

2.2. Приложения производной

В задачах **1-8** составить уравнение касательной к кривой в точке с абсциссой x_0 .

1. $y = x - \frac{1}{x}, x_0 = 1.$

2. $y = 2 - x - x^2, x_0 = 2.$

3. $y = \sqrt[3]{x-1}, x_0 = 1.$

4. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}, x_0 = 1.$

5. $y = x^3 + x, x_0 = 1.$

6. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2.$

7. $y = \operatorname{tg} 2x, x_0 = 1.$

8. $y = x \ln x, x_0 = e.$

В задачах **9-12** записать уравнение касательной к графику функции в заданной точке.

9. $y = x^2 + 5x, M(1; 5).$

10. $y = \sqrt{5 - x^2}, M(1; 2).$

11. $y = \frac{\ln x}{x}, M(1; 0).$

12. $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, M(1; 1).$

В задачах **13-16** определить, под каким углом кривая пересекает ось абсцисс.

13. $y = \frac{x-1}{1+x^2}.$

14. $y = 1 - e^x.$

15.
$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases} \quad -1 < t < \frac{1}{2}.$$

16. $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0.$

В задачах **17-20** найти точки, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

17. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7.$

18. $y = (3 - x^2)e^x.$

19.
$$\begin{cases} x = \frac{t^3}{1+t^2}, \\ y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

20. $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0.$

21. Составить уравнение той касательной к графику функции $y = x + e^{-2x}$, которая параллельна прямой $y = -x$.

22. Прямая $y = 4x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 7$. Найти абсциссу точки касания.

23. При каких значениях независимой переменной касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

24. В каких точках касательная к кривой $y = 2x^3 - 5$ параллельна прямой $4y - 6x + 6 = 0$?

25. На параболе $y = x^2 - 2x - 8$ найти точку M , в которой касательная к ней параллельна прямой $4x + y + 4 = 0$.

26. На линии $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 2t^3 - t^2 \end{cases}$ найти точку M , в которой касательная параллельна прямой $y = 2x$.

27. Прямая $y = 9x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 + 8x - 9$. Найти абсциссу точки касания.

28. Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y = e^{2x} + x^2$, проведенной в точке с абсциссой $x = 0$.

29. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 6x - x^2 - 4$.

30. Найти угол между кривыми в точке их пересечения:

а) $y = 2x^2$ и $y = x^3 + 2x^2 - 1$; **б)** $y = (x - 2)^2$ и $y = 4x - x^2 + 4$;

в) $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$; **г)** $y = \frac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.

31. Свободно падающее тело движется по закону $s = \frac{gt^2}{2}$, ($g = 9,8 \text{ м/с}^2$).

а) Найти среднюю скорость движения тела за промежуток времени от $t = 5 \text{ с}$ до $(t + \Delta t) \text{ с}$, где $\Delta t = 1 \text{ с}, 0,05 \text{ с}, 0,01 \text{ с}$.

б) Найти скорость тела в конце 5-й секунды.

32. Материальная точка движется по закону: $x(t) = -15t^5 + t^4 - t^3 + 5t$. Найти скорость точки (в м/с) в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

33. Материальная точка движется по закону: $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 19t - 11$.

В какой момент времени ее скорость была равна 3 м/с?

34. Материальная точка движется по закону: $x(t) = t^2 - 13t + 23$.

В какой момент времени ее скорость была равна 3 м/с?

В задачах 35-76 вычислить предел, применяя правило Лопиталя.

35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$.

36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - e^{-x}}$.

39. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$.

40. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$.

41. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 - 6x}$.

