

Chapitre 2 : Groupes symétriques

I Permutations

Définition : Soient X un ensemble et $S(X)$ l'ensemble des bijections de X dans X . On appelle permutation de X tout élément de $S(X)$.

Propriété : Ensemble des permutations (*admise*)
 $(S(X), \circ)$ est un groupe (*en général non commutatif*).

Vocabulaire : C'est le groupe symétrique sur X .

Démonstration :

- La composée de deux bijections est une bijection, donc \circ est une loi interne sur $S(X)$.
- La loi \circ est associative.
- L'élément neutre est l'identité id_X .
- L'inverse d'une bijection est une bijection (la bijection réciproque). \square

Proposition :

Soit Y un ensemble avec une bijection $b : X \rightarrow Y$.
 L'application $\varphi_b : S(X) \rightarrow S(Y)$ définie par $\sigma \mapsto b \circ \sigma \circ b^{-1}$ est un isomorphisme de groupe.

Remarque : Donc $S(Y)$ est isomorphe à $S(X)$.

Démonstration :

φ_b est bien définie : comme b et σ sont bijectives, $b \circ \sigma \circ b^{-1}$ est bijective.

φ_b est un morphisme $\forall \sigma, \sigma' \in S(X)$. On a :

$$\varphi_b(\sigma \circ \sigma') = b \circ (\sigma \circ \sigma') \circ b^{-1} = b \circ \sigma \circ b^{-1} \circ b \circ \sigma' \circ b^{-1} = (b \circ \sigma \circ b^{-1}) \circ (b \circ \sigma' \circ b^{-1}) = \varphi_b(\sigma) \circ \varphi_b(\sigma')$$

φ_b est bijective car sa réciproque est donnée par $\tau = b^{-1} \circ \tau \circ b$. \square

Définition : Supposons X fini de cardinal n .

Il existe une bijection $1, 2, \dots, n \rightarrow X$ (numérotation de X).

On prend $S_n = S(1, 2, \dots, n)$: c'est le **groupe symétrique sur n lettres**. Il est isomorphe à $S(X)$

Notation par tableau : σ

$$\begin{array}{c|cccccc} i & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline \sigma(i) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{array}$$

Définition : Soit $\sigma \in S(X)$.

Le support de σ est $x \in X \mid \sigma(x) \neq x$

Exemple : Prenons $S(X) = S_6$.

$$\begin{array}{c|cccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \sigma(i) & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{array}$$

σ a pour support $1, 3, 4, 6$.

Proposition :

Soient $\sigma, \sigma' \in S(X)$ de supports disjoints.
Alors σ et σ' commutent, i.e. $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$

Démonstration :

Soient S et S' les supports de σ et σ' . On a $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma'(\sigma(x)) = \sigma'(x)$.
On a $\sigma'(x) \notin S$, sinon $\sigma'(x) \notin S'$ et $\sigma'(\sigma'(x)) = \sigma'(x)$
donc $\sigma'(x) = x$, donc $\sigma'(x) \notin S$.
Donc $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma'(x) = \sigma' \circ \sigma(x)$.

De même, si $x \in X - S'$, on a : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma' \circ \sigma(x)$.
Comme $S \cap S' = \emptyset$, on a : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma' \circ \sigma(x) \forall x \in X$. \square

Propriété : Ordre de S_n

Le groupe S_n est d'ordre $n!$.

Démonstration :

Soient X, Y deux ensembles à n éléments.
Montrons que $\#\{\text{bijections } X \rightarrow Y\} = n!$.
En effet, si $X = x_1, \dots, x_n$ et $f : X \rightarrow Y$ est une bijection, il y a :

- n possibilités pour $f(x_1)$
- $n - 1$ possibilités pour $f(x_2)$
- \vdots
- 1 possibilité pour $f(x_n)$

II Cycles

Définition : Soit X un ensemble et soit $k \geq 2$ un entier.

Un k -cycle de $S(X)$ est donné par $a_1, a_2, \dots, a_k \in X \mid a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j$.

et $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ pour $1 \leq i < k$ et $\sigma(a_k) = a_1$ et σ de support a_1, a_2, \dots, a_k .
On le note $(a_1 \cdots a_k)$.

✗ **Attention** ✗ La notation n'est pas unique : $(a_i a_{i+1} \cdots a_k a_1 a_2 \cdots a_{i-1}) = (a_1 \cdots a_k)$

🗨 **Vocabulaire :** On dit qu'une permutation c est un cycle s'il existe $k \geq 2 \mid c$ est un k -cycle. Alors k s'appelle la longueur de c .

Proposition :

Comme élément du groupe $S(X)$ un k -cycle c est d'ordre k .

Démonstration :

Posons $c = (a_1 \cdots a_k)$.
On a $c^k(a_1) = a_{1+k} \neq a_1$.
Donc $\text{ordre}(c) \geq k$. On a $c^k(a_i) = a_i \forall i$, donc c est d'ordre k . \square

📌 Remarque : Rappel

Des cycles à supports disjoints commutent.

Soient $c = (a_1 \cdots a_k)$ et $c' = (a'_1 \cdots a'_{k'})$ deux cycles de $S(X)$ tels que $S(c) \cap S(c') = \emptyset$.
avec $a_1, \dots, a_k \cap a'_1, \dots, a'_{k'} = \emptyset$.
On a $c \circ c' = c' \circ c$

Définition : Soit $x \in X$, l'**orbite de x sous σ** est $\{\sigma^m(x) \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque : On a $x \notin \text{Support}(\sigma)$ si $\sigma(x) = x \Leftrightarrow$ orbite de x est un singleton.
Si σ est un k -cycle de support S et $x \in S$, l'orbite de x a k éléments, c'est S .

Théorème :

Si X est fini, tout élément de $S(X)$ s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints.
Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration :

• **Existence :** (par récurrence)

Si $\text{Support}(\sigma) = \emptyset$, on a $\sigma = id_X$: c'est bien un produit (vide) de cycles.

Supposons maintenant que $\text{Support}(\sigma) \neq \emptyset$. Soit $x \in \text{Support}(\sigma)$.

Soit $\sigma' \in S(X)$ donnée par $\sigma'(y) = \sigma(y)$ si $y \notin \text{orbite de } x$, $\sigma'(y) = y$ sinon.

Considérons le cycle c donné par : $(x\sigma(x)\sigma^2(x) \dots \sigma^k(x))$ avec $k = \min\{m \mid \sigma^m(x) = x\}$.

C'est un k -cycle de support l'orbite de x .

Si $y \in \text{orbite de } x$ on a $\sigma(y) = c(y)$.

Alors σ et c sont de supports disjoints et on a : $\sigma = \sigma'c = c\sigma'$.

En effet, soit $y \in X$,

$y \notin \text{orbite de } x$ on a $\sigma'(y) = c(y)$

✗ **Attention** ✗ Démonstration non terminée, j'ai perdu le fil

💬 **Note de rédaction :** Le prof écrivait pas clair au tableau, et la démo était pas claire, cette partie est à vérifier.