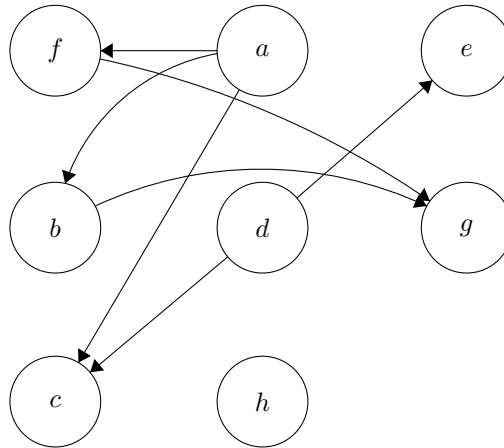
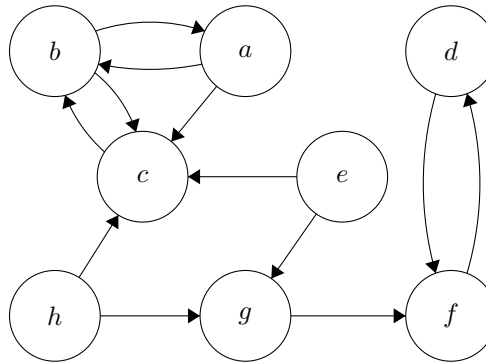


Задание 8. Обходы и кратчайшие пути в графах

1[2] Сделайте топологическую сортировку графа



2[2] Найдите конденсат графа



3[2 + 2] В графе G был проведён поиск в глубину. Время открытия и закрытия вершин сохранено в массивах d и f . Постройте алгоритм, который на основе этих массивов и описания графа проверяет, является ли ребро e графа G а) прямым ребром б) перекрёстным ребром.

Определения в главе про поиск в глубину в Кормене

4[1] Рассмотрим алгоритм Дейкстры с модификацией, в которой он сохраняет для каждой вершины предыдущую на кратчайшем пути в массиве предков $\pi[v]$. Докажите, что граф, состоящий из вершин исходного и ребер вида $\pi[v] \rightarrow v$, является деревом.

5[1 + 5] В государстве между n городами есть m односторонних дорог. Было решено разделить города государства на наименьшее количество областей так, чтобы внутри каждой области все города были достижимы друг из друга.

1. Предложите эффективный алгоритм, который осуществляет такое разделение, докажете его корректность и оцените асимптотику.

2. Государство решило добиться того, чтобы из каждого города можно было добраться до каждого. В силу бюджетных ограничений было решено построить минимальное число односторонних дорог (любой длины), необходимое для достижения этой цели. Предложите алгоритм, решающий задачу.

6[2] Вам нужно выбраться из лабиринта. Вы не знаете, сколько в нем комнат, и какая у него карта. По всем коридорам можно свободно перемещаться в обе стороны, все комнаты и коридоры выглядят одинаково (комнаты могут отличаться только количеством коридоров). Пусть m - количество коридоров между комнатами. Предложите алгоритм, который находит выход из лабиринта или доказывает, что его нет, за $O(m)$ переходов между комнатами. В вашем распоряжении имеется неограниченное количество монет, которые вы можете оставлять в комнатах. Минотавр мертв, так что в лабиринте больше никого.

7[3] Дан ориентированный граф на n вершинах ($V = 1, \dots, n$), который получен из графа-пути (рёбра которого ведут из вершины i в $i + 1$) добавлением ещё каких-то m данных ребер. Найдите количество сильно связанных компонент в этом графе за $O(m \log m)$.

8[2] На вход задачи поступает описание двудольного графа $G(L, R, E)$, степень каждой вершины которого равна двум. Необходимо найти максимальное паросочетание в G (которое содержит максимальное количество рёбер). Предложите алгоритм, решающий задачу за $O(|V| + |E|)$.