42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2}$.

$$\underline{43.} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$\underline{45.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}.$$

$$\underline{47.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}.$$

$$\underline{49.} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x}{x^2}.$$

$$\underline{51.} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3^x + x}{3^x + x^2}.$$

$$\underline{53.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right).$$

$$\underline{55.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg} 2x \right).$$

$$\underline{57.} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$\underline{59.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{e^x - 1} \right).$$

$$\underline{61.} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$\underline{63.} \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$\underline{65.} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x.$$

$$\underline{67.} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\underline{69.} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}.$$

$$\underline{71.} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}.$$

$$\underline{73.} \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x.$$

$$\underline{75.} \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$\underline{44.} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

$$\underline{46.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}.$$

$$\underline{48.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x+1)}.$$

$$\underline{50.} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5^x}{3x^3}.$$

$$\underline{52.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{x}{3}}}{e^x + x}.$$

$$\underline{54.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$\underline{56.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$\underline{58.} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

$$\underline{60.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\sin x} - \frac{e^{-x}}{\sin x} \right).$$

$$\underline{62.} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{5}{x} \right).$$

$$\underline{64.} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$$

$$\underline{66.} \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$\underline{68.} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\underline{70.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\underline{72.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\underline{74.} \lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x}.$$

$$\underline{76.} \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} x)^x.$$

В задачах 77-80 проверить, что предел существует, но не может быть

вычислен по правилу Лопиталя:

$$\underline{77.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x}.$$

$$\underline{79.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$\underline{78.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \sin x}{e^x - \cos x}.$$

$$\underline{80.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}.$$

В задачах **81-98** найти промежутки монотонности и экстремумы функции, если они существуют; построить схематически график функции.

$$\underline{81.} y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1.$$

$$\underline{82.} y = (4 - x)(x - 1)^2.$$

$$\underline{83.} y = \frac{1}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$$

$$\underline{84.} y = (x - 2)^3(2x + 1)^2.$$

$$\underline{85.} y = \sqrt{2x - x^2}.$$

$$\underline{86.} y = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}.$$

$$\underline{87.} y = 1 - \sqrt[5]{(x - 2)^4}.$$

$$\underline{88.} y = 2x^2 - \ln x.$$

$$\underline{89.} y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

$$\underline{90.} y = x - \ln(1 + x^2).$$

$$\underline{91.} y = x \ln^2 x.$$

$$\underline{92.} y = x \ln^2 x.$$

$$\underline{93.} y = x - e^x.$$

$$\underline{94.} y = e^{x^2 - 4x + 3}.$$

$$\underline{95.} y = x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\underline{96.} y = x^2 e^{-x}.$$

$$\underline{97.} y = x - \operatorname{arctg} x.$$

$$\underline{98.} y = x - \cos x.$$

В задачах **99-106** исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной.

$$\underline{99.} y = x^3 + 3x^2 - 9x - 3.$$

$$\underline{100.} y = 3x - x^3.$$

$$\underline{101.} y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

$$\underline{102.} y = e^{3 - 6x - x^2}.$$

$$\underline{103.} y = x + \cos x.$$

$$\underline{104.} y = \frac{1}{2}x - \sin x.$$

$$\underline{105.} y = x + \frac{1}{x}.$$

$$\underline{106.} y = x e^{-x^2}.$$

В задачах **107-112** найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

$$\underline{107.} y = x^3 - 6x^2 + 9, x \in [-1; 2].$$

$$\underline{108.} y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 2; x \in [-1; 2].$$

$$\underline{108.} y = x^4 - 8x^2 + 5; x \in [-3; 3].$$

$$\underline{110.} y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; x \in [-1; 2].$$

$$\underline{111.} y = x - \ln x, x \in [1; e].$$

$$\underline{112.} y = x + \frac{1}{x}, x \in [1; 2].$$

$$\underline{113.} y = x e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in [-2; 2].$$

$$\underline{114.} y = x - 2\sqrt{x}, x \in [0; 5].$$

115. $y = x + \sqrt{3 - x}, x \in [0; 3].$

116. $y = (x - 3) e^x, x \in [-1; 4].$

117. Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

118. Найти наибольший член последовательности $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}.$

119. Из листа, который имеет форму круга радиуса R , вырезать такой сектор, чтобы воронка, скрученная из него, имела наибольшую вместительность.

120. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

121. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 м и 1 м. Требуется вырезать из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Определить размеры балки.

122. Ряд опытов привел к n различным значениям x_1, x_2, \dots, x_n исследуемой величины A . Часто принимают в качестве A такое значение x , что сумма квадратов отклонений его от x_1, x_2, \dots, x_n имеет наименьшее значение. Найти x , удовлетворяющее этому требованию.

В задачах 123-134 найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

123. $y = x^4 - 2x^2 + 3x + 7.$

124. $y = x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 90x^2.$

125. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}.$

126. $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

127. $y = e^{-x^2}.$

128. $y = e^{\arctg x}.$

129. $y = \ln(1 + x^2).$

130. $y = x^4(\ln x - 2).$

131. $y = \sqrt[3]{x + 3}.$

132. $y = \frac{x^3}{2(x - 1)^2}.$

133. $y = x(1 + \sqrt[3]{x^2}).$

134. $y = (x + 6)e^{\frac{1}{x}}.$

В задачах 135-148 исследовать функцию на непрерывность; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

135. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 1}.$

136. $y = \frac{1 + x^3}{1 + x}.$

$$137. y = \frac{(x+1)^2}{x+3}.$$

$$139. y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x}.$$

$$141. y = 2^{\frac{1}{x+1}} + 1.$$

$$143. y = \frac{4}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}.$$

$$145. y = \frac{27}{9 - 3^x}.$$

$$147. y = e^{x + \frac{1}{x}}.$$

$$138. y = \frac{x^2 + 2x + 8}{x - 2}.$$

$$140. y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4}.$$

$$142. y = 1 + 3^{\frac{1}{(x-4)^2}}.$$

$$144. y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1}.$$

$$146. y = \frac{3}{3 - \ln x}.$$

$$148. y = \frac{e^{-x^2}}{x - 1}.$$

В задачах 149-170 найти асимптоты графика функции.

$$149. y = \frac{x^2 - 4x - 8}{x + 2}.$$

$$151. y = \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$153. y = \frac{4x^3}{x^2 - 9}.$$

$$155. y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$157. y = \frac{\ln(2x - 1)}{x - 1}.$$

$$159. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$161. y = e^{4 - 3x - x^2}.$$

$$163. y = e^{\frac{1}{x}} - x.$$

$$165. y = \frac{x}{3} - \operatorname{arctg} x.$$

$$150. y = \frac{2x - 7}{x + 4}.$$

$$152. y = \frac{6(x^2 + 4)}{3x^2 + 8}.$$

$$154. y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}.$$

$$156. y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}.$$

$$158. y = \frac{\ln(2x + 1)}{x + 1}.$$

$$160. y = \frac{\ln x^4}{x - 4}.$$

$$162. y = x e^{\frac{1}{x}}.$$

$$164. y = 2 \ln \left(\frac{x}{x + 1} \right) - 1.$$

$$166. y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$167. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}.$$

$$168. y = x - \arccos \left(\frac{1}{x} \right).$$

$$169. y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$170. y = \frac{\sin(x+1)}{x^2-1}.$$

171. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 + px + q}{x+1}$ на существование асимптот в зависимости от p и q .

В задачах 172-191 исследовать функцию и построить ее график.

$$172. y = x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 4.$$

$$173. y = x^3 - 12x^2 + 5.$$

$$174. y = (x+2)^2(x-1)^2.$$

$$175. y = \sqrt{2x - x^2}.$$

$$176. y = \frac{1}{x^2 + 4}.$$

$$177. y = \frac{x}{x^2 - 9}.$$

$$178. y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

$$179. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$180. y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$181. y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}.$$

$$182. y = \ln \cos x.$$

$$183. y = x + e^{-x}.$$

$$184. y = 3\sqrt[3]{x} - x.$$

$$185. y = (x-1)\sqrt{x}.$$

$$186. y = e^{-x^2}.$$

$$187. y = x^2 e^{-x^2}.$$

$$188. y = x e^{-2x}.$$

$$189. y = \ln(4x - x^2).$$

$$190. y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$191. y = x + \sin x.$$

