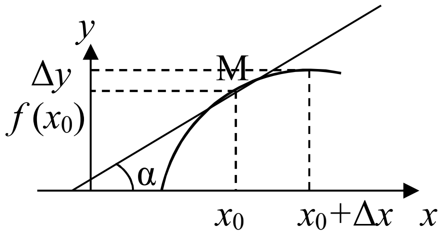
ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Геометрический смысл производной
2. Теоремы о среднем
2. Правило Лопиталя
3.Монотонность функции, точки экстремума функции
4. Наименьшее и наибольшее значения функции, непрерывной на отрезке
5. Выпуклость и точки перегиба графика функции
6. Асимптоты графика функции
7. Схема исследования функции при построении графика

1. Геометрический смысл производной

Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$

$$f'\left(x_0\right) = k = \operatorname{tg}\alpha .$$



Уравнение касательной к графику функции y = f (x) в точке x₀

$$\boxed{y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).}$$

Замечание. В случае $\alpha = \pi/2$, уравнение касательной имеет вид: $x = x_0$, касательная к графику функции параллельна оси *Oy*.

2. Теоремы о среднем

Определение. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (минимума) функции***, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geq f\left(x\right)$ (соответственно $f(x_0) \leq f\left(x\right)$). Точки локального максимума и точки локального минимума называются также ***точками экстремума***. Если неравенства в этом определении строгие, то и экстремум называется строгим.

Для графика функции $y = f(x)$ под точкой экстремума понимается точка $(x_0, f(x_0))$.

Замечания. 1. Только в точках экстремума для достаточно малых Δx приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не меняет знак при переходе аргумента через рассматриваемую точку x_0: $\Delta y \geq 0$ в случае минимума и $\Delta y \leq 0$ в случае максимума.

2.Функция может иметь экстремум только во внутренних точках области определения.

3.Локальные экстремумы следует отличать от глобальных, которые относятся не к точке, а к целому промежутку, и представляют собой соответственно наибольшее (***глобальный максимум***) и наименьшее (***глобальный минимум***) значения функции на этом промежутке.

Теорема Ферма. Если точка x_0 является точкой локального экстремума функции $y = f(x)$ и функция дифференцируема в точке x_0, то производная этой функции в этой точке обращается в нуль: $f'(x_0) = 0$.

Геометрическая интерпретация: в точке локального экстремума касательная к графику функции параллельна оси Ox (оси абсцисс).

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

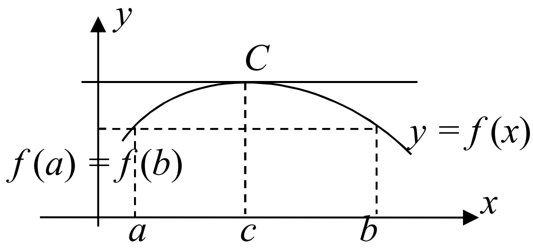
1) определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) дифференцируема на интервале (a,b);

3) значения функции на концах промежутка совпадают: $f(a) = f(b)$.

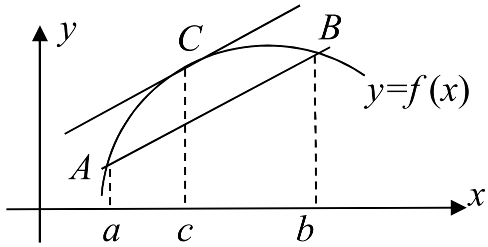
Тогда внутри промежутка найдется (по крайней мере одна) точка $c, c \in (a,b)$, в которой производная функции обращается в ноль: $f'(c) = 0$. Символически: $\exists c \in (a,b) \Rightarrow f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля. На графике функции найдется хотя бы одна точка $C(c, f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox.



Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда найдется такая точка c, $c \in (a,b)$, что имеет место *формула конечных приращений в форме Лагранжа*: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. (Приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a,b]$ равно приращению аргумента, умноженному на производную функции в некоторой внутренней точке отрезка)

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. На графике функции найдется хотя бы одна точка $C(c, f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.



Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$, тогда найдется такая точка c, $c\in(a,b)$, что имеет место следующая *формула конечных приращений в форме Коши*:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Замечание. *Геометрическая интерпретация* теоремы Коши такая же, как и теоремы Лагранжа, если ее применить к функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $x=g(t), y=f(t)$.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши объединяются общим названием ***теорем о среднем*** для дифференцируемых функций.

3. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ и других, сводящихся к ним.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Пусть $g'(x)\neq 0$ в проколотой окрестности точки a. Если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

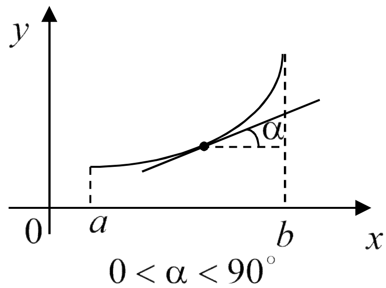
$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Замечание. Правило справедливо и в случае, когда $x\to\infty$.

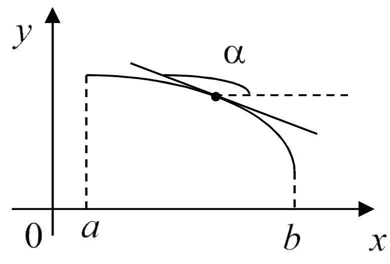
Неопределённости вида $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} приводятся с помощью тождественных преобразований к неопределённостям $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

3.Монотонность функции, точки экстремума функции

Достаточное условие возрастания функции

Если в каждой точке интервала $(a;b)$ $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале	

Достаточное условие убывания функции

Если в каждой точке интервала $(a;b)$ $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале	 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (минимума)*** если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geq f(x_0)$).

Точки локального максимума и минимума называются ***точками локального экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами*** функции.

Функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения. Слово ‹‹локальный›› часто опускают.

Необходимое условие экстремума функции

Если x_0 – точка экстремума функции $y=f(x)$, то в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Точки области определения функции $y=f(x)$, в которых ее производная равна нулю (стационарные точки) или не существует, называются ***критическими точками*** (точками, подозрительными на экстремум) функции. Функция может иметь экстремум лишь в критических точках.

Достаточные условия экстремума функции

<table>
<tr><td colspan="2">I. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и при переходе через эту точку производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции $y=f(x)$, при этом:</td></tr>
<tr><td>Если $f'(x)>0$ при $x<x_0$,
$f'(x)<0$ при $x>x_0$,
то x_0 – точка максимума.</td><td>Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$,
$f'(x)>0$ при $x>x_0$,
то x_0 – точка минимума.</td></tr>
<tr><td colspan="2">II. Если в точке x_0 первая производная функции $y=f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 будет точкой экстремума, причем: 1) x_0 – точка максимума, если $f''(x_0)<0$;
2) x_0 – точка минимума, если $f''(x_0)>0$.</td></tr>
</table>

Примеры экстремумов

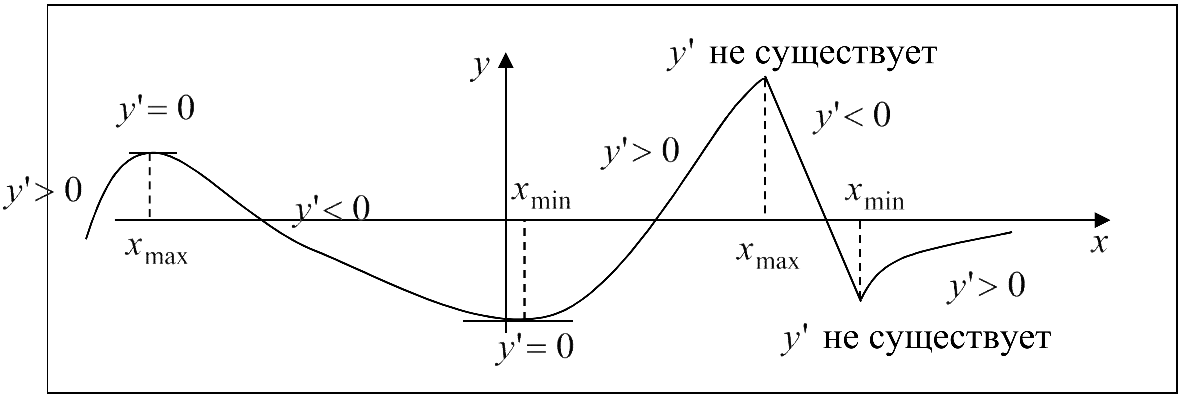
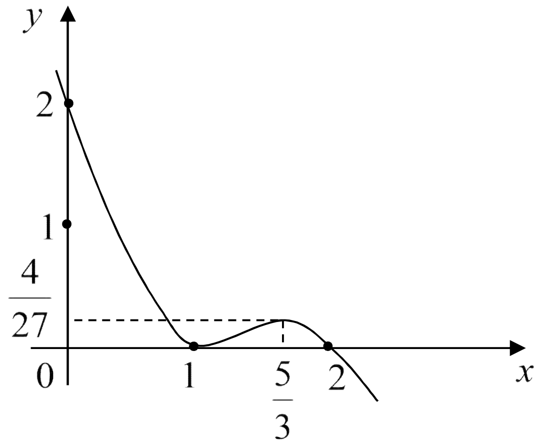


