LExp [CON "=", ID "n", CN 0]), CN 0,
                   (LExp [CON "+", ID "n",
                        (LExp [ID "s", (LExp [CON "-", ID "n", CN 1])])])]))
```

Cvičenie

```
-- plati Y f = f(Y f)
y =       LAMBDA "h"
           (LExp [LAMBDA "x"
                   (LExp [ID "h", (LExp [ID "x", ID "x"])]),
                  LAMBDA "x"
                   (LExp [ID "h", (LExp [ID "x", ID "x"])])])
```

Vyhodnoťte LExp [LExp [y, sucet], CN 4]
1+2+3+4 = 10 ?
A čo faktorial ?

Poznámka:
Obohaťte Váš interpreter o vstavané celé čísla so základnými operáciami (+1, -1, +, *), plus test (napr. na nulu). V opačnom prípade budete bojovať s Church.číslami a interpreter sa vám bude ťažšie ladiť.

Viacnásobná rekurzia

Veta o pevnom bode: Pre ľubovoľné $F_1, F_2, \ldots, F_n$ existujú $X_1, X_2, \ldots, X_n$, že

$$X_1 = F_1\, X_1\, X_2 \ldots X_n$$
$$X_2 = F_2\, X_1\, X_2 \ldots X_n$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$X_n = F_n\, X_1\, X_2 \ldots X_n.$$

vektorovo:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (F_1\, X_1\, X_2 \ldots X_n,\ F_2\, X_1\, X_2 \ldots X_n, \ldots ,\ F_n\, X_1\, X_2 \ldots X_n)$$

$$\underline{\mathbf{X}} = (F_1\, (p_1\, \underline{\mathbf{X}})\, (p_2\, \underline{\mathbf{X}}) \ldots (p_n\, \underline{\mathbf{X}}), \ldots ,F_n\, (p_1\, \underline{\mathbf{X}})\, (p_2\, \underline{\mathbf{X}}) \ldots (p_n\, \underline{\mathbf{X}}))$$

$$\underline{\mathbf{X}} = \boxed{\lambda \underline{\mathbf{z}}.(F_1\, (p_1\, \underline{\mathbf{z}})\, (p_2\, \underline{\mathbf{z}}) \ldots (p_n\, \underline{\mathbf{z}}), \ldots F_n\, (p_1\, \underline{\mathbf{z}})\, (p_2\, \underline{\mathbf{z}}) \ldots (p_n\, \underline{\mathbf{z}}))}\ \underline{\mathbf{X}}$$

p_i = i-ta projekcia vektora.

preto

$$\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}\ (\lambda \underline{\mathbf{z}}.(F_1\, (p_1\, \underline{\mathbf{z}})\, (p_2\, \underline{\mathbf{z}}) \ldots (p_n\, \underline{\mathbf{z}}), \ldots F_n\, (p_1\, \underline{\mathbf{z}})\, (p_2\, \underline{\mathbf{z}}) \ldots (p_n\, \underline{\mathbf{z}})\ )\ )$$

Primitívna rekurzia

Primitívne rekurzívna funkcia je:

- nulová funkcia $N^n \rightarrow N$,
- succ: $N \rightarrow N$,
- projekcia p_i: $N^n \rightarrow N$, $p_i\, x_1\, x_2 \ldots x_n = x_i$
- kompozícia $f\, x_1\, x_2 \ldots x_n = g(h_1(x_1\, x_2 \ldots x_n) \ldots h_m(x_1\, x_2 \ldots x_n))$
- primitívna rekurzia $g : N^n \rightarrow N$, $h : N^{n+2} \rightarrow N$, potom $f : N^{n+1} \rightarrow N$

  $f\ 0 \quad x_1\, x_2 \ldots x_n \quad = g(x_1\, x_2 \ldots x_n)$

  $f\ (n+1)\ x_1\, x_2 \ldots x_n \quad = h(f(n\ x_1\, x_2 \ldots x_n)\ n\ x_1\, x_2 \ldots x_n)$

Čiastočne vyčíslitelná (nemusí byť totálna):

- μ-rekurzia $r : N^{n+1} \rightarrow N$, potom $f : N^{n+1} \rightarrow N$

  $f\ y \quad x_1\, x_2 \ldots x_n \quad = \min_z.(r(z\ x_1\, x_2 \ldots x_n) = y)$

λ-vypočítateľná funkcia

Parciálna funkcia f : $N^n \to N$ je λ-vypočítateľná, ak existuje λ-term F taký, že

F $\underline{x_1}$ $\underline{x_2}$ … $\underline{x_n}$ sa zredukuje na $\underline{f\ x_1\ x_2 \dots x_n}$, ak n-tica x_1 x_2 … x_n patrí do def.oboru f

F $\underline{x_1}$ $\underline{x_2}$ … $\underline{x_n}$ nemá normálnu, ak n-tica x_1 x_2 … x_n nepatrí do def.oboru f

Veta: Každá parciálne vyčíslitelná funkcia je λ-vypočítateľná.

