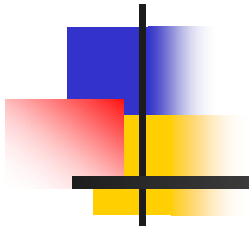
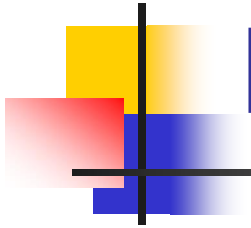


Úvod do λ-kalkulu

Peter Borovanský

I-18

http://dai.fmph.uniba.sk/courses/FPRO/



Lambda calculus

Štruktúra prednášok:

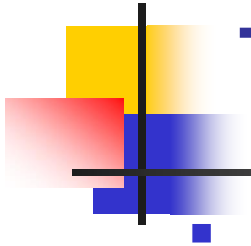
- úvod do syntaxe, netypovaný λ-kalkul (gramatika + konvencie)
- sémantika (redukčné pravidlá)
- programovací jazyk nad λ-kalkulom

domáca úloha: interpreter λ-kalkulu, ...

dnes nebude:

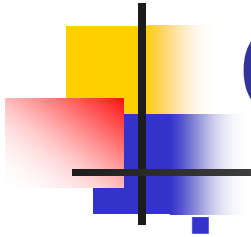
- rekurzia (pevný bod)
- vlastnosti teórie
- de Bruijn-ova notácia
- typovaný λ-kalkul

domáca úloha: typovač λ-kalkulu, ...



Trochu z histórie FP

- 1930, Alonso Church, lambda calculus
  - teoretický základ FP
  - kalkul funkcií: abstrakcia, aplikácia, kompozícia
  - Princeton: A.Church, A.Turing, J. von Neumann, K.Gödel - skúmajú formálne modely výpočtov
  - éra: WWII, prvý von Neumanovský počítač: Mark I (IBM), balistické tabuľky
- 1958, Haskell B.Curry, logika kombinátorov
  - alternatívny pohľad na funkcie, menej známy a populárny
  - „premenné vôbec nepotrebujeme"
- 1958, LISP, John McCarthy
  - implementácia lambda kalkulu na „von Neumanovskom HW"
- 1960, SECD (**S**tack-**E**nvironment-**C**ontrol-**D**ump) Machine, Landin
  - predchodca p-code, rôznych stack-orientovaných bajt-kódov, virtuálnych mašín.
  - SECD použili pri implementácii
    - Algol 60, PL/1 – predchodcu Pascalu
    - LISP – prvého funkcionálneho jazyka založenom na λ-kalkule



Od Haskellu k λ-kalkulu

- length [] = 0
- length (x:xs) = 1+length xs

> length [1,2,3,4,5]

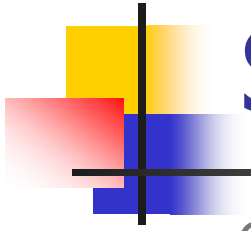
let length xs = if (null xs) then 0 else (1+length (tail xs)) **in** length [1,2,3,4,5]

let length xs = (if (null xs) 0 ((+) 1 (length (tail xs))))
in (length ((:) 1 ((:) 2 ((:) 3 ((:) 4 ((:) 5 []))))))

let length = λys.(if (null xs) 0 ((+) 1 (length (tail ys)))) in (length …

let length = (λf.λys.(if (null xs) 0 ((+) 1 (f (tail ys))))) length in (length …

let length = Y(λf.λys.(if (null xs) 0 ((+) 1 (f (tail ys))))) in (length …



Syntax

Celý program v jazyku pozostáva z jedného λ-termu.

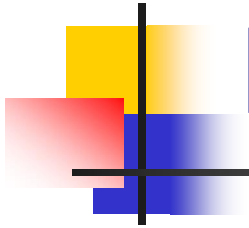
L je λ-term:

- x je premenná (spočítateľná množina premenných)

L ::= x | (L L) | (λx L)
L ::= x | L L | λx.L

- (L L) je aplikácia (funkcie)
- (λx L) je λ-abstrakcia definujúca funkciu s argumentom x a telom L

Cvičenie (na zamyslenie): syntax jazyka je veľmi jednoduchá, neporovnateľná napr. s Pascalom. Zamyslite sa nad tým, či existuje viac programov v Pascale alebo λ-termov.



