

Задание 12. Минимальные остовные деревья. Динамическое программирование.

1[1] Постройте алгоритм, который находит максимальное остовное дерево графа, то есть остовное дерево максимального веса.

2[1] Верно ли, что дерево кратчайших путей, которое строит алгоритм Дейкстры, является минимальным остовным деревом?

3[3] На вход задачи подаётся неориентированный взвешенный граф $G(V, E)$ и подмножество вершин $U \subseteq V$. Необходимо построить остовное дерево, минимальное (по весу) среди деревьев, в которых все вершины U являются листьями (но могут быть и другие листья) или обнаружить, что таких остовных деревьев нет. Постройте алгоритм, который решает задачу за $O(|E| \log |V|)$. Обратите внимание, что искомое дерево может не быть минимальным остовным деревом.

4[2 + 3] Рассмотрим следующую игру. На доске нарисовано n палочек. Два игрока по очереди зачёркивают от одной до трёх палочек. Проигрывает тот, кто зачёркнул последнюю палочку.

1. Кто выигрывает при $n = 20$? (Считая, что соперник не ошибается.)
2. Кто выигрывает при произвольном n ?

5[3] Два игрока играют в следующую игру. На поле из $(N + 1) \times (N + 1)$ клеток (нумерация от 0 до N) в клетке $(0, 0)$ стоит фишка. Её разрешено двигать из клетки с координатами (x, y) в клетку с координатами $(x + a_i, y + b_i)$, где пары неотрицательных целых чисел (a_i, b_i) обговорены перед началом игры; при этом a_i и b_i не равны нулю одновременно. Выигрывает тот игрок, который первым вывел фишку в клетку, которая находится на расстоянии не менее чем R от $(0, 0)$. Необходимо определить, кто из игроков выигрывает при безошибочных действиях соперника. Игроки ходят по очереди, пропускать ход нельзя.

1. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию при безошибочной игре соперника, если $N = 5$, $R = 5$, а список допустимых ходов: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$.
2. Постройте алгоритм, который определяет победителя и его выигрышную стратегию в общем случае и оцените его сложность.