# Midterm

- zajtra, po cviku, cca od 11:20
- voľnou formou do 24:00
- rekurzia – memoizácia
- algoritmus
- lambdy a bety
- funkcionály Haskellu (*folds*, *zip*, *zipWith*, *concat*,...)
- (binárny) strom

# Typy

- motto: *každý slušný programovací jazyk je typovaný*

- napriek tomu, mnoho beztypových jazykov sa teší veľkej obľube (Basic, PHP, Prolog, Smalltalk, Scheme, Python, Ruby, …)

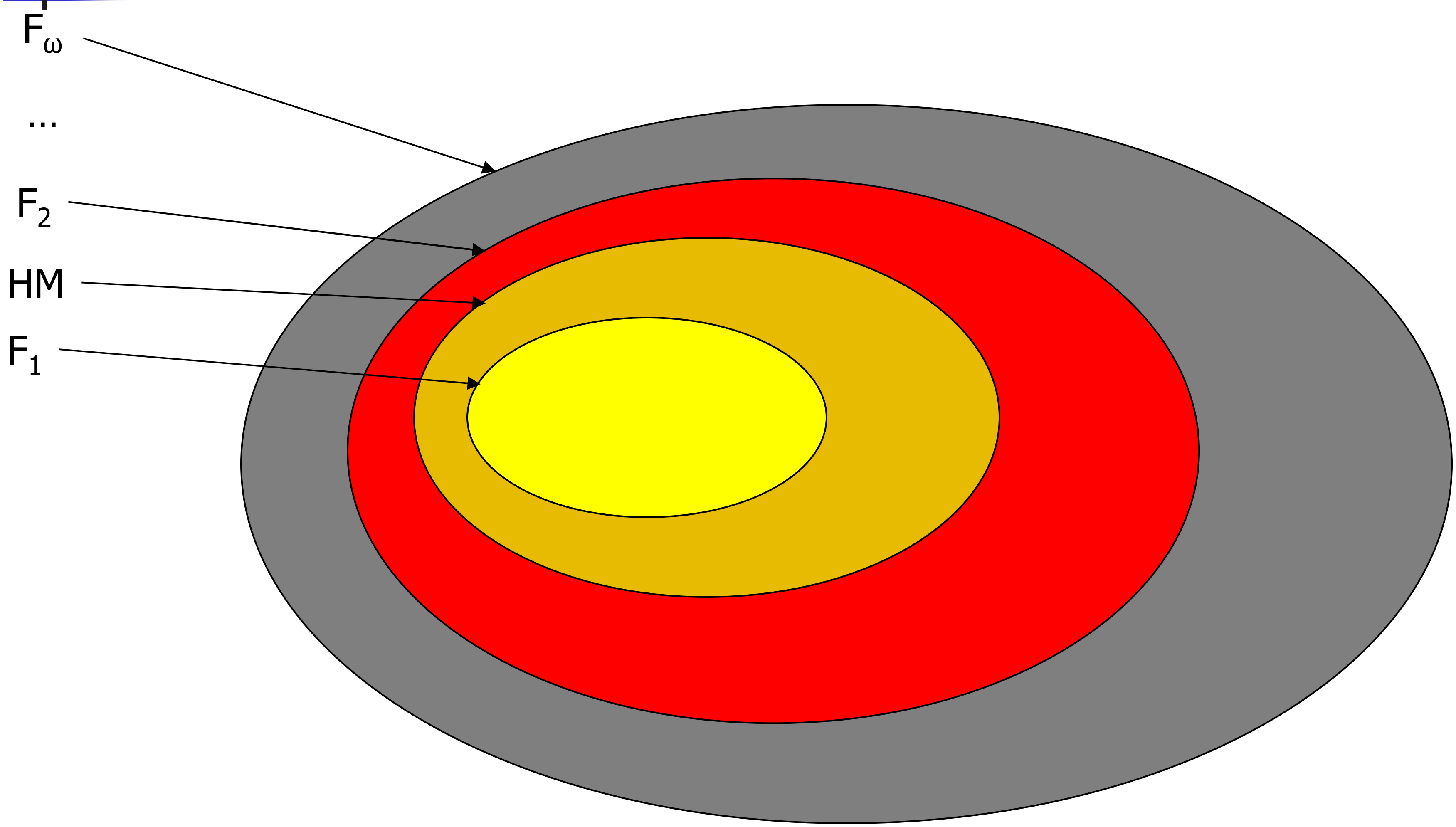
- typy však obmedzujú programátora v písaní nezmyselných konštrukcií,
- ich úlohou je v čase kompilácie odhaliť chyby, ktoré by sa objavili v run-time (možno..., ak by tou vetvou išli)
- typy obmedzujú vyjadrovaciu (event. výpočtovú ?) silu jazyka (True or False)?

Dnes bude:

- jednoduchý typovaný λ-calcul (Simply typed lambda calculus - F1)
  https://en.wikipedia.org/wiki/Simply_typed_lambda_calculus
  - rozdiel medzi type-checking a type-inference
  - unifikácia ako nástroj riešenia typových rovníc
- Curry-Howardov izomorfizmus

- zložitejšie typovacie systémy (Hindley-Millner a F2)

# Hierarchia



# Jednoduchý typovaný λ-calcul

Základná neformálna predstava o typoch:

- Typy sú základné a funkčné-funkcionálne:
  - základné: A, B, …
  - funkcionálne: $t_1 \rightarrow t_2$

Pravidlá (2 intuitívne):

- Aplikácia: ak $M{:}t_1 \rightarrow t_2$, $N{:}t_1$, potom $(M\ N){:}t_2$
- Abstrakcia: ak $x{:}t_1$, $M{:}t_2$, potom $(\lambda x.M){:}t_1 \rightarrow t_2$
- Konvencia:
  operátor funkčného typu $\rightarrow$ je asociatívny doprava (ako v Haskelli):
  - $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 = t_1 \rightarrow (t_2 \rightarrow t_3)$