Príklady λ-termov

- (λx x)
- (λx y)
- (λx (x x))
- ((λx (x x)) (λx (x x)))
- (λy (λx (x x)))

z týchto príkladov zatiaľ nie je evidentné, že to bude programovací jazyk.

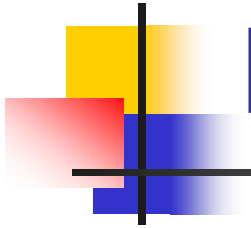
Syntaktické konvencie

- malé písmená označujú premenné: x, y, x_1, x_2, ...
- veľké písmená označujú λ-termy: M, N, ...
- vonkajšie zátvorky nepíšeme

- symbol . nahradzuje (, zodpovedajúca) chýba
  - (λx x) -> λx.x
  - (λx (x x)) -> λx.xx ale nie (λx.x)x
  - ((λx (x x)) (λx (x x))) -> (λx.xx)(λx.xx)

- vnorené abstrakcie majú asociativitu vpravo
  - (λy (λx (x x))) -> λy.λx.xx -> λyx.xx

- vnorené aplikácie majú asociativitu vľavo
  - (((λxyz.yz) a) b) c) -> (λxyz.yz)abc



Dôležité príklady termov

O ich dôležitosti sa dozvieme neskôr, keď budeme vedieť,
ako sa v tejto teórii počíta

- K = λxy.x = λx.λy.x (funkcia s dvomi argumentami, výsledkom je 1.)
- I = λx.x (identita)
- S = λxyz.(xz)(yz) = λxyz.((x z) (y z)) (S a b c = (a c) (b c))

- ω= λx.xx = λx (x x)
- Ω = ωω = (λx.x x)(λx.x x) = ((λx (x x)) (λx (x x)))
- ω_3 = λx.xxx = λx.(xx)x = (λx ((x x) x))

Výpočet

- na to, aby sme vedeli počítať v tejto teórii, potrebujeme definovať redukčné pravidlo(á), ktoré simuluje krok výpočtu,
- redukčné pravidlo je založené na pojme substitúcie, ktorú, ak pochopíme len intuitívne, dostaneme intuitívne zlé výsledky,
- preto sa vybudovaniu substitúcie treba chvíľku venovať s pomocnými pojmami, ako je voľná premenná, ...
- musíme sa presvedčiť, že redukčné pravidlo má rozumné vlastnosti, zamyslíme sa nad tým, čo je rozumné...
- výpočet je opakované aplikovanie redukčného pravidla, a to kdekoľvek to v terme ide. Keď to už nejde, máme výsledok (tzv. normálna forma)
- môže sa stať, že rôznym aplikovaním red.pravidla prídeme k rôznym výsledkom, resp. rôznym výpočtom ???

Voľná premenná, podterm

- voľná premenná λ-termu
  - Free(x) = x
  - Free(λx.M) = Free(M) – {x}
  - Free(M N) = Free(M) ∪ Free(N)

viazaná premenná λ-termu

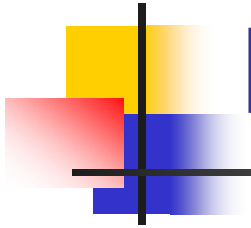
Bound(x) = {}
Bound(λx.M) = Bound(M) U {x}
Bound(M N) = Bound(M)∪Bound(N)

viazaná premenná a voľná premenná:

- λx.xy – y je voľná, x je viazaná

Bound(M) ∩ Free(M) =??? ∅

- podtermy λ-termu
  - Subt(x) = x
  - Subt(λx.M) = Subt(M) ∪ {λx.M}
  - Subt(M N) = Subt(M) ∪ Subt(N) ∪ { (M N) }



