Chapitre 2 : Séries numériques

I Séries et sommes d'une série

Définition : Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \in \mathbb{K}$.
On a donc une suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition : On appelle **série de terme général** u_n que l'on note $\sum_{n\geq 0} u_n$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

Note de rédaction : Les deux définitions précédentes peuvent être regroupées.

Vocabulaire : On dit que (S_n) est la suite des sommes partielles de la série.

Remarque : (S_n) correspond aux $N + 1$ premiers termes de la suite.

A Correspondance suite - série

Raisonnement : Par définition une série est une suite. Expliquons comment une suite peut-être vue comme une série.
Si (u_n) est une suite, considérons la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$ (avec la convention $v_0 = u_0$).
Ainsi, $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Remarque : Cependant la série associée à une suite (u_n) va s'étudier en tant que telle (que série) grâce à u_n.

B Opérations sur les séries

Propriété : Opérations sur les séries *(admise)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries.
Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

- **Somme** : $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n$ définie comme $(S_N + S'_N)$
- **Produit par un scalaire** : $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$ définie comme (λS_N)

Exemple : Si $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n = 0$ est la série nulle.

C Troncature d'une série

Définition : Si (u_n) est une suite définie pour $n \geq n_0 \mid n_0 \in \mathbb{N}$. On peut considérer la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ où $u_0 = u_1 = ... = u_{n_0-1} = 0$, ou bien on peut écrire $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série de terme général u_n, une **troncature** de la série est $\sum_{n\geq n_0} u_n$. C'est la suite (S_N) où $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$.

Note de rédaction : Cette définition pourrait être synthétisée.

Exemple :

- la série nulle
- la série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}^*$: $\sum_{n\geq 0} q^n$ de terme général q^n ;
- la série harmonique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ de terme général $\frac{1}{n}$;
- la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

II Convergence d'une série

A Définitions et nature d'une série

Définition : Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série.
On dit que la série converge, si la suite (S_N) converge, et on note S la limite de S_N.
S s'appelle la somme de la série.

Dans ce cas, on écrit : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$ *(c'est une "somme infinie", un objet-limite).*

Vocabulaire : Si (S_N) diverge, alors on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

✖ Attention ✖ Si S n'existe pas, alors on écrit **jamais** la notation avec ∞

Vocabulaire : La convergence ou la divergence d'une série s'appelle la **nature** de la série.

Proposition : Stabilité de la limite par troncature *(admis)*

La nature d'une série n'est pas modifée par troncature.

Preuve:

Note de rédaction : Indication : les premiers termes n'influencent pas la convergence.

B Quelques applications...

Exemple :

- Si (u_n) est nulle à partir d'un rang N_0 alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N_0} u_n$.

- Série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$:
  On considère la suite des sommes partielles (S_N) où $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n$ = $\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$. On a plusieurs cas :
  - Si $|q| < 1$, $q^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ donc $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
    La série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge et on arrive à trouver S !
  - Si $|q| > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} q^n$ diverge.
  - Si $q = 1$, alors $\sum_{n\geq 0} q^n = N+1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} q^n$ diverge.
- $\sum_{n\geq 1} log(1+1/n)$:
  On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^{N} log(\frac{n+1}{n}) = log(N+1)$ (télescopage).
  Or $log(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$, donc la série $\sum_{n\geq 1} log(1+1/n)$ diverge.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$:
  On a $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$ (télescopage).
  Or $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
- **Important, démontré plus tard :** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. *(idée : montrer que S_N converge en montant $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$ sont adjacentes)*

✕ Attention ✕ Ces six exemples sont à connaître et comprendre parfaitement.

Application : Étudier la convergence de la série géométrique pour $|q| = 1$ et $q = -1$ ($q \in \mathbb{C}$).

C Propriétés des séries convergentes

Propriété : Convergence de la combinaison linéaire *(admise)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes.
Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\sum_{n\geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n + \mu \sum_{n\geq 0} v_n$, cette série converge (vers la combinaison linéaire des limites).

Remarque : En d'autres termes, la somme de deux séries convergentes est une série $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ qui converge.

Preuve :
La suite de sommes partielles associée à $\sum_{n\geq} (u_n + v_n)$ est $\sum_{n=0}^{N} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N} (u_n) + \sum_{n=0}^{N} (v_n)$
Comme $\sum_{n=0}^{N} (u_n)$ et $\sum_{n=0}^{N} (v_n)$ sont convergentes, on a $\sum_{n=0}^{N} (u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (v_n)$.