# Jednoduchý λ-calcul, $F_1$

λ-Termy (LExp) $t ::= x \mid \lambda x.t \mid (t\ t) \mid n \mid +$

Typy $\alpha, \beta ::= Int \mid \alpha \to \beta$

Definujeme reláciu $\Gamma \vdash t:\alpha$, znamená, že λ-term t je v kontexte Γ typu α
Kontext Γ obsahuje informáciu o typoch premenných x:α,
Kontext Γ je zoznam/množina tvaru [(String,Typ)]

$\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash x:\alpha$ [VAR]

$$\frac{\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash N:\beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.N):\alpha \to \beta}$$ [ABS]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\alpha \to \beta,\ \Gamma \vdash N:\alpha}{\Gamma \vdash (M\ N):\beta}$$ [APPL]

$\Gamma \vdash n:Int$ [INT]

$\Gamma \vdash +:Int \to Int \to Int$ [PLUS]

# Tipujme typy

S intuitívnou predstavou o typoch sa (bezhlavo) vrhnime do typovania výrazov:

- k rovnakým premenným napíšme rovnaké typové dekorácie (grécke písmená v hornom indexi)
- typovacími pravidlami propagujeme na abstrakcie a aplikácie

- $I = \lambda x.x$
  - $(\lambda x^{\alpha}.x^{\alpha})^{\beta}$, potom $\beta = \alpha \to \alpha$
- $K = \lambda x.\lambda y.x$
  - $(\lambda x^{\alpha}.\lambda y^{\beta}.x^{\alpha})^{\delta}$, potom $\delta = \alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $((\lambda x.x)\ y)$
  - $((\lambda x^{\alpha}.x^{\alpha})^{\beta}\ y^{\delta})$, potom $\beta = \alpha \to \alpha$, $\delta = a$
  - $((\lambda x^{\alpha}.x^{\alpha})^{\alpha \to \alpha}\ y^{\alpha})^{\alpha}$
- $S = \lambda x.\lambda y.\lambda z.((x\ z)\ (y\ z))$

Sústava rovníc

  - $\lambda x^{\alpha} y^{\beta} z^{\delta}.[(x^{\alpha} z^{\delta})^{\eta} (y^{\beta} z^{\delta})^{\varepsilon}]^{\theta}$, $\alpha = \delta \to \eta$, $\beta = \delta \to \varepsilon$, $\eta = \varepsilon \to \theta$
  - $x:\alpha = \delta \to (\varepsilon \to \theta)$, $y:\beta = \delta \to \varepsilon$, $z:\delta$
  - $(\delta \to (\varepsilon \to \theta)) \to (\delta \to \varepsilon) \to \delta \to \theta$, výsledok je typu $\theta$
- $\omega = \lambda x.(x\ x)$
  - $\lambda x^{\alpha}.(x^{\alpha}\ x^{\alpha})^{\beta}$, potom $\alpha =^{?} \alpha \to \beta$, … asi nemá riešenie...

# Prečo $\alpha =^? \alpha \to \beta$ nemá

- $x = x + 5$
- $x = x + 0$
- $x = x * 1$
- $x = x * 2$
- $x = f(x)$
- je toto riešenie $x = f(f(f(f(f(\ldots)))))$
- $\beta =^? \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to$
- $\alpha \to \beta =^? \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha \to$

# Vlastnosti $F_1$

- niektoré λ-termy nie sú otypovateľné, Y= λf.(λx. f(x x)) (λx. f(x x)) :-) ☹
  - dôvod: podobne ako λx.(x x) – tzv. *self-application*,
  - neformálne: sústava zodpovedajúcich typových rovníc nemá riešenie

- Church-Rosserova vlastnosť platí aj pre typovaný λ-kalkul ☺
  - typované λ-termy sú pomnožinou lambda termov, a β-redukcia je rovnaká

- typovaný λ-kalkul je silne normalizovateľný = noetherovský = neexistuje nekonečné odvodenie 😐

  dokázané až 1966-1968, a to >= 6x.

  Dôkaz: napr. v H. Barendregt – Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics

- **Dôsledok**:

  žiaden operátor pevného bodu nie je otypovateľný, X=F X=F (F X)= F (F (F X))...
- $F_1$ nemá nekonečný výpočet, cyklus/rekurziu, pevný bod, nie je Turing complete

- Dôsledok:

  jednoducho-typovateľný λ-kalkul nemá žiaden fix-point operátor.

# self-application (MAP map)

vieme otypovať výraz map map ? DU4

- map :: (a->b)->[a]->[b]            -- polymorický type

MAP :: (A -> B) -> [A] -> [B]

map :: (a -> b) -> ([a] -> [b])

- preto (A -> B) = (a -> b)  ->  ([a] -> [b])
- ergo  A =            (a -> b), B = [a] -> [b]

Dosadíme:

MAP :: ((a->b) -> ([a] -> [b])) -> [a->b] -> [[a] -> [b]]

(MAP map) :: [a->b] -> [[a] -> [b]]

ale chcelo by to vidieť a spustiť, tak nech a = b = Int

MAP :: ((Int->Int) -> ([Int] -> [Int])) -> [Int->Int] -> [[Int] -> [Int]]

(map map) [(+1),(+2),(*3)]  -- nevypíše nič, lebo je to zoznam funkcií

length $ (map map) [(+1),(+2),(*3)] == 3

((map map) [(+1),(+2),(*3)]!!0) [1..10] == [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]

# Normálne formy
(stupeň termu)

Cieľ: typovaný λ-term má normálnu formu = neexistuje nekonečné odvodenie

- **stupeň typu :**
  - pre základné: A, B, … je 1,
  - pre funkcionálne: $\alpha \rightarrow \beta$ je 1+max(stupeň $\alpha$, stupeň $\beta$)

- **stupeň redexu :**
  - $[(\boldsymbol{\lambda x^{\alpha}.M^{\beta}})^{\alpha \rightarrow \beta}\ \mathbf{N}^{\alpha}]^{\beta}$ je stupeň typu $(\alpha \rightarrow \beta)$

