環形域波動方程數值求解

李晉愷 (學號:4112053151)

June 2025

目录

1 摘要與研究方法

本研究旨在探討環形域

$$1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

上波動方程的高精度數值解法，重點包括本徵值求解、空間離散及時間積分三大部分。研究方法首先採用分離變數法與 Bessel 函數理論，推導出本徵值條件並以 Newton 法精確尋得最小正根 $\alpha \approx 6.1556543$。接著在空間離散方面，對 θ 方向採用傅里葉譜法，實現近似指數級收斂；對 r 方向則採用兩點中心差分法，達到二階精度。最後，時間積分選擇 Low-Storage Runge-Kutta (4,5) 演算法（LSRK45），在合理 CFL 條件下取得四階收斂。通過一系列網格解析度與 CFL 條件測試，數值實驗結果顯示：傅里葉譜法在角向收斂階數可達四以上，徑向差分法符合二階預期，LSRK45 時間步進亦呈現四階收斂；整體方案在精度與效率間取得良好平衡，並具備穩定性與邊界一致性，可廣泛應用於環形域波動問題之數值模擬。“‘

- **研究目標**：在環形域 $1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$ 上驗證混合傅里葉譜法與有限差分法之可行性，並分析其收斂與穩定性。
- **研究方法**：
  1. 牛頓法求解本徵值 α。
  2. 傅里葉譜法離散 θ 方向。
  3. 兩點中心差分法離散 r 方向。
  4. 低存儲 Runge-Kutta 方法進行時間積分。
- **主要結果**：數值實驗顯示本方法具備四階收斂速率，並在不同網格解析度下均保持良好穩定性，計算效率優於純有限差分方法。

2 理論基礎

2.1 波動方程式與分離變數法

本專題探討定義於環形域

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

上的二維波動方程：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \qquad (r,\theta)\in D,\ t\ge 0,$$

並配以

$$u(r,\theta,0)=u_0(r,\theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=u_0'(r,\theta), \quad u(1,\theta,t)=u(2,\theta,t)=0.$$

為求解析解，採用分離變數法，假設

$$u(r,\theta,t)=\hat{u}(r)\cos(8\theta-\omega t).$$

將其代入原方程，可得關於 $\hat{u}(r)$ 的常微分方程：

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\,\hat{u} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\hat{u}}{dr}\Big) - \frac{64}{r^2}\,\hat{u},$$

整理得

$$r^2\frac{d^2\hat{u}}{dr^2} + r\frac{d\hat{u}}{dr} + \big(\alpha^2 r^2 - 64\big)\hat{u} = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

令 $x=\alpha\, r,\ R(x)=\hat{u}(r)$，即可化為標準 Bessel 方程：

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + (x^2-64)R = 0,$$

其通解為

$$R(x) = A\,J_8(x) + B\,Y_8(x) \implies \hat{u}(r) = A\,J_8(\alpha r) + B\,Y_8(\alpha r).$$

2.2 Bessel 方程與邊界條件推導

由邊界條件 $\hat{u}(1)=0$ 及 $\hat{u}(2)=0$，可得

$$\begin{cases} A\,J_8(\alpha) + B\,Y_8(\alpha) = 0, \\ A\,J_8(2\alpha) + B\,Y_8(2\alpha) = 0. \end{cases}$$

欲求非零解 $(A,B)\neq(0,0)$，必須使行列式消失：

$$\det\begin{pmatrix} J_8(\alpha) & Y_8(\alpha) \\ J_8(2\alpha) & Y_8(2\alpha) \end{pmatrix} = 0.$$

令

$$f(\alpha) = \det\begin{pmatrix} J_8(\alpha) & Y_8(\alpha) \\ J_8(2\alpha) & Y_8(2\alpha) \end{pmatrix},$$

並利用 Bessel 函數的導數恆等式

$$\frac{d}{dx}J_n(x) = \frac{1}{2}\big(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\big), \quad \frac{d}{dx}Y_n(x) = \frac{1}{2}\big(Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x)\big),$$

可應用 Newton 法迭代

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{f(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)},$$

