Chapitre 1 : Réduction des endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans toute ce chapitre, on notera E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

I Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.
On dit que F est **stable** par f si $f(F) \subset F$., $i.e.$ $\forall x \in F, f(x) \in F$.

Remarque :

- 0_E est stable par f.
- E est stable par f.
- $\ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par f.

Preuve:

II Éléments propres d'un endomorphisme

Vocabulaire : On appelle **élément propre** de f ses valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres.

A Valeur propre

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
λ est une **valeur propre** de f si $\exists x \in E \setminus \{0_E\} : f(x) = \lambda x$.
On dit que x est un **vecteur propre** de f associé à λ.

L'ensemble des valeurs propres de f est noté $Sp(f)$ et appelé **spectre** de f.

B Sous-espace propre

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note $E_\lambda(f)$ le **sous-espace propre** de f associé à λ, défini par :

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E : f(x) = \lambda x\}.$$

$E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : $E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f associés à λ.

Remarque :

- $\lambda \in Sp(f) \iff f$ n'est pas injective $\iff \det(E_\lambda(f)) \neq 0$.
- $0_E \in Sp(f) \iff \det(f) = 0$.

Preuve:

III Polynôme caractéristique

Définition : On appelle **polynôme caractéristique** d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) = \det(A - XId_n).$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Déterminons son polynôme caractéristique.

$\chi_A(X) = \det(A - XId_3) = \det\left(\begin{pmatrix} 5-X & 0 & 4 \\ 4 & 1-X & 0 \\ -8 & 0 & -7-X \end{pmatrix}\right)$

En développant le déterminant suivant la deuxième colonne, on obtient :

$$\chi_A(X) = (1-X)\det\left(\begin{pmatrix} 5-X & 4 \\ -8 & -7-X \end{pmatrix}\right) = (1-X)\left((5-X)(-7-X)+32\right).$$

En factorisant ce polynôme, on trouve :

$$\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$$

Remarque : $\lambda \in Sp(A) \iff \det(A - \lambda Id_E) = 0 \iff \chi_A(\lambda) = 0.$
Donc : $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0\}$.

Preuve:

Exemple : (suite de l'exemple précédent)
On a trouvé le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$.
Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ (de multiplicité 2) et $\lambda_2 = -3$.
Alors, on a : $Sp(A) = \{1, -3\}$.

Remarque : $A \in M_2(\mathbb{K}) \implies Sp(A) = \chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A).$

Preuve:

IV Matrice diagonalisable

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si A est **semblable** à une matrice diagonale.

Autrement dit, A est diagonalisable si $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale et P est une matrice inversible.

Remarque :

- Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A, et soient $E_{\lambda_i}(A)$ les sous-espaces propres associés à λ_i.
  A diagonalisable $\iff$ $\dim(E_{\lambda_i}(A)) =$ ordre de multiplicité de λ_i.
  $e.g.$ λ_i est une valeur propre simple, alors $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = 1$.
- A diagonalisable $\iff$ $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(A)$. ($i.e. E$ est la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A)

Exemple : (suite de l'exemple précédent)
On a trouvé que $Sp(A) = \{1, -3\}$ et $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+3)$.
Alors, A est diagonalisable si :

$$\begin{cases} \dim(E_1(A)) = 2 \\ \dim(E_{-3}(A)) = 1 \end{cases}$$

On a aussi que A est diagonalisable si $\mathbb{R}^3 = E_1(A) \oplus E_{-3}(A)$.