- **stupeň termu M :**
  - 0 ak neobsahuje redex,
  - max.stupeň redexu v **M**

**Lemma (stupeň termu po substitúcii/ β-redukcii):**

- **stupeň termu $M[x^{\alpha}:N]$ <= max(stupeň M, stupeň N, stupeň α)**
  - redexy v $M[x^{\alpha}:N]$ sú v M, resp. N, resp. ak v M je podterm niekde tvaru (x Q) a za N dosadíme N =λy.P, tak vznikne nový redex ((λy.P) Q)
  - $\alpha = \beta \rightarrow \eta$, $Q::\beta$, $(x\ Q)::\eta$, $\lambda y.P::\alpha = \beta \rightarrow \eta$, $y::\beta$, $P::\eta$
  - stupeň (x Q) = stupeň$(\beta \rightarrow \eta)$ = stupeň ((λy.P) Q)

# Normálne formy
## (konečné odvodenie)

**Veta:** (každý) typovaný λ-term má normálnu formu

Nájdeme R je redex v M maximálneho stupňa, ktorý obsahuje len redexy ostro menších stupňov, t.j.

- je taký,
- stupeň M = stupeň R,
- R už neobsahuje redexy stupňa (stupeň R), ... ale len menšie !

- Pri β-redukcii redexu R v M sa redexy
  - mimo R nezmenia,
  - vnútri R sa nahradia sa inými, ale stupeň termu M nevzrastie (viď lemma),
  - R zmizne a je nahradený redexami s menším stupňom.

**Dôsledok**: β-redukciou nevzrastie stupeň termu a klesne počet redexov max.stupňa

Takže dvojica (stupeň M, počet redexov stupňa M) klesá v lexikografickom usporiadaní...

Keďže je to dobre usporiadanie, **nemôže existovať nekonečná postupnosť**.

# Normálne formy

(stupeň termu)

**Lemma (stupeň termu po substitúcii/ β-redukcii):**

- **stupeň termu $M[x^\alpha:N]$ <= max(stupeň M, stupeň N, stupeň α)**
  - redexy v $M[x^\alpha:N]$ sú v
  - z M,
  - z N
  - ak v M je podterm tvaru (x Q) a za N dosadíme N =λy.P, tak vznikne nový redex ((λy.P) Q)

  - $\mathbf{x^\alpha}$ ⋯ $\alpha = \beta \to \eta$, $Q::\beta$, $(x\ Q)::\eta$,
  - $\lambda y.P::\alpha = \beta \to \eta$, $y::\beta$, $P::\eta$
  - stupeň (x Q) = stupeň α = stupeň (β →η)
  - stupeň ((λy.P) Q) = stupeň (λy.P) = stupeň α = stupeň (β →η)

# Type checking vs. inference

```
data LExp = LAMBDA String LExp |
            ID String |
            APL LExp LExp |
            CON String | CN Integer
            deriving(Show, Read, Eq)

data Type =
            TInteger |
            Tvar Integer |
            Type :→ Type
            deriving(Show, Read, Eq)
```

**checkType :: LExp → Type → Bool**

Problém (rozhodnuteľný):

- checkType (A B) $T_2$ = checkType A ($T_1$→$T_2$) && checkType B $T_1$
- nevieme, ako uhádnuť typ $T_1$ ???

**typeInference :: LExp → Maybe Type = (Just Type | Nothing)**

Problém (rozhodnuteľný) :

- inferType (λx.M) = $T_1$ → (inferType M)
- ako zistiť typ premennej x viazanej v λ-abstrakcii, teda $T_1$ ???

**inhabitation :: Type → Maybe LExp = (Just LExp | Nothing)**

Problém (rozhodnuteľný) :

- ako zistiť term M predpísaného typu ?

# Anotácie premenných

(typovaný λ-kalkul podľa Churcha)

```
data LExp = LAMBDA String Type LExp |
            ID String |
            APL LExp LExp |
            CON String | CN Integer
            deriving(Show, Read, Eq)

data Type = TInteger |
            Type :→ Type
            deriving(Show, Read, Eq)
```

Termy

t ::= x | λx:α.t | (t t) | n | +

- ak $x:T_1$, $M:T_2$, potom $(\lambda x:T_1.M): T_1 \rightarrow T_2$

```
type Context = [(String, Type)]                    -- premenná a jej typ
inferType :: Context → LExp → Maybe Type

inferType ctx (ID var) = lookup var ctx            -- [VAR]

inferType ctx (APL m n) = t2 where                 -- [APPL]
    t1 :→ t2 = inferType ctx m     -- môže výjsť Nothing, potom propaguj
    t3 = inferType ctx n           -- Nothing aj do výsledku
    {t1 == t3}                     -- tieto dva typy musia byť rovnaké

inferType ctx (LAMBDA x t1 m) = t1 :→ inferType ((x,t1):ctx) m    -- [ABS]
```

Tento kód nie je v Haskelli, len ilustruje ideu

# Typovaný λ-kalkul podľa Churcha

(axiom) $\Gamma \vdash x : \sigma,$ if $(x{:}\sigma) \in \Gamma;$

(→-elimination) $$\frac{\Gamma \vdash M : (\sigma \to \tau) \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M N) : \tau};$$

(→-introduction) $$\frac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}\sigma . M) : (\sigma \to \tau)}.$$

$\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash x:\alpha$ [VAR]

$$\frac{\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash N:\beta}{\Gamma \vdash (\lambda x\underline{:\alpha}.N):\alpha\to\beta}$$ [ABS]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\alpha\to\beta,\ \Gamma \vdash N:\alpha}{\Gamma \vdash (M\ N):\beta}$$ [APPL]

http://plato.stanford.edu/entries/type-theory-church/

# Typovaný λ-kalkul Church vs. Curry

Nech |M| je term M bez typových anotácií, t.j. zobrazenie $\text{Church}_\lambda \rightarrow \text{Curry}_\lambda$

- Ak $\Gamma \vdash M{:}\alpha$ podľa Church, potom $\Gamma \vdash |M|{:}\alpha$ podľa Curry.
- Ak $\Gamma \vdash M{:}\alpha$ podľa Curry, potom existuje anotovaný M′ taký, že
  - $\Gamma \vdash M'{:}\alpha$ podľa Church,
  - $|M'| = M$.