Príklady

- λx.λy.(x z)
  - x je viazaná,
  - z voľná,
  - y sa nenachádza v Subt(λx.λy.(x z))
- λx.((λy.y) (x (λy.y)))
  - má dva výskyty podtermu (λy.y)
- (x (y z)) $\in$ Subt((w (x (y z))))
  - ale (x (y z)) $\notin$ Subt(w x (y z)) = Subt(((w x) (y z))), lebo
  - Subt(w x (y z)) obsahuje tieto podtermy:
    - ((w x) (y z)), (w x), (y z), w, x, z, y
  - teda w x (y z) = (w x)(y z)

Substitúcia

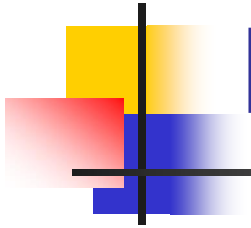
- ak sa na to ide naivne (alebo "textovo"):
  - (λx.zx)[z:y] -> λx.yx
  - (λy.zy)[z:y] -> λy.yy

Problém: rovnaké vstupy, rôzne výsledky – výrazy (λx.zx) a (λy.zy) *intuitívne* predstavujú rovnaké funkcie a po substitúcii [z:y] sú výsledky λx.yx a λy.yy *intuitívne* rôzne funkcie

- substitúcia N[x:M]

	x[x:M]	= M	
	y[x:M]	= y	
	(A B)[x:M]	= (A[x:M] B[x:M])	
	(λx.B)[x:M]	= (λx.B)	
	(λy.B)[x:M]	= λ z.(B[y:z][x:M]) ak **x∈Free(B), y∈Free(M)** ak z nie je voľné v B alebo M, z∉Free((B M)),x≠y	
inak	(λy.B)[x:M]	= λy.(B[x:M])	x≠y

- správne:(λy.zy)[z:y]->(λw.(zy)[y:w])[z:y]->(λw.(z w))[z:y] ->λw.yw

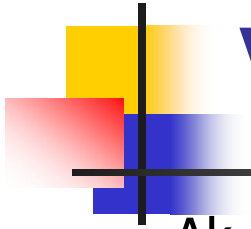


Príklady

naivne
(λx.zx)[z:y] ->
λx.yx
(λy.zy)[z:y] ->
λy.yy

- (λx.zx)[z:y] =
  - λx.((zx)[z:y]) =
  - λx.(z[z:y]x[z:y]) =
  - λx.(yx)

- (λy.zy)[z:y] =
  - (λw.(zy)[y:w])[z:y] = – treba si vymyslieť novú premennú
  - (λw.(z[y:w]y[y:w]))[z:y] =
  - (λw.(zw))[z:y] =
  - λw.(zw)[z:y] =
  - λw.(z[z:y]w[z:y]) =
  - λw.(yw)



Vlastnosti substitúcie

Ak premenná x nie je voľná v M, $x \notin Free(M)$, potom M[x:N] = M.
Dôkaz indukciou…

Ak $Free(M) = \emptyset$, M nazývame uzavretý výraz.
Dosledok: Uzavretý výraz sa aplikáciou substitúcie nezmení.
Lemma:

- $x \neq y$ sú rôzne premenné,
- x nie je voľná v L, $x \notin Free(L)$,
- ak každá viazaná premenná v M nie je voľná v (N L)
  $v \in Bound(M) \Rightarrow v \notin Free((N\ L))$,

potom

1. M[x:N] [y:L] = M[y:L][x:N[y:L]]
2. M[y:N] [y:L] = M[y:N[y:L]]

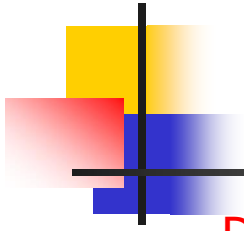
1) M[x:N] [y:L] = M[y:L][x:N[y:L]]

Predpoklady:
$x \neq y$
$x \notin Free(L)$,
$v \in Bound(M) \Rightarrow v \notin Free((N\ L))$

Indukciou vzhľadom na M:

- M je premenná
  - M = x, obe strany sú N[y:L]
  - M = y, obe strany sú L, lebo x nie je voľná v L,
  - M = z, rôzna premenná od x,y, potom obe strany sú z.
- M =(λz.Q)
  - z = x, obe strany sú (λx.(Q[y:L]))
  - z = y, obe strany sú (λy.(Q[x:N])), lebo y nie je voľná v (N L), takže ani N
  - z je rôzne od x,y, potom, podľa predpokladu, z nie je voľná v N ani L

    (λz.Q)[x:N] [y:L] =
    λz.(Q[x:N]) [y:L] =
    λz.(Q[x:N][y:L]) = … indukcia
    λz.(Q[y:L][x:N[y:L]]) =
    (λz.Q)[y:L][x:N[y:L]].
- M =(Q R), no problem, indukciou na Q a R...



2) M[y:N] [y:L] = M[y:N[y:L]]

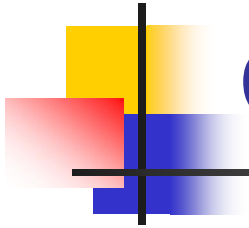
Domáca úloha:

podobne dokážte tvrdenie 2) predchádzajúcej lemmy.

Domáca úloha:

za akých podmienok (najslabších) platí, navrhnite a zdôvodnite, dokážte...

- M[x:N] [y:L] = M[y:L][x:N]
- M[x:y] [y:N] = M[x:N]
- M[x:y] [y:x] = M

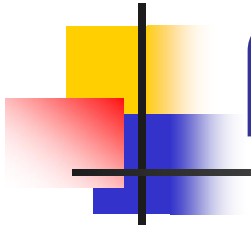


α-konverzia

$$\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M[x:y]$$

- $\lambda x.M$ je premenovaním viazanej premennej $\lambda y.M[x:y]$, ak y nie je voľná v M
- $=_\alpha$ je relácia ekvivalencie
- $=_\alpha$ kongruencia na λ termoch
- intuícia: výrazy, ktoré sa odlišujú menom viazanej premennej predstavujú rovnaké funkcie

K = λxy.x
I = λx.x
S = λxyz.xz(yz)



β-redukcia

$(\lambda\, x.B)\ E \rightarrow_\beta B[x:E]$

Príklad:

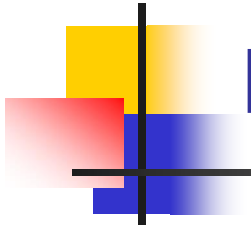
- I M = x
  - $(\lambda x.x)\ M \rightarrow_\beta x[x:M] = M$
- K M N = M
  - $(\lambda xy.x)MN \rightarrow_\beta (\lambda y.M)N \rightarrow_\beta M$
- S M N P = M P (N P)
  - $\lambda xyz.xz(yz)\ MNP \rightarrow^3_\beta MP(NP)$
- S K K = I
  - $\lambda xyz.\ ((xz)(yz))\ (\lambda xy.x)\ (\lambda xy.x) \rightarrow_\beta$
  - $\lambda yz.\ (\ ((\lambda xy.x)z)\ (yz)\ )\ (\lambda xy.x) \rightarrow_\beta$
  - $\lambda z.\ ((\lambda xy.x)z((\lambda xy.x)z)\ ) \rightarrow_\beta$
  - $\lambda z.\ ((\lambda y.z)((\lambda xy.x)z)\ ) \rightarrow_\beta$
  - $\lambda z.\ ((\lambda y.z)(\lambda y.z)) \rightarrow_\beta$
  - $\lambda z.z = I$

Vlastnosti β-redukcie

- $\omega = \lambda x.xx = \lambda x.(x\ x)$
- $\Omega = \omega\omega$
- $\omega_3 = \lambda x.((x\ x)\ x)$

- nekonečná sekvencia
  - $\Omega \rightarrow_\beta \Omega \rightarrow_\beta \Omega \rightarrow_\beta \ldots$
- puchnúca sekvencia
  - $\omega_3\ \omega_3 \rightarrow_\beta \omega_3\ \omega_3\ \omega_3 \rightarrow_\beta \omega_3\ \omega_3\ \omega_3\ \omega_3$
- nejednoznačný výsledok pre dva rôzne výpočty
  - $KI\Omega \rightarrow_\beta I$ ale aj
  - $KI\Omega \rightarrow_\beta KI\Omega \rightarrow_\beta KI\Omega \rightarrow_\beta \ldots$