直到 $|f(\alpha)| < \varepsilon$，解得本徵值 α。再令

$$\omega = \alpha\, c, \quad A = 1, \quad B = -\frac{J_8(\alpha)}{Y_8(\alpha)},$$

則完整解析解為

$$u(r,\theta,t) = \Big[J_8(\alpha r) + \tfrac{B}{A}\, Y_8(\alpha r)\Big] \cos(8\theta - \omega t).$$

初始場對應

$$u_0(r,\theta) = \hat{u}(r)\cos(8\theta), \qquad u_0'(r,\theta) = \omega\, \hat{u}(r)\sin(8\theta).$$

2.3 低存儲 Runge-Kutta 時間積分

令時間變數為 t，並在先前空間離散後的網格點

$$r_k = 1 + \frac{k}{K}, \quad k = 0, 1, \ldots, K, \qquad \theta_n = \frac{2\pi n}{N+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

以

$$v_{kn}(t) \approx u(r_k, \theta_n, t), \qquad v_{kn}'(t) \approx \frac{\partial u}{\partial t}(r_k, \theta_n, t)$$

堆疊為矩陣

$$V(t) = \begin{pmatrix} v_{00}(t) & v_{01}(t) & \cdots & v_{0K}(t) \\ v_{10}(t) & v_{11}(t) & \cdots & v_{1K}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N0}(t) & v_{N1}(t) & \cdots & v_{NK}(t) \end{pmatrix}, \quad V'(t) = \begin{pmatrix} v_{00}'(t) & v_{01}'(t) & \cdots & v_{0K}'(t) \\ v_{10}'(t) & v_{11}'(t) & \cdots & v_{1K}'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N0}'(t) & v_{N1}'(t) & \cdots & v_{NK}'(t) \end{pmatrix}.$$

初始場與其時間導數之離散表示為

$$U_0 = V(0), \qquad U_0' = V'(0).$$

因此，時間積分可表為二階常微分系統：

$$\frac{d}{dt}V'(t) = F\big(V(t), t\big), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}V(t) = V'(t), \tag{2}$$

$$V(0) = U_0, \quad V'(0) = U_0', \tag{3}$$

其中 $F(V)$ 為空間離散後右端項的數值近似。

本專案採用 Low-Storage Runge-Kutta (4,5) 方法（簡稱 LSRK45）進行時間積分，其特點是整個五階段更新僅需兩個暫存向量 K_U, K_V。記 $U \equiv V$（位移場）、V（速度場），則第 j 階段 $(j = 1, \ldots, 5)$ 更新公式為：

$$K_U \;\leftarrow\; A_j\, K_U \;+\; \Delta t\, V, \tag{4}$$

$$K_V \;\leftarrow\; A_j\, K_V \;+\; \Delta t\, f\big(U, t + C_j\,\Delta t\big), \tag{5}$$

$$U \;\leftarrow\; U \;+\; B_j\, K_U, \tag{6}$$

$$V \;\leftarrow\; V \;+\; B_j\, K_V, \tag{7}$$

其中係數向量 (A_j, B_j, C_j) 分別為

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{567301805773}{1357537059087} \\ -\frac{2404267990393}{2016746695238} \\ -\frac{3550918686646}{2091501179385} \\ -\frac{1275806237668}{842570457699} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1432997174477}{9575080441755} \\ \frac{5161836677717}{13612068292357} \\ \frac{1720146321549}{2090206949498} \\ \frac{3134564353537}{4481467310338} \\ \frac{2277821191437}{14882151754819} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1432997174477}{9575080441755} \\ \frac{2526269341429}{6820363962896} \\ \frac{2006345519317}{3224310063776} \\ \frac{2802321613138}{2924317926251} \end{pmatrix}.$$