# Typové premenné

(typovaný λ-kalkul podľa Curry)

```
data LExp = LAMBDA String LExp |
            ID String |
            APL LExp LExp |
            CON String | CN Integer
            deriving(Show, Read, Eq)
data Type = TInteger |
             Tvar Integer |
             Type :→ Type
            deriving(Show, Read, Eq)
```

- ak nepoznáme konkrétny typ, zavedieme typovú premennú,
- algoritmus zozbiera podmienky (rovnosti) pre typové premenné,
- ak máme šťastie, podarí sa nám ich vyriešiť,
- typové premenné: α, β, δ, η, δ, ε, θ budeme radšej indexovať

```
type Constraints = [(Type,Type)]                    -- zoznam rovností, eqs
inferType :: Context->LExp->Constraints-> (Type, Constraints)

inferType ctx (APL m n) eqs = (t2, {t1 = t3}:eqs'') where          -- [APL]
                              (t3→t2, eqs') = inferType ctx m eqs
                              (t1, eqs'') = inferType ctx n eqs'
inferType ctx (LAMBDA x m) eqs = (t1→t2, eqs')                     -- [ABS]
                              -- t1 je nová typová premenná
                              where (t2,eqs') = inferType ((x,t1):ctx) m eqs

inferType ctx (ID var) eqs = lookup var ctx, eqs                   -- [VAR]
```

Dostaneme sústavu rovníc, ktorú riešime …

# Inferencia typu – príklad

λf.λa.λb.λc. ((c (f a)) (f b)):T, Ø, Ø

((c (f a)) (f b)):T4, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {T=T0→T1→T2→T3→T4}
(c (f a)):T5, (f b):T6, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {T=T0→T1→T2→T3→T4, T5=T6→T4}
c:T3, (f a):T8, (f b):T6, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {T=T0→T1→T2→T3→T4, T5=T6→T4, T3=T8→T5}
c:T3, f:T0, a:T1, f:T0, b:T2, f:T0, a:T1, b:T2, c:T3, {T=T0→T1→T2→T3→T4, T5=T6→T4, T3=T8→T5, T0=T1→T8, T0=T2→T6}

Sústava rovníc:

{T=T0→T1→T2→T3→T4, T5=T6→T4, T3=T8→T5, T0=T1→T8, T0=T2→T6}

{T=T0→T1→T2→T3→T4, T5=T6→T4, T3=T8→T5, T0=T1→T8, T2=T1, T8=T6}

Riešenie:

T=T0→T1→T2→T3→T4 =(T1→T8)→T1→T1→(T8→T5)→T4=

(T1→T8)→T1→T1→(T8→T8→T4) →T4

Domáca úloha 1:

inferType :: [(LExp,Type)]->Context->Constraint->Int->Constraint

# Inferencia typu – príklad 2

$\underline{\lambda xyz.(xz)(yz)}:T,\ \emptyset,\ \emptyset$

$\underline{\lambda yz.(xz)(yz)}:T2,\ x:T1,\ \{T=T1\rightarrow T2\}$

$\underline{\lambda z.(xz)(yz)}:T4,\ y:T3,\ x:T1,\ \{T=T1\rightarrow T2,\ T2=T3\rightarrow T4\}$

$\underline{(xz)(yz)}:T6,\ z:T5,\ y:T3,\ x:T1,\ \{T=T1\rightarrow T2,\ T2=T3\rightarrow T4,\ T4=T5\rightarrow T6\}$

$\underline{(xz)}:T7,\ (yz):T8,\ z:T5,\ y:T3,\ x:T1,\ \{T=T1\rightarrow T2,\ T2=T3\rightarrow T4,\ T4=T5\rightarrow T6,\ T7=T8\rightarrow T6\}$

$x:T9,\ z:T10,\ \underline{(yz)}:T8,\ z:T5,\ y:T3,\ x:T1,\ \{T=T1\rightarrow T2,\ T2=T3\rightarrow T4,\ T4=T5\rightarrow T6,\ T7=T8\rightarrow T6, T9=T10\rightarrow T7,\ T9=T1,\ T10=T5\}$

$y:T11,\ z:T12,\ z:T5,\ y:T3,\ x:T1,\ \{T=T1\rightarrow T2,\ T2=T3\rightarrow T4,\ T4=T5\rightarrow T6,\ T7=T8\rightarrow T6, T9=T10\rightarrow T7,\ T9=T1,\ T10=T5,\ T11=T12\rightarrow T8,\ T11=T3,\ T12=T5\}$

Sústava rovníc:

$\{T=T1\rightarrow T2,\ T2=T3\rightarrow T4,\ T4=T5\rightarrow T6,\ T7=T8\rightarrow T6, T9=T10\rightarrow T7,\ T9=T1,\ T10=T5,\ T11=T12\rightarrow T8, T11=T3,\ T12=T5\}$

$\{T=T1\rightarrow T2,\ T2=T3\rightarrow T4,\ T4=T5\rightarrow T6,\ T7=T8\rightarrow T6,\ T1=T5\rightarrow T7,\ T3=T5\rightarrow T8\}$

Riešenie:

$T=T1\rightarrow T2=T1\rightarrow (T3\rightarrow T4)=T1\rightarrow (T3\rightarrow (T5\rightarrow T6)= (T5\rightarrow T8\rightarrow T6)\rightarrow (T5\rightarrow T8)\rightarrow T5\rightarrow T6$

# Inferencia typu – príklad 3

Y = $\underline{\lambda f.(\lambda x.\ f(x\ x))\ (\lambda x.\ f(x\ x))}$:T, Ø, Ø

$\underline{(\lambda x.\ f(x\ x))\ (\lambda x.\ f(x\ x))}$:T2, f:T1, {T=T1→T2}

$\underline{(\lambda x.\ f(x\ x)):T3}$, (λx. f(x x)):T4, f:T1, {T=T1→T2 , T3=T4→T2}

