1 Sous-espaces stables

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$.
Détermine si les sous-espaces suivants sont stables par f :

- $F_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$
- $F_2 = \text{Vect}(1, 0, -1)$
- $F_3 = \text{Vect}(1, 1, 1)$

2 Valeurs propres et vecteurs propres

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (3x + y, x + 3y)$.

1. Détermine la matrice de f dans la base canonique.
2. Calcule le polynôme caractéristique.
3. Trouve les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
4. Le spectre contient-il 0 ? f est-elle diagonalisable ?

3 Polynôme caractéristique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calcule le polynôme caractéristique de A.
2. Détermine les valeurs propres de A.
3. Donne une base de chaque sous-espace propre.
4. A est-elle diagonalisable ? Justifie.

4 Étude complète d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Rappelle le polynôme caractéristique de A donné dans le cours.
2. Trouve une base de chaque sous-espace propre.
3. Déduis P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Vérifie que $\mathbb{R}^3 = E_1(A) \oplus E_{-3}(A)$.

5 Théorie — diagonalisabilité

Prouve que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors :

- Le polynôme caractéristique de f est scindé.
- Pour toute valeur propre λ, la dimension de $E_\lambda(f)$ est égale à sa multiplicité algébrique.

Indication : utilise le théorème du rang, le lien entre dimension et injectivité, et la décomposition en base de vecteurs propres.

6 Diagonalisabilité

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calcule son polynôme caractéristique.
2. Donne ses valeurs propres et les sous-espaces propres.
3. A est-elle diagonalisable ? Justifie rigoureusement.

7 Matrice à paramètres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Calcule le polynôme caractéristique.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice est-elle diagonalisable ?
3. Interprète géométriquement le cas où $a \neq 0$.