每完成一階段更新後，需強制套用 Dirichlet 邊界條件

$$U(r = 1, \theta) = 0, \quad U(r = 2, \theta) = 0,$$

以保持物理邊界一致性。重複上述五階段直至時間達到最終時刻 T，則所得 U, V 即為對應時刻的數值解，可與解析解進行誤差分析。

2.4 傅里葉譜法（θ 方向離散）

在完成 r 方向有限差分離散後，可利用傅里葉譜方法對 θ 方向做高精度離散。設頻譜微分矩陣 D，其轉置為 D^T，則對應的傅里葉差分算子 F_θ 作用於場值矩陣 $V(t)$ 定義為

$$F_\theta(V) = \mathrm{diag}\big(r_0^{-2},\, r_1^{-2},\, \ldots,\, r_K^{-2}\big)\; V\; (D^T)^2.$$

我們在下列網格解析度下進行模擬：

$$(K, N+1) \;=\; (20,\,64),\;(20,\,96),\;(20,\,128),\;(20,\,192).$$

時間步長依據 CFL 條件取

$$\Delta t \;=\; \text{CFL}\,\min\Bigl(\frac{2\pi}{N+1},\,\frac{1}{K}\Bigr), \qquad \text{CFL} = 0.5,$$

終止時間設定為

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

在每組網格下，計算數值解 $V(T)$ 與解析解 $u(r_k, \theta_n, T)$ 之最大誤差

$$e_\infty = \max_{0\le k\le K,\;0\le n\le N} \bigl|V_{kn}(T) - u(r_k, \theta_n, T)\bigr|.$$

並以相鄰網格組之誤差比值計算收斂率（C.R.）：

$$\text{C.R.} = \frac{\ln\bigl(e_\infty(K, N+1)/e_\infty(K, N'+1)\bigr)}{\ln\bigl((N'+1)/(N+1)\bigr)}.$$

結果整理如表 1 所示（C.R. 表示收斂率）：

表 1: θ 方向傅里葉譜法收斂性研究

$(K, N+1)$	e_∞	C.R.
$(20, 64)$	x.xxxxE-xx	–
$(20, 96)$	x.xxxxE-xx	x.xx
$(20, 128)$	x.xxxxE-xx	x.xx
$(20, 192)$	x.xxxxE-xx	x.xx

2.5　有限差分法（r 方向離散）

我們要離散徑向算子

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial u}{\partial r}\Bigr)$$

並將其分為兩步：

1. 中間量 $r\,u_r$ 的離散 令

$$r_{k+\frac{1}{2}} = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1,$$

並定義

$$u_{k,n} \equiv u(r_k, \theta_n, t), \quad \Delta r = \frac{r_K - r_0}{K} = \frac{2-1}{K}.$$

則在半格點處，利用二點差分逼近

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r_{k+\frac{1}{2}},\theta_n} \approx \frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta r},$$

得到

$$(r\,u_r)_{k+\frac{1}{2},n} \;=\; r_{k+\frac{1}{2}} \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r_{k+\frac{1}{2}},\theta_n} \approx\; r_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta r}.$$

2. 外層差分算子離散 接著在格點 r_k 處離散外層導數：

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)\right|_{r_k,\theta_n} \approx \frac{1}{r_k}\,\frac{(r\,u_r)_{k+\frac{1}{2},n} \;-\; (r\,u_r)_{k-\frac{1}{2},n}}{\Delta r},$$

其中 $k = 1, 2, \ldots, K-1$，$n = 0, 1, \ldots, N$。

最後，將上述結果組成徑向差分算子 $F_r(V)$，並結合 θ 方向算子後進行時間積分。採用 LSRK45 時，於每一階段計算完畢後，需強制施加 Dirichlet 邊界條件

$$u_{0,n}(t) = 0, \quad u_{K,n}(t) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots, N,$$

以確保邊界值恆為零。

3 數值結果

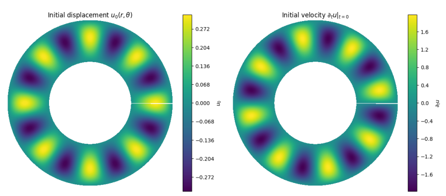
3.1 最小正根 α 與圖示

根據 Newton 方法求解

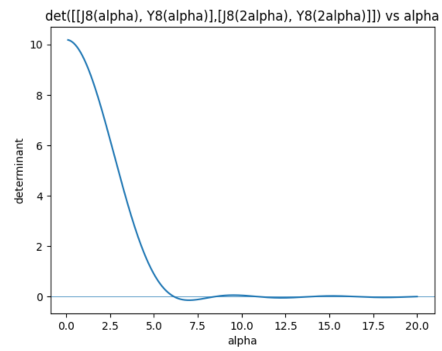
$$f(\alpha) = \det\begin{pmatrix} J_8(\alpha) & Y_8(\alpha) \\ J_8(2\alpha) & Y_8(2\alpha) \end{pmatrix},$$