$\underline{(f(x\ x)):T6}$, (λx. f(x x):T4, f:T1,x:T5, {T=T1→T2 ,
T3=T4→T2,T3=T5→T6}

$\underline{(x\ x):T7}$, (λx. f(x x):T4, f:T1,x:T5, {T=T1→T2 , T3=T4→T2,T3=T5→T6,
T1=T7→T6}

(λx. f(x x):T4, f:T1,x:T5, {T=T1→T2 , T3=T4→T2,T3=T5→T6,
T1=T7→T6,**T5=T5**→**T7**}

# Unifikácia

- unifikácia je spôsob riešenia rovníc v rôznych teóriach
- najjednoduchším prípadom je syntaktická (prázdna, či Herbrandova teória)
- v našom prípade je problém zredukovaný na jediný funkčný symbol →

https://en.wikipedia.org/wiki/Unification_(computer_science)#Syntactic_unification_of_first-order_terms

Unifikácia v syntaktickej teórii:

Termy $t_1$ a $t_2$ sú **unifikovateľné**, ak existuje substitúcia Θ, že $t_1 \Theta = t_2 \Theta$

Θ sa nazýva **unifikátorom**

**Príklad**:

X = f(a, Y) sú unifikovateľné, lebo napr. Θ = {X/f(a,b), Y/b}

Θ sa nazýva **najvšeobecnejším** unifikátorom, ak každý iný η unifikátor je jeho inštanciou, teda $\eta = \Theta \circ \psi$

Pre X = f(a, Y) je **najvšeobecnejší** Θ = {X/f(a,Y)}

V syntaktickej teórii/Herbrandove Univerzum najvšeobecnejší, ak existuje, je jednoznačne určený až na premenovanie premenných.

# Unifikácia algoritmický problém

https://www.researchgate.net/publication/221562903_Comparing_Unification_Algorithms_in_First-Order_Theorem_Proving

| | čas | pamäť |
|---|---|---|
| Robinson, 1965 | $exp(n)$ | $exp(n)$ |
| Boyer,Moore, 1972 | $exp(n)$ | $O(n)$ |
| Corbina,Bidoit, 1983 | $O(n^2)$ | $O(n)$ |
| Ružička,Prívara, 1989 | $O(n.\alpha(n))$ | $O(n)$ |
| Martelli,Montanari, 1982 | $O(n+m.\alpha(m))$ | $O(n)$ |
| Huet, 1973 | $O(n.\alpha(n))$ | $O(n)$ |
| Patterson,Wegman, 1978 | $O(n)$ | $O(n)$ |

https://core.ac.uk/download/pdf/82682021.pdf

# Dnes

- inferType nám vypľuje sústavu typových rovníc
- prejdeme exponencialny unifikačný algo
- nakódime si ho
- pochopíme, aký to ma súvis s typovými rovnicami
- DU8 – zverejníme po Midterme

ideový vrchol (neprogramujete :)

- Curry-Howardov izomorfizmus
- zložitejšie typovacie systémy (Hindley-Millner a F2)

Midterm (programujete, dnes do 24:00)

# Unifikácia

$f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n), C \quad =» \quad t_1=s_1, \ldots, t_n=s_n, C$
$f(t_1, \ldots, t_n) = g(s_1, \ldots, s_m), C \quad =» \quad FAIL, C$
$x=t, C \quad =» \quad x=t, C[x:t]$ if $x \notin t$ [OCCUR CHECK]
$x=t, C \quad =» \quad FAIL$ if $x \in t$
$x=x, C \quad =» \quad C$

f(a, g(Y)) = f(Y,Z) =» a = Y, g(Y) = Z =» Y = a, g(a) = Z
f(X,X) = f(Y,g(Y)) =» X=Y, X = g(Y) =» X=Y, Y = g(Y) =» FAIL

!!! tento naivný algoritmus je exponenciálny (generuje exponenciálny výstup)
Príklad:
Vstup: { $t_1=g(t_2, t_2), t_2=g(t_3, t_3), t_3=g(t, t)$ }
Riešenie:
SUBSTITÚCIA: $t_1=g(t_2, t_2), t_2=g(g(t, t), g(t, t)), t_3=g(t, t)$
dtto: $t_1=g(g(g(t, t), g(t, t)), g(g(t, t), g(t, t))), t_2=g(g(t, t), g(t, t)), t_3=g(t, t)$

Ak zovšeobecníme vstup pre $t_1..t_n$, výsledok bude exponenciálny od dĺžky vstupu

# Unifikácia2

**Príklad**:
$X = f(X)$ nie sú unifikovateľné, a $\Theta = \{X/f(X)\}$ nie je unifikátor, lebo

$X\Theta = f(X)$ != $f(X)\Theta = f(f(X))$

a nie, ako by sa zdalo, že

$X\Theta = f(f(f(f(.....))))$ == $f(X)\Theta = f(f(f(f(.....))))$

A v algoritme to zachráni occur check
$x=t, C$ =» FAIL if $x \in t$

ale v naivnej implementácii occur check robí z lineárneho algoritmu kvadratický.
Preto mnoho nástrojov (Prolog) neimplementuje korektne unifikáciu, aby ostali lineárny