Cvičenie: overte si tieto tvrdenia,
Pokúste sa nájsť λ term, ktorý vedie k rôznym výsledkom ☺

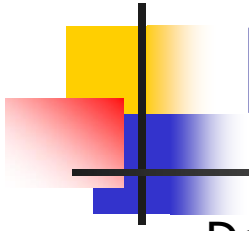


η-redukcia

- $\lambda\, x.(B\ x) \rightarrow_{\eta} B$ ak $x \notin Free(B)$

podmienka je podstatná, lebo ak napr. B=x, teda $x \in Free(B)$, $\lambda x.(x\ x) \neq x$

- $\rightarrow_{\beta\eta}$ je uzáver $\rightarrow_{\beta} \cup \rightarrow_{\eta}$ vzhľadom na podtermy, čo znamená
  - ak $M \rightarrow_{\beta} N$ alebo $M \rightarrow_{\eta} N$, potom $M \rightarrow_{\beta\eta} N$,
  - ak $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, potom $(P\ M) \rightarrow_{\beta\eta} (P\ N)$ aj $(M\ Q) \rightarrow_{\beta\eta} (N\ Q)$,
  - ak $M \rightarrow_{\beta\eta} N$, potom $\lambda x.M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x.N$.



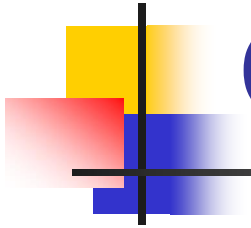
Domáca úloha

Definujte základné funkcie pre interpreter λ-kalkulu:

- free - zistí, či premenná je voľná
- subterm - vráti zoznam podtermov
- substitute - korektne implementuje substitúciu
- oneStepBetaReduce
- normalForm - opakuje redukciu, kým sa dá

navrhovaná reprezentácia (kľudne si zvoľte inú):

```
data LExp = LAMBDA String LExp |          – abstrakcia
            ID String |                   – premenná
            LExp [LExp] |                 – aplikácia, zovšeobecnená
            App LExp LExp |               – aplikácia
            CON String |                  – konštanta, built-in fcia
            CN Integer                    – int.konštanta
          deriving(Show, Read, Eq)
```



Cvičenie (použite váš tool)

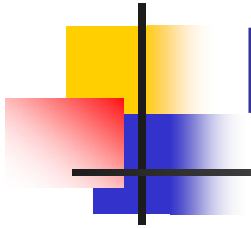
1) určite voľné a viazané premenné:

- (λx.x y) (λy.y)
- λx.λy.z (λz.z (λx.y))
- (λx.λy.x z (y z)) (λx.y (λy.y))

2) redukujte:

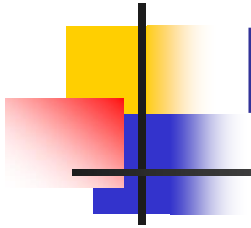
- (λx.λy.x (λz.y z)) (((λx. λy.y) 8) (λx.(λy.y) x))
- (λh.(λx.h (x x)) (λx.h (x x))) ((λa.λb.a) (+ 1 5))

3) Nech F = (λt.t t) (λf.λx.f (f x)).
Vyhodnoťte F succ 0, succ = λx. (+ x 1)



Riešenie (zle)

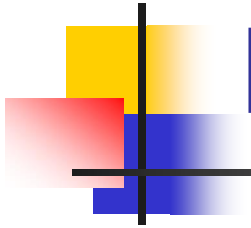
- (λx.λy.x (λz.y z)) (((λx. λy.y) 8) (λx.(λy.y) x)) ->$_\beta$
  - (λx.λy.x (λz.y z)) ((λy.y) (λx.(λy.y) x)) ->$_\beta$
  - (λx.λy.x (λz.y z)) ((λy.y) (λy.y)) ->$_\beta$
  - **(λx.λy.x (λz.y z))** (λy.y) ->$_\beta$
  - …(**λy.x)[x:(λz.y z)]** … **y∈Free(λz.y z)** , x:Free(x)
  - **λy.(λz.y z)** (λy.y) ->$_\beta$
  - (λz.(λy.y) z) ->$_\beta$
  - (λz.z) ->$_\beta$
  - I