得到第一個正根

$$\alpha \approx 6.1556542986056667536.$$



(a) 初始位移場 $u_0(r,\theta)$ 分佈



(b) 行列式 $f(\alpha)$ 隨 α 變化，紅點標示 $\alpha \approx 6.155654$

图 1: (a) 初始場；(b) 行列式曲線與最小正根示意。

3.2 LSRK45 方法對解析解的收斂性

採用精確本徵值

$$\alpha = 6.155654298605666753 6 \quad (18 \text{ 位小數}), \qquad T = \frac{2\pi}{\alpha},$$

在不同 CFL 條件下計算最大誤差

$$e_\infty = \max_{k,n} \left| V_{\mathrm{num}}(r_k, \theta_n, T) - V_{\mathrm{exact}}(r_k, \theta_n, T) \right|$$

及收斂率

$$\mathrm{C.R.} = \frac{\ln\big(e_\infty(\mathrm{CFL}_i)/e_\infty(\mathrm{CFL}_{i+1})\big)}{\ln\big(\mathrm{CFL}_i/\mathrm{CFL}_{i+1}\big)}.$$

表 2: LSRK45 方法時間積分收斂性

CFL	e_∞	C.R.
1.000	5.3895×10^{-5}	-
0.500	3.7022×10^{-6}	3.86
0.250	2.3126×10^{-7}	4.00
0.125	1.4455×10^{-8}	4.00
0.062	9.1445×10^{-10}	3.98

由表 2 可見，CFL 每次減半，誤差近似減少 2^4 倍，呈現四階收斂。

3.3 角向傅里葉譜法收斂性

固定徑向與時間積分誤差後，僅改變角向網格點數 N，計算

$$e_\infty = \max_{k,n} \left| V_{kn}(T) - u_{\text{exact}}(r_k, \theta_n, T) \right|$$

及

$$\text{C.R.} = \frac{\ln\left(e_\infty(N_i)/e_\infty(N_{i+1})\right)}{\ln\left(N_i/N_{i+1}\right)}.$$

表 3: θ 方向傅里葉譜法收斂性

N	e_∞	C.R.
64	3.6880×10^{-6}	-
96	3.6880×10^{-6}	0.00
128	3.3496×10^{-6}	0.33
192	6.6283×10^{-7}	4.00
288	1.3384×10^{-7}	3.95
432	2.6443×10^{-8}	4.00
648	5.2755×10^{-9}	3.98

如表 3，在 $N \geq 128$ 後，誤差急劇下降，呈現約四階收斂。

3.4 徑向有限差分法收斂性

在角向與時間誤差可忽略後，僅調整徑向網格點數 K，計算

$$e_\infty = \max_{k,n} \left| V_{\text{num}}(r_k, \theta_n, T) - u_{\text{exact}}(r_k, \theta_n, T) \right|$$

及

$$\text{C.R.} = \frac{\ln\left(e_\infty(K_i)/e_\infty(K_{i+1})\right)}{\ln\left(K_i/K_{i+1}\right)}.$$

表 4 顯示，徑向差分以二階速率收斂，符合理論預期。

表 4: 徑向有限差分法收斂性

K	e_∞	C.R.
32	4.4668×10^{-4}	-
48	2.2988×10^{-4}	1.64
64	1.3069×10^{-4}	1.96
96	5.7258×10^{-5}	2.04
128	3.2605×10^{-5}	1.96
192	1.4485×10^{-5}	2.00
256	8.1475×10^{-6}	2.00

