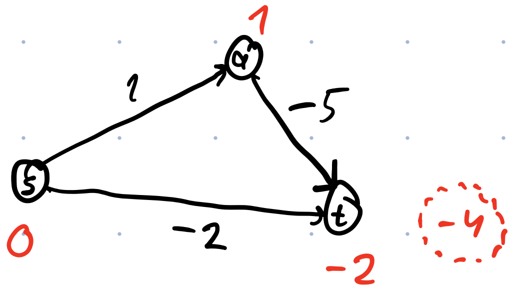
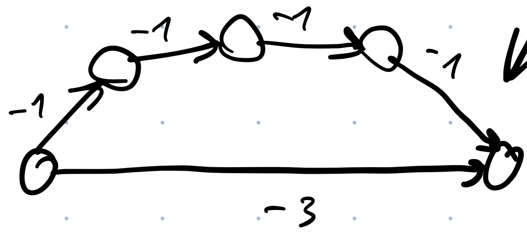
Дейкстра и отриц. веса





Контрпример;
прибавл. константу нельзя

Алгоритм Беллмана-Форда

single source shortest path

кратч. пути из одной вершины

алгоритм релаксации

relax (u, v)

d[u]
d[v]

$O(1)$

$d[v] = \min(d[v], d[u] + w_{uv})$

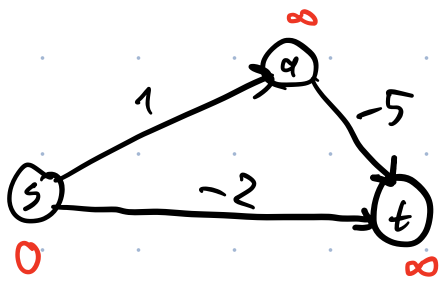
$\boxed{\begin{array}{l} \text{if } (d[u] + w_{uv} < d[v]): \\ \quad d[v] = d[u] + w_{uv} \\ \quad \pi[v] = u \end{array}}$

Алг.:

$\Theta(|V||E|)$

```
|V| - 1:
    for e in E:
        relax(e)
```

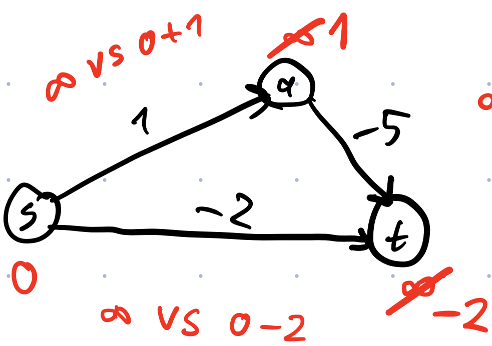
Пример:



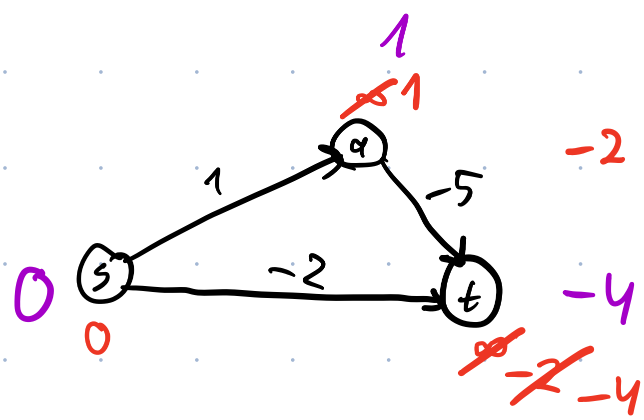
порядок релакс. рёбер

at, st, sa

$|V| - 1 = 3 - 1 = 2$

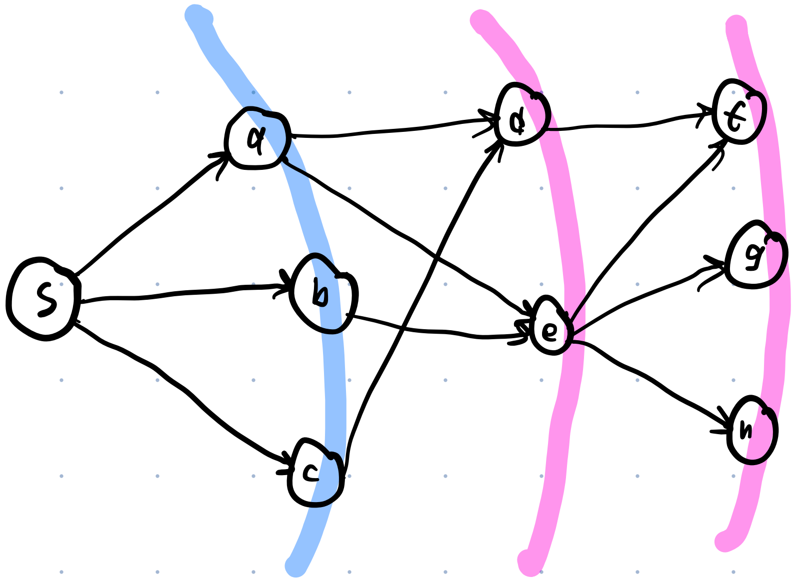


∞ vs ∞+(−5)

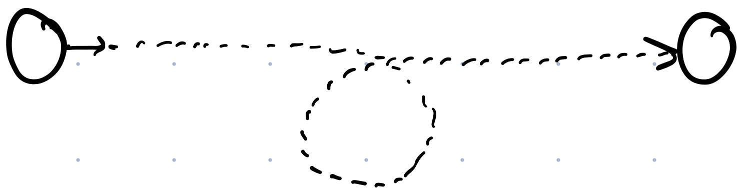


−2 vs 1+(−5)

−4



ЗА 1 ШАГ НАХОДИМ КР. ПУТИ ОТ ВЕРШ. s РЁБЕРНОЙ ДЛИНЫ ≤ 1

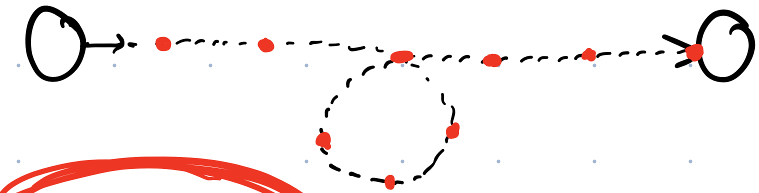


ЕСЛИ В ПУТИ $\ge |V|$ ВЕРШ., ОН СОДЕРЖИТ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ

ЕСЛИ НА ШАГЕ $|V|$ ПРОИЗОЙДЁТ ОБНОВЛЕНИЕ, В ГРАФЕ $\exists$ ОТР. ЦИКЛ

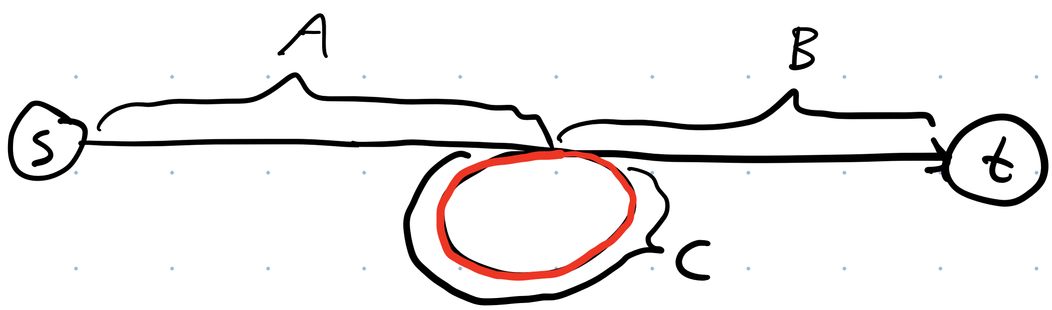
ПОСЛЕ k-Й ИТЕРАЦИИ ПОЛУЧАЕМ КР. ПУТИ ДЛИНЫ $\le k$.