Riešenie (dobre)

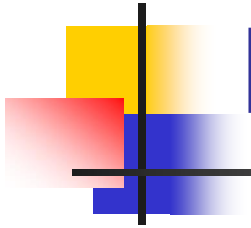
Nájdite pomocou vášho nástroja pre vyhodnocovanie λ-výrazov

- (λx.λy.(x ((λz.y) z))) (((λx. λv.v) 8) (λx.(λw.w) x)) ->$_\beta$
  - (λx.λy.(x ((λz.y) z))) ((λv.v) (λx.(λw.w) x)) ->$_\beta$
  - (λx.λy.(x ((λz.y) z))) ((λv.v) (λw.w)) ->$_\beta$
  - (λx.λy.(x ((λz.y) z))) (λv.v) ->$_\beta$
  - λy.((λv.v) ((λz.y) z)) ->$_\beta$
  - λy.(((λz.y) z)) ->$_\beta$
  - λy.y



Riešenie

- $(\lambda h.(\lambda x.h\ (x\ x))\ (\lambda x.h\ (x\ x)))\ ((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5)) \rightarrow_\beta$
  - $(\lambda x.((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5))\ (x\ x))\ (\lambda x.((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5))\ (x\ x)) \rightarrow_\beta$
  - $((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5))\ ($
    $(\lambda x.((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5))\ (x\ x))\ (\lambda x.((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5))\ (x\ x))) \rightarrow_\beta$
  - $(\lambda b.(+\ 1\ 5)\ ($
    $(\lambda x.((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5))\ (x\ x))\ (\lambda x.((\lambda a.\lambda b.a)\ (+\ 1\ 5))\ (x\ x))) \rightarrow_\beta$
  - $(+\ 1\ 5) \rightarrow_\beta$
  - 6



Domáca úloha (nepovinná)

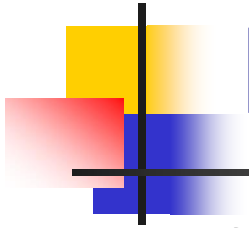
Pri práci s vašim interpretrom vám bude chýbať:

- vstup λ termu – funkcia fromString :: String -> LExp, ktorá vám vytvorí vnútornú reprezentáciu z textového reťazca, príklad:

  fromString "\x.xx" = (LAMBDA "x" (LExp [(Id "x"), (Id "x")]))

  takejto funkcii sa hovorí syntaktický analyzátor a musíte sa vysporiadať s problémom, keď je vstupný reťazec nekorektný

- výstup λ termu – funkcia toString :: LExp -> String, ktorá vám vytvorí textovú (čitateľnú) reprezentáciu pre λ term.

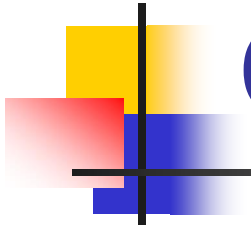


Fold na termoch

```
foldLambda lambda var apl con cn lterm
    | lterm == (LAMBDA str exp) =
                  lambda str (foldLambda lambda var apl con cn exp)
    | lterm == (VAR str) = var str
    | lterm == (APL exp1 exp2) =
                  apl      (foldLambda lambda var apl con cn exp1)
                           (foldLambda lambda var apl con cn exp2)
    | lterm == (CON str) = con str
    | lterm == (CN int) = cn int

vars = foldLambda (\x y->y) (\x->[x]) (++) (\_->[]) (\_->[])

show :: LExp -> String
show = foldLambda (\x y->"(\\"++x++"->"++y++")")
          (\x->x) (\x y->"("++x++" "++y++")") (\x->x) (\x->x)
```



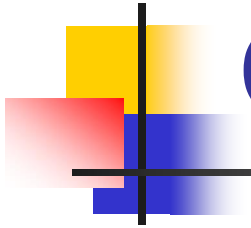
Od λ-termu k programu

Na to, aby sme vedeli v tomto jazyku programovať, potrebujeme:

- mať v ňom nejaké hodnoty, napr. aspoň int, bool, ...
- základné dátové typy, záznam (record, record-case), zoznam, ...
- if-then-else
- let, letrec, či where
- rekurziu

V ďalšom obohatíme λ-kalkul syntaktickými cukrovinkami tak, aby sme sa presvedčili, že sa v tom programovať naozaj dá.