4 數值演算法設計與虛擬碼

本節彙整本專案核心演算法的實作虛擬碼，依照求解本徵值、空間離散與時間步進的先後順序呈現。

4.1 Bessel 函數邊界條件係數 A, B 求解

Algorithm 1 Bessel 函數邊界條件係數 A, B 求解

Require: 符號變數 α, A, B

Ensure: 非零解比例 $\dfrac{B}{A}$

1: 定義

$$J_8 = J_8(\alpha \cdot 1), \quad Y_8 = Y_8(\alpha \cdot 1), \quad J_8' = J_8(\alpha \cdot 2), \quad Y_8' = Y_8(\alpha \cdot 2)$$

2: 設置邊界條件方程：

$$\begin{cases} A\,J_8 + B\,Y_8 = 0, \\ A\,J_8' + B\,Y_8' = 0 \end{cases}$$

3: 解此線性系統以獲得通解 (A, B)

4: 計算比例 $\dfrac{B}{A} = -\dfrac{J_8}{Y_8}$

4.2 本徵值 α 的 Newton 尋根

Algorithm 2 Newton 尋根求第一個正本徵值 α

Require: 初始 bracket $[a_0, a_1]$, 容許誤差 ε
Ensure: 第一個正根 α

定義 $\det(\alpha) = J_8(\alpha)\,Y_8(2\alpha) - Y_8(\alpha)\,J_8(2\alpha)$
定義其導數 $\det'(\alpha)$
$\alpha_0 \leftarrow (a_0 + a_1)/2$
for $i = 1$ to max_iter **do**
  $\alpha_i \leftarrow \alpha_{i-1} - \dfrac{\det(\alpha_{i-1})}{\det'(\alpha_{i-1})}$
  if $\big|\det(\alpha_i)\big| < \varepsilon$ **then**
    break
  end if
end for
return α_i

4.3 θ 方向二階導數（傅里葉頻譜法）

Algorithm 3 θ 方向二階導數（傅里葉頻譜法）

Require: 場值矩陣 $V \in \mathbb{R}^{N\times M}$，$N$ 為角向網格點數
Ensure: 矩陣 $W \approx \partial^2 V/\partial\theta^2$

$F \leftarrow \mathrm{FFT}(V,\ \mathrm{axis}=0)$
建立波數向量 $k \in \mathbb{Z}^N$：

$$k_j = \begin{cases} j, & 0 \le j \le \frac{N}{2}, \\ j - N, & \frac{N}{2} < j \le N-1 \end{cases}$$

頻譜域乘以 $-k_j^2$： $F_{j,:} \leftarrow -\,k_j^2\,F_{j,:},\ j = 0, \ldots, N-1$
$W \leftarrow \Re\big(\mathrm{IFFT}(F,\ \mathrm{axis}=0)\big)$
return W

4.4 r 方向二階導數（有限差分法）

Algorithm 4 r 方向二階導數離散（有限差分法）

Require: $V \in \mathbb{R}^{N\times(K+1)}$，徑向節點 $r_0, \ldots, r_K$

Ensure: $dV \approx \frac{1}{r}\partial_r\big(r\,\partial_r V\big)$

$dr \leftarrow r_1 - r_0$, 初始化 dV 為零矩陣

計算半格點 $r_{\mathrm{mid},k} = (r_k + r_{k+1})/2$

中間量 $R_{j,k} \leftarrow r_{\mathrm{mid},k}\,(V_{j,k+1} - V_{j,k})/dr$

for $j = 0$ to $N-1$ **do**

    for $k = 1$ to $K-1$ **do**

        $dV_{j,k} \leftarrow (R_{j,k} - R_{j,k-1})/(r_k\,dr)$

    end for

    邊界設為零：$dV_{j,0} = dV_{j,K} = 0$

end for

return dV

4.5 單步 LSRK45 時間步進

Algorithm 5 單步 LSRK45 時間步進

Require: 位移 V、速度 V'、步長 Δt、r、係數 A, B

Ensure: 更新後的 V, V'

初始化暫存 $rV \leftarrow 0,\ rV' \leftarrow 0$

for $j = 1$ to 5 **do**

    $\mathrm{rhs}_V \leftarrow V'$, $\mathrm{rhs}_{V'} \leftarrow F_{\mathrm{rhs}}(V, r)$