Dôkaz:

- nulová fcia, succ, projekcie $p_{i,}$ kompozícia priamočiaro
- primitívna rekurzia g : $N^n \to N$, h : $N^{n+2} \to N$, potom f : $N^{n+1} \to N$

  f 0 x_1 x_2 … x_n = g(x_1 x_2 … x_n)

  f (n+1) x_1 x_2 … x_n = h(f(n x_1 x_2 … x_n) n x_1 x_2 … x_n)

  F = **Y** (λf.λy.λx_1.λx_2 … λx_n . (if (isZero y) G(x_1 x_2 … x_n) then
  else H(f((pred y) x_1 x_2 … x_n) (pred y) x_1 x_2 … x_n)))
- μ-rekurzia r : $N^{n+1} \to N$

  F = λyλx_1λx_2 … λx_n.**Y** (λh.λz. (if (eq y G(z x_1 x_2 … x_n)) then z else h (succ z)))

Veta: Každá λ-vypočítateľná je parcialne vyčíslitelná funkcia.

de Bruijn index

čo robilo problémy pri substitúcii, sú mená premenných
idea (pána de Brujin): premenné nahradíme indexami

- $\lambda x.(+\ x\ 1)$
  - $\lambda.(+\ \underline{0}\ 1)$

$\lambda.\lambda.\lambda.\underline{0}\ (\lambda.\underline{0})\ (+\ \underline{2}\ \underline{1})$

- $\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ ((\lambda x.x)\ (+\ x\ y))$
  - $\lambda.\lambda.\lambda.\underline{0}\ ((\lambda.\underline{0})\ (+\ \underline{2}\ \underline{1}))$

index: neform.: cez koľko λ treba vyskákať, aby sme našli λ danej premennej

- α-konverzia neexistuje lebo premenné nemajú mená
- dôsledok: rôzne premenné môžu mať rovnaký index (v <> kontextoch)
- voľné premenné majú index > hľbku λ-vnorení

- $(\lambda x.\lambda y.((z\ x)\ (\lambda u.(u\ x))))\ (\lambda x.(w\ x))$
  - $(\lambda.\lambda.((\underline{3}\ \underline{1})\ (\lambda.(\underline{0}\ \underline{2})))\ (\lambda.(\underline{4}\ \underline{0}))$

$(\lambda.\lambda.\underline{3}\ \underline{1}\ (\lambda.\underline{0}\ \underline{2}))\ (\lambda.\underline{4}\ \underline{0})$

β-redukcia s de Bruijn-indexami

Príklady:

- $K=\lambda x.\lambda y.x$
  - $\lambda.\lambda.\underline{1}$
- $S=\lambda x.\lambda y.\lambda z.((x\ z)\ (y\ z))$
  - $\lambda.\lambda.\lambda.((\underline{2}\ \underline{0})\ (\underline{1}\ \underline{0}))$

- $\lambda x.(+\ x\ 1)\ 5$ — hypotéza, ako by to mohlo fungovať
  - $\lambda.(+\ \underline{0}\ 1)\ 5 = (+\ 5\ 1)$ — β-redukcia $(\lambda.M)\ N = M[\underline{0}:N]$???

    ale nefunguje...
- $K\ a\ b = (\lambda x.\lambda y.x)\ a\ b$
  - $(\lambda.\lambda.\underline{1}\ a)\ b = \lambda.a\ b = a$ — skúsme intuitívne

- $(\lambda x.\lambda y.((z\ x)\ (\lambda u.(u\ x))))\ (\lambda x.(w\ x))$
  - $(\lambda.\lambda.((\underline{3}\ \underline{1})\ (\lambda.(\underline{0}\ \underline{2}))))\ (\lambda.(\underline{4}\ \underline{0}))$
  - $(\lambda.\lambda.((\underline{3}\ \underline{\square})\ (\lambda.(\underline{0}\ \underline{\square}))))\ (\lambda.(\underline{4}\ \underline{0}))$ — označíme si miesta, kam sa substituuje
  - $(\lambda.(\underline{2}\ (\lambda.\underline{5}\ \underline{0}))\ (\lambda.(\underline{0}\ (\lambda.\underline{6}\ \underline{0}))))$ — nahrať, ale pozor na voľné premenné

  $(\lambda y.\underline{z}\ (\lambda x.\underline{w}\ \underline{x})\ (\lambda u.\underline{u}\ (\lambda x.\underline{w'}\ \underline{x})))$

β s de Bruijn.indexami

Substitúcia $[t_0, t_1, \ldots, t_n] = [\underline{0}:t_0][\underline{1}: t_1]\ldots[\underline{n}: t_n]$

- $\underline{k}[t_0, t_1, \ldots, t_n] = t_k,\ k <= n$
- $(M\ N)\ [t_0, t_1, \ldots, t_n] = (M[t_0, t_1, \ldots, t_n]\ N[t_0, t_1, \ldots, t_n])$
- $(\lambda M)\ [t_0, t_1, \ldots, t_n] = (\lambda\ M[\underline{0}, t_0{}^\wedge 1, t_1{}^\wedge 1, \ldots , t_n{}^\wedge 1])$

$t^\wedge 1$ – pripočítaj 1 k voľným premenným

β: $(\lambda M)\ N = M[N,\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3}, \ldots]$