Rekurzia pomocou operátora pevného bodu bude najnáročnejším klincom v tejto línii.



Churchove čísla

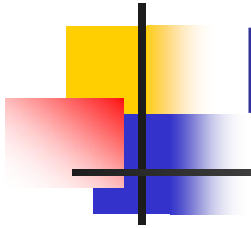
- *0* := λf.λx.x
- *1* := λf.λx.f x
- *2* := λf.λx.f (f x)
- *3* := λf.λx.f (f (f x))

. . . . .

$C(+1)\ 0 = c$

- succ := λn.λf.λx.f(n f x)
- plus := λm.λn.λf.λx. m f (n f x)

Domáca úloha (povinná):
•definujte mult,
•definujte 2^n, m^n ,
•definujte n-1



Logické hodnoty a operátory

TRUE := λx.λy. x := λxy.x
FALSE := λx.λy. y := λxy.y

AND := λx.λ.y. x y FALSE := λxy.x y FALSE
OR := λx.λy. x TRUE y := λxy.x TRUE y
NOT := λx. x FALSE TRUE
IFTHENELSE := λpxy. p x y

AND TRUE FALSE
≡ (λ p q. p q FALSE) TRUE FALSE →β TRUE FALSE FALSE
≡ (λ x y. x) FALSE FALSE →β FALSE

Cvičenie: definujte XOR

Kartézsky súčin typov (pár)

PAIR := λx.λy.λc. c x y := λxyc. c x y
LEFT := λx.x TRUE
RIGHT := λx.x FALSE

TRUE := λx.λy.x := λxy.x
FALSE := λx.λy.y := λxy.y

LEFT (PAIR A B) ≡
LEFT ((λxyc. c x y) A B) →β
LEFT (λc. c A B) →β
(λx.x TRUE) (λc. c A B) →β
(λc. c A B) (λxy.x) →β
((λxy.x) A B) →β A

Cvičenie: definujte n-ticu

Curry
λ(x,y).M -> λp. (λxλy.M) (LEFT p) (RIGHT p)

Súčet typov (disjunkcia)

A+B reprezentujeme ako pár [Bool x (A|B)]

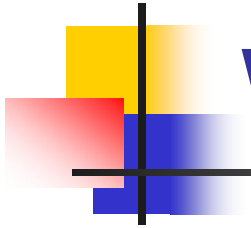
$1^{st} := \lambda x.PAIR\ TRUE\ x$	konštruktor pre	A
$2^{nd} := \lambda y.PAIR\ FALSE\ y$		B
$1^{st-1} := \lambda z.RIGHT\ z$	deštruktor pre	A
$2^{nd-1} := \lambda z.RIGHT\ z$		B
$?1^{st-1} := \lambda z.LEFT\ z$	test, či	A

$1^{st-1}\ 1^{st}\ A \equiv$

$(\lambda z.RIGHT\ z)\ (\lambda x.PAIR\ TRUE\ x)\ A \rightarrow_\beta$

$RIGHT\ (PAIR\ TRUE\ A) \rightarrow_\beta A$

Cvičenie: reprezentujte zoznam s konštruktormi Nil, Cons a funkciami isEmpty, head a tail



where (let, letrec)

M where v = N -> (λv.M) N

M where $v_1 = N_1$ -> $(\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n).M)\ (N_1, \ldots, N_n)$
$v_2 = N_2$ …
$v_n = N_n$

složený where

n*(x+n) where -> (λn. (λx.n*(x+n)) (4*n+1)) 3
n = 3
x = 4*n+1