Ответы. 1. $2x - y - 2 = 0$. 2. $5x + y - 6 = 0$. 3. $x - 1 = 0$. 4. $4y - 9x + 1 = 0$.
 5. $y = 4x - 2$. 6. $y - 5 = 0$. 7. $y - 2x = 0$. 8. $2x - y - e = 0$. 9. $7x - y - 2 = 0$.
 10. $x + 2y - 5 = 0$. 11. $x - y - 1 = 0$. 12. $4x - 3y - 1 = 0$. 13. $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 14. $\frac{3\pi}{4}$. 15. 0.
 16. $\operatorname{arctg} 3$ при $x = -3$; $\pi - \operatorname{arctg} 3$ при $x = 3$. 17. $(-1; 14), (2; 13)$. 18. $(1; 2e), (-3; -6e^{-3})$. 19. $(0, 5; -0, 5)$. 20. $(-2; 1 \pm \sqrt{3})$. 21. $y = 1 - x$. 22. $x = 4, 5$.
 23. $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$. 24. $\left(\frac{1}{2}; -4\frac{3}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}; -5\frac{1}{4}\right)$. 25. $M(-1; -5)$. 26. $M(2; 1)$.
 27. $x_0 = -1$. 28. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 29. $(1; 1), (4; 4), \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{6}{7}$. 30. а) $\operatorname{arctg} \frac{3}{29}$;
 б) $\operatorname{arctg} \frac{8}{5}$; в) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$; г) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 31. а) $v_{cp} = 53,9$ м/с; $v_{cp} = 49,245$ м/с;

- $v_{cp} = 49,049 \text{ м/с}$; **6)** $v = 49 \text{ м/с}$. **32.** $v = 9 \text{ м/с}$. **33.** $t = 4 \text{ с}$. **34.** $t = 8 \text{ с}$. **35.** $\frac{9}{50}$.
36. $\frac{1}{6}$. **37.** $\frac{3}{5}$. **38.** 0. **39.** 1. **40.** -3. **41.** ∞ . **42.** ∞ . **43.** 1. **44.** 1. **45.** $\frac{2}{3}$. **46.** -2. **47.** $\frac{3}{e}$.
48. 2. **49.** $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$; 0 при $x \rightarrow -\infty$. **50.** $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$; 0 при $x \rightarrow -\infty$.
51. 1 при $x \rightarrow +\infty$; 0 при $x \rightarrow -\infty$. **52.** 0. **53.** 0. **54.** 0. **55.** $-\frac{1}{4}$. **56.** 0. **57.** $-\frac{1}{2}$.
58. -1. **59.** 1. **60.** 2. **61.** 1. **62.** 5. **63.** 1. **64.** 0. **65.** 0. **66.** 0. **67.** 1. **68.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **69.** 1.
70. $e^{-\frac{1}{6}}$. **71.** 1. **72.** e . **73.** 1. **74.** 1. **75.** 1. **76.** 1. **77.** $\frac{1}{2}$. **78.** 1. **79.** 0. **80.** 0.
81. Функция возрастает на $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, убывает на $(-2; 1)$; $y_{\max}(-2) = 21$; $y_{\min}(1) = -6$. **82.** Функция убывает на $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, возрастает на $(1; 3)$; $y_{\min}(1) = 0$; $y_{\max}(3) = 4$. **83.** Функция убывает на $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$, возрастает на $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; $y_{\max}(1) = 1$; $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$.
84. Функция возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $y_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$; $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{2}$. **85.** Функция возрастает на $[0; 1)$, убывает на $(1; 2]$; $y_{\max}(1) = 1$. **86.** Функция убывает на $(-\infty; 3)$, возрастает на $(3; +\infty)$; $y_{\min}(3) = -\sqrt[3]{4} \approx 1,58$. **87.** Функция возрастает на $(-\infty; 2)$, убывает на $(2; +\infty)$; $y_{\max}(2) = 1$. **88.** Функция убывает на $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, возрастает на $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$. **89.** Функция убывает на $(0; 1) \cup (e^2; +\infty)$, возрастает на $(1; e^2)$; $y_{\min} = y(1) = 0$; $y_{\max} = y(e^2) = 4e^{-2}$. **90.** Функция возрастает на $(-\infty; +\infty)$; экстремумов нет. **91.** Функция возрастает на $\left(0; \frac{1}{e}\right)$, убывает на $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$; $y_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. **92.** Функция возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right) \cup (1; +\infty)$, убывает на $\left(\frac{1}{e^2}; 1\right)$; $y_{\max}\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$; $y_{\min}(1) = 0$. **93.** Функция убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(0; +\infty)$; $y_{\max}(0) = -1$. **94.** Функция убывает на $(-\infty; 2)$, возрастает на $(2; +\infty)$; $y_{\min}(2) = e^{-1}$. **95.** Функция убывает на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,

