# Chapitre 2 : Séries numériques

#### Séries et sommes d'une série

**Définition :** Soit  $(u_n)$  une suite dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On considère  $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n \in \mathbb{K}.$ 

On a donc une suite  $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$  associée à la suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**Définition**: On appelle série de terme général  $u_n$  que l'on note  $\sum_{n>0} u_n$  la suite  $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ .

- Note de rédaction : Les deux définitions précédentes peuvent être regroupées.
- $\bigcirc$  Vocabulaire : On dit que  $(S_n)$  est la suite des sommes partielles de la série.
- **1** Remarque:  $(S_n)$  correspond aux N+1 premiers termes de la suite.

#### Correspondance suite - série

Raisonnement : Par définition une série est une suite. Expliquons comment une suite peut-être vue comme une

Si  $(u_n)$  est une suite, considérons la série de terme général  $v_n = u_n - u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$  (avec la convention  $v_0 = u_0$ ). Ainsi,  $u_n = \sum_{k=0}^n v_k$ .

 $oldsymbol{0}$  Remarque : Cependant la série associée à une suite  $(u_n)$  va s'étudier en tant que telle (que série) grâce à  $u_n$ .

### **Opérations sur les séries**

Propriété: Opérations sur les séries (admise)

Soient  $\sum_{n\geq 0}u_n$  et  $\sum_{n\geq 0}v_n$  deux séries. Alors, pour tout  $\lambda\in\mathbb{K}$  :

- Somme :  $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)=\sum_{n\geq 0}u_n+\sum_{n\geq 0}v_n$  définie comme  $(S_N+S_N')$
- Produit par un scalaire :  $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$  définie comme  $(\lambda S_N)$
- **?** Exemple: Si  $u_n=0, \forall n\in\mathbb{N}$ , alors  $\sum_{n>0}u_n=0$  est la série nulle.

#### Troncature d'une série

**Définition :** Si  $(u_n)$  est une suite définie pour  $n \geq n_0 \mid n_0 \in \mathbb{N}$ . On peut considérer la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  où  $u_0=u_1=...=u_{n_0-1}=0$ , ou bien on peut écrire  $\sum_{n\geq n_0}u_n$ . Si  $\sum_{n\geq 0}u_n$  est une série de terme général  $u_n$ , une **troncature** de la série est  $\sum_{n\geq n_0}u_n$ . C'est la suite  $(S_N)$  où  $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n.$ 

- Note de rédaction : Cette définition pourraît être synthétisée.
- Exemple :

- · la série nulle
- la série géométrique de raison  $q\in\mathbb{C}^*$  :  $\sum_{n\geq 0}q^n$  de terme général  $q^n$  ;
- la série harmonique :  $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$  de terme général  $\frac{1}{n}$  ;
- la série  $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$ .

## Il Convergence d'une série

#### A Définitions et nature d'une série

**Définition :** Soit  $\sum_{n\geq 0} u_n$  une série.

On dit que la série converge, si la suite  $(S_N)$  converge, et on note S la limite de  $S_N$ .

S s'appelle la somme de la série.

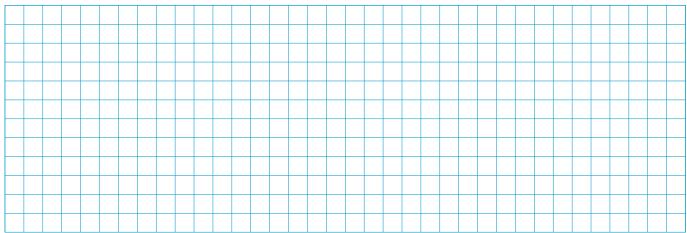
Dans ce cas, on écrit :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}$  (c'est une "somme infinie", un objet-limite).

- $igoplus extsf{Vocabulaire}: extsf{Si} \ (S_N) \ ext{diverge}, \ ext{alors on dit que la série} \ \sum_{n\geq 0} u_n \ ext{diverge}.$
- **X** Attention **X** Si S n'existe pas, alors on écrit **jamais** la notation avec  $\infty$
- De Vocabulaire : La convergence ou la divergence d'une série s'appelle la nature de la série.

Proposition : Stabilité de la limite par troncature (admis)

La nature d'une série n'est pas modifée par troncature.

#### Preuve:



Note de rédaction : Indication : les premiers termes n'influencent pas la convergence.

## B Quelques applications...

#### **©** Exemple :

• Si  $(u_n)$  est nulle à partir d'un rang  $N_0$  alors la série  $\sum_{n\geq 0} u_n$  est converge, et  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N_0} u_n$ .

• Série géométrique  $\sum_{n>0}q^n$  :

On considère la suite des sommes partielles  $(S_N)$  où  $S_N=\sum_{n=0}^N q^n$  =  $\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$  avec  $q\neq 1$ . On a plusieurs cas :

- Si 
$$|q| < 1$$
,  $q^{N+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$  donc  $S_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ . La série  $\sum_{n > 0} q^n$  converge et on arrive à trouver S!

- Si |q| > 1, alors  $\sum_{n > 0} q^n$  diverge.
- Si q=1, alors  $\sum_{n\geq 0}q^n=N+1\Rightarrow \sum_{n\geq 0}q^n$  diverge.
- $\sum_{n>1} log(1+1/n)$ :

On a  $\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N log(\frac{n+1}{n}) = log(N+1)$  (télescopage). Or  $log(N+1) \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty$ , donc la série  $\sum_{n\geq 1} log(1+1/n)$  diverge.

• 
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$
:

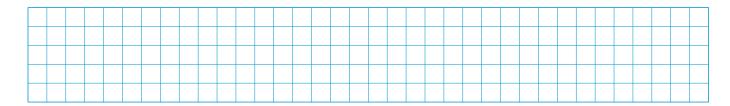
On a 
$$\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$$
 (télescopage).

On a 
$$\forall N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1}$$
 (télescopage). Or  $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  converge et  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

- Important, démontré plus tard :  $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$  (série harmonique) diverge.
- $\sum_{n>1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge. (idée: montrer que  $S_N$  converge en montant  $A_N = S_{2N}$  et  $B_N = S_{2N+1}$  sont adjacentes)

**X** Attention **X** Ces six exemples sont à connaître et comprendre parfaitement.

**Application**: Étudier la convergence de la série géométrique pour |q|=1 et q=-1 ( $q\in\mathbb{C}$ ).



## Propriétés des séries convergentes

Propriété : Convergence de la combinaison linéaire (admise)

Soient  $\sum_{n\geq 0} u_n$  et  $\sum_{n\geq 0} v_n$  deux séries convergentes. Alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ :  $\sum_{n\geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n + \mu \sum_{n\geq 0} v_n$  et cette série converge.

 $oldsymbol{0}$  Remarque : En d'autres termes, la somme de deux séries convergentes est une série  $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$  qui converge.

#### Preuve:

La suite de sommes partielles associée à  $\sum_{n\geq 1} (u_n+v_n)$  est  $\sum_{n=0}^N (u_n+v_n) = \sum_{n=0}^N (u_n) + \sum_{n=0}^N (v_n)$ Comme  $\sum_{n=0}^N (u_n)$  et  $\sum_{n=0}^N (v_n)$  sont convergentes, on a  $\sum_{n=0}^N (u_n+v_n)$  est convergente et sa limite est  $\sum_{n=0}^\infty (u_n+v_n) = \sum_{n=0}^\infty (u_n) + \sum_{n=0}^\infty (v_n)$ .