Exemple : Retour : Divergence de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$
But : minorer $\sum_{n\geq 1}^{N} \frac{1}{n} \forall N \in \mathbb{N}$.
$n \leq t \in \mathbb{R} \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$
Intégrons entre n et $n+1$: $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$
Donc en sommant : $\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$
donc par Chasles : $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$
Or $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$.
Donc la série harmonique diverge.

Propriété : Divergence de la combinaison linéaire *(admise)*

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente et $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série divergente.
Alors $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ diverge.

Preuve : *visiblement l'énoncé...*
$\sum_{n=0}^{N}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{N}(u_n)+\sum_{n=0}^{N}(v_n)$
Comme $\sum_{n=0}^{N}(u_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{N}(v_n)$ est divergente, on a $\sum_{n=0}^{N}(u_n+v_n)$ est divergente.

✕ Attention ✕ Quand on considère deux séries divergentes, la situation est à étudier au cas par cas.

Exemple : Considérons $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n=1 \forall n\in\mathbb{N}$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ avec $v_n=-1\forall n\in\mathbb{N}$.
D'une part $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, et $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge aussi.
Mais $\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n)=\sum_{n\geq 1} 0=0$ converge.

Mais si on considère $v_n=u_n$, alors $\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n)=\sum_{n\geq 1} 2u_n$ diverge.

✕ Attention ✕ Source d'erreur classique : Si $\sum_{n\geq 0} u_n+v_n$ est convergente, ***a priori*** on ne peut pas écrire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n+v_n=\sum_{n=0}^{\infty} u_n+\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ car les séries de termes généraux u_n et v_n peuvent être divergentes (il faut donc vérifier leur convergence).

Proposition : *(admis)*

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique où $u_n\in\mathbb{C}\ \forall n\in\mathbb{N}$.
On a $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ les suites $(Re(u_n))$ et $(Im(u_n))$ sont convergentes.

Application : Montrer la proposition précédente.

Indication pour la preuve:
écrire $u_n=Re(u_n)+iIm(u_n)$ et utiliser la propriété sur les combinaisons linéaires.

Théorème : Lien entre convergence et limite des termes

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Preuve:
Considérons (S_N) la suite des sommes partielles associée à $\sum_{n\geq 0} u_n$.
On a $S_{N+1}-S_N=u_{N+1}\ \forall N\in\mathbb{N}$.
Or $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow (S_N)$ converge. Donc $\lim_{N\to\infty} S_N-\lim_{N\to\infty} S_{N+1}=0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} u_N=0$.

✕ Attention ✕ La réciproque est fausse. Par exemple la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge mais $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Vocabulaire : Si $u_n \nrightarrow 0$, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

D Reste d'une série

Définition : On suppose que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme et (S_N) la suite des sommes partielles.
Le **reste** de la série au rang N est $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$.

Proposition : Comportement du reste

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Preuve:
Par définition, $R_N = S - S_N$. Or $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} S$. Donc $R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

III Série absolument convergente (ACV)

A Critère de Cauchy pour les séries numériques

Ce qui a été fait dans le **Chapitre 1 - Suites de Cauchy** sur les suites réelles reste valable si on considère des suites complexes.

Définition : On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le **critère de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$$

Proposition : Convergence et critère de Cauchy

$\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve: (par équivalence)
$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ (S_N) converge $\Leftrightarrow$ (S_N) est une suite de Cauchy *(car l'espace est complet)* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |S_{N+p} - S_N| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{n=N}^{N+p} u_n| < \varepsilon$

Remarque : Autre preuve de la divergence de la série harmonique :
Soit $\varepsilon = 1/2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut choisir $p = N$ et on a : $|\sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k}| \geq \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$.
Donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc elle diverge.

B Définitions et propriétés

Définition : On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente (ACV) si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème : Série ACV et convergence

Série ACV $\Rightarrow$ série convergente et $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Preuve:
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série ACV.
Donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.
Donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k|| < \varepsilon$
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N+1}^{N+p} u_k| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k| < \varepsilon$
Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, |\sum_{k=N}^{N+p} u_k| < \varepsilon$
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et on a $|\sum_{n=0}^{N} u_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n| \implies |\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

✖ **Attention** ✖ La réciproque est fausse.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

IV Convergence absolue d'une série

Note de rédaction : Correspond à II. dans le plan de cours du prof.

A Séries à termes positifs

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ $(u_n \geq 0)$ converge $\Leftrightarrow$ la suite (S_N) des sommes partielles est bornée.

Preuve:
En effet, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$ donc (S_N) est croissante (à termes positifs).
Ainsi (S_N) converge $\Leftrightarrow$ (S_N) est bornée *(théorème de convergence monotone)*.
Or $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ (S_N) converge.
Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ (S_N) est bornée.

Remarque : Si (S_N) n'est pas bornée, alors $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$. On tolère la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.