# Teórie

Riešte rovnice

- X+3 = 5 má riešenie, lebo interpretujeme funkčné symboly

  tušíte, že interpretácia + hovorí, že 2+3 je 5

Syntaktická/prázdna teória (Herbrandova) neinterpretuje symboly

x □ 3 = 5 nemá riešenie, lebo nikto netuší (interpretáciu □ )

a □ X = Y □ b má riešenie aj v prázdnej teórii, Y = a, X = b

Typové rovnice sú teória s jediným funkčným symbolom →

T8 = T3 → T7 =» substituuj

T8 = T8 → T7, T8 = T2 → T8, =» FAIL

T5 → T2= T3 → T7, =» DECOMPOSE, T5=T3, T2=T7

Komutatívna teória – nevieme, čo □ robí, ale vieme, že je komutatívne

a □ X = Y □ Z má 2 riešenia Y = a, X = Z Z = a, X = Y

# Unifikácia

- type Constraints = [(Type,Type)]                -- [(Type=Type)]
- unify :: Constraints→ Constraints

unify []  = []                -- Just []
unify ( (S=T) : C′)
  | S == T = unify C′
  | S == $t_i$ && not($t_i \in$ T)        = unify(C′[$t_i$:T]) ++ [$t_i$=T]
  | $t_i$ == T && not($t_i \in$ S)        = unify(C′[$t_i$:S]) ++ [$t_i$=S]
  | S == ($S_1 \rightarrow S_2$) and T == ($T_1 \rightarrow T_2$) = unify( ($S_1=T_1$):($S_2=T_2$):C′ )
  | otherwise        = fail        -- Nothing

- unify :: Constraints→Maybe Constraints

  | S == $t_i$ && not($t_i \in$ Free(T))     = Just ([$t_i$=T] : subst) where
        Just subst = unify(C′[$t_i$:T])

type Maybe t = Just t | Nothing
Just [], Just [(T0, T1), (T1,(T2->T3))], Nothing :: Maybe Constraints

# Hlavné funkcie
## (návrh pre domácu úlohu)

So signatúrou:

```
data Type          = TVar Int | TApl Type Type deriving (Eq)
type Constraint    = (Type,Type)           typová rovnica
type Constraints   = [Constraint]
```

postupne definujte funkcie:

```
contains          :: Type -> Int -> Bool   -- typ obsahuje typovú premennú
                                   -- potrebujete na occur check
substitute        :: Int -> Type -> Type -> Type
substitute'       :: Int -> Type -> Constraints -> Constraints
unify             :: Constraints -> Maybe Constraints
add2Maybe         :: Constraint -> Maybe Constraints -> Maybe Constraints
add2Maybe         :: a -> Maybe [a] -> Maybe [a]
```

# Domáca úloha

Domáca úloha 1: rozpracujte inferType do podoby

inferType :: [(LExp,Type)]->Context->Constraints->Int->Constraints

použitie: inferType lt = inferType [(lt,Tvar 0)] [] [] 1

Domáca úloha 2: rozpracujte unify do podoby

unify :: [(Type, Type)] -> Maybe Constraints ->Maybe Constraints

použitie: unify constraint = unify constraint (Just [])

Demonštrujte spoločne:

```
typeExp lt = case unify (inferType lt) (Just []) of
                  Just subst -> lookup (T 0) subst
                  Nothing -> Nothing
```

# Unifikácia

## (odstránenie substitúcie)

```
unify::(Type,Type)→Maybe Constraints →Maybe Constraints

unify (_,_) Nothing                  = Nothing
unify (a1→b1,a2→b2) subst            = subst2 where
                                            subst1 = unify (a1,a2) subst
                                            subst2 = unify (b1,b2) subst1
--dereferencia premennej miesto aplikacie substitúcie
unify (t_i,b) s@(Just subst)         = unify (a,b) s where a = deref t_i subst
unify (a,t_i) s@(Just subst)         = unify (a,b) s where b = deref t_i subst
--predpokladáme, že t_i je dereferencovaná a že platí occur check
unify (t_i,b) (Just subst)           = Just ((t_i,b):subst) if t_i not in b
unify (a,t_i) (Just subst)           = Just ((t_i,a):subst) if t_i not in b
– zabránenie vzniku cyklu medzi premennými
unify (t_i,t_j) s@(Just subst)       | i < j = Just ((t_i , t_j):subst)
                                     | j < i = Just ((t_j , t_i):subst)
                                     | otherwise s
– otherwise
unify (_,_) _                        = Nothing
```

# Typy a formule

- $K = (\lambda xy.x)^{\alpha\to\beta\to\alpha}$
- $S = \lambda xyz.xz(yz)^{(\delta\to\varepsilon\to\theta)\to(\delta\to\varepsilon)\to\delta\to\theta}$

Hilbertov axiomatický systém:

$A \to (B \to A)$

$((A \to (B\to C)) \to ((A\to B) \to(A\to C))$

Modus ponens:

$$\frac{A\to B \qquad A}{B}$$

Platí tu, že $A\to A$ ?

# Typy a formule

Hilbertov axiomatický systém:

Ax1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax2) $((A \rightarrow (B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\rightarrow B) \rightarrow(A\rightarrow C))$

Platí tu, že $A\rightarrow A$ ?

1) $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ je šikovne zvolená inštancia axiomy Ax1, teda platí...

2) $((A \rightarrow ((B \rightarrow A)\rightarrow A)) \rightarrow ((A\rightarrow(B \rightarrow A)) \rightarrow(A\rightarrow A))$ je inštancia axiomy Ax2, teda platí...

MP 1) a 2)

3) $((A\rightarrow(B \rightarrow A)) \rightarrow(A\rightarrow A))$

MP 3) a Ax1)

4) A -> A q.e.d.

$K = (\lambda xy.x)\alpha\to\beta\to\alpha$
$S = \lambda xyz.xz(yz)(\delta\to\varepsilon\to\theta)\to(\delta\to\varepsilon)\to\delta\to\theta$

# Curry-Howardov izomorfizmus

- S K K = I

$S:(\delta\to\varepsilon\to\theta)\to(\delta\to\varepsilon)\to(\delta\to\theta)$
$K:\alpha\to\beta\to\alpha$
$K:\varphi\to\psi\to\varphi$
---------------
$(\delta\to\varepsilon\to\theta)= (\alpha\to\beta\to\alpha)$

- $\delta= \alpha,\ \varepsilon=\beta$

$(\delta\to\varepsilon)=(\varphi\to\psi\to\varphi)$

- $\delta=\varphi,\ \varepsilon=\psi\to\varphi$

$\delta=\theta$

$S:(\delta\to(\psi\to\delta)\to\delta) \to (\delta\to(\psi\to\delta)) \to (\delta\to\delta)$
$K:(\delta\to(\psi\to\delta)\to\delta)$
$K:(\delta\to(\psi\to\delta))$