Схема исследования функции на монотонность и нахождения точек экстремума

Этапы	Пример для функции $y=(2-x)(x-1)^2$
1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна	Область определения: $(-\infty;+\infty)$. Функция непрерывна во всей области определения
2. Найти производную $f'(x)$	$f'(x)=\left((2-x)(x-1)^2\right)'=$ $=(2-x)'(x-1)^2+(2-x)\left((x-1)^2\right)'=$ $=-(x-1)^2+(2-x)2(x-1)=$ $=(x-1)(-x+1+4-2x)=(x-1)(5-3x)$
3. Найти критические точки, решив уравнение $f'(x)=0$	$(x-1)(5-3x)=0$ при $x_1=1$ и $x_2=\dfrac{5}{3}$
4. Определить знак производной в интервалах, на которые критические точки разбивают область определения функции	Знак $f'(x)$: $-$ min $+$ max $-$ x: 1, $\dfrac{5}{3}$ Характер изменения функции: $\searrow$ убыв. $\nearrow$ возр. $\searrow$ убыв.
5. Записать интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции	Функция возрастает при $x\in\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$,

	убывает при $x \in (-\infty;1) \cup \left(\frac{5}{3};+\infty\right)$; $x_{\min} = 1;\ x_{\max} = \frac{5}{3}$; $f_{\min}(1) = 0;\ f_{\max}\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{27}$
6. Построить эскиз графика	

4. Наименьшее и наибольшее значения функции, непрерывной на отрезке

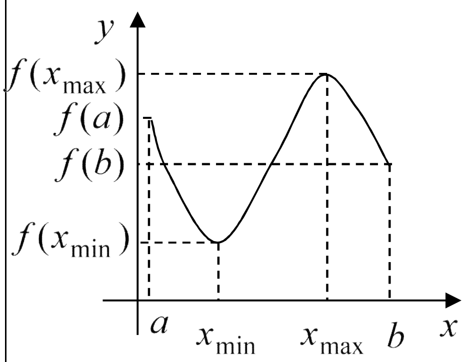
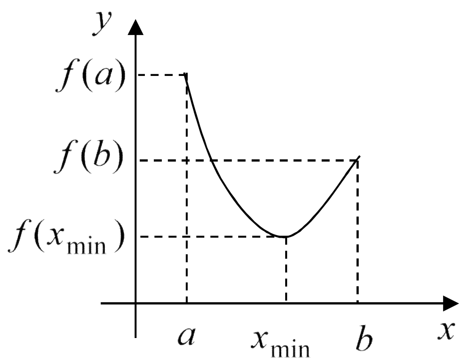
Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наименьшего и наибольшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.	
Например:  $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\min})$ $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\max})$	 $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\min})$ $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

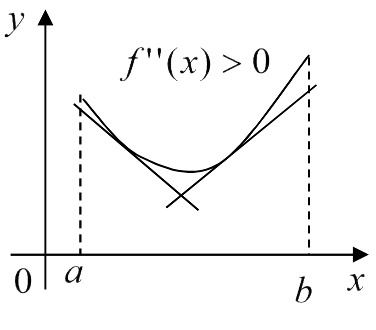
Схема нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной на отрезке

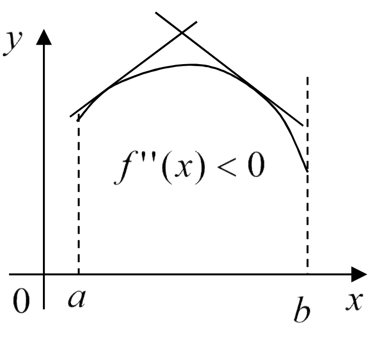
Этапы	Пример для функции $y = -x^3 + 3x^2 + 5,\ x \in [1;4]$
1. Найти производную $f'(x)$	$f'(x) = -3x^2 + 6x$
2. На данном промежутке найти критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует	$-3x^2 + 6x = 0; -3x(x-2) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ отрезку $[1;4]$ принадлежит только одна точка $x_2 = 2$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах промежутка	$f(1) = 7;\ f(2) = 9;\ f(4) = -11$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее	$\min\limits_{[1;4]} f(x) = f(4) = -11;$ $\max\limits_{[1;4]} f(x) = f(2) = 9$

5. Выпуклость и точки перегиба графика функции

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ ***выпуклость, направленную вниз (вверх),*** если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на $(a;b)$.