$|V|-1$ ИТЕР. $\Rightarrow$ КР. П. ДЛ. $\le |V|-1$



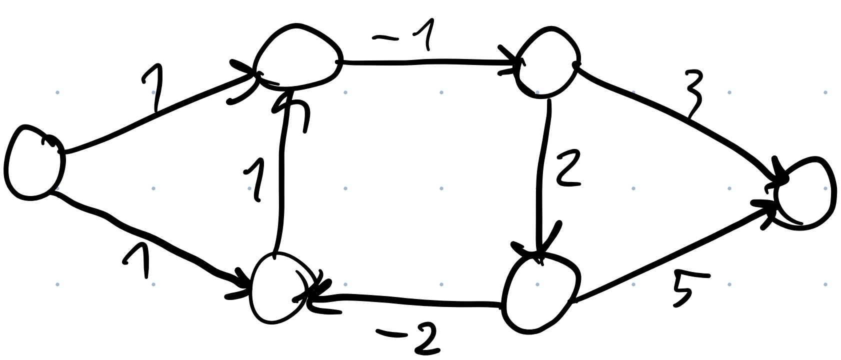
$|V|-1$

ШАГ N $|V|$; ПРОИЗОШЛО ОБН:



НАЙДЕН САМОПЕР. ПУТЬ КОРОЧЕ СЕБЯ БЕЗ САМОПЕР.

$$\cancel{len(A)} + \cancel{len(B)} > \cancel{len(A)} + \cancel{len(B)} + len(C)$$



ВАР. ХРАНЕНИЯ ГРАФА:

$E[u] = [a, b, c, \ldots]$ $\qquad$ $V = [a, b, c, \ldots, u]$

НАЗВ. ВЕРШ. В ВИДЕ СТРОКИ

dist

```
updated = False
for u in V:
    for v in E[u]:
```

$V = [a, b, c, \dots]$

$E[u] = [(v, 3), (a, 5), \dots]$

Алг. Б.- Ф.:

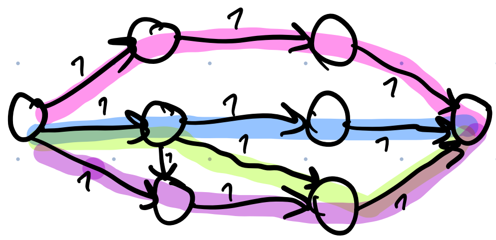
```
dist[s] = 0
dist[V\s] = +∞
updated = False
for i in range(len(V)):
    updated = False

    for u in V:
        for v, w in E[u]:
            if (d[u]+w < d[v]):
                d[v] = d[u]+w
                updated = True
```

```
if (updated == True):
    print("negative loop found")
```

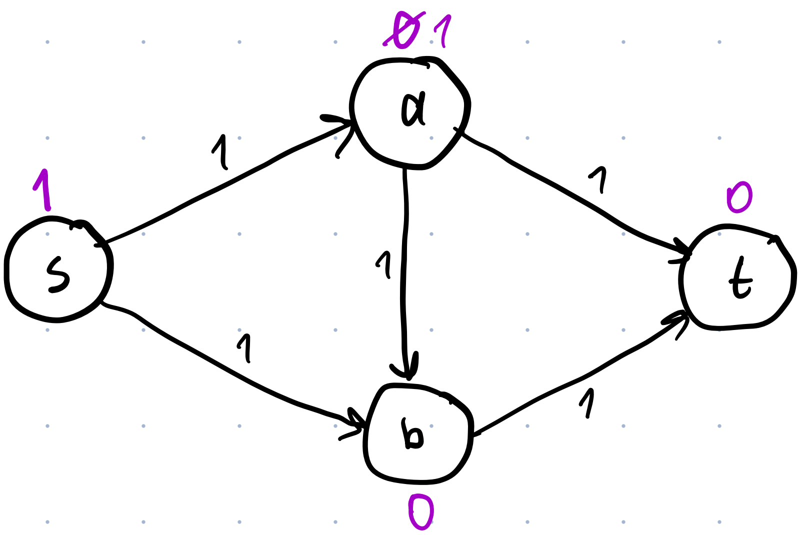
ЗАДАЧА.

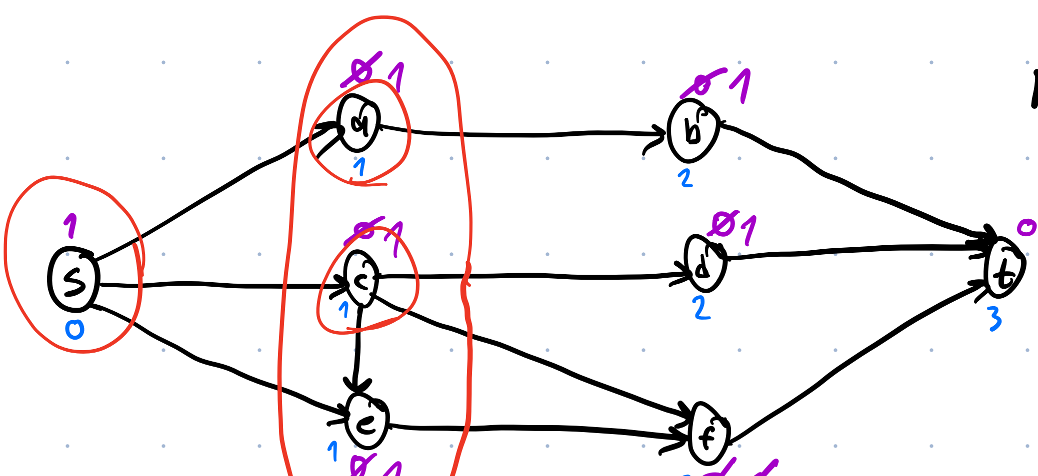
ГРАФ С ВЕСАМИ = 1

НАЙТИ КОЛ-ВО РАЗЛ. КР. ПУТЕЙ ИЗ s В t



4 КР. ПУТИ ДЛИНЫ 3





K = 3

АЛГОРИТМ РЕШ. ЗАДАЧИ

1. BFS $O(|E|+|V|)$ К-ДА КР. П. ИЗ s в t

   СОХР. ДЛЯ ВСЕХ ВЕРШ. КР. РАССТ. ИЗ s В НЕЁ

2. BFS ИЗ s

   В КАЖД. ВЕРШ. И ДЛЯ КАЖД. РЕБРА $e\,(u \to v)$

   ПРОВЕРЯЕМ $d[v] = d[u]+1$

   ЕСЛИ ДА, ТО

```
    paths_num[v] += paths_num[u]
else:
    pass
```

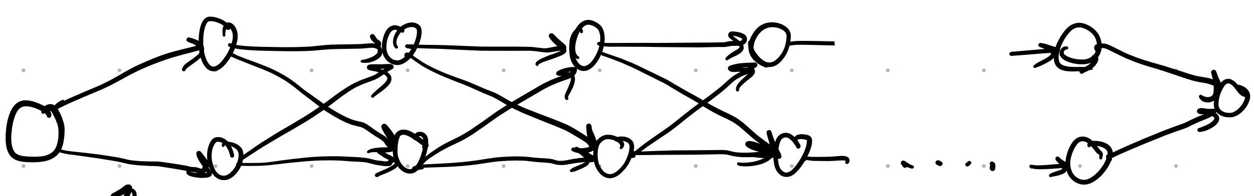
ЗАДАЧА.

$G=(V,E)$; s, t

ВЕС КАКОГО РЕБРА ЗАНУЛИТЬ, ЧТОБЫ МИНИМ. ДЛИНУ ПУТИ ИЗ s В t

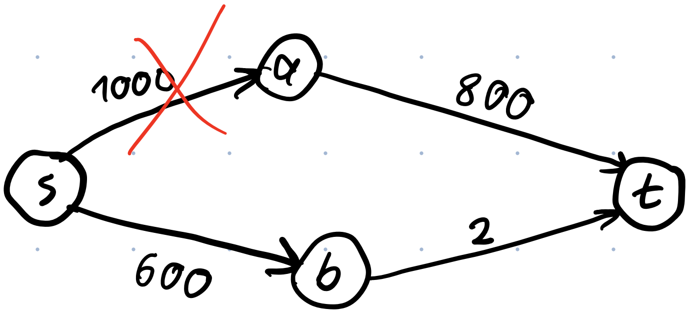
ВМЕСТО e_i

$$i^* = \arg\min_{i} d(s, t, G(V, [e_1, e_2, \dots, 0, e_{i+1}, \dots, e_{|E|}]))$$



Очень много различных кратч. путей

Вариант реш.



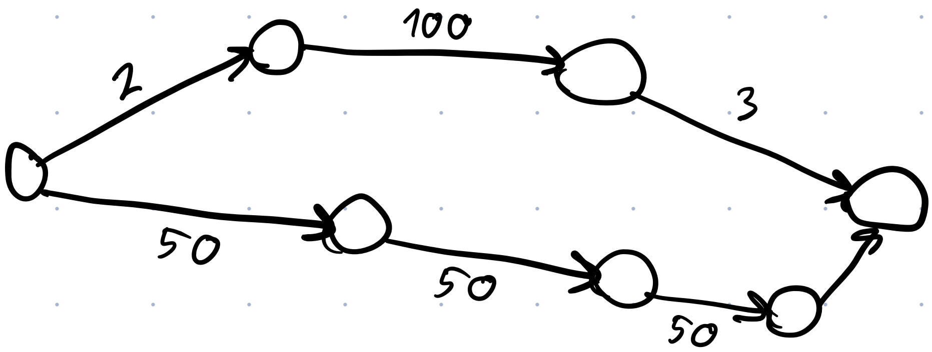
Кратч. путь не уменьшится

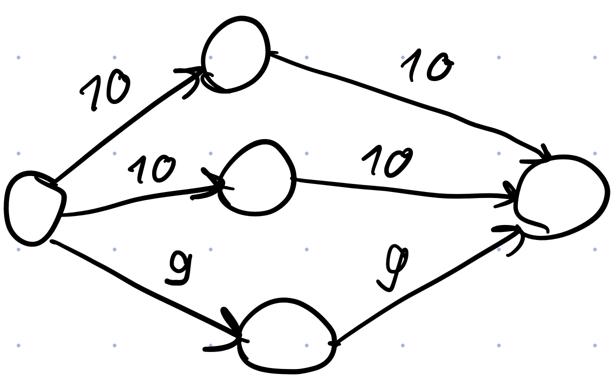
Есть решение перебором всех вар.;

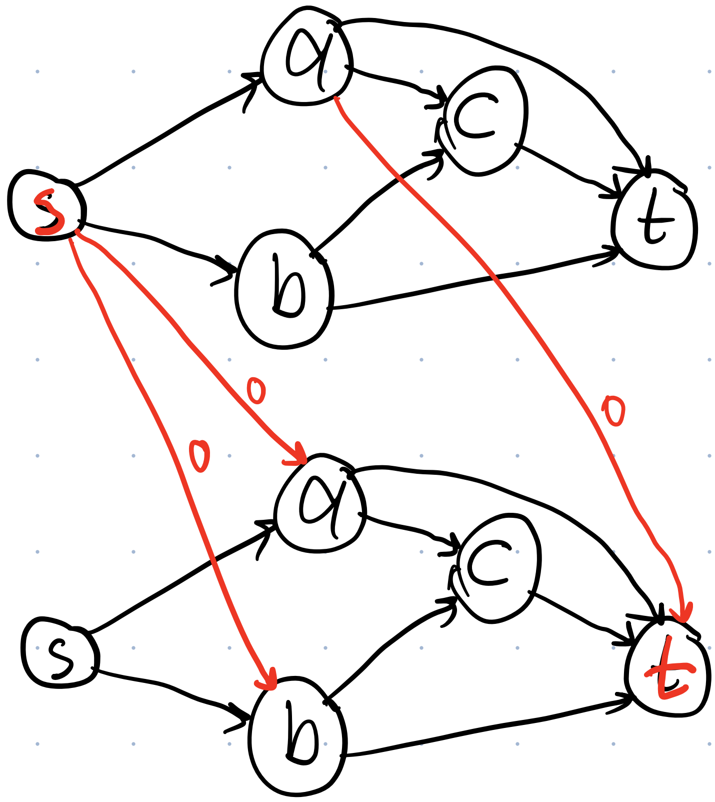
Работает, но долго:

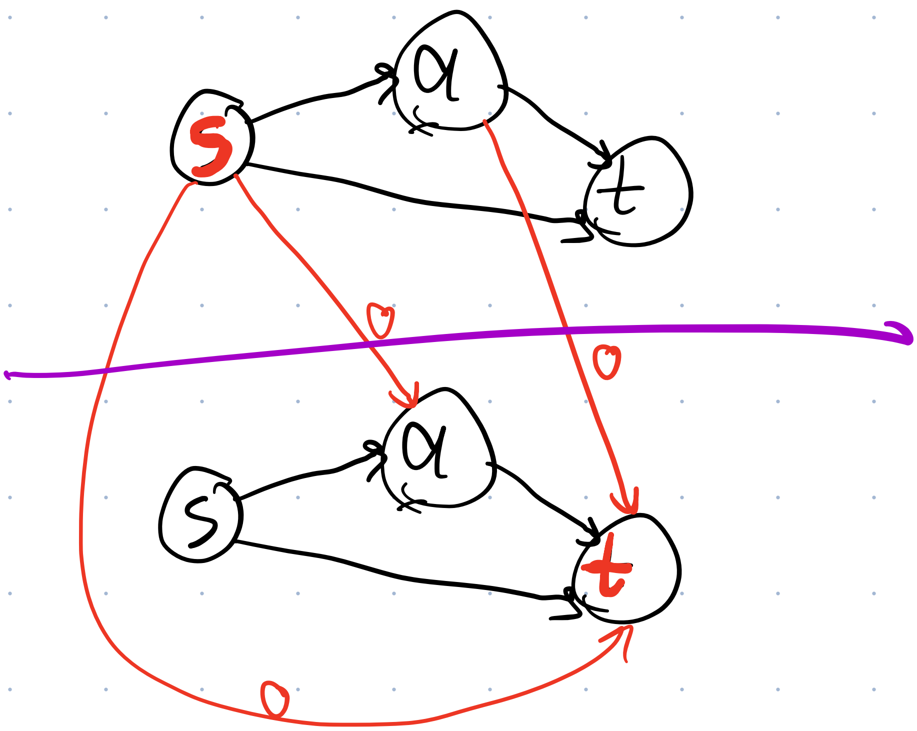
$O(|E|(|E|+|V|)\log(|V|))$ или

$O(|E|^2|V|)$; для плотн. графов $O(|V|^5)$






a
c
s
t
b
0
0
0
a
c
s
t
b


a
s
t
0
0
a
s
t
0

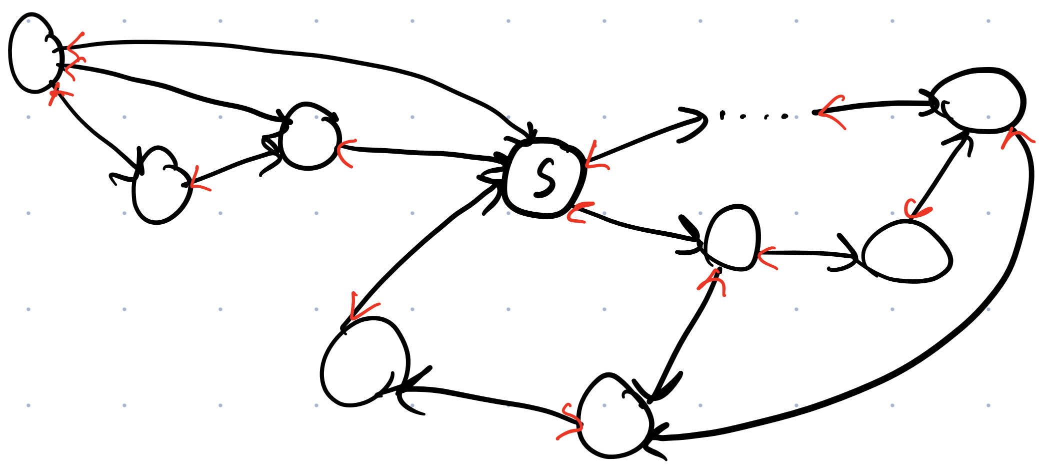
ЗАДАЧА.

ОРИЕНТ. ГРАФ

$\exists$ ОТР. РЁБРА, $\nexists$ ОТР. ЦИКЛЫ

ВЕРШ. S

ОТ КАКОЙ ВЕРШ. S НАИБОЛЕЕ УДАЛЕНА?



$$u^* = \underset{u \in V}{\arg\max}\ d(u, s)$$

АЛГ.:

1) ТРАНСПОНИРУЕМ ГРАФ
2) БЕЛЛМАНА-ФОРДА
3) ВЫБИРАЕМ МАКСИМУМ