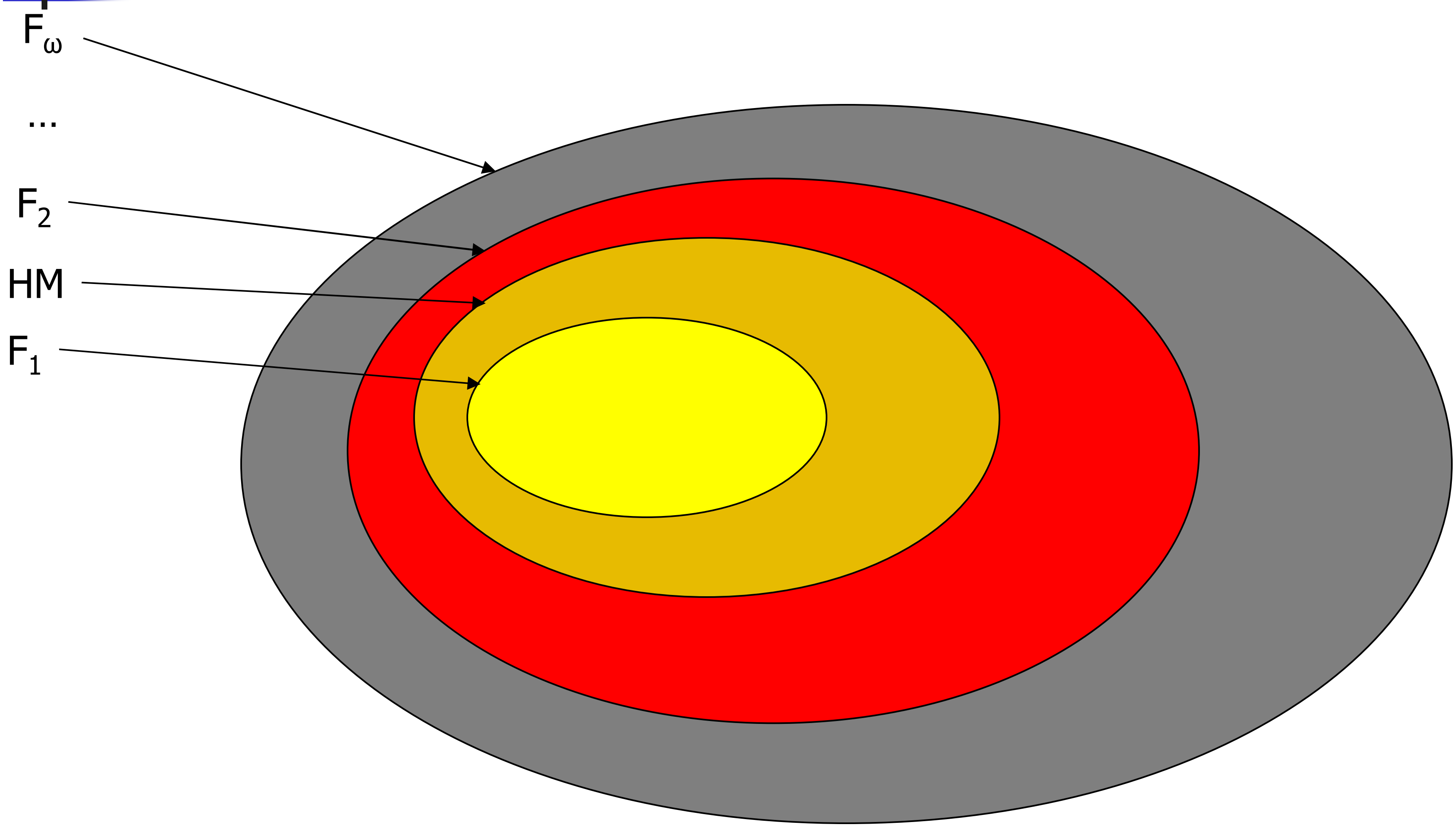
$K = (\lambda xy.x)\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha$
$S = \lambda xyz.xz(yz)(\delta\rightarrow\varepsilon\rightarrow\theta)\rightarrow(\delta\rightarrow\varepsilon)\rightarrow\delta\rightarrow\theta$

# Curry-Howardov izomorfizmus

$S{:}(\delta\rightarrow(\psi\rightarrow\delta)\rightarrow\delta) \rightarrow (\delta\rightarrow(\psi\rightarrow\delta)) \rightarrow (\delta\rightarrow\delta)$
$K{:}(\delta\rightarrow(\psi\rightarrow\delta)\rightarrow\delta)$
$K{:}(\delta\rightarrow(\psi\rightarrow\delta))$

$$\dfrac{\dfrac{S{:}(A\rightarrow(B\rightarrow A)\rightarrow A) \rightarrow (A\rightarrow(B\rightarrow A)) \rightarrow (A\rightarrow A) \quad K{:}(A\rightarrow(B\rightarrow A)\rightarrow A)}{(S\ K){:}(A\rightarrow(B\rightarrow A)) \rightarrow (A\rightarrow A)} \quad K{:}(A\rightarrow(B\rightarrow A))}{((S\ K)\ K){:}(A\rightarrow A)}$$

# Hierarchia



# Polymorfický (druhorádový) λ-kalkul, System $F_2$ (Girard-Reynold)

V jednoducho-typovanom λ-kalkule doménou premenných sú funkcie,
v druho-rádovom λ-kalkule doménou premenných sú typy:

Typ

$$\sigma ::= Int \mid \sigma \to \sigma \mid \alpha \mid \forall\alpha.\sigma$$

- všeobecne kvantifikovaný typ
- α je typová premenná
- v Haskelli, id :: $\alpha \to \alpha$

- $I = \lambda x.x : \forall\alpha.\alpha\to\alpha$
- NOT : $\forall\alpha.\alpha\to\alpha$
- K=TRUE = $(\lambda x.\lambda y.x) : \forall\alpha.\forall\beta.\alpha\to\beta\to\alpha$,
- FALSE = $(\lambda x.\lambda y.y) : \forall\alpha.\forall\beta.\alpha\to\beta\to\beta$
- $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}$ $(\lambda f.\lambda x.f(f\ x))$,… : $\forall\alpha.(\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$