- $(\lambda.\lambda.\underline{1}\ a)\ b = ((\lambda.\underline{1})\ [a,\underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots])b = (\lambda.(\underline{1}\ [\underline{0}, a, \underline{1}, \underline{2},\ldots]))\ b =$

  $\lambda.a\ b = a$ - a, b sú konštanty neobs. premenné

Príklad z predošlého slajdu:

- $(\lambda.\lambda.((\underline{3}\ \underline{1})\ (\lambda.(\underline{0}\ \underline{2}))))\ (\lambda.(\underline{4}\ \underline{0})) =$
  - $\lambda.((\underline{3}\ \underline{1})\ (\lambda.(\underline{0}\ \underline{2})))\ [(\lambda.(\underline{4}\ \underline{0})),\underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots] =$
  - $\lambda.(((\underline{3}\ \underline{1})[\underline{0},(\lambda.(\underline{5}\ \underline{0})),\underline{1},\underline{2},\ldots])\quad ((\lambda.(\underline{0}\ \underline{2}))\ [\underline{0},(\lambda.(\underline{5}\ \underline{0})),\underline{1},\underline{2},\ldots])) =$
  - $\lambda.((\underline{2}\ (\lambda.(\underline{5}\ \underline{0})))\quad (\lambda.(\underline{0}\ \underline{2}))\ [\underline{0},(\lambda.(\underline{5}\ \underline{0})),\underline{1},\underline{2},\ldots])) =$
  - $\lambda.((\underline{2}\ (\lambda.(\underline{5}\ \underline{0})))\quad (\lambda.(\underline{0}\ \underline{2})[\underline{0},\underline{1},(\lambda.(\underline{6}\ \underline{0})),\underline{2},\underline{3},\underline{4},\ldots])))$
  - $\lambda.((\underline{2}\ (\lambda.(\underline{5}\ \underline{0})))\quad (\lambda.(\underline{0}\ (\lambda.(\underline{6}\ \underline{0})))))$

$= (\lambda y.(\underline{z}\ (\lambda x.(\underline{w}\ \underline{x})))\ (\lambda u.(\underline{u}\ (\lambda x.(\underline{w'}\ \underline{x})))))$

SKK

- $K=\lambda x.\lambda y.x$
  - $\lambda.\lambda.\underline{1}$
- $S=\lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$
  - $\lambda.\lambda.\lambda.\underline{2}\ \underline{0}\ (\underline{1}\ \underline{0})$

Ďalší testovací príklad

- $S\ K\ K = (\ (\ \lambda.\lambda.\lambda.\underline{2}\ \underline{0}\ (\underline{1}\ \underline{0})\ )\ \lambda.\lambda.\underline{1}\ )\ \lambda.\lambda.\underline{1}\ =$
  - $(\ \lambda.\lambda.\underline{2}\ \underline{0}\ (\underline{1}\ \underline{0})\ [\lambda.\lambda.\underline{1},\ \underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots]\ )\ \lambda.\lambda.\underline{1}\ =$
  - $(\ \lambda.\lambda.(\underline{2}\ \underline{0}\ (\underline{1}\ \underline{0}))\ [\underline{0},\underline{1},\lambda.\lambda.\underline{1},\ \underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots]\ )\ \lambda.\lambda.\underline{1}\ =$
  - $(\lambda.\lambda.((\lambda.\lambda.\underline{1})\ \underline{0}\ (\underline{1}\ \underline{0})\ ))\ \lambda.\lambda.\underline{1}\ =$
  - $(\lambda.((\lambda.\lambda.\underline{1})\ \underline{0}\ (\underline{1}\ \underline{0})))\ [\lambda.\lambda.\underline{1},\underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots]\ =$
  - $\lambda.(((\lambda.\lambda.\underline{1})\ \underline{0}\ (\underline{1}\ \underline{0}))\ [\underline{0},\lambda.\lambda.\underline{1},\underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots])\ =$
  - $\lambda.((\lambda.\lambda.\underline{1})\ \underline{0}\ (\lambda.\lambda.\underline{1}\ \underline{0}))\ =$
  - $\lambda.\underline{0} = I$

Cvičenie

Prepíšte do de Bruijn notácie

- λx.λy.y (λz.z x) x
- λx.(λx.x x) (λy.y (λz.x))
- (λx. + x ((λy.y) (- x (λz.3)(λy.y y)))

Definujte funkciu na prevod do de Bruijn notácie.

Implementujte β-redukciu s pomocnými funkciami