Достаточные условия выпуклости графика функции

<table>
<tr><td colspan="2">Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную и $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, то график функции имеет на $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).</td></tr>
<tr><td>

Выпуклость графика на $(a;b)$ направленная вниз</td><td>

Выпуклость графика на $(a;b)$, направленная вверх</td></tr>
</table>

Точка перегиба

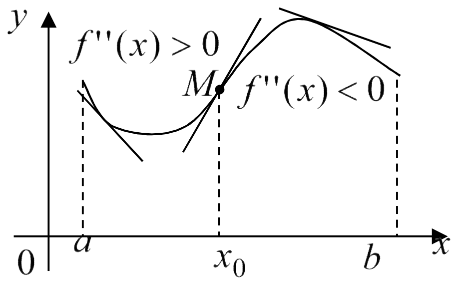
<table>
<tr>
<td>Точки непрерывности функции, в которых меняется направление выпуклости, называются точками перегиба функции. Если $x_0 -$ точка перегиба функции $y = f(x)$, то точка $M(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика этой функции.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Если x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0)$ равна нулю или не существует.
Точки непрерывности функции, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими точками 2-го рода.
Если вторая производная функции $y = f(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак, то x_0 – точка перегиба</td>
</tr>
</table>

Схема нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба графика функции

Этапы	Пример для функции $y = x^4 - 6x^2$
1. Найти область определения функции, промежутки непрерывности	Функция определена, непрерывна и дифференцируема при $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Найти производные первого и второго порядков	$f'(x) = 4x^3 - 12x;\ f''(x) = 12x^2 - 12$
3. Найти критические точки 2-го рода	$f''(x) = 0; 12x^2 - 12 = 0; x^2 - 1 = 0;$ $x_1 = -1; x_2 = 1$
4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками 2-го рода, определить знак $f''(x)$ и направление выпуклости	Знак $f''(x)$: + -1 – 1 + x Характер изменения функции: ∪ перегиб ∩ перегиб ∪
5. Записать результат	График функции имеет:

исследования	а) выпуклость направленную вниз при $x \in (-\infty;-1)$ и $x \in (1;+\infty)$; б) выпуклость направленную вверх при $x \in (-1;+1)$; в) точки перегиба графика функции $(-1;-5)$ и $(1;-5)$

6. Асимптоты графика функции

Под ***асимптотой кривой*** понимают прямую, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Различают асимптоты вертикальные (параллельные оси *Oy*), горизонтальные (параллельные оси *Ox*) и наклонные.

Прямая $x = c$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке c равен бесконечности, т. е. $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = \infty$.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной*** (***горизонтальной*** при $k = 0$) асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$.

Схема нахождения асимптот графика функции

Этапы	Пример для функции $y = \frac{x^2+1}{x-2}$
1. Найти область определения и интервалы непрерывности	Функция определена при $x \neq 2$, непрерывна при $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$, $x = 2$ - точка разрыва
2. Определить тип точки разрыва (если она есть)	$\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{x^2+1}{x-2} = \left(\frac{5}{-0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{x^2+1}{x-2} = \left(\frac{5}{+0}\right) = +\infty$. $x = 2$ – точка разрыва 2-го рода
3. Записать уравнение вертикальных асимптот в случае наличия точки разрыва 2-го рода	$x = 2$ – вертикальная асимптота

4. Найти наклонные асимптоты $y = kx + b$	$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{(x-2)x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1.$ $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2} - x\right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 2$ $y = x + 2$ – наклонная асимптота

7. Схема исследования функции при построении графика

Исследование функции можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность.
3. Найти асимптоты графика функции.
4. Найти интервалы монотонности функции, точки экстремумов. Вычислить значения экстремумов.
5. Найти интервалы выпуклости вверх (вниз), точки перегиба.
6. Исследовать периодичность функции.
7. Найти точки пересечения графика с осями координат.
8. Построить график функции с учетом проведенного исследования.