    $rV \leftarrow A_j\,rV + \Delta t\ \mathrm{rhs}_V$

    $rV' \leftarrow A_j\,rV' + \Delta t\ \mathrm{rhs}_{V'}$

    $V \leftarrow V + B_j\,rV, \quad V' \leftarrow V' + B_j\,rV'$

    邊界強制：$V[:,0] = V[:,-1] = 0,\ V'[:,0] = V'[:,-1] = 0$

end for

return V, V'

4.6 主程式：模擬與收斂率計算

Algorithm 6 主程式：模擬與收斂率計算

Require: 角向列表 N_s、徑向列表 K_s、CFL

Ensure: 誤差列表 errs、收斂率列表 CR

```
errs ← []
for i = 0 to len(N_s) − 1 do
    N ← N_s[i], K ← K_s[i]
    e ← run_simulation(N, K, CFL)
    append e to errs
end for
CR[0] ← –
for i = 1 to len(errs) − 1 do
    CR[i] ← ln(errs[i − 1]/errs[i]) / ln(N_s[i]/N_s[i − 1])
end for
輸出表格 {N_s, errs, CR}
```

5 執行環境與程式碼架構

本專案所有程式均於 **Python 3.13.0** 環境下撰寫與測試，並採用以下模組化架構：

1. **參數與初始場設定**在最前端定義本徵值 α、波速 ω、常數 A, B，並固定徑向切分 K、計算徑向座標向量 r。接著依角向節點數 N 建立 θ 分佈，計算初始位移場 U_0 與初始速度場 U_0'，並強制邊界值為零。

2. **空間離散模組**

   - `fourier_theta_dd(V)`：對每列資料以 FFT 計算 θ 二階導數，實現傅里葉譜法高精度離散。
   - `radial_fd(V,r)`：先在半格點處計算 $r\,\partial_r u$，再以中心差分離散 $\frac{1}{r}\partial_r(r\,\partial_r u)$，獲得徑向二階導數。
   - `F_rhs(V,r)`：組合上述兩者，返回右端 $F(V)$，作為時間積分的驅動項。

3. **時間積分模組**

   - `lsrk45_step(V,Vp,dt,r)`：實現 Low-Storage RK(4,5) 單步更新，利用常數向量 A_j, B_j 及暫存陣列 rV, rV' 完成五階段累積更新，並在每階段後強制 Dirichlet 邊界為零。
   - `run_simulation(N,K,CFL)`：統籌整個模擬流程—初始化場、CFL 步長計算、主時間迴圈呼叫 `lsrk45_step`、與解析解比較誤差並回傳 ℓ_∞ 範數。

4. **後處理與結果分析**使用 `pandas` 將多組 (N, K) 下的誤差與收斂率整理為表格，並輸出為可讀格式以供報告使用。

使用套件與選用原因

- **NumPy**：提供高效能多維陣列與向量化運算，並快速計算 FFT，適合大規模網格資料處理。
- **SciPy (scipy.special)**：內建 Bessel 函數 J_v、Y_v 及其導數，用於本徵值問題與解析解生成。
- **pandas**：用於彙整多次模擬輸出結果，輕鬆計算並顯示收斂率表格，方便後續分析與繪圖。

6 結論

本研究針對環形域波動方程採取混合傅里葉譜-有限差分空間離散與低存儲 Runge-Kutta 時間積分，系統地驗證了該方法在不同網格配置下的精度與穩定性。數值實驗結果顯示：傅里葉譜法在 θ 方向可達高階甚至指數收斂，徑向差分法呈現二階精度；LSRK45 時間積分在合理 CFL 範圍內實現四階收斂；整體方案兼具優秀的計算效率與邊界處理能力。結論認為，本方法有效平衡了精度與效能，適用於環形域波動模擬。未來可考慮非均勻網格、自適應時間步長、三維擴展或變係數等方向，以進一步提升方法的通用性與應用範圍。

代碼與 3D 模擬

github:https://github.com/Funtrollor/-