Dôsledky:

- v takomto λ-kalkule vieme otypovať aj to, čo v $F_1$ nevieme (ω) ... uvidíme
- Typová inferencia v takomto kalkule (bez typových anotácií, Curry-style) je nerozhodnuteľný problém ☹, otvorený problém v čase 1970-1994
- I napriek tomu, teoretici študujú Martin-Löf hierarchiu: $F_1, F_2, F_3, \ldots \to F_\omega$
- dependent type (t:Type, t)

# System $F_2$

Typy

$$\sigma ::= Int \mid \sigma \rightarrow \sigma \mid \alpha \mid \forall\alpha.\sigma$$

$\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash x:\alpha$ [VAR]

$$\frac{\{x:\alpha\}:\Gamma \vdash N:\beta}{\Gamma \vdash (\lambda x.N):\alpha\rightarrow\beta}$$ [ABS]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\alpha\rightarrow\beta,\ \Gamma \vdash N:\alpha}{\Gamma \vdash (M\ N):\beta}$$ [APPL]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\beta}{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\beta}$$ [GEN] $\alpha$ not free in $\Gamma$

$$\frac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\beta}{\Gamma \vdash M:\beta[\alpha:\theta]}$$ [INST]

$\lambda x.x : \forall \alpha.\alpha\to\alpha$
AND : $\forall \alpha.\alpha\to\alpha\to\alpha$
$\underline{0},\underline{1},\underline{2},\ldots : \forall t.(t\to t)\to(t\to t)$

# Príklady v $F_2$

$\underline{\{x:\alpha\} \vdash x:\alpha}$ [VAR]
$\underline{\vdash (\lambda x.x):\alpha\to\alpha}$ [ABS]
$\underline{\vdash (\lambda x.x): \forall \alpha.\alpha\to\alpha}$ [GEN]
$\vdash (\lambda x.x): Int\to Int$ [INST]

$\underline{\{x:Int\} \vdash x:Int}$ [VAR]
$\vdash (\lambda x.x):Int\to Int$ [ABS]

$\underline{\{x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha}$ [VAR]
$\underline{\boldsymbol{\{x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:(\forall \beta.\beta\to\beta)\to(\forall \beta.\beta\to\beta)}}$ **[INST]** -- α nahradíme za $(\forall \beta.\beta\to\beta)$
$\underline{\{x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha}$ [VAR]
$\underline{\{x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash x:\forall \beta.\beta\to\beta}$ -- α nahradíme za β
$\underline{\{x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash (x\ x): \forall \beta.\beta\to\beta}$ [APP]
$\underline{\{x:\forall \alpha.\alpha\to\alpha\} \vdash (x\ x): \forall \alpha.\alpha\to\alpha}$ -- β nahradíme za α
$\vdash \lambda x.(x\ x):(\forall \alpha.\alpha\to\alpha)\to(\forall \alpha.\alpha\to\alpha)$ [ABS]

- podarilo sa otypovať výraz ω, ktorý v jednoducho-typovanom kalkule nejde
- dostali sme však typ $(\forall \alpha.\alpha\to\alpha)\to(\forall \alpha.\alpha\to\alpha)$, ktorý vnútri obsahuje kvantifikátory (deep type) na rozdiel od tých, čo ich majú len na najvyššej úrovni, napr. $\forall t.(t\to t)\to(t\to t)$ – shallow type

Typ v $F_2$
$\sigma ::= Int \mid \sigma \to \sigma \mid \alpha \mid \forall\alpha.\sigma$

# Let polymorfizmus Hindley-Millner

chceme zakázať kvantifikáciu typov vnútri typového výrazu:

- zakázať **deep types** $(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)\to(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)$, vnútri obsahuje kvantifikátory
- povoliť len **shallow types** $\forall\alpha.(\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha)$ na najvyššej úrovni

Typy (formalizácia):

$\sigma ::= \psi \mid \forall\alpha.\sigma$ -- polymorfné, generické...

$\psi ::= Int \mid \psi \to \psi \mid \alpha$ -- základné, funkčné a typová premenná

Haskell: premenná viazaná λ výrazom nemôže byť polymofrického typu, napr.
f (λx.x) where f = λg.[… (g 1) …. (g True) … ], alebo v Haskelli:

- idd = (\x->x)
- foo = f idd where f = \g->(if (**g True**) then (**g 2**) else (**g 1**))
- foo = let f g = (if (**g True**) then (**g 2**) else (**g 1**)) in f idd

Nahradíme pravidlo [GEN] pravidlom [LET]

$$\frac{\Gamma \vdash M:\beta, \quad \Gamma, x:\forall\alpha.\beta \vdash N:\delta}{\Gamma \vdash \text{let } x=M \text{ in } N : \delta}$$

[LET] α in β, α not free in Γ

# Rekurzia v systeme Hindley-Millner

- v takomto λ-kalkule vieme otypovať aj to, čo v $F_1$ nevieme (ω)

Máme $Y_\alpha$ pre každé α:

$Y_\alpha : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \alpha$

a pridáme pravidlo typovanej Y konverzie:

$(\ Y_\alpha\ \ e^{\alpha \to \alpha}\ )^\alpha \qquad \to_Y \qquad (e^{\alpha \to \alpha}(\ Y_\alpha\ \ e^{\alpha \to \alpha})^\alpha\ )^\alpha$

napr. pre faktorial:

$Y_{Int} : (Int \to Int) \to Int$

pravidlo typovanej $Y_{Int}$ konverzie:
$(\ Y_{Int}\ \ e^{Int \to Int}\ )^\alpha \quad \to_Y \qquad (e^{Int \to Int}(\ Y_{Int}\ \ e^{Int \to Int})^{Int}\ )^{Int}$

- http://dev.stephendiehl.com/fun/006_hindley_milner.html