возрастает на $(-1;1)$; $y_{\min}(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$; $y_{\max}(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. **96.** Функция убывает на $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$, возрастает на $(0;2)$; $y_{\max}(2) = \frac{4}{e^2}$; $y_{\min}(0) = 0$. **97.** Функция возрастает на $(-\infty;+\infty)$; экстремумов нет. **98.** Функция возрастает на $(-\infty;+\infty)$; экстремумов нет. **99.** $y_{\max}(-3) = 24$; $y_{\min}(1) = -8$. **100.** $y_{\max}(1) = 2$; $y_{\min}(-1) = 2$. **101.** $y_{\max}(1) = 5$; $y_{\min}(3) = 1$. **102.** $y_{\min}(-3) = e^{-24}$. **103.** Нет экстремумов. **104.** $y_{\max}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \pi n$; $y_{\min}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + \pi n$. **105.** $y_{\max}(-1) = 0$, $y_{\min}(1) = 2$. **106.** $y_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,428$, $y_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0,428$. **107.** $y_{\text{наиб}} = y(0) = 9$; $y_{\text{наим}} = y(2) = -7$. **108.** $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 21$; $y_{\text{наим}} = y(0) = 2$. **109.** $y_{\text{наиб}} = y(\pm 3) = 14$; $y_{\text{наим}} = y(\pm 2) = -19$. **110.** $y_{\text{наиб}} = y(1) = 2$; $y_{\text{наим}} = y(-1) = -10$. **111.** $y_{\text{наиб}} = y(e) = e - 1$; $y_{\text{наим}} = y(1) = 1$. **112.** $y_{\text{наиб}} = y(2) = 2,5$; $y_{\text{наим}} = y(1) = 2$. **113.** $y_{\text{наиб}} = y(2) = \frac{2}{e}$; $y_{\text{наим}} = y(-2) = -\frac{2}{e}$. **114.** $y_{\text{наиб}} = y(5) = 5 - 2\sqrt{5}$; $y_{\text{наим}} = y(1) = -1$. **115.** $y_{\text{наиб}} = y\left(-\frac{11}{4}\right) = 3,25$; $y_{\text{наим}} = y(0) = \sqrt{3}$. **116.** $y_{\text{наиб}} = y(4) = 2e^2$; $y_{\text{наим}} = y(2) = -e^2$. **117.** 6 и 6. **118.** $a_7 = \frac{49}{543}$. **119.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **120.** $a = 4, h = 2$. **121.** $\frac{2}{3}\sqrt{2} \times \frac{40}{3}(\text{м})$. **122.** $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ – среднее арифметическое. **123.** График выпуклый при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$, вогнутый при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; 6\frac{4}{9} \pm \sqrt{3}\right)$ – точки перегиба. **124.** График вогнутый при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 3)$, выпуклый при $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (3; +\infty)$; $(\pm\sqrt{3}; \mp 21\sqrt{3} - 225)$, $(3; -432)$ – точки перегиба. **125.** График вогнутый при $x \in (-\infty; -1)$, выпуклый при $x \in (-1; +\infty)$; точек перегиба нет. **126.** График выпуклый при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$, вогнутый при $x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$; $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{10}\right), (0; 0), \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{10}\right)$ – точки перегиба. **127.** График выпуклый при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, вогнутый при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба. **128.** График выпуклый при $x \in (-\infty; 0,5)$, вогнутый при $x \in (0,5; +\infty)$; $(0,5; e^{\arctg 0,5})$ – точка перегиба. **129.** График вогнутый при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, выпуклый при $x \in (-1; 1)$; $(\pm 1; \ln 2)$ – точки перегиба. **130.** График вогнутый при $x \in \left(0; e^{\frac{17}{12}}\right)$, выпуклый при $x \in \left(e^{\frac{17}{12}}; +\infty\right)$; $\left(e^{\frac{17}{12}}; -\frac{7}{12}e^{\frac{17}{3}}\right)$ – точка перегиба. **131.** График выпуклый при $x \in (-\infty; -3)$, вогнутый при $x \in (-3; +\infty)$; $(-3; 0)$ – точка перегиба. **132.** График вогнутый при $x \in (-\infty; 0)$, выпуклый при $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; $(0; 0)$ – точка перегиба. **133.** График вогнутый при $x \in (-\infty; 0)$, выпуклый при $x \in (0; +\infty)$; $(0; 0)$ – точка перегиба. **134.** График вогнутый при $x \in \left(-\infty; -\frac{6}{13}\right)$, выпуклый при $x \in \left(-\frac{6}{13}; 0\right) \cup (0; +\infty)$; $\left(-\frac{6}{13}; \frac{30}{13}e^{-\frac{13}{6}}\right)$ – точка перегиба. **135.** $x = -1$ – точка устранимого разрыва ($\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = 0,5$), $x = 1$ – точка бесконечного разрыва; асимптоты $x = 1, y = 0$; экстремумов нет, функция убывает на $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. **136.** $x = -1$ – точка устранимого разрыва ($\lim_{x \rightarrow -1} y(x) = 3$); асимптот нет; $y_{\min}(0,5) = 0,75$. **137.** $x = -3$ – точка бесконечного разрыва; асимптоты $x = -3, y = x - 1$; $y_{\max}(-5) = -8$; $y_{\min}(-1) = 0$. **138.** $x = 2$ – точка бесконечного разрыва; асимптоты $x = 2, y = x + 4$; $y_{\max}(-2) = -2$; $y_{\min}(6) = 14$. **139.** $x = 0, x = 2$ – точки бесконечного разрыва; асимптоты $x = 0, x = 2, y = 1$; экстремумов нет, функция убывает на $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. **140.** $x = -4$ – точка бесконечного разрыва; $x = 1$ – точка устранимого разрыва ($\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = -0,4$); асимптоты $x = -4, y = 1$; экстремумов нет, функция возрастает на $(-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (1; +\infty)$. **141.** $x = -1$ – точка бесконечного разрыва ($\lim_{x \rightarrow -1-0} y(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1+0} y(x) = +\infty$); асимптоты $x = -1, y = 2$; экстремумов нет, функция убывает на $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **142.** $x = 4$ – точка бесконечного разрыва ($\lim_{x \rightarrow 4 \pm 0} y(x) = +\infty$); асимптоты $x = 4, y = 2$; экстремумов нет, функция возрастает на $(-\infty; 4)$, убывает на $(4; +\infty)$. **143.** $x = 1$ – точка конечного разрыва ($\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = 0$); асимптота $y = 2$; экстремумов нет, функция возрастает на $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. **144.** $x = 0$ – точка конечного разрыва

$(\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = -1; \lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 1)$; асимптота $y = 0$; экстремумов нет, функция убывает на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **145.** $x = 2$ — точка бесконечного разрыва $(\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} y(x) = \mp \infty)$; вертикальная асимптота $x = 2$; правосторонняя горизонтальная асимптота $y = 0$; левосторонняя горизонтальная асимптота $y = 2$; экстремумов нет, функция возрастает на $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **146.** Функция определена и непрерывна при $x \in (0; e^3) \cup (e^3; +\infty)$; $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 0$; $x = e^3$ — точка бесконечного разрыва $(\lim_{x \rightarrow e^3 \pm 0} y(x) = \mp \infty)$; вертикальная асимптота $x = e^3$; правосторонняя горизонтальная асимптота $y = 0$; экстремумов нет, функция возрастает на $(0; e^3) \cup (e^3; +\infty)$. **147.** $x = 0$ — точка бесконечного разрыва $(\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +0} y(x) = +\infty)$; вертикальная асимптота $x = 0$; левосторонняя горизонтальная асимптота $y = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$; $y_{\max}(-1) = e^{-2}$; $y_{\min}(1) = e^2$. **148.** $x = 1$ — точка бесконечного разрыва; асимптоты $x = 1$, $y = 0$; экстремумов нет, функция убывает на $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. **149.** $x = -2$, $y = x - 6$. **150.** $x = -3, x = 3$, $y = 4x$. **151.** $x = 1, x = 3$, $y = 0$. **152.** $y = 2$. **153.** $x = -4$, $y = 2$. **154.** $x = 1$, $y = x - 2$. **155.** $x = \pm 1$. **156.** Вертикальная асимптота $x = 1$, левосторонняя наклонная асимптота $y = -x - 0.5$, правосторонняя наклонная асимптота $y = x + 0.5$. **157.** Вертикальные асимптоты $x = 0, 5$, $x = 1$, правосторонняя горизонтальная асимптота $y = 0$. **158.** Вертикальная асимптота $x = -0, 5$, правосторонняя горизонтальная асимптота $y = 0$. **159.** Вертикальная асимптота $x = 0$, правосторонняя горизонтальная асимптота $y = 0$. **160.** $x = 0, x = 4$, $y = 0$. **161.** $y = 0$. **162.** $x = 0$, $y = x + 1$. **163.** $x = 0$, $y = -x + 1$. **164.** $x = -1$ (график функции приближается к асимптоте только слева), $x = 0$ (график функции приближается к асимптоте только справа), $y = -1$. **165.** Левосторонняя наклонная асимптота $y = \frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}$, правосторонняя наклонная асимптота $y = \frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}$. **166.** Левосторонняя наклонная асимптота $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, правосторонняя наклонная асимптота $y = \frac{\pi}{2}x - 1$. **167.** $y = 0$. **168.** $y = x - \frac{\pi}{2}$. **169.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **170.** $x = 1$, $y = 0$. **171.** $y = x + p - 1$, $x = -1$ при $p - q \neq -1$. **172.** $x \in \mathbb{R}$; асимптот нет; $y_{\min}(0) = 4$; точки перегиба: $(-1; 27)$, $(3; 49)$. **173.** $x \in \mathbb{R}$; асимптот нет; $y_{\max}(0) = 5$; $y_{\min}(8) = -251$; точка

перегиба $(4; -123)$. **174.** $x \in \mathbb{R}$; асимптот нет;

$y_{\min}(-2)=0; y_{\min}(1)=0; y_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{16}$; точки перегиба $\left(\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}); \frac{9}{4}\right)$.

175. Функция определена, непрерывна и принимает неотрицательные значения на отрезке $[0; 2]$. На концах отрезка значения функции равны нулю.

Асимптот нет. Точки экстремума: $x=1$ – точка максимума, $y(1)=1$. Точек перегиба нет, график функции всюду вогнут. **176.** Функция четная, $x \in \mathbb{R}$;

горизонтальная асимптота $y=0$; $y_{\max}(0)=\frac{1}{4}$; точки перегиба $\left(\pm \frac{2}{3\sqrt{3}}; \frac{27}{112}\right)$.

177. Функция нечетная, определена и непрерывна при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$; вертикальные асимптоты $x=\pm 3$;

горизонтальная асимптота $y=0$; экстремумов нет, везде убывает; точка перегиба $(0; 0)$. **178.** Функция четная, определена и непрерывна при

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; вертикальные асимптоты $x=\pm 1$;

горизонтальная асимптота $y=1$; $y_{\max}(0)=-1$; точек перегиба нет; график функции вогнутый при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, выпуклый при $x \in (-1; 1)$.

179. Функция четная, определена и непрерывна при $x \in \mathbb{R}$; горизонтальная

асимптота $y=1$; $y_{\min}(0)=-1$; точки перегиба $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}\right)$. **180.** Функция

четная, определена и непрерывна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; вертикальная асимптота $x=0$; $y_{\min}(0)=-1$; точек перегиба нет; график функции везде

вогнутый. **181.** $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; асимптоты $x=3$, $y=x-3$; $y_{\max}(1)=-4$, $y_{\min}(5)=4$; точек перегиба нет; график функции выпуклый при $x \in (-\infty; 3)$,

вогнутый при $x \in (3; +\infty)$. **182.** Функция четная, определена и непрерывна

при $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; вертикальные асимптоты

$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $y_{\max}(2\pi n) = 0, n \in \mathbb{Z}$; точек перегиба нет; график функции

выпуклый при $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. **183.** $x \in (-\infty; +\infty)$; правосторонняя

наклонная асимптота $y=x$, левосторонней наклонной асимптоты нет;

$y_{\min}(0)=1$; точек перегиба нет, график функции везде вогнут. **184.** Функция

четная, определена и непрерывна при $x \in [0; +\infty)$; асимптот нет;

$y_{\min}(-1)=-2$, $y_{\max}(1)=2$; точка перегиба $(0; 0)$. **185.** Функция определена и

непрерывна при $x \in \mathbb{R}$; асимптот нет; $y_{\min}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-2}{3\sqrt{3}} \approx -0,385$; точек перегиба

нет, график функции везде вогнут. **186.** Функция четная, определена и непрерывна при $x \in (-\infty; +\infty)$; горизонтальная асимптота $y = 0$; $y_{\max}(0) = 1$;

точки перегиба $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. **187.** Функция четная, определена и непрерывна

при $x \in (-\infty; +\infty)$; горизонтальная асимптота $y = 0$; $y_{\min}(0) = 0$,

$y_{\max}(\pm 1) = \frac{1}{e} \approx 0,370$; точки перегиба: $\left(\pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}; \frac{5 + \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}\right)$,

$\left(\pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}; \frac{5 - \sqrt{17}}{4} e^{-\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}\right)$. **188.** $x \in (-\infty; +\infty)$; правосторонняя

горизонтальная асимптота $y = 0$, левосторонней наклонной асимптоты нет;

точка максимума $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$; точка перегиба $\left(1; \frac{1}{e^2}\right)$. **189.** Функция

определена и непрерывна при $x \in (0; 4)$; вертикальные асимптоты $x = 0$

(график функции приближается к асимптоте только справа), $x = 4$ (график

функции приближается к асимптоте только слева), наклонных асимптот нет;

$y_{\max}(2) = \ln 4$; точек перегиба нет, график функции везде вогнут. **190.**

Функция определена и непрерывна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; асимптоты

$x = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 0$), $y = x - 3$; $y_{\max}(-2) = -4\sqrt{e}$; $y_{\min}(1) = -e^{-1}$;

точка перегиба $\left(\frac{2}{5}; -\frac{8}{5} e^{-\frac{5}{2}}\right)$. **191.** Функция нечетная, определена и

непрерывна при $x \in (-\infty; +\infty)$; асимптот нет; экстремумов нет, возрастает

везде; точки перегиба $(\pm \pi n; \pm \pi n)$.