Name: Felix Steiner Blatt: 07 Matrikelnummer: 3648256

Aufgabe 1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy^3 - 2x^3y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0 \end{cases}$$

(i)

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y)}{t}$$

$f(0,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$ da beim Zähler $x=0$ immer 0 ist.

Für $t \neq 0$ $\frac{f(t,y)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{2ty^3 - 2t^3y}{t^2+y^2} = \frac{2y^3 - 2t^2y}{t^2+y^2}$

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{2y^3 - 2t^2y}{t^2+y^2} = \frac{2y^3}{y^2} = 2y$$

0

0

0

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t}$$

$t \neq 0$

$$\frac{f(x,t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{2xt^3 - 2x^3t}{x^2+t^2} = \frac{2xt^2 - 2x^3}{x^2+t^2}$$

0

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{2xt^2 - 2x^3}{x^2+t^2} = \frac{-2x^3}{x^2} = -2x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

0

$\square$

(ii) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$(x,y) \neq (0,0)$ besteht f aus Polynomen die stetig sind.

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

existiert partielle Ableitung in $(0,0) = 0$

Stetigkeit der partiellen Ableitung in $(0,0)$

$$Z(x,y) = 2xy^3 - 2x^3y \qquad D(x,y) = x^2+y^2$$

Quotientenregel

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(\partial_x Z)D - Z(\partial_x D)}{D^2} = \frac{(2y^3 - 6x^2y)(x^2+y^2) - 2x(2xy^3 - 2x^3y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$\partial_x Z = 2y^3 - 6x^2y \in O(r^3)$

Z ist $O(r^4)$

$D = x^2+y^2 = r^2 \rightarrow \partial_x f(x,y) = O(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ somit gilt $\partial_x f(x,y) \to (0,0)$, $\partial_y f(x,y) = O(r)$, $\partial_y f(x,y) \to (0,0)$

partielle Ableitungen gibt es und sie sind in $(0,0)$ stetig wie auch überall anders. So gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

(iii)

aus teil (i) $\Rightarrow \partial_x f(0,y) = 2y$

Daraus folgt

$$\partial_y \partial_x f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\overset{2t}{\partial_x f(0,t)} - \overset{0}{\partial_x f(0,0)}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2t - 0}{t} = 2$$

aus teil (i) $\Rightarrow \partial_y f(x,0) = -2x$

Daraus folgt: $\partial_x \partial_y f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\overset{-2t}{\partial_y f(t,0)} - \overset{0}{\partial_y f(0,0)}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-2t}{t} = -2$

(iv) Es gilt $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$

Falls $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ so müssten alle zweiten partiellen Ableitungen insbesondere stetig in einer Umgebung von $(0,0)$ sein. Nach dem Satz von Schwarz gilt dann in $(0,0)$:

$$\partial_y \partial_x f(0,0) = \partial_x \partial_y f(0,0)$$

aber nach (iii) gilt